

第六讲: 图论模型和算法

数学模型和算法的应用与 MATLAB 实现

周吕文

中国科学院力学研究所

2017 年 7 月 3 日



微信公众号: 超级数学建模

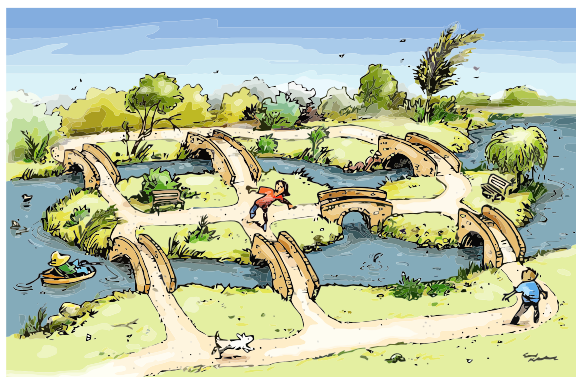
Notes

Notes

Notes

Notes

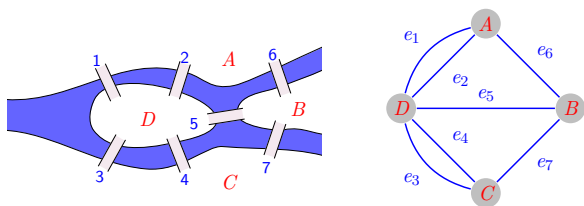
图论的起源: 哥尼斯堡七桥问题



周吕文 中国科学院力学研究所

第六讲: 图论模型和算法

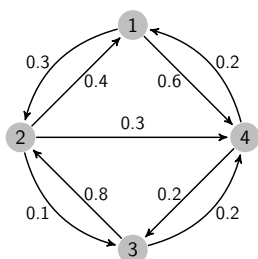
图论的起源: 哥尼斯堡七桥问题



周吕文 中国科学院力学研究所

第六讲: 图论模型和算法

图论的定义



图论 (Graph theory) 以图为研究对象, 研究顶点和边组成的图形的数学理论和方法。

图论中的图是由若干给定的顶点及连接两顶点的边所构成的图形。

图论中的图通常用来描述某些事物之间的某种特定关系, 用顶点代表事物, 用边表示相应两个事物间的关系。

周吕文 中国科学院力学研究所

第六讲: 图论模型和算法

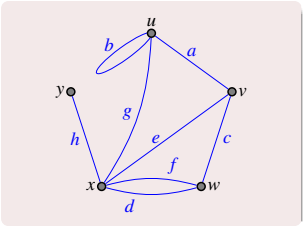
表: 近几年 MCM 中用到图论和网络的特等奖论文统计

年份题号	题目	特等奖论文数
2011 MCM-B	中继器协调问题	4
2012 MCM-B	犯罪克星	7
2013 ICM-C	地球健康的网络模型	5
2014 MCM-B	大学传奇教练	1
2014 ICM-C	使用网络来评估影响和冲击	6
2015 ICM-C	组织人力资本管理	6

图论算法简介
概念、算法和实例
总结

基本概念
常用算法
数据案例

图（无向图）的构成



$$V(G) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

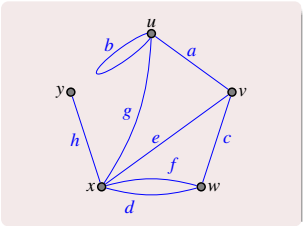
$$\varphi_G(e) = vx = xv$$

- 图的构成
- 顶点集 边集 关联函数
- 顶点集 $V(G)$
- 图 G 中所有顶点的集合。
- 边集 $E(G)$
- 图 G 中所有边的集合。
- 关联函数 φ_G
- $\varphi_G : E(G) \longrightarrow V(G)$

图论算法简介
概念、算法和实例
总结

基本概念
常用算法
数据案例

环 / 连杆 / 重边



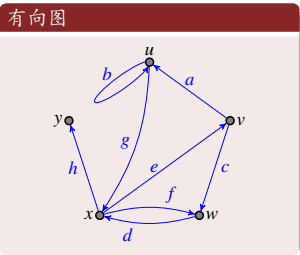
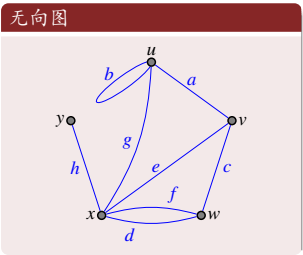
b 为环; a 为连杆; d, f 为重边

