

# 概率论笔记

GasinAn

2022 年 9 月 18 日

Copyright © 2022 by GasinAn

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, in any form or by any means, without permission in writing from the publisher, except by a BNUser.

The author and publisher of this book have used their best efforts in preparing this book. These efforts include the development, research, and testing of the theories, technologies and programs to determine their effectiveness. The author and publisher make no warranty of any kind, express or implied, with regard to these techniques or programs contained in this book. The author and publisher shall not be liable in any event of incidental or consequential damages in connection with, or arising out of, the furnishing, performance, or use of these techniques or programs.

Printed in China

# 目录

第一章 概率	5
第二章 随机变量	7
第三章 期望	9
第四章 乘积概率	11



# 第一章 概率

定义 1.1. 若  $\Omega$  的子集类  $\mathcal{F}$  满足

- $\Omega \in \mathcal{F}$ ,
- 若  $A \in \mathcal{F}$ , 则  $A^c \in \mathcal{F}$ ,
- 若  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ ,

则称  $\mathcal{F}$  为  $\Omega$  的  $\sigma$  代数.

定义 1.2. 若  $\mathcal{F}$  为  $\Omega$  的  $\sigma$  代数,  $\Delta$  为  $\Omega$  的子集, 则  $\Delta \cap \mathcal{F} := \{\Delta \cap F : F \in \mathcal{F}\}$  为  $\Delta$  的  $\sigma$  代数, 称为由  $\mathcal{F}$  导出的诱导  $\sigma$  代数.

定义 1.3. 若  $\mathcal{C}$  是  $\Omega$  的一个子集类, 则包含  $\mathcal{C}$  的一切  $\sigma$  代数的交  $\sigma(\mathcal{C})$  包含  $\mathcal{C}$  且被任意包含  $\mathcal{C}$  的  $\sigma$  代数包含, 称  $\sigma(\mathcal{C})$  为由  $\mathcal{C}$  生成的  $\sigma$  代数.

定义 1.4.  $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , 其中

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, \forall x > 0, \\ \mp\infty, \forall x < 0, \end{cases}$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty,$$

$$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty,$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0.$$

$\bar{\mathbb{C}}$  可类似定义.

**定义 1.5.** 设  $\mathcal{C}$  是  $\Omega$  的一个子集类,  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty]$ , 且至少存在一个集合  $A \in \mathcal{C}$ , 使  $\mu(A) < +\infty$ . 若  $\forall A_n \in \mathcal{C}, n = 1, 2, 3, \dots$  两两不交且  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$ , 都有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

则称  $\mu$  为  $\mathcal{C}$  上的 ( $\sigma$  可加) 测度. 若  $\forall A \in \mathcal{C}, \mu(A) \in \mathbb{R}_+$ , 则称  $\mu$  为有限的. 若  $\forall A \in \mathcal{C}, \exists \{A_n : n \in \mathbb{N}_+\} \subset \mathcal{C}$ , 使  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ , 且  $\forall n \in \mathbb{N}_+, \mu(A_n) \in \mathbb{R}_+$ , 则称  $\mu$  为  $\sigma$  有限的.

**定义 1.6.** 若  $\mathcal{F}$  为  $\Omega$  的一个  $\sigma$  代数, 则称  $A \in \mathcal{F}$  为 ( $\Omega$  中关于  $\mathcal{F}$  的) 可测集,  $(\Omega, \mathcal{F})$  为可测空间. 若  $\mu$  为  $\mathcal{F}$  上的测度, 则称  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间. 若  $\mu = \mathbf{P}, \mathbf{P}(\Omega) = 1$ , 则称  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  为概率空间,  $\mathbf{P}$  为  $\mathcal{F}$  上的概率.

**定义 1.7.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  为概率空间,  $B \in \mathcal{F}, \mathbf{P}(B) \neq 0$ , 则称  $\mathbf{P}(\cdot|B) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, A \rightarrow \mathbf{P}(A|B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$  为在  $B$  之下的条件概率.

