网络流常见建模总结

panda_2134

2018/3/4

自己对最近网络流学习的一些整理和理解……

如果有什么错误，请立即纠正，非常感谢。

目录

最大流

二分图相关

定义与算法

概念

没有奇环的图是二分图。二分图可以分成 2 个部分，每个部分内没有边。为了方便可以称为左点和右点。

匹配：一组顶点不相交的边集合

完美匹配：每个点都是匹配点的匹配

未盖点：不与任何匹配边邻接的点

交替路：**未匹配边**-匹配边-未匹配边-匹配边-未匹配边……

增广路：以未匹配边结尾的交替路

增广路定理：对于任意图，图上匹配为最大匹配的充要条件是没有增广路

KM 算法

求二分图**最大权完美匹配**。

给每个节点分配一个顶标。定义满足 $L_i + L_j \geq w_{i,j}$ 的顶标 L 是可行顶标，满足 $L_i + L_j = w_{i,j}$ 的边及其顶点构成了相等子图。我们可以证明，相等子图有完美匹配，则它是原图的最大匹配。证明过程对所有的 “最大”/“最小” 问题都很有启发性：先证明上界，再碰到上界。由于可行顶标的性质，显然相等子图匹配权值 $\geq$ 原图任何一个完美匹配。在相等子图中可行顶标式子的 “=” 取得，于是这是原图的最大权匹配。得证。

KM 算法步步都用到了贪心的思想。首先贪心地构造出初始相等子图，不妨令每个左点顶标为出边边权最大值，右点顶标为 0。每次先从左点开始进行匈牙利算法，求相等子图的一个匹配。如果这个匹配是完美匹配，那么算法结束，否则我们需要让更多边加入进来，从这个点完成一次增广，再从下一个点开始进行匹配。我们给每个在匈牙利算法中访问了的左点顶标减去一个数 d ，给访问了的右点顶标加上一个数 d ，来加入一条边。

分析可知，如果设左点中访问了的点为 $\mathbb{X}$ 集，未访问的为 $\mathbb{X}'$ 集，右点相应为 $\mathbb{Y}, \mathbb{Y}'$ 集，那么，$\mathbb{X} \to \mathbb{Y}'$ 一定没有边（否则匈牙利树可以继续生长），$\mathbb{X}' \to \mathbb{Y}$ 的边一定是未匹配边；$\mathbb{X}' \to \mathbb{Y}'$ 也一样，不过它和我们这步操作无关。再来分析刚才的 d 应该设为多少。显然 d 应该**贪心地**取 $\min\{L_u + L_v - w_{u,v} | u \in \mathbb{X}, v \in \mathbb{Y}'\}$ 。只能取这个值，因为如果 d 更大，对于取得 min 的边来说，u 一端顶标就不再可行；如果 d 更小，那么就没有新边加入。

加了这条边之后原图有什么变化？对于两端都是已访问节点的边而言，由于两端顶标和不变（$(L_u - d) + (L_v + d) = L_u + L_v$），它是否在相等子图这点并不会改变。对两端都不是已访问节点的边也是一样。左端在 $\mathbb{X}$ 右端在 $\mathbb{Y}'$ 的边中边权最大的会加入相等子图。而左端在 $\mathbb{X}'$ 右端在 $\mathbb{Y}$ 的边，虽然可能离开相等子图，但是它们本来就不是匹配边，离开了也没有关系。不断进行这步操作直到可以增广。于是这步操作至少引入了一条匹配边。由于上述贪心，最终求出的一定是最大完美匹配。

