数理统计笔记

GasinAn

2024 年 9 月 24 日

Printed in China

目录

第一章 Bayesian 统计 **5**

1.1 先验 5

1.1.1 共轭先验 5

1.1.2 无信息先验 5

1.1.3 有信息先验 5

第二章 Fisher 信息矩阵 **7**

2.1 定义 7

第三章 充分统计量 **9**

3.1 定义 9

3.2 定理 9

第四章 点估计 **11**

4.1 点估计法 11

4.1.1 矩估计法 11

4.1.2 极大似然估计法 11

4.2 点估计评优 11

4.3 UMVUE 11

第五章 区间估计 **13**

5.1 置信区间 13

5.2 Bayesian 可信区间 13

第六章 假设检验 **15**

6.1 定义 15

6.2 最优势检验 15

第一章 Bayesian 统计

1.1 先验

1.1.1 共轭先验

1.1.2 无信息先验

均匀先验

Jeffreys 先验

$\pi(\boldsymbol{\theta}) \propto |\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})|^{1/2}$, 其中 $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$ 是 Fisher 信息矩阵 (第二章).

1.1.3 有信息先验

第二章　Fisher 信息矩阵

2.1　定义

设一样本概率密度 $p(\vec{x};\vec{\theta})$, 则 Fisher 信息矩阵 $\mathcal{I}_{ij} := \mathbb{E}[\frac{\partial \ln p}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln p}{\partial \theta_j}]$.

第三章　充分统计量

3.1　定义

设一随机变量 $X(\omega;\vec{\theta})$, 其分布函数为 $F(x;\vec{\theta})$. 取 X 的样本 $\vec{X}$, 其分布函数为 $F(\vec{x};\vec{\theta})$. 设一函数 $T(\vec{x})$ 诱导出一统计量 $T(\vec{X};\vec{\theta})$, 其分布函数为 $F(t;\vec{\theta})$. 若 $F(\vec{x};\vec{\theta}|T=t)$ 与 θ 无关, 则称 T 是 θ 的一个充分统计量.

若 $P(\{(\omega_1,\ldots,\omega_n)|X_1(\omega_1;\theta)\in B_1,\ldots,X_n(\omega_n;\theta)\in B_n\}$ $|\{(\omega_1,\ldots,\omega_n)|T(X_1(\omega_1;\theta),\ldots,X_n(\omega_n;\theta))=t\}$ 与 θ 无关, 则称 T 是 θ 的一个充分统计量.

3.2　定理

因子分解定理: 若样本概率密度为 $p_{X;\theta}(x_1,\ldots,x_n)$, 则 T 是 θ 的充分统计量, 当且仅当 $p_{X;\theta}(x_1,\ldots,x_n)=g_\theta(T(x_1,\ldots,x_n))h(x_1,\ldots,x_n)$, $h(x_1,\ldots,x_n)\geq 0$.

分布	$p_\theta(\vec{x})$	$T(\vec{x})$	$h(\vec{x})$	$g_\theta(t)$
U(a,b)	$\frac{\mathrm{I}_{\{a\leq x_{(1)}\leq x_{(n)}\leq b\}}(\vec{x})}{(b-a)^n}$	$t_1=x_{(1)},t_2=x_{(n)}$	1	$\frac{\mathrm{I}_{\{a\leq t_1\leq t_2\leq b\}}(\vec{x})}{(b-a)^n}$
P(λ)	$\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$	$t=\sum_{i=1}^n x_i$	$\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}$	$e^{-n\lambda}\lambda^t$
N(μ,σ^2)	$\frac{\exp\left\{-\frac{(n-1)s^2+n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}$ $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},s^2=\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$	$t_1=\bar{x},t_2=s^2$	1	$\frac{\exp\left\{-\frac{(n-1)t_2+n(t_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}$

表 3.1: 因子分解 $p_\theta(\vec{x})=g_\theta(T(\vec{x}))h(\vec{x})$ 示例

第四章　点估计

4.1　点估计法

4.1.1　矩估计法

样本原点矩是原点矩的无偏估计.

样本中心矩是中心矩的渐进无偏估计.

4.1.2　极大似然估计法

若存在充分统计量, 则极大似然估计是充分统计量的函数.

$L(\theta;\vec{x})$ 的极大似然估计和 $c(\vec{x})L(\theta;\vec{x})$ 的极大似然估计相同.

$L(\theta;\vec{x})$ 的极大似然估计和 $\ln L(\theta;\vec{x})$ 的极大似然估计相同.

不变原理: 若 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$, 则 $g(\theta)$ 的极大似然估计为 $g(\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}})$.

4.2　点估计评优

4.3　UMVUE

两点, Poisson, γ, Gaussian 分布的参数的常用估计是 UMVUE.