- 环
- 端点重合为一点的边。
- 连杆
- 端点不重合的边。
- 重边
- 具有相同的两个端点的边。

图论算法简介
概念、算法和实例
总结

基本概念
常用算法
数据案例

图（无向图）和有向图



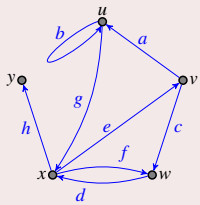
Notes

Notes

Notes

Notes

有向图的构成



$$V(G) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$\varphi_G(a) = (u, v) = uv$$

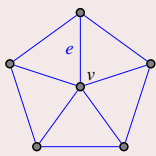
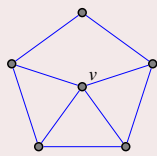
有向图的构成

顶点集 弧集 关联函数

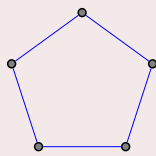
顶点集 $V(G)$ 图 G 中所有顶点的集合。弧集 $A(G)$ 图 G 中所有弧的集合。关联函数 φ_G

$$\varphi_G : A(a) \longrightarrow V(G)$$

子图

 G 无向图 G  $G \setminus e$

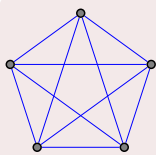
去边

 $G - v$

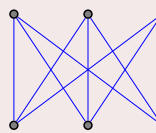
去顶点

若 $V(H) \subset V(G)$ 且 $E(H) \subset E(G)$ ，则称 H 是 G 的子图。

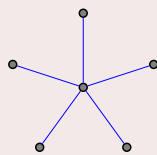
一些特殊的图



完全图

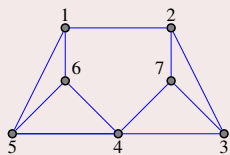


完全二分图

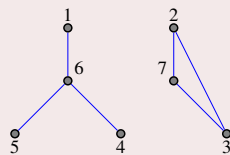


星图

一些特殊的图



连通图



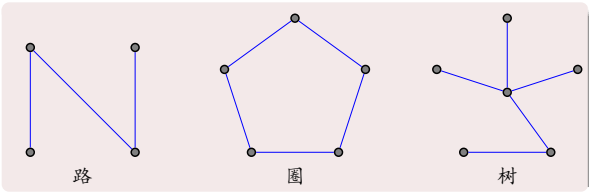
不连通图

Notes

Notes

Notes

Notes



图论算法简介
概念、算法和实例
总结

基本概念
常用算法
数据案例

图与网络的数据结构：无向图关联 / 邻接矩阵



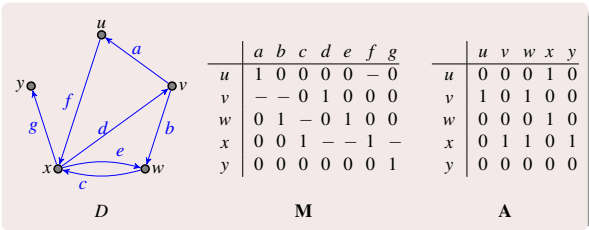
关联矩阵 $M = (m_{ve})$, $m_{ve} \in \{0, 1, 2\}$ 表示边 e 与顶点 v 关联的次数。

邻接矩阵 $A = (a_{uv})$, a_{uv} 表示是否存在从顶点 u 到 v 的弧。

图论算法简介
概念、算法和实例
总结

基本概念
常用算法
数据案例

图与网络的数据结构：有向图关联 / 邻接矩阵



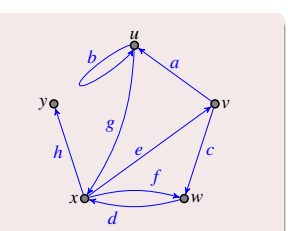
关联矩阵 $M = (m_{va})$, $m_{va} \in \{1, -1, 0\}$ 分表示弧 a 与顶点 v 关联的关系（尾、头、其它）。

邻接矩阵 $A = (a_{uv})$, a_{uv} 表示是否存在从顶点 u 到 v 的弧。

图论算法简介
概念、算法和实例
总结

基本概念
常用算法
数据案例

顶点的度和中心度



度 $d_G(v)$

G 中与 v 关联的边数,
 $d_G(v) = d^-(v) + d^+(v)$ 。

出度 $d^-(v)$

以 v 为弧尾, 起始于该点的
弧数。

入度 $d^+(v)$

以 v 为弧头, 终止于该点的
弧数。

$$d^-(x) = 3$$

$$d^+(x) = 2$$

Notes

Notes

Notes

Notes

顶点的度和中心度

点度中心度

$$C_D(v) = d^+(v)$$

接近中心度

$$C_C(v) = \frac{1}{\sum_{u \in V} d(u, v)}$$

中间中心度

$$C_B(v) = \sum_{s \neq v \neq t \in V} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}$$

特征向量中心度

$$C_E(v) = x_v = \frac{1}{\lambda} \sum_{u \in M(v)} x_u = \frac{1}{\lambda} \sum_{u \in V} a_{vu} x_u$$

