

数理统计笔记

GasinAn

2024 年 9 月 23 日

Copyright © 2024 by GasinAn

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, in any form or by any means, without permission in writing from the publisher, except by a BNUser.

The author and publisher of this book have used their best efforts in preparing this book. These efforts include the development, research, and testing of the theories, technologies and programs to determine their effectiveness. The author and publisher make no warranty of any kind, express or implied, with regard to these techniques or programs contained in this book. The author and publisher shall not be liable in any event of incidental or consequential damages in connection with, or arising out of, the furnishing, performance, or use of these techniques or programs.

Printed in China

目录

第一章 充分统计量	5
1.1 定义	5
1.2 定理	5
第二章 点估计	7
2.1 点估计法	7
2.1.1 矩估计法	7
2.1.2 极大似然估计法	7
2.2 点估计评优	7
2.3 UMVUE	7
第三章 Bayesian 估计	9
3.1 先验	9
3.1.1 共轭先验	9
3.1.2 无信息先验	9
3.1.3 有信息先验	9
第四章 Fisher 信息矩阵	11
4.1 定义	11

第一章 充分统计量

1.1 定义

设一随机变量 $X(\omega; \vec{\theta})$, 其分布函数为 $F(x; \vec{\theta})$. 取 X 的样本 \vec{X} , 其分布函数为 $F(\vec{x}; \vec{\theta})$. 设一函数 $T(\vec{x})$ 诱导出一个统计量 $T(\vec{X}; \vec{\theta})$, 其分布函数为 $F(t; \vec{\theta})$. 若 $F(\vec{x}; \vec{\theta} | T = t)$ 与 θ 无关, 则称 T 是 θ 的一个充分统计量.

若 $P(\{(\omega_1, \dots, \omega_n) | X_1(\omega_1; \theta) \in B_1, \dots, X_n(\omega_n; \theta) \in B_n\} | \{(\omega_1, \dots, \omega_n) | T(X_1(\omega_1; \theta), \dots, X_n(\omega_n; \theta)) = t\})$ 与 θ 无关, 则称 T 是 θ 的一个充分统计量.

1.2 定理

因子分解定理: 若样本概率密度为 $p_{X;\theta}(x_1, \dots, x_n)$, 则 T 是 θ 的充分统计量, 当且仅当 $p_{X;\theta}(x_1, \dots, x_n) = g_\theta(T(x_1, \dots, x_n))h(x_1, \dots, x_n)$, $h(x_1, \dots, x_n) \geq 0$.

分布	$p_\theta(\vec{x})$	$T(\vec{x})$	$h(\vec{x})$	$g_\theta(t)$
$U(a, b)$	$\frac{I_{\{a \leq x_{(1)} \leq x_{(n)} \leq b\}}(\vec{x})}{(b-a)^n}$	$t_1 = x_{(1)}, t_2 = x_{(n)}$	1	$\frac{I_{\{a \leq t_1 \leq t_2 \leq b\}}(\vec{x})}{(b-a)^n}$
$P(\lambda)$	$\frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$	$t = \sum_{i=1}^n x_i$	$\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}$	$e^{-n\lambda} \lambda^t$
$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{\exp\left\{-\frac{(n-1)s^2 + n(\bar{x} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \cdot \frac{1}{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$	$t_1 = \bar{x}, t_2 = s^2$	1	$\frac{\exp\left\{-\frac{(n-1)t_2 + n(t_1 - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}$

表 1.1: 因子分解 $p_\theta(\vec{x}) = g_\theta(T(\vec{x}))h(\vec{x})$ 示例

第二章 点估计

2.1 点估计法

2.1.1 矩估计法

样本原点矩是原点矩的无偏估计.

样本中心矩是中心矩的渐进无偏估计.

2.1.2 极大似然估计法

若存在充分统计量, 则极大似然估计是充分统计量的函数.

$L(\theta; \vec{x})$ 的极大似然估计和 $c(\vec{x})L(\theta; \vec{x})$ 的极大似然估计相同.

$L(\theta; \vec{x})$ 的极大似然估计和 $\ln L(\theta; \vec{x})$ 的极大似然估计相同.

不变原理: 若 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}_{\text{MLE}}$, 则 $g(\theta)$ 的极大似然估计为 $g(\hat{\theta}_{\text{MLE}})$.

2.2 点估计评优

2.3 UMVUE

两点, Poisson, γ , Gaussian 分布的参数的常用估计是 UMVUE.

第三章 Bayesian 估计

3.1 先验

3.1.1 共轭先验

3.1.2 无信息先验

均匀先验

Jeffreys 先验

$\pi(\boldsymbol{\theta}) \propto |\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})|^{1/2}$, 其中 $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$ 是 Fisher 信息矩阵 (第[四](#)章).

3.1.3 有信息先验

第四章 Fisher 信息矩阵

4.1 定义

设一样本概率密度 $p(\vec{x}; \vec{\theta})$, 则 Fisher 信息矩阵 $\mathcal{I}_{ij} := \mathbb{E}[\frac{\partial \ln p}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln p}{\partial \theta_j}]$.