

# 概率论笔记

GasinAn

2022 年 7 月 2 日

Copyright © 2022 by GasinAn

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, in any form or by any means, without permission in writing from the publisher, except by a BNUser.

The author and publisher of this book have used their best efforts in preparing this book. These efforts include the development, research, and testing of the theories, technologies and programs to determine their effectiveness. The author and publisher make no warranty of any kind, express or implied, with regard to these techniques or programs contained in this book. The author and publisher shall not be liable in any event of incidental or consequential damages in connection with, or arising out of, the furnishing, performance, or use of these techniques or programs.

Printed in China

# 目录

第一章 概率	5
第二章 随机变量	7



# 第一章 概率

定义 1.1. 若  $\Omega$  的子集类  $\mathcal{F}$  满足

- $\Omega \in \mathcal{F}$ ,
- 若  $A \in \mathcal{F}$ , 则  $A^c \in \mathcal{F}$ ,
- 若  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , 则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ ,

则称  $\mathcal{F}$  为  $\Omega$  的  $\sigma$  代数.

定义 1.2. 若  $\mathcal{F}$  为  $\Omega$  的  $\sigma$  代数,  $\Delta$  为  $\Omega$  的子集, 则  $\Delta \cap \mathcal{F} := \{\Delta \cap F : F \in \mathcal{F}\}$  为  $\Delta$  的  $\sigma$  代数, 称为由  $\mathcal{F}$  导出的诱导  $\sigma$  代数.

定义 1.3. 若  $\mathcal{C}$  是  $\Omega$  的一个子集类, 则包含  $\mathcal{C}$  的一切  $\sigma$  代数的交  $\sigma(\mathcal{C})$  包含  $\mathcal{C}$  且被任意包含  $\mathcal{C}$  的  $\sigma$  代数包含, 称  $\sigma(\mathcal{C})$  为由  $\mathcal{C}$  生成的  $\sigma$  代数.

定义 1.4.  $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , 其中

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, \forall x > 0, \\ \mp\infty, \forall x < 0, \end{cases}$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty,$$

$$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty,$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0.$$

$\bar{\mathbb{C}}$  可类似定义.

**定义 1.5.** 设  $\mathcal{C}$  是  $\Omega$  的一个子集类,  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty]$ , 且至少存在一个集合  $A \in \mathcal{C}$ , 使  $\mu(A) < +\infty$ . 若  $\forall A_n \in \mathcal{C}, n = 1, 2, 3, \dots$  两两不交且  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$ , 都有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

则称  $\mu$  为  $\mathcal{C}$  上的 ( $\sigma$  可加) 测度. 若  $\forall A \in \mathcal{C}, \mu(A) \in \mathbb{R}_+$ , 则称  $\mu$  为有限的. 若  $\forall A \in \mathcal{C}, \exists \{A_n : n \in \mathbb{N}_+\} \subset \mathcal{C}$ , 使  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ , 且  $\forall n \in \mathbb{N}_+, \mu(A_n) \in \mathbb{R}_+$ , 则称  $\mu$  为  $\sigma$  有限的.

**定义 1.6.** 若  $\mathcal{F}$  为  $\Omega$  的一个  $\sigma$  代数, 则称  $A \in \mathcal{F}$  为 ( $\Omega$  中关于  $\mathcal{F}$  的) 可测集,  $(\Omega, \mathcal{F})$  为可测空间. 若  $\mu$  为  $\mathcal{F}$  上的测度, 则称  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间. 若  $\mu = \mathbf{P}, \mathbf{P}(\Omega) = 1$ , 则称  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  为概率空间,  $\mathbf{P}$  为  $\mathcal{F}$  上的概率.

**定义 1.7.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  为概率空间,  $B \in \mathcal{F}, \mathbf{P}(B) \neq 0$ , 则称  $\mathbf{P}(\cdot|B) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, A \rightarrow \mathbf{P}(A|B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$  为在  $B$  之下的条件概率.

**定义 1.8.** 设  $\Omega = \mathbb{R}^n, \mathcal{S} := \{(a, b] \cap \mathbb{R}^n, a \in \bar{\mathbb{R}}^n, b \in \bar{\mathbb{R}}^n\}$ ,  $\mathcal{T}$  为  $\mathbb{R}^n$  的通常拓扑, 则称  $\mathcal{B}^n := \sigma(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{T})$  为  $n$  维 Borel 代数. 复 Borel 代数可类似定义.

**定义 1.9.** 存在测度空间  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_{\lambda^*}, \lambda^*)$ , 称  $\mathcal{A}_{\lambda^*} \subset \mathcal{B}^n$  中的元素为  $n$  维 Lebesgue 可测集,  $\lambda^*$  为  $n$  维 Lebesgue 测度.

## 第二章 随机变量

**定义 2.1.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间, 函数  $X : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$  满足  $\forall B \in \bar{\mathcal{B}}^n$ ,  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  (可测集的原像是可测集), 则称  $X$  为  $n$  维 (广义) 可测函数. 若  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ , 则称  $X$  为  $n$  维有限实值可测函数. 若  $\mu = \mathbf{P}$  为概率, 则称  $X$  为  $n$  维广义随机变量. 若  $\mu = \mathbf{P}$  为概率且  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ , 则称  $X$  为  $n$  维 (有限实值) 随机变量. 复值随机变量可类似定义.

**定义 2.2.** 若  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  为测度空间,  $X$  为  $n$  维有限实值可测函数,  $\mu_X : \bar{\mathcal{B}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+, B \mapsto \mu_X(B) := \mu(X^{-1}(B))$ , 则  $(\mathbb{R}^n, \bar{\mathcal{B}}^n, \mu_X)$  为测度空间, 称为  $X$  的测度空间,  $\mu_X$  称为  $X$  的测度. 若  $\mu = \mathbf{P}$  为概率, 则  $(\mathbb{R}^n, \bar{\mathcal{B}}^n, \mathbf{P}_X)$  为概率空间, 称为  $X$  的概率空间,  $\mathbf{P}_X$  称为  $X$  的概率.