天体物理辐射机制笔记

GasinAn

2022 年 4 月 29 日

Printed in China

目录

第一章　辐射场理论

1.1　有源场: 电磁势—求解辐射场的经典方法

令 $\partial^a A_a(t,\boldsymbol{r})=0$, 得

$$\partial^a\partial_a A_b(t,\boldsymbol{r})=-4\pi J_b(t,\boldsymbol{r}). \tag{1.1}$$

有解

$$A^a(t,\boldsymbol{r})=\frac{1}{c}\int\frac{J^a(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c},\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V'. \tag{1.2}$$

对单粒子, $J^a(t,\boldsymbol{r})=qU^a(t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t))$, 所以

$$A^a(t,\boldsymbol{r})=\frac{q}{c}\int\frac{U^a(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_q(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V' \tag{1.3}$$

$$=\frac{q}{c}\int\frac{\int U^a(t')\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_q(t'))\delta(t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}))\,\mathrm{d}t'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V' \tag{1.4}$$

$$=\frac{q}{c}\iint\frac{U^a(t')\delta(t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_q(t'))\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t' \tag{1.5}$$

$$=\frac{q}{c}\int\frac{U^a(t')\delta(t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}{c}))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}\,\mathrm{d}t', \tag{1.6}$$

上式是对 t' 进行的积分. 把积分变量变成 $\tilde{t}'=t'-(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}{c})$. 注意到积分中 t 和 $\boldsymbol{r}$ 被当成常量, 所以 $\mathrm{d}\tilde{t}'=\mathrm{d}t'+\frac{\dot{R}(t')}{c}\mathrm{d}t'=(1+\frac{\dot{R}(t')}{c})\mathrm{d}t'$, 其中 $R(t')=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|$, 所以 $\dot{R}(t')=-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t'))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_q(t')=-\hat{\boldsymbol{n}}(t')\cdot\boldsymbol{u}_q(t')$.

定义 $K(t')=1+\frac{\dot{R}(t')}{c}=1-\frac{\hat{\boldsymbol{n}}(t')\cdot\boldsymbol{u}_q(t')}{c}=1-\frac{u_r(t')}{c}$, 则 $\mathrm{d}\tilde{t}'=K(t')\mathrm{d}t'$, 所以

$$A^a(t,\boldsymbol{r})=\frac{q}{c}\int\frac{U^a(t')}{K(t')\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}\delta(\tilde{t}')\,\tilde{t}', \tag{1.7}$$

其中 t' 是 $\tilde{t}'$ 和 $t, \boldsymbol{r}$ 的函数. 令 $\tilde{t}' = t' - (t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}{c}) = 0$, 可得 $R(t') = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q(t')| = c(t - t')$, 所以

$$A^a(t, \boldsymbol{r}) = \left[\frac{qU^a(t')}{cK(t')R(t')}\right]_{R(t')=c(t-t')}. \tag{1.8}$$

t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处接收到 t' 时刻 $r_q(t')$ 处产生的辐射, 恰有 $R(t') = c(t - t')$. 给定 t 和 $\boldsymbol{r}$, 满足 $R(t') = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q(t')| = c(t - t')$ 的 t' 存在且唯一, 否则世界线不类时.

$$\boldsymbol{E} = q\left[\frac{(\hat{\boldsymbol{n}}(t') - \boldsymbol{\beta}(t'))(1 - \boldsymbol{\beta}(t')^2)}{K(t')^3R(t')^2}\right]_{R(t')=c(t-t')} \tag{1.9}$$

$$+ \frac{q}{c}\left[\frac{\hat{\boldsymbol{n}}(t') \times ((\hat{\boldsymbol{n}}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{K(t')^3R(t')}\right]_{R(t')=c(t-t')}, \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{B} = [\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}]_{R(t')=c(t-t')}. \tag{1.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi}R(t')^2\left|\boldsymbol{E}(t')\right|^2. \tag{1.12}$$

$\mathrm{d}P(t)$ 为因 t' 时刻电荷的辐射, 观者在 t 时刻测得的单位时间通过 $R(t')^2\mathrm{d}\Omega$ 的辐射. 求电荷处单位时间 $\mathrm{d}\Omega$ 方向的能量 $\mathrm{d}P(t')$. 能量守恒 $\mathrm{d}P(t')\mathrm{d}t' = \mathrm{d}P(t)\mathrm{d}t$, $K(t') = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}$,

