

天体物理辐射机制笔记

GasinAn

2022 年 5 月 20 日

Copyright © 2022 by GasinAn

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, in any form or by any means, without permission in writing from the publisher, except by a BNUser.

The author and publisher of this book have used their best efforts in preparing this book. These efforts include the development, research, and testing of the theories, technologies and programs to determine their effectiveness. The author and publisher make no warranty of any kind, express or implied, with regard to these techniques or programs contained in this book. The author and publisher shall not be liable in any event of incidental or consequential damages in connection with, or arising out of, the furnishing, performance, or use of these techniques or programs.

Printed in China

目录

第一章 辐射基本知识	5
1.1 高斯单位制	5
第二章 辐射场理论	7
2.1 辐射场的偏振与 Stokes 参量	7
2.2 有源场: 电磁势—求解辐射场的经典方法	8
2.3 辐射谱: 电磁场能量在不同频率的分布	10
第三章 相对论性带电粒子辐射	11
第四章 韧致辐射	13
4.1 韧致辐射谱分布	13
4.2 自由-自由吸收	14
第五章 同步辐射	15
5.1 回旋辐射	15
5.2 同步辐射	17
5.3 幂律分布电子的集体辐射	17
5.4 同步自吸收	18
5.5 曲率辐射	18
第六章 逆 Compton 散射	19
6.1 Thomson 散射	19
6.2 Compton 散射	19
6.3 逆 Compton 散射	20

第七章 等离子体效应	21
7.1 各向同性冷等离子体中的色散关系	21
7.2 光线在有大尺度磁场的冷等离子体中的传播	22
7.3 高能辐射过程中的等离子体效应	23
7.3.1 Cherenkov 辐射	23
7.3.2 Razin 效应	23
第八章 复合辐射与复合线 (参考自学)	25

第一章 辐射基本知识

1.1 高斯单位制

国际单位制: m, kg, s; $\mu_0 := 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$.

Gauss 单位制: cm, g, s;

1. 令 $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ ¹, $\epsilon_{\text{Gauss}} := \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$, $\mu_{\text{Gauss}} := \frac{\mu}{\mu_0}$,
2. 令库伦定律中比例系数为 1, 得 q 单位 $\text{cm}^{3/2}\text{g}^{1/2}\text{s}^{-1}$, $q_{\text{Gauss}} := \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$,
3. 令 \mathbf{B} 单位和 \mathbf{E} 单位相同, $\mathbf{B}_{\text{Gauss}} := c\mathbf{B}$.

直接计算方法: 把公式看成数的等式而非量的等式².

¹国际制中 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$, Gauss 制中 $c = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$.

²请自行咨询梁老师这句话的含义.

物理量	单位定义式
q	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
ϵ_0	$\epsilon_0 = 1$
ϵ	$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$
E	$F = qE$
p	$p = ql$
P	$P = \frac{\sum p}{\Delta V}$
D	$D = \epsilon E$
χ_e	$P = \chi_e E$
I	$I = \frac{dq}{dt}$
U	$U = Ed$
R	$U = IR$
\mathcal{E}	$\mathcal{E} = U + IR$
C	$C = \frac{q}{U}$
L	$L = \mathcal{E} \frac{dI}{dt}$
μ_0	$\mu_0 = 1$
μ	$\mu = \mu_r \mu_0$
B	$F = q \frac{v}{c} B$
m	$m = \frac{I}{c} S$
M	$M = \frac{\sum m}{\Delta V}$
H	$B = \mu H$
χ_m	$M = \chi_m H$

表 1.1: Gauss 单位制

第二章 辐射场理论

2.1 辐射场的偏振与 Stokes 参量

椭圆偏振,

$$\mathbf{E}_1(t) = E_1 \mathbf{e}_x \cos(\omega t - \varphi_1), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{E}_2(t) = E_2 \mathbf{e}_y \cos(\omega t - \varphi_2). \quad (2.2)$$

Stokes 参量:

$$\begin{cases} I = E_1^2 + E_2^2, \\ Q = E_1^2 - E_2^2, \\ U = 2E_1 E_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ V = 2E_1 E_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases} \quad (2.3)$$

实际,

$$\mathbf{E}(t) = E_x(t) \mathbf{e}_x + E_y(t) \mathbf{e}_y \quad (2.4)$$

$$= \int \{E_x(\omega) \cos[\omega t - \varphi_x(\omega)] \mathbf{e}_x + E_y(\omega) \cos[\omega t - \varphi_y(\omega)] \mathbf{e}_y\} d\omega, \quad (2.5)$$

给 y 方向附加一相移 η ,

$$\mathbf{E}(t) = \int \{E_x(\omega) \cos[\omega t - \varphi_x(\omega)] \mathbf{e}_x + E_y(\omega) \cos[\omega t - \varphi_y(\omega) + \eta] \mathbf{e}_y\} d\omega, \quad (2.6)$$

在 $(\sin \psi, \cos \psi)$ 上的投影为

$$\int \{E_x(\omega) \cos[\omega t - \varphi_x(\omega)] \sin \psi + E_y(\omega) \cos[\omega t - \varphi_y(\omega) + \eta] \cos \psi\} d\omega \quad (2.7)$$

$$= \sum_{\text{func}=\cos, \sin} \int \{E_x(\omega) \text{func} \varphi_x(\omega) \sin \psi + E_y(\omega) \text{func} [\varphi_y(\omega) - \eta] \cos \psi\} \text{func} \omega t d\omega, \quad (2.8)$$

