Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Факультет экономических наук

Образовательная программа «Экономика»

КУРСОВАЯ РАБОТА

Стохастические макроэкономические модели

Выполнил

Студент группы №БЭК151

Варданян Гарик Артакович

Научный руководитель

Доцент,
Пильник
Николай Петрович

Москва 2018

Оглавление

Введение

Динамические стохастические макроэкономические модели являются двигателем современной макроэкономики. Главной целью этих моделей является объяснение разных экономических явлений, например – экономический рост, деловые циклы, эффекты экономической политики, с помощью эконометрических моделей, которые базируются на теории общего равновесия и принципах микроэкономики. В рамках данных обоснований, динамика экономической системы, является результатом оптимизационной деятельности экономических агентов.

Простые версии модели Солоу, модели Рамсея или модели перекрывающихся поколений можно решать на бумаге с помощью карандаша. Но в тот момент, когда исследователь начинает задавать вопросы о том, как изменения в политике реально отразятся на экономике, метод бумаги и карандаша дает сбой.

Успехи в спецификации, оценке DSGE моделей и анализе экономической политики привели к большому спросу на данный вид анализа со стороны центральных банков и других финансовых институтов, как ведущих, так и развивающихся экономик. Модели, которые разрабатываются центральными банками, являются, очень детализированными и соответственно, имеют большую размерность. Так как из-за большой размерности очень сложно оценить эти модели на эмпирических данных, центральные банки калибруют их основываясь на оценках из академической литературы. Таким образом, DSGE-модели объединяют в себе математическое моделирование и анализ экономики с целью количественной оценки политики государства. Выведенные на основе экономической теории - взаимосвязи, которые имеют микроэкономическое обоснование позволяют проецировать на экономические показатели любые регулирующие меры государственного управления, исследовать чувствительность ключевых экономических показателей к разным сценариям экономики.

В первой части данной работы рассматривается простая динамическая модель без случайных переменных с двумя агентами – домохозяйством и производителем. Оба агента будут максимизировать свое благосостояние при некоторых ограничениях. Обоим агентам известно состояние экономики, то есть, какие значения имеют разные параметры модели. Используя эти значения, они максимизируют индивидуальную функцию полезности и получают оптимальные траектории для выпуска, потребления, прибыли и расчетного счета. Далее, в данной работе мы рисуем эти траектории и смотрим как они меняются при изменении начальных параметров.

Во второй части работы мы рассмотрим модификацию модели из первой части, в которой, один из параметров будет меняется случайно во времени, и агенты будут знать об этом. Агенты так же будут знать интервал возможных значений для данного параметра, и так как в основе всех DSGE моделей лежит гипотеза рациональных ожиданий, то агенты для неизвестных параметров будут формировать свои ожидания оптимальным образом. После, в какой-то момент времени, все узнают значение неизвестного параметра и будут реагировать соответствующим образом. Для того, чтобы получить какие-то, возможные значения, принимают переменные нашей модели, мы сделаем 10000 симуляций и построим 90% доверительный интервал. Таким образом наша модель покажет, как реагируют агенты на неопределенность и шок в экономике.

1. Модель без случайных переменных.

В данной модели существует два агента – потребитель и производитель, которые максимизируют свою полезность, при заданных ограничениях. Условиями равновесия в модели являются:

$$\begin{cases} \pi^p(t) = \pi^*(t) \\ N^h(t) + N^p(t) = 0 \\ Y(t) = C(t) + b \cdot \dfrac{dY(t)}{dt} \end{cases}$$

Нам известны значения: $Y(0), N^h(0), \delta_h, \beta_h, \delta_p, \beta_p, b, a, T$.

Первое условие означает, что домохозяйства получают всю прибыль фирмы, второе – производители и домохозяйства могут заимствовать деньги только у друг друга, а третье условие означает, что выпуск равен потреблению и инвестициям.

Начнем с задачи потребителя.

$$\begin{cases} \int_0^T U^h\big(C(t)\big) \cdot e^{-\delta_h t}\, dt \to max_{N(\cdot),C(\cdot)} (1) \\ \frac{dN^h(t)}{dt} = -p(t) \cdot C(t) + \pi^*(t)\ (2) \\ N^h(t) + N^p(t) = 0\ \ (3) \\ N^h(T) \geq 0\ \ (4) \end{cases}$$

В данной задаче U^h- функция полезности потребителя, который является CRRA, т.е. $U^h\big(C(t)\big) = \frac{C(t)^{1-\beta_h}}{1-\beta_h}$, где β_hпоказывает склонность потребителя к риску, δ_h параметр дисконтирования для потребителя. $C(t)$ - потребление, $N^h(t)$ - расчетный счет потребителя, $\pi^*(t)$-прибыль который потребитель получает от фирм, $p(t)$-уровень цен. Заметим, что из ограничения (2) следует, что потребитель тратит деньги только на потребление и что в данной модели нету сбережений. Из ограничения (3) следует, что в любой момент времени потребитель может занимать деньги от фирмы или отдавать в долг фирме, но в самый последний момент у потребителя не должно быть долга (4) (No-Ponzi Game Condition).

Решение задачи потребителя

$L = \int_0^T \left\{U^h\big(C(t)\big) \cdot e^{-\delta_h t} + \xi(t) \cdot \left(\pi^*(t) - p(t) \cdot C(t) - \frac{dN^h(t)}{dt}\right)\right\} dt + \Phi \cdot N^h(T) \to max_{N(\cdot),C(\cdot)}$ Используя данное соотношение для дифференцируемых функций:

$$\int_0^T \left\{\xi(t) \cdot \frac{dN^h(t)}{dt}\right\} dt = -\,\xi(T) \cdot N^h(T) + \xi(0) \cdot N^h(0) + \int_0^T \left\{N^h(t) \cdot \frac{d\xi(t)}{dt}\right\} dt$$

Получаем:

$$\mathrm{L} = \int_0^T \left\{\frac{C(t)^{1-\beta_h}}{1-\beta_h} \cdot e^{-\delta_h t} + \xi(t) \cdot \big(\pi^*(t) - p(t) \cdot C(t)\big) + \frac{d\xi(t)}{dt} \cdot N^h(t)\right\} dt - \xi(T) \cdot N^h(\mathrm{T}) + \xi(0) \cdot N^h(0) + \Phi \cdot N^h(T)\ \to max_{N(\cdot),C(\cdot)}$$

Условие первого порядка данной задачи:

$dC(t)$: $L_c = C(t)^{-\beta_h} \cdot e^{-\delta_h t} - \xi(t) \cdot p(t) = 0$ (5)

$dN^h(t)$: $L_{N^h} = \frac{d\xi(t)}{dt} = 0$(6)

$dN^h(T)$: $L_{N^h(T)} = \Phi - \xi(T) = 0$(7)

Из условия (6) следует, что $\xi(t) = const = C_h$, а из условия (5) соответственно получаем: $C(t) = \left[C_h \cdot p(t) \cdot e^{\delta_h t}\right]^{\frac{-1}{\beta_h}}$ далее решим задачу производителя, чтобы найти равновесные траектории других параметров модели.

