Estadística II

- Distribución binomial
- Distribución de Poisson
- Distribución Exponencial
- Distribución Normal

"En el mundo de los datos, las distribuciones de probabilidad son el lenguaje que traduce el caos en patrones comprensibles.“

Inspirada en la perspectiva de Karl Pearson sobre la estadística

Distribución de probabilidad binomial

Un **experimento binomial** tiene las cuatro siguientes propiedades:

1. El experimento consiste en una serie de n ensayos idénticos.

2. En cada ensayo hay dos resultados posibles: **éxito** o **fracaso**.

3. La probabilidad de éxito y de fracaso no cambia de un ensayo a otro, además:

$$p\text{: probabilidad de éxito}$$
$$1 - p\text{: probabilidad de fracaso}$$

4. Los ensayos son independientes.

Distribución de probabilidad binomial

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)}$$

donde

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{probabilidad de } x \text{ éxitos en } n \text{ ensayos} \\ n &= \text{número de ensayos} \\ \binom{n}{x} &= \frac{n!}{x!(n-x)!} \\ p &= \text{probabilidad de un éxito en cualquiera de los ensayos} \\ 1 - p &= \text{probabilidad de un fracaso en cualquiera de los ensayos} \end{aligned}$$

Distribución de probabilidad binomial

VALOR ESPERADO EN LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$E(x) = \mu = np$$

VARIANZA EN LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$$\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 = np(1 - p)$$

Distribución de probabilidad binomial

EJEMPLO

¿Puedes señalar la diferencia entre Coca Cola y Pepsi en una prueba de degustación a ciegas? La mayoría afirma que puede hacerlo y se inclina por una u otra marca. Sin embargo, las investigaciones sugieren que la gente identifica correctamente una muestra de uno de estos casos sólo 60% de las veces. Suponga que decide investigar esta cuestión y selecciona una muestra de 15 estudiantes universitarios. Determinar la probabilidad de que:

Exactamente 5 estudiantes identifiquen correctamente.

a. A lo más 3 acierten.
b. Por lo menos 3 acierten.
c. ¿Cuánto de los 15 estudiantes se esperaría que acierten?
d. Calcular el nivel de variabilidad.

Distribución de probabilidad binomial

EJEMPLO

$$n = 15, \qquad p = 0.6, \quad 1 - p = 0.4$$

a. Exactamente 5 estudiantes identifiquen correctamente.

$$P(x = 5) = f(5) = \binom{15}{5}(0.6)^5(0.4)^{10}$$

$$f(5) = 0.0244$$

Distribución de probabilidad binomial

EJEMPLO

$$n = 15, \qquad p = 0.6, \quad 1 - p = 0.4$$

b. A lo más tres acierten

$$P(x \leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$$

$$P(x \leq 3) = \binom{15}{0}(0.6)^0(0.4)^{15} + \binom{15}{1}(0.6)^1(0.4)^{14} + \binom{15}{2}(0.6)^2(0.4)^{13} + \binom{15}{3}(0.6)^3(0.4)^{12}$$

$$P(x \leq 3) = 0.0000010 + 0.000024 + 0.00025 + 0.0016$$

$$P(x \leq 3) = 0.001875$$

Distribución de probabilidad binomial

EJEMPLO

$$n = 15, \qquad p = 0.6, \quad 1 - p = 0.4$$

c. Por lo menos tres acierten

$$P(x \geq 3) \; = \; P(3) + P(4) + \cdots + P(15)$$

$$P(x \geq 3) = 1 - \; P(x < 3)$$

$$= 1 - \; [P(0) + P(1) + P(2)]$$

$$= 1 - \; [0.0000010 \; + 0.000024 + 0.00025]$$

$$P(x \geq 3) = 0.9997$$

Distribución de probabilidad binomial

EJEMPLO

$$n = 15, \quad p = 0.6, \quad 1 - p = 0.4$$

d. ¿Cuánto de los 15 estudiantes se esperaría que acierten?

$$\mu = np$$

$$\mu = (15)(0.6)$$

$$\mu = 9$$

Distribución de probabilidad binomial

EJEMPLO

$$n = 15, \quad p = 0.6, \quad 1 - p = 0.4$$

e. Calcular el nivel de variabilidad

$$\sigma^2 = np(1 - p)$$

$$\sigma^2 = (15)(0.6)(0.4)$$

$$\sigma^2 = 3.6$$

$$\sigma = 1.89$$

Distribución de probabilidad de Poisson

Propiedades de un experimento de Poisson:

1. La probabilidad de ocurrencia es la misma para cualesquiera dos intervalos de la misma magnitud.

2. La ocurrencia o no ocurrencia en cualquier intervalo es independiente de la ocurrencia o no ocurrencia en cualquier otro intervalo.

