# 天体物理辐射机制笔记

GasinAn

2022 年 5 月 19 日

Printed in China

# 目录

# 第一章　辐射基本知识

## 1.1　高斯单位制

国际单位制: m, kg, s; $\mu_0 := 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{N/A^2}$.

Gauss 单位制: cm, g, s;

1. 令 $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$[1], $\epsilon_{\mathrm{Gauss}} := \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$, $\mu_{\mathrm{Gauss}} := \frac{\mu}{\mu_0}$,
2. 令库伦定律中比例系数为 1, 得 $q$ 单位 $\mathrm{cm^{3/2}g^{1/2}s^{-1}}$, $q_{\mathrm{Gauss}} := \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$,
3. 令 $\boldsymbol{B}$ 单位和 $\boldsymbol{E}$ 单位相同, $\boldsymbol{B}_{\mathrm{Gauss}} := c\boldsymbol{B}$.

直接计算方法: 把公式看成数的等式而非量的等式[2].

[1] 国际制中 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$, Gauss 制中 $c = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$.

[2] 请自行咨询梁老师这句话的含义.

| 物理量 | 单位定义式 |
|---|---|
| $q$ | $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$ |
| $\epsilon_0$ | $\epsilon_0 = 1$ |
| $\epsilon$ | $\epsilon = \epsilon_{\mathrm{r}}\epsilon_0$ |
| $E$ | $F = qE$ |
| $p$ | $p = ql$ |
| $P$ | $P = \frac{\sum p}{\Delta V}$ |
| $D$ | $D = \epsilon E$ |
| $\chi_{\mathrm{e}}$ | $P = \chi_{\mathrm{e}} E$ |
| $I$ | $I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ |
| $U$ | $U = Ed$ |
| $R$ | $U = IR$ |
| $\mathcal{E}$ | $\mathcal{E} = U + IR$ |
| $C$ | $C = \frac{q}{U}$ |
| $L$ | $L = \mathcal{E}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ |
| $\mu_0$ | $\mu_0 = 1$ |
| $\mu$ | $\mu = \mu_{\mathrm{r}}\mu_0$ |
| $B$ | $F = q\frac{v}{c}B$ |
| $m$ | $m = \frac{I}{c}S$ |
| $M$ | $M = \frac{\sum m}{\Delta V}$ |
| $H$ | $B = \mu H$ |
| $\chi_{\mathrm{m}}$ | $M = \chi_{\mathrm{m}} H$ |

表 1.1: Gauss 单位制

# 第二章　辐射场理论

## 2.1　辐射场的偏振与 Stokes 参量

椭圆偏振,

$$\boldsymbol{E}_1(t) = E_1\boldsymbol{e}_x\cos(\omega t - \varphi_1), \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{E}_2(t) = E_2\boldsymbol{e}_y\cos(\omega t - \varphi_2). \tag{2.2}$$

Stokes 参量:

$$\begin{cases} I = E_1^2 + E_2^2, \\ Q = E_1^2 - E_2^2, \\ U = 2E_1E_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ V = 2E_1E_2\sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases} \tag{2.3}$$

实际,

$$\boldsymbol{E}(t) = E_x(t)\boldsymbol{e}_x + E_y(t)\boldsymbol{e}_y \tag{2.4}$$

$$= \int \{E_x(\omega)\cos[\omega t - \varphi_x(\omega)]\boldsymbol{e}_x + E_y(\omega)\cos[\omega t - \varphi_y(\omega)]\boldsymbol{e}_y\}\,\mathrm{d}\omega, \tag{2.5}$$

给 $y$ 方向附加一相移 $\eta$,

$$\boldsymbol{E}(t) = \int \{E_x(\omega)\cos[\omega t - \varphi_x(\omega)]\boldsymbol{e}_x + E_y(\omega)\cos[\omega t - \varphi_y(\omega) + \eta]\boldsymbol{e}_y\}\,\mathrm{d}\omega, \tag{2.6}$$

