

第五讲：评价和预测

数学模型和算法的应用与 MATLAB 实现

周吕文

中国科学院力学研究所

2017 年 6 月 27 日



微信公众号：超级数学建模

Part I

评价模型

1 加权平均

2 层次分析

- 问题
- 模型
- 程序

3 模糊综合评价

- 介绍
- 模型
- 程序

加权平均：对女星的评价

加权平均：评分和权重难以估计

$$p = \sum_{i=1}^n w_i p_i$$

评分和权重

	权重	苍井	小泽
颜值	0.3	95	85
身材	0.3	90	95
声音	0.2	82	85
演技	0.2	85	90

评分

$$p_{\text{苍}} = 0.3 \times 95 + 0.3 \times 90 + 0.2 \times 82 + 0.2 \times 85$$

$$p_{\text{小}} = 0.3 \times 85 + 0.3 \times 95 + 0.2 \times 85 + 0.2 \times 90$$

wetavg.m

```
01 Wi = [0.3 0.3 0.2 0.2];  
02 Pi = [ 95  90  82  85 ; 85  95  85  90 ]; % sum(Wi.*Pi,2)  
03 P = Wi * Pi' % = [88.9  89.0]
```

1 加权平均

2 层次分析

- 问题
- 模型
- 程序

3 模糊综合评价

- 介绍
- 模型
- 程序

层次分析：对女星的评价

目标层

选一名女主角

准则层

颜值

身材

声音

演技

备选层



层次分析：构造判断矩阵

准则

颜值 C_1 、身材 C_2 、声音 C_3 、演技 C_4

两两比较： C_i 相对于 C_j 的重要程度

$$a_{i,j} = \frac{C_i}{C_j} \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

判断矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1/1 & 2/1 & 5/1 & 3/1 \\ 1/2 & 1/1 & 3/1 & 1/2 \\ 1/5 & 1/3 & 1/1 & 1/4 \\ 1/3 & 2/1 & 4/1 & 1/1 \end{bmatrix}$$

- $A_{14} = 3/1$ 表示颜值比演技稍重要
- $A_{13} = 5/1$ 表示颜值比声音明显重要

层次分析：构造判断矩阵

准则

颜值 B_1 、身材 B_2 、声音 B_3 、演技 B_4

两两比较： B_i 相对于 B_j 的重要程度

$$a_{i,j} = \frac{B_i}{B_j} \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

判断矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1/1 & 2/1 & 5/1 & 3/1 \\ 1/2 & 1/1 & 3/1 & 1/2 \\ 1/5 & 1/3 & 1/1 & 1/4 \\ 1/3 & 2/1 & 4/1 & 1/1 \end{bmatrix}$$

- $a_{14} = 3$: C_1 比 C_4 稍重要; $a_{13} = 5$: C_1 比 C_3 明显重要
- 若比较结果前后完全一致: $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$

层次分析：一致性检验

- 若 $A \gg C$ 且 $B \gtrsim C$, 则 $A > B$

一致性指标 CI 、一致性比例 CR 、平均随机一致性指标 RI

$$CI = \frac{\lambda - n}{n - 1}, \quad CR = \frac{CI}{RI(n)} < 0.1$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

AHP.m

```
01 A = [1/1  2/1  5/1  3/1      % 判断矩阵
02       1/2  1/1  3/1  1/2
03       1/5  1/3  1/1  1/4
04       1/3  2/1  4/1  1/1];
05 [V, D] = eig(A);           % 计算特征向量V和特征值D: A*V=V*D
06 [lamda, i] = max(diag(D)); % 最大特征值lambda及其位置i
07 CI = (lambda-4) / (4-1);   % 一致性指标
08 CR = CI / 0.9              % 一致性比例 = 0.0512
```

层次分析：层次单排序

- 对于上一层某因素而言，本层次各因素的重要性的排序。
- 上一层次某因素相对重要性：判断矩阵 A 对应于最大特征值 λ_{\max} 的特征向量 W 。

AHP.m

```

01 A = [1/1  2/1  5/1  3/1    % 判断矩阵
02      1/2  1/1  3/1  1/2
03      1/5  1/3  1/1  1/4
04      1/3  2/1  4/1  1/1];
05 [V, D] = eig(A);           % 计算特征向量V和特征值D: A*V=V*D
06 [lamda, i] = max(diag(D)); % 最大特征值lambda及其位置i
07 W = V(:,i);                % 最大特征值对应的特征向量
08 w = W/sum(W)                % 归一化 = [0.48 0.19 0.07 0.26]'