Задача производителя:

$$\begin{cases} \int_0^T U^p\left(\frac{\pi^p(t)}{p(t)}\right) \cdot e^{-\delta_p t}\, dt \to max_{N(\cdot),Y(\cdot),\pi(\cdot)} \ (8) \\ \frac{dN^p(t)}{dt} = p(t) \cdot Y(t) - \pi^p(t) - p(t) \cdot b \cdot \frac{dY(t)}{dt} \ (9) \\ N^p(T) + a \cdot Y(T) \geq 0 \\ N^h(t) + N^p(t) = 0 \end{cases}$$

Где $U^p(t) = \frac{\left(\frac{\pi^p(t)}{p(t)}\right)^{1-\beta_p}}{1-\beta_p}$, функция полезности производителя, β_p склонность к риску. δ_p фактор дисконтирования производителя. $N^p(t)$ расчетный счет производителя, $\pi^p(t)$ прибыль фирмы. В ограничении (9): $p(t) \cdot Y(t)$ - продажи, $p(t) \cdot b \cdot \frac{dY(t)}{dt}$ - инвестиции в капитал, так как по условию задачи $Y(t) = \frac{1}{b} \cdot K(t)$, $\frac{dK(t)}{dt} = \mathcal{J}(t)$, а $p(t) \cdot \mathcal{J}(t)$ это инвестиции.

Решение задачи производителя:

$$L = \int_0^T \left[\frac{\left(\frac{\pi^p(t)}{p(t)}\right)^{1-\beta_p}}{1-\beta_p} \cdot e^{-\delta_p t} + \gamma(t)\left(p(t) \cdot Y(t) - p(t) \cdot b \cdot \frac{dY(t)}{dt} - \pi^p(t) - \frac{dN^p(t)}{dt}\right)\right] dt +$$

$$+ \alpha(T)[N^p(T) + a \cdot Y(T)] \to max_{N(\cdot),Y(\cdot),\pi(\cdot)}$$

Используя данное соотношение для дифференцируемых функций:

$$\int_0^T \left[b \cdot \gamma(t) \cdot p(t) \cdot \frac{dY(t)}{dt}\right] dt = b \cdot [-\gamma(T) \cdot p(T) \cdot Y(T) + \gamma(0) \cdot p(0) \cdot Y(0)] +$$

$$+b \cdot \int_0^T \left[Y(t) \cdot p(t) \cdot \frac{d\gamma(t)}{dt} + \frac{dp(t)}{dt} \cdot \gamma(t) \cdot Y(t)\right] dt$$

Получаем:

$$L = \int_0^T \left[\frac{\left(\frac{\pi^p(t)}{p(t)}\right)^{1-\beta_p}}{1-\beta_p} \cdot e^{-\delta_p t} + \gamma(t) \cdot \left(p(t) \cdot Y(t) + b \cdot \frac{dP(t)}{dt} \cdot Y(t) - \pi^p(t)\right) + \frac{d\gamma(t)}{dt} \cdot N^p(t) +\right.$$

$+\frac{d\gamma(t)}{dt}\cdot p(t)\cdot Y(t)\cdot b\Big]dt+\alpha(T)[N^p(T)\ +a\cdot Y(T)]-\gamma(T)\cdot N^p(T)+\gamma(0)\cdot N^p(0)-b\cdot$

$\gamma(T)\cdot p(T)\cdot Y(T)+b\cdot\gamma(0)\cdot p(0)\cdot Y(0)$

Условие первого порядка:

$$d\pi^p(t): L_{\pi^p(t)}=\frac{\pi^p(t)^{-\beta_p}}{p(t)^{1-\beta_p}}\cdot e^{-\delta_p t}-\gamma(t)=0\ (10)$$

$$dN^p(t): L_{N^p(t)}=\ \frac{d\gamma(t)}{dt}=0\ (11)$$

$$dY(t): L_{Y(t)}=\gamma(t)\cdot p(t)+b\cdot\gamma(t)\cdot\frac{dP(t)}{dt}+\ \frac{d\gamma(t)}{dt}\cdot p(t)\cdot b=0\ (12)$$

$$dN^p(T): L_{N^p(T)}=\alpha(T)-\gamma(T)=0\ (13)$$

$$dY(T): L_{Y(T)}=a\cdot\alpha(T)-b\cdot\gamma(T)\cdot P(T)=0\ (14)$$

Из (11) и (12) следует:

$p(t)+b\cdot\frac{dp(t)}{dt}=0$, откуда следует, что $p(t)=C_1\cdot\ e^{\frac{-t}{b}}$.

Из (13) и (14) следует:

$p(T)=\frac{a}{b}$ и соответственно $\boldsymbol{p(0)=C_1=\frac{a}{b}\cdot\ e^{\frac{T}{b}}}$, а $\boldsymbol{p(t)=\ p(0)\cdot e^{\frac{-t}{b}}}$

Заметим, что параметр b определяет степень инфляции в модели.

Уравнение $C(t)$ из задачи потребителя получает вид:

$\boldsymbol{C(t)=C(0)\cdot\left[e^{\frac{-t}{b}+\delta_h\cdot t}\right]^{\frac{-1}{\beta_h}}}$, в данной формуле $C(0)=\ [\ \xi(0)\cdot p(0)]^{\frac{-1}{\beta_h}}$

Из условия равновесия мы имеем:

$$Y(t)\ =\ C(0))\cdot\left[e^{\frac{-t}{b}+\delta_h\cdot t}\right]^{\frac{-1}{\beta_h}}+b\cdot\frac{dY(t)}{dt}$$

Решение общего уравнения:

$$Y(t)-b\cdot\frac{dY(t)}{dt}=0\rightarrow Y(t)_{\text{общее}}=C_2(t)\cdot e^{\frac{t}{b}}$$

Решение частного уравнения:

$$\frac{dC_2(t)}{dt}\cdot e^{\frac{t}{b}}\cdot b=-C(0)\cdot e^{t\cdot\left(\frac{1-b\delta_h}{b\beta_h}\right)}$$

$$C_2(t)=-\int_0^t C(0)\cdot e^{x\cdot\left(\frac{1-b\delta_h-\beta_h}{b\beta_h}\right)}\cdot\frac{1}{b}dx$$

$$C_2(t)=\ -C(0)\cdot\frac{\beta_h}{1-b\delta_h-\beta_h}\cdot\left[e^{t\cdot\left(\frac{1-b\delta_h-\beta_h}{b\beta_h}\right)}\right]+C_3$$

Получается:

$$Y(t) = \left[-C(0)\cdot\frac{\beta_h}{1-b\delta_h-\beta_h}\cdot\left[e^{t\cdot\left(\frac{1-b\delta_h-\beta_h}{b\beta_h}\right)}\right]+C_3\right]e^{\frac{t}{b}}$$

$Y(0) = -C(0)\cdot\frac{\beta_h}{1-b\delta_h-\beta_h}+C_3$ отсюда находим C_3 и соответственно $Y(t)$.

$$\boldsymbol{Y(t) = Y(0)\cdot e^{\frac{t}{b}} + \frac{\beta_h\cdot C(0)\cdot e^{\frac{t}{b}}}{b\delta_h+\beta_h-1}\cdot\left\{e^{t\cdot\left(\frac{1-b\delta_h-\beta_h}{b\beta_h}\right)}-1\right\}}$$

Так как $\xi(t) = \Phi = \frac{C(0)^{-\beta_h}}{p(0)} > 0$ (7) → из терминального условия (4) домохозяйства следует, что $N^h(T) = 0 = N^p(T)$. **(*)**

Из условия (11) и (12) следует, что $\gamma(t) = const > 0$, а из условия (13), что $\alpha(T) = \gamma(T) > > 0$. Так как $\alpha(T) > 0$ из терминального ограничения производителя следует: $N^p(T) + a\cdot Y(T) = 0$, откуда получаем, что $Y(T) = 0$ $(a \neq 0)$.