Distribución de probabilidad de Poisson

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE POISSON

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

en donde

$f(x)$ = probabilidad de x ocurrencias en un intervalo
μ = valor esperado o número medio de ocurrencias en un intervalo
e = 2.71828

En la distribución de Poisson se cumple:

$$\mu = \sigma^2$$

Distribución de probabilidad de Poisson

EJEMPLO Suponga que desea saber el número de llegadas, en un lapso de 15 minutos, a la rampa del cajero automático de un banco. Asumiendo que se cumplen las condiciones de un experimento de Poisson y que por experiencias pasadas, se sabe que el número promedio de automóviles que llegan en un lapso de 15 minutos es 10. La administración desea determinar la probabilidad de que lleguen exactamente 5 vehículos en 15 minutos.

Solución

x: números de automóviles que llegan en un lapso de 15 minutos

$$\mu = 10, \qquad x = 5$$

Distribución de probabilidad de Poisson

Solución

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$f(x) = \frac{10^x e^{-10}}{x!}$$

$$f(5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!}$$

$$f(5) = 0.0378$$

Distribución de probabilidad de Poisson

Solución

$$\mu = 10$$

La varianza es:

$$\sigma^2 = 10$$

La desviación estándar es:

$$\sigma = \sqrt{10}$$

$$\sigma = 3.16$$

Distribución de probabilidad de Poisson

EJEMPLO En el ejemplo anterior se usó un lapso de 15 minutos, pero también se usan otros lapsos. Suponga que desea calcular la probabilidad de una llegada en un lapso de 3 minutos.

Solución

En un lapso de 15 minutos: $\mu = 10$

En un lapso de 1 minuto: $\mu = \frac{10}{15} \Longrightarrow \mu = \frac{2}{3}$

En un lapso de 3 minutos: $\mu = 3\left(\frac{2}{3}\right) \Longrightarrow \mu = 2$

Distribución de probabilidad de Poisson

Solución

La función de probabilidad estará definida así:

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \Longrightarrow f(x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!}$$

La probabilidad de una llegada en un lapso de 3 minutos:

$$f(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!}$$

$$f(1) = 0.2707$$

Distribución de probabilidad exponencial

La distribución exponencial:

- Es una distribución continua.
- Mide el paso del tiempo en las ocurrencias.
- La distribución exponencial estima el lapso entre las llegadas (personas, camiones, llamadas telefónicas).
- Si el número de ocurrencia tiene una distribución de Poisson, entonces el lapso entre las ocurrencias tiene una distribución exponencial.
- La media y la desviación estándar son iguales.

Distribución de probabilidad exponencial

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD EXPONENCIAL

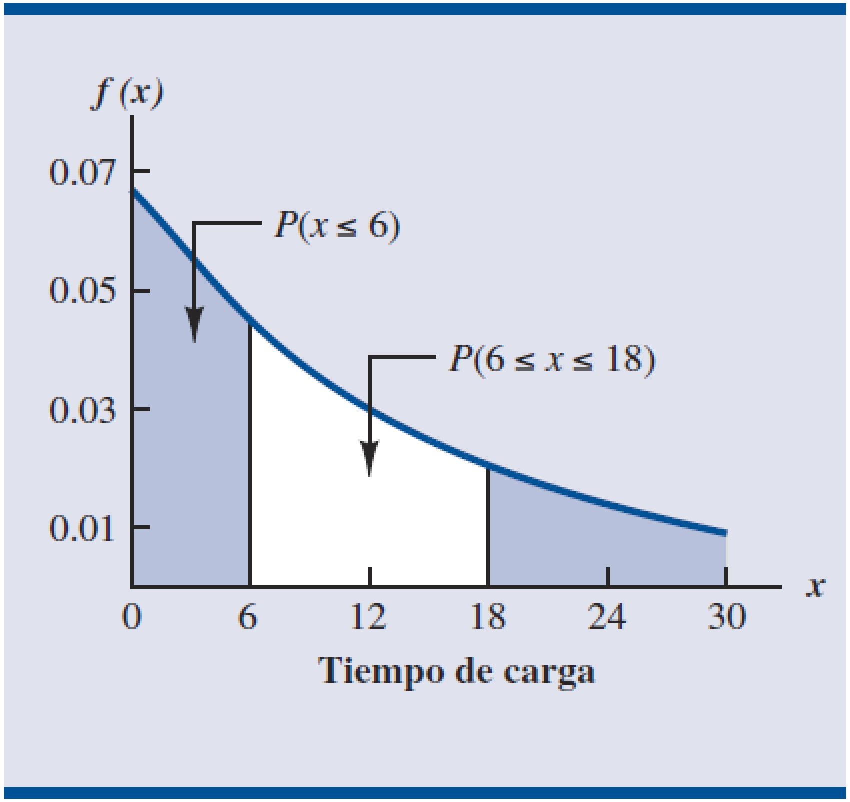
$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \qquad \text{para } x \geq 0, \mu > 0$$

