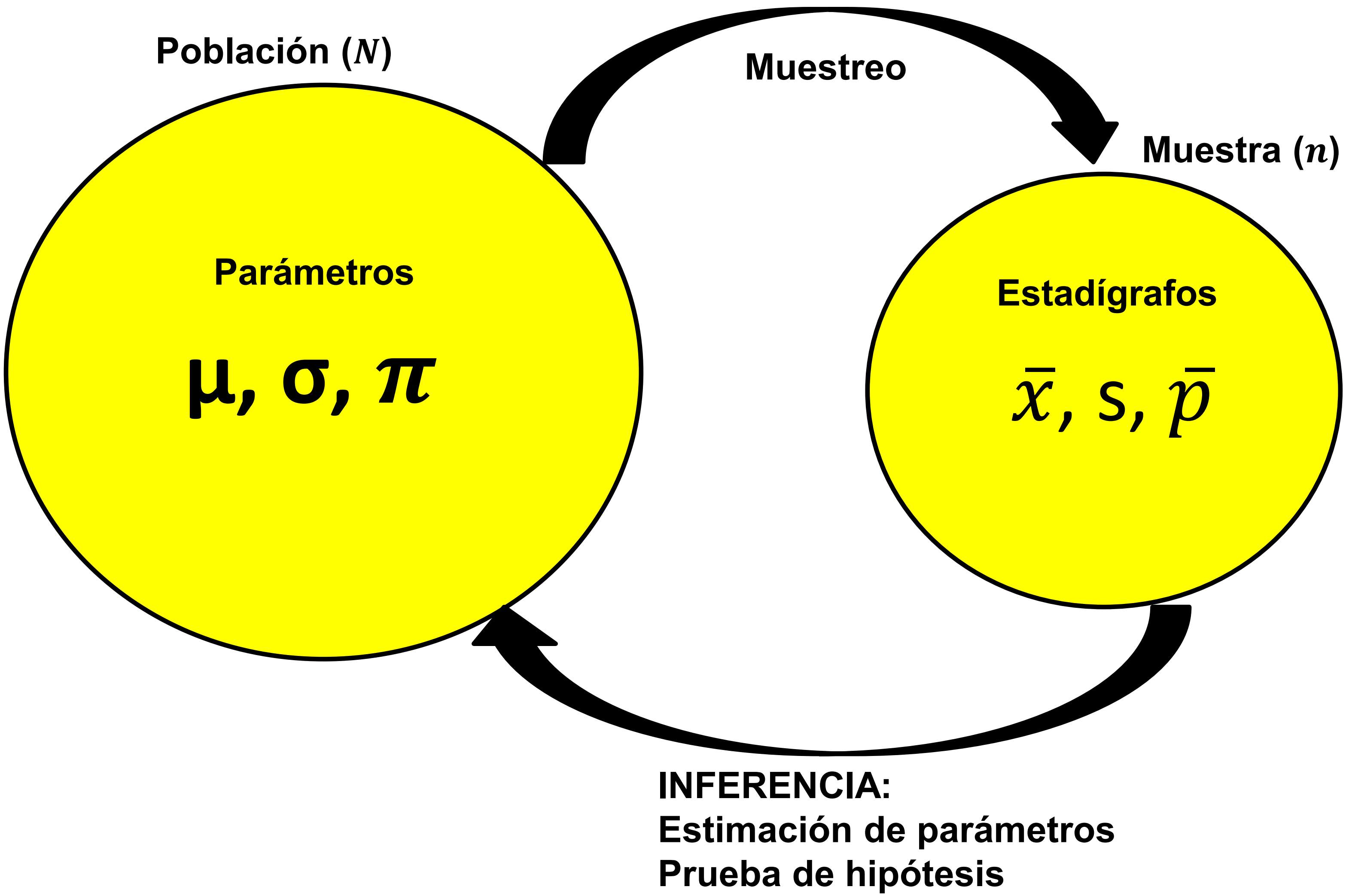
Estadística II

- Distribución muestral de la media
- Teorema del Límite Central
- Resolución de problemas