Из условия $Y(T) = 0$ находим значение для $C(0)$.

$$\boldsymbol{C(0) = \frac{\big(-Y(0)\big)\cdot(b\delta_h+\beta_h-1)}{\beta_h\cdot\left(e^{T\cdot\left(\frac{1-b\delta_h-\beta_h}{b\beta_h}\right)}-1\right)}}$$

Используя (10) находим выражение для $\pi^p(t)$:

$\boldsymbol{\pi^p(t) = \pi^p(0)\cdot\left[e^{\delta_p t}\cdot e^{\frac{-t(1-\beta_p)}{b}}\right]^{\frac{-1}{\beta_p}}}$, так как $C(t) = Y(t) - b\,\frac{dY(t)}{dt}$, то уравнение (9) получает вид:

$$\frac{dN^p(t)}{dt} = p(t)\cdot C(t) - \pi^p(t) = p(0)\cdot C(0)\cdot e^{\frac{-t}{b}}\cdot e^{t\cdot\left(\frac{1-b\delta_h}{b\beta_h}\right)} - \pi^p(0)\cdot\left[e^{\delta_p t}\cdot e^{\frac{-t(1-\beta_p)}{b}}\right]^{\frac{-1}{\beta_p}}$$

Отсюда получаем:

$\boldsymbol{N^p(t) = \frac{p(0)\cdot C(0)\cdot e^{t\cdot\left(\frac{1-b\delta_h-\beta_h}{b\beta_h}\right)}\cdot b\beta_h}{1-b\delta_h-\beta_h} - \pi^p(0)\cdot e^{t\cdot\left(\frac{1-\beta_p-\delta_p b}{\beta_p b}\right)}\cdot\frac{\beta_p b}{1-\beta_p-\delta_p b} + C_4}$, где так как нам известно $N^h(0)$ и знаем, что $N^h(0) = -N^p(0)$, находим C_4:

$$\boldsymbol{C_4 = N^p(0) - p(0)\cdot C(0)\cdot\frac{b\beta_h}{1-b\delta_h-\beta_h} + \pi^p(0)\cdot\frac{\beta_p b}{1-\beta_p-\delta_p b}}$$

Из (*) нам известно, что $N^p(T) = 0$, используя это найдем $\pi^p(0)$:

$$\boldsymbol{\pi^p(0) = \frac{\beta_p+\delta_p b-1}{\beta_p b}\cdot\left[\frac{N^p(0)+\frac{p(0)\cdot C(0)\cdot b\beta_h}{1-b\delta_h-\beta_h}\left(e^{T\cdot\left(\frac{1-b\delta_h-\beta_h}{b\beta_h}\right)}-1\right)}{1-e^{T\cdot\left(\frac{1-\beta_p-\delta_p b}{\beta_p b}\right)}}\right]}$$

Зная равновесные решения всех переменных модели, нарисуем траектории этих переменных, и посмотрим как начальные условия влияют на эти траектории.

2. Равновесные траектории для модели без случайных переменных.

Для первых графиков возьмем стандартные параметры:

$Y(0) = 1, N^h(0) = 1, \beta_h = 0.3, \delta_h = 0.4, \beta_p = 0.5, \delta_p = 0.3, a = 0.2, b = 0.3, T = 1.$

Для этих параметров получили такие графики:

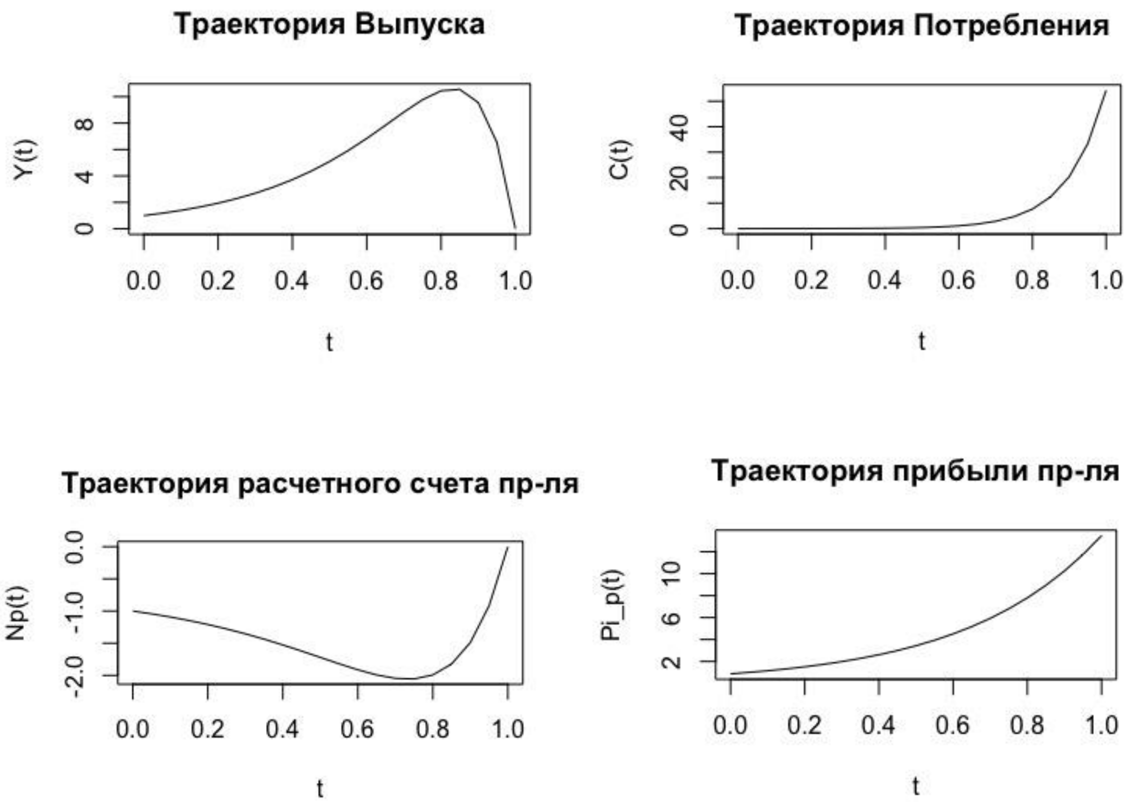
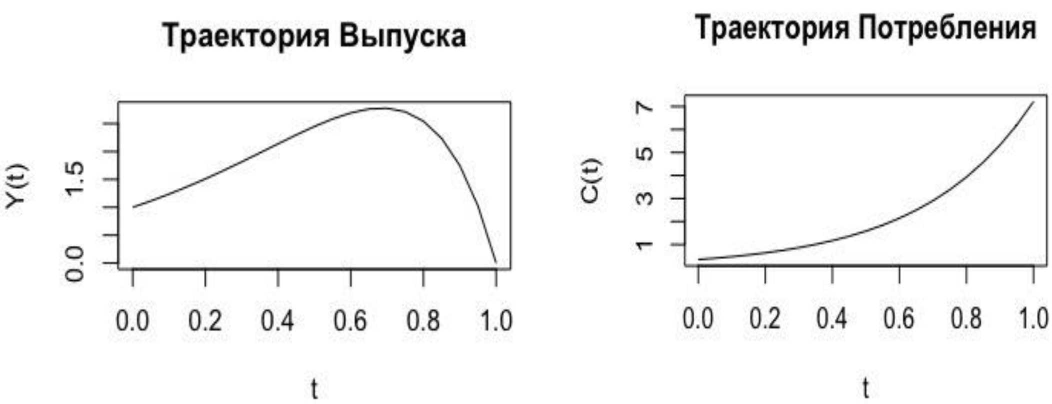


Рис 1. Равновесные траектории для стандартных параметров

Если при тех же параметрах увеличить β_h и β_p до 1, то получим такие графики:



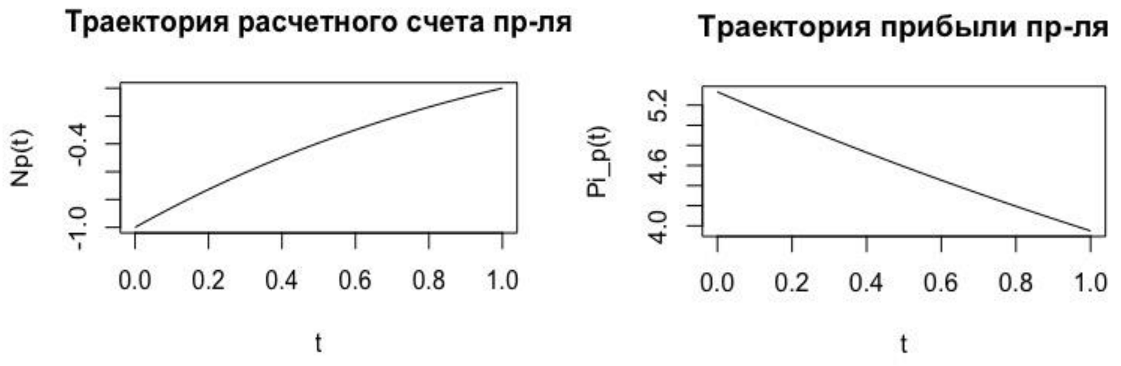


Рис 2. Равновесные траектории при изменении β_h и β_p

Как видим, по сравнению с первым случаем, графики не очень сильно поменялись. Домохозяйства стали меньше потреблять, а фирмы меньше производить, так как увеличился уровень рискофобии обоих агентов.

Если, при тех же параметрах, увеличить коэффициент b в 3 раза и приравнять к 0.9, получим такие графики:

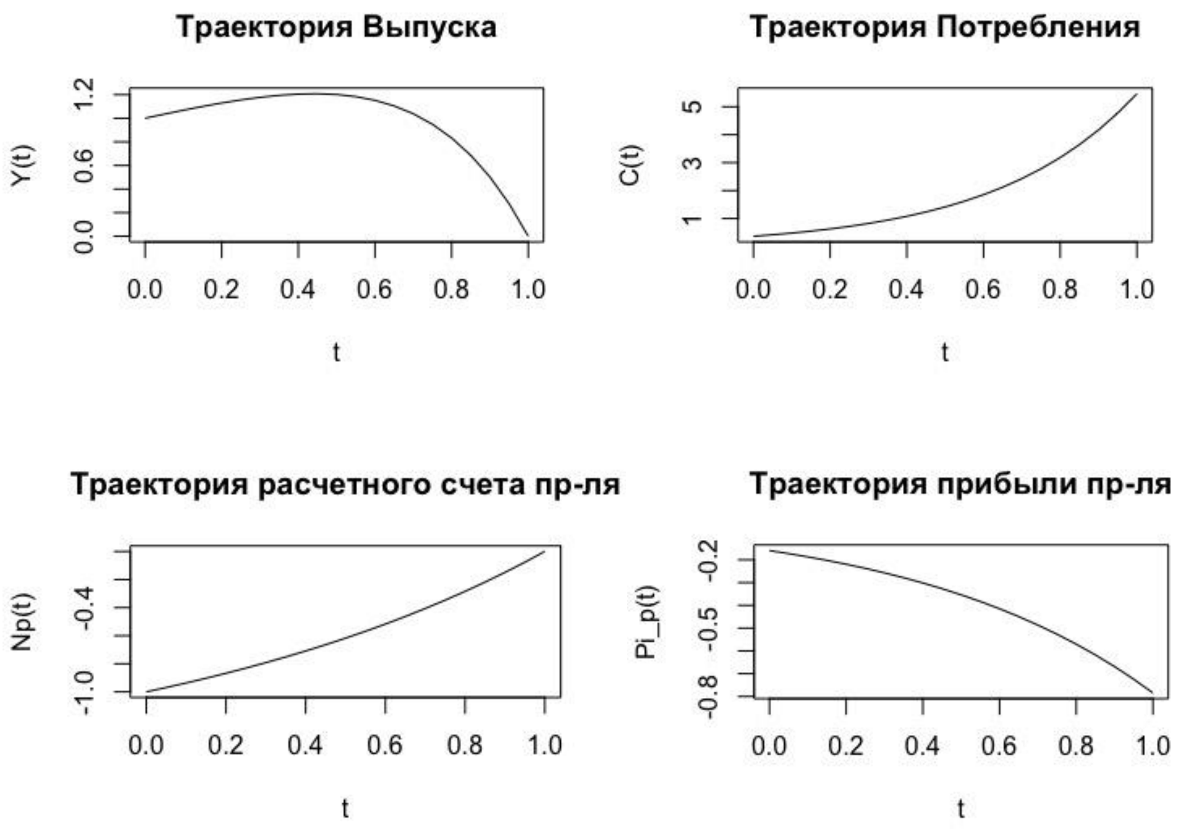


Рис 3. Равновесные траектории при увеличении b

От изменения b траектории сильно меняются, траектория цен напрямую зависит от b, а от цен напрямую зависят и потребление, и выпуск. Так как все переменные модели очень сильно зависят от b, то далее посмотрим модификацию данной модели, в которой b на каком-то временном отрезке неизвестна и домохозяйства знают только как она распределена.

3. Модель с случайным параметром.

Вторая модель, которую мы рассмотрим является модификацией первой модели и отличается только тем, что параметр b является неизвестным после момента t_1. От нулевого момента до момента t_1 , домохозяйства знают значение b и знают, что в момент t_1- b получит новое значение, из известного всем интервала. До момента t_1 в качестве будущего b (значение которое будет после t_1) домохозяйства берут математическое ожидание от распределения. Найдем равновесные траектории параметров в данной модели.

Задача домохозяйства не поменяется, так как в нем нету зависимости от b, а задача производителя поменяется, следующим образом, вместо b будем писать $b(t)$, так как b меняется с течением времени.

1) До момента t_1 функция $b(t)$ для агентов модели имеет такой вид:

$b(t) = \begin{cases} b_0; t \leq t_1 \\ E(b); t \geq t_1 \end{cases}$, где $b \sim U[\underline{b}, \overline{b}]$(15)

2) В момент t_1все агенты знают истинное значение $b \to b(t) = \hat{b}$, и модель аналогична модели без случайных переменных.

Найдем равновесные траектории для 1 части задачи. Задача производителя получит такой вид:

$$\begin{cases} \int_0^T U^p\left(\frac{\pi^p(t)}{p(t)}\right) \cdot e^{-\delta_p t}\, dt \to max_{N(\cdot),Y(\cdot),\pi(\cdot)} \\ \frac{dN^p(t)}{dt} = p(t) \cdot Y(t) - \pi^p(t) - p(t) \cdot b(t) \cdot \frac{dY(t)}{dt} \\ N^p(T) + a \cdot Y(T) \geq 0 \\ N^h(t) + N^p(t) = 0 \end{cases}$$

где $b(t)$ соответствует (15) формуле.