```

层次分析：层次总排序

目标层

选一名女主角

准则层

颜值

身材

声音

演技

备选层



层次分析：层次总排序

ahpactor.m

```
01 A = [1/1  2/1  5/1  3/1; 1/2  1/1  3/1  1/2
02       1/5  1/3  1/1  1/4; 1/3  2/1  4/1  1/1];
03 [w, CR] = aph(A);
04
05 A1 = [1/1  1/2  3/1; 2/1  1/1  5/1; 1/3  1/5  1/1]; % 颜值
06 [w1, CR1] = aph(A1); ...
07 P = [w1 w2 w3 w4] * w
```

AHP.m

```
01 function [w, CR] = AHP(A)
02 RI = [ 0.00 0.00 0.58 0.90 1.12 1.24 1.32 1.41 1.45];
03 n = size(A,1);
04 [V, D] = eig(A);
05 [lamda, i] = max(diag(D));
06 CI = (lamda-n) / (n-1);
07 CR = CI / RI(n);
08 W = V(:,i); w = W/sum(W);
```

1 加权平均

2 层次分析

- 问题
- 模型
- 程序

3 模糊综合评价

- 介绍
- 模型
- 程序

模糊综合评价：模糊数学

秃子悖论：天下所有的人都是秃子

- 设头发的根数为 n , $n=1$ 显然为秃子。
- 若 $n=k$ 为秃子, 则 $n=k+1$ 亦为秃子。

模糊概念

- 从属于该概念到不属于该概念之间无明显分界线。
- 用隶属程度代替属或不属于, 如某人属于秃子的程度为 0.8。

模糊综合评价

模糊综合评价要素

- 因素集: $U = \{\text{颜值 } u_1, \text{身材 } u_2, \text{声音 } u_3, \text{演技 } u_4\}$
- 评语集: $V = \{\text{超棒 } v_1, \text{很棒 } v_2, \text{不错 } v_3, \text{一般 } v_4, \text{呕心 } v_5\}$

权重 W 和网友投票 (%) R

	权重	苍井					小泽				
颜值	0.4	[38	34	17	11	0]	[52	12	12	24	0]
身材	0.2	[26	41	20	13	0]	[32	22	23	23	0]
声音	0.1	[27	23	21	15	14]	[11	12	17	21	39]
演技	0.3	[14	19	22	12	33]	[26	27	12	21	14]

模糊合成

$$B = W \cdot R = [0.4, 0.2, 0.1, 0.3] \odot \begin{bmatrix} 0.38 & 0.34 & 0.17 & 0.11 & 0.00 \\ 0.26 & 0.41 & 0.20 & 0.13 & 0.00 \\ 0.27 & 0.23 & 0.21 & 0.15 & 0.14 \\ 0.14 & 0.19 & 0.22 & 0.12 & 0.33 \end{bmatrix}$$

其中 $\odot \in \{M(\wedge, \vee), M(\cdot, \vee), M(\wedge, \oplus), M(\cdot, \oplus)\}$ 为合成运算。

$M(\cdot, \vee)$

$$s_k = \vee_{j=1}^m (w_j \cdot r_{j,k}) = \max_{1 \leq j \leq m} \{w_j \cdot r_{jk}\}$$

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.12 & 0.12 \end{bmatrix}$$

模糊综合评价

fuzzyeval.m

```
01 W = [0.4 0.2 0.1 0.3];
02 R = [0.38 0.34 0.17 0.11 0.00
03      0.26 0.41 0.20 0.13 0.00
04      0.27 0.23 0.21 0.15 0.14
05      0.14 0.19 0.22 0.12 0.33];
06
07 % B = max(R .* W')
08 B = max(R .* repmat(W',1,size(R,2)))
```

Part II

预测模型

4 拟合

5 时间序列

- 介绍
- 方法

6 灰色预测

- 介绍
- 模型
- 程序

拟合

- 拟合是最基本的预测方法。
- polyfit / fit 用法见第二讲。

4 拟合

5 时间序列

- 介绍
- 方法

6 灰色预测

- 介绍
- 模型
- 程序

时间序列

定义

- 时间序列：将预测对象按照时间顺序排列而成的序列。
- 时序预测：根据时序过去的变化规律，推测今后趋势。

时间序列的变化形式

- 长期趋势变动 T_t
- 季节变动 S_t
- 循环变动 C_t
- 不规则变动 R_t

模型

- 加法模型
- 乘法模型
- 混合模型

时间序列：移动平均法

一次移动平均法

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{1}{N}(y_t + \cdots + y_{t-N+1}), t = N, N+1, \cdots, T$$