在 $(\sin\psi, \cos\psi)$ 上的投影为

$$\int \{E_x(\omega)\cos[\omega t - \varphi_x(\omega)]\sin\psi + E_y(\omega)\cos[\omega t - \varphi_y(\omega) + \eta]\cos\psi\}\,\mathrm{d}\omega \tag{2.7}$$

$$= \sum_{\mathrm{func}=\cos,\sin} \int \{E_x(\omega)\,\mathrm{func}\,\varphi_x(\omega)\sin\psi + E_y(\omega)\,\mathrm{func}\,[\varphi_y(\omega) - \eta]\cos\psi\}\ \mathrm{func}\,\omega t\,\mathrm{d}\omega, \tag{2.8}$$

平方平均, 得

$$\sum_{\mathrm{func}=\cos,\sin} \int \{E_x(\omega)\,\mathrm{func}\,\varphi_x(\omega)\sin\psi + E_y(\omega)\,\mathrm{func}\,[\varphi_y(\omega) - \eta]\cos\psi\}^2\ \mathrm{d}\omega, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
=&\left\{\int E_x(\omega)^2\,\mathrm{d}\omega\right\}\sin^2\psi + \left\{\int E_y(\omega)^2\,\mathrm{d}\omega\right\}\cos^2\psi \\
&+ 2\left\{\int E_x(\omega)E_y(\omega)\cos[\varphi_x(\omega) - \varphi_y(\omega) + \eta]\,\mathrm{d}\omega\right\}\sin\psi\cos\psi \\
=&\frac{1}{2}[I + Q\cos 2\psi + (U\cos\eta + V\sin\eta)\sin 2\psi],
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases}
I = \int E_x(\omega)^2\,\mathrm{d}\omega + \int E_y(\omega)^2\,\mathrm{d}\omega, \\
Q = \int E_x(\omega)^2\,\mathrm{d}\omega - \int E_y(\omega)^2\,\mathrm{d}\omega, \\
U = 2\int E_x(\omega)E_y(\omega)\cos[\varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega)]\,\mathrm{d}\omega, \\
V = 2\int E_x(\omega)E_y(\omega)\sin[\varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega)]\,\mathrm{d}\omega.
\end{cases} \tag{2.11}$$

Stokes 参量依赖于坐标系.

## 2.2 有源场: 电磁势—求解辐射场的经典方法

令 $\partial^a A_a(t, \boldsymbol{r}) = 0$, 得

$$\partial^a\partial_a A_b(t, \boldsymbol{r}) = -4\pi J_b(t, \boldsymbol{r}). \tag{2.12}$$

有解

$$A^a(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{J^a(t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}, \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V'. \tag{2.13}$$

对单粒子, $J^a(t,\boldsymbol{r}) = qU^a(t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t))$, 所以

$$A^a(t,\boldsymbol{r}) = \frac{q}{c}\int \frac{U^a(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_q(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V' \tag{2.14}$$

$$= \frac{q}{c}\int \frac{\int U^a(t')\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_q(t'))\delta(t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}))\,\mathrm{d}t'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V' \tag{2.15}$$

$$= \frac{q}{c}\iint \frac{U^a(t')\delta(t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_q(t'))\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' \tag{2.16}$$

$$= \frac{q}{c}\int \frac{U^a(t')\delta(t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}{c}))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}\,\mathrm{d}t', \tag{2.17}$$

上式是对 $t'$ 进行的积分. 把积分变量变成 $\tilde{t}' = t' - (t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}{c})$. 注意到积分中 $t$ 和 $\boldsymbol{r}$ 被当成常量, 所以 $\mathrm{d}\tilde{t}' = \mathrm{d}t' + \frac{\dot{R}(t')}{c}\mathrm{d}t' = (1+\frac{\dot{R}(t')}{c})\mathrm{d}t'$, 其中 $R(t') = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|$, 所以 $\dot{R}(t') = -\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t'))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_q(t') = -\hat{\boldsymbol{n}}(t')\cdot\boldsymbol{u}_q(t')$.