注意，这个算法只适用于有完美匹配的情况。没有完美匹配的情况下，如果要求最大权匹配，就得用费用流了。

常用性质：

- $L_u + L_v \geq w_{u,v}$

- **最大**权匹配等于**最小**顶标和
- 算法结束的时候 $\sum L_i$ 最小

König 定理

无权二分图的最大基数匹配等于最小点覆盖。

从网络流的角度容易证明。选择某点到点覆盖集合中，则割它与 s/t 相连的边。求最大匹配，可以用最大流。由最大流最小割定理，它们是等价的。

应用与建模

以下的应用，均是在二分图中的。

最小点覆盖

定义：选出最少的点，覆盖图中所有边。

不带权的时候，由 König 定理易得。求最大基数匹配即可。

带权的时候，考虑用不带权的类比。不带权的时候，我们是把最大基数匹配（最大流）转为了最小点覆盖（最小割）。现在点有点权，我们同样考虑用最小割建模。建立超级源点 s ，汇点 t ，s 向左点连容量为点权的边，右点向 t 连容量为点权的边，原二分图中边的容量为无穷大。显然割一定只和 s, t 有关，割那条边就代表把对应点选入最小点覆盖模型[1]。

最大点独立集

定义：选出最多的点，使得任意边两端点最多有一个被选中。

这个问题和最小点覆盖互补。先考虑不带权情况。我们把图上的点划分成 2 个集合。最小点覆盖集关于所有顶点的补集，即为最大点独立集。为什么呢？我们考虑图中每条边。其顶点至少一个属于最小点覆盖集，取补集后，最多一个属于最大点独立集，符合其定义。而最小点覆盖集是最小化集合中点数目，取补集后为最大化点独立集中点数目，与最大点独立集的优化目标一致。带点权的情况的证明是类似的。

所以说，要求最大点独立集大小，用总点数/总点权减去最小点覆盖的大小即可。

DAG 的最小路径覆盖 / 有向图的最小圈覆盖

定义：前者为在 **DAG** 上选择**最少条**点不相交的路径，使得这些路径上含有图上**所有点**。

后者为在有向图**最少个点不相交的环**, 使得环上有图上所有点。（注意可以有自环，而且有些时候自环必不可少）

先看最小路径覆盖。同样分为不带权和带权两种情况。我们把每个点拆成 2 个，一个为左点，一个为右点。考虑在最小路径覆盖中，除了路径结尾每个点都有**唯一的后继**，也就是说每个点和它的后继点一一匹配。从另一个角度看，每次匹配后继点，对应于把两条路径合并起来，并的次数最多的时候，最终剩下的路径条数也就最少了[2]。要是每个边有代价，并且要求最小化总代价和呢？给匹配边赋边权。在路径之间转移有代价？考虑从 s 直接连边，也就是表示某个点是 s 这个虚拟点的后继节点。（SDOI2010 星际竞速）

后者和前者相似，也是 “匹配后继” 的思想。不过有解的充要条件是对应二分图有完美匹配。（可以用置换来思考：有完美匹配，即可以看作一个置换，而置换一定可以分解为若干循环乘积）

---

[1]最小点覆盖和最小割的对应关系，感性理解是显然的。但是我并不会证明。如果有哪位神犇懂得证明请评论，我非常感谢。

[2]来自hzwer 学长

稳定婚姻问题

用图论的话来说，把边权变成了“双向不同”的。$u \to v$ 边权大，$v \to u$ 边权**不一定**大。求一个匹配使得不存在 $<u,v>\in \mathbb{E}$ ，其中 u 已经和 b 匹配，而 v 已经和 a 匹配，且对于 u 来说 b 不如 v ，而且对于 v 来说 a 不如 u 。

Gales-Shapley 算法：每次男子按照喜爱度大到小依次求婚，女子如果发现当前配偶对自己吸引力不如现在求婚的大，就可以抛开当前配偶与现在求婚的结婚。可以证明最后的解一定稳定。

建模套路

- 给出矩阵，看作邻接矩阵，转为二分图来理解（uvaoj11419、ZJOI 矩阵游戏）
- 给出矩阵，黑白染色，再把两种颜色的看成二分图（骑士共存问题、清华集训 2017 无限之环）
- 与“阶段”有关的匹配问题，**按照阶段拆点**建图。有时候阶段对应点很多，要动态开（SCOI 修车，NOI 美食节）
- 二分图完美匹配等价于置换，利用置换循环的关系帮助思考（ZJOI 矩阵游戏）

