高等代数

1 线性方程组有解的情况 ※※※

1.1 非齐次线性方程组 AX=b

- $r(A) < \text{增广矩阵} r(A, b)$，无解
- $r(A) = r(A, b) = n$，有唯一解（n为未知数个数）
- $r(A) = r(A, b) < n$，有无穷多解

1.2 齐次线性方程组 AX=0

- $r(A) = n$，有唯一零解
- $r(A) < n$，有无穷多解

2 向量组

2.1 向量组的极大无关组和秩 ※※

- **向量组的极大无关组**：向量组中选择r个向量，它们线性无关；并且对于任何r+1个向量的向量组，它们是线性相关的。
- **向量组的秩**：向量组的极大无关组中向量的个数

2.2 向量空间，向量空间的基和维数，线性空间 ※※

- **向量空间**：**非空**向量集合，对**加法和数乘**运算封闭（任意两个向量相加仍在集合中；任意数乘任意向量仍在集合中）
- **向量空间的基**：向量空间V中，r个线性无关的向量，V中向量均可由这r个向量线性表示
- **向量空间的维数**：基所含向量个数
- **线性空间**：对加法和数乘封闭，并且满足8条性质
  - 加法4条：交换律，结合律，存在零元素，存在负元素
  - 数乘4条：结合律（$k(l\alpha) = (kl)\alpha$），分配律两条（分配数和分配向量），存在单位元（$1\alpha = \alpha$）

> 线性空间 包含 向量空间，还包含多项式空间、矩阵空间等

3 初等变换 ※

- 互换第i行与第j行
- 非零数k乘第i行
- 非零数k乘第i行加第j行

4 线性相关、线性无关 ※※※※

线性相关：对于线性空间中的n个向量，若存在n个不全为0的常数，使得这n个常数与n个向量对应乘积加和等于0（$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_n\alpha_n = 0$），则称这n个向量**线性相关。**

线性无关：不存在n个不全为0的系数，使得这些系数与向量的线性组合为0向量，则称这n个向量为**线性无关**的。

几何意义：n个向量线性无关，等价于它们张成的n维体体积不为0；否则为0

5 矩阵

5.1 矩阵的秩及应用，满秩、不满秩的意义 ※※※※※

5.1.1 矩阵的秩定义

1. **从子式的角度**：矩阵的**非零**子式的最高阶数（子式：矩阵取k行k列，交叉元素按顺序构成的**行列式**）
2. **从极大线性无关组的角度**：矩阵所有行向量中极大线性无关组的元素个数（向量组的秩）
3. **从标准型的角度**：用初等行变换将矩阵变成行阶梯型矩阵，非零行的个数

一个矩阵的秩为r代表存在一个r阶子式不为0。若不满秩，则所有大于r阶子式均为0

行秩=列秩

矩阵**满秩**的充要条件：矩阵可逆，矩阵线性无关，特征值没有0，

5.1.2 矩阵秩的应用

- 判断线性方程组解的存在性和唯一性
- 数据降维（机器学习和数据分析）
- 图像处理：压缩图像数据

5.2 方阵求逆及充要条件 ※※※

方阵求逆的方法：

1. 伴随矩阵法：$AA^*=|A|I$，$A^{-1}=A^*/|A|$。其中A^*各位置为A的代数余子式，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，M_{ij}为余子式，是除了第i行和第j列后方阵的行列式
2. 待定系数法
3. 初等变换法：$(A,I)\to(I,A^{-1})$

方阵A可逆的充要条件：

- A可逆
- A是非奇异矩阵（行列式不为0）。
- A满秩
- A可以表示为有限个初等矩阵的乘积（可通过有限次初等行变换化为单位矩阵）
- A的特征值没有0
- 矩阵线性无关

5.3 向量、矩阵正交，正交矩阵 ※※

向量正交：向量组中任意两向量内积为0，则称为正交向量组

矩阵正交：两个矩阵相乘为单位阵（$AB=I$），则两矩阵正交

正交矩阵：

- $AA^T = I$，矩阵行列式必为1或-1
- 各列向量是标准正交向量组（两两正交，均为单位向量（长度为1））。
- 应用：左乘正交矩阵， 图像旋转镜像等变换，傅里叶变换、图像压缩