定义 $K(t') = 1+\frac{\dot{R}(t')}{c} = 1-\frac{\hat{\boldsymbol{n}}(t')\cdot\boldsymbol{u}_q(t')}{c} = 1-\frac{u_r(t')}{c}$, 则 $\mathrm{d}\tilde{t}' = K(t')\mathrm{d}t'$, 所以

$$A^a(t,\boldsymbol{r}) = \frac{q}{c}\int \frac{U^a(t')}{K(t')\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}\delta(\tilde{t}')\,\tilde{t}', \tag{2.18}$$

其中 $t'$ 是 $\tilde{t}'$ 和 $t, \boldsymbol{r}$ 的函数. 令 $\tilde{t}' = t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}{c}) = 0$, 可得 $R(t') = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')| = c(t-t')$, 所以

$$A^a(t,\boldsymbol{r}) = \left[\frac{qU^a(t')}{cK(t')R(t')}\right]_{R(t')=c(t-t')}. \tag{2.19}$$

$t$ 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处接收到 $t'$ 时刻 $r_q(t')$ 处产生的辐射, 恰有 $R(t') = c(t-t')$. 给定 $t$ 和 $\boldsymbol{r}$, 满足 $R(t') = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')| = c(t-t')$ 的 $t'$ 存在且唯一, 否则世界线不类时.

$$\boldsymbol{E} = q\left[\frac{(\hat{\boldsymbol{n}}(t')-\boldsymbol{\beta}(t'))(1-\boldsymbol{\beta}(t')^2)}{K(t')^3R(t')^2}\right]_{R(t')=c(t-t')} \tag{2.20}$$

$$+\frac{q}{c}\left[\frac{\hat{\boldsymbol{n}}(t')\times((\hat{\boldsymbol{n}}(t')-\boldsymbol{\beta}(t'))\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{K(t')^3R(t')}\right]_{R(t')=c(t-t')}, \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{B} = [\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}]_{R(t')=c(t-t')}. \tag{2.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi} R(t')^2 \left|\boldsymbol{E}(t')\right|^2. \tag{2.23}$$

$\mathrm{d}P(t)$ 为因 $t'$ 时刻电荷的辐射, 观者在 $t$ 时刻测得的单位时间通过 $R(t')^2\mathrm{d}\Omega$ 的辐射. 求电荷处单位时间 $\mathrm{d}\Omega$ 方向的能量 $\mathrm{d}P(t')$. 能量守恒 $\mathrm{d}P(t')\mathrm{d}t' = \mathrm{d}P(t)\mathrm{d}t$, $K(t') = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}$,

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi} K(t') R(t')^2 \left|\boldsymbol{E}(t')\right|^2. \tag{2.24}$$

非相对论, $K \simeq 1$, $\hat{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{\beta} \simeq \hat{\boldsymbol{n}}$,

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{cR}[\hat{\boldsymbol{n}} \times (\hat{\boldsymbol{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})], \tag{2.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \sin^2 \Theta_{\dot{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{n}}}. \tag{2.26}$$

## 2.3 辐射谱: 电磁场能量在不同频率的分布

$$E(t) = \int E(\omega) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega, \tag{2.27}$$

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int E(t) e^{i\omega t} \mathrm{d}t. \tag{2.28}$$

对 $\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega}$ 作 Fourier 分析 (警告: 不是 $\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}$, 因为观者测得频谱). 假定 $R \simeq \mathrm{const}$, 由 Parseval 定理,

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega} = cR^2 \left|\boldsymbol{E}(\omega)\right|^2. \tag{2.29}$$

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \boldsymbol{E}(t') e^{i\omega t} \mathrm{d}t, \tag{2.30}$$

由 $t' = t - \frac{R(t')}{c}$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = K(t')$,

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int K(t') \boldsymbol{E}(t') e^{i\omega\left[t' + \frac{R(t')}{c}\right]} \mathrm{d}t', \tag{2.31}$$