最小割

最小割：一个 s-t 划分

最大流最小割定理：s-t 最大流 = s-t 最小割

满流边不一定都在最小割中。跑完 Dinic 后在**残量网络中 DFS/BFS 求出最小割**。（考虑 Amber 神犇论文里面举的典型错误！）

建模

- 涉及到集合的划分问题，就想到最小割。(uvaoj1515，ZJOI 狼和羊的故事)
- 有向图的最大闭合子图。选 u, v 中的一个就会产生某个代价，但是都选代价不会更高。s 向每个非负权值点连边，每个负权值点向 t 连边，求出割 $[S,T]$ 后，$S-\{s\}$ 即最大闭合子图，其权值为 $\sum w_+ - c[S,T]$ 。（NOI2009 植物大战僵尸: 注意虽然没有自环，但是可能连环保护导致无敌，而且无敌点保护的点也无敌）
- 无向图的最大密度子图。边和点都带有权值，求一个子图，最大化

$$\frac{\sum_{e\in\mathbb{E}'} w_e}{\sum_{v\in\mathbb{V}'} w_v}$$

- 显然是分数规划。首先二分答案 x 。选了边，相邻点就要选，可以把每条无向边拆成 2 条有向边。再看最大闭合子图权值是否大于 0 ，从而调整二分的答案。（uvaoj Hard Life）（顺便吐槽下这个题目，卡精度，eps 开 1e-6 WA，开 1e-8 连样例都过不了，浪费了我 2 个多小时……）

拆点拆边技巧

- 节点容量拆成边，转为边容量
- 某个东西有“阶段”的划分，每个阶段拆出一个点
- 二分图匹配是利用 s 到左点的容量来限制最多匹配 1 条边，可以类似地进行“三分图匹配”（酒店之王）

费用流

算法

SPFA-Edmonds-Karp / Primal-Dual
比较如下：（测试用题为洛谷费用流模板）

Algorithm	Accepted	Time
Dijkstra+Pairing Heap+Primal Dual(O2)	Yes	820ms
Dijkstra+std::priority_queue+Primal Dual(O2)	Yes	832ms
Dijkstra+Binary Heap with decrease_key+Primal Dual(O2)	Yes	888ms
Dijkstra+Pairing Heap+Primal Dual	Yes	1236ms
Dijkstra+Binary Heap with decrease_key+Primal Dual	Yes	1528ms
SPFA+Primal Dual(O2)	Yes	1548ms
SPFA+Edmond Karp	Yes	1596ms
SPFA+Primal Dual	Yes	2184ms
Dijkstra+std::priority_queue+Primal Dual	No	3036ms
SPFA+SLF+Primal Dual(O2)	No	3204ms
SPFA+SLF+Primal Dual	No	4740ms

建模

求 k 条路径并最短路

- 求 $s \to t$ 的 k 条路径，总长度最短。每条边容量 1 ，费用为边权，直接找固定流量的最小费用流。

最小费用可行流

- 最小费用循环流，也称最小费用可行流，对每个点都满足流量平衡的条件。消圈算法太慢，我们**用建图技巧避开输入的负权边**[3]。每个负权边 $<u,v>$ 拆成 $<ss,v>,<v,u>,<u,tt>$ 三条，容量均同原来的负权边，只有第二条边带上费用，费用为原来的费用的相反数。再找 $<ss,tt>$ 的最小费用流。最后把费用**加上**原图所有**负权边权值和各自容量乘积**即为答案。
- 为什么这么做？这就是“预先流满”的操作。既然 Bellman-Ford 算法无法处理负权环，我们就让图

