概率论笔记

GasinAn

2024 年 10 月 22 日

Printed in China

目录

第一章　概率 **5**

第二章　随机变量 **7**

第三章　期望 **9**

第四章　乘积概率 **11**

第五章　条件期望 **13**

第一章　概率

定义 1.1. 若 Ω 的子集类 $\mathcal{F}$ 满足

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$,
- 若 $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$,

则称 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的 σ 代数.

定义 1.2. 若 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的 σ 代数, Δ 为 Ω 的子集, 则 $\Delta \cap \mathcal{F} := \{\Delta \cap F \colon F \in \mathcal{F}\}$ 为 Δ 的 σ 代数, 称为由 $\mathcal{F}$ 导出的诱导 σ 代数.

定义 1.3. 若 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的一个子集类, 则包含 $\mathcal{C}$ 的一切 σ 代数的交 $\sigma(\mathcal{C})$ 包含 $\mathcal{C}$ 且被任意包含 $\mathcal{C}$ 的 σ 代数包含, 称 $\sigma(\mathcal{C})$ 为由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ 代数.

定义 1.4. $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, 其中

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, \forall x > 0, \\ \mp\infty, \forall x < 0, \end{cases}$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty,$$

$$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty,$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0.$$

$\bar{\mathbb{C}}$ 可类似定义.

定义 1.5. 设 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的一个子集类, $\mu\colon \mathcal{C} \to \bar{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty]$, 且至少存在一个集合 $A \in \mathcal{C}$, 使 $\mu(A) < +\infty$. 若 $\forall A_n \in \mathcal{C}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ 两两不交且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$, 都有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right),$$

则称 μ 为 $\mathcal{C}$ 上的 (σ 可加) 测度. 若 $\forall A \in \mathcal{C}$, $\mu(A) \in \mathbb{R}_+$, 则称 μ 为有限的. 若 $\forall A \in \mathcal{C}$, $\exists \{A_n\colon n \in \mathbb{N}_+\} \subset \mathcal{C}$, 使 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$, 且 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $\mu(A_n) \in \mathbb{R}_+$, 则称 μ 为 σ 有限的.

定义 1.6. 若 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的一个 σ 代数, 则称 $A \in \mathcal{F}$ 为 (Ω 中关于 $\mathcal{F}$ 的) 可测集, $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间. 若 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度, 则称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间. 若 $\mu = \mathbf{P}$, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, 则称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为概率空间, $\mathbf{P}$ 为 $\mathcal{F}$ 上的概率.

定义 1.7. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为概率空间, $B \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(B) \neq 0$, 则称 $\mathbf{P}(\cdot|B)\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}, A \to \mathbf{P}(A|B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$ 为 A 在 B 之下的条件概率.

定义 1.8. 设 $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{S} := \{(a, b] \cap \mathbb{R}^n, a \in \bar{\mathbb{R}}^n, b \in \bar{\mathbb{R}}^n\}$, $\mathscr{T}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的通常拓扑, 则称 $\mathscr{B}^n := \sigma(\mathscr{S}) = \sigma(\mathscr{T})$ 为 n 维 Borel 代数, $\mathscr{B}^n$ 中的元素为 n 维 Borel 集. 复 Borel 代数和复 Borel 集可类似定义.

定义 1.9. 存在测度空间 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{A}_{\lambda^*}, \lambda^*)$, 称 $\mathscr{A}_{\lambda^*} \supset \mathscr{B}^n$ 中的元素为 n 维 Lebesgue 可测集, λ^* 为 n 维 Lebesgue 测度.

第二章　随机变量

定义 2.1. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, 函数 $X\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^n$ 满足 $\forall B \in \bar{\mathscr{B}}^n$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ (可测集的原像是可测集), 则称 X 为 n 维 (广义) 可测函数. 若 $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, 则称 X 为 n 维有限实值可测函数 (分量为 1 维有限实值可测函数). 若 $\mu = \mathbf{P}$ 为概率, 则称 X 为 n 维广义随机变量. 若 $\mu = \mathbf{P}$ 为概率且 $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, 则称 X 为 n 维 (有限实值) 随机变量 (分量为 1 维有限实值随机变量). 复值随机变量可类似定义.

定义 2.2. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, X 为 n 维有限实值可测函数, $\mu_X\colon \mathscr{B}^n \to \bar{\mathbb{R}}_+, B \mapsto \mu_X(B) := \mu(X^{-1}(B))$, 则 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n, \mu_X)$ 为测度空间, 称为 X 的测度空间, μ_X 称为 X 的测度. 若 $\mu = \mathbf{P}$ 为概率, 则 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n, \mathbf{P}_X)$ 为概率空间, 称为 X 的概率空间, $\mathbf{P}_X$ 称为 X 的概率.