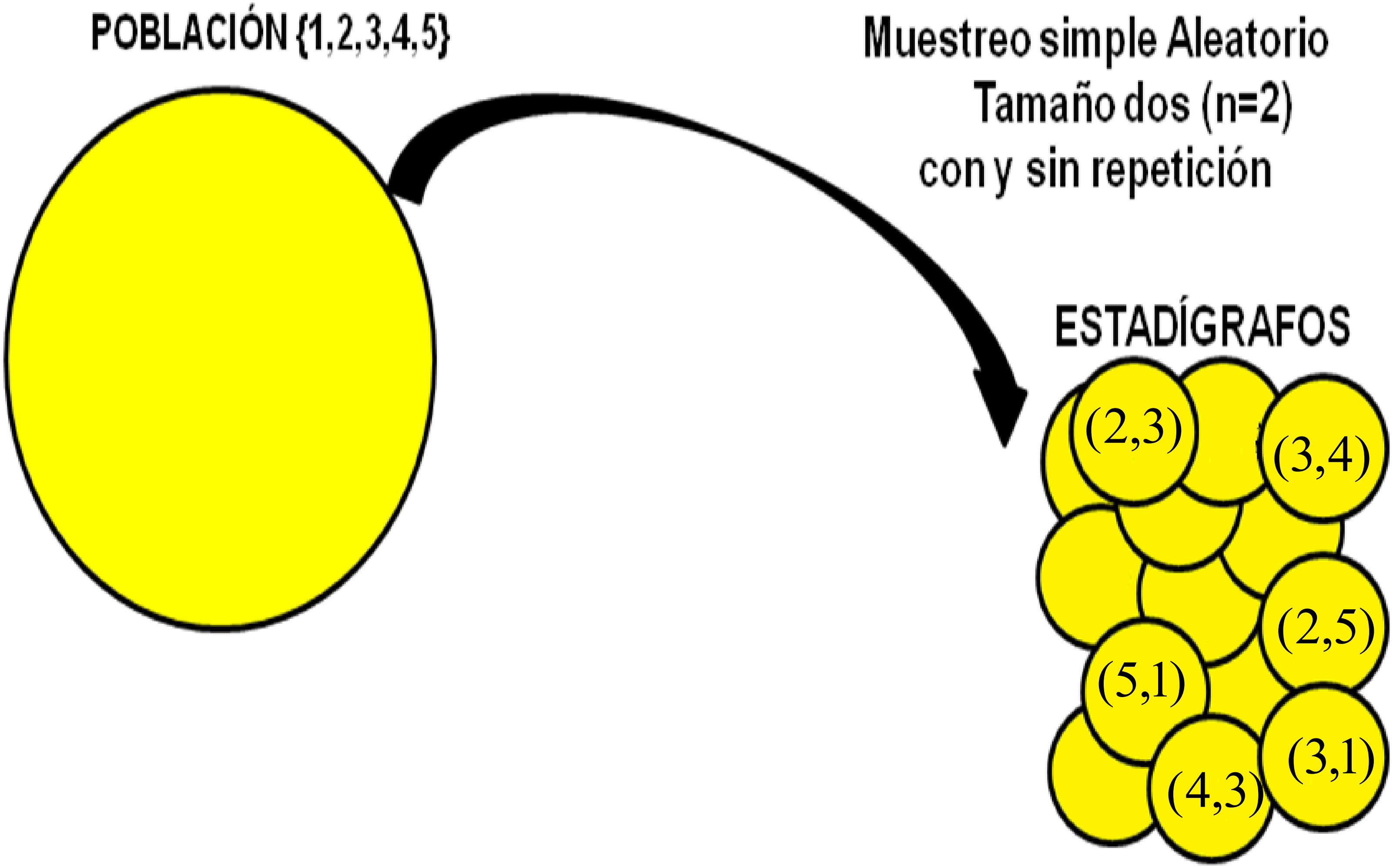
"La teoría de la probabilidad es, en el fondo, solo sentido común expresado en números."
— **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827)

