概率论笔记

GasinAn

2022 年 6 月 21 日

Printed in China

目录

第一章　概率

定义 1.1. 若 Ω 的子集类 $\mathcal{F}$ 满足

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$,
- 若 $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$,

则称 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的 σ 代数.

定义 1.2. $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, 其中

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, \forall x > 0, \\ \mp\infty, \forall x < 0, \end{cases}$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty,$$

$$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty,$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0.$$

$\bar{\mathbb{C}}$ 可类似定义.

定义 1.3. 设 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的一个子集类, $\mu : \mathcal{C} \to \bar{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty]$, 且至少存在一个集合 $A \in \mathcal{C}$, 使 $\mu(A) < +\infty$. 若 $\forall A_n \in \mathcal{C}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ 两两不交且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$, 都有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right),$$

则称 μ 为 $\mathcal{C}$ 上的 (σ 可加) 测度. 若 $\forall A \in \mathcal{C}$, $\mu(A) \in \mathbb{R}_+$, 则称 μ 为有限的. 若 $\forall A \in \mathcal{C}$, $\exists \{A_n : n \in \mathbb{N}_+\} \subset \mathcal{C}$, 使 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$, 且 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $\mu(A_n) \in \mathbb{R}_+$, 则称 μ 为 σ 有限的.

定义 1.4. 若 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的一个 σ 代数, 则称 $A \in \mathcal{F}$ 为 (Ω 中关于 $\mathcal{F}$ 的) 可测集, $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间. 若 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度, 则称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间. 若 $\mu = \mathbf{P}$, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, 则称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为概率空间, $\mathbf{P}$ 为 $\mathcal{F}$ 上的概率.

定义 1.5. 设 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的一个子集类, 则包含 $\mathcal{C}$ 的一切 σ 代数的交 $\sigma(\mathcal{C})$ 包含 $\mathcal{C}$ 且被任意包含 $\mathcal{C}$ 的 σ 代数包含, 称 $\sigma(\mathcal{C})$ 为由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ 代数.

定义 1.6. 设 $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{S} := \{(a, b] \cap \mathbb{R}^n, a \in \bar{\mathbb{R}}^n, b \in \bar{\mathbb{R}}^n\}$, $\mathscr{T}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的通常拓扑, 则称 $\mathscr{B}^n := \sigma(\mathscr{S}) = \sigma(\mathscr{T})$ 为 n 维 Borel 代数. 复 Borel 代数可类似定义.

定义 1.7. 存在测度空间 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{A}_{\lambda^*}, \lambda^*)$, 称 $\mathscr{A}_{\lambda^*} \supset \mathscr{B}^n$ 中的元素为 n 维 Lebesgue 可测集, λ^* 为 n 维 Lebesgue 测度.