

# 数学分析

## 数学分析

- 1 极限 导数定义 ※※
- 2 一阶导和二阶导的物理、几何意义 ※※
- 3 可导、可微、连续、可积 ※※※※
- 4 连续和一致连续, 收敛和一致收敛 ※※
- 5 求函数零点 极值点, 凸函数※※※
- 6 三个中值定理 ※※※※※
- 7 泰勒公式 泰勒展开 ※※※※
- 8 方向导数 梯度 散度 旋度 ※※※※
- 9 积分 ※※※※
  - 9.1 积分中值定理、换元公式、分部积分
  - 9.2 Green Gauss Stokes
- 10 级数 ※※※※
- 11 傅里叶变换 傅里叶级数 ※※※※※

## 1 极限 导数定义 ※※

- **数列极限**: 数列 $\{a_n\}$ , 若对 $\forall \epsilon > 0$ , 总存在 $N > 0$ , 当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \epsilon$ , 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$
- **函数极限**: 对 $\forall \epsilon > 0$ , 总存在 $\delta > 0$ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 函数值 $f(x)$ 总满足 $|f(x) - A| < \epsilon$ , 则 $A$ 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限。 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$
- **导数**:  $f(x)$ 定义在某区间, 点 $a$ 在该区间内, 若极限

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

存在, 则称 $f(x)$ 在 $a$ 点处可导,  $f'(a)$ 称为 $f(x)$ 在该点的导数

## 2 一阶导和二阶导的物理、几何意义 ※※

一阶导数表示函数变化率或切线斜率, 二阶导数表示一阶导数的变化率

- 物理意义: 一阶导数速度, 二阶导数加速度
- 几何意义: 一阶导数切线斜率, 二阶导数曲线凹凸性 (大于0下凸)

## 3 可导、可微、连续、可积 ※※※※

- **可导**:  $x = x_0$ 处导数存在则可导。
- **可微**: 一元函数与可导等价, 多元函数:  $dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$
- **连续**: 左极限=右极限=函数值, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- **一元函数**:
  - 可导与可微等价
  - 可导一定连续, 连续不一定可导 ( $y = |x|$ 在 $x=0$ 处不可导)
  - 连续必可积, 可积不一定连续; 可积必有界
- **多元函数**:
  - 可微一定可导, 可微一定连续

- 偏导连续一定可微。连续必可积，可积不一定连续

## 4 连续和一致连续，收敛和一致收敛 ※※

**连续：**是点的局部性质， $\delta$ 依赖于点。只需要 $|x - x_0| < \delta$ 中的 $x_0$ 是任意的

**一致连续：**对于任何 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得对于所有的 $x$ 和 $y$ ，只要 $|x - y| < \delta$ 就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

- 全局连续， $\delta$ 与点无关。 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上连续但不一致连续

**收敛：**级数逐点逼近极限，收敛速度随点不同。

**一致收敛：**级数同时逼近极限，收敛速度所有点一样。函数列 $f(x) = x^n$ 在 $(0, 1)$ 上不一致收敛，因为 $x=1$ 时极限为1， $x$ 接近于1时（0.99999），找不到统一的 $N$ ，使得 $n > N$ 时所有点都接近于0

## 5 求函数零点 极值点，凸函数※※※

**求零点：**

1. 直接求解析解
2. **零点存在定理：** $f(x)$ 图像在闭区间 $[a, b]$ 连续，且 $f(a)f(b) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内必有零点
3. 二分法（必须满足零点存在定理），牛顿迭代法： $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

**求极值点：**导函数=0，若两端同号则是驻点，两端异号才是极值点

**（爱考）凸函数：**函数 $f(x)$ 在区间上有定义，对于区间中任意两点 $x_1, x_2$ ，恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 。

- 此外，二阶导大于0也是凸函数，即下凸

## 6 三个中值定理 ※※※※※

**罗尔中值定理：**①函数闭区间连续、开区间可导，②且两端点处取值相同

- 则该区间内至少存在一点，导数为零： $f'(\xi) = 0$

**拉格朗日中值定理：**①函数闭区间连续、开区间可导

- 则该区间内至少存在一点，导数值等于端点间连线斜率：

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**柯西中值定理：**①函数 $f(x), g(x)$ 闭区间连续、开区间可导