donde μ = valor esperado o media

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL: PROBABILIDADES ACUMULADAS

$$P(x \leq x_0) = 1 - e^{-x_0/\mu}$$

Distribución de probabilidad exponencial



Distribución de probabilidad exponencial

EJEMPLO Suponga que x representa el tiempo que se necesita para cargar un camión en un área de carga, y que este tiempo de carga sigue una distribución exponencial. Si el tiempo de carga medio es 15 minutos, determinar la función de probabilidad apropiada para x.

Solución

$$\mu = 15$$

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{15} e^{-x/15}$$

Distribución de probabilidad exponencial

EJEMPLO Con la información del ejemplo anterior, determinar la probabilidad de que cargar un camión requiera 6 minutos o menos.

Solución

x: tiempo de carga en minutos

$$\mu = 15$$

$$P(x \leq 6)$$

$$P(x \leq x_0) = 1 - e^{-x_0/\mu} \Longrightarrow P(x \leq 6) = 1 - e^{-6/15}$$

$$P(x \leq 6) = 0.3297$$

Distribución de probabilidad exponencial

EJEMPLO Con la información del ejemplo anterior, determinar la probabilidad de que cargar un camión requiera 18 minutos o menos.

Solución

x: tiempo de carga en minutos

$$\mu = 15$$

$$P(x \leq 18)$$

$$P(x \leq x_0) = 1 - e^{-x_0/\mu} \quad \Longrightarrow \quad P(x \leq 18) = 1 - e^{-18/15}$$

$$P(x \leq 18) = 0.6988$$

Distribución de probabilidad exponencial

EJEMPLO Con la información del ejemplo anterior, determinar la probabilidad de que cargar un camión se necesite entre 6 y 18 minutos.

