

## 第四讲: 元胞自动机

### 数学模型和算法的应用与 MATLAB 实现

周吕文

中国科学院力学研究所

2017 年 6 月 26 日



微信公众号: 超级数学建模

Notes

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

## 历史

最初的元胞自动机是由冯·诺依曼在 1950 年代为模拟生物细胞的自我复制而提出的, 但是并未受到学术界重视.

1970 年, 剑桥大学的约翰·何顿·康威设计了一个电脑游戏“生命游戏”后, 元胞自动机才吸引了科学家们的注意.

1983 年 S.Wolfram 发表了一系列论文, 对初等元胞机 256 种规则所产生的模型进行了深入研究, 并用熵来描述其演化行为, 将细胞自动机分为平稳型, 周期型, 混沌型和复杂型.

周吕文 中国科学院力学研究所

第四讲: 元胞自动机

## 应用

社会学: 元胞自动机经常用于研究个人行为的社会性, 流行现象. 例如人口迁移, 公共场所内人员的疏散, 流行病传播.

图形学: 元胞自动机以其特有的结构的简单性, 内在的并行性以及复杂计算的能力成为密码学中研究的热点方向之一.

物理学: 在物理学中, 元胞自动机已成功的应用于流体, 磁场, 电场, 热传导等的模拟. 例如格子气自动机.

周吕文 中国科学院力学研究所

第四讲: 元胞自动机

## 数学建模竞赛中的应用

表: 近十年来 MCM 中用到元胞自动机的特等奖论文统计

年份题号	题目	特等奖论文数
2001MCM-B	逃避飓风	$\geq 1$
2003MCM-B	Gamma 刀最佳治疗方案	1
2005MCM-B	收费亭的最优数量	3
2007MCM-B	飞机座位方案	4
2009MCM-A	交通环岛的设计	$\geq 2$
2012MCM-B	沿着“大长河”露营	1
2014MCM-A	交通右行规则	6
2017MCM-C	协调和行驶	2

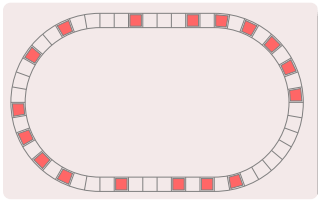
周吕文 中国科学院力学研究所

第四讲: 元胞自动机

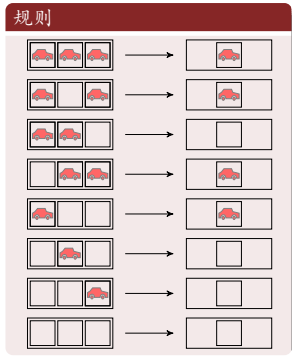
交通规则

定义

元胞分布于一维线性网格上.  
元胞仅具有**车**和**空**两种状态.  
元胞状态由周围两邻居决定.



规则



Notes

---

---

---

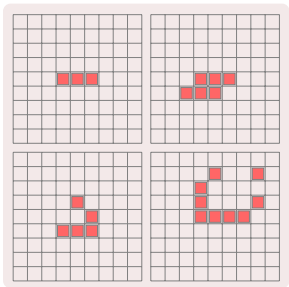
---

---

---

---

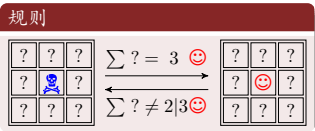
生命游戏



定义

元胞分布于二维方型网格上.  
元胞仅具有**生**和**死**两种状态.  
元胞状态由周围八邻居决定.

规则



Notes

---

---

---

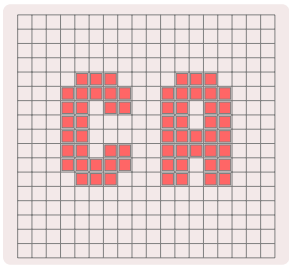
---

---

---

---

什么是元胞自动机



元胞自动机是离散的动力学系统

离散的系统: 元胞是定义在有限的时间和空间上的, 并且元胞的状态是有限.

