

天文物理导论笔记

GasinAn

2021 年 11 月 18 日

Copyright © 2021 by GasinAn

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, in any form or by any means, without permission in writing from the publisher, except by a BNUser.

The author and publisher of this book have used their best efforts in preparing this book. These efforts include the development, research, and testing of the theories, technologies and programs to determine their effectiveness. The author and publisher make no warranty of any kind, express or implied, with regard to these techniques or programs contained in this book. The author and publisher shall not be liable in any event of incidental or consequential damages in connection with, or arising out of, the furnishing, performance, or use of these techniques or programs.

Printed in China

目录

第一章 天球

The Celestial Sphere

会合周期 (synodic period) S .

$$1/S = |1/P - 1/P_{\oplus}|.$$

通过定义自己推推就推出来了嘛~

赤经 (right ascension) α , 赤纬 (declination) δ .

$$(\Delta\theta)^2 = (\Delta\alpha \cos \delta)^2 + (\Delta\delta)^2$$

记忆方法: 当成勾股定理. 懒得写了, 自己想.

北天极的高度角等于地理纬度, 由此自己推算在天体上中天时刻, 天体赤纬, 天体天顶距和地理纬度的关系¹.

¹这是本宝宝留给你们的作业题! 哼!

第二章 天体力学

Celestial Mechanics

看我 PPT.

圆锥曲线 (conic section) 统一方程

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}.$$

椭圆 (ellipse), $ed = a(1 - e^2)$. 抛物线 (parabola), $ed = 2p$. 双曲线 (hyperbola), $ed = a(1 + e^2)$.

半长轴长 (semimajor axis) a , 半短轴长 (semiminor axis) b , 离心率 (eccentricity) e .

焦点 (focal point), 近??点 (perihelion), 远??点 (aphelion).

椭圆面积 $A = \pi ab$. 证明: 把单位圆横轴方向拉长 a 倍, 纵轴方向拉长 b 倍.

逃逸速度 (escape velocity) v_{esc} .

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM/r}.$$

第二宇宙速度 11.2 km/s.

质心 (center of mass) \mathbf{R} .

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

折合质量 (reduced mass) μ .

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

二体问题, 把坐标系建在其中一个天体上, 将其质量强行定为 $M = m_1 + m_2$, 另一天体质量强行定为 μ , 把日地系统的 Kepler 三定律, 和日地系统中地球

的机械能和角动量的表达式中的 M_{\odot} 都换成 M , M_{\oplus} 都换成 μ , 就能得到二体问题的 Kepler 三定律和两天体的总机械能和角动量.

一些有用的表达式.

$$ed = \frac{1}{GM} \frac{L^2}{\mu^2}.$$

$$dA = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu} dt$$

$$k = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

完蛋了, 把 Kepler 三定律直接给出来了... 第一式推导: 计算 perhelion 处的 L , r 有了, v 用机械能的表达式算. 第二式推导: 三角形面积是两条边的叉乘的长度的二分之一. 第三式推导: 假装轨道是圆的.

(老师没讲但很重要!) 总机械能 E .

$$E = \begin{cases} -\frac{GM}{2a} & \text{椭圆,} \\ 0 & \text{抛物,} \\ \frac{GM}{2a} & \text{双曲.} \end{cases}$$

维里定理 (virial theorem): 系统, 平均总动能 $\langle T \rangle$, 平均总势能 $\langle V \rangle$, 平均总机械能 $\langle E \rangle$,

$$2\langle T \rangle + \langle V \rangle = 0,$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \langle V \rangle.$$

推论: 系统稳定, 平均总机械能必小于 0.

第三章 光的连续谱

The Continuous Spectrum of Light

视差 (parallax angle): 从天体上看, 地球和太阳的最大角距离.

$1\text{rad} \simeq 206265''$, $1\text{pc} \simeq 206265\text{AU} \simeq 3.26\text{ly}$.

视星等 (apparent magnitude) m . 辐射流量 (radiant flux) F : 仪器单位面积每秒接收到的能量. 光度 (luminosity) L : 天体每秒辐射的总能量.

$$m - m_0 = -2.5 \lg \frac{F}{F_0}, F = 100^{-(m-m_0)/5} F_0.$$

记忆法: 视星等五等, 亮度一百倍; 视星等越小越亮.

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}.$$

绝对星等 (absolute magnitude) M : 10pc 处视星等. 距离模数 (distance modulus) $m - M$. 自己推距离模数公式¹.

Stefan-Boltzmann 律: $F = \sigma T^4$. $B(T) = \sigma T^4 / \pi$: 黑体垂直于单位面元方向单位立体角内单位时间辐射的能量.

$$F = \int_{\theta \in [0, \pi]} B \cos \theta \, d\Omega.$$

Wien 位移²律: $\lambda_{\max} T = (500\text{nm})(6000\text{K})$.

色指数 (color index) $X - Y$: 不同“波段”视星等的差, 等于不同“波段”绝对星等的差. 热星等 (bolometric magnitude) m_{bol} 和 M_{bol} : 全波段星等. 热改正 (bolometric correction) $BC = m_{\text{bol}} - V = M_{\text{bol}} - M_V$.

