数理统计笔记

GasinAn

2024 年 9 月 23 日

Printed in China

目录

第一章 充分统计量

1.1 定义

设一随机变量 $X(\omega;\vec{\theta})$, 其分布函数为 $F(x;\vec{\theta})$. 取 X 的样本 $\vec{X}$, 其分布函数为 $F(\vec{x};\vec{\theta})$. 设一函数 $T(\vec{x})$ 诱导出一统计量 $T(\vec{X};\vec{\theta})$, 其分布函数为 $F(t;\vec{\theta})$. 若 $F(\vec{x};\vec{\theta}|T=t)$ 与 θ 无关, 则称 T 是 θ 的一个充分统计量.

若 $P(\{(\omega_1,\ldots,\omega_n)|X_1(\omega_1;\theta)\in B_1,\ldots,X_n(\omega_n;\theta)\in B_n\}$ $|\{(\omega_1,\ldots,\omega_n)|T(X_1(\omega_1;\theta),\ldots,X_n(\omega_n;\theta))=t\}$ 与 θ 无关, 则称 T 是 θ 的一个充分统计量.

1.2 定理

因子分解定理: 若样本概率密度为 $p_{X;\theta}(x_1,\ldots,x_n)$, 则 T 是 θ 的充分统计量, 当且仅当 $p_{X;\theta}(x_1,\ldots,x_n) = g_\theta(T(x_1,\ldots,x_n))h(x_1,\ldots,x_n)$, $h(x_1,\ldots,x_n)\geq 0$.

分布	$p_\theta(\vec{x})$	$T(\vec{x})$	$h(\vec{x})$	$g_\theta(t)$
U(a,b)	$\frac{\mathrm{I}_{\{a\leq x_{(1)}\leq x_{(n)}\leq b\}}(\vec{x})}{(b-a)^n}$	$t_1=x_{(1)},t_2=x_{(n)}$	1	$\frac{\mathrm{I}_{\{a\leq t_1\leq t_2\leq b\}}(\vec{x})}{(b-a)^n}$
P(λ)	$\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$	$t=\sum_{i=1}^n x_i$	$\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}$	$e^{-n\lambda}\lambda^t$
N(μ,σ^2)	$\frac{\exp\left\{-\frac{(n-1)s^2+n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}$ $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, s^2=\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}{n-1}$	$t_1=\bar{x},t_2=s^2$	1	$\frac{\exp\left\{-\frac{(n-1)t_2+n(t_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}$

表 1.1: 因子分解 $p_\theta(\vec{x})=g_\theta(T(\vec{x}))h(\vec{x})$ 示例

第二章　点估计

2.1　点估计法

2.1.1　矩估计法

样本原点矩是原点矩的无偏估计.

样本中心矩是中心矩的渐进无偏估计.

2.1.2　极大似然估计法

若存在充分统计量, 则极大似然估计是充分统计量的函数.

$L(\theta;\vec{x})$ 的极大似然估计和 $c(\vec{x})L(\theta;\vec{x})$ 的极大似然估计相同.

$L(\theta;\vec{x})$ 的极大似然估计和 $\ln L(\theta;\vec{x})$ 的极大似然估计相同.

不变原理: 若 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$, 则 $g(\theta)$ 的极大似然估计为 $g(\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}})$.

2.2　点估计评优

2.3　UMVUE

两点, Poisson, γ, Gaussian 分布的参数的常用估计是 UMVUE.

第三章 Bayesian 估计

3.1 先验

3.1.1 共轭先验

3.1.2 无信息先验

均匀先验

Jeffreys 先验

$\pi(\boldsymbol{\theta}) \propto |\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})|^{1/2}$, 其中 $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$ 是 Fisher 信息矩阵 (第四章).

3.1.3 有信息先验

第四章　Fisher 信息矩阵

4.1　定义

设一样本概率密度 $p(\vec{x};\vec{\theta})$, 则 Fisher 信息矩阵 $\mathcal{I}_{ij} := \mathbb{E}[\frac{\partial \ln p}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln p}{\partial \theta_j}]$.