动力学系统: 元胞自动机的举止行为具有动力学特征.

简单与复杂: 元胞自动机用简单规则控制相互作用的元胞模拟复杂世界.

Notes

---

---

---

---

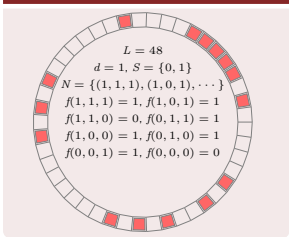
---

---

---

构成要素

Rule 184



$L = 48$   
 $d = 1, S = \{0, 1\}$   
 $N = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), \dots\}$   
 $f(1, 1, 1) = 1, f(1, 0, 1) = 1$   
 $f(1, 1, 0) = 0, f(0, 1, 1) = 1$   
 $f(1, 0, 0) = 1, f(0, 1, 0) = 1$   
 $f(0, 0, 1) = 1, f(0, 0, 0) = 0$

数学表示

$A = (L, d, S, N, f)$

$L$ : 元胞网格空间  
 $d$ : 元胞空间的维数  
 $S$ : 有限离散的状态集合  
 $N$ : 某邻域内所有元胞的集合  
 $f$ : 局部映射或局部规则

Notes

---

---

---

---

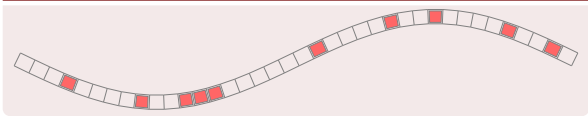
---

---

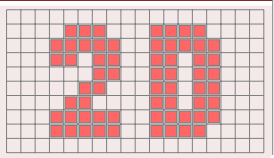
---

Notes

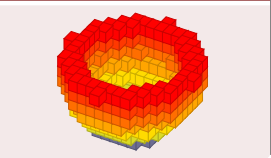
一维



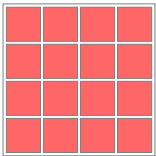
二维



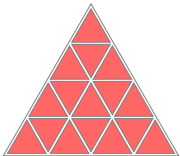
三维



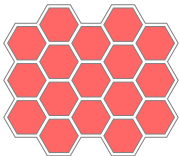
Notes



正方形网格



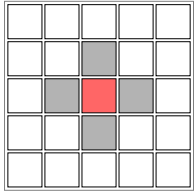
三角型网格



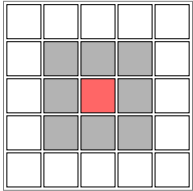
六边型网格

Notes

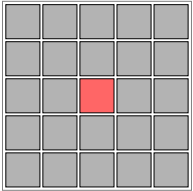
Notes



VonNeumann 邻居

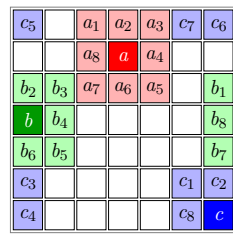


Moore 邻居



扩展 Moore 邻居

## Notes



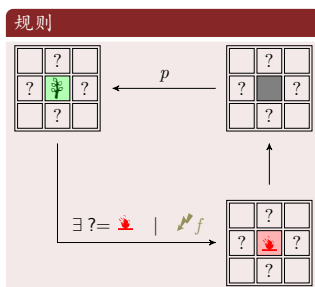
## 二维 Moore 邻居周期边界条件

## Notes

根据元胞当前状态及其邻居状况确定下一时刻该元胞状态的  
动力学函数，简单讲，就是一个状态转移函数。

**合法型:** 总和型规则属于合法型规则, 但如果把元胞自动机的规则限制为总和型, 会使元胞自动机具有局限性.

## Notes



## Notes

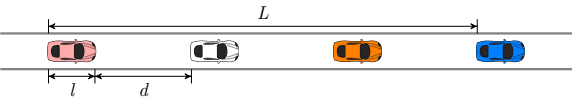
$$\rho_f + \rho_e + \rho_t = 1$$
$$\rho_f = p\rho_e$$
$$f \ll p \ll T_{\text{smax}}$$