¹第二个作业!

²“位移”的英文是 displacement.

颜色-颜色图³(color-color diagram): 横轴某色指数, 纵轴另一个. 黑体一条直线, 恒星线在黑体线下.

³不是色色图! 不是!

第四章 狭义相对论

The Theory of Special Relativity

太简单了, 没啥好记的.

第五章 光与物质的相互作用

The Interaction of Light and Matter

Kirchhoff 律:

1. 热致密气体或热固体产生连续谱, 无吸收线.
2. 热弥漫气体带发射线.
3. 冷弥漫气体在连续谱源前, 连续谱带吸收线.

刻线间距 d , 反射光与光栅法线夹角 θ , 光谱阶数 n , 波长 λ , $d \sin \theta = n\lambda$.

波长 λ , 可分辨的最小波长差 $\Delta\lambda$, 光谱阶数 n , 刻线总数 N , 分辨本领 (resolving power) $R = \lambda/\Delta\lambda = nN$.

Compton 效应¹: 高能光子打低能 (静止) 电子, 光子波长变长. 逆 Compton 效应: 低能光子打高能电子, 光子波长变短. $\Delta\lambda = 1 - \cos \theta$.

$$E_n = E_1/n^2, r_n = n^2 r_1. E_1 \simeq -13.6\text{eV}, r_1 \simeq 0.05\text{nm}.$$

HI 量子数 (n, l, m_l, m_s) . 主量子数 $n \in \mathbb{N}_+$, 轨道量子数 $l = 0, \dots, n-1$, 轨道磁量子数 $m_l = -l, \dots, l$, 自旋磁量子数 $m_s = -1/2, 1/2$ ($s = 1/2$). 磁场方向为 z 方向, 轨道角动量 $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$, z 方向轨道角动量 $L_z = m_l\hbar$, 自旋角动量 $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = (\sqrt{3}/2)\hbar$, z 方向自旋角动量 $S_z = m_s\hbar$.

选择定则: $\Delta l = \pm 1$, $\Delta m_l = 0$ 或 ± 1 ($0 \rightarrow 0$ 禁戒).

¹英文对应词是 “effect”.

第六章 望远镜

Telescopes

Snell 律: $n_{1\lambda} \sin \theta_1 = n_{2\lambda} \sin \theta_2$, $n_\lambda := c/v_\lambda$.

透镜靠近光轴处, lensmaker's formula:

$$\frac{1}{f_\lambda} = (n_\lambda - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

f_λ 是凸透镜 (converging lens) 为正, 凹透镜 (diverging lens) 为负. R 是镜面向外凸为正, 向内凹为负.

球面反射镜靠近光轴处 $|f| = R/2$, 凹面镜 (converging mirror) 为正, 凸面镜 (diverging mirror) 为负.

近光轴, 底片比例尺 (plate scale) $d\theta/dy = 1/f$.

衍射极限 $\theta_{\min} \simeq 1.22(\lambda/D)$.

畸变 (aberration):

- 色差 (chromatic aberration): 折射镜, 折射率不同, 焦距不一, 色散.
- 球差 (spherical aberration): (球面镜) 光不沿光轴时, 汇聚到光轴不同位置. 用抛物面镜解决.
- 彗差 (coma): 抛物面焦距依赖于角度.
- 散光 (astigmatism): 镜子不同部分焦点不同.
- 场曲 (curvature of field): 设计镜子修正散光后, 焦面不是平面.
- 场变 (distortion of field): 设计镜子修正散光后, 底片比例尺与光和光轴的距离相关, 图像变形.

照度 (illumination) J : 接收器单位面积单位时间接收到的能量. 焦比 (focal ratio) F : 焦距与口径之比. $J \propto F^{-2}$.

焦点系统:

- 主焦点 (prime focus): 反射到中间.
- Newtonian: 加平面镜, 反射到旁边.
- Cassegrain: 主镜抛物面, 加凸面镜, 反射到主镜的洞里, 焦距增大.
- Ritchey-Chrétien: Cassegrain 主镜抛物面 \rightarrow 双曲面.
- 折轴式 (coudé): Cassegrain 再加平面镜, 反射到旁边.

Schmidt: 球面 + 旋转四次曲面.

$1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{Hz})$. $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$.

第七章 双星和恒星参量

Binary Systems and Stellar Parameters

分类:

- 光学双星 (optical double): 假的.
- 视双星 (visual binary): 都能看到, 可分辨开.
- 天体测量双星 (astrometric binary): 一个可见, 振荡运动.
- 食双星 (eclipsing binary): 有掩食.
- 光谱双星 (spectrum binary): 两个堆叠的, 独立的, 可识别的光谱.
- 分光双星 (spectroscopic binary): 谱线周期性运动.