Notes

图论算法简介
概念、算法和实例
总结

基本概念
常用算法
数据案例

图论工具箱：函数

图论工具箱的相关命令	
函数名	功能
graphallshortestpaths	求图中所有顶点对之间的最短距离
graphconnredcomp	找无(有)向图的(强/弱)连通分支
graphisreddag	测试有向图是否含有圈
graphisomorphism	确定一个图是否有生成树
graphmaxflow	计算有向图的最大流
graphminspantree	在图中找最小生成树
graphpred2path	把前驱顶点序列变成路径的顶点序列
graphshortestpath	求指定一对顶点间的最短距离和路径
graphtopoorder	执行有向无圈图的拓扑排序
graphtraverse	求从一顶点出发, 所能遍历图中的顶点

Notes

图论算法简介
概念、算法和实例
总结

基本概念
常用算法
数据案例

图论工具箱：数据结构

满矩阵和稀疏矩阵 (full==sparse)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (2,1) & 2 \\ (3,1) & 3 \\ (3,2) & 6 \\ (4,2) & 5 \\ (5,2) & 3 \\ (5,3) & 1 \\ (5,4) & 1 \\ (6,4) & 2 \\ (6,5) & 4 \end{matrix}$$

Notes

图论算法简介
概念、算法和实例
总结

基本概念
常用算法
数据案例

图论工具箱：用法举例

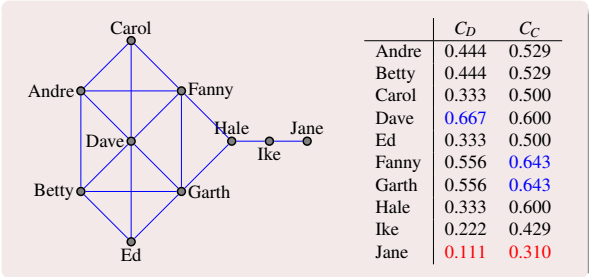
graphshortestpath 函数用法

```
01 [a,b,c,d,e,f] = deal(1,2,3,4,5,6);
02 %
03 w = [ 0 2 3 0 0 0 % a
04       2 0 6 5 3 0 % b
05       3 6 0 0 1 0 % c
06       0 5 0 0 1 2 % d
07       0 3 1 1 0 4 % e
08       0 0 0 2 4 0]; % f
09
10 W = sparse(w);
11 [dist, path, pred] = graphshortestpath(W, a, f)
```

Notes

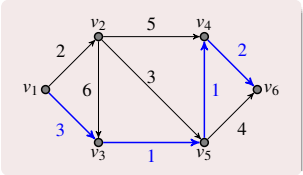
网络分析工具箱的相关命令

函数名	功能
degrees	求图中所有顶点的度，入度和出度
ave_neighbor_deg	求图中所有顶点的相邻顶点平均度
closeness	求图中所有顶点的接近中心度
node_betweenness_faster	求图中所有顶点的中间中心度
edge_betweenness	求图中所有边的中间中心度
eigencentrality	求图中所有顶点的特征向量中心度
clust_coeff	求图中所有顶点的集聚系数



点度中心度的接近中心度的求解

```
01 n = 10; % 顶点数
02 % 给Andre, Betty, ..., Jane标号为1, 2, ..., 10.
03 Andre = 1; Betty = 2; Carol = 3; Dave = 4; Ed = 5;
04 Fanny = 6; Garth = 7; Hale = 8; Ike = 9; Jane =10;
05 % 根据图构造邻接矩阵.
06 A = zeros(n);
07 A(Andre, [Betty, Carol, Dave, Fanny]) = 1;
08 A(Betty, [Andre, Dave, Ed, Garth]) = 1;
09 A(Carol, [Andre, Dave, Fanny]) = 1;
10 A(Dave, [Andre, Betty, Carol, Ed, Fanny, Garth]) = 1;
11 A(Ed, [Betty, Dave, Garth]) = 1;
12 A(Fanny, [Andre, Carol, Dave, Garth, Hale]) = 1;
13 A(Garth, [Betty, Dave, Ed, Fanny, Hale]) = 1;
14 A(Hale, [Fanny, Garth, Ike]) = 1;
15 A(Ike, [Hale, Jane]) = 1;
16 A(Jane, [Ike]) = 1;
17 Cd = degrees(A)' / (n-1) % 计算点度中心度并标准化.
18 Cc = closeness(A)*(n-1) % 计算接近中心度并标准化.
```