[3]参考了zkw 神犇的 Blog

中的负权边预先流满，同时累加上流满它们的代价（显然为负数）。在流满之后，残量网络里面就没有负权边了。但是某些点，确切地说，那些与原来负权边相关的点就不再满足流量平衡的条件了。仔细分析发现，我们得给“预先流满”的流找个来头。我们不妨认为它们是从 tt 流来的，一直流到 ss 结束。这样的话，除了 ss, tt , 其他点都满足了流量平衡的条件。$tt \to ss$ 流恰好流满了所有的负权边。既然我们已经把负权边流满了，我们再试图从 tt 向 ss 增广也没有意义了，因为以后的增广费用一定为正。所以我们令 $< ss, v >, < u, tt >$ 的容量等于原来负权边的容量，费用为 0 。

- 注意：这样求出的流在删掉附加边之后是不满足流量平衡条件的。如何满足？从 ss 向 tt 增广，以消去附加边！增广到与 ss, tt 有关的边退出残量网络即可。这样就消掉了之前假定的 $tt \to ss$ 流，所有的流就都是来自图内部了，删掉 ss, tt 以及与 ss, tt 有关的边，图中就是最小费用可行流，对每个节点都满足流量平衡。有人也许会问：在 $ss \to tt$ 增广的过程中，会引入负权环吗？这是不可能的。新图中边的费用均非负，如果要增广产生负权环，必定要沿着某个正环增广。而沿着正环增广不仅无益于增大 $s - t$ 流，还会徒增费用。也就是说，只要图中没有负环，增广后也不会有负环。所以这样一定可以求出合法的最小费用可行流。

残量网络如图。图上 **边权为费用，容量均为 1** 。

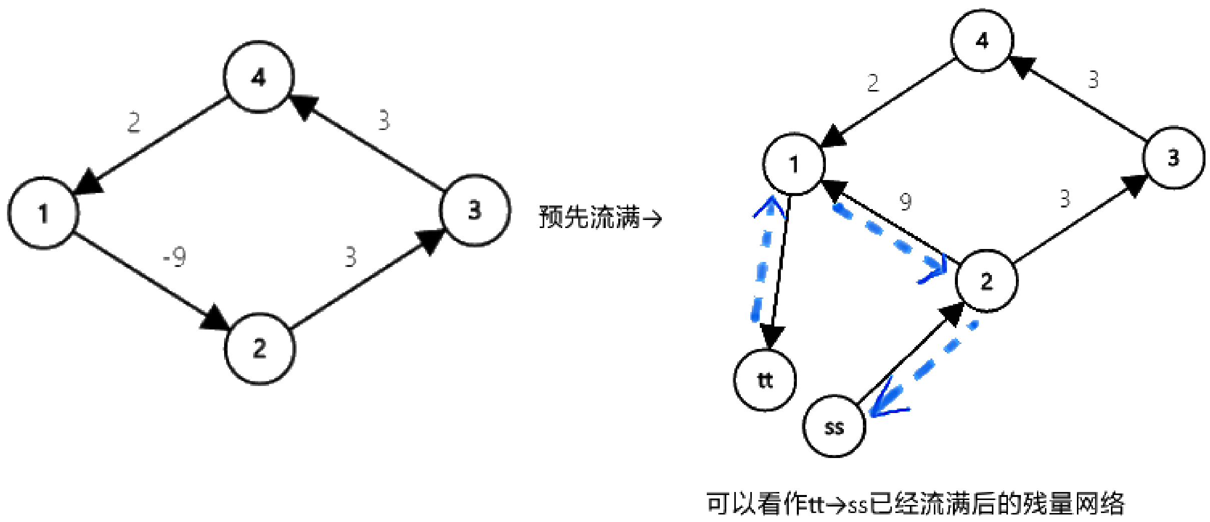


图 1: 负权边建图

带负环的最小费用最大流

- 求 $s \to t$ 最小费用最大流。注意可以有负环，但是负环要有容量限制。先连上 $t \to s$ 的边，容量 ∞ ，费用 0 。用上面的方法求最小费用可行流。再从 s 往 t 增广（不拆 $t \to s$ 边，见上下界网络流）。两次增广的费用之和即为总的最小费用。