$R(t') = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q(t')| \simeq |\boldsymbol{r}| - \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \cdot \boldsymbol{r}_q(t') = |\boldsymbol{r}| - \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{r}_q(t')$, 得

$$\left|\boldsymbol{E}(\omega)\right|^2 = \left|\frac{1}{2\pi} \int K(t') \boldsymbol{E}(t') e^{i\omega\left[t' - \frac{\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{r}_q(t')}{c}\right]} \mathrm{d}t'\right|^2. \tag{2.32}$$

非相对论,

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega} = \frac{q^2 \left|\ddot{\boldsymbol{r}}_q\right|(\omega)^2 \sin^2 \Theta_{\ddot{\boldsymbol{r}}_q, \hat{\boldsymbol{n}}}}{c^3} = \frac{\omega^4 q^2 \left|\boldsymbol{r}_q\right|(\omega)^2 \sin^2 \Theta_{\ddot{\boldsymbol{r}}_q, \hat{\boldsymbol{n}}}}{c^3}. \tag{2.33}$$

# 第三章　相对论性带电粒子辐射

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi}K(t')R(t')^2\left|\boldsymbol{E}(t')\right|^2, \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{c}\frac{\hat{\boldsymbol{n}}(t') \times ((\hat{\boldsymbol{n}}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{K(t')^3R(t')}, \tag{3.2}$$

$$K(t') = 1 - \hat{\boldsymbol{n}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'). \tag{3.3}$$

若 $\hat{\boldsymbol{n}}//\boldsymbol{\beta}$, 则 $K \to 0$, $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} \to \infty$, 速度方向极大.
$K = 2K_{\min} \to \theta \simeq \frac{1}{\gamma} := \sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}$[1].
粒子静系中 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 出射的光子[2], 观者看来 $\theta \simeq \frac{1}{\gamma}$.
$\boldsymbol{\beta}//\dot{\boldsymbol{\beta}}$,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2\sin^2\theta}{(1-|\boldsymbol{\beta}|\cos\theta)^5}, \tag{3.4}$$

$\theta_{\max} = \arccos\frac{\sqrt{15|\boldsymbol{\beta}|^2+1}-1}{3|\boldsymbol{\beta}|}$[3].
$\boldsymbol{\beta}\perp\dot{\boldsymbol{\beta}}$,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\dot{\boldsymbol{\beta}}^2\left[\frac{\gamma^2(1-|\boldsymbol{\beta}|\cos\theta)^2 - \sin^2\theta\cos^2\phi}{\gamma^2(1-|\boldsymbol{\beta}|\cos\theta)^5}\right], \tag{3.5}$$

其中 $\phi$ 坐标系为: 以 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 方向为 $x$ 轴正向, 以 $\boldsymbol{\beta}$ 方向为 $z$ 轴正向.

[1]此处 $\theta$ 是观者系中粒子运动方向和观者方向的夹角.
[2]此处 $\theta$ 是粒子静系中光子出射方向和粒子运动方向的夹角.
[3]我算的, 不知对不对.

# 第四章　轫致辐射

准备量子改正.

## 4.1　轫致辐射谱分布

$t=-\infty$ 速度 $v$, 碰撞距离 (最小距离) $b$. 靠近时加速度大, 有辐射, 碰撞时间 $\tau \simeq \frac{b}{v}$, Fourier 变换得 $\omega\tau \lesssim 1$ 时有辐射. 令距离为 $b$ 时 $t=0$.

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega} = \frac{8\pi}{3c^3}\ddot{d}(\omega)^2 = \frac{8\pi}{3c^3}\left|\frac{1}{2\pi}\int e\dot{v}(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t\right|^2. \tag{4.1}$$

$\omega\tau \gg 1$, $e^{i\omega t}$ 振荡, $\omega\tau \ll 1$, $e^{i\omega t} \simeq 1$,

$$\ddot{\boldsymbol{d}}(\omega) = \begin{cases} -\frac{e}{2\pi}\Delta\boldsymbol{v} & \omega\tau \ll 1, \\ 0 & \omega\tau \gg 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\Delta v = \int a_\perp \mathrm{d}t = -\int \frac{Ze^2}{m_e(v^2t^2+b^2)}\frac{b}{(v^2t^2+b^2)^{1/2}}\mathrm{d}t = -\frac{2Ze^2}{mbv}. \tag{4.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega} = \begin{cases} \frac{8Z^2e^6}{3\pi c^3 m_e^2 v^2 b^2} & \omega \ll v/b, \\ 0 & \omega \gg v/b. \end{cases} \tag{4.4}$$

