UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tarea 3

PRESENTA

Munive Ramírez Ibrahim
424106083

PROFESOR

César Hernández Cruz

ASIGNATURA

Gráficas y juegos

Ejercicios

Ejercicio 1. Sea G una gráfica. Demuestre que si $e \in E$, entonces $\mathcal{C}_G \leq \mathcal{C}_{G-e} \leq \mathcal{C}_G + 1$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, supongamos que G es conexa ($\mathcal{C}_G = 1$). Esto es válido porque:

Si G tiene k componentes, cualquier arista e pertenece a una componente conexa. Al eliminar e, solo se afectará dicha componente, manteniendo inalteradas las demás.

Consideramos dos casos:

Caso 1: e **no es un puente**

- Si e pertenece a un ciclo, su eliminación no desconecta la gráfica
- $G - e$ mantiene la conexidad: $\mathcal{C}_{G-e} = 1 = \mathcal{C}_G$

Caso 2: e **es un puente**

- Al eliminar e, la componente conexa que contenía e se divide en dos
- Por tanto: $\mathcal{C}_{G-e} = 2 = \mathcal{C}_G + 1$

En ambos casos, se cumple que $\mathcal{C}_G \leq \mathcal{C}_{G-e} \leq \mathcal{C}_G + 1$.

$\blacksquare$

Ejercicio 2. Una gráfica es *escindible completa* si su conjunto de vértices admite una partición (S, K) de tal forma que S es un conjunto independiente, K es un clan, y cada vértice en S es adyacente a cada vértice en K.

Demuestre que una gráfica es escindible completa si y solo si no contiene a C_4 ni a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida.

Demostración:

$\Rightarrow$) G admite una partición (S, K) de tal forma que S es un conjunto independiente, K es un clan, y cada vértice en S es adyacente a cada vértice en K.

Supongamos que G contiene a C_4 como subgráfica inducida. Entonces G tiene vértices v_1, v_2, v_3, v_4 tal que v_1 es adyacente a v_2, v_2 es adyacente a v_3, v_3 es adyacente a v_4, y v_4 es adyacente a v_1. Pero, si esos vértices pertenecen a S, entonces S no es independiente.

Si C_4 es subgráfica inducida de K, entonces K no es un clan, pues los vércites no son adyacentes entre sí, lo cual es una contradicción.

Si C_4 tiene como vértices a algunos vértices de S y de K, entonces, o S tiene dos vértices adyacentes y K tiene dos vértices no adyacentes, o S tiene dos vértices no adyacentes y K tiene dos vértices adyacentes, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto G no contiene a C_4 como subgráfica inducida.

Por otro lado, supongamos que G contiene a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida.

Supongamos que S tiene a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida, entonces S tiene dos vértices adyacentes, entonces S no es independiente, lo cual es una contradicción.

Ahora bien, si $\overline{P_3}$ es subgráfica inducida de K, entonces K no es un clan, pues los vértices no son adyacentes entre sí, lo cual es una contradicción.

Finalmente, si $\overline{P_3}$ tiene como vértices a algunos vértices de S y de K, entonces, o S tiene dos vértices adyacentes y K tiene dos vértices no adyacentes, o S tiene dos vértices no adyacentes y K tiene dos vértices adyacentes, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto G no contiene a $\overline{P_3}$ ni a C_4 como subgráfica inducida... (I)

Ejercicio 3

(a) Demuestre que si $|E| > \binom{|V|-1}{2}$, entonces G es conexa.

(b) Para cada $n > 3$ encuentre una gráfica inconexa de orden n con $|E| = \binom{n-1}{2}$.

Solución (b):

Tomemos de referencia la cantidad de aristas de una gráfica completa.

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Y cláramente $\binom{n}{2} > \binom{n-1}{2}$.

Por lo tanto, podemos construir gráficas inconexas de orden n con $|E| = \binom{n-1}{2}$ eliminando $n-1$ aristas de un vértice de una gráfica completa K_n.

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) &= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2(n-1)}{2} \\
&= \frac{n(n-1) - 2(n-1)}{2} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{2(n-3)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{2((n-1)-2)!} \\
&= \binom{n-1}{2}
\end{aligned}$$

Esto asegura que la gráfica sea inconexa, pues existe un vértice de grado cero, es decir, un vértice aislado.

Demostración (a):

Por la construcción de **(b)** se tiene que si una gráfica de n vértices tiene $\binom{n-1}{2}$ aristas, entonces es inconexa.

Por lo que, si agregamos por lo menos una arista a la gráfica, entonces la gráfica será conexa. Y en caso de que la gráfica no tenga un vértice aislado, entonces, la gráfica será conexa, así que se sigue cumpliendo.

Por lo tanto si $|E| > \binom{|V|-1}{2}$, entonces G es conexa.

$\blacksquare$