Solución

x: tiempo de carga en minutos

$$\mu = 15$$

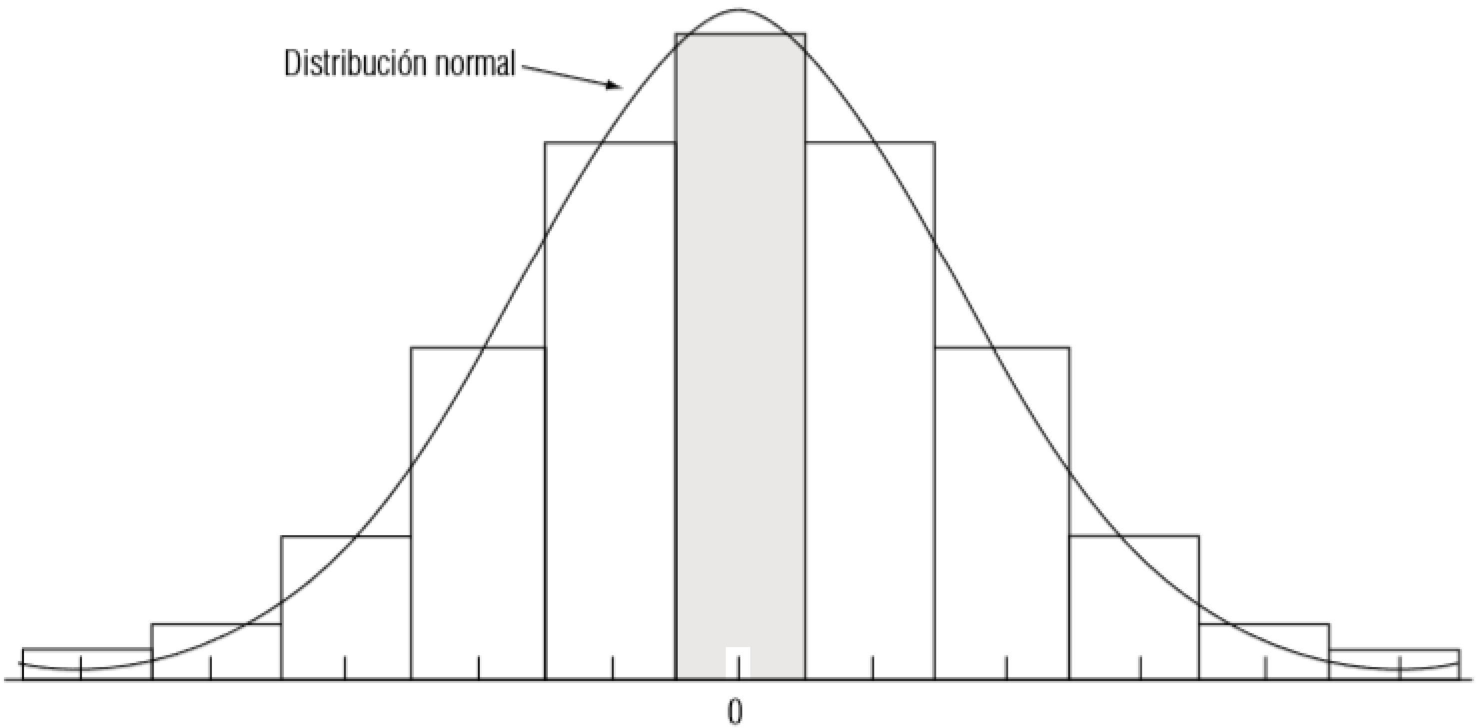
$$P(6 \leq x \leq 18)$$

$$P(6 \leq x \leq 18) = P(x \leq 18) - P(x \leq 6)$$

$$= 0.6988 - 0.3297$$

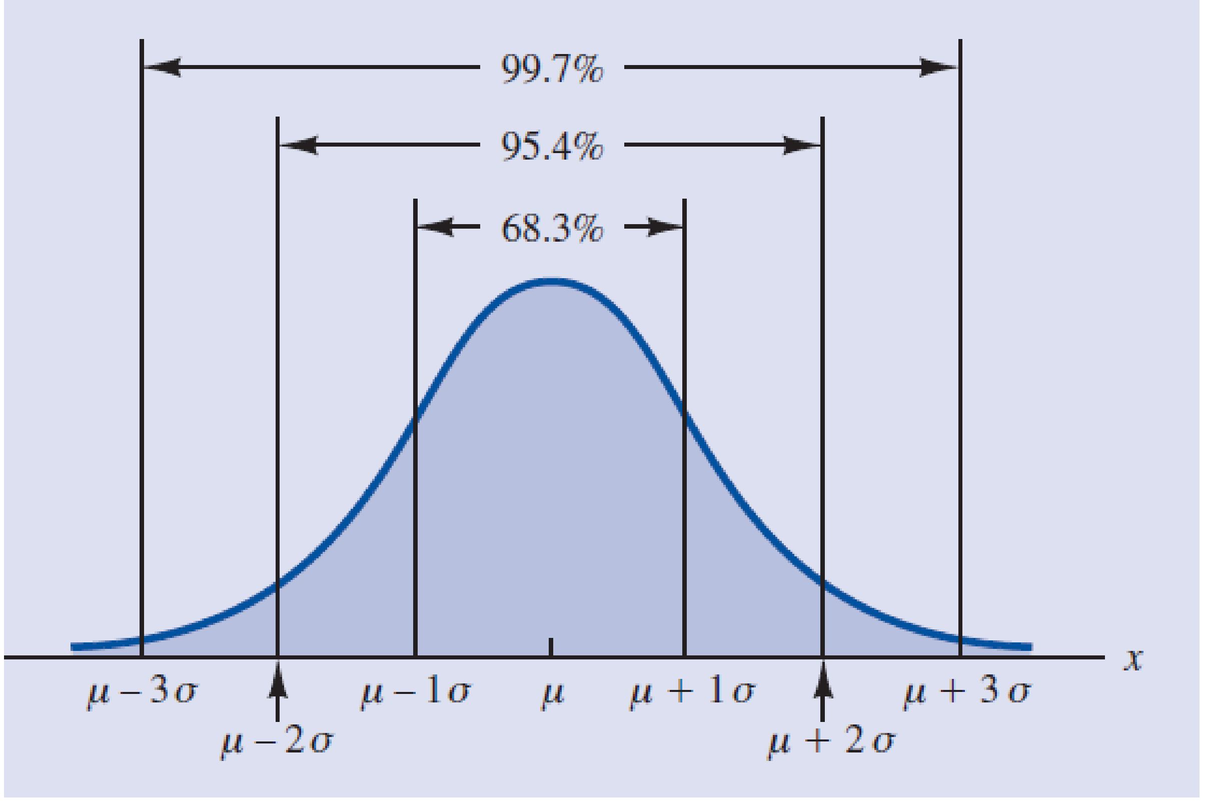
$$= 0.3691$$

Distribución de probabilidad normal estándar



Áreas bajo la curva normal

No importa cuáles sean los valores de μ y σ para una distribución de probabilidad normal, el área total bajo la curva es 1.00, de manera que podemos pensar en áreas bajo la curva como si fueran probabilidades.



FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD NORMAL

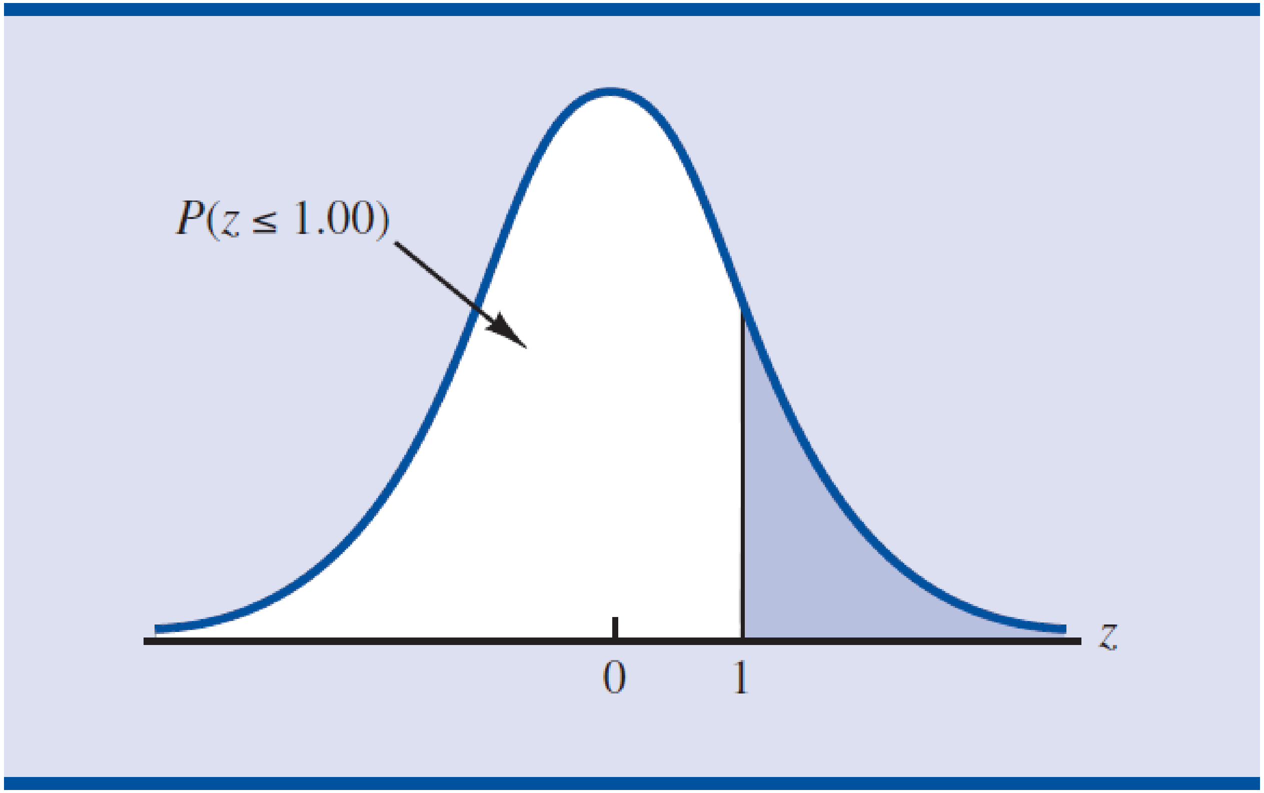
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

donde

$$\begin{aligned} \mu &= \text{media} \\ \sigma &= \text{desviación estándar} \\ \pi &= 3.14159 \\ e &= 2.71828 \end{aligned}$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