Решение задачи производителя

$$L = \int_0^T \left[\frac{\left(\frac{\pi^p(t)}{p(t)}\right)^{1-\beta_p}}{1-\beta_p} \cdot e^{-\delta_p t} + \gamma(t) \left(p(t) \cdot Y(t) - p(t) \cdot b(t) \cdot \frac{dY(t)}{dt} - \pi^p(t) - \frac{dN^p(t)}{dt} \right) \right] +$$

$$+ \alpha(T)[N^p(T) + a \cdot Y(T)] \to max_{N(\cdot),Y(\cdot),\pi(\cdot)}$$

Делая преобразования аналогичные тому, что мы делали в первой модели получаем:

$$L = \int_0^T \left[\frac{\left(\frac{\pi^p(t)}{p(t)}\right)^{1-\beta_p}}{1-\beta_p} \cdot e^{-\delta_p t} + \gamma(t) \cdot \left(p(t) \cdot Y(t) + b(t) \cdot \frac{dP(t)}{dt} \cdot Y(t) + p(t) \cdot Y(t) \cdot \frac{db(t)}{dt} - \right.\right.$$

$$\pi^p(t)\Big) + \frac{d\gamma(t)}{dt}\cdot N^p(t) + \frac{d\gamma(t)}{dt}\cdot p(t)\cdot Y(t)\cdot b(t)\Bigg] dt + \alpha(T)[N^p(T) \ + a\cdot Y(T)] - \gamma(T)\cdot$$

$$N^p(T) + \gamma(0)\cdot N^p(0) - b(T)\cdot\gamma(T)\cdot p(T)\cdot Y(T) + b(0)\cdot\gamma(0)\cdot p(0)\cdot Y(0)$$

Условие первого порядка:

$d\pi^p(t)$: $L_{\pi^p(t)} = \dfrac{\pi^p(t)^{-\beta_p}}{p(t)^{1-\beta_p}}\cdot e^{-\delta_p t} - \gamma(t) = 0$ (10) (аналогично первой модели)

$dN^p(t)$: $L_{N^p(t)} = \dfrac{d\gamma(t)}{dt} = 0$ (11) $\rightarrow \gamma(t) = const$

$dY(t)$: $L_{Y(t)} = \gamma(t)\cdot p(t) + b(t)\cdot\gamma(t)\cdot\frac{dP(t)}{dt} + p(t)\cdot\gamma(t)\cdot\frac{db(t)}{dt} + \frac{d\gamma(t)}{dt}\cdot p(t)\cdot b(t) = 0$ (16)

$dN^p(T)$: $L_{N^p(T)} = \alpha(T) - \gamma(T) = 0$ (13)

$dY(T)$: $L_{Y(T)} = a\cdot\alpha(T) - b(T)\cdot\gamma(T)\cdot P(T) = 0$ (14)

Используя (16) и (11) получаем:

$p(t) + b(t)\cdot\frac{dP(t)}{dt} + p(t)\cdot\frac{db(t)}{dt} = 0$, где $\frac{db(t)}{dt} = 0$, для всех $t \neq t_1$

Получаем: $\frac{p(t)}{\frac{dP(t)}{dt}} = -b(t)$, откуда $p(t) = p(0)\cdot e^{-\int_0^t \frac{1}{b(x)}dx}$

Используя (13) и (14) получаем, что $p(T) = \frac{a}{b(T)} = \frac{a}{E(b)}$, зная это получаем, что

$$p(0) = \frac{a}{E(b)}\cdot e^{\int_0^T \frac{1}{b(x)}dx} = \frac{a}{E(b)}\cdot e^{\int_0^{t_1}\frac{1}{b_0}dx + \int_{t_1}^T \frac{1}{E(b)}dx} \rightarrow \boldsymbol{p(t) = p(0)\cdot e^{-\int_0^t \frac{1}{b(x)}dx}}$$

Так как задача домохозяйства не меняется, то из (5) получаем выражение для $C(t)$:

$$\boldsymbol{C(t) = C(0)\cdot\left[e^{-\int_0^t \frac{1}{b(x)}dx + \delta_h t}\right]^{\frac{-1}{\beta_h}}}$$

Из условия равновесия $Y(t) = C(t) + b(t)\cdot\frac{dY(t)}{dt}$ найдем траекторию $Y(t)$

Решение однородного: $Y(t)_{\text{общее}} = C_1(t)\cdot e^{\int_0^t \frac{1}{b(x)}dx}$

Решение частного:

$$b(t)\cdot\frac{dC_1(t)}{dt}\cdot e^{\int_0^t \frac{1}{b(x)}dx} + \frac{1}{b(t)}\cdot C_1(t)\cdot e^{\int_0^t \frac{1}{b(x)}dx}\cdot\ b(t) = C_1(t)\cdot e^{\int_0^t \frac{1}{b(x)}dx} - C(0)\cdot$$

$$\cdot\left[e^{-\int_0^t \frac{1}{b(x)}dx + \delta_h t}\right]^{\frac{-1}{\beta_h}}$$

$C_1(t) = -\int_0^t \left\{\frac{C(0)}{b(x)}\cdot\left[e^{\frac{1-\beta_h}{\beta_h}\cdot\int_0^x \frac{1}{b(u)}du - \frac{\delta_h x}{\beta_h}}\right]\right\} dx + C_2$, получили значение $Y(t)$, а C_2 получили из условия, что $Y(0) = C_2$

$$\boldsymbol{Y(t) = Y(0) \cdot e^{\int_0^t \frac{1}{b(x)}dx} - \int_0^t \left\{ \frac{C(0)}{b(x)} \cdot \left[e^{\frac{1-\beta_h}{\beta_h} \cdot \int_0^x \frac{1}{b(u)}du - \frac{\delta_h x}{\beta_h}} \right] \right\} dx \cdot e^{\int_0^t \frac{1}{b(x)}dx}}$$

Так как задание домохозяйства аналогично первой модели, то (*) имеет место и $Y(T) = 0$, отсюда найдем $C(0)$.

$$0 = Y(0) \cdot e^{\int_0^{t_1} \frac{1}{b_0}dx + \int_{t_1}^T \frac{1}{E(b)}dx} - \int_0^{t_1} \left\{ \frac{C(0)}{b_0} \cdot \left[e^{\frac{1-\beta_h}{\beta_h} \cdot \frac{x}{b_0} - \frac{\delta_h x}{\beta_h}} \right] \right\} dx \cdot e^{\int_0^{t_1} \frac{1}{b_0}dx + \int_{t_1}^T \frac{1}{E(b)}dx} -$$

$$- \int_{t_1}^T \left\{ \frac{C(0)}{E(b)} \cdot \left[e^{\frac{(1-\beta_h)}{\beta_h} \cdot \frac{x}{E(b)} - \frac{\delta_h x}{\beta_h}} \right] \right\} dx \cdot e^{\int_0^{t_1} \frac{1}{b_0}dx + \int_{t_1}^T \frac{1}{E(b)}dx} = Y(0) \cdot e^{\frac{t_1 \cdot (E(b) - b_0) + T \cdot b_0}{E(b) \cdot b_0}} - \frac{\beta_h \cdot C(0)}{1 - \beta_h - \delta_h \cdot b_0} \cdot$$

$$\left(e^{\frac{1-\beta_h}{\beta_h} \cdot \frac{t_1}{b_0} - \frac{\delta_h t_1}{\beta_h}} - 1 \right) \cdot e^{\frac{t_1 \cdot (E(b) - b_0) + T \cdot b_0}{E(b) \cdot b_0}} - \frac{\beta_h \cdot C(0)}{1 - \beta_h - \delta_h \cdot E(b)} \cdot \left(e^{\frac{1-\beta_h}{\beta_h} \cdot \frac{T}{E(b)} - \frac{\delta_h T}{\beta_h}} - e^{\frac{1-\beta_h}{\beta_h} \cdot \frac{t_1}{E(b)} - \frac{\delta_h t_1}{\beta_h}} \right) \cdot$$

$$\cdot e^{\frac{t_1 \cdot (E(b) - b_0) + T \cdot b_0}{E(b) \cdot b_0}}$$

Откуда $\boldsymbol{C(0) = \frac{Y(0)}{\frac{\beta_h}{1-\beta_h - \delta_h \cdot b_0} \cdot \left(e^{\frac{1-\beta_h}{\beta_h} \cdot \frac{t_1}{b_0} - \frac{\delta_h t_1}{\beta_h}} - 1 \right) + \frac{\beta_h}{1-\beta_h - \delta_h \cdot E(b)} \cdot \left(e^{\frac{1-\beta_h}{\beta_h} \cdot \frac{T}{E(b)} - \frac{\delta_h T}{\beta_h}} - e^{\frac{1-\beta_h}{\beta_h} \cdot \frac{t_1}{E(b)} - \frac{\delta_h t_1}{\beta_h}} \right)}}$