费用与流量成下凸函数的最小费用最大流

- 差分权值后拆边

- e.g. $cost = flow^2 \Rightarrow \begin{cases} cost = flow \\ cost = 3 \cdot flow \\ cost = 5 \cdot flow \\ \ldots \end{cases}$

注意事项

一般实际使用的时候，不直接建出与 ss, tt 有关的边，而是用一个数组记录到某个点的边总容量（费用相同，均为 0），以去除重边。

上下界网络流

其思想与负权费用流建图有所不同。负权费用流建图的“预先流满”后尝试退流，而上下界网络流则是“强制流满”。

上下界可行流[4]

如下图，为一条下界为 2 ，上界为 5 的弧。

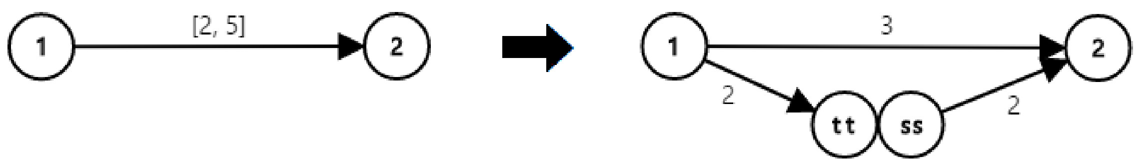


图 2: 上下界可行流

我们把下界非 0 的弧拆成必要弧和附加弧。必要弧一定要满流，附加弧不一定。

如何让必要弧满流？用附加源点。用 Dinic 找出从 ss 到 tt 的最大流，如果所有和 ss, tt 相关的边都满流，则求出了一个可行流。

上下界 $s-t$ 最大流

首先连接边 $<t, s>$ ，容量无穷大。然后找出一个上下界可行流，不拆 $<t, s>$ 边，直接求解 $s \to t$ 最大流即为答案。很多的资料都说要拆掉 $<t, s>$ 边，但仔细想想就会发现，这是不必要的。直接原封不动找 $s \to t$ 最大流就可以了。

