UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tarea 2

PRESENTA

García Lopez Álvaro Jesús
314117423
Munive Ramírez Ibrahim
424106083

PROFESOR

César Hernández Cruz

ASIGNATURA

Gráficas y juegos

Ejercicio 1. Sea D una diagráfica de orden n. Demuestre que si D no tiene ciclos dirigidos, entonces existe un orden total, $v_1, \ldots, v_n$ de V_D, tal que siempre que (v_i, v_j) sea una flecha de D, se tiene que $i < j$.

Abordaremos este caso por inducción.

Demostración:

Base de inducción (n=1)

Si n = 1, la única digráfica posible es un vértice sin aristas. En este caso, el orden total es simplemente v_1, y la condición se cumple.

Hipótesis inductiva

Suponemos que la afirmación es cierta para cualquier digráfica de orden K. Esto quiere decir que para toda digráfica de K vértices, existe un orden total de los vértices en el que las flechas apuntan hacía adelante en secuencia.

Paso inductivo

Ahora consideramos una digráfica sin ciclos D de orden k+1. Dado que D no tiene ciclos dirigidos, necesariamente existe al menos un vértice v_1 sin predecesores (es decir, un vértice con grado de entrada 0), llamado vértice fuente. De lo contrario, se generaría un ciclo en algún punto de D.

Procedemos a eliminar este vértice v_1 y todas sus aristas incidentes, obteniendo una digráfica D'=D-$\{v_1\}$. D' tiene orden K y se mantiene sin tener ciclos. Utilizando la hipótesis de inducción, existe un ordenamiento $v_2, \ldots, v_k$ de los vértices de D' que cumple la propiedad.

El orden total $v_1, \ldots, v_k$ de los vértices de D cumple la condición: Si (v_i, v_j) es una flecha de D, entonces $i < j$. Si $i = 1$ entonces v_i es un vértice fuente. Si $i > 1$, entonces la flecha (v_i, v_j) está en D' y se sigue cumpliendo por la hipótesis de inducción.

$\blacksquare$

Ejercicio 2. Demuestre que si G tiene diámetro mayor a 3, entonces $\overline{G}$ tiene diámetro menor que 3.

Demostración:

Sea G una gráfica con diámetro mayor a 3, entonces existe un par de vértices u, v tal que la distancia entre ellos es mayor a 3. Esto implica que no existe un camino de longitud 2 entre u y v en G.

Por definición, $\overline{G}$ tiene los mismos vértices que G, y dos vértices son adyacentes en $\overline{G}$ si y solo si no son adyacentes en G.

Supongamos que $\overline{G}$ tiene diámetro 3 o mayor. Entonces existen dos vértices x, y en $\overline{G}$ tal que la distancia entre x y y es 3. Esto implica que x y y no son adyacentes en G.

Si x y y no son adyacentes en G, entonces existe un vértice w tal que x y w son adyacentes en G y w y y son adyacentes en G.

Por lo tanto, w es adyacente a x y y en $\overline{G}$, lo cual implica que la distancia entre x y y en $\overline{G}$ es 1, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $\overline{G}$ tiene diámetro menor que 3.

$\blacksquare$

Ejercicio 3. Sea G una gráfica conexa. Demuestre que si G no es completa, entonces contiene a P_3 como subgráfica inducida.

Demostración:

Sea G una gráfica conexa que no es completa, entonces existe un par de vértices u, v tal que no existe una arista entre ellos.Como la gráfica G es conexa, entonces existe un camino entre u y v tal que su longitud es mayor o igual a dos, pues los vértices u y v no son adyacentes. Entonces, el camino de longitud mínima dos consta de por lo menos tres vértices, es decir, u, v y un vértice w intermedio. Considernado el camino de longitud mínima $W = (u, w, v)$, se tiene que el conjunto de los vértices del camino W, que es un subconjunto de los vértices de G (es decir $V_W \subset V_G$), inducen una subgráfica de G, pues las aristas de W son las mismas aristas de G que conectan a los vértices de W. Por lo tanto, la gráfica G contiene a la trayectoria P_3 como subgráfica inducida.

$\blacksquare$

Ejercicio 4. Demuestre que para cualesquiera dos trayectorias de longitud máxima en una gráfica conexa tiene un vértice en común.

Demostración:

Supongamos que P y P' son dos trayectorias disjuntas de longitud máxima en G. Sea $p \in P$ y $p' \in P'$, entonces, al ser G conexa, existe un $pp'-$camino que los une. Sea q el vértice en común entre las trayectorias P y P', entonces, P y P' pueden ser extendidas a trayectorias más largas, lo cual es una contradicción, pues las trayectorias son de longitud máxima. Por lo tanto, P y P' no son trayectorias disjuntas, es decir, tienen un vértice en común.

$\blacksquare$

Ejercicio 5. Caracterice las gráficas k-regulares para $k \in \{0, 1, 2\}$.

