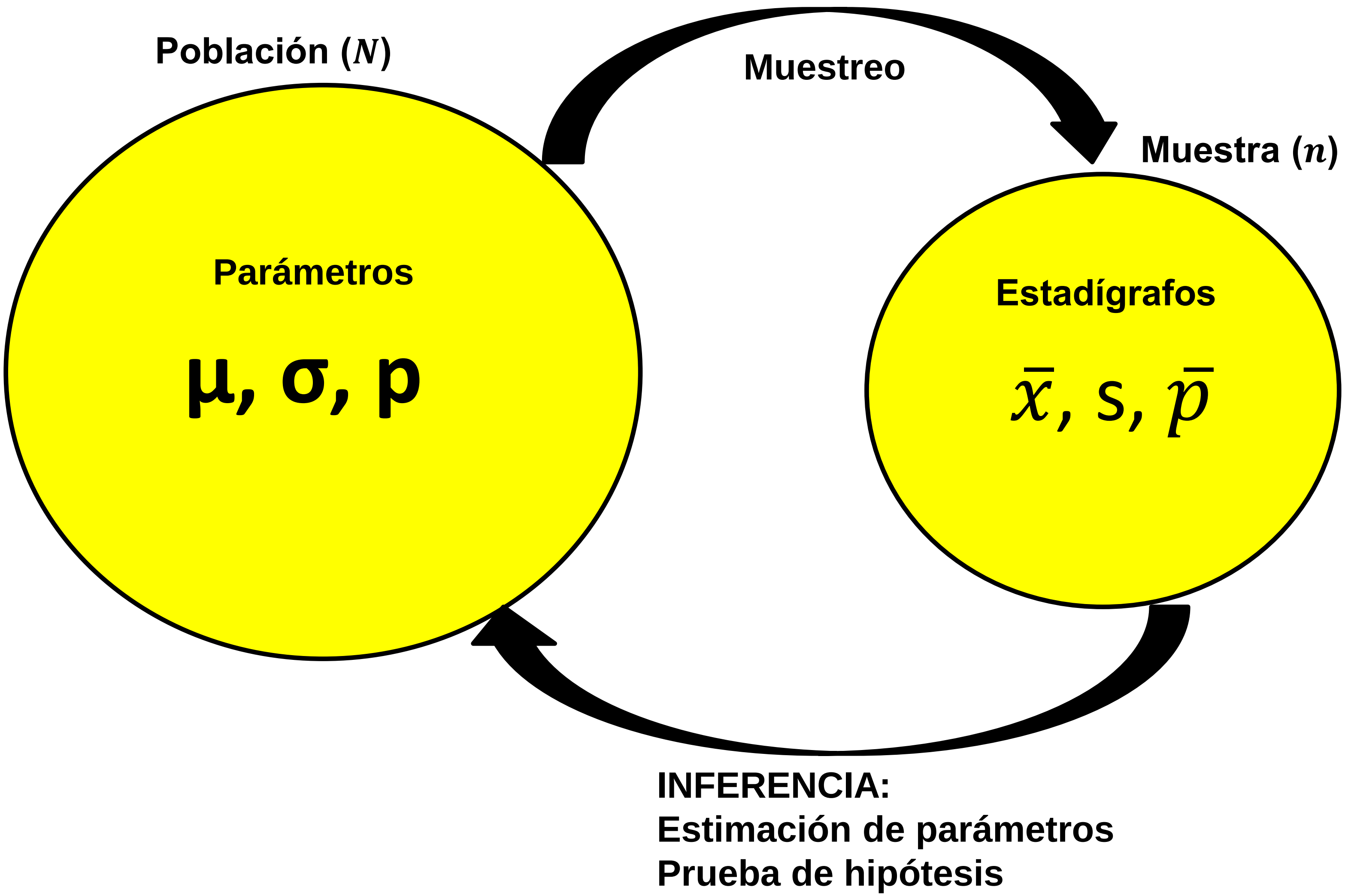
Estadística II

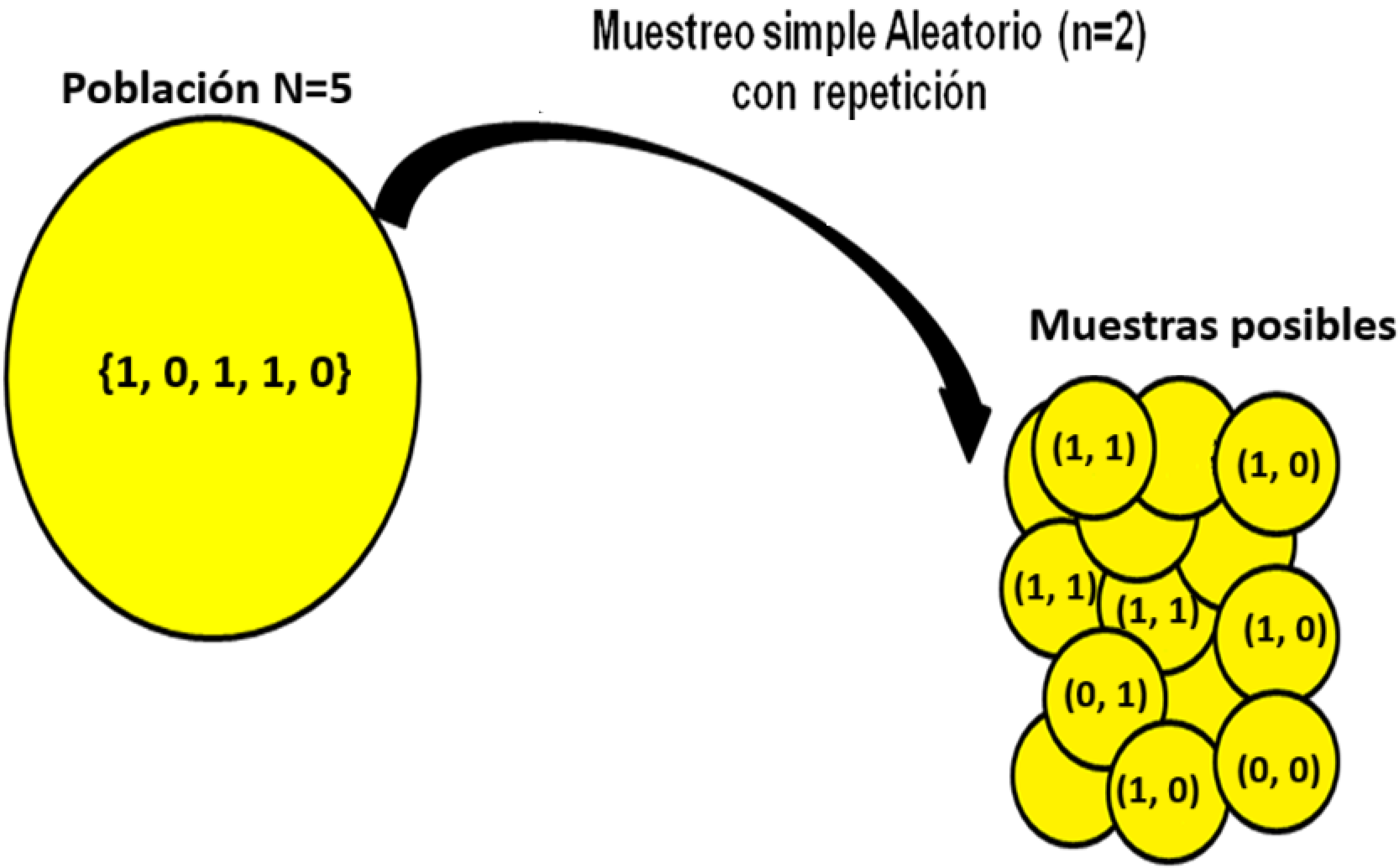
- Distribución muestral de una proporción
- Teorema de Límite Central
- Resolución de problemas

"La teoría de la probabilidad es, en el fondo, solo sentido común expresado en números."
— **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827)

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE UNA PROPORCIÓN



Distribución muestral de una proporción



Distribución muestral de una proporción

Tenemos un grupo muy pequeño de 5 estudiantes ($\boldsymbol{N = 5}$). Les preguntamos si aprobaron el examen de estadística. La respuesta es **1** si aprobaron y **0** si no."