平方平均, 得

$$\sum_{\text{func}=\cos, \sin} \int \{E_x(\omega) \text{func} \varphi_x(\omega) \sin \psi + E_y(\omega) \text{func} [\varphi_y(\omega) - \eta] \cos \psi\}^2 d\omega, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \int E_x(\omega)^2 d\omega \right\} \sin^2 \psi + \left\{ \int E_y(\omega)^2 d\omega \right\} \cos^2 \psi \\ &\quad + 2 \left\{ \int E_x(\omega) E_y(\omega) \cos[\varphi_x(\omega) - \varphi_y(\omega) + \eta] d\omega \right\} \sin \psi \cos \psi \\ &= \frac{1}{2} [I + Q \cos 2\psi + (U \cos \eta + V \sin \eta) \sin 2\psi], \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} I = \int E_x(\omega)^2 d\omega + \int E_y(\omega)^2 d\omega, \\ Q = \int E_x(\omega)^2 d\omega - \int E_y(\omega)^2 d\omega, \\ U = 2 \int E_x(\omega) E_y(\omega) \cos[\varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega)] d\omega, \\ V = 2 \int E_x(\omega) E_y(\omega) \sin[\varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega)] d\omega. \end{cases} \quad (2.11)$$

Stokes 参量依赖于坐标系.

2.2 有源场: 电磁势—求解辐射场的经典方法

令 $\partial^a A_a(t, \mathbf{r}) = 0$, 得

$$\partial^a \partial_a A_b(t, \mathbf{r}) = -4\pi J_b(t, \mathbf{r}). \quad (2.12)$$

有解

$$A^a(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{J^a(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (2.13)$$

对单粒子, $J^a(t, \mathbf{r}) = qU^a(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t))$, 所以

$$A^a(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{c} \int \frac{U^a(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_q(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.14)$$

$$= \frac{q}{c} \int \frac{\int U^a(t')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_q(t'))\delta(t' - (t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})) dt'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.15)$$

$$= \frac{q}{c} \iint \frac{U^a(t')\delta(t' - (t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_q(t')) dV' dt' \quad (2.16)$$

$$= \frac{q}{c} \int \frac{U^a(t')\delta(t' - (t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|}{c}))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|} dt', \quad (2.17)$$

上式是对 t' 进行的积分. 把积分变量变成 $\tilde{t}' = t' - (t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|}{c})$. 注意到积分中 t 和 \mathbf{r} 被当成常量, 所以 $d\tilde{t}' = dt' + \frac{\dot{R}(t')}{c}dt' = (1 + \frac{\dot{R}(t')}{c})dt'$, 其中 $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|$, 所以 $\dot{R}(t') = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|} \cdot \dot{\mathbf{r}}_q(t') = -\hat{\mathbf{n}}(t') \cdot \mathbf{u}_q(t')$.

定义 $K(t') = 1 + \frac{\dot{R}(t')}{c} = 1 - \frac{\hat{\mathbf{n}}(t') \cdot \mathbf{u}_q(t')}{c} = 1 - \frac{u_r(t')}{c}$, 则 $d\tilde{t}' = K(t')dt'$, 所以

$$A^a(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{c} \int \frac{U^a(t')}{K(t')|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|} \delta(\tilde{t}') \tilde{t}', \quad (2.18)$$

其中 t' 是 \tilde{t}' 和 t, \mathbf{r} 的函数. 令 $\tilde{t}' = t' - (t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|}{c}) = 0$, 可得 $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')| = c(t - t')$, 所以

$$A^a(t, \mathbf{r}) = \left[\frac{qU^a(t')}{cK(t')R(t')} \right]_{R(t')=c(t-t')}. \quad (2.19)$$

t 时刻 \mathbf{r} 处接收到 t' 时刻 $\mathbf{r}_q(t')$ 处产生的辐射, 恰有 $R(t') = c(t - t')$. 给定 t 和 \mathbf{r} , 满足 $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')| = c(t - t')$ 的 t' 存在且唯一, 否则世界线不类时.

$$\mathbf{E} = q \left[\frac{(\hat{\mathbf{n}}(t') - \boldsymbol{\beta}(t'))(1 - \boldsymbol{\beta}(t')^2)}{K(t')^3 R(t')^2} \right]_{R(t')=c(t-t')} \quad (2.20)$$

$$+ \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}}(t') \times ((\hat{\mathbf{n}}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{K(t')^3 R(t')} \right]_{R(t')=c(t-t')}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{B} = [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}]_{R(t')=c(t-t')}. \quad (2.22)$$

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} R(t')^2 |\mathbf{E}(t')|^2. \quad (2.23)$$

$dP(t)$ 为因 t' 时刻电荷的辐射, 观者在 t 时刻测得的单位时间通过 $R(t')^2 d\Omega$ 的辐射. 求电荷处单位时间 $d\Omega$ 方向的能量 $dP(t')$. 能量守恒 $dP(t')dt' = dP(t)dt$, $K(t') = \frac{dt}{dt'}$,

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} K(t') R(t')^2 |\mathbf{E}(t')|^2. \quad (2.24)$$