$$P(z \leq 1.00)$$

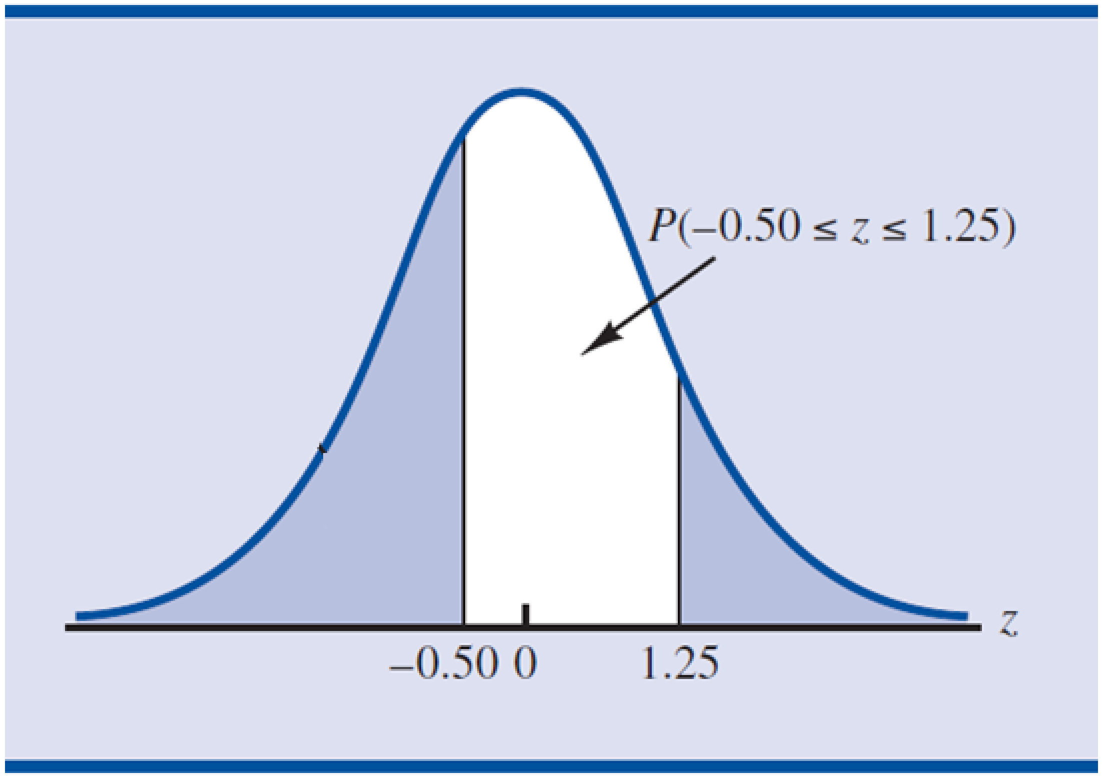


DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

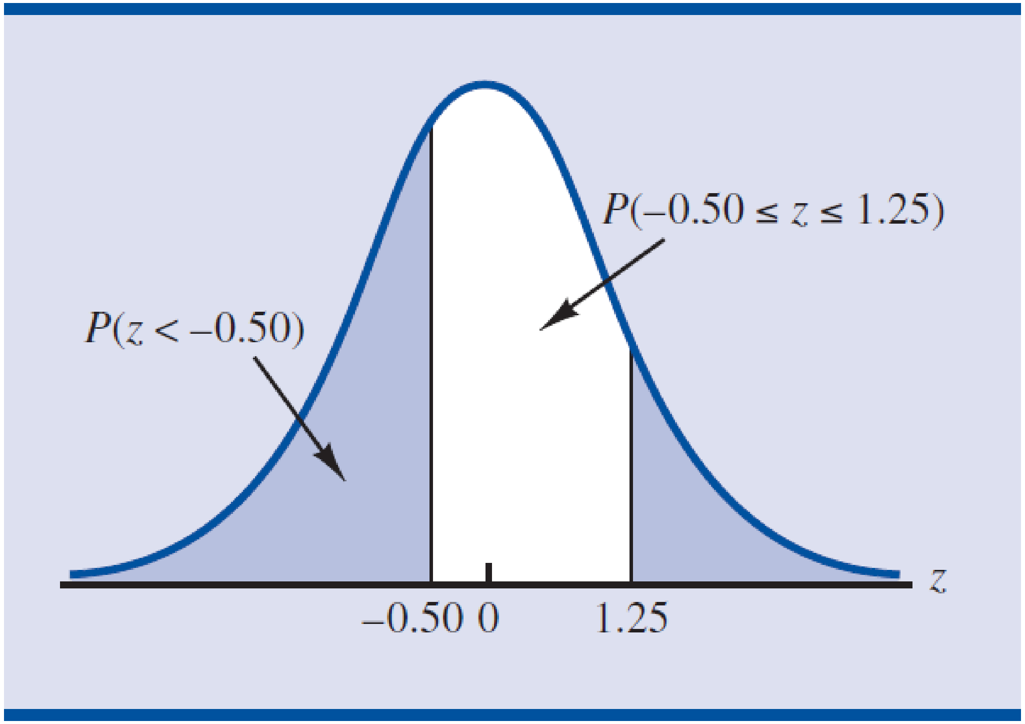
z	0.00	0.01	0.02
.			
.			
.			
0.9	0.8159	0.8186	0.8212
1.0	$\boxed{\mathbf{0.8413}}$	0.8438	0.8461
1.1	0.8643	0.8665	0.8686
1.2	0.8849	0.8869	0.8888
.			
.			
.			