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA MEDIA



Distribución muestral de la media

EJEMPLO



Distribución muestral de la media

P={1, 2, 3, 4, 5}

Seleccionar todas las muestras de tamaño n=2, con reposición

	1	2	3	4	5
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

Distribución muestral de la media

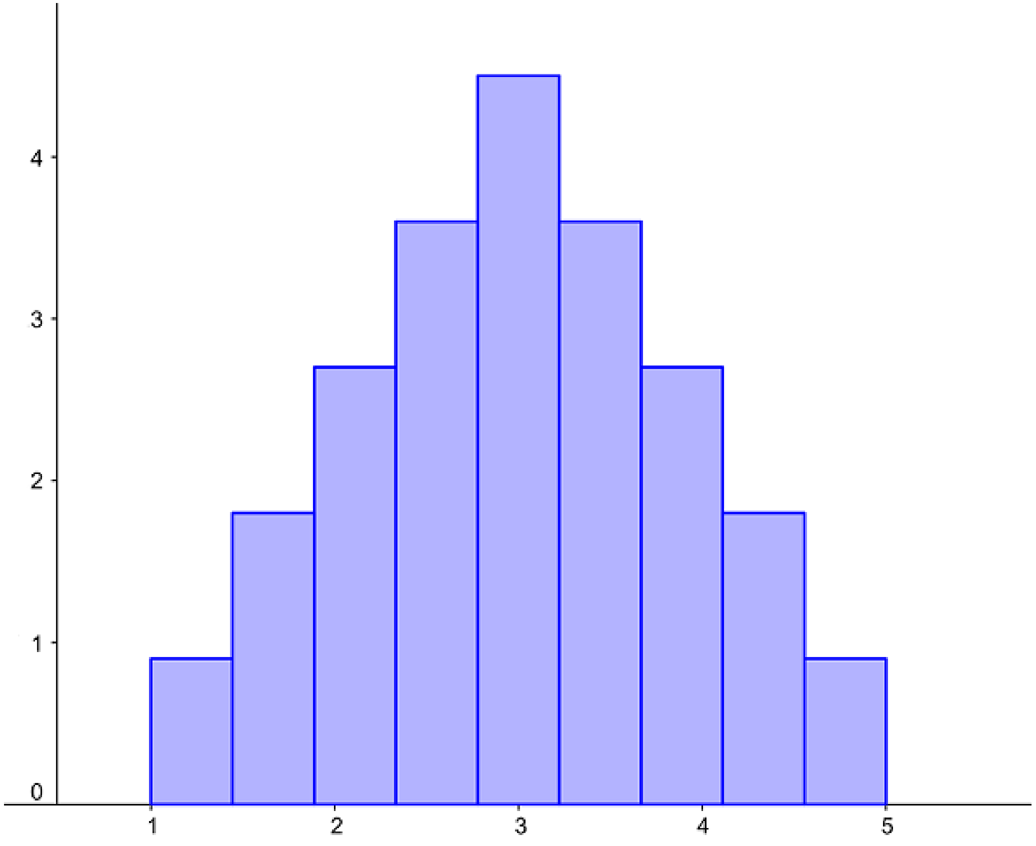
Calcular la media muestral ($\overline{x}$) para cada muestra:

	1	2	3	4	5
1	1	1.5	2	2.5	3
2	1.5	2	2.5	3	3.5
3	2	2.5	3	3.5	4
4	2.5	3	3.5	4	4.5
5	3	3.5	4	4.5	5

Distribución muestral de la media

Graficar la distribución de probabilidad de las medias:

x_i	f
1	1
1.5	2
2	3
2.5	4
3	5
3.5	4
4	3
4.5	2
5	1



Tiene una distribución normal o de campana de Gauss

Distribución muestral de la media

Calcular:

a) $\mu_{\bar{x}}$ (Media de las medias muestrales)

$$\mu_{\bar{x}} = 3$$

b) μ (media poblacional)

$$\mu = 3$$

Por tanto:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

La media de todas las medias muestrales posibles ($\bar{x}$) es igual a la media poblacional μ. Esto significa que $\bar{x}$ **es un estimador insesgado de** μ.