非相对论, $K \simeq 1$, $\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta} \simeq \hat{\mathbf{n}}$,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{cR} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})], \quad (2.25)$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \sin^2 \Theta_{\hat{\mathbf{n}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}}. \quad (2.26)$$

2.3 辐射谱: 电磁场能量在不同频率的分布

$$E(t) = \int E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.27)$$

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int E(t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.28)$$

对 $\frac{dP(t)}{d\Omega}$ 作 Fourier 分析 (警告: 不是 $\frac{dP(t')}{d\Omega}$, 因为观者测得频谱). 假定 $R \simeq \text{const}$, 由 Parseval 定理,

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = cR^2 |\mathbf{E}(\omega)|^2. \quad (2.29)$$

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{E}(t') e^{i\omega t} dt', \quad (2.30)$$

由 $t' = t - \frac{R(t')}{c}$, $\frac{dt}{dt'} = K(t')$,

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int K(t') \mathbf{E}(t') e^{i\omega \left[t' + \frac{R(t')}{c}\right]} dt', \quad (2.31)$$

$R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')| \simeq |\mathbf{r}| - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{r}_q(t') = |\mathbf{r}| - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_q(t')$, 得

$$|\mathbf{E}(\omega)|^2 = \left| \frac{1}{2\pi} \int K(t') \mathbf{E}(t') e^{i\omega \left[t' - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_q(t')}{c}\right]} dt' \right|^2. \quad (2.32)$$

非相对论,

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 |\ddot{\mathbf{r}}_q| (\omega)^2 \sin^2 \Theta_{\ddot{\mathbf{r}}_q, \hat{\mathbf{n}}}}{c^3} = \frac{\omega^4 q^2 |\mathbf{r}_q| (\omega)^2 \sin^2 \Theta_{\ddot{\mathbf{r}}_q, \hat{\mathbf{n}}}}{c^3}. \quad (2.33)$$

第三章 相对论性带电粒子辐射

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} K(t') R(t')^2 |\mathbf{E}(t')|^2, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{c} \frac{\hat{\mathbf{n}}(t') \times ((\hat{\mathbf{n}}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{K(t')^3 R(t')}, \quad (3.2)$$

$$K(t') = 1 - \hat{\mathbf{n}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'). \quad (3.3)$$

若 $\hat{\mathbf{n}} // \boldsymbol{\beta}$, 则 $K \rightarrow 0$, $\frac{dP}{d\Omega} \rightarrow \infty$, 速度方向极大.

$K = 2K_{\min} \rightarrow \theta \simeq \frac{1}{\gamma} := \sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}^2}$ ¹.

粒子静系中 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 出射的光子², 观者看来 $\theta \simeq \frac{1}{\gamma}$.

$\boldsymbol{\beta} // \dot{\boldsymbol{\beta}}$,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \sin^2 \theta}{(1 - |\boldsymbol{\beta}| \cos \theta)^5}, \quad (3.4)$$

$$\theta_{\max} = \arccos \frac{\sqrt{15|\boldsymbol{\beta}|^2 + 1} - 1}{3|\boldsymbol{\beta}|}$$
³.

$\boldsymbol{\beta} \perp \dot{\boldsymbol{\beta}}$,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \left[\frac{\gamma^2 (1 - |\boldsymbol{\beta}| \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{\gamma^2 (1 - |\boldsymbol{\beta}| \cos \theta)^5} \right], \quad (3.5)$$

其中 ϕ 坐标系为: 以 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 方向为 x 轴正向, 以 $\boldsymbol{\beta}$ 方向为 z 轴正向.

¹ 此处 θ 是观者系中粒子运动方向和观者方向的夹角.

² 此处 θ 是粒子静系中光子出射方向和粒子运动方向的夹角.

³ 我算的, 不知对不对.

第四章 轫致辐射

准备量子改正.

4.1 轫致辐射谱分布

$t = -\infty$ 速度 v , 碰撞距离 (最小距离) b . 靠近时加速度大, 有辐射, 碰撞时间 $\tau \simeq \frac{b}{v}$, Fourier 变换得 $\omega\tau \lesssim 1$ 时有辐射. 令距离为 b 时 $t = 0$.

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{8\pi}{3c^3} \ddot{d}(\omega)^2 = \frac{8\pi}{3c^3} \left| \frac{1}{2\pi} \int e\dot{v}(t)e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (4.1)$$

$\omega\tau \gg 1$, $e^{i\omega t}$ 振荡, $\omega\tau \ll 1$, $e^{i\omega t} \simeq 1$,

$$\ddot{d}(\omega) = \begin{cases} -\frac{e}{2\pi}\Delta v & \omega\tau \ll 1, \\ 0 & \omega\tau \gg 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\Delta v = \int a_{\perp} dt = - \int \frac{Ze^2}{m_e(v^2 t^2 + b^2)} \frac{b}{(v^2 t^2 + b^2)^{1/2}} dt = -\frac{2Ze^2}{mbv}. \quad (4.3)$$

$$\frac{dW}{d\omega} = \begin{cases} \frac{8Z^2 e^6}{3\pi c^3 m_e^2 v^2 b^2} & \omega \ll v/b, \\ 0 & \omega \gg v/b. \end{cases} \quad (4.4)$$