Notes

```
01 n = 300; % 定义表示森林的矩阵大小
02 Pflight = .000005; Pgrowth = .01;% 定义闪电和生长的概率
03 UL = [n 1:n-1]; DR = [2:n 1]; % 定义上左, 下右邻居
04 veg=zeros(n,n); % 初始化表示森林的矩阵
05 imh = image(cat(3,veg,veg,veg)); % 可视化表示森林的矩阵
06 % veg = {empty=0 burning=1 green=2}
07 for i=1:3000 % 主循环开始
08     sum = (veg(UL,:)==1) + ...
09     (veg(:,UL)==1) + (veg(:,DR)==1) + ...
10     (veg(DR,:)==1);% 求上下左右四个邻居和
11 % 根据规则更新森林矩阵: 树 = 树 - 着火的树 + 新生的树
12     veg = 2*(veg==2) - ...
13     ((veg==2) & (sum>0|(rand(n,n)<Pflight))) + ...
14     2*((veg==0) & rand(n,n)<Pgrowth);
15     set(imh, 'cdata', cat(3,(veg==1),(veg==2),zeros(n)))
16     drawnow %可视化表示森林的矩阵
17 end %主循环结束
```

Notes

Notes



车距: 相邻两车, 后车头到前车尾的距离

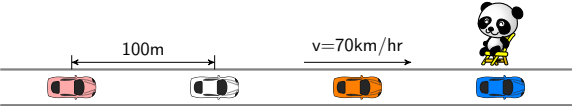
$$d = \frac{L - Nl}{N} = \frac{1}{\rho} - l$$

密度: 单位长度上分布的车辆数

$$\rho = \frac{N}{L} = \frac{1}{d + l}, \rho_{\max} = \frac{1}{l}$$

Notes

如果汪老师坐在一条公路的边上, 公路上的车速为 70km/hr, 车流密度为 10 veh/km. 每小时能从汪老师身边驶过多少辆车?



流量方程: 单位时间内通过某路段的车辆数

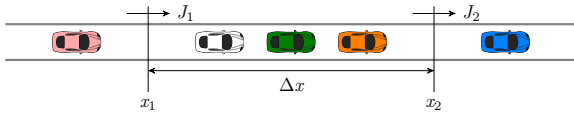
$$J = \rho v$$

量纲: [veh/hr] = [veh/km][km/h]

$$\rho = 0 \implies J = 0, \rho = \rho_{\max} \implies v = 0 \implies J = 0$$

## 交通概念：守恒方程

长为  $\Delta x = x_2 - x_1$  的一段公路, 在时间间隔  $\Delta t = t_2 - t_1$  里, 车辆数  $N$  变化如何?

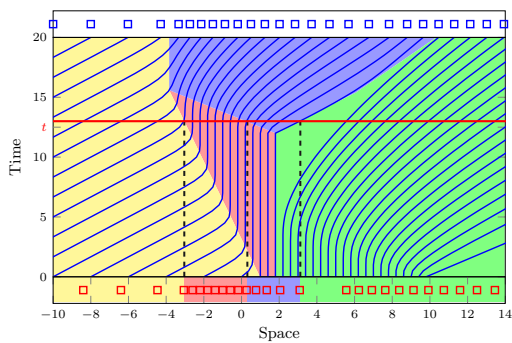


$$(\textcolor{red}{J_{x_1}} - \textcolor{red}{J_{x_2}})\textcolor{red}{\Delta t} = \Delta N = (\textcolor{blue}{\rho_{t_2}} - \textcolor{blue}{\rho_{t_1}})\Delta x \implies \frac{J_{x_1} - J_{x_2}}{\Delta x} = \frac{\rho_{t_2} - \rho_{t_1}}{\Delta t}$$