**定义 1.8.** 设  $\Omega = \mathbb{R}^n, \mathcal{S} := \{(a, b] \cap \mathbb{R}^n, a \in \bar{\mathbb{R}}^n, b \in \bar{\mathbb{R}}^n\}$ ,  $\mathcal{T}$  为  $\mathbb{R}^n$  的通常拓扑, 则称  $\mathcal{B}^n := \sigma(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{T})$  为  $n$  维 Borel 代数. 复 Borel 代数可类似定义.

**定义 1.9.** 存在测度空间  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_{\lambda^*}, \lambda^*)$ , 称  $\mathcal{A}_{\lambda^*} \subset \mathcal{B}^n$  中的元素为  $n$  维 Lebesgue 可测集,  $\lambda^*$  为  $n$  维 Lebesgue 测度.

## 第二章 随机变量

**定义 2.1.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间, 函数  $X : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$  满足  $\forall B \in \bar{\mathcal{B}}^n$ ,  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  (可测集的原像是可测集), 则称  $X$  为  $n$  维 (广义) 可测函数. 若  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ , 则称  $X$  为  $n$  维有限实值可测函数 (分量为 1 维有限实值可测函数). 若  $\mu = \mathbf{P}$  为概率, 则称  $X$  为  $n$  维广义随机变量. 若  $\mu = \mathbf{P}$  为概率且  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ , 则称  $X$  为  $n$  维 (有限实值) 随机变量 (分量为 1 维有限实值随机变量). 复值随机变量可类似定义.

**定义 2.2.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间,  $X$  为  $n$  维有限实值可测函数,  $\mu_X : \bar{\mathcal{B}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+, B \mapsto \mu_X(B) := \mu(X^{-1}(B))$ , 则  $(\mathbb{R}^n, \bar{\mathcal{B}}^n, \mu_X)$  为测度空间, 称为  $X$  的测度空间,  $\mu_X$  称为  $X$  的测度. 若  $\mu = \mathbf{P}$  为概率, 则  $(\mathbb{R}^n, \bar{\mathcal{B}}^n, \mathbf{P}_X)$  为概率空间, 称为  $X$  的概率空间,  $\mathbf{P}_X$  称为  $X$  的概率.

**定义 2.3.** 若  $n$  维有限实值可测函数  $X$  和  $Y$  的测度  $\mu_X$  和  $\mu_Y$  相同, 则称  $X$  和  $Y$  为同分布的 (若  $(\mathbb{R}^n, \bar{\mathcal{B}}^n, \mu_X)$  为测度空间,  $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为恒等映射, 则  $X$  与  $I$  同分布).





## 第三章 期望

**定义 3.1.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间,  $f$  为非负简单函数, 即  $f = \sum_{k=1}^m x_k I_{A_k}$ ,  $x_k \geq 0$ ,  $A_k \in \mathcal{F}$  且两两不交,  $\cup_{k=1}^m A_k = \Omega$ , 函数  $I_{A_k}$  满足  $\forall \omega \in A_k, I_{A_k} = 1$ ,  $\forall \omega \notin A_k, I_{A_k} = 0$ , 则  $f$  在  $\Omega$  上对  $\mu$  的积分为

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{k=1}^m x_k \mu(A_k). \quad (3.1)$$

**定义 3.2.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间,  $f$  为非负可测函数, 则  $f$  在  $\Omega$  上对  $\mu$  的积分为

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sup \left\{ \int_{\Omega} g d\mu : g \text{ 为非负简单函数} \right\}. \quad (3.2)$$

**定义 3.3.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间,  $f$  为可测函数, 则  $f$  在  $\Omega$  上对  $\mu$  的积分为

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f_+ d\mu - \int_{\Omega} f_- d\mu, \quad (3.3)$$

其中  $f_+ := \max\{f, 0\}$ ,  $f_- := -\min\{f, 0\}$ , 但若  $\int_{\Omega} f_+ d\mu = +\infty$ ,  $\int_{\Omega} f_- d\mu = +\infty$ , 则称  $f$  在  $\Omega$  上对  $\mu$  的积分不存在, 否则称  $f$  在  $\Omega$  上对  $\mu$  的积分存在, 并且若  $\int_{\Omega} f d\mu$  有限, 则称  $f$  在  $\Omega$  上对  $\mu$  可积.