电子数密度 n_e , 离子数密度 n_i . Δt 时间, 流过离子旁距离 b , 宽 Δb 的环内的电子数为 $\Delta N_e = n_e(2\pi b \Delta b)(v\Delta t)$, 每个电子 $\Delta\omega$ 内辐射 $\Delta W = \frac{dW}{d\omega} \Delta\omega$. 则

$$\frac{dP}{d\omega} = \int 2\pi n_e b v \frac{dW}{d\omega} db. \quad (4.5)$$

$$\frac{dP}{dV d\omega} = n_i \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} 2\pi n_e b v \frac{dW}{d\omega} db = \frac{16n_e n_i Z^2 e^6}{3c^3 m_e^2 v^2 b^2} \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right). \quad (4.6)$$

$b_{\max} \simeq \frac{v}{\omega}$. 电子被做功 $W \simeq \frac{Ze^2}{b^2}b \leq \frac{m_e v^2}{2}$, 得 $b_{\min} \simeq \frac{Ze^2}{m_e v^2}$, 测不准原理, 得 $b_{\min} \simeq \frac{h}{m_e v}$, 所以 $b_{\min} \simeq \max\left(\frac{Ze^2}{m_e v^2}, \frac{h}{m_e v}\right)$. 粒子速度大, $\frac{h}{m_e v} \gg \frac{Ze^2}{m_e v^2}$, 需用量子理论, 但低频 $\frac{h\omega}{2\pi} \ll \frac{\gamma m_e v^2}{2}$, 所以能用经典结果. 最后瞎蒙乱猜

$$g_{\text{ff}}(\omega; v) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right), \quad (4.7)$$

得

$$\frac{dP}{dV d\omega} = \frac{16\pi n_e n_i Z^2 e^6}{3\sqrt{3}c^3 m_e^2 v^2 b^2} g_{\text{ff}}(\omega; v). \quad (4.8)$$

热平衡, Maxwell 分布, $h\nu_{\max} \lesssim \frac{1}{2}m_e v^2$,

$$\epsilon_{\text{ff}}(\nu) = \frac{dP}{dV d\omega} \propto Z^2 n_e n_i T^{-1/2} e^{-h\nu/kT} \bar{g}_{\text{ff}}(\nu). \quad (4.9)$$

$h\nu/kT \ll 1$, 平谱, $h\nu/kT \gtrsim 1$, 截断.

冷却时间 $\frac{3(n_e + n_i)\frac{kT}{2}}{\epsilon_{\text{ff}}}$.

4.2 自由-自由吸收

热平衡, 由 $j(\nu) = \frac{\epsilon_{\text{ff}}(\nu)}{4\pi}$, $S(\nu) = \frac{j(\nu)}{\alpha(\nu)} = B(\nu)$, 可得 $\alpha(\nu)$. 低频 $\alpha(\nu) \propto \nu^{-2}T^{-3/2}$ 大, 光学厚, 黑体谱 (分界 $\tau = 1$). $T \uparrow$, 谱矮胖, 总面积大.

第五章 同步辐射

5.1 回旋辐射

$v_{\parallel} = v \cos \alpha$, $v_{\perp} = v \sin \alpha$, α 称为投射角.

非相对论,

$$P = \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c}. \quad (5.1)$$

又有 $m_e \dot{\mathbf{v}} = -\frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, 所以

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m_e^2 c^5} v^2 B^2 \sin^2 \alpha. \quad (5.2)$$

电子经典半径为 $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$ ¹, 则

$$P = \frac{2}{3c} r_e^2 v^2 B^2 \sin^2 \alpha = \frac{2r_e^2 c}{3} \beta^2 B^2 \sin^2 \alpha. \quad (5.3)$$

假设电子分布各项同性, 则平均总功率

$$\bar{P} = \frac{2r_e^2 c}{3} \beta^2 B^2 \frac{\iint \sin^2 \alpha \sin \alpha \, d\alpha \, d\phi}{4\pi} \quad (5.4)$$

$$= \frac{2r_e^2 c}{3} \beta^2 B^2 \frac{\int \sin^3 \alpha \, d\alpha}{2} \quad (5.5)$$

$$= \frac{2r_e^2 c}{3} \beta^2 B^2 \frac{2}{3} \quad (5.6)$$

$$= \frac{4}{9} r_e^2 c \beta^2 B^2. \quad (5.7)$$

P 和 \bar{P} 正比于电子动能 (β^2) 和磁场能量密度 (B^2).

周期运动,

$$E(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} E_s e^{-is\omega_0 t}, \quad (5.8)$$

¹ 令 $m_e c^2 = \frac{e^2}{r_e}$.

$$E_s = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) e^{is\omega_0 t} dt. \quad (5.9)$$

对 $\frac{dW}{d\Omega} := \int_0^T \frac{dP(t)}{d\Omega} dt$ 作 Fourier 分析. 一样假定 $R \simeq \text{const}$, 由 Parseval 定理,

$$\frac{d\bar{P}_s}{d\Omega} := \frac{1}{T} \frac{dW_s}{d\Omega} = \frac{c}{2\pi} R^2 |\mathbf{E}_s|^2. \quad (5.10)$$

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}(t') e^{is\omega_0 t} dt. \quad (5.11)$$

由 $t' = t - \frac{R(t')}{c}$, $\frac{dt}{dt'} = K(t')$,

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{T} \int K(t') \mathbf{E}(t') e^{i\omega \left[t' + \frac{R(t')}{c} \right]} dt', \quad (5.12)$$

