天体物理辐射机制笔记

GasinAn

2022 年 4 月 30 日

Printed in China

目录

第一章　辐射基本知识

1.1　高斯单位制

国际单位制: m, kg, s; $\mu_0 := 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{N/A}^2$.

Gauss 单位制: cm, g, s;

1. 令 $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$[1], $\epsilon_{\mathrm{Gauss}} := \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$, $\mu_{\mathrm{Gauss}} := \frac{\mu}{\mu_0}$,
2. 令库伦定律中比例系数为 1, 得 q 单位 $\mathrm{cm}^{3/2}\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{s}^{-1}$, $q_{\mathrm{Gauss}} := \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$,
3. 令 $\boldsymbol{B}$ 单位和 $\boldsymbol{E}$ 单位相同, $\boldsymbol{B}_{\mathrm{Gauss}} := c\boldsymbol{B}$.

直接计算方法: 把公式看成数的等式而非量的等式[2].

[1] 国际制中 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$, Gauss 制中 $c = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$.

[2] 请自行咨询梁老师这句话的含义.

物理量	单位定义式
q	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
ϵ_0	$\epsilon_0 = 1$
ϵ	$\epsilon = \epsilon_{\mathrm{r}}\epsilon_0$
E	$F = qE$
p	$p = ql$
P	$P = \frac{\sum p}{\Delta V}$
D	$D = \epsilon E$
χ_{e}	$P = \chi_{\mathrm{e}} E$
I	$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$
U	$U = Ed$
R	$U = IR$
$\mathcal{E}$	$\mathcal{E} = U + IR$
C	$C = \frac{q}{U}$
L	$L = \mathcal{E}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$
μ_0	$\mu_0 = 1$
μ	$\mu = \mu_{\mathrm{r}}\mu_0$
B	$F = q\frac{v}{c}B$
m	$m = \frac{I}{c}S$
M	$M = \frac{\sum m}{\Delta V}$
H	$B = \mu H$
χ_{m}	$M = \chi_{\mathrm{m}} H$

表 1.1: Gauss 单位制

第二章　辐射场理论

2.1　有源场: 电磁势—求解辐射场的经典方法

令 $\partial^a A_a(t,\boldsymbol{r})=0$, 得

$$\partial^a\partial_a A_b(t,\boldsymbol{r})=-4\pi J_b(t,\boldsymbol{r}). \tag{2.1}$$

有解

$$A^a(t,\boldsymbol{r})=\frac{1}{c}\int\frac{J^a(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c},\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V'. \tag{2.2}$$

对单粒子, $J^a(t,\boldsymbol{r})=qU^a(t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t))$, 所以

$$\begin{aligned}
A^a(t,\boldsymbol{r})&=\frac{q}{c}\int\frac{U^a(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_q(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V' &(2.3)\\
&=\frac{q}{c}\int\frac{\int U^a(t')\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_q(t'))\delta(t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}))\,\mathrm{d}t'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V' &(2.4)\\
&=\frac{q}{c}\iint\frac{U^a(t')\delta(t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_q(t'))\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' &(2.5)\\
&=\frac{q}{c}\int\frac{U^a(t')\delta(t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}{c}))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}\,\mathrm{d}t', &(2.6)
\end{aligned}$$

上式是对 t' 进行的积分. 把积分变量变成 $\tilde{t}'=t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}{c})$. 注意到积分中 t 和 $\boldsymbol{r}$ 被当成常量, 所以 $\mathrm{d}\tilde{t}'=\mathrm{d}t'+\frac{\dot{R}(t')}{c}\mathrm{d}t'=(1+\frac{\dot{R}(t')}{c})\mathrm{d}t'$, 其中 $R(t')=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|$, 所以 $\dot{R}(t')=-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t'))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_q(t')=-\hat{\boldsymbol{n}}(t')\cdot\boldsymbol{u}_q(t')$.

定义 $K(t')=1+\frac{\dot{R}(t')}{c}=1-\frac{\hat{\boldsymbol{n}}(t')\cdot\boldsymbol{u}_q(t')}{c}=1-\frac{u_r(t')}{c}$, 则 $\mathrm{d}\tilde{t}'=K(t')\mathrm{d}t'$, 所以

$$A^a(t,\boldsymbol{r})=\frac{q}{c}\int\frac{U^a(t')}{K(t')\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}\delta(\tilde{t}')\,\tilde{t}', \tag{2.7}$$

其中 t' 是 $\tilde{t}'$ 和 $t, \boldsymbol{r}$ 的函数. 令 $\tilde{t}' = t' - (t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}{c}) = 0$, 可得 $R(t') = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')| = c(t-t')$, 所以

$$A^a(t,\boldsymbol{r}) = \left[\frac{qU^a(t')}{cK(t')R(t')}\right]_{R(t')=c(t-t')}. \tag{2.8}$$

t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处接收到 t' 时刻 $r_q(t')$ 处产生的辐射, 恰有 $R(t')=c(t-t')$. 给定 t 和 $\boldsymbol{r}$, 满足 $R(t')=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|=c(t-t')$ 的 t' 存在且唯一, 否则世界线不类时.