定义 2.3. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, $A \in \mathcal{F}$,

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, \, \omega \in A, \\ 0, \, \omega \notin A, \end{cases} \tag{2.1}$$

则称 I_A 为 A 上的示性函数.

定理 2.1. $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_{I_A}(\{1\})$.

定义 2.4. 若 n 维有限实值可测函数 X 和 Y 的测度 μ_X 和 μ_Y 相同, 则称 X 和 Y 为同分布的.

定理 2.2. 若 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n, \mu_X)$ 为测度空间, $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为恒等映射, 则 X 与 id 同分布.

第三章　期望

定义 3.1. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, f 为非负简单函数, 即 $f = \sum_{k=1}^{m} x_k I_{A_k}$, $x_k \geqslant 0$, $A_k \in \mathcal{F}$ 且两两不交, $\cup_{k=1}^{m} A_k = \Omega$, 则 f 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{m} x_k \mu(A_k). \tag{3.1}$$

定义 3.2. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, f 为非负可测函数, 则 f 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_{\Omega} g \, \mathrm{d}\mu \colon g\text{为非负简单函数} \right\}. \tag{3.2}$$

定义 3.3. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, f 为可测函数, 则 f 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_{\Omega} f_- \, \mathrm{d}\mu, \tag{3.3}$$

其中 $f_+ := \max\{f, 0\}$, $f_+ := -\min\{f, 0\}$, 但若 $\int_{\Omega} f_+ \, \mathrm{d}\mu = +\infty$, $\int_{\Omega} f_- \, \mathrm{d}\mu = +\infty$, 则称 f 在 Ω 上对 μ 的积分不存在, 否则称 f 在 Ω 上对 μ 的积分存在, 并且若 $\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu$ 有限, 则称 f 在 Ω 上对 μ 可积.

定义 3.4. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, f 为复可测函数, $\int_{\Omega} \Re(f) \, \mathrm{d}\mu$, $\int_{\Omega} \Im(f) \, \mathrm{d}\mu$ 都存在, 则 f 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} \Re(f) \, \mathrm{d}\mu + i \int_{\Omega} \Im(f) \, \mathrm{d}\mu. \tag{3.4}$$

定义 3.5. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, $A \in \mathcal{F}$, f 为复可测函数, 则 f 在 A 上对 μ 的积分为

$$\int_{A} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} f I_A \, \mathrm{d}\mu. \tag{3.5}$$

定义 3.6. 若 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n, \mu_F)$ 为测度空间, μ_F 为分布函数 F 诱导出的 Lebesgue-Stieltjes 测度, f 为复可测函数, 则 f 对 F 的 Lebesgue-Stieltjes 积分为

$$\int f \, \mathrm{d}F = \int f \, \mathrm{d}\mu_F. \tag{3.6}$$

定义 3.7. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为概率空间, $A \in \mathcal{F}$, f 为复可测函数, 则称 f 在 A 上对 $\mathbf{P}$ 的积分为 f 在 A 上对 $\mathbf{P}$ 的期望, 记作 $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[f; A]$.

定义 3.8. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, $A \in \Omega$, $\exists B \in \mathcal{F}$, $B \supset A$ 且 $\mu(B) = 0$, 则称 A 为一 μ 零集.

定义 3.9. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, 有一与 $\omega \in \Omega$ 有关的性质 $\mathscr{P} = \{\mathscr{P}(\omega) \colon \omega \in \Omega\}$, $\big\{\omega \in \Omega \colon \mathscr{P}(\omega)\text{不成立}\big\}$ 为 μ 零集, 则称 $\mathscr{P}$ 几乎处处成立, 简记作 $\mathscr{P}$, a.e.. 若 $\mu = \mathbf{P}$ 为概率, 则 $\mathscr{P}$ 几乎处处成立又称 $\mathscr{P}$ 几乎必然成立, 简记作 $\mathscr{P}$, a.s..

定义 3.10. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, $F \in \mathcal{F}$, 对任意函数 f, 若存在可测函数 g, $f = g$, a.e., 则 f 在 F 上对 μ 的积分为

$$\int_F f \,\mathrm{d}\mu = \int_F g \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.7}$$

定义 3.11. 若 $(\Omega, \mathcal{F})$ 和 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 为测度空间, 函数 $f \colon \Omega \to \Omega'$ 满足 $\forall A' \in \mathcal{F}'$, $f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ (可测集的原像是可测集), 则称 f 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 的可测映射.