Distribución muestral de una proporción

Calcular:

a) ${\sigma^2}_{\bar{x}}$ (Varianza de las medias muestrales)

$${\sigma^2}_{\bar{x}} = 1$$

b)σ^2(Varianza poblacional)

$$\sigma^2 = 2$$

Por tanto:

$$\sigma^2 = n \cdot {\sigma^2}_{\bar{x}}$$

Distribución muestral de la media

TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

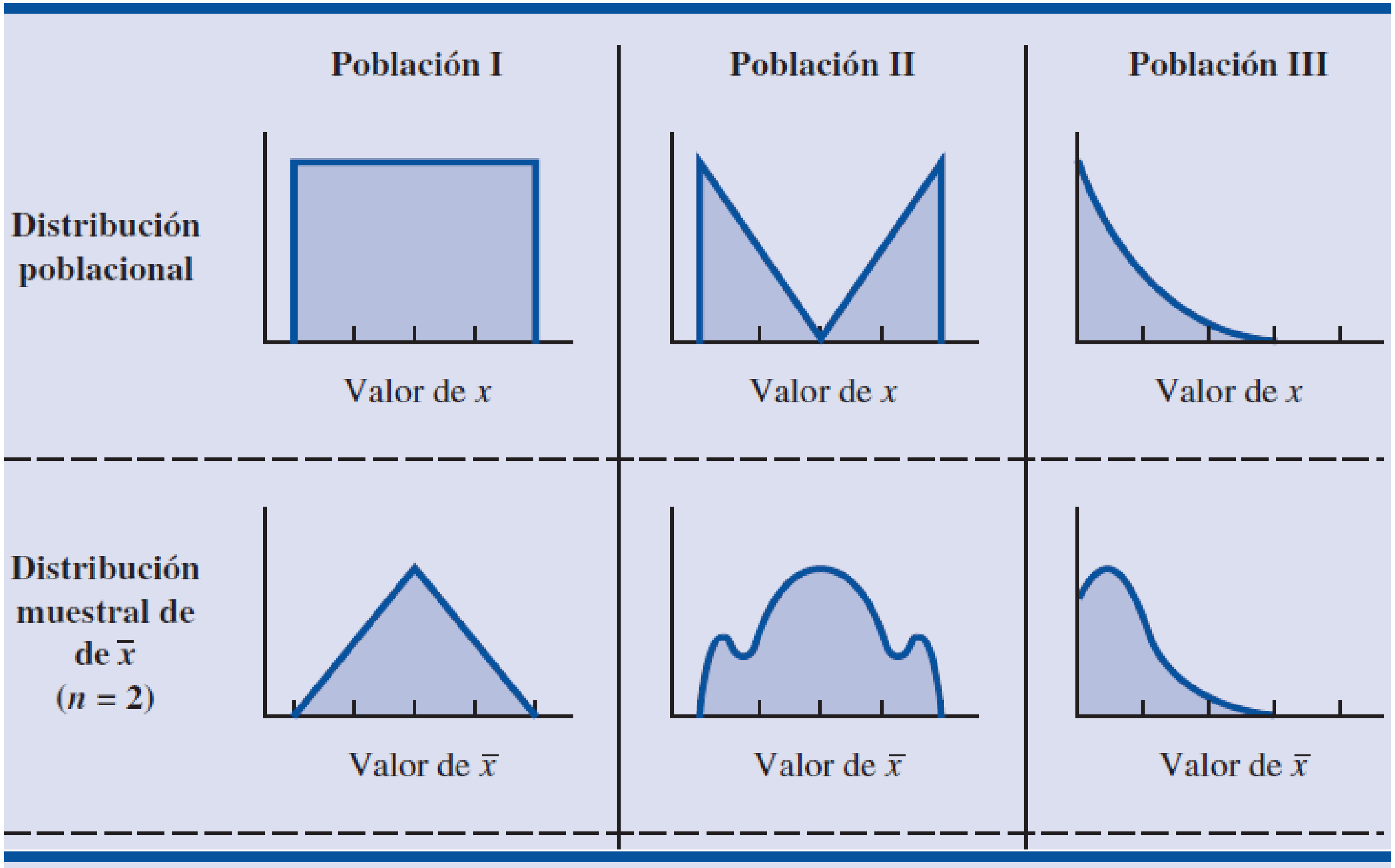
$$1)\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$2)\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ **(Error Estándar de la media)**

El Teorema del Límite Central es la base de la inferencia estadística. Garantiza que, **sin importar la forma de la distribución original de los datos**, las medias de muestras grandes se distribuyan de forma normal.

