

# 数理统计笔记

GasinAn

2024 年 9 月 24 日

Copyright © 2024 by GasinAn

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, in any form or by any means, without permission in writing from the publisher, except by a BNUser.

The author and publisher of this book have used their best efforts in preparing this book. These efforts include the development, research, and testing of the theories, technologies and programs to determine their effectiveness. The author and publisher make no warranty of any kind, express or implied, with regard to these techniques or programs contained in this book. The author and publisher shall not be liable in any event of incidental or consequential damages in connection with, or arising out of, the furnishing, performance, or use of these techniques or programs.

Printed in China

# 目录

<b>第一章 Bayesian 统计</b>	<b>5</b>
1.1 先验 . . . . .	5
1.1.1 共轭先验 . . . . .	5
1.1.2 无信息先验 . . . . .	5
1.1.3 有信息先验 . . . . .	5
<b>第二章 Fisher 信息矩阵</b>	<b>7</b>
2.1 定义 . . . . .	7
<b>第三章 充分统计量</b>	<b>9</b>
3.1 定义 . . . . .	9
3.2 定理 . . . . .	9
<b>第四章 点估计</b>	<b>11</b>
4.1 点估计法 . . . . .	11
4.1.1 矩估计法 . . . . .	11
4.1.2 极大似然估计法 . . . . .	11
4.2 点估计评优 . . . . .	11
4.3 UMVUE . . . . .	11
<b>第五章 区间估计</b>	<b>13</b>
5.1 置信区间 . . . . .	13
5.2 Bayesian 可信区间 . . . . .	13
<b>第六章 假设检验</b>	<b>15</b>
6.1 定义 . . . . .	15

6.2 广义似然比检验 . . . . .	15
-----------------------	----

# 第一章 Bayesian 统计

## 1.1 先验

### 1.1.1 共轭先验

### 1.1.2 无信息先验

均匀先验

Jeffreys 先验

$\pi(\boldsymbol{\theta}) \propto |\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})|^{1/2}$ , 其中  $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$  是 Fisher 信息矩阵 (第二章).

### 1.1.3 有信息先验



## 第二章 Fisher 信息矩阵

### 2.1 定义

设一样本概率密度  $p(\vec{x}; \vec{\theta})$ , 则 Fisher 信息矩阵  $\mathcal{I}_{ij} := \mathbb{E}[\frac{\partial \ln p}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln p}{\partial \theta_j}]$ .





## 第三章 充分统计量

### 3.1 定义

设一随机变量  $X(\omega; \vec{\theta})$ , 其分布函数为  $F(x; \vec{\theta})$ . 取  $X$  的样本  $\vec{X}$ , 其分布函数为  $F(\vec{x}; \vec{\theta})$ . 设一函数  $T(\vec{x})$  诱导出一个统计量  $T(\vec{X}; \vec{\theta})$ , 其分布函数为  $F(t; \vec{\theta})$ . 若  $F(\vec{x}; \vec{\theta} | T = t)$  与  $\theta$  无关, 则称  $T$  是  $\theta$  的一个充分统计量.

若  $P(\{(\omega_1, \dots, \omega_n) | X_1(\omega_1; \theta) \in B_1, \dots, X_n(\omega_n; \theta) \in B_n\} | \{(\omega_1, \dots, \omega_n) | T(X_1(\omega_1; \theta), \dots, X_n(\omega_n; \theta)) = t\})$  与  $\theta$  无关, 则称  $T$  是  $\theta$  的一个充分统计量.

### 3.2 定理

因子分解定理: 若样本概率密度为  $p_{X;\theta}(x_1, \dots, x_n)$ , 则  $T$  是  $\theta$  的充分统计量, 当且仅当  $p_{X;\theta}(x_1, \dots, x_n) = g_\theta(T(x_1, \dots, x_n))h(x_1, \dots, x_n)$ ,  $h(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ .

分布	$p_\theta(\vec{x})$	$T(\vec{x})$	$h(\vec{x})$	$g_\theta(t)$
$U(a, b)$	$\frac{\mathbb{I}_{\{a \leq x_{(1)} \leq x_{(n)} \leq b\}}(\vec{x})}{(b-a)^n}$	$t_1 = x_{(1)}, t_2 = x_{(n)}$	1	$\frac{\mathbb{I}_{\{a \leq t_1 \leq t_2 \leq b\}}(\vec{x})}{(b-a)^n}$
$P(\lambda)$	$\frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$	$t = \sum_{i=1}^n x_i$	$\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}$	$e^{-n\lambda} \lambda^t$
$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{\exp\left\{-\frac{(n-1)s^2 + n(\bar{x} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \cdot \frac{1}{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$	$t_1 = \bar{x}, t_2 = s^2$	1	$\frac{\exp\left\{-\frac{(n-1)t_2 + n(t_1 - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}$

表 3.1: 因子分解  $p_\theta(\vec{x}) = g_\theta(T(\vec{x}))h(\vec{x})$  示例



## 第四章 点估计

### 4.1 点估计法

#### 4.1.1 矩估计法

样本原点矩是原点矩的无偏估计.

样本中心矩是中心矩的渐进无偏估计.

#### 4.1.2 极大似然估计法

若存在充分统计量, 则极大似然估计是充分统计量的函数.

$L(\theta; \vec{x})$  的极大似然估计和  $c(\vec{x})L(\theta; \vec{x})$  的极大似然估计相同.

$L(\theta; \vec{x})$  的极大似然估计和  $\ln L(\theta; \vec{x})$  的极大似然估计相同.