定义 3.12. 若 $(\Omega, \mathcal{F})$ 和 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 为测度空间, μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度, f 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 的可测映射, $\mu_f \colon \mathcal{F}' \to \bar{\mathbb{R}}_+, A' \mapsto \mu_f(A') := \mu(f^{-1}(A'))$, 则 μ_f 为测度, 称为 μ 在 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 上由 f 导出的测度.

定理 3.1. (积分变换定理) 若 $(\Omega, \mathcal{F})$ 和 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 为测度空间, μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度, f 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 的可测映射, g 为 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 上的可测函数, 则

$$\int_{f^{-1}(A')} (g \circ f) \,\mathrm{d}\mu = \int_{A'} g \,\mathrm{d}\mu_f, \tag{3.8}$$

上式的意义是: 若等式的一边存在, 则另一边存在, 且二者相等.

定义 3.13. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, 对任意函数 f, 若 f 的积分存在, 则 f 在 $\mathcal{F}$ 上对 μ 的不定积分为 $\int f \,\mathrm{d}\mu \colon \mathcal{F} \to \bar{\mathbb{C}}, A \mapsto \left[\int f \,\mathrm{d}\mu\right](A)$, 其中

$$\left[\int f \,\mathrm{d}\mu\right](A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.9}$$

第四章　乘积概率

定义 4.1. 设 $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$, $k = 1, \dots, n$ 为 n 个可测空间, 则

$$\mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_n = \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n \colon A_k \in \mathcal{F}_k, k = 1, \dots, n\}) \tag{4.1}$$

为 $\mathcal{F}_k$, $k = 1, \dots, n$ 的乘积 σ 代数.

定义 4.2. 设 $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mu_k)$, $k = 1, \dots, n$ 为 n 个 σ 有限测度空间, 则在 $\prod_{k=1}^n \mathcal{F}_k$ 上存在唯一 σ 有限测度 μ, 使得

$$\mu(\prod_{k=1}^n A_k) = \prod_{k=1}^n \mu_k(A_k),\ k = 1, \dots, n, \tag{4.2}$$

称 μ 为 μ_k, $k = 1, \dots, n$ 的乘积测度. 若 $\mu_k = \mathbf{P}_k$ 为概率, $\mu = \mathbf{P}$, 则称 $\mathbf{P}$ 为 $\mathbf{P}_k$, $k = 1, \dots, n$ 的乘积概率.

定义 4.3. 设 $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$, $k = 1, 2$ 为可测空间, 映射 $\lambda \colon \Omega_1 \times \mathcal{F}_2 \to [0, \infty]$ 如果满足

- $\exists A_2 \in \mathcal{F}_2, \lambda(\cdot, A_2)$ 为 $\mathcal{F}_1$ 上的可测函数,
- $\exists \omega_1 \in \mathcal{F}_1, \lambda(\omega_1, \cdot)$ 为 $\mathcal{F}_2$ 上的测度,

则称 λ 为 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ 到 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ 上的转移测度. 若 $\exists A_{kn} \in \mathcal{F}_k, n \in \mathbb{N}$ 两两不交, $\Omega_k = \cup_{n=1}^\infty A_{kn}$, $k = 1, 2$, 使得 $\sup_{\omega_1 \in A_{1m}} \lambda(\omega_1, A_{2n}) < \infty, \forall m, n \in \mathbb{N}$, 则称 λ 为 σ 有限的. 若 $\lambda = \mathbf{P}$, $\forall \omega_1 \in \Omega_1$, $\mathbf{P}(\omega_1, \cdot)$ 为概率, 则称 $\mathbf{P}$ 为 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ 到 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ 上的转移概率.

定义 4.4. 设 I 为任意指标集, $\{A_i \colon i \in I\}$ 为一集类, 则 $\{A_i \colon i \in I\}$ 的乘积集为

$$\prod_{i \in I} A_i = \{\{a_i \colon i \in I\} : a_i \in A_i, i \in I\}. \tag{4.3}$$

定义 4.5. 设 I 为任意指标集, $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) \colon i \in I\}$ 为一概率空间类, 则 $\{\mathcal{F}_i \colon i \in I\}$ 的乘积 σ 代数为

$$\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i = \sigma(\{A_{I_N} \times \Omega_{I_N{}^{\mathrm{c}}} \colon I_N \subset I\text{为有限集}, A_{I_N} \in \prod_{i \in I_N} \mathcal{F}_i, \Omega_{I_N{}^{\mathrm{c}}} = \prod_{i \in I_N{}^{\mathrm{c}}} \Omega_i\}). \tag{4.4}$$

称 $(\prod_{i \in I} \Omega_i, \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i)$ 为 $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i) \colon i \in I\}$ 的乘积可测空间.

