天体物理辐射机制笔记

GasinAn

2022 年 4 月 1 日

Printed in China

目录

第一章　辐射场理论

1.1　有源场: 电磁势—求解辐射场的经典方法

令 $\partial^a A_a(t,\boldsymbol{r})=0$, 得

$$\partial^a\partial_a A_b(t,\boldsymbol{r})=-4\pi J_b(t,\boldsymbol{r}). \tag{1.1}$$

有解

$$A^a(t,\boldsymbol{r})=\frac{1}{c}\int\frac{J^a(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c},\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V'. \tag{1.2}$$

对单粒子, $J^a(t,\boldsymbol{r})=qU^a(t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t))$, 所以

$$\begin{aligned}
A^a(t,\boldsymbol{r})&=\frac{q}{c}\int\frac{U^a(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_q(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V' &(1.3)\\
&=\frac{q}{c}\int\frac{\int U^a(t')\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_q(t'))\delta(t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}))\,\mathrm{d}t'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V' &(1.4)\\
&=\frac{q}{c}\iint\frac{U^a(t')\delta(t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_q(t'))\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' &(1.5)\\
&=\frac{q}{c}\int\frac{U^a(t')\delta(t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}{c}))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}\,\mathrm{d}t', &(1.6)
\end{aligned}$$

上式是对 t' 进行的积分. 把积分变量变成 $\tilde{t}'=t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}{c})$. 注意到积分中 t 和 $\boldsymbol{r}$ 被当成常量, 所以 $\mathrm{d}\tilde{t}'=\mathrm{d}t'+\frac{\dot{R}(t')}{c}\mathrm{d}t'=(1+\frac{\dot{R}(t')}{c})\mathrm{d}t'$, 其中 $R(t')=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|$, 所以 $\dot{R}(t')=-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t'))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_q(t')=-\hat{\boldsymbol{n}}(t')\cdot\boldsymbol{u}_q(t')$.

定义 $K(t')=1+\frac{\dot{R}(t')}{c}=1-\frac{\hat{\boldsymbol{n}}(t')\cdot\boldsymbol{u}_q(t')}{c}=1-\frac{u_r(t')}{c}$, 则 $\mathrm{d}\tilde{t}'=K(t')\mathrm{d}t'$, 所以

$$A^a(t,\boldsymbol{r})=\frac{q}{c}\int\frac{U^a(t')}{K(t')\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}\delta(\tilde{t}')\,\tilde{t}', \tag{1.7}$$

其中 t' 是 $\tilde{t}'$ 和 $t, \boldsymbol{r}$ 的函数. 令 $\tilde{t}' = t' - (t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}{c}) = 0$, 可得 $R(t') = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q(t')| = c(t-t')$, 所以

$$A^a(t, \boldsymbol{r}) = \left[\frac{qU^a(t')}{cK(t')R(t')}\right]_{R(t')=c(t-t')}. \tag{1.8}$$

t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处接收到 t' 时刻 $r_q(t')$ 处产生的辐射, 恰有 $R(t') = c(t-t')$. 给定 t 和 $\boldsymbol{r}$, 满足 $R(t') = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q(t')| = c(t-t')$ 的 t' 存在且唯一, 否则世界线不类时.

$$\boldsymbol{E} = q\left[\frac{(\hat{\boldsymbol{n}}(t') - \boldsymbol{\beta}(t'))(1-\boldsymbol{\beta}(t')^2)}{K(t')^3R(t')^2}\right]_{R(t')=c(t-t')} \tag{1.9}$$

$$+ \frac{q}{c}\left[\frac{\hat{\boldsymbol{n}}(t') \times ((\hat{\boldsymbol{n}}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{K(t')^3R(t')}\right]_{R(t')=c(t-t')}, \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{B} = [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}]_{R(t')=c(t-t')}. \tag{1.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi}R(t')^2 \left|\boldsymbol{E}(t')\right|^2. \tag{1.12}$$

$\mathrm{d}P(t)$ 为因 t' 时刻电荷的辐射, 观者在 t 时刻测得的单位时间通过 $R(t')^2\mathrm{d}\Omega$ 的辐射. 求电荷处单位时间 $\mathrm{d}\Omega$ 方向的能量 $\mathrm{d}P(t')$. 能量守恒 $\mathrm{d}P(t')\mathrm{d}t' = \mathrm{d}P(t)\mathrm{d}t$, $K(t') = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}$,

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi}K(t')R(t')^2 \left|\boldsymbol{E}(t')\right|^2. \tag{1.13}$$

非相对论, $K \simeq 1$, $\hat{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{\beta} \simeq \hat{\boldsymbol{n}}$,

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{cR}[\hat{\boldsymbol{n}} \times (\hat{\boldsymbol{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})], \tag{1.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\dot{\beta}^2 \sin^2 \Theta_{\dot{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{n}}}. \tag{1.15}$$