不变原理: 若  $\theta$  的极大似然估计为  $\hat{\theta}_{\text{MLE}}$ , 则  $g(\theta)$  的极大似然估计为  $g(\hat{\theta}_{\text{MLE}})$ .

### 4.2 点估计评优

### 4.3 UMVUE

两点, Poisson,  $\gamma$ , Gaussian 分布的参数的常用估计是 UMVUE.



## 第五章 区间估计

### 5.1 置信区间

设一随机变量  $X(\omega; \theta)$ , 其分布函数为  $F(x; \theta)$ . 取  $X$  的样本  $\vec{X}$ , 其分布函数为  $F(\vec{x}; \theta)$ . 设两函数  $\hat{\theta}_L(\vec{x})$ ,  $\hat{\theta}_U(\vec{x})$  诱导出两统计量  $\hat{\theta}_L(\omega; \theta)$ ,  $\hat{\theta}_U(\omega; \theta)$ , 则  $P(\hat{\theta}_L \leq \theta \wedge \hat{\theta}_U \geq \theta)$  称为置信度,  $\inf_{\theta \in \{\theta\}} P(\hat{\theta}_L \leq \theta \wedge \hat{\theta}_U \geq \theta)$  称为置信系数.

若置信度与  $\theta$  无关, 则置信系数等于置信度.

若任意  $\theta \in \{\theta\}$ , 置信度  $\geq 1 - \alpha$ , 则称  $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$  为  $\theta$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间. 若任意  $\theta \in \{\theta\}$ , 置信度  $= 1 - \alpha$ , 则称  $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$  为  $\theta$  的  $1 - \alpha$  同等置信区间.

设一随机变量  $X(\omega; \vec{\theta})$ , 其分布函数为  $F(x; \vec{\theta})$ . 取  $X$  的样本  $\vec{X}$ , 其分布函数为  $F(\vec{x}; \vec{\theta})$ . 设  $R(\vec{x}) \in \{\vec{\theta}\}$ , 则  $P(R(\vec{x}) \ni \vec{\theta})$  称为置信度,  $\inf_{\vec{\theta} \in \{\vec{\theta}\}} P(R(\vec{x}) \ni \vec{\theta})$  称为置信系数.

若任意  $\vec{\theta} \in \{\vec{\theta}\}$ , 置信度  $\geq 1 - \alpha$ , 则称  $R$  为  $\theta$  的置信水平为  $1 - \alpha$  的置信域. 若任意  $\theta \in \{\theta\}$ , 置信度  $= 1 - \alpha$ , 则称  $R$  为  $\theta$  的  $1 - \alpha$  同等置信域.

### 5.2 Bayesian 可信区间

若存在  $\hat{\theta}_L(\vec{x})$ ,  $\hat{\theta}_U(\vec{x})$ , 使得  $\int_{\hat{\theta}_L(\vec{x})}^{\hat{\theta}_U(\vec{x})} \pi(\theta|\vec{x}) \geq 1 - \alpha$ , 则称  $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$  为  $\theta$  的可信水平为  $1 - \alpha$  的 Bayesian 可信区间.

警告: Bayesian 可信区间不是置信区间. 因为置信区间的寻求需要枢轴量法等方法, 所以 Bayesian 可信区间的寻求比置信区间的寻求容易得多.

若存在  $C \in \{\theta\}$ , 使得  $\int_C \pi(\theta|\vec{x}) = 1 - \alpha$ , 且任意  $\theta_1 \in C$ ,  $\theta_2 \notin C$ ,  $\pi(\theta_1|\vec{x}) \geq \pi(\theta_2|\vec{x})$ , 则称  $C$  为  $\theta$  的可信水平为  $1 - \alpha$  的 Bayesian HPD 可信

集. 作法: 在  $\theta - p$  图中, 划一平行于  $\theta$  轴的横线, 与  $p(\theta)$  曲线的交点向下划垂直于  $\theta$  轴的竖线, 获得可信集端点.

若 Bayesian HPD 可信集不是区间, 许多统计学家建议不用 Bayesian HPD 可信集, 而用  $\alpha/2$  和  $1 - \alpha/2$  分位数获得等尾可信区间.

Bayesian 后验多峰常是先验信息和样本信息抵触.

## 第六章 假设检验

### 6.1 定义

若事件  $W$  发生时拒绝  $H_0$ , 则称  $W$  为  $H_0$  的拒绝域, 补集  $-W$  为  $H_0$  的接受域 (不拒绝域).

若  $H_0 \rightarrow P(W) \leq \alpha$  成立, 则称  $P(W|; H_0) \leq \alpha$  总成立.

若  $P(\text{犯第 I 类拒真错误}) = P(W|; H_0) \leq \alpha$  总成立, 则称检验为显著性水平为  $\alpha$  的检验. 参数检验, 设  $H_0 : \theta \in \Theta_0$ , 检验统计量由  $T(\vec{x})$  诱导出,  $W = T \in W_T$  若  $P(\text{犯第 I 类拒真错误}) = P(T \in W_T; \theta \in \Theta_0) \leq \alpha$  总成立, 则称检验为显著性水平为  $\alpha$  的检验.

称  $p = \min\{\alpha | P(\text{犯第 I 类拒真错误}) = P(W|; H_0) \leq \alpha\}$  为拒绝  $H_0$  的  $p$  值 (最小显著性水平).

### 6.2 广义似然比检验

称  $\lambda(\vec{X}) = \max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \vec{X}) / \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; \vec{X})$  为广义似然比统计量. 称由  $W = \lambda(\vec{X}) \leq c$ ,  $P(W|; H_0) = \alpha$  确定的检验为临界值为  $c$  的显著性水平为  $\alpha$  的广义似然比检验