$$\boldsymbol{E} = q\left[\frac{(\hat{\boldsymbol{n}}(t')-\boldsymbol{\beta}(t'))(1-\boldsymbol{\beta}(t')^2)}{K(t')^3R(t')^2}\right]_{R(t')=c(t-t')} \tag{2.9}$$

$$+\frac{q}{c}\left[\frac{\hat{\boldsymbol{n}}(t')\times((\hat{\boldsymbol{n}}(t')-\boldsymbol{\beta}(t'))\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{K(t')^3R(t')}\right]_{R(t')=c(t-t')}, \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{B} = [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}]_{R(t')=c(t-t')}. \tag{2.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi}R(t')^2\left|\boldsymbol{E}(t')\right|^2. \tag{2.12}$$

$\mathrm{d}P(t)$ 为因 t' 时刻电荷的辐射, 观者在 t 时刻测得的单位时间通过 $R(t')^2\mathrm{d}\Omega$ 的辐射. 求电荷处单位时间 $\mathrm{d}\Omega$ 方向的能量 $\mathrm{d}P(t')$. 能量守恒 $\mathrm{d}P(t')\mathrm{d}t' = \mathrm{d}P(t)\mathrm{d}t$, $K(t')=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}$,

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi}K(t')R(t')^2\left|\boldsymbol{E}(t')\right|^2. \tag{2.13}$$

非相对论, $K\simeq 1$, $\hat{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{\beta}\simeq\hat{\boldsymbol{n}}$,

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{cR}[\hat{\boldsymbol{n}}\times(\hat{\boldsymbol{n}}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})], \tag{2.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\dot{\beta}^2\sin^2\Theta_{\dot{\boldsymbol{\beta}},\hat{\boldsymbol{n}}}. \tag{2.15}$$

2.2 辐射谱: 电磁场能量在不同频率的分布

$$E(t) = \int E(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega, \tag{2.16}$$

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int E(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t. \tag{2.17}$$

对 $\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega}$ 作 Fourier 分析 (警告: 不是 $\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}$, 因为观者测得频谱). 假定 $R \simeq \mathrm{const}$, 由 Parseval 定理,

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = cR^2 \left|\boldsymbol{E}(\omega)\right|^2. \tag{2.18}$$

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int \boldsymbol{E}(t')e^{i\omega t}\mathrm{d}t, \tag{2.19}$$

由 $t' = t - \frac{R(t')}{c}$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = K(t')$,

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int K(t')\boldsymbol{E}(t')e^{i\omega\left[t'+\frac{R(t')}{c}\right]}\mathrm{d}t', \tag{2.20}$$

$R(t') = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q(t')| \simeq |\boldsymbol{r}| - \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\cdot\boldsymbol{r}_q(t') = |\boldsymbol{r}| - \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r}_q(t')$, 得

$$\left|\boldsymbol{E}(\omega)\right|^2 = \left|\frac{1}{2\pi}\int K(t')\boldsymbol{E}(t')e^{i\omega\left[t'-\frac{\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r}_q(t')}{c}\right]}\mathrm{d}t'\right|^2. \tag{2.21}$$

非相对论,

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \frac{\omega^4 q^2 \left|\boldsymbol{r}_q\right|(\omega)^2 \sin^2\Theta_{\ddot{\boldsymbol{r}}_q,\hat{\boldsymbol{n}}}}{c^3}. \tag{2.22}$$

第三章　相对论性带电粒子辐射

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi} K(t') R(t')^2 \left|\boldsymbol{E}(t')\right|^2, \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{c} \frac{\hat{\boldsymbol{n}}(t') \times ((\hat{\boldsymbol{n}}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{K(t')^3 R(t')}, \tag{3.2}$$

$$K(t') = 1 - \hat{\boldsymbol{n}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'). \tag{3.3}$$

若 $\hat{\boldsymbol{n}} // \boldsymbol{\beta}$, 则 $K \to 0$, $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} \to \infty$, 速度方向极大.

$K = 2K_{\min} \to \theta \simeq \frac{1}{\gamma} := \sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}$[1].

粒子静系中 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 出射的光子[2], 观者看来 $\theta \simeq \frac{1}{\gamma}$.

$\boldsymbol{\beta} // \dot{\boldsymbol{\beta}}$,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \sin^2\theta}{(1 - |\boldsymbol{\beta}| \cos\theta)^5}, \tag{3.4}$$

$\theta_{\max} = \arccos \frac{\sqrt{15|\boldsymbol{\beta}|^2+1}-1}{3|\boldsymbol{\beta}|}$[3].

$\boldsymbol{\beta} \perp \dot{\boldsymbol{\beta}}$,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \left[\frac{\gamma^2 (1 - |\boldsymbol{\beta}| \cos\theta)^2 - \sin^2\theta \cos^2\phi}{\gamma^2 (1 - |\boldsymbol{\beta}| \cos\theta)^5}\right], \tag{3.5}$$

其中 ϕ 坐标系为: 以 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 方向为 x 轴正向, 以 $\boldsymbol{\beta}$ 方向为 z 轴正向.

[1] 此处 θ 是观者系中粒子运动方向和观者方向的夹角.

[2] 此处 θ 是粒子静系中光子出射方向和粒子运动方向的夹角.

[3] 我算的, 不知对不对.