Условие (10) аналогично начальной модели, отсюда получаем:

$$\boldsymbol{\pi^p(t) = \pi^p(0) \cdot \left[e^{\delta_p t - \int_0^t \frac{1-\beta_p}{b(x)}dx} \right]^{\frac{-1}{\beta_p}}}$$

Из ограничения производителя $\frac{dN^p(t)}{dt} = p(t) \cdot C(t) - \pi^p(t)$ находим $N^p(t)$.

$$\frac{dN^p(t)}{dt} = p(0) \cdot C(0) \cdot e^{-\int_0^t \frac{1}{b(x)}dx} \cdot \left[e^{\delta_h t - \int_0^t \frac{1}{b(x)}dx} \right]^{\frac{-1}{\beta_h}} - \pi^p(0) \cdot \left[e^{\delta_p t - \int_0^t \frac{(1-\beta_p)}{b(x)}dx} \right]^{\frac{-1}{\beta_p}}$$

$$\boldsymbol{N^p(t) = \int_0^t \left\{ p(0) \cdot C(0) \cdot e^{-\int_0^x \frac{1}{b(u)}du} \cdot \left[e^{\delta_h x - \int_0^x \frac{1}{b(u)}du} \right]^{\frac{-1}{\beta_h}} - \pi^p(0) \left[e^{\delta_p x - \int_0^x \frac{(1-\beta_p)}{b(u)}du} \right]^{\frac{-1}{\beta_p}} \right\} dx +}$$

$$\boldsymbol{+ C_N}$$

C_N получаем из условия $\boldsymbol{N^p(0) = C_N}$, как уже отмечалось раньше, задача потребителя не меняется и соответственно из условии (*) следует, что $N^p(T) = N^h(T) = 0 \rightarrow$ найдем $\pi^p(0)$

$$N^p(T) = 0 = \int_0^{t_1} \left\{ p(0) \cdot C(0) \cdot e^{\frac{-x}{b_0}} \cdot \left[e^{\delta_h x - \frac{x}{b_0}} \right]^{\frac{-1}{\beta_h}} - \pi^p(0) \cdot \left[e^{\delta_p x - \int_0^x \frac{(1-\beta_p)}{b_0}du} \right]^{\frac{-1}{\beta_p}} \right\} dx +$$

$$+ \int_{t_1}^T \left\{ p(0) \cdot C(0) \cdot e^{\frac{-x}{E(b)}} \cdot \left[e^{\delta_h x - \frac{x}{E(b)}} \right]^{\frac{-1}{\beta_h}} - \pi^p(0) \cdot \left[e^{\delta_p x - \int_0^x \frac{(1-\beta_p)}{E(b)}du} \right]^{\frac{-1}{\beta_p}} \right\} dx + N^p(0) =$$

$$= \frac{p(0)\cdot C(0)\cdot b_0\cdot\beta_h}{(1-b_0\delta_h-\beta_h)}\cdot\left(e^{\frac{t_1\cdot(1-b_0\delta_h-\beta_h)}{b_0\beta_h}}-1\right)-\frac{\pi^p(0)\cdot b_0\cdot\beta_p}{(1-\beta_p-\delta_p b_0)}\cdot\left(e^{\frac{t_1\cdot(1-\beta_p-\delta_p b_0)}{b_0\beta_p}}-1\right)+$$

$$\frac{p(0)\cdot C(0)\cdot E(b)\cdot\beta_h}{(1-E(b)\delta_h-\beta_h)}\cdot\left(e^{\frac{T\cdot(1-E(b)\delta_h-\beta_h)}{E(b)\beta_h}}-e^{\frac{t_1\cdot(1-E(b)\delta_h-\beta_h)}{E(b)\beta_h}}\right)-\frac{\pi^p(0)\cdot E(b)\cdot\beta_p}{\left(1-\beta_p-\delta_p E(b)\right)}\cdot$$

$$\left(e^{\frac{T\cdot\left(1-\beta_p-\delta_p E(b)\right)}{E(b)\beta_p}}-e^{\frac{t_1\cdot\left(1-\beta_p-\delta_p E(b)\right)}{E(b)\beta_p}}\right)+N^p(0).$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\pi^p(0)} = \frac{N^p(0)+\frac{p(0)\cdot C(0)\cdot b_0\cdot\beta_h}{(1-b_0\delta_h-\beta_h)}\cdot\left(e^{\frac{t_1\cdot(1-b_0\delta_h-\beta_h)}{b_0\beta_h}}-1\right)+\frac{p(0)\cdot C(0)\cdot E(b)\cdot\beta_h}{(1-E(b)\delta_h-\beta_h)}\cdot\left(e^{\frac{T\cdot(1-E(b)\delta_h-\beta_h)}{E(b)\beta_h}}-e^{\frac{t_1\cdot(1-E(b)\delta_h-\beta_h)}{E(b)\beta_h}}\right)}{\frac{b_0\cdot\beta_p}{(1-\beta_p-\delta_p b_0)}\cdot\left(e^{\frac{t_1\cdot(1-\beta_p-\delta_p b_0)}{b_0\beta_p}}-1\right)+\frac{E(b)\cdot\beta_p}{\left(1-\beta_p-\delta_p E(b)\right)}\cdot\left(e^{\frac{T\cdot\left(1-\beta_p-\delta_p E(b)\right)}{E(b)\beta_p}}-e^{\frac{t_1\cdot\left(1-\beta_p-\delta_p E(b)\right)}{E(b)\beta_p}}\right)}$$

Для проверки правильности модифицированной модели, возьмем стандартные параметры из первой модели. Если для b взять интервал который состоит из одного значения, стандартного значения 0.3, то графики для второй модели должны быть идентичны графикам из рисунка 1.

Графики для второй модели при стандартных параметрах:

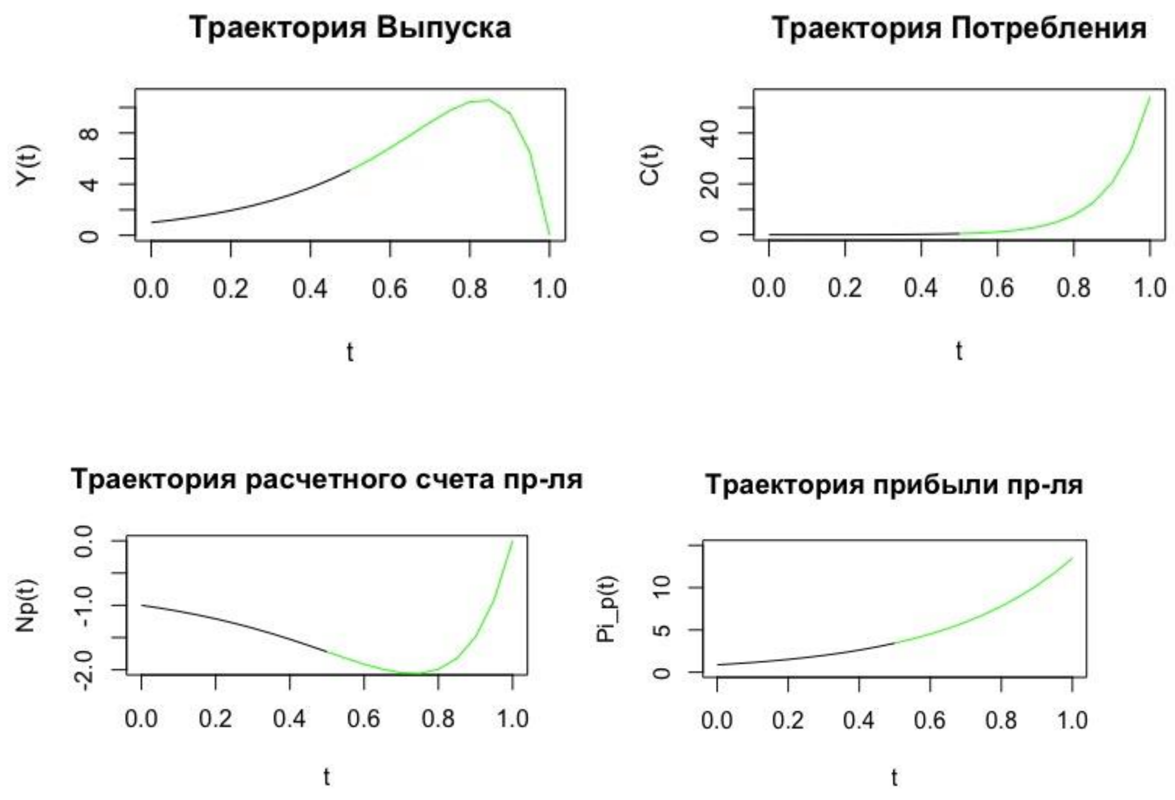


Рис 4. Равновесные траектории для стандартных параметров во второй модели

Как и ожидалось, новые графики, не отличаются от графиков на рисунке 1, и наша модель правильно решена. Далее, построим графики выпуска, потребления, прибыли и расчетного счета производителя, для случайных значений b. Для начала, посмотрим, какими будут графики для одной симуляции, а далее, сделаем 10000 симуляций, для построения доверительных интервалов.

4. Равновесные траектории для модели с случайным параметром.

Рассмотрим такие значения для всех нестохастических параметров: $Y(0) = 1, N^h(0) = 1, \beta_h = 0.3, \delta_h = 1.5, \beta_p = 0.5, \delta_p = 1.5, a = 0.2, T = 1.$

b будет зависеть от времени таким образом:

До момента t_1 в качестве b агенты будут брать функцию $b(t)$:

$$b(t) = \begin{cases} 0.3 & \text{для } t < t_1 \\ E(b), \text{для } t > t_1, \text{где } b \sim U[0.1,1] \end{cases}$$

В момент t_1 агенты узнают реальное значение b из интервала $[0.1,1]$, которое будет от момента t_1 до конца времени T. Для первого случая будем считать, что $t_1 = 0.5$.

Графики для одной симуляции:

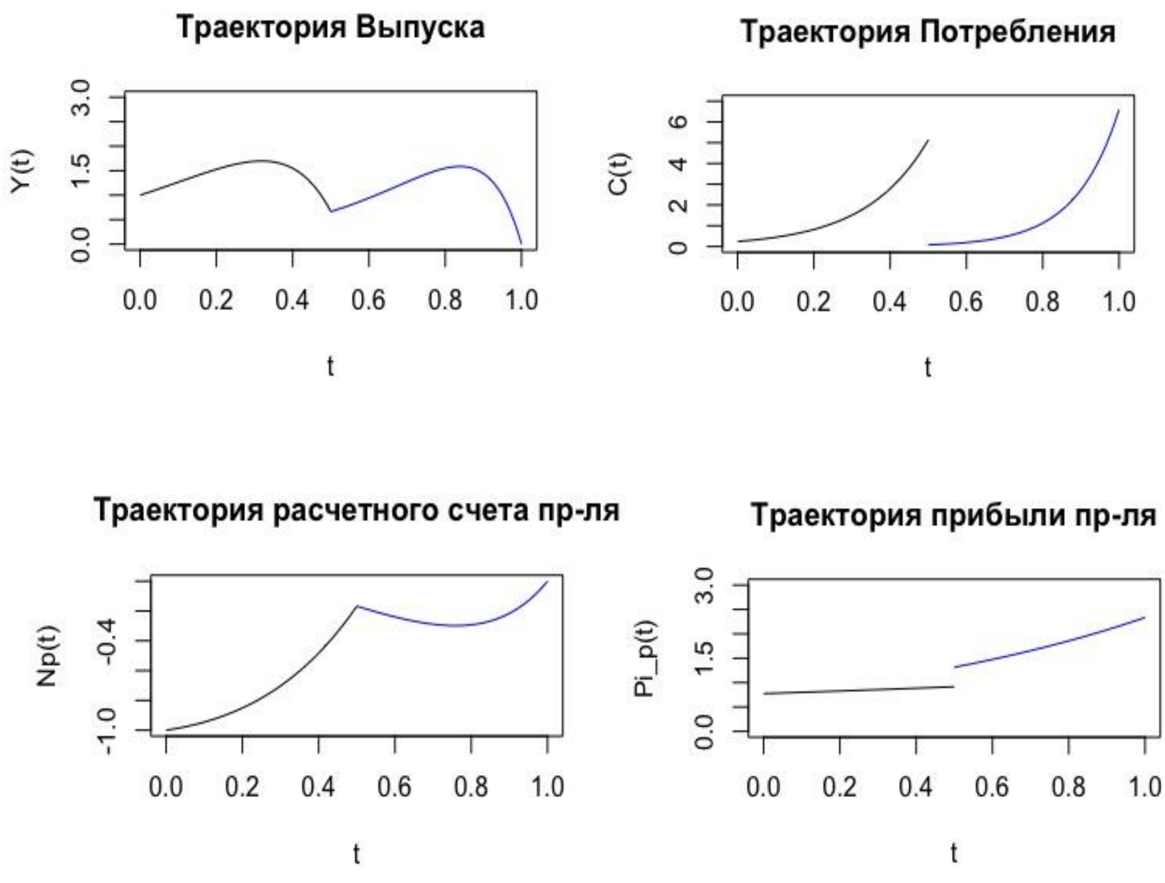


Рис 5. Равновесные траектории при шоках в параметре b

Как и ожидалось $C(t)$ и $\pi^p(t)$ меняются скачкообразно, так как являются переменными запаса, а $Y(t)$ и $N^p(t)$ не имеют скачков, так как являются переменными потока. На изменение b потребители, в момент t_1 могут поменять свое потребление, сразу потребив больше или меньше, но производители так делать не могут.

Посмотрим какими будут данные графики для 10000 симуляций. Построим на этих графиках 90% двухсторонний доверительный интервал для наглядности.

