Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Iñaki Cornejo de la Mora

Tarea 3

1. Sea G una gráfica, y recuerde que c_G denota al número de componentes conexas de G. Demuestre que si $e \in E$, entonces $c_G \leq c_{G-e} \leq c_G + 1$.

2. Una gráfica es *escindible completa* si su conjunto de vértices admite una partición (S, K) de tal forma que S es un conjunto independiente, K es un clan, y cada vértice en S es adyacente a cada vértice en K. Demuestre que una gráfica es escindible completa si y sólo si no contiene a C_4 ni a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida. (Sugerencia: Un ejercicio de la tarea anterior puede resultar de utilidad.)

3. (a) Demuestre que si $|E| > \binom{|V|-1}{2}$, entonces G es conexa.

   (b) Para cada $n > 3$ encuentre una gráfica inconexa de orden n con $|E| = \binom{n-1}{2}$.

4. (a) Demuestre que si $\delta > \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor - 1$, entonces G es conexa.

   (b) Para $|V|$ par encuentre una gráfica $\left(\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor - 1 \right)$-regular e inconexa.

5. Demuestre que si D no tiene lazos y $\delta^+ \geq 1$, entonces D contiene un ciclo dirigido de longitud al menos $\delta^+ + 1$.

Puntos Extra

1. Demuestre que el número de $v_i v_j$-caminos de longitud k en G es $(A^k)_{ij}$ donde A es la matriz de adyacencia de G.

2. Sea G una gráfica bipartita de grado máximo k. Demuestre que existe una gráfica bipartita k-regular, H, que contiene a G como subgráfica inducida.