预测的标准误差

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{t=N+1}^T (\hat{y}_t - y_t)^2}{T - N}}$$

企业收入

```
01 % 近9月企业的收入，求第10月收入
02 y = [533.8 574.6 606.9 649.8 705.1 772.0 816.4 892.7 963.9];
03 T = 9; N = 4;
04 c = cumsum(y);
05 % [(y1+...+y4) - 0, (y1+...+y5) - y1, (y1+...+y6) - (y1+y2)]/N
06 yhat = ( c(end)-[0 c(1:end-N)] )/N;
07 y10 = yhat(end)
08 S = norm(yhat(1:end-1) - y(N+1:end))/sqrt(T-N)
```

时间序列：平滑法

一次指数平滑法

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \alpha)^j y_{t-j} = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_t$$

一次差分指数平滑法

$$\nabla \hat{y}_t = y_t - y_{t-1}$$

$$\nabla \hat{y}_{t+1} = \alpha \nabla y_t + (1 - \alpha) \nabla \hat{y}_t$$

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha \nabla \hat{y}_{t+1} + y_t$$

4 拟合

5 时间序列

- 介绍
- 方法

6 灰色预测

- 介绍
- 模型
- 程序

灰色预测

特点

- 模型使用的不是原始数据，而是生成数据。
- 不需要很多数据，一般只需 ≥ 4 个数据。
- 只适用于中短期的预测，只适合指数增长的预测。

GM(1,1) 预测模型

- GM(1,1) 表示模型是 1 阶微分方程，且只含 1 个变量。

GM(1,1) 预测模型

原始序列

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$$

可行性检验条件

$$\lambda(k) = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)} \in \left(e^{-\frac{2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+1}}\right)$$

若不满足可行性检验条件，则可作数据平移处理

$$y^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) + c$$

GM(1,1) 预测模型

一次累加生成序列

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}, \text{ 其中 } x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$$

均值生成序列

$$Z^{(1)} = \{z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)\}$$

其中 $z^{(1)}(k) = x^{(1)}(k)/2 + x^{(1)}(k-1)/2$ 。

灰微分方程

$$x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = b, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

白化微分方程

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)}(t) = b$$

GM(1,1) 预测模型

a, b 的最小二乘估计

$$[\hat{a}, \hat{b}]^T = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{Y} = [x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n)], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

白化微分方程求解

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \right) e^{-\hat{a}k} + \frac{\hat{b}}{\hat{a}}$$

模型还原

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$$

GM(1,1) 预测模型

残差检验: $\varepsilon(k) < 0.2$

$$\varepsilon(k) = \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

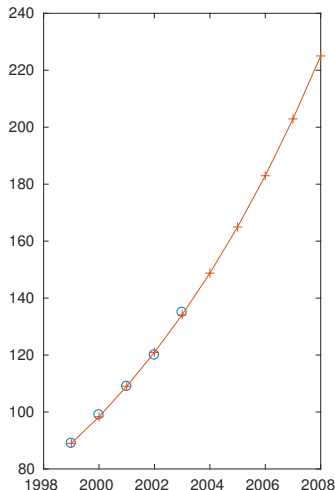
级比偏差值检验: $\rho(k) < 0.2$

$$\lambda(k) = 1 - \left(\frac{1 - 0.5a}{1 + 0.5a} \right) \lambda(k)$$

程序

gm11.m

```
01 t0 = [1999:2003]';  
02 X0 = [89;99;109;120;135];% 原始序列  
03 n = length(X0);  
04 lambda = X0(1:n-1)./X0(2:n);  
05 range = minmax(lambda') % 检验  
06 exp([-2/(n+1), 2/(n+2)])  
07 X1 = cumsum(X0); % 累加生成序列  
08 Z1 = (X1(1:n-1)+X1(2:n))/2; % 均值  
09 B = [-Z1, ones(n-1,1)];  
10 Y = X0(2:n);  
11 u = BY; a = u(1); b = u(2);  
12 k = 0:n+4;  
13 xhat1 = (X0(1)-b/a).*exp(-a*k)+b/a;  
14 xhat0 = [X0(1) diff(xhat1)] % 还原  
15 plot(t0,X0,'o',t0(1)+k,xhat0,'-+')
```



Thank You!!!