定义 4.6. 设 I 为任意指标集, $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) \colon i \in I\}$ 为一概率空间类, 则在 $(\prod_{i \in I} \Omega_i, \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i)$ 上存在唯一概率 $\mathbf{P}$, 使得 $\forall I_N \in I$ 为有限集, $\forall A_i \in \mathcal{F}_i$, $i \in I_N$, 有

$$\mathbf{P}(\prod_{i \in I_N} A_i \times \prod_{i \in I_N{}^{\mathrm{c}}} \Omega_i) = \prod_{i \in I_N} \mathbf{P}_i(A_i), \tag{4.5}$$

称 $\mathbf{P}$ 为 $\{\mathbf{P}_i \colon i \in I\}$ 的乘积概率.

第五章　条件期望

定义 5.1. 设 $\mathcal{F}$ 是 Ω 的一个 σ 代数, $\varphi\colon \mathcal{F}\to\bar{\mathbb{R}}$, 若 $\varphi(\varnothing)=0$, 且 $\forall A_n\in\mathcal{F}$, $n=1,2,3,\ldots$ 两两不交, $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$, 都有

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(A_n\right),$$

则称 φ 为 $\mathcal{F}$ 上的符号测度. 若 $\forall A\in\mathcal{F}$, $\varphi(A)\in\mathbb{R}$, 则称 φ 为有限的.

定义 5.2. 若 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为测度空间, φ 为 $\mathcal{F}$ 上的符号测度, 若 $\forall$ μ 零集 A, $\varphi(A)=0$, 则称 φ 为 μ 连续的.

定义 5.3. 若 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为测度空间, μ 为 σ 有限的, φ 为 $\mathcal{F}$ 上的 μ 连续的符号测度, 则 φ 为一可测函数 f 的不定积分 $\int f\,\mathrm{d}\mu$, 且 f 由 φ 唯一决定, a.e.. 称 f 为 φ 对 μ 的 Radon 导数, 记作 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu}$.

定义 5.4. 若 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ 为概率空间, 随机变量 X 的期望存在, $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$ 为 σ 代数 (即 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数), $\mathcal{C}$ 上的集函数 $p_{\mathcal{C}}$ 满足 $\forall C\in\mathcal{C}$, $p_{\mathcal{C}}(C)=\mathbf{P}(C)$ (即 $p_{\mathcal{C}}$ 为 $\mathbf{P}$ 在 $\mathcal{C}$ 上的限制), 则 $(\cup_{C\in\mathcal{C}}C,\mathcal{C},p_{\mathcal{C}})$ 为测度空间且 $p_{\mathcal{C}}$ 为 σ 有限的, 集函数 $\varphi\colon\mathcal{C}\to\bar{\mathbb{R}}, C\mapsto\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[X;C]$ 为 $\mathcal{C}$ 上的 μ 连续的符号测度, 则称 φ 对 $p_{\mathcal{C}}$ 的 Radon 导数为 X 在 $\mathcal{C}$ 下关于 $\mathbf{P}$ 的条件期望, 记作 $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[X|\mathcal{C}]$ (则 $\forall C\in\mathcal{C}$, "$\int_C\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[X|\mathcal{C}]\,\mathrm{d}\mathbf{P}=\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[X;C]$"). $\forall A\in\mathcal{F}$, 称 $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[I_A|\mathcal{C}]$ 为 A 在 $\mathcal{C}$ 下的条件概率, 记作 $\mathbf{P}(A|\mathcal{C})$ (则 $\forall C\in\mathcal{C}$, "$\int_C\mathbf{P}(A|\mathcal{C})\,\mathrm{d}\mathbf{P}=\mathbf{P}(A\cap C)$").

定义 5.5. 若 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为测度空间, X 为 n 维可测函数, 则 $\sigma(X):=\{X^{-1}(B)\colon B\,\text{为}\,n\,\text{维复 Borel 集}\}$ 为 σ 代数, 称为由 X 产生的 σ 代数.

定义 5.6. 若 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ 为概率空间, X, Y 为随机变量, 则 $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[X|\sigma(Y)]$ 称为 X 在 Y 下关于 $\mathbf{P}$ 的条件期望, 记作 $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[X|Y]$. $\forall A\in\mathcal{F}$, 称 $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[I_A|Y]$ 为 A 在 Y 下的条件概率, 记作 $\mathbf{P}(A|Y)$.