电子数密度 $n_e$, 离子数密度 $n_i$. $\Delta t$ 时间, 流过离子旁距离 $b$, 宽 $\Delta b$ 的环内的电子数为 $\Delta N_e = n_e(2\pi b\Delta b)(v\Delta t)$, 每个电子 $\Delta\omega$ 内辐射 $\Delta W = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega}\Delta\omega$. 则

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\omega} = \int 2\pi n_e bv\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}b. \tag{4.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V\mathrm{d}\omega} = n_i\int_{b_{\min}}^{b_{\max}} 2\pi n_e bv\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}b = \frac{16n_en_iZ^2e^6}{3c^3m_e^2v^2b^2}\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right). \tag{4.6}$$

$b_{\max} \simeq \frac{v}{\omega}$. 电子被做功 $W \simeq \frac{Ze^2}{b^2} b \leqslant \frac{m_e v^2}{2}$, 得 $b_{\min} \simeq \frac{Ze^2}{m_e v^2}$, 测不准原理, 得 $b_{\min} \simeq \frac{h}{m_e v}$, 所以 $b_{\min} \simeq \max\left(\frac{Ze^2}{m_e v^2}, \frac{h}{m_e v}\right)$. 粒子速度大, $\frac{h}{m_e v} \gg \frac{Ze^2}{m_e v^2}$, 需用量子理论, 但低频 $\frac{h\omega}{2\pi} \ll \frac{\gamma m_e v^2}{2}$, 所以能用经典结果. 最后瞎蒙乱猜

$$g_{\mathrm{ff}}(\omega; v) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right), \tag{4.7}$$

得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V\mathrm{d}\omega} = \frac{16\pi n_e n_i Z^2 e^6}{3\sqrt{3} c^3 m_e^2 v^2 b^2} g_{\mathrm{ff}}(\omega; v). \tag{4.8}$$

热平衡, Maxwell 分布, $h\nu_{\max} \lesssim \frac{1}{2} m_e v^2$,

$$\epsilon_{\mathrm{ff}}(\nu) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V\mathrm{d}\omega} \propto Z^2 n_e n_i T^{-1/2} e^{-h\nu/kT} \bar{g}_{\mathrm{ff}}(\nu). \tag{4.9}$$

$h\nu/kT \ll 1$, 平谱, $h\nu/kT \gtrsim 1$, 截断.

冷却时间 $\frac{3(n_e+n_i)\frac{kT}{2}}{\epsilon_{\mathrm{ff}}}$.

## 4.2 自由–自由吸收

热平衡, 由 $j(\nu) = \frac{\epsilon_{\mathrm{ff}}(\nu)}{4\pi}$, $S(\nu) = \frac{j(\nu)}{\alpha(\nu)} = B(\nu)$, 可得 $\alpha(\nu)$. 低频 $\alpha(\nu) \propto \nu^{-2} T^{-3/2}$ 大, 光学厚, 黑体谱 (分界 $\tau = 1$). $T \uparrow$, 谱矮胖, 总面积大.

# 第五章　同步辐射

## 5.1　回旋辐射

$v_\parallel = v\cos\alpha$, $v \perp = v\sin\alpha$, $\alpha$ 称为投射角.