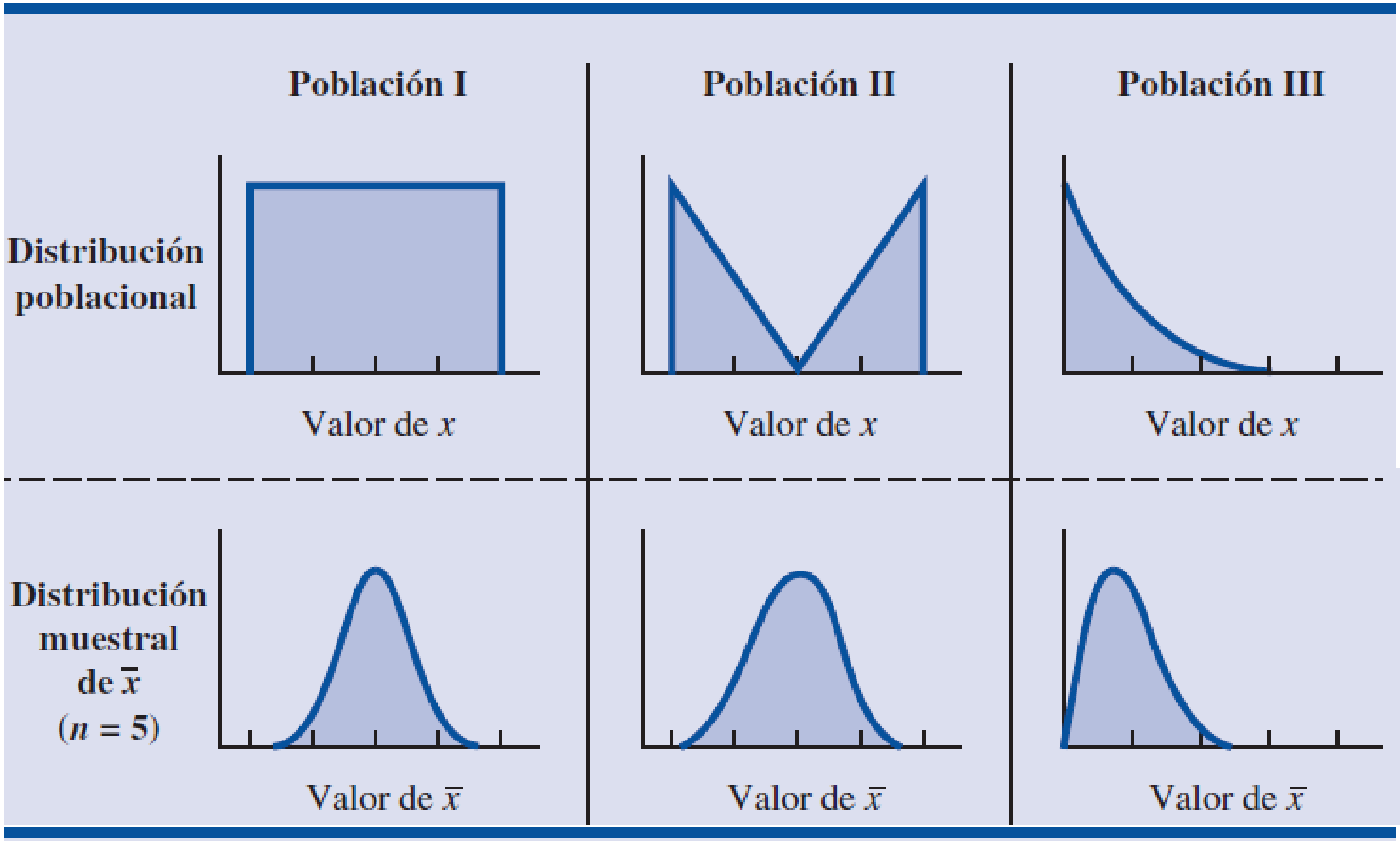
Distribución muestral de la media

TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL



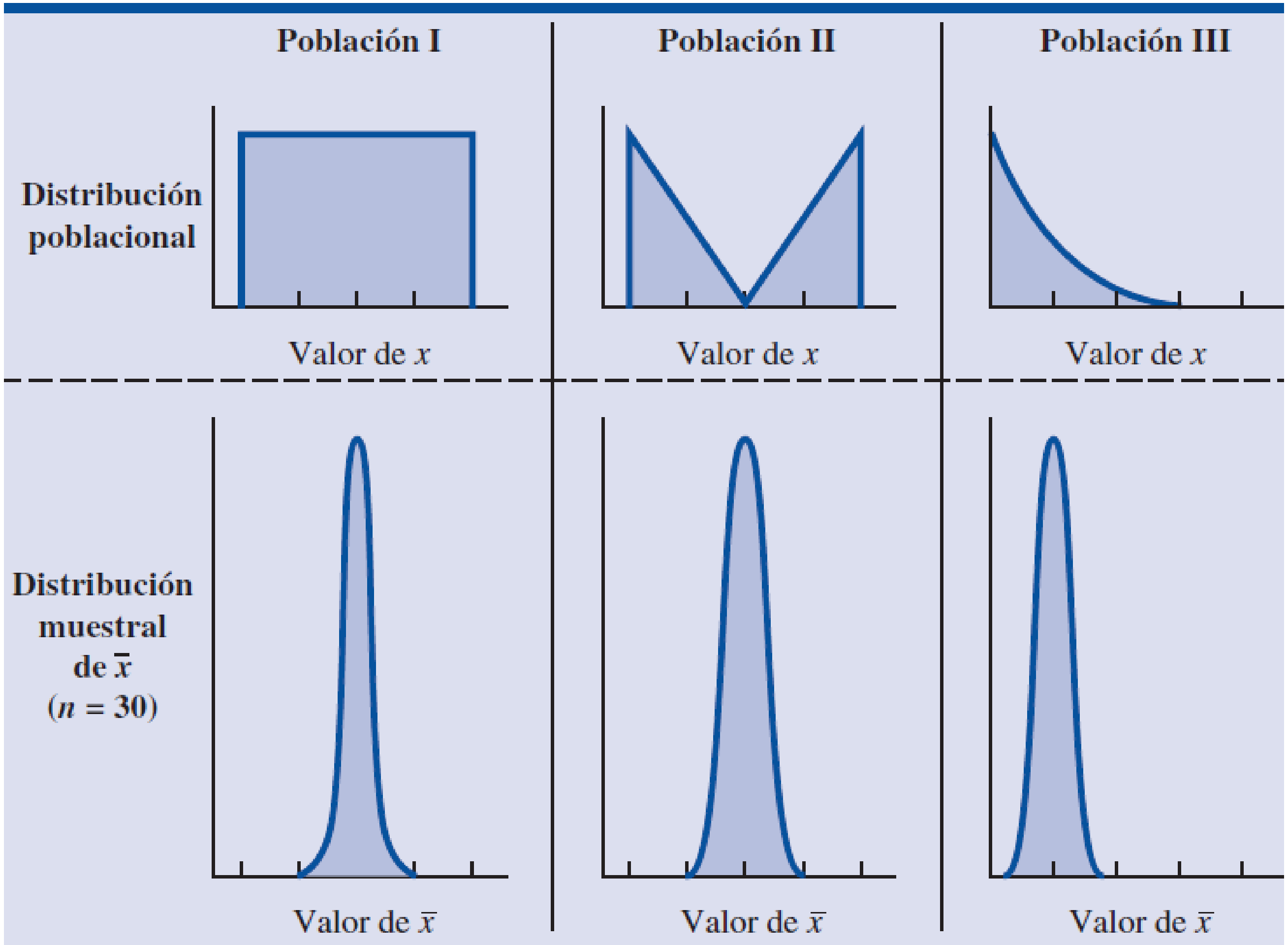
Distribución muestral de la media

TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL



Distribución muestral de la media

TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL



Distribución muestral de la media

TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL Si todas las muestras de un tamaño en particular se seleccionan de cualquier población, la distribución muestral de la media se aproxima a una distribución normal. Esta aproximación mejora con muestras más grandes.

El Teorema del Límite Central permite **calcular probabilidades, estimar parámetros y probar hipótesis** con rigor matemático, haciendo posible generalizar resultados de una muestra a toda la población de manera confiable.

Distribución muestral de la media

Dilema Fundamental: La Muestra vs. La Población

Imaginemos que queremos saber la altura promedio de todos los estudiantes de un país (la **población**). Medir a los millones de estudiantes es imposible. En su lugar, tomamos una **muestra** aleatoria de 1000 estudiantes y calculamos su altura promedio (digamos, 1.65 m).

