数学分析

1 极限 导数定义 ※※

- **数列极限**：数列$\{a_n\}$，若对$\forall\epsilon > 0$，总存在$N > 0$，当$n > N$时有$|a_n - a| < \epsilon$，则称数列$\{a_n\}$收敛于a
- **函数极限**：对$\forall\epsilon > 0$，总存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，函数值f(x)总满足$|f(x) - A| < \epsilon$，则A为f(x)当$x \to x_0$时的极限。$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$
- **导数**：f(x)定义在某区间，点a在该区间内，若极限

  $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

  存在，则称$f(x)$在a点处可导，$f^{'}(a)$称为$f(x)$在该点的导数

2 一阶导和二阶导的物理、几何意义 ※※

一阶导数表示函数变化率或切线斜率，二阶导数表示一阶导数的变化率

- 物理意义：一阶导数速度，二阶导数加速度
- 几何意义：一阶导数切线斜率，二阶导数曲线凹凸性（大于0下凸）

3 可导、可微、连续、可积 ※※※※

- **可导**：$x = x_0$处导数存在则可导。
- **可微**：一元函数与可导等价，多元函数：$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$
- **连续**：左极限=右极限=函数值，即$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- **一元函数**：
  - **可导与可微等价**
  - **可导一定连续**，连续不一定可导（$y = |x|$在x=0处不可导）
  - **连续必可积**，可积不一定连续
- **多元函数**：
  - **可微一定可导，可微一定连续**

- **偏导连续一定可微。连续必可积**，可积不一定连续

4 连续和一致连续，收敛和一致收敛 ※※

连续：是点的**局部**性质，δ依赖于点。只需要$|x-x_0|<\delta$中的x_0是任意的

一致连续：对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于所有的x和y，只要 $\mid x-y\mid<\delta$ 就有 $\mid f(x)-f(y)\mid<\varepsilon$

- **全局**连续，δ与点无关。$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1]$上连续但不一致连续

收敛：级数**逐点**逼近极限，**收敛速度随点不同。**

一致收敛：级数**同时**逼近极限，**收敛速度所有点一样。**函数列$f(x)=x^n$在$[0,1]$上**不一致收敛**，因为x=1时极限为1，x接近于1时（0.99999），找不到统一的N，使得n>N时所有点都接近于0

5 求函数零点 极值点，凸函数※※※

求零点：

1. 直接求解析解
2. **零点存在定理**：$f(x)$图像在闭区间$[a,b]$连续，且$f(a)f(b)<0$，则$f(x)$在$(a.b)$内必有零点
3. 二分法（必须满足零点存在定理），牛顿迭代法：$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

求极值点：导函数=0，若两端同号则是驻点，两端异号才是极值点

（**爱考）凸函数**：函数$f(x)$在区间I上有定义，对于区间中任意两点x_1,x_2，恒有$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

- 此外，二阶导**大于0**也是凸函数，即**下凸**

6 三个中值定理 ※※※※※

罗尔中值定理：①函数**闭区间连续、开区间可导**，②且**两端点处取值相同**

- 则该区间内至少存在一点，**导数为零**：$f'(\xi)=0$

拉格朗日中值定理：①函数**闭区间连续、开区间可导**

- 则该区间内至少存在一点，**导数值等于端点间连线斜率**：

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

柯西中值定理：①函数$f(x),g(x)$**闭区间连续、开区间可导**

- 则该区间内至少存在一点，使得**两导函数的比值等于两函数端点函数值之差的比值**：

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

三者联系：Lagrange是Rolle的推广，Cauchy是Lagrange的推广

7 泰勒公式 泰勒展开 ※※※※

泰勒公式的初衷：**用多项式函数近似表示函数在某点周围的情况**

泰勒公式：函数 f 定义在a的邻域$U(a)$上，a点处 n+1 次可导，则对于区间上的任意x，都有：

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

皮亚诺余项：$R_n(x)=o((x-a)^n)$，只需在点a处有n+1阶导数

拉格朗日余项：$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$，需要在邻域内有n+1阶导数

麦克劳林公式：$a=0,\xi=\theta x(0<\theta<1)$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

8 方向导数 梯度 散度 旋度 ※※※※

梯度：各坐标轴**偏导数组成的向量。**$\nabla f=\operatorname{grad} f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$

- 几何意义：沿梯度方向可找到函数极大值，沿梯度反方向下降可找到函数极小值（应用：loss最小值）

方向导数：各坐标轴**偏导数**组成的向量和**方向向量**的**内积**（是一个标量）$\frac{\partial f}{\partial l}=\operatorname{grad} f\cdot\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$

散度：类似于内积，标量。$\nabla\cdot\vec{f}=\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}$

旋度：类似于外积，向量。

$$rot\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\overrightarrow{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\overrightarrow{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\overrightarrow{k}$$

9 积分 ※※※※

9.1 积分中值定理、换元公式、分部积分

积分中值定理：$f(x)\in C[a,b]$（连续），则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$

换元公式：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f|\varphi(t)|\varphi'(t)\mathrm{d}t$

分部积分公式：$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b \nu(x)u'(x)dx$

9.2 Green Gauss Stokes

格林公式（二维线-面）： $\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$

高斯公式（三维体-面）：

$$\iiint\limits_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=\oiint\limits_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$$

斯托克斯公式（三维线-面）：

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx$$

$$+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

- 斯托克斯是格林公式的推广，Stokes的R=0就是Green
- **格林**：**平面区域曲线积分** 与 **该区域的二重积分**联系起来
- **高斯**：三维空间的**曲面积分** 与 **内部体积的三重积分**联系起来
- **斯托克斯**：**曲面积分** 与 **其边界的曲线积分**联系起来

10 级数 ※※※※

数项级数：数列$\{a_n\}$，定义部分和$S_n = \Sigma_{k=1}^{n} a_k$，若$\lim_{n\to\infty} S_n = S$存在，则级数$\Sigma a_n$收敛，否则发散

- **必要条件**：若级数收敛，则必有$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

常见级数：

- **几何级数**：$\Sigma_{n=0}^{\infty} q^n$（等比数列求和）
- **p-级数**：$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$（$p > 1$收敛，否则发散）
- **调和级数**：$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，发散。但交错调和级数收敛（条件收敛）
- **交错级数**：莱布尼茨判别法：若数列$\{a_n\}$单调递减，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，则交错级数 $\sum (-1)^{n-1} a_n$ 收敛

正项级数判别法：比较（比另一收敛的级数小）、比值（$\lim a_{n+1}/a_n < 1$）、根值（$\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$）、积分（数项级数与相应函数积分同敛散）

11 傅里叶变换 傅里叶级数 ※※※※※

傅里叶变换：将**时域**的**任意非周期连续信号**，转换为**频域**的连续信号。

- 对于**定义域为实数**的时域函数$f(t)$，其傅里叶变换$F(\omega)$定义为：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

用途：信号处理滤波，降噪，压缩，求微分方程把微分和积分变为乘除法，DFT算法计算多项式

傅里叶级数：任何满足狄利克雷条件（一个周期内：极值数量有限、有界、绝对可积）的周期性函数可以用正弦和余弦函数构成的无穷级数表示

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{2\pi n t}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi n t}{T}) \right)$$

其中a_0为常数项（平均值），a_n, b_n为傅里叶系数，分别表示余弦和正弦分量的权重

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$