非相对论,

$$P = \frac{2e^2\dot{v}^2}{3c}. \tag{5.1}$$

又有 $m_e\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$, 所以

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^4}{m_e^2c^5}v^2B^2\sin^2\alpha. \tag{5.2}$$

电子经典半径为 $r_e = \frac{e^2}{m_ec^2}$[1], 则

$$P = \frac{2}{3c}r_e^2v^2B^2\sin^2\alpha = \frac{2r_e^2c}{3}\beta^2B^2\sin^2\alpha. \tag{5.3}$$

假设电子分布各项同性, 则平均总功率

$$\bar{P} = \frac{2r_e^2c}{3}\beta^2B^2\frac{\iint\sin^2\alpha\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\phi}{4\pi} \tag{5.4}$$

$$= \frac{2r_e^2c}{3}\beta^2B^2\frac{\int\sin^3\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{2} \tag{5.5}$$

$$= \frac{2r_e^2c}{3}\beta^2B^2\frac{2}{3} \tag{5.6}$$

$$= \frac{4}{9}r_e^2c\beta^2B^2. \tag{5.7}$$

$P$ 和 $\bar{P}$ 正比于电子动能 ($\beta^2$) 和磁场能量密度 ($B^2$).

周期运动,

$$E(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}E_se^{-is\omega_0t}, \tag{5.8}$$

[1] 令 $m_ec^2 = \frac{e^2}{r_e}$.

$$E_s = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)e^{is\omega_0 t}\mathrm{d}t. \tag{5.9}$$

对 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} := \int_0^T \frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}t$ 作 Fourier 分析. 一样假定 $R \simeq \mathrm{const}$, 由 Parseval 定理,

$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}_s}{\mathrm{d}\Omega} := \frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}W_s}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{2\pi}R^2\left|\boldsymbol{E}_s\right|^2. \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{E}_s = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{E}(t')e^{is\omega_0 t}\mathrm{d}t. \tag{5.11}$$

由 $t' = t - \frac{R(t')}{c}$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = K(t')$,

$$\boldsymbol{E}_s = \frac{1}{T}\int K(t')\boldsymbol{E}(t')e^{i\omega\left[t'+\frac{R(t')}{c}\right]}\mathrm{d}t', \tag{5.12}$$

$R(t') = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q(t')| \simeq |\boldsymbol{r}| - \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\cdot\boldsymbol{r}_q(t') = |\boldsymbol{r}| - \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r}_q(t')$, 得

$$\left|\boldsymbol{E}_s\right|^2 = \left|\frac{1}{T}\int K(t')\boldsymbol{E}(t')e^{i\omega\left[t'-\frac{\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r}_q(t')}{c}\right]}\mathrm{d}t'\right|^2, \tag{5.13}$$

非相对论,

$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}_s}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2\left|\ddot{\boldsymbol{r}}_q\right|_s^2\sin^2\Theta_{\ddot{\boldsymbol{r}}_q,\hat{\boldsymbol{n}}}}{2\pi c^3} = \frac{s^4\omega_0^4 q^2\left|\boldsymbol{r}_q\right|_s^2\sin^2\Theta_{\ddot{\boldsymbol{r}}_q,\hat{\boldsymbol{n}}}}{2\pi c^3}. \tag{5.14}$$

偶极子: $x$ 轴和 $y$ 轴 $\boldsymbol{E}$ 沿 $z$ 轴, $z$ 轴 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$.

由对称性, 可令电子在 $xOy$ 面内, 观者在 $xOz$ 面内, 然后可得 ($\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, $\omega_0 = \frac{1}{\gamma}\omega_L = \frac{1}{\gamma}\frac{eB}{m_e c}$)

$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}_s}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\pi e^2 s^2\nu_0^2}{c}\left[\cot^2\theta J_s(s\beta\sin\theta)^2 + \beta^2 J_s'(s\beta\sin\theta)^2\right], \tag{5.15}$$

其中 Bessel 函数

$$J_s(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(su - x\sin u)}\mathrm{d}u. \tag{5.16}$$

积分得

$$\bar{P}_s = \frac{8\pi^2 e^2 s^2\gamma^{-2}\nu_L^2}{c\beta}\left[s\beta^2 J_{2s}'(2s\beta) - s^2\gamma^{-2}\int_0^\beta J_{2s}(2su)\mathrm{d}u\right], \tag{5.17}$$

非相对论, $\beta \ll 1$, $s\beta \ll 1$, 展开得

$$\bar{P}_s \simeq \left(\frac{8\pi^2 e^2\nu_L^2}{c}\right)\frac{(s+1)s^{2s+1}}{(2s+1)!}\beta^{2s}. \tag{5.18}$$

可见 $\bar{P}_{s+1}/\bar{P}_s \sim \beta^2 \ll 1$.

