Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Iñaki Cornejo de la Mora — Gráficas y Juegos 2025-2

Tarea 2

1. Sea D una digráfica de orden n. Demuestre que si D no tiene ciclos dirigidos, entonces existe un orden total, $v_1, \dots, v_n$ de V_D, tal que siempre que (v_i, v_j) sea una flecha de D, se tiene que $i < j$.
2. Demuestre que si G tiene diámetro mayor que 3, entonces $\overline{G}$ tiene diámetro menor que 3.
3. Sea G una gráfica conexa. Demuestre que si G no es completa, entonces contiene a P_3 como subgráfica inducida.
4. Demuestre que cualesquiera dos trayectorias de longitud máxima en una gráfica conexa tienen un vértice en común.
5. Caracterice a las gráficas k-regulares para $k \in \{0, 1, 2\}$.
6. Demuestre que si $|E| \geq |V|$, entonces G contiene un ciclo.

Puntos extra

1. Sea G una gráfica. Demuestre que G es k-partita completa si y sólo si no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.
2. Demuestre que si G es una gráfica con $|V| \geq 4$ y $|E| > n^2/4$, entonces G contiene un ciclo impar.
3. Sea $d = (d_1, \dots, d_n)$ una sucesión no creciente de enteros no negativos. Sea $d' = (d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$.
   (a) Demuestre que d es gráfica si y sólo si d' es gráfica.
   (b) Usando el primer inciso, describa un algoritmo que acepte como entrada una sucesión no creciente de enteros no negativos d y devuelva una gráfica simple con sucesión de grados d, un certificado de que d no es gráfica.