- 则该区间内至少存在一点，使得两导函数的比值等于两函数端点函数值之差的比值：

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

**三者联系：**Lagrange是Rolle的推广，Cauchy是Lagrange的推广

## 7 泰勒公式 泰勒展开 ※※※※

**泰勒公式的初衷：**用多项式函数近似表示函数在某点周围的情况

**泰勒公式：**函数 $f$ 定义在 $a$ 的邻域 $U(a)$ 上， $a$ 点处 $n+1$ 次可导，则对于区间上的任意 $x$ ，都有：

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

**皮亚诺余项:**  $R_n(x) = o((x-a)^n)$ , 只需在点a处有n+1阶导数

**拉格朗日余项:**  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ , 需要在邻域内有n+1阶导数

**麦克劳林公式:**  $a = 0, \xi = \theta x (0 < \theta < 1)$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

## 8 方向导数 梯度 散度 旋度 ※※※※

**梯度:** 各坐标轴偏导数组成的向量。  $\nabla f = \text{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$

- 几何意义: 沿梯度方向可找到函数极大值, 沿梯度反方向下降可找到函数极小值 (应用: loss最小值)

**方向导数:** 各坐标轴偏导数组成的向量和方向向量的内积 (是一个标量)  $\frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad} f \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$

**散度:** 类似于内积, 标量。  $\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}$

**旋度:** 类似于外积, 向量。

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}$$

## 9 积分 ※※※※

### 9.1 积分中值定理、换元公式、分部积分

**积分中值定理:**  $f(x) \in C[a, b]$  (连续), 则至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

**换元公式:**  $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt$

**分部积分公式:**  $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$

### 9.2 Green Gauss Stokes

**格林公式** (二维线-面):  $\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$

**高斯公式** (三维体-面):

$$\iiint_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz = \iiint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

**斯托克斯公式** (三维线-面):

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

- 斯托克斯是格林公式的推广，Stokes的R=0就是Green
- 格林：平面区域曲线积分 与 该区域的二重积分联系起来
- 高斯：三维空间的曲面积分 与 内部体积的三重积分联系起来
- 斯托克斯：曲面积分 与 其边界的曲线积分联系起来

## 10 级数 ※※※※

**数项级数**：数列 $\{a_n\}$ ，定义部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 存在，则级数 $\sum a_n$ 收敛，否则发散

- **必要条件**：若级数收敛，则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

**常见级数**：

- **几何级数**： $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ （等比数列求和）
- **p-级数**： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ （ $p > 1$ 收敛，否则发散） $n=1$ 时，有重要结论： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \ln n + \gamma$ ，其中 $\gamma$ 为欧拉常数
- **调和级数**： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ，发散。但交错调和级数收敛（条件收敛）
- **交错级数**：莱布尼茨判别法：若数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，则交错级数 $\sum (-1)^{n-1} a_n$ 收敛

**正项级数判别法**：比较（比另一收敛的级数小）、比值（ $\lim a_{n+1}/a_n < 1$ ）、根值（ $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$ ）、积分（数项级数与相应函数积分同敛散）

## 11 傅里叶变换 傅里叶级数 ※※※※※

**傅里叶变换**：将时域的任意非周期连续信号，转换为频域的连续信号。可以理解为级数的推广。

- 对于定义域为实数的时域函数 $f(t)$ ，其傅里叶变换 $F(\omega)$ 定义为：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

**用途**：信号处理滤波，降噪，压缩，求微分方程把微分和积分变为乘除法，DFT算法计算多项式

**傅里叶级数**：任何满足狄利克雷条件（一个周期内：极值数量有限、有界、绝对可积）的周期性函数可以用正弦和余弦函数构成的无穷级数表示

绝对可积不一定可积，反例如狄利克雷函数（有理数为1，无理数为-1）

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right)$$

其中 $a_0$ 为常数项（平均值）， $a_n, b_n$ 为傅里叶系数，分别表示余弦和正弦分量的权重

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$