## 守恒方程

$$J_x + \rho_t = (\rho v)_x + \rho_t = 0$$

## 交通概念：时空轨迹



## 交通概念：宏观连续模型

### Lighthill-Whitham-Richards 模型

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = 0$$

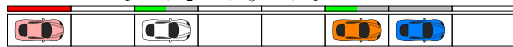
$$J = q(\rho, v) = q(\rho, v(\rho)) = q(\rho)$$

## Greenshields 速度函数

$$\begin{aligned} v(\rho) &= v_{\max} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \\ J(\rho) &= v_{\max} \left( \rho - \frac{\rho^2}{\rho_{\max}} \right) \end{aligned}$$

## 规则

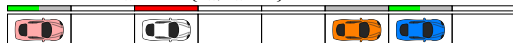
0. 初始状态:  $v_1 = 2, v_2 = 1, v_3 = 1, v_4 = 0$



1. 加速规则:  $v_n = \min\{v_{\max}, v_n + 1\}$ ,  $v_{\max} = 2$



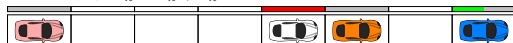
2. 防止碰撞:  $v_n = \min\{v_n, d_n - 1\}$



3. 随机减速:  $v_n \stackrel{p}{=} \max\{v_n - 1, 0\}$ ,  $\text{rand}_1 \leq p$



4. 位置更新:  $x_n = x_n + v_n$



## Notes

---

---

---

---

---

---

## Notes

---

---

---

---

---

---

## Notes

---

---

---

---

---

---

## Notes

---

---

---

---

---

---

简介

案例

总结

森林火灾

交通模拟

应用展示

简介

案例

总结

森林火灾

交通模拟

应用展示

程序实现



临界密度

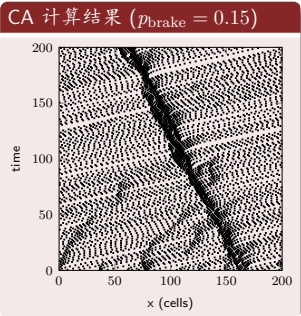
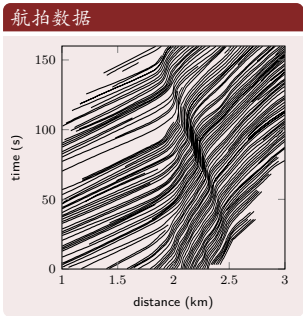
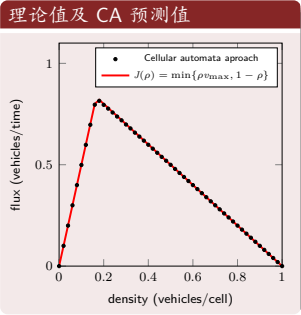
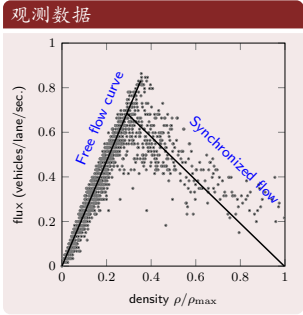
$$\rho_c = \frac{1}{v_{\max} + 1} = \frac{1}{5 + 1}$$

平均速度

$$v = \min\{v_{\max}, d\} = 2$$

车流量

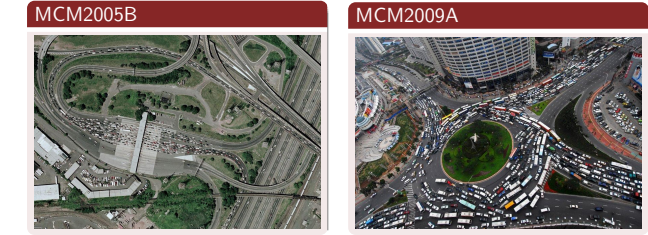
$$J = \min\{\rho v_{\max}, \rho d\} = 2/3$$
$$= \min\{\rho v_{\max}, 1 - \rho\}$$