下图为一个要求解上下界网络流的残量网络。

可以看出，最后一次增广刚好撤销了 $t \to s$ 边上的流量！于是最大流为 2。

由于代表下界的必要弧已经拿出了原来的图，显然不可能增广到流量低于下界，所以一定合法。

[4]参考了liu_runda 的 Blog

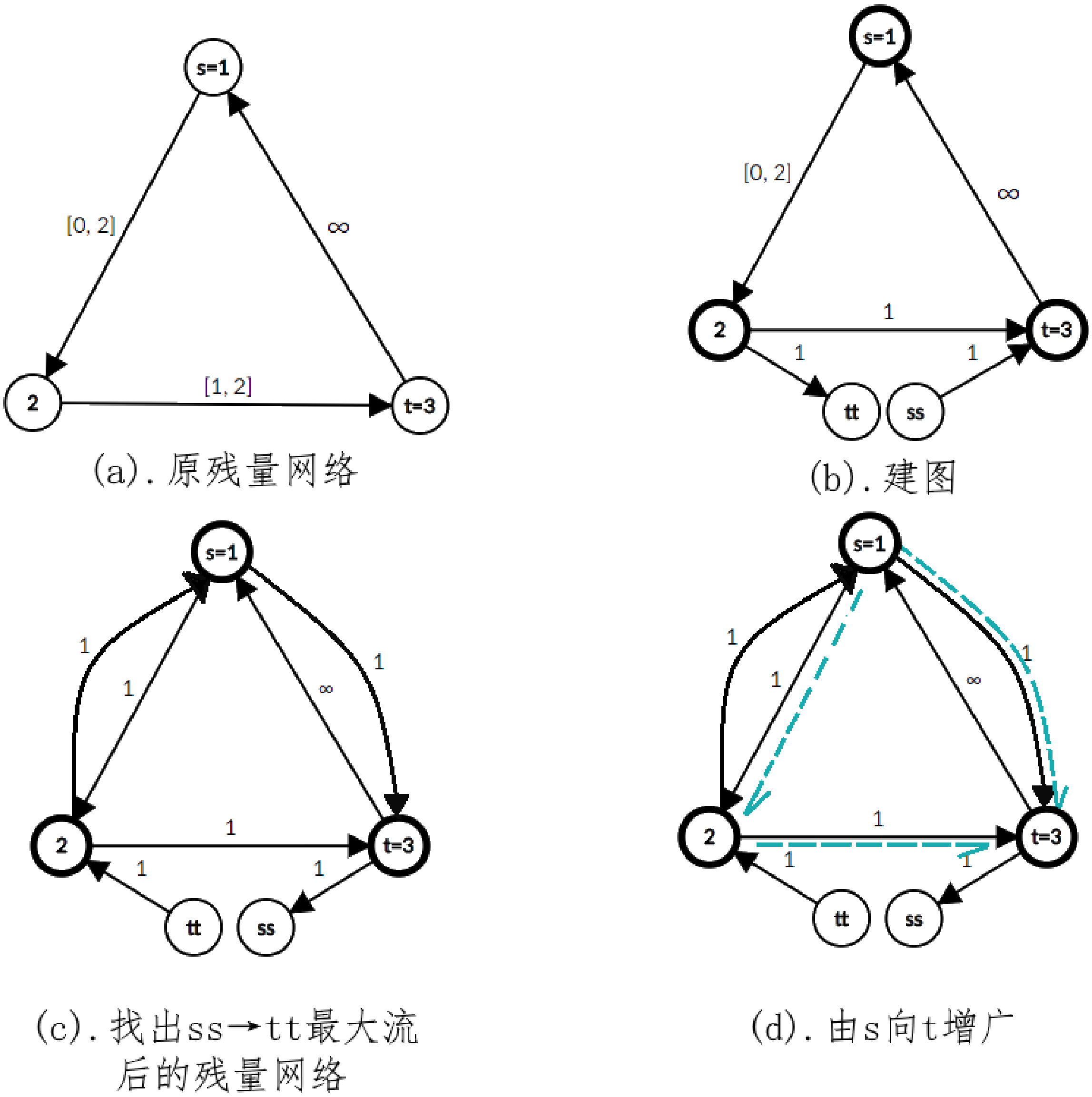

s=1
[0, 2]
∞
2
[1, 2]
t=3
(a). 原残量网络
s=1
[0, 2]
∞
2
1
t=3
1
1
tt
ss
(b). 建图
s=1
1
1
∞
1
2
1
t=3
1
1
tt
ss
(c). 找出ss→tt最大流
后的残量网络
s=1
1
1
∞
1
2
1
t=3
1
1
tt
ss
(d). 由s向t增广

图 3: 上下界最大流

上下界 $s-t$ 最小流

这个问题也只在有流量下界的时候有意义，因为流量下界为 0 时，最小流就是零流，没有什么可求的。

我们考虑流量的反对称性：

$$f(t,s)=-f(s,t)$$

也就是说 $t\rightarrow s$ 流量增加，等价于 $s\rightarrow t$ 流量减少。于是从 t 往 s 增广即可求出最小流。

有一点需要注意：求最小流的时候**必须删掉**最后加的 $<t,s>$ 弧及其反向弧。否则沿着新加的弧增广，最小流是无穷小。

最终答案为可行 $s-t$ 流减去增广的 $t-s$ 最大流。前者可以通过检查求完上下界可行流后 $<t,s>$ 边的流量得知。

(好像还有一种更简单的方法[5]……但是没能理解……)