## 5.2 同步辐射

同样回旋运动, 令 $m_e \to \gamma m_e$, 得 $\omega_0 = \frac{1}{\gamma}\omega_L = \frac{eB}{\gamma m_e c}$, 回旋半径非常大, 接近直线运动.

$$P = \frac{2e^2\gamma^4\dot{v}^2}{3c}. \tag{5.19}$$

$$P = \frac{2r_e^2 c}{3}\gamma^2\beta^2 B^2 \sin^2\alpha. \tag{5.20}$$

$$\bar{P} = \frac{4}{9}r_e^2 c\gamma^2\beta^2 B^2. \tag{5.21}$$

冷却时间 $t_{\text{cool}} := \gamma m_e c^2/\bar{P}$.

仍然有第三章的 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}$ 和5.1节的

$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}_s}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\pi e^2 s^2 \nu_0^2}{c}\left[\cot^2\theta J_s(s\beta\sin\theta)^2 + \beta^2 J_s'(s\beta\sin\theta)^2\right], \tag{5.22}$$

$$\bar{P}_s = \frac{8\pi^2 e^2 s^2 \nu_0^2}{c\beta}\left[s\beta^2 J_{2s}'(2s\beta) - s^2\gamma^{-2}\int_0^\beta J_{2s}(2su)\mathrm{d}u\right]. \tag{5.23}$$

因为 $\Delta\nu_0/\nu_0 \ll 1$, 已成连续谱.

直接求连续谱. $\omega_c := \frac{3}{2}\gamma^2\omega_L\sin\alpha$, 最大值 $\omega \approx 0.29\omega_c$, 低频 $\propto \omega^{1/3}$, 高频指数下降, 用 $\ln\omega$ 画图可见高频截断.

## 5.3 幂律分布电子的集体辐射

常认为电子能量分布是幂律的, 即

$$N(\gamma) = C\gamma^{-p}, \quad \gamma \in [1, \infty), \tag{5.24}$$

则

$$P_{\text{tot}}(\omega) = C\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} P(\omega)\gamma^{-p}\,\mathrm{d}\gamma \propto \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\gamma^{-p}\,\mathrm{d}\gamma. \tag{5.25}$$

把积分变量变成 $x := \omega/\omega_c$, 由 $\omega_c \propto \gamma^2$ 得

$$P_{\text{tot}}(\omega) \propto \omega^{-(p-1)/2}\int_{x_1}^{x_2} F(x)\, x^{(p-3)/2}\,\mathrm{d}x \propto \omega^{-s}, \tag{5.26}$$

其中 $s := (p-1)/2$.

## 5.4 同步自吸收

$\alpha(\omega) \propto \omega^{-(p+4)/2}$, $S(\omega) = \frac{j(\omega)}{\alpha(\omega)} = \frac{P_{\rm tot}(\omega)}{4\pi}\alpha(\omega) \propto \omega^{5/2}$. 低频 $\alpha$ 大, 光学厚, $I(\omega) \approx S(\omega) \propto \omega^{5/2}$, 高频 $I(\omega) \propto \omega^{-s}$, 分界点 $\tau(\omega) = 1$.

光学厚非黑体谱的原因是电子分布非热 (幂律).

## 5.5 曲率辐射

因为运动类似, 所以单粒子谱型一样. 但 $\omega_0 \simeq \frac{c}{\rho}$ (其中 $\rho$ 为曲率半径), 所以 $\omega_c \propto \gamma^3$, 低频端 $P(\omega) \propto \omega^{1/3}$ 与 $\gamma$ 无关, 所以 $P_{\rm tot}(\omega) \propto P(\omega) \propto \omega^{1/3}$.