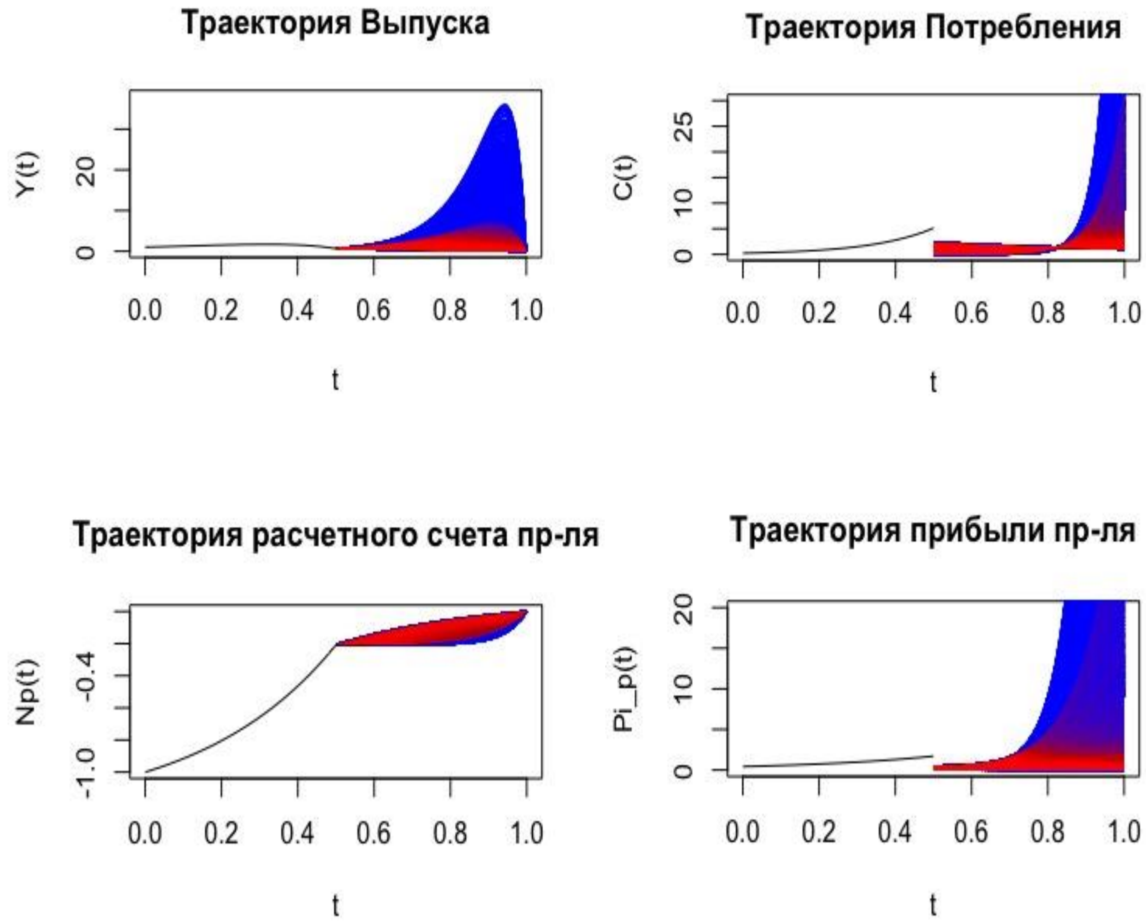


Рис 6. Равновесные траектории для 10000 симуляций с 90% доверительным интервалом

На графиках выше, красным цветом выделен 90% доверительный интервал для 10000 симуляций модели. Как видим, переменные выпуска и потребления сильно меняются для предельных значений b.

Посмотрим графики симуляций и для других интервалов b. Предположим, что:

$$b(t) = \begin{cases} 4, & \text{для } t < t_1 \\ E(b), & \text{для } t > t_1, \text{где } b \sim U[1,10] \end{cases},$$

построим 10000 симуляций для этих значений. Параметр b отрицательно влияет на инфляцию, соответственно, увеличение b снижает цены и прибыль фирмы. Параметры для этого случая были изменены таким образом, чтобы для фирм был нейтрализован этот эффект, с помощью начального состояния расчетного счета. Параметры симуляции:

$Y(0) = 10, N^h(0) = -4, \beta_h = 0.1, \delta_h = 0.1, \beta_p = 0.1, \delta_p = 0.1, a = 0.2, T = 1.$

Для данного случая переменные будут иметь такие траектории:

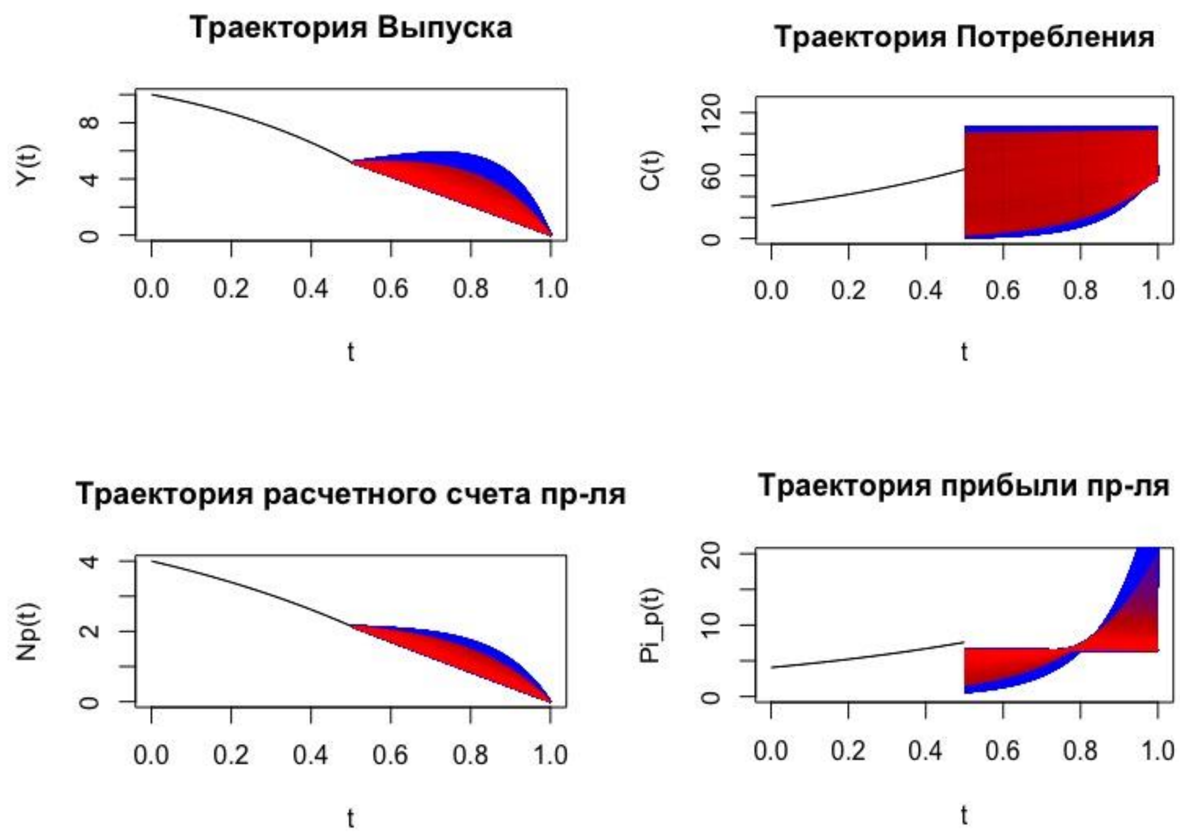


Рис 6. Равновесные траектории для 10000 симуляций с 90% доверительным интервалом для более неопределенного b

Красным цветом выделен 90% доверительный интервал для 10000 симуляций модели. Для данного случая, как видим, потребление имеет еще больший интервал значений, так как очень сильно зависит от цен, и соответственно, от параметра b.

Заключение

Как уже отмечалось, стохастические макроэкономические модели имеют микроэкономическое обоснование, и модели, которые мы рассмотрели в данной задаче так же имеют решение на микроуровне. Оптимальные траектории мы получаем от максимизации индивидуальной функции полезности обоих агентов.

В модели без случайных переменных, траектория выпуска показывает, что в начале производители выпускают все больше и больше, а при приближении конца им уже невыгодно выпускать, и в самом конце они уже больше не работают.

Модификация модели хорошо показывает, как потребители реагируют на разные шоки в ценах. В зависимости от нормы инфляции, потребление очень сильно меняется. Модели, которые рассматривались в данной работе, являются упрощенными, и просто показывают какая идея лежит в основе более сложных динамических стохастических моделей общего равновесия, которые используются в финансовых институтах. Можно сделать рассматриваемые модели еще лучше, сделав случайными и другие параметры, например – норму амортизации, ставку дисконтирования агентов, уровень рискофобии агентов и т. д.

Список Литературы

1. Understanding DSGE, Celso Jose Costa Junior
2. Dynamic General Equilibrium Modeling, Computational Methods and Applications, Burkhad Heer
3. Application of DSGE models to the case of the Serbian Economy
4. Оценивание динамических стохастических моделей общего равновесия, Анна Микушева