$R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')| \simeq |\mathbf{r}| - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{r}_q(t') = |\mathbf{r}| - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_q(t')$, 得

$$|\mathbf{E}_s|^2 = \left| \frac{1}{T} \int K(t') \mathbf{E}(t') e^{i\omega \left[t' - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_q(t')}{c} \right]} dt' \right|^2, \quad (5.13)$$

非相对论,

$$\frac{d\bar{P}_s}{d\Omega} = \frac{q^2 |\ddot{\mathbf{r}}_q|^2 \sin^2 \Theta_{\ddot{\mathbf{r}}_q, \hat{\mathbf{n}}}}{2\pi c^3} = \frac{s^4 \omega_0^4 q^2 |\mathbf{r}_q|^2 \sin^2 \Theta_{\mathbf{r}_q, \hat{\mathbf{n}}}}{2\pi c^3}. \quad (5.14)$$

偶极子: x 轴和 y 轴 \mathbf{E} 沿 z 轴, z 轴 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

由对称性, 可令电子在 xOy 面内, 观者在 xOz 面内, 然后可得 ($\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, $\omega_0 = \frac{1}{\gamma} \omega_L = \frac{1}{\gamma} \frac{eB}{m_e c}$)

$$\frac{d\bar{P}_s}{d\Omega} = \frac{2\pi e^2 s^2 \nu_0^2}{c} [\cot^2 \theta J_s(s\beta \sin \theta)^2 + \beta^2 J'_s(s\beta \sin \theta)^2], \quad (5.15)$$

其中 Bessel 函数

$$J_s(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(su - x \sin u)} du. \quad (5.16)$$

积分得

$$\bar{P}_s = \frac{8\pi^2 e^2 s^2 \gamma^{-2} \nu_L^2}{c\beta} \left[s\beta^2 J'_{2s}(2s\beta) - s^2 \gamma^{-2} \int_0^\beta J_{2s}(2su) du \right], \quad (5.17)$$

非相对论, $\beta \ll 1$, $s\beta \ll 1$, 展开得

$$\bar{P}_s \simeq \left(\frac{8\pi^2 e^2 \nu_L^2}{c} \right) \frac{(s+1)s^{2s+1}}{(2s+1)!} \beta^{2s}. \quad (5.18)$$

可见 $\bar{P}_{s+1}/\bar{P}_s \sim \beta^2 \ll 1$.

5.2 同步辐射

同样回旋运动, 令 $m_e \rightarrow \gamma m_e$, 得 $\omega_0 = \frac{1}{\gamma} \omega_L = \frac{eB}{\gamma m_e c}$, 回旋半径非常大, 接近直线运动.

$$P = \frac{2e^2 \gamma^4 \dot{v}^2}{3c}. \quad (5.19)$$

$$P = \frac{2r_e^2 c}{3} \gamma^2 \beta^2 B^2 \sin^2 \alpha. \quad (5.20)$$

$$\bar{P} = \frac{4}{9} r_e^2 c \gamma^2 \beta^2 B^2. \quad (5.21)$$

冷却时间 $t_{\text{cool}} := \gamma m_e c^2 / \bar{P}$.

仍然有第三章的 $\frac{dP}{d\Omega}$ 和5.1节的

$$\frac{d\bar{P}_s}{d\Omega} = \frac{2\pi e^2 s^2 \nu_0^2}{c} [\cot^2 \theta J_s(s\beta \sin \theta)^2 + \beta^2 J'_s(s\beta \sin \theta)^2], \quad (5.22)$$

$$\bar{P}_s = \frac{8\pi^2 e^2 s^2 \nu_0^2}{c\beta} \left[s\beta^2 J'_{2s}(2s\beta) - s^2 \gamma^{-2} \int_0^\beta J_{2s}(2su) du \right]. \quad (5.23)$$

因为 $\Delta\nu_0/\nu_0 \ll 1$, 已成连续谱.

直接求连续谱. $\omega_c := \frac{3}{2} \gamma^2 \omega_L \sin \alpha$, 最大值 $\omega \approx 0.29\omega_c$, 低频 $\propto \omega^{1/3}$, 高频指数下降, 用 $\ln \omega$ 画图可见高频截断.

5.3 幂律分布电子的集体辐射

常认为电子能量分布是幂律的, 即

$$N(\gamma) = C\gamma^{-p}, \quad \gamma \in [1, \infty), \quad (5.24)$$

则

$$P_{\text{tot}}(\omega) = C \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} P(\omega) \gamma^{-p} d\gamma \propto \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \gamma^{-p} d\gamma. \quad (5.25)$$

把积分变量变成 $x := \omega/\omega_c$, 由 $\omega_c \propto \gamma^2$ 得

$$P_{\text{tot}}(\omega) \propto \omega^{-(p-1)/2} \int_{x_1}^{x_2} F(x) x^{(p-3)/2} dx \propto \omega^{-s}, \quad (5.26)$$

其中 $s := (p-1)/2$.

5.4 同步自吸收

$\alpha(\omega) \propto \omega^{-(p+4)/2}$, $S(\omega) = \frac{j(\omega)}{\alpha(\omega)} = \frac{P_{\text{tot}}(\omega)}{4\pi} \alpha(\omega) \propto \omega^{5/2}$. 低频 α 大, 光学厚, $I(\omega) \approx S(\omega) \propto \omega^{5/2}$, 高频 $I(\omega) \propto \omega^{-s}$, 分界点 $\tau(\omega) = 1$.
光学厚非黑体谱的原因是电子分布非 Maxwell (幂律).