**定义 3.4.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间,  $f$  为复可测函数,  $\int_{\Omega} \Re(f) d\mu$ ,  $\int_{\Omega} \Im(f) d\mu$  都存在, 则  $f$  在  $\Omega$  上对  $\mu$  的积分为

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} \Re(f) d\mu + i \int_{\Omega} \Im(f) d\mu. \quad (3.4)$$

**定义 3.5.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间,  $F \in \mathcal{F}$ ,  $f$  为复可测函数, 则  $f$  在  $F$  上对  $\mu$  的积分为

$$\int_F f d\mu = \int_{\Omega} f I_F d\mu, \quad (3.5)$$

其中函数  $I_F$  满足  $\forall \omega \in F, I_F = 1$ ,  $\forall \omega \notin F, I_F = 0$

**定义 3.6.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  为测度空间,  $F \in \mathcal{F}$ ,  $f$  为复可测函数, 则称  $f$  在  $F$  上对  $\mathbf{P}$  的积分为  $f$  在  $F$  上对  $\mathbf{P}$  的期望, 记作  $\mathbf{E}_{F, \mathbf{P}} f$ .

**定义 3.7.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间,  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\exists B \in \mathcal{F}$ ,  $B \supset A$  且  $\mu(B) = 0$ , 则称  $A$  为一  $\mu$  零集.

**定义 3.8.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间, 有一与  $\omega \in \Omega$  有关的性质  $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\omega) : \omega \in \Omega\}$ ,  $\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega) \text{ 不成立}\}$  为  $\mu$  零集, 则称  $\mathcal{P}$  几乎处处成立, 简记作  $\mathcal{P}$ , a.e.. 若  $\mu = \mathbf{P}$  为概率, 则  $\mathcal{P}$  几乎处处成立又称  $\mathcal{P}$  几乎必然成立, 简记作  $\mathcal{P}$ , a.s..

**定义 3.9.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间,  $F \in \mathcal{F}$ , 对任意函数  $f$ , 若存在可测函数  $g$ ,  $f = g$ , a.e., 则  $f$  在  $F$  上对  $\mu$  的积分为

$$\int_F f \, d\mu = \int_F g \, d\mu. \quad (3.6)$$

**定义 3.10.** 若  $(\Omega, \mathcal{F})$  和  $(\Omega', \mathcal{F}')$  为测度空间, 函数  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  满足  $\forall A' \in \mathcal{F}'$ ,  $f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$  (可测集的原像是可测集), 则称  $f$  为  $(\Omega, \mathcal{F})$  到  $(\Omega', \mathcal{F}')$  的可测映射.

**定义 3.11.** 若  $(\Omega, \mathcal{F})$  和  $(\Omega', \mathcal{F}')$  为测度空间,  $\mu$  为  $\mathcal{F}$  上的测度,  $f$  为  $(\Omega, \mathcal{F})$  到  $(\Omega', \mathcal{F}')$  的可测映射,  $\mu_f : \mathcal{F}' \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ ,  $A' \mapsto \mu_f(A') := \mu(f^{-1}(A'))$ , 则  $\mu_f$  为测度, 称为  $\mu$  在  $(\Omega', \mathcal{F}')$  上由  $f$  导出的测度.

**定理 3.1.** 若  $(\Omega, \mathcal{F})$  和  $(\Omega', \mathcal{F}')$  为测度空间,  $\mu$  为  $\mathcal{F}$  上的测度,  $f$  为  $(\Omega, \mathcal{F})$  到  $(\Omega', \mathcal{F}')$  的可测映射,  $g$  为  $(\Omega', \mathcal{F}')$  上的可测函数, 则

$$\int_{f^{-1}(A')} (g \circ f) \, d\mu = \int_{A'} g \, d\mu_f, \quad (3.7)$$

上式的意义是: 若等式的一边存在, 则另一边存在, 且二者相等.