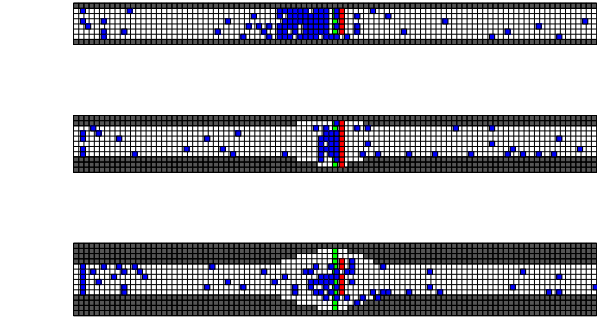
```
ns.m
01 function flux = ns(rho,p,L,tmax)% rho=0.2;p=0.2;L=72;tmax=72
02 ncar = round(L*rho); % ncar=L*rho
03 x = sort(randperm(L, ncar)); % 1:ncar中随机不重复的L个数
04 vmax = 5; % 最大速度
05 v = vmax * ones(1, ncar); % 初始化所有车速度为vmax
06 for t = 1:tmax
07     v = min(v+1, vmax); % 加速规则
08     gaps = gaplength(x,L,ncar);
09     v = min(v, gaps-1); % 防止碰撞
10     v = max(v- (rand(1,ncar)<p), 0); % 随机减速 binornd
11     x = x + v; % 位置更新
12     x(x>L) = x(x>L) - L; % 周期边界
13     flux = flux + sum(v)/L; % 空间平均
14 end
15 flux = flux / tmax; % 时间平均

16 function gaps = gaplength(x, L, ncar)
17 gaps = zeros(1, ncar);
18 gaps = x([2:end 1]) - x; % d(i) = x(i+1)-x(i)
19 gaps(gaps<0) = gaps(gaps<0)+L;% d(i) = d(i) + L, if d(i)<0
```