5.5 曲率辐射

因为运动类似, 所以单粒子谱型一样. 但 $\omega_0 \simeq \frac{c}{\rho}$ (其中 ρ 为曲率半径), 所以 $\omega_c \propto \gamma^3$, 低频端 $P(\omega) \propto \omega^{1/3}$ 与 γ 无关, 所以 $P_{\text{tot}}(\omega) \propto P(\omega) \propto \omega^{1/3}$.

第六章 逆 Compton 散射

6.1 Thomson 散射

Thomson 散射: 电子被电磁波强迫振动.

假设入射完全线偏振, v 小, 忽略磁场, 电子成偶极子. 置偶极子于 z 轴,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{c}{4\pi}E^2\right) \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \sin^2 \theta. \quad (6.1)$$

微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} := \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \sin^2 \theta, \quad (6.2)$$

散射截面

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi r_e^2 \quad (6.3)$$

对无偏振入射也恰好成立, 无偏振入射散射后会偏振.

6.2 Compton 散射

掏出 QED, 得 Klein-Nishina 公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_{\text{出}}}{\nu_{\lambda}}\right)^2 \left(\frac{\nu_{\lambda}}{\nu_{\text{出}}} + \frac{\nu_{\text{出}}}{\nu_{\lambda}} - \sin^2 \theta\right) r_e^2, \quad (6.4)$$

注意 θ 是散射角 (入射方向和散射方向的夹角), 且是无偏振入射. 入射能量大, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 堆向 $\theta = 0$, 光子几乎不会被散射.

6.3 逆 Compton 散射

电子系中有 Compton 散射 (或 Thomson 散射), 然后转换参考系, 结果是光子能量变 γ^2 倍, 且电子总认为光子从正面来, 产生各向同性散射, 但观者认为光子沿电子运动方向射出.

各向同性单色光辐射谱: 计 $x = \frac{\nu}{4\gamma^2\nu_\lambda}$, 峰值 $x \simeq 0.61$, 截止 $x = 1$, 低频 $P(\nu) \propto \nu$

第七章 等离子体效应

7.1 各向同性冷等离子体中的色散关系

无外磁场, 各向同性.

冷等离子体: 只考虑辐射在等离子体中的传播, 忽略等离子体的辐射和吸收.

设 $\mathbf{E} = E \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]\mathbf{e}$, 代入 Maxwell 方程,

$$\begin{cases} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{B}, \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} - i\frac{\omega}{c}\mathbf{E}. \end{cases} \quad (7.1)$$

只认为电子有电流.

$$m_e \dot{\mathbf{v}}_e = -e\mathbf{E} \quad (7.2)$$

忽略等离子体导致的 \mathbf{E} 的变化, 代入 $\mathbf{E} = E \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]\mathbf{e}$,

$$\mathbf{v} = \frac{e\mathbf{E}}{i\omega m_e}. \quad (7.3)$$

用 Ohm 定律,

$$\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{v} = \sigma \mathbf{E}, \quad (7.4)$$

并定义

$$\epsilon := 1 - \frac{4\pi\sigma}{i\omega} = 1 - \frac{4\pi n_e e^2}{\omega^2 m_e} := 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, \quad (7.5)$$

得

$$\begin{cases} i\mathbf{k} \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0, \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \\ i\mathbf{k} \times (\epsilon \mathbf{E}) = i\frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -i\frac{\omega}{c} (\epsilon \mathbf{E}), \end{cases} \quad (7.6)$$

一不小心就玩出了个“真空场方程”，发现

$$c^2 k^2 = \epsilon \omega^2 = \omega^2 - \omega_p^2. \quad (7.7)$$

若 $\omega < \omega_p$, k 为虚数, $\mathbf{E} = E \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \mathbf{e}$ 变成指数衰减, 所以 ω_p 为截止频率.

若 $\omega > \omega_p$, 相速度

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} := \frac{c}{n_r} > c. \quad (7.8)$$

群速度

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < c. \quad (7.9)$$

可测柱密度.

7.2 光线在有大尺度磁场的冷等离子体中的传播

大磁场 B_0 . 设沿 B_0 方向入射, $\mathbf{E} = E e^{-i\omega t} (\mathbf{e}_1 \mp i\mathbf{e}_2)$, $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_3$,

$$\omega_B := \frac{eB_0}{m_e c} \quad (7.10)$$

$$\epsilon_{\text{R,L}} := 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_B)}, \quad (7.11)$$

则

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{\epsilon_{\text{R,L}}}. \quad (7.12)$$

群速度

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (7.13)$$

有 Faraday 旋转.

7.3 高能辐射过程中的等离子体效应

7.3.1 Cherenkov 辐射

按上面方法各种替换, 公式中出现 $n_r := \sqrt{\epsilon}$, 若 $n_r > 1$, 则 K 可等于 0, A 可等于 ∞ , “固有场” 可能无穷远积分不为 0, 所以匀速也可有辐射.

若粒子 $v > v_{ph} = c/n_r$, 则有 Cherenkov 锥.