第五章　区间估计

5.1　置信区间

设一随机变量 $X(\omega;\theta)$, 其分布函数为 $F(x;\theta)$. 取 X 的样本 $\vec{X}$, 其分布函数为 $F(\vec{x};\theta)$. 设两函数 $\hat{\theta}_{\mathrm{L}}(\vec{x})$, $\hat{\theta}_{\mathrm{U}}(\vec{x})$ 诱导出两统计量 $\hat{\theta}_{\mathrm{L}}(\omega;\theta)$, $\hat{\theta}_{\mathrm{U}}(\omega;\theta)$, 则 $P(\hat{\theta}_{\mathrm{L}} \le \theta \wedge \hat{\theta}_{\mathrm{U}} \ge \theta)$ 称为置信度, $\inf_{\theta\in\{\theta\}} P(\hat{\theta}_{\mathrm{L}} \le \theta \wedge \hat{\theta}_{\mathrm{U}} \ge \theta)$ 称为置信系数.

若置信度与 θ 无关, 则置信系数等于置信度.

若任意 $\theta \in \{\theta\}$, 置信度 $\ge 1-\alpha$, 则称 $[\hat{\theta}_{\mathrm{L}}, \hat{\theta}_{\mathrm{U}}]$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间. 若任意 $\theta \in \{\theta\}$, 置信度 $= 1-\alpha$, 则称 $[\hat{\theta}_{\mathrm{L}}, \hat{\theta}_{\mathrm{U}}]$ 为 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信区间.

设一随机变量 $X(\omega;\vec{\theta})$, 其分布函数为 $F(x;\vec{\theta})$. 取 X 的样本 $\vec{X}$, 其分布函数为 $F(\vec{x};\vec{\theta})$. 设 $R(\vec{x}) \in \{\vec{\theta}\}$, 则 $P(R(\vec{x}) \ni \vec{\theta})$ 称为置信度, $\inf_{\vec{\theta}\in\{\vec{\theta}\}} P(R(\vec{x}) \ni \vec{\theta})$ 称为置信系数.

若任意 $\vec{\theta} \in \{\vec{\theta}\}$, 置信度 $\ge 1-\alpha$, 则称 R 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信域. 若任意 $\theta \in \{\theta\}$, 置信度 $= 1-\alpha$, 则称 R 为 θ 的 $1-\alpha$ 同等置信域.

5.2　Bayesian 可信区间

若存在 $\hat{\theta}_{\mathrm{L}}(\vec{x})$, $\hat{\theta}_{\mathrm{U}}(\vec{x})$, 使得 $\int_{\hat{\theta}_{\mathrm{L}}(\vec{x})}^{\hat{\theta}_{\mathrm{U}}(\vec{x})} \pi(\theta|\vec{x}) \ge 1-\alpha$, 则称 $[\hat{\theta}_{\mathrm{L}}, \hat{\theta}_{\mathrm{U}}]$ 为 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的 Bayesian 可信区间.

警告: Bayesian 可信区间不是置信区间. 因为置信区间的寻求需要枢轴量法等方法, 所以 Bayesian 可信区间的寻求比置信区间的寻求容易得多.

若存在 $C \in \{\theta\}$, 使得 $\int_C \pi(\theta|\vec{x}) = 1-\alpha$, 且任意 $\theta_1 \in C$, $\theta_2 \notin C$, $\pi(\theta_1|\vec{x}) \ge \pi(\theta_2|\vec{x})$, 则称 C 为 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的 Bayesian HPD 可信

集. 作法: 在 $\theta - p$ 图中, 划一平行于 θ 轴的横线, 与 $p(\theta)$ 曲线的交点向下划垂直于 θ 轴的竖线, 获得可信集端点.

若 Bayesian HPD 可信集不是区间, 许多统计学家建议不用 Bayesian HPD 可信集, 而用 $\alpha/2$ 和 $1-\alpha/2$ 分位数获得等尾可信区间.

Bayesian 后验多峰常是先验信息和样本信息抵触.

第六章　假设检验

6.1　定义

若事件 W 发生时拒绝 H_0, 则称 W 为 H_0 的拒绝域, 补集 $-W$ 为 H_0 的接受域 (不拒绝域).

若 $H_0 \to P(W) \le \alpha$ 成立, 则称 $P(W|;H_0) \le \alpha$ 总成立.

若 $P($犯第 I 类拒真错误$) = P(W|;H_0) \le \alpha$ 总成立, 则称检验为显著性水平为 θ 的检验. 参数检验, 设 $H_0 : \theta \in \Theta_0$, 检验统计量由 $T(\vec{x})$ 诱导出, $W = T \in W_T$ 若 $P($犯第 I 类拒真错误$) = P(T \in W_T|;\theta \in \Theta_0) \le \alpha$ 总成立, 则称检验为显著性水平为 α 的检验.

称 $p = \min\{\alpha|P($犯第 I 类拒真错误$) = P(W|;H_0) \le \alpha\}$ 为拒绝 H_0 的 p 值 (最小显著性水平).

6.2　最优势检验

名称应为 “最大势检验” 或 “势最大检验”.