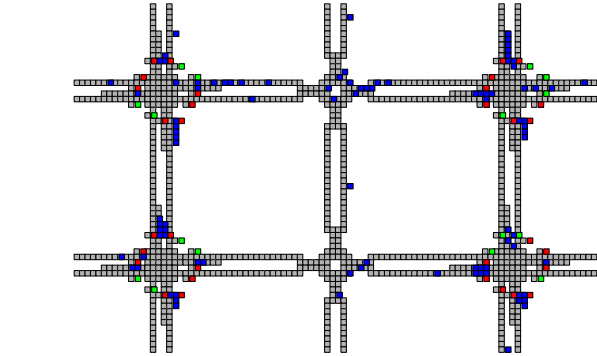
Notes



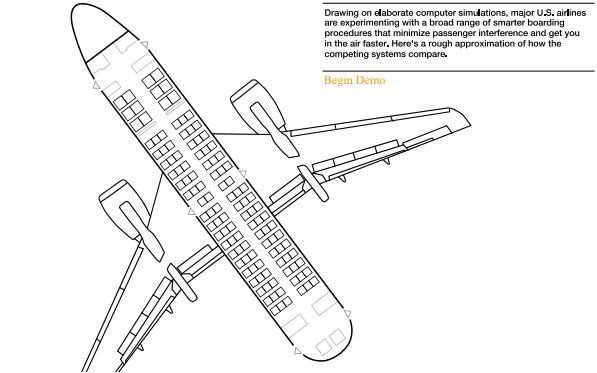
Notes



Notes

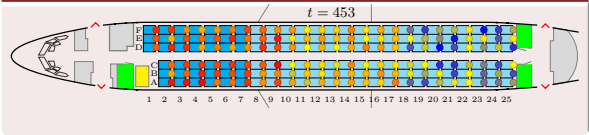


Notes

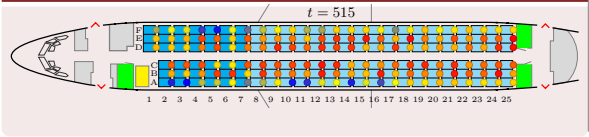




Back to Front



Window First



Notes

---

---

---

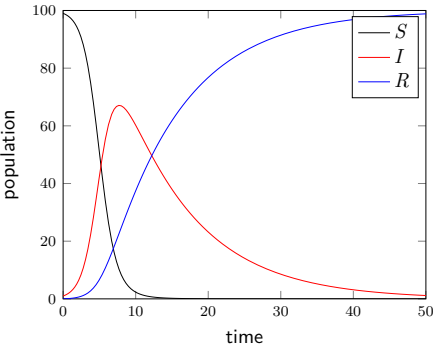
---

---

---

---

---



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

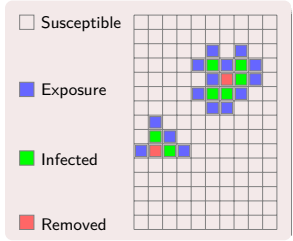
---

---

---

---

---



**规则**

二维网络 VonNeumann 邻居.  
四种状态: 易感 ( $S$ ), 潜伏  $E$ , 感染  $I$ , 移除  $R$ .  
邻居中有感染  $I$ , 则  $S$  以  $p$  的概率  $S \rightarrow E$ .  
经过确定的时间步  $E \rightarrow I$ .  
经过确定的时间步  $I \rightarrow R$ .

Notes

---

---

---

---

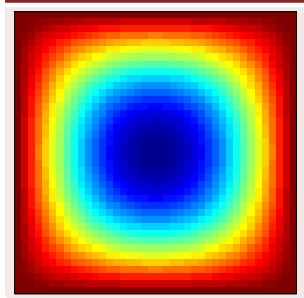
---

---

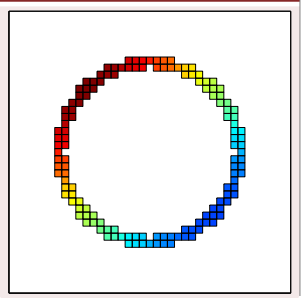
---

---

有限差分解热传导方程



格子玻尔兹曼法解扩散方程



Notes

---

---

---

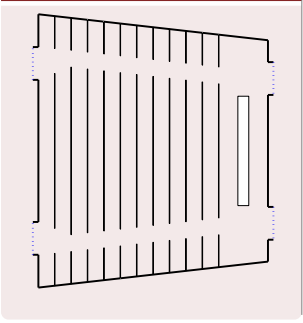
---

---

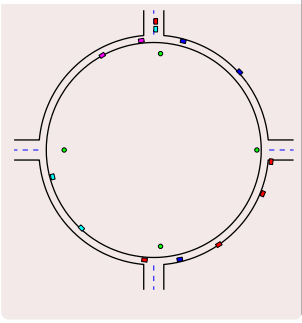
---

---

疏散问题



交通问题



周昌文 中国科学院力学研究所 第四讲：元胞自动机

Notes

---

---

---

---

---

---

---

简介  
案例  
总结

补充  
总结  
练习

总结

特点

离散的空间, 离散的时间.  
离散有限的状态.  
同质的元胞.  
局部的作用, 同步的计算.

注意

元胞自动机比较适合解决具有空间离散特点的动力学问题.  
根据问题适当改造元胞自动机, 可使应用范围更广.  
不要在不适当的问题上迁强地使用元胞自动机.

周昌文 中国科学院力学研究所 第四讲：元胞自动机

Notes

---

---

---

---

---

---

---

简介  
案例  
总结

补充  
总结  
练习

练习

简单

- 1 建立 SIR 传染病元胞自动机模型并模拟, 分析参数和结果.
- 2 制定更换车道规则, 实现双车道圆环内的 NS 交通流模拟.

较难

- 1 美赛 2015A 根除埃博拉问题.
- 2 国赛 2013A 车道被占用问题.

挑战

- 1 自学 LBM, 并解决国赛 2011A 城市表层土壤重金属污染.
- 2 第三届全国计算机仿真大赛: 口取消左转能否缓解拥堵.

周昌文 中国科学院力学研究所 第四讲：元胞自动机

Notes

---

---

---

---

---

---

---

Thank You!!!