7.3.2 Razin 效应

$k = 1 - n_r \beta \cos \theta$, 得辐射锥角 $\theta = (1 - n_r^2 \beta^2)^{1/2}$. 若 $n_r \ll 1$, $\beta \simeq 1$, $\theta \simeq (1 - n_r^2)^{1/2} = \frac{\omega_p}{\omega}$, 若 $\omega \lesssim \gamma \omega_p$, 则无 $\theta \simeq 1/\gamma$, 所以截止频率 $\gamma \omega_p$ 非 ω_p .

第八章 复合辐射与复合线

1. 何为复合辐射？它与韧致辐射有何异同？在温度为 10000 K 时，复合辐射主要产生哪种波段的辐射？

答 复合过程产生的辐射. 自由-束缚而非自由-自由. 光学 (韧致射电).

2. 氢离子复合辐射的截面与主量子数 n 有何关系？若温度为 10000 K, 复合截面的量级大约是多少？它比氢原子的几何截面大还是小？

答

$$\frac{\Delta\sigma_R}{\Delta n} = \left(\frac{32\pi}{3\sqrt{3}}\right) Z^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \left(\frac{\hbar}{m_e v_{\text{初}}}\right)^2 \left(\frac{Z^2 \frac{2\pi^2 e^4 m_e}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}}{h\nu_{\text{出}}}\right) \frac{g_R(n)}{n^3} \quad (8.1)$$

$$= \left(\frac{32\pi}{3\sqrt{3}}\right) Z^2 \alpha_{\text{EM}}^3 \left(\frac{\lambda_e}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{Z^2 E_1}{h\nu_{\text{出}}}\right) \frac{g_R(n)}{n^3}, \quad (8.2)$$

大 n , $\frac{\Delta\sigma_R}{\Delta n} \propto n^{-3}$, 小 n , $h\nu \simeq \frac{Z^2 E_1}{n^2}$, $\frac{\Delta\sigma_R}{\Delta n} \propto n^{-1}$, 临界值 $kT \simeq E_{\text{初}} \simeq \frac{Z^2 E_1}{n_{\text{max}}^2}$. $\frac{\Delta\sigma_R}{\Delta n} \sim 10^{-20} \text{cm}^2$. $5 \times 10^3 - 2 \times 10^4 \text{ K}$ 远小于氢原子截面 ($\sim 10^{-15} \text{cm}^2$).

3. 复合速率系数 (α) 的定义是什么？在低温和高温近似下，复合速率系数与温度的关系大约是什么？

答

$$-\frac{dN_e}{dt} = -\frac{dN_Z}{dt} := \alpha N_e N_Z, \quad (8.3)$$

设电子有 Maxwell 分布 $f(v)$, 则

$$\alpha(T) = \sum_n \int \sigma_R(n) v f(v) dv := \sum_n \alpha_n(T). \quad (8.4)$$

低温 $\alpha(T) \propto T^{-1/2}$, 高温 $\alpha(T) \propto T^{-3/2}$.

4. 复合辐射连续谱和韧致辐射的谱发射系数的比值如何近似表示? 在何种情况下复合辐射比韧致辐射占优势? 在何种情况下复合辐射不重要?

答 $\frac{j_{\text{复合}}(\nu)}{j_{\text{韧致}}(\nu)} \simeq 10^{-1} \frac{X(\nu, T)}{T/10^6 \text{K}}$, 由于 X 值随频率 ν 值的增大而增加, 复合辐射连续谱在高频端可能超过韧致辐射, 而在低频端韧致辐射占优势. 当波长小于 $\sim \frac{30}{T/10^6 \text{K}} \text{\AA}$ 时, 复合辐射超过韧致辐射, 当波长大于 $\sim \frac{30}{T/10^6 \text{K}} \text{\AA}$ 时, 韧致辐射大于复合辐射. 对任意给定频率, 温度升高时, 比值 $\frac{j_{\text{复合}}(\nu)}{j_{\text{韧致}}(\nu)}$ 减少. 温度超过 10^7K 时, 除在边界频率 $h\nu = I_{Z, z-1, n}$ ($I_{Z, z-1, n}$ 为原子序数 Z 的, 净电荷为 $(z-1)e$ 的离子在能级 n 的电离能) 处之外, 复合辐射在所有波长处都不重要.

5. 何为复合线? 何为 Balmer 线系? 试写出至少两条 Balmer 线的波长.

答 复合到激发态后随即发生的向低能级的级联跃迁过程中产生的谱线. 向 $n = 2$ 能级发生的级联跃迁过程产生氢的 Balmer 线系. 6562.1\AA , 4860.7\AA , 4340.1\AA , 4101.2\AA ...

6. 何为复合-级联方程? 它常被用来确定何种物理参数?

答 确定各能级原子数的方程. 每条谱线的发射系数及各条谱线的相对强度.

7. 何为射电复合谱线? 利用射电观测得到的射电复合谱线的哪些参量可确定等离子体电子温度?

答 高激发态之间的复合-级联跃迁产生的射电谱线. 谱线宽度 (FWHM) 及分立谱-连续谱亮温度比 (实测的是“天线温度”比).

8. 双电子复合在什么情况下变得比复合辐射更重要?

答 双电子复合 (入射到离子上的外来电子使离子发生碰撞激发, 同时此损失了动能的电子被俘获到该离子的另一激发态) 过程在 $kT \gtrsim 0.3 \Delta W_{\text{离子激发}}$ 时将超过复合辐射过程.