$G(V, W)$ 边权为 $w(v_i, v_j)$ 。

两个顶点 v_s 和 v_t 间存在一条总权最小的路

$$w(\mu) = \min \sum_{(v_i, v_j) \in \mu} w(v_i, v_j)$$

```
01 w = [ 0 2 3 0 0 0 % a
02       2 0 6 5 3 0 % b
03       3 6 0 0 1 0 % c
04       0 5 0 0 1 2 % d
05       0 3 1 1 0 4 % e
06       0 0 0 2 4 0]; % f
07 W = sparse(w);
08 [dist, path, pred] = graphshortestpath(W, 1, 6)
```

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes

Notes

图论算法简介
概念、算法和实例
总结

基本概念
常用算法
数据案例

最小生成树

$G(V, E)$ 边权为 $w(v_i, v_j)$ 。

若存在 $T \subseteq E$ 且为无循环图, 使权 T 的总权最小

$$w(T) = \min \sum_{(v_i, v_j) \in T} w(v_i, v_j)$$

```
01 w = [ 0   4  inf  5  inf  3
02       4   0   5  inf  3   3
03      inf  5   0   5   3  inf
04       5  inf  5   0   2   4
05      inf  3   3   2   0   1
06       3   3  inf  4   1   0];
07 W = sparse(w);
08 [ST, pred] = graphminspantree(W);
```

周吕文 中国科学院力学研究所 第六讲: 图论模型和算法

图论算法简介
概念、算法和实例
总结

基本概念
常用算法
数据案例

最短 (Hamilton) 回路

Notes

$G(V, W)$ 边权为 $w(v_i, v_j)$ 。

寻找 G 中的回路 C , 使得 C 的总权最小

$$w(C) = \min \sum_{(v_i, v_j) \in C} w(v_i, v_j)$$

```
01 R = 6378.137;
02 dist = zeros(n);
03 for i = 1:n
04     for j = i+1:n
05         dist(i,j) = distance(lat(i),lon(i), lat(j),lon(j), R);
06     end
07 end
08 [order,totdist] = minhamiltonpath(dist)
```

周吕文 中国科学院力学研究所 第六讲: 图论模型和算法

灾情巡视路径: 问题

分三组 (路) 巡视, 设计总路程最短且各组均衡的巡视路线

Notes

图论算法简介
概念、算法和实例
总结

基本概念
常用算法
数据案例

灾情巡视路径: 思路

Notes

数据预处理

构造完全图: 由图论工具箱 graphallshortestpaths 函数求得任意两点最短路。

明确目标: 将 G 分成三个子图 $G(V_1)$, $G(V_2)$ 和 $G(V_3)$

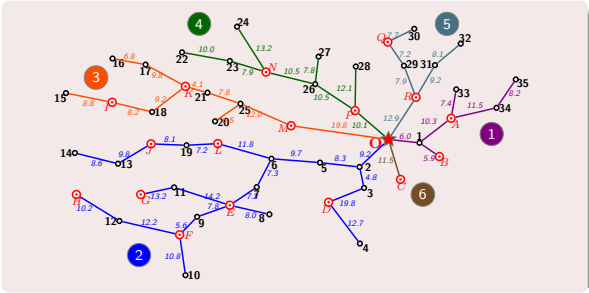
子顶点集中都包含顶点 O : $O \in V_i, i = 1, 2, 3$;

子顶点集中包含了 V 中所有顶点: $\cup V_i = V$;

最小 Hamilton 回路长度总和最小化: $\min C_\Sigma = \min \sum C_i$

最小 Hamilton 回路长度均衡化: $\min \{C_{\max} - C_{\min}\}$

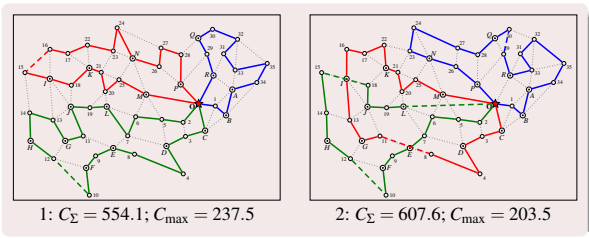
灾情巡视路径：分组



分组方案	
1	(1 5), (2 6), (3 4)
2	(1 4 5), (2; 15, 18), (8 6; 22, 3, 4, 8, 11, 13, D, G)

Notes

灾情巡视路径：结果



Notes

要求

掌握图论常见问题（最短路径、最小生成树等）的数学描述和实际意义。

掌握节点中心度的数学描述和实际意义。

会使用工具箱函数求解图论常见问题。

会使用工具箱函数求解网络常见问题。

Notes

作业

自行学习所给图论教程，了解最大流、最小费用流问题。

结合模拟退火算法，针对灾情巡视路径问题开发一个自动分组程序。

使用网络方法，解决“2014 ICM-C 使用网络来评估影响和冲击”问题。

Notes

Thank You!!!

Notes

Notes

Notes

Notes