5.4 相似及其应用，相似对角化 ※※

相似矩阵：

- **定义**：若$\exists 可逆矩阵P, s.t. B = P^{-1}AP$，则称矩阵A和B相似
- **性质**：相似矩阵有相同的特征值、秩、迹、行列式，但特征向量不一定相同。相似矩阵的特征向量可通过相似变换得到
- **充分条件**：**实对称阵**有相同的特征值则必相似
- **意义**：相似矩阵是同一个线性变换在不同基（坐标系）下的不同描述

相似对角化：

- **定义**：矩阵A可通过相似变换得到对角矩阵D，即$P^{-1}AP = D$，或$PDP^{-1} = A$。
- **性质**：D对角线的元素值是A的**特征值**，P的列向量就是A的**特征向量**
- **充要条件**：具有n个线性无关的特征向量；**每个**特征值的**代数重数=几何重数**
- **意义**：简化高次幂运算，解微分方程，主成分分析（PCA）特征值分解

5.5 合同及其应用 ※

- 定义：两个方阵A和B，若存在可逆矩阵C，使得$C^TAC = B$，则称方阵A，B合同
- 充要条件：**实对称矩阵**A和B合同，当且仅当A和B有相同的惯性指数（即正、负、零特征值的个数相同）

5.6 二次型，对称矩阵，正定矩阵 ※※

二次型：是一个关于变量的二次多项式表达式。对n维向量$(x_1, x_2, ..., x_n)$，二次型可表示为$Q(x) = x^TAx$，其中A是一个对称矩阵。

对称矩阵：方阵A中，$a_{ij} = a_{ji}$，则A为对称矩阵，或 $A^T = A$。

- **实对称阵**性质：
  - 特征值都是实数，特征向量都是实向量
  - **不同特征值对应的特征向量正交**
  - 可通过**正交相似变换**对角化，即存在正交矩阵P，使得 $P^TAP = D$，D为对角矩阵

正定矩阵：给定一个 n 阶实对称矩阵，若对于任意长度 n 的**非零列向量** x，有$x^TAx > 0$ 恒成立，则 A 是一个正定矩阵。 $x^TAx \geq 0$，半正定矩阵，所有特征值≥ 0

- **性质**：
  - 是实对称阵，即 $A = A^T$
  - 所有**特征值**都大于0，**行列式**大于0，满秩，可逆；逆矩阵亦正定
  - A和B正定，则A+B与AB正定
  - 正定矩阵n次方仍正定
- **对称阵**A正定的充要条件：A的**特征值均为正**

5.7 矩阵乘法：AB=BA的条件 ※

$P^{-1}AP$和$P^{-1}BP$都是对角阵（同一个P），或者$A=B$

6 行列式

6.1 几何意义 ※※※

有向面积或体积在欧式空间中的推广，描述某线性变换对体积的影响。

6.2 代数余子式 ※

余子式：n阶行列式中，划去a_{ij}在第i行和第j行的元，剩下的元构成的n-1阶行列式称为a_{ij}的余子式M_{ij}。

代数余子式：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

行列式的计算：任意一行（或列）的元素与其对应的代数余子式乘积之和

7 特征值和特征向量，意义和应用 ※※※※※

对方阵A，若非零向量x满足 $Ax=\lambda x$，则 λ 称为 A 的**特征值**，非零向量x称为A的**特征向量。**

- 计算：令 $|A-\lambda E|=0$，求得所有的 λ。将 λ_i 带回 $(A-\lambda)x=0$可求得方程组的基础解系，特征值为 λ_i 的特征向量就是基础解系的线性组合。
- 性质
  - 特征值与特征向量：一对多
  - 设 λ 是 n 阶方阵 A 的一个 k 重特征值（λ 为特征方程的 k 重根），对应于 λ 的线性无关的特征向量的最大个数为 l，则 k≥l，即特征值 λ 的**代数重数 >= 几何重数**。
  - 属于不同特征值的特征向量一定线性无关
  - 所有特征值的积 = $|A|$；所有特征值的和 = $tr(A)$
  - 实对称阵的特征值一定为实数
- 意义：**特征向量x**是变换 A 下**方向保持不变**的向量，变换后的结果只是**长度改变**了 λ 倍（伸缩变换）。能看清一个矩阵在哪些方面能产生最大的效果，并根据所产生的每个特征向量来研究

应用场景	说明
主成分分析（PCA）	特征值用于评估数据的方差和重要性，通过保留最大的特征值对应的特征向量，进行降维
几何变换	特征值描述矩阵对特征向量的作用，特征向量在变换后方向不变，只是被拉伸或压缩
图像处理	图像压缩、降噪、特征提取。使用PCA利用特征向量提取图像关键特征