Población Definida: {1, 0, 1, 1, 0}

Seleccionar todas las muestras de tamaño n=2, con reposición

(1,1), (1,0), (1,1), (1,1), (1,0),

(0,1), (0,0), (0,1), (0,1), (0,0),

(1,1), (1,0), (1,1), (1,1), (1,0),

(1,1), (1,0), (1,1), (1,1), (1,0),

(0,1), (0,0), (0,1), (0,1), (0,0)

Distribución muestral de una proporción

Calcular la proporción muestral ($\hat{p}$) para cada muestra:

1.0	0.5	1.0	1.0	0.5
0.5	0.0	0.5	0.5	0.0
1.0	0.5	1.0	1.0	0.5
1.0	0.5	1.0	1.0	0.5
0.5	0.0	0.5	0.5	0.0

Distribución muestral de una proporción

Calcular:

a) $\mu_{\hat{p}}$ (Media de las proporciones muestrales)

$$\mu_{\hat{p}} = 0.6$$

b) p (Proporción poblacional)

$$p = 0.6$$

Por tanto:

$$\mu_{\hat{p}} = p$$

La media de todas las proporciones muestrales posibles (**p̂**) es igual a la proporción poblacional **p**. Esto significa que **p̂ es un estimador insesgado de p**.

Distribución muestral de una proporción

Calcular:

a)$\sigma^2{}_{\hat{p}}$(Varianza de las proporciones muestrales)

$$\sigma^2{}_{\hat{p}} = 0.12$$

b) p (Proporción poblacional)

$$\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} = 0.12$$

Por tanto:

$$\sigma^2{}_{\hat{p}} = \sigma^2$$

Distribución muestral de una proporción

$$1)\ \mu_{\hat{p}} = p$$

$$2)\ \sigma^2{}_{\hat{p}} = \frac{p(1-p)}{n}$$

La distribución muestral de la proporción **es la herramienta que permite pasar de una muestra a una conclusión general sobre una población** en contextos binarios (éxito/fracaso).

Distribución muestral de una proporción

$$\boxed{Z = \frac{\bar{p} - p}{\sigma_{\bar{p}}}}$$

Si la población es finita y $n/N \leq 0.05$ se utilizará:

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})/n}$$

Si la población es finita y $n/N > 0.05$ se utilizará:

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{(N - n)/(N - 1)}\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p})/n}$$

Distribución muestral de una proporción

EJEMPLO

Al director de personal de una empresa le han encargado la tarea de elaborar un perfil de los 2,500 trabajadores de la empresa. Una de las características a determinar es la proporción de trabajadores que ha terminado el programa de capacitación de la empresa. Con base a experiencias previas se conoce que 1,500 del total de trabajadores han terminado dicho programa. Si se selecciona una muestra aleatoria simple de 30 colaboradores, el directivo desea averiguar cuál es la probabilidad de que $\bar{p}$ esté entre 0.55 y 0.65.

Distribución muestral de una proporción

SOLUCIÓN

$N = 2\,500$

$n = 30$

$\bar{p} = 1\,500/2\,500 = 0.6$

$n/N = 30/2\,500 = 0.012 \leq 0.05$

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{30}}$$

$$\sigma_{\bar{p}} = 0.0894$$

Distribución muestral de una proporción

SOLUCIÓN

$$Z = \frac{\bar{p} - p}{\sigma_{\bar{p}}}$$

$$\boldsymbol{P(0.55 \leq \bar{p} \leq 0.65)}$$

$$Z = \frac{0.55 - 0.60}{0.0894} = -0.56$$

$$Z = \frac{0.65 - 0.60}{0.0894} = 0.56$$

$$P(0.55 \leq \bar{p} \leq 0.65) = P(-0.56 \leq z \leq 0.56)$$

$$= P(z \leq 0.56) - P(z \leq -0.56)$$

$$= 0.7123 - 0.2877$$

$$= 0.4246$$

Distribución muestral de una proporción

EJERCICIO 1

Una proporción poblacional es 0.4. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 200 y la proporción muestral $\bar{p}$ se usa para estimar la proporción poblacional.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción muestra esté entre ± 0.03 de la proporción poblacional?
b. ¿De que la proporción muestral esté entre ± 0.05 de la proporción poblacional?

Distribución muestral de una proporción

EJERCICIO 2

Suponga que la proporción poblacional es 0.55. Calcule el error estándar de la proporción, $\sigma_{\bar{p}}$, para los tamaños de muestra 100, 200, 500 y 1 000. ¿Qué puede decir acerca del tamaño del error estándar a medida que el tamaño de la muestra aumenta?

Distribución muestral de una proporción

EJERCICIO 3

El director de una empresa piensa que 30% de los pedidos provienen de nuevos compradores. Para ver la proporción de nuevos compradores se usará una muestra aleatoria simple de 100 pedidos. Suponga que el director está en lo cierto y que $p = 0.30$.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción muestral de $\bar{p}$ esté entre 0.20 y 0.40?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción muestral de $\bar{p}$ esté entre 0.25 y 0.35?

UAM

FACULTAD
INGENIERÍA
& ARQUITECTURA