**定义 3.12.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间, 对任意函数  $f$ , 若  $f$  的积分存在, 则  $f$  在  $\mathcal{F}$  上对  $\mu$  的不定积分为  $\int f \, d\mu : \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, A \mapsto \left[ \int f \, d\mu \right] (A)$ , 其中

$$\left[ \int f \, d\mu \right] (A) = \int_A f \, d\mu. \quad (3.8)$$

## 第四章 乘积概率

**定义 4.1.** 设  $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$  为  $n$  个可测空间, 则

$$\mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_n = \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n : A_k \in \mathcal{F}_k, k = 1, \dots, n\}) \quad (4.1)$$

为  $\mathcal{F}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  的乘积  $\sigma$  代数.

**定义 4.2.** 设  $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mu_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$  为  $n$  个  $\sigma$  有限测度空间, 则在  $\prod_{k=1}^n \mathcal{F}_k$  上存在唯一  $\sigma$  有限测度  $\mu$ , 使得

$$\mu\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n \mu_k(A_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.2)$$

称  $\mu$  为  $\mu_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  的乘积测度. 若  $\mu_k = \mathbf{P}_k$  为概率,  $\mu = \mathbf{P}$ , 则称  $\mathbf{P}$  为  $\mathbf{P}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  的乘积概率.

**定义 4.3.** 设  $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ ,  $k = 1, 2$  为可测空间, 映射  $\lambda : \Omega_1 \times \mathcal{F}_2 \rightarrow [0, \infty]$  如果满足

- $\exists A_2 \in \mathcal{F}_2, \lambda(\cdot, A_2)$  为  $\mathcal{F}_1$  上的可测函数,
- $\exists \omega_1 \in \Omega_1, \lambda(\omega_1, \cdot)$  为  $\mathcal{F}_2$  上的测度,

则称  $\lambda$  为  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  到  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  上的转移测度. 若  $\exists A_{kn} \in \mathcal{F}_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$  两两不交,  $\Omega_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{kn}$ ,  $k = 1, 2$ , 使得  $\sup_{\omega_1 \in A_{1m}} \lambda(\omega_1, A_{2n}) < \infty$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ , 则称  $\lambda$  为  $\sigma$  有限的. 若  $\lambda = \mathbf{P}$ ,  $\forall \omega_1 \in \Omega_1$ ,  $\mathbf{P}(\omega_1, \cdot)$  为概率, 则称  $\mathbf{P}$  为  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  到  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  上的转移概率.

**定义 4.4.** 设  $I$  为任意指标集,  $\{A_i : i \in I\}$  为一集类, 则  $\{A_i : i \in I\}$  的乘积集为

$$\prod_{i \in I} A_i = \{\{a_i : i \in I\} : a_i \in A_i, i \in I\}. \quad (4.3)$$

**定义 4.5.** 设  $I$  为任意指标集,  $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) : i \in I\}$  为一概率空间类, 则  $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$  的乘积  $\sigma$  代数为

$$\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i = \sigma(\{A_{I_N} \times \Omega_{I_N^c} : I_N \subset I \text{ 为有限集}, A_{I_N} \in \prod_{i \in I_N} \mathcal{F}_i, \Omega_{I_N^c} = \prod_{i \in I_N^c} \Omega_i\}). \quad (4.4)$$

称  $(\prod_{i \in I} \Omega_i, \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i)$  为  $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i) : i \in I\}$  的乘积可测空间.

**定义 4.6.** 设  $I$  为任意指标集,  $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) : i \in I\}$  为一概率空间类, 则在  $(\prod_{i \in I} \Omega_i, \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i)$  上存在唯一概率  $\mathbf{P}$ , 使得  $\forall I_N \in I$  为有限集,  $\forall A_i \in \mathcal{F}_i$ ,  $i \in I_N$ , 有

$$\mathbf{P}(\prod_{i \in I_N} A_i \times \prod_{i \in I_N^c} \Omega_i) = \prod_{i \in I_N} \mathbf{P}_i(A_i), \quad (4.5)$$

称  $\mathbf{P}$  为  $\{\mathbf{P}_i : i \in I\}$  的乘积概率.