9. 何为光电吸收? (类氢离子) 在频率大于能级 n 的光致电离的阈值频率时, 光电吸收的截面与频率有何种关系?

答 束缚-自由吸收.

$$\frac{\Delta\sigma_{\text{bf}}}{\Delta n} = \frac{32\pi^2 e^6 R_\infty Z^4}{3\sqrt{3} h^3 \nu^3 n^5} g_{\text{bf}}(\nu, T), \quad n \geq \frac{Z^2}{h} E_n. \quad (8.5)$$

10. 产生原子发射线的主要机制有哪几种? 试列举出哪些谱线是有哪种机制产生的?

答 复合-级联过程, 碰撞激发 (当等离子体中的自由电子和原子 (或离子) 碰撞时, 引起原子的激发). 同一星云/AGN 同时观测到明亮的允许线 (如 H_α , H_β 等) 和明亮的禁线 (如 O III 的 4959, 5007 双线), 前者复合-级联过程, 后者碰撞激发.

11. 何为碰撞激发? 自由电子在等离子体中主要起哪三种作用?

答 当等离子体中的自由电子和原子 (或离子) 碰撞时, 引起原子的激发.

- (a) 自由电子间频繁碰撞导致电子气的平衡态速度分布 (Maxwell 分布) 建立, 温度约 10000 K;
- (b) 自由电子和离子相遇, 产生韧致辐射和复合辐射;
- (c) 自由电子和离子的非弹性碰撞, 引起离子 (或原子) 的激发, 产生辐射-电子碰撞激发.

12. H 和 O 元素丰度相差三个量级, 但发射线强度却相近, 是何原因?

答 复合截面很小 ($\frac{\Delta\sigma_{\text{R}}}{\Delta n} \sim 10^{-20} \text{cm}^2$), 比碰撞激发截面小近三个量级.

13. 何为选择定则? H 原子的主要 (偶极近似下的) 选择定则是什么?

答 对给定原子, 从一切跃迁中选出真有可能实现的跃迁的法则称为选择定则. $\Delta l = \pm 1$, $\Delta m = 0, \pm 1$.

14. 是否所有满足偶极辐射选择定则的允许跃迁都有相同的跃迁概率? 光谱学中经常用什么量来代替跃迁概率?

答 非. 振子强度.

15. 写出比偶极辐射更精确的跃迁概率公式？当偶极矩辐射为零时是否还会发生能级跃迁？

答 电偶极

$$A_{if} = \frac{4\omega_{fi}^3}{3\hbar c^3} \left| \vec{D}_{fi} \right|^2 = A_{if} = \frac{4\omega_{fi}^3}{3\hbar c^3} |e\vec{r}_{fi}|^2, \quad (8.6)$$

磁偶极

$$A_{if}^M = \frac{4\omega_{fi}^3}{3\hbar c^3} \left| \vec{M}_{fi} \right|^2 = \frac{4\omega_{fi}^3}{3\hbar c^3} \left| \frac{e}{2m_e c^2} \left(\vec{L}_{fi} + 2\vec{S}_{fi} \right) \right|^2, \quad (8.7)$$

电四极

$$A_{if}^Q = \frac{\omega_{fi}^5}{10\hbar c^5} \left| \vec{D}_{fi} \right|^2 = \frac{\omega_{fi}^5}{10\hbar c^5} \left| e \left(\vec{r}_{fi} \vec{r}_{fi} - \frac{1}{3} r_{fi}^2 \vec{I} \right) \right|^2, \quad (8.8)$$

可.

16. 何为禁戒跃迁和禁线？产生禁戒跃迁的主要原因是什么？天体物理中常见的禁线有哪些（写出禁线的波长）？

答 凡破坏了偶极矩辐射的选择定则的跃迁称为禁戒跃迁，这种跃迁产生的谱线称为禁线。电四极矩和磁偶级矩跃迁的作用。

- (a) [O III] 的绿光双线, 5007Å 和 4959Å (靠近 H_β: 4861Å);
- (b) [N II] 的红光双线, 6548Å 和 6583Å (靠近 H_α: 6563Å);
- (c) [S II] 的红光双线, 6716Å 和 6731Å (很难分辨);
- (d) [O II] 的紫光双线, 3726Å 和 3729Å (不可分辨);
- (e) [H I] 的 21cm 射电谱线.

17. 写出碰撞激发截面的量级近似表示式。碰撞激发截面是否大于韧致辐射截面和复合辐射截面？什么情况下碰撞激发机制变得不重要？

答 $\sigma \sim 4\pi a_{\text{Bohr}}^2 \left(\frac{E_1}{E_e} \right) \left(\frac{E_1}{\Delta E_e} \right)$. 密度很低, $T \lesssim 10^7 \text{ K}$, 远大于韧致辐射截面和复合辐射截面. 除非 $T \lesssim 3 \times 10^4 \text{ K}$.

18. (对光学薄辐射源) 由哪些离子的禁线强度比可确定电子温度 (及理由)？由哪些离子的禁线强度比可确定电子密度 (及理由)？

答 能级相差大的, 强度比对电子温度敏感. 能级相差小的, 强度比对电子密度敏感.

19. 如果观测到的 [OII] 或 [SII] 双禁线的强度比接近 1.5, 说明什么? 若强度比大致为 0.3, 则说明什么?

答 电子密度小. 电子密度大.