La gran pregunta es: **¿Podemos confiar en que 1.65 m es una buena estimación de la verdadera altura promedio de toda Colombia? ¿O acaso, por mala suerte, elegimos 1000 estudiantes muy altos o muy bajos?**

Las distribuciones muestrales son la **herramienta matemática que resuelve este dilema**. Nos permiten medir el margen de error y el nivel de confianza de nuestra estimación.

Distribución muestral de la media

La distribución muestral de la media es el **puente matemático** que nos permite viajar de la información limitada de una **muestra** a conclusiones válidas y medibles sobre una **población**. Sin este concepto, la estadística sería solo adivinar. Con él, es una ciencia de la estimación informada.

EJERCICIO 1

Verificar el Teorema Central de Límite, usando la población del ejemplo y seleccionando muestras de tamaño 2 sin reposición.

EJERCICIO 2

Verificar el Teorema Central de Límite con una población de tamaño 5 y muestras de tamaño 3.

Uso de la distribución muestral de las medias

CÁLCULO DEL VALOR z DE $\overline{X}$ CUANDO SE CONOCE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA POBLACIÓN

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Uso de la distribución muestral de las medias

EJEMPLO

El Departamento de Control de Calidad de Coca Cola conserva registro sobre la cantidad de bebida en su botella gigante. La cantidad real de bebida en cada botella es de primordial importancia, pero varía en una mínima cantidad de botella en botella. Si se llenan con menos líquido del debido, tendría problemas en lo que se refiere a la confiabilidad de la etiqueta. Por otra parte, no puede colocar líquido de más porque regalaría la bebida, lo cual reduciría las utilidades. Los registros indican que la cantidad de bebida tiene una distribución normal, con $\mu = 31.2$ onzas y $\sigma = 0.40$ onzas.

Uso de la distribución muestral de las medias

EJEMPLO

a. Determinar la probabilidad de seleccionar una muestra de 16 botellas y encontrar que la media muestral sea de al menos 31.38.
b. Determinar la probabilidad de que la media muestral sea a lo más 30.85
c. Determinar la probabilidad de que la media muestral este entre 30.88 y 31.5.

Uso de la distribución muestral de las medias

SOLUCIÓN

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$Z = \frac{31.38 - 31.20}{0.4/\sqrt{16}} = 1.80$$

$$\begin{aligned} P(\bar{x} \geq 31.38) &= P(Z > 1.80) \\ &= 1 - P(Z < 1.80) \\ &= 1 - 0.9641 \\ P(\bar{x} \geq 31.38) &= 0.0359 \end{aligned}$$

Conclusión: es poco probable (3.59%), en el proceso se vierte demasiada bebida en las botellas. El técnico de control de calidad debe entrevistarse con el supervisor de producción para sugerir la reducción de la cantidad de bebida en cada botella.

Uso de la distribución muestral de las medias

EJERCICIO 3

En una zona exclusiva de la ciudad, la renta de un departamento con una recámara tiene una distribución normal con media de \$2 200 mensuales y una desviación estándar de \$250 mensuales. La distribución del costo mensual no se rige por la distribución normal. De hecho, tiene un sesgo positivo. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una muestra de 50 departamentos de una recámara y hallar que la media es de por lo menos \$1 950?

Uso de la distribución muestral de las medias

EJERCICIO 4

La cantidad media de abarrotes que compra cada cliente en una tienda, es de \$23.5, con una desviación estándar de \$5. Suponga que la distribución de cantidades compradas sigue la distribución normal. En el caso de una muestra de 50 clientes,

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la muestra sea de por lo menos \$25?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la muestra sea superior a \$22 e inferior a \$25?

Uso de la distribución muestral de las medias

EJERCICIO 5

El informe anual de Nike indica que el ciudadano promedio de un lugar determinado, compra 6.5 pares de zapatos deportivos al año. Suponga que la desviación es de 2.1 y que se estudiará una muestra de 81 clientes el próximo año

a. ¿Cuál es el error estándar de la media en este experimento?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la muestra se encuentre entre 6 y 7 pares de zapatos deportivos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 7 pares?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea de por lo menos 5.5?

UAM

FACULTAD
INGENIERÍA
& ARQUITECTURA