

Estadística II

Distribución muestral de una proporción

Guía de trabajo independiente

✦ Objetivo de la guía

Comprender empíricamente el Teorema del Límite Central para proporciones y aplicar sus principios para resolver problemas de probabilidad relacionados con proporciones muestrales en contextos reales.

✦ Instrucciones Generales

1. Identifica con precisión qué te preguntan y qué datos te brindan.
2. Extrae y lista los datos o información relevantes.
3. Selecciona el método o procedimiento adecuado para resolverlo.
4. Realiza los cálculos paso a paso, verificando cada operación.
5. Confirma que la respuesta sea lógica y contextualiza el resultado.

✦ Problemas propuestos

PARTE 1: VERIFICACIÓN EMPÍRICA DEL TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL PARA PROPORCIONES

Contexto del Problema:

Usted es parte del equipo de control de calidad de TechSolve, una empresa que fabrica chips para computadoras. Un lote muy pequeño de 5 chips es sometido a una prueba de estrés térmico. Cada chip pasa (éxito = 1) o falla (fracaso = 0) la prueba. Los resultados de los 5 chips son:

Población de chips: {1, 0, 1, 0, 1}

(Donde 1 = Chip pasa la prueba, 0 = Chip falla la prueba)

Ejercicio 1:

Para monitorear la calidad, usted debe tomar muestras aleatorias de tamaño $n=2$ (con reemplazo) de este lote.

- Liste todas las muestras posibles de tamaño $n=2$ que se pueden extraer.

- Para cada muestra, calcule la proporción muestral de chips que pasan la prueba (\hat{p}).
(\hat{p} = número de chips que pasan / tamaño de la muestra)

Ejercicio 2:

Con los resultados del Ejercicio 1:

- Construya la tabla de distribución de frecuencias para la distribución muestral de \hat{p} .
- Incluya: Valores de \hat{p} , frecuencia y probabilidad $P(\hat{p})$.

Ejercicio 3:

A partir de la distribución construida en el Ejercicio 2, calcule:

- La media de las proporciones muestrales.
- La desviación estándar de las proporciones muestrales (error estándar, $\sigma_{\hat{p}}$).

Ejercicio 4:

- Calcule la proporción poblacional (p) de chips que pasan la prueba en el lote completo.
- Verifique que $\mu_{\hat{p}} = p$. ¿Qué significa este resultado en el contexto de control de calidad?
- Calcule el error estándar teórico usando la fórmula:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Compare este valor con el obtenido en el Ejercicio 3b.

Ejercicio 5:

- Grafique o describa la forma de la distribución muestral de \hat{p} .
- Considerando el tamaño de muestra ($n=2$), verifique las condiciones $n \cdot p \geq 5$ y $n \cdot (1-p) \geq 5$.
- Interprete: ¿Por qué, a pesar de no cumplirse las condiciones, este ejercicio es útil para entender el comportamiento de \hat{p} ?

PARTE 2: APLICACIONES

Problema 1: (Control de Calidad)

Una fábrica produce memorias USB. El 5% de ellas son defectuosas ($p=0.05$). Si se toma una muestra de 100 memorias, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de defectuosas en la muestra sea mayor a 0.08?

Problema 2: (Marketing Digital)

Una empresa de e-commerce sabe que el 30% de sus visitantes compra un producto ($p=0.30$). Si se analiza una muestra de 50 visitantes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de compradores esté entre 0.25 y 0.35?

Problema 3: (Salud Pública)

El 20% de los adultos en una ciudad tiene hipertensión. Si se encuesta a 80 adultos, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de hipertensos en la muestra sea menor a 0.15?

Problema 4: (Educación)

En una universidad, el 60% de los estudiantes aprueba el curso de estadística. Si se selecciona una muestra de 40 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de aprobados sea al menos 0.70?

Problema 5: (Manufactura)

Una máquina produce tornillos con una tasa de defectos del 4%. Si se inspecciona un lote de 200 tornillos, ¿dentro de qué límites simétricos alrededor de pp caerá el 90% de las proporciones muestrales?

Problema 6: (Opinión Pública)

Un candidato político tiene el 45% de intención de voto. Si se realiza una encuesta con 120 votantes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción muestral a favor difiera de pp en más de 0.05?

Problema 7: (Logística)

Una aerolínea reporta que el 8% de las maletas sufre retrasos. Si se revisa una muestra de 150 maletas, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de retrasos sea menor a 0.06?

Problema 8: (Agricultura)

El 12% de las plantas de un cultivo está infectado con un hongo. Si un agricultor revisa 60 plantas, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de infectadas supere 0.15?

Problema 9: (Seguridad)

El 3% de los paquetes en un centro de distribución contiene material frágil. Si se seleccionan 100 paquetes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de frágiles esté entre 0.01 y 0.05?

Problema 10: (Toma de Decisiones)

Un proveedor afirma que solo el 2% de sus productos son defectuosos. Un cliente encuentra 10 defectuosos en una muestra de 300 productos. ¿Qué tan probable es obtener una proporción muestral de defectuosos de al menos 0.033 si la afirmación del proveedor es cierta? ¿Debe el cliente dudar?