视双星. i : 长轴与天球切面夹角. $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$: 星和自己轨道对称中心的最大角距离. d : 双星-地球距离. i 是可推定的.

$$\begin{cases} m_1 \tilde{\alpha}_1 = m_2 \tilde{\alpha}_2, \\ a \cos i = (\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2) d. \end{cases}$$

分光双星, $e \simeq 0$. i : 长轴与天球切面夹角. $v_{1r}^{\max}, v_{2r}^{\max}$: 星视向速度最大值. P : 双星运动周期. $\langle \sin^3 i \rangle \simeq 2/3$.

$$\begin{cases} m_1 v_{1r}^{\max} = m_2 v_{2r}^{\max}, \\ 2\pi a = [(v_{1r}^{\max} + v_{2r}^{\max}) / \sin i] P. \end{cases}$$

分光食双星, $i \simeq 90^\circ$, $e \simeq 0$, $a \gg R$. t_a : 亮度开始下降到主极小的时刻.
 t_b : 亮度下降到主极小的时刻. t_c : 亮度开始从主极小上升的时刻. v : 双星相对速度.

$$\begin{cases} 2R_{\text{小}} = v(t_b - t_a), \\ 2R_{\text{大}} = v(t_c - t_a). \end{cases}$$

食双星, $i \simeq 90^\circ$, 忽略临边昏暗. B_{max} : 亮度极大值. B_{pmin} : 亮度主极小值. B_{smin} : 亮度次极小值.

$$\begin{cases} B_{\text{max}} \propto \pi R_{\text{小}}^2 \sigma T_{\text{小}}^4 + \pi R_{\text{大}}^2 \sigma T_{\text{大}}^4, \\ B_{\text{pmin}} \propto \pi R_{\text{大}}^2 \sigma T_{\text{大}}^4 \\ B_{\text{smin}} \propto \pi R_{\text{小}}^2 \sigma T_{\text{小}}^4 + (\pi R_{\text{大}}^2 - \pi R_{\text{小}}^2) \sigma T_{\text{大}}^4. \end{cases}$$

搜寻地外行星方法, 懒得记了, 自己看 PPT.

第八章 恒星光谱分类

The Classification of Stellar Spectra

Boltzmann 方程:

$$P \propto g e^{-E/kT}.$$

Maxwell-Boltzmann 速度分布函数: 根据 Boltzmann 方程, 对于理想气体, $dv_x dv_y dv_z$ 内的概率正比于 $e^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2kT}$, 或者写成

$$p(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \propto e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z.$$

Gauss 积分, $e^{-\xi^2/2\sigma^2}$ 归一化系数是 $1/\sqrt{2\pi}\sigma$, 于是乎有

$$p(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z.$$

这是速度分布, 转化到速率分布, 只需把对小方块 $dv_x dv_y dv_z$ 的积分变成对小球壳 $4\pi v^2 dv$ 的积分, 于是乎有

$$p(v) dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv.$$

变成数密度分布, 只需乘上数密度, 于是乎有

$$n_v dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv.$$

也就是说, $4\pi v^2 dv$ 是简并度 g .

最可几速度 (most probable speed): 求导.

方均根速度 (root-mean-square speed): 能量均分定理 $\overline{mv^2}/2 = 3(kT/2)$.

Saha 方程: 根据 Boltzmann 方程,

$$\frac{N_{i+1}N_e}{N_i} = \frac{Z_{i+1}Z_e}{Z_i}.$$

其中

$$Z_{i+1} = \sum_j g_{i+1,j} e^{-E_{i+1,j}/kT},$$

$$Z_i = \sum_j g_{i,j} e^{-E_{i,j}/kT},$$

$$Z_e = \int g_e e^{-[(p_x^2+p_y^2+p_z^2)/2m_e]/kT} \frac{dx dy dz dp_x dp_y dp_z}{h^3}.$$

上面三式都以束缚-自由临界状态能量为能量零点, 其中第三式运用了结论“一个微观状态等价于 $x p_x y p_y z p_z$ 空间中体积为 h^3 的小区域”. 下面计算 Z_e . $g_e = 2$, 因此

$$Z_e = \frac{2 \int dx dy dz}{h^3} \int e^{-(p_x^2+p_y^2+p_z^2)/2m_e kT} dp_x dp_y dp_z,$$

显然 $V = \int dx dy dz$, 后面是 Gauss 积分很好算, 结果就是

$$Z_e = \frac{2V}{h^3} (\sqrt{2\pi} \sqrt{m_e kT})^3 = 2V \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} = 2V \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m_e kT}} \right)^{-3}.$$

令

$$\tilde{Z}_{i+1} = \sum_j g_{i+1,j} e^{-(E_{i+1,j} - E_{i+1,1})/kT},$$

$$\tilde{Z}_i = \sum_j g_{i,j} e^{-(E_{i,j} - E_{i,1})/kT},$$

$$z_e = 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2},$$

则由 $\chi = E_{i+1,1} - E_{i,1}$ 和 $n_e = N_e/V$ 可得

$$\frac{N_{i+1}n_e}{N_i} = \frac{\tilde{Z}_{i+1}z_e}{\tilde{Z}_i} e^{-\chi/kT}.$$

HII 只有一种状态, $S = 0$, 根据 S 和 Z 的关系可得 $Z_{\text{HII}} = 1$.

分光视差 (spectroscopic parallax) $d = 100^{(m-M)/5}$, m 当然可测, M 通过看光谱比对 H-R 图可测, 和视差没有半毛关系!