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi}K(t')R(t')^2\left|\boldsymbol{E}(t')\right|^2. \tag{1.13}$$

非相对论, $K \simeq 1$, $\hat{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{\beta} \simeq \hat{\boldsymbol{n}}$,

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{cR}[\hat{\boldsymbol{n}} \times (\hat{\boldsymbol{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})], \tag{1.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\dot{\beta}^2\sin^2\Theta_{\dot{\boldsymbol{\beta}},\hat{\boldsymbol{n}}}. \tag{1.15}$$

1.2 辐射谱: 电磁场能量在不同频率的分布

$$E(t) = \int E(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega, \tag{1.16}$$

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int E(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t. \tag{1.17}$$

对 $\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega}$ 作 Fourier 分析 (警告: 不是 $\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}$, 因为观者测得频谱). 假定 $R \simeq \mathrm{const}$, 由 Parseval 定理,

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = cR^2 \left|\boldsymbol{E}(\omega)\right|^2. \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int \boldsymbol{E}(t')e^{i\omega t}\mathrm{d}t, \tag{1.19}$$

由 $t' = t - \frac{R(t')}{c}$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = K(t')$,

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int K(t')\boldsymbol{E}(t')e^{i\omega\left[t' + \frac{R(t')}{c}\right]}\mathrm{d}t', \tag{1.20}$$

$R(t') = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q(t')| \simeq |\boldsymbol{r}| - \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\cdot\boldsymbol{r}_q(t') = |\boldsymbol{r}| - \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r}_q(t')$, 得

$$\left|\boldsymbol{E}(\omega)\right|^2 = \left|\frac{1}{2\pi}\int K(t')\boldsymbol{E}(t')e^{i\omega\left[t' - \frac{\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r}_q(t')}{c}\right]}\mathrm{d}t'\right|^2. \tag{1.21}$$

非相对论,

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \frac{\omega^4 q^2 \left|\boldsymbol{r}_q\right|(\omega)^2 \sin^2\Theta_{\ddot{\boldsymbol{r}}_q,\hat{\boldsymbol{n}}}}{c^3}. \tag{1.22}$$

第二章　相对论性带电粒子辐射

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi}K(t')R(t')^2\left|\boldsymbol{E}(t')\right|^2, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{c}\frac{\hat{\boldsymbol{n}}(t') \times ((\hat{\boldsymbol{n}}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{K(t')^3R(t')}, \tag{2.2}$$

$$K(t') = 1 - \hat{\boldsymbol{n}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'). \tag{2.3}$$

若 $\hat{\boldsymbol{n}}//\boldsymbol{\beta}$, 则 $K \to 0$, $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} \to \infty$, 速度方向极大.

$K = 2K_{\min} \to \theta \simeq \frac{1}{\gamma} := \sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}$[1].

粒子静系中 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 出射的光子[2], 观者看来 $\theta \simeq \frac{1}{\gamma}$.

$\boldsymbol{\beta}//\dot{\boldsymbol{\beta}}$,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2\sin^2\theta}{(1-|\boldsymbol{\beta}|\cos\theta)^5}, \tag{2.4}$$

$\theta_{\max} = \arccos\frac{\sqrt{15|\boldsymbol{\beta}|^2+1}-1}{3|\boldsymbol{\beta}|}$[3].

$\boldsymbol{\beta}\perp\dot{\boldsymbol{\beta}}$,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\dot{\boldsymbol{\beta}}^2\left[\frac{\gamma^2(1-|\boldsymbol{\beta}|\cos\theta)^2 - \sin^2\theta\cos^2\phi}{\gamma^2(1-|\boldsymbol{\beta}|\cos\theta)^5}\right], \tag{2.5}$$

其中 ϕ 坐标系为: 以 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 方向为 x 轴正向, 以 $\boldsymbol{\beta}$ 方向为 z 轴正向.

[1]此处 θ 是观者系中粒子运动方向和观者方向的夹角.

[2]此处 θ 是粒子静系中光子出射方向和粒子运动方向的夹角.

[3]我算的, 不知对不对.