

离散数学

离散数学

- 1 自反、对称、传递 ※※
- 2 等价关系和等价类 ※※※
- 3 偏序关系、全序关系、良序 ※※
- 4 命题逻辑和谓词逻辑 ※
 - 4.1 命题逻辑
 - 4.2 谓词逻辑
 - 4.3 可判定性
- 5 哈密顿图、欧拉图 ※※※
- 6 幂集、笛卡尔积 ※※
- 7 二元关系 ※※
- 8 单射、满射、双射 ※※
- 9 集合的划分、基数 ※※
- 10 树 ※※
- 11 图 ※※

1 自反、对称、传递 ※※

对于集合 A 上的关系 R (例如大于、小于)

- 自反: 如果 a 是 A 的元素, 那么 $\langle a, a \rangle$ 是 R 的元素
- 对称: 如果 $\langle a, b \rangle$ 是 R 的元素, 那么 $\langle b, a \rangle$ 是 R 的元素
- 传递: 如果 $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle$ 是 R 的元素, 那么 $\langle a, c \rangle$ 是 R 的元素

2 等价关系和等价类 ※※※

等价关系: 非空集合 A 上的一个关系 R , 同时满足**自反性**、**对称性**和**传递性**, 则 R 为集合 A 上的等价关系

等价类: 集合 A 中所有与元素 a 等价的元素构成的集合, 叫 a 的等价类

3 偏序关系、全序关系、良序 ※※

偏序关系: 满足**自反性**、**反对称性**和**传递性** (例: \leq , 被整除)

- 其中的**反对称性**是指: 如果 aRb (a 与 b 有关系 R) 且 bRa , 则必须有 $a=b$

全序关系: 满足偏序关系, 并且任意两个元素都是可比较的 (例: $\langle \mathbb{I}, \leq \rangle$ 是全序, 而 $\langle \{1,2\}, \text{包含关系} \rangle$ 不是)

良序: 关系的每个非空子集都有最小元 ($\langle \mathbb{I}, \leq \rangle, \langle \mathbb{N}, \geq \rangle$ 不是良序, 但 $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ 是良序)

4 命题逻辑和谓词逻辑 ※

4.1 命题逻辑

基本单位是命题, 只能处理真假。陈述句。非、合取、析取、异或、蕴含、等价是命题逻辑的连接词

1. **合式公式**: 原子命题、True/False、逻辑连接词组成的符号串
2. **范式**: n 个变元可构成 2^n 个极小项, 范式就是合式公式的标准型, 分为合取式 (由逻辑与符号连接中间为“或”符号的极小项) 和析取式

- 合取范式: 基本项的析取

- **百取范式**：基本和的积
- **析取范式**：基本积的和

4.2 谓词逻辑

在命题逻辑的基础上引入谓词和量词（全称、存在），形式化能力更强。谓词是带参数的函数

4.3 可判定性

可判定性：是否存在一算法，在有穷步骤能判断某公式为真或假

- 命题逻辑**可判定**，因为都能画出真值表
- 一阶、二阶谓词逻辑**不可判定**，因为它能表达出图灵机的计算过程，若不可满足则不存在算法验真伪。

5 哈密顿图、欧拉图 ※※※

哈密顿图：存在一个哈密顿路径（经过图中每个顶点恰好一次的路径）。若路径起点和终点相连，则**哈密顿环**，若非闭合则**哈密顿通路**

欧拉图：存在经过图中每条边恰好一次的闭合链。若路径起点和终点相同，形成一闭合回路，则欧拉回路

- **无向图**存在欧拉回路的充要条件：连通图，且图所有顶点**度数为偶数**
- **有向图**存在欧拉回路的充要条件：连通图，且所有顶点**入度=出度**

6 幂集、笛卡尔积 ※※

幂集：集合的**全体子集**构成的集合（包含空集）

笛卡尔积：集合A的元素为第一个分量，B的元素为第二个分量，所有可能有序对的集合

7 二元关系 ※※

二元关系是定义在两个集合上的关系，是有序对的集合（A和B**笛卡尔积的子集**）

8 单射、满射、双射 ※※

- **单射**：集合A中的每个元素映射到B的唯一元素
- **满射**：集合B的每个元素都有至少一个A的元素映射到它
- **双射**：集合A和B之间存在一一对应的关系

9 集合的划分、基数 ※※

集合的划分：把集合分成若干子集，使得各子集互不相交，且所有子集并集为全集

基数：集合的元素个数

10 树 ※※

树是一个 **无环 无向 连通图**，任意两个顶点之间存在唯一的简单路径。**顶点数=边数+1**

11 图 ※※

$G(V, E)$ ：顶点集合+边集合

- **简单图**：没有自环和多重边
- **完全图**：每对顶点之间都有一条边
- **度**（无向图）：一个顶点边的数量。**入度**（有向图）：指向该点的边数，**出度**：指向其他顶点的边数