

# 离散数学

## 离散数学

- 1 自反、对称、传递 \*\*\*
- 2 等价关系和等价类 \*\*\*\*
- 3 偏序关系、全序关系、良序 \*\*\*
- 4 命题逻辑和谓词逻辑 \*

  - 4.1 命题逻辑
  - 4.2 谓词逻辑
  - 4.3 可判定性

- 5 哈密顿图、欧拉图 \*\*\*\*
- 6 幂集、笛卡尔积 \*\*\*
- 7 二元关系 \*\*
- 8 单射、满射、双射 \*\*\*
- 9 集合的划分、基数 \*\*
- 10 树 \*\*
- 11 图 \*\*

## 1 自反、对称、传递 \*\*

对于集合A上的关系R (例如大于、小于)

- 自反：如果a是A的元素，那么 $\langle a, a \rangle$ 是R的元素
- 对称：如果 $\langle a, b \rangle$ 是R的元素，那么 $\langle b, a \rangle$ 是R的元素
- 传递：如果 $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle$ 是R的元素，那么 $\langle a, c \rangle$ 是R的元素

## 2 等价关系和等价类 \*\*\*\*

**等价关系：**非空集合A上的一个关系R，同时满足**自反性、对称性和传递性**，则R为集合A上的等价关系

**等价类：**集合A中所有与元素a等价的元素构成的集合，叫a的等价类

## 3 偏序关系、全序关系、良序 \*\*

**偏序关系：**满足**自反性、反对称性和传递性** (例： $\leq$ , 被整除)

- **其中的反对称性是指：**如果  $aRb$  ( $a$ 与 $b$ 有关系R) 且  $bRa$ ，则必须有 $a=b$

**全序关系：**满足偏序关系，并且任意两个元素都是可比较的 (例： $\langle I, \leq \rangle$ 是全序，而 $\langle \{1,2\}, \text{包含关系} \rangle$ 不是)

良序：关系的每个非空子集都有最小元 ( $\langle I, \leq \rangle$ 、 $\langle N, \geq \rangle$ 不是良序，但 $\langle N, \leq \rangle$ 是良序)

## 4 命题逻辑和谓词逻辑 \*

### 4.1 命题逻辑

**基本单位是命题**，只能处理真假。陈述句。非、合取、析取、异或、蕴含、等价是命题逻辑的连接词

1. **合式公式：**原子命题、True/False、逻辑连接词组成的符号串
2. **范式：**n个变元可构成 $2^n$ 个极小项，范式就是合式公式的标准型，分为合取式（由逻辑与符号连接中间为“或”符号的极小项）和析取式

- 合取范式：基本积的积
- 析取范式：基本积的和

## 4.2 谓词逻辑

在命题逻辑的基础上引入谓词和量词（全称、存在），形式化能力更强。谓词是带参数的函数

## 4.3 可判定性

可判定性：是否存在一算法，在有穷步骤能判断某公式为真或假

- 命题逻辑可判定，因为都能画出真值表
- 一阶、二阶谓词逻辑不可判定，因为它能表达出图灵机的计算过程，若不可满足则不存在算法验真伪。

## 5 哈密顿图、欧拉图 ※※※

**哈密顿图**：存在一个哈密顿路径（经过图中每个顶点恰好一次的路径）。若路径起点和终点相连，则哈密顿环，若非闭合则哈密顿通路

**欧拉图**：存在经过图中每条边恰好一次的闭合链。若路径起点和终点相同，形成一闭合回路，则欧拉回路

- 无向图存在欧拉回路的充要条件：连通图，且图所有顶点度数为偶数
- 有向图存在欧拉回路的充要条件：连通图，且所有顶点入度=出度

## 6 幂集、笛卡尔积 ※※

**幂集**：集合的**全体子集**构成的集合（包含空集）

**笛卡尔积**：集合A的元素为第一个分量，B的元素为第二个分量，所有可能有序对的集合

## 7 二元关系 ※※

二元关系是定义在两个集合上的关系，是有序对的集合（A和B笛卡尔积的子集）

## 8 单射、满射、双射 ※※

- **单射**：集合A中的每个元素映射到B的唯一元素
- **满射**：集合B的每个元素都有至少一个A的元素映射到它
- **双射**：集合A和B之间存在一一对应的关系

## 9 集合的划分、基数 ※※

**集合的划分**：把集合分成若干子集，使得各子集互不相交，且所有子集并集为全集

**基数**：集合的元素个数

## 10 树 ※※

树是一个**无环 无向 连通图**，任意两个顶点之间存在唯一的简单路径。**顶点数=边数+1**

## 11 图 ※※

$G(V, E)$ ：顶点集合+边集合

- **简单图**: 没有自环和多重边
- **完全图**: 每对顶点之间都有一条边
- **度** (无向图) : 一个顶点边的数量。**入度** (有向图) : 指向该点的边数, **出度**: 指向其他顶点的边数