$P(z \leq 1.00)$

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR



DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

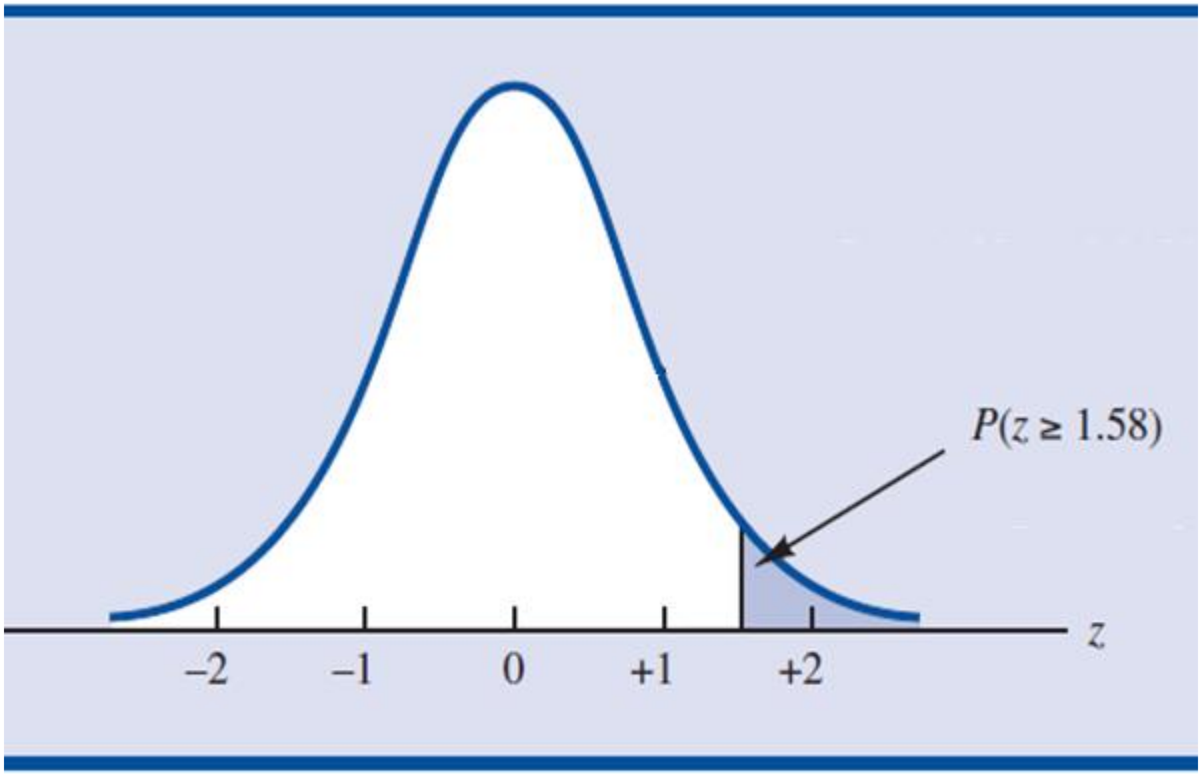


$$P(-0.50 \le z \le 1.25) = P(z \le 1.25) - P(z \le -0.50)$$

$$= 0.8944 - 0.3085$$

$$= 0.5859$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

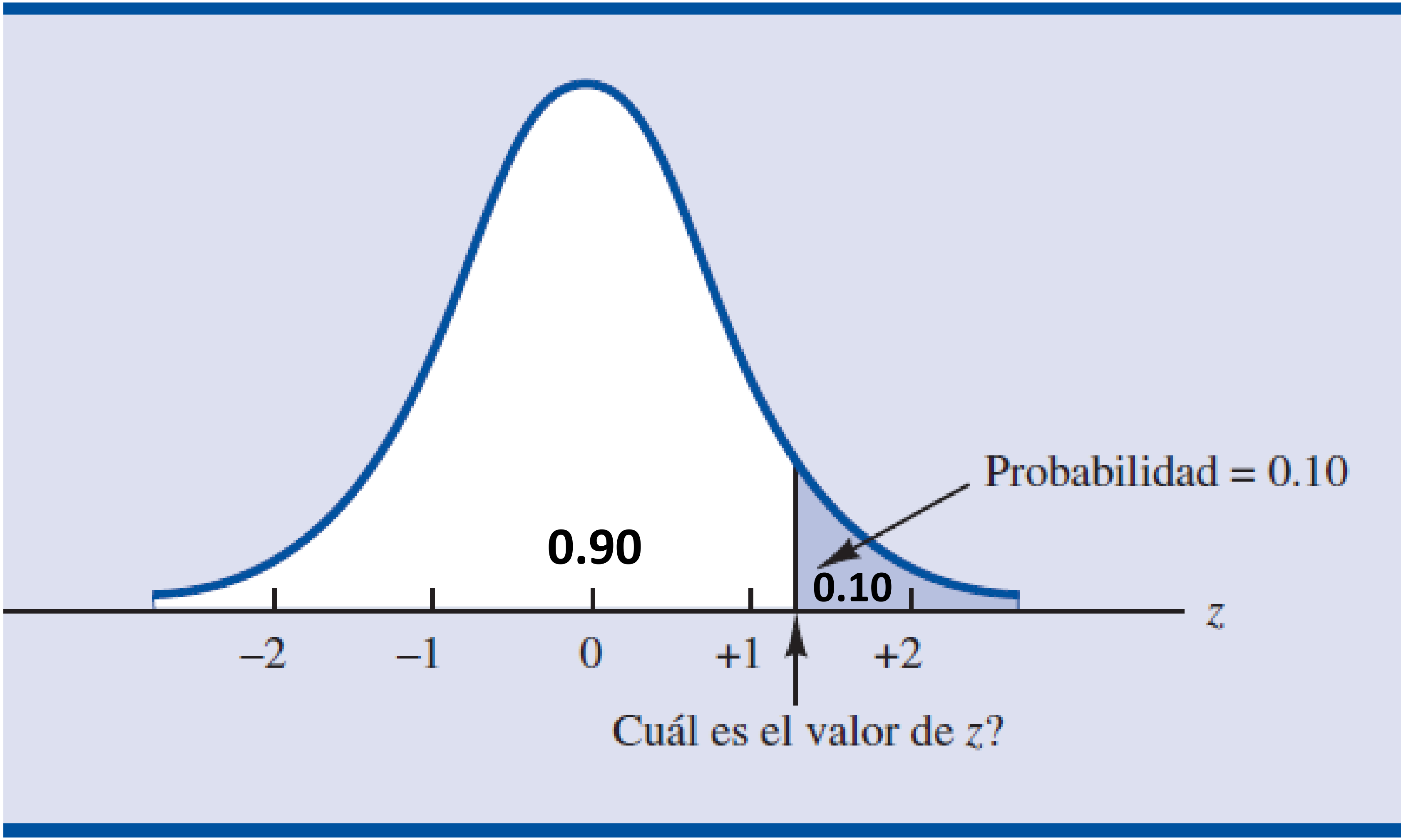


$$P(z \geq 1.58) = 1 - P(z < 1.58)$$

$$= 1 - 0.9429$$

$$= 0.0571$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR



DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

z	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
.				
.				
.				
1.0	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8962	0.8980	$\boxed{0.8997}$	0.9015
1.3	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
.				
.				
.				

Probabilidad acumulada más cercana a 0.9000

el valor de z es 1.28.

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

EJERCICIO 1

Dado que Z es la variable normal estándar, calcular las siguientes probabilidades:

a. $P(z \leq 1.65)$
b. $P(z \leq 1.96)$
c. $P(z \leq 2.57)$
d. $P(z \geq -1.65)$
e. $P(z \geq -1.96)$
f. $P(z \geq -2.57)$
g. $P(-1.65 \leq z \leq 1.65)$
h. $P(-1.96 \leq z \leq 1.96)$
i. $P(-2.57 \leq z \leq 2.57)$

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

CONVERSIÓN A LA VARIABLE ALEATORIA NORMAL ESTÁNDAR

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

EJERCICIO 2

Una empresa tiene un programa de entrenamiento diseñado para mejorar la calidad de las habilidades de los supervisores de línea de producción. Debido a que el programa es auto administrado, los supervisores requieren un número diferente de horas para terminarlo. Un estudio de los participantes anteriores indica que el tiempo es una variable que se distribuye de forma normal, con una media de 500 horas y desviación estándar de 100 horas. Si se elige al azar uno de los participantes, ¿Cuál es la probabilidad de qué requiera:

a. A lo más 580 horas para completar el programa?
b. Al menos 700 horas para completar el programa?
c. Entre 460 y 540 horas para completar el programa?
d. Un participante es clasificado con rendimiento deficiente si se encuentra en el 5% superior. ¿Cuántas horas debe tardar un participante para que se le clasifique con rendimiento deficiente?

UAM

FACULTAD
INGENIERÍA
& ARQUITECTURA