Para $k = 0$:

Sea G una gráfica 0-regular, entonces para todo $v \in V_G$, se tiene que $deg(v) = 0$. Por lo tanto, G es una gráfica de n vértices y 0 aristas.

Para $k = 1$:

Sea G una gráfica 1-regular, entonces para todo $v \in V_G$, se tiene que $deg(v) = 1$. Por lo tanto, G es una gráfica de n vértices y n aristas.

Para $k = 2$:

Sea G una gráfica 2-regular, entonces para todo $v \in V_G$, se tiene que $deg(v) = 2$. Por lo tanto, G es una gráfica de n vértices y n aristas. Además, G es una gráfica conexa, pues para todo vértice $v \in V_G$, se tiene que $deg(v) \geq 1$. Por lo tanto, G es un ciclo.

Ejercicio 6. Demuestre que si $|E| \geq |V|$, entonces G contiene un ciclo.

Demostración por contradicción:

Supongamos que G es una gráfica sin ciclos y que $|E| \geq |V|$

Si G no tiene ciclos y es conexo, sabemos que el número máximo de aristas que puede tener es |V| - 1, ya que G tiene que ser un árbol, y un árbol con n vértices tiene exactamente n - 1 aristas.

Si G no es conexo (tiene varios componentes conexos), cada componente conexo sigue siendo un árbol y, por lo tanto, si hay K componentes, la cantidad total de aristas en G es como máximo

$|E| \leq |V| - K$

Como K $\geq$ 1, esto implica que $|E| \leq |V| - 1$**!**

Por hipótesis teníamos que $|E| \geq |V|$, pero acabamos de deducir que en una gráfica sin ciclos se cumple $|E| \leq |V| - 1$. Esto es una contradicción, porque $|E|$ no puede ser mayor o igual que $|V|$ y, al mismo tiempo, menor que $|V| - 1$.

Por lo anterior nuestra suposición inicial de que G no tiene ciclos es falsa. Por lo tanto, G **debe contener al menos un ciclo**

$\blacksquare$

Ejercicios extra

Ejercicio 1. Sea G una gráfica. Demuestre que G es $k-$partita si y solo si no contiene s K_{n+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que G es k-partita, es decir, que su conjunto de vértices se puede dividir en k conjuntos disjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_k$, tales que, dentro de cada conjunto, ningún par de vértices está conectado por una arista. Si G contuviera una subgráfica inducida isomorfa a K_{n+1}, existirían $n+1$ vértices que están mutuamente conectados. Al distribuir $n+1$ vértices en n conjuntos, es inevitable que, en al menos uno de estos conjuntos, se encuentren dos vértices (puesto que $n+1 > n$). Pero, dado que cada conjunto es independiente, esos dos vértices no pueden estar conectados, lo que contradice la existencia de un K_{n+1}. Por lo tanto, G no contiene una subgráfica inducida isomorfa a K_{n+1}.

$\Leftarrow$) Supongamos que G no contiene a K_{n+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.

Primero, demostremos que G no contiene a K_{n+1} como subgráfica inducida. Esto significa que no existen $n+1$ vértices en G que estén todos mutuamente conectados. Por lo tanto, podemos dividir los vértices de G en k conjuntos disjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_k$ de tal manera que dentro de cada conjunto no haya aristas, ya que de lo contrario, tendríamos una subgráfica isomorfa a K_{n+1}.

Ahora, demostremos que G no contiene a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida. $\overline{P_3}$ es un conjunto de tres vértices donde no hay aristas entre dos de ellos y el tercero está conectado a ambos. Si G contuviera una subgráfica inducida isomorfa a $\overline{P_3}$, entonces no podríamos dividir los vértices de G en k conjuntos disjuntos sin que al menos uno de estos conjuntos contenga una arista, lo cual contradice la definición de una gráfica k-partita.

Por lo tanto, si G no contiene a K_{n+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas, podemos concluir que G es k-partita.

Por lo tanto, G es $k-$partita si y solo si no contiene a K_{n+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.

$\blacksquare$

Ejercicio 2. Demuestre que si G es una gráfica con $|V| \geq 4$ y $|E| > \frac{n^2}{4}$ entonces G contiene un ciclo impar.

Demostración por contradicción: Supongamos que G no contiene un ciclo impar, lo que significa que G es bipartito.

Si G es bipartito con conjuntos A y B, el número máximo de aristas es el número total de pares entre los conjuntos A y B, dado por:

$|E| \leq |A| * |B|$

Para maximizar |A|*|B|, tomamos la distribución más balanceada posible:

$|A| * |B| \leq (\frac{n}{2}) * (\frac{n}{2}) = \frac{n^2}{4}$

Esto significa que si G es bipartito, siempre se cumple $|E| \leq \frac{n^2}{4}$

Por hipótesis tenemos $|E| > \frac{n^2}{4}$. Pero acabamos de demostrar que si G es bipartito, se debe cumplir $|E| \leq \frac{n^2}{4}$**!**

Por lo tanto nuestra suposición de que G es bipartita es falsa y debe contener un ciclo impar.

∎