上下界最小费用可行流

同样是拆边法。但是不能允许必要弧退流。于是我们把必要弧和费用流的附加弧合并处理。对于非负费用边，我们把必要弧拉出来，建立弧 $<ss,v>,<u,tt>$，其容量均为下界，但是只有 $<ss,v>$ 带上与原弧相同的费用，从而避免必要弧重复计费。对于负费用边，见下图中 (a), (b), (c)。

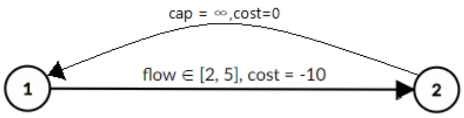
上下界 $s-t$ 最小费用最大流

注意：可以有负环。大体思想就是把负权费用流和上下界费用流合二为一。如下图。(a) - (c) 步骤是连边 $<t,s>$，容量 ∞，费用 0，把上下界最小费用最大流转为上下界最小费用可行流处理。(d) 步骤是在可行流基础上求最小费用最大流。注意：总的流量等于 (d) 步骤增广的流量，但是费用等于所有负权值的和 + 两次增广的费用。

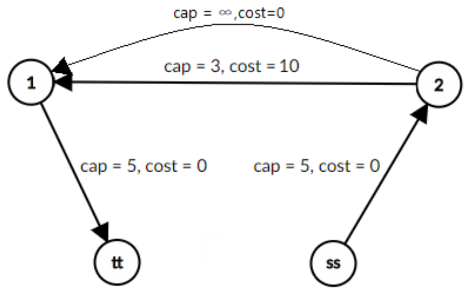
上下界 $s-t$ 最小费用流

同上下界 $s-t$ 最小费用最大流，不过要把求最小费用最大流改成求最小费用流，即在 $s-t$ 距离非负时停止增广。

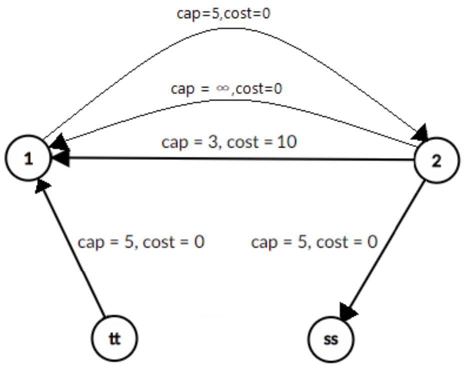
[5] 见___stdcall's Blog



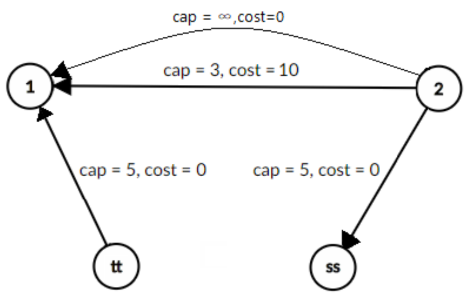
(a). 原图的残量网络。1,2分别为源汇点。



(b). 加上了与ss,tt有关的弧。这么建图是为了保证容量为2的必要弧不能被退流。于是我们累加它的负权，并且把它合并到<tt, 2>，<1, ss>两弧。对于容量3的附加弧<1,2>，它可以被退流，所以仍然存在于图中。注意此时附加弧已经预先流满了。下一步进行了ss-tt增广后，只有与ss,tt有关的弧均满流，原上下界费用流才有解。



(c). 找出了ss→tt的最小费用最大流。可以看出去掉ss，tt后， 1，2号点都不满足流量平衡。1号点多流入了3个单位流量，2号点多流出了2个单位流量。实际上这是因为有一条<1,2>的必要弧，隐式地承载了2个单位的流量。



(d). 不删除<t,s>边直接求s-t最小费用最大流。
最大流为此步骤增广的流量，即5.
最小费用为：(预先流满的费用=-50)
+(ss→tt增广费用=0)+(s→t增广费用=0)=-50.

图 4: 上下界最小费用最大流