概率论笔记

GasinAn

2022 年 9 月 17 日

Printed in China

目录

第一章　概率

定义 1.1. 若 Ω 的子集类 $\mathcal{F}$ 满足

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$,
- 若 $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$,

则称 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的 σ 代数.

定义 1.2. 若 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的 σ 代数, Δ 为 Ω 的子集, 则 $\Delta \cap \mathcal{F} := \{\Delta \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ 为 Δ 的 σ 代数, 称为由 $\mathcal{F}$ 导出的诱导 σ 代数.

定义 1.3. 若 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的一个子集类, 则包含 $\mathcal{C}$ 的一切 σ 代数的交 $\sigma(\mathcal{C})$ 包含 $\mathcal{C}$ 且被任意包含 $\mathcal{C}$ 的 σ 代数包含, 称 $\sigma(\mathcal{C})$ 为由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ 代数.

定义 1.4. $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, 其中

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, \forall x > 0, \\ \mp\infty, \forall x < 0, \end{cases}$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty,$$

$$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty,$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0.$$

$\bar{\mathbb{C}}$ 可类似定义.

定义 1.5. 设 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的一个子集类, $\mu : \mathcal{C} \to \bar{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty]$, 且至少存在一个集合 $A \in \mathcal{C}$, 使 $\mu(A) < +\infty$. 若 $\forall A_n \in \mathcal{C}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ 两两不交且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$, 都有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right),$$

则称 μ 为 $\mathcal{C}$ 上的 (σ 可加) 测度. 若 $\forall A \in \mathcal{C}$, $\mu(A) \in \mathbb{R}_+$, 则称 μ 为有限的. 若 $\forall A \in \mathcal{C}$, $\exists \{A_n : n \in \mathbb{N}_+\} \subset \mathcal{C}$, 使 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$, 且 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $\mu(A_n) \in \mathbb{R}_+$, 则称 μ 为 σ 有限的.

定义 1.6. 若 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的一个 σ 代数, 则称 $A \in \mathcal{F}$ 为 (Ω 中关于 $\mathcal{F}$ 的) 可测集, $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间. 若 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度, 则称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间. 若 $\mu = \mathbf{P}$, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, 则称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为概率空间, $\mathbf{P}$ 为 $\mathcal{F}$ 上的概率.

定义 1.7. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为概率空间, $B \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(B) \neq 0$, 则称 $\mathbf{P}(\cdot | B) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}, A \to \mathbf{P}(A|B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$ 为在 B 之下的条件概率.

定义 1.8. 设 $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{S} := \{(a, b] \cap \mathbb{R}^n, a \in \bar{\mathbb{R}}^n, b \in \bar{\mathbb{R}}^n\}$, $\mathscr{T}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的通常拓扑, 则称 $\mathscr{B}^n := \sigma(\mathscr{S}) = \sigma(\mathscr{T})$ 为 n 维 Borel 代数. 复 Borel 代数可类似定义.

定义 1.9. 存在测度空间 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{A}_{\lambda^*}, \lambda^*)$, 称 $\mathscr{A}_{\lambda^*} \supset \mathscr{B}^n$ 中的元素为 n 维 Lebesgue 可测集, λ^* 为 n 维 Lebesgue 测度.

第二章　随机变量

定义 2.1. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, 函数 $X : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^n$ 满足 $\forall B \in \bar{\mathscr{B}}^n$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ (可测集的原像是可测集), 则称 X 为 n 维 (广义) 可测函数. 若 $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, 则称 X 为 n 维有限实值可测函数 (分量为 1 维有限实值可测函数). 若 $\mu = \mathbf{P}$ 为概率, 则称 X 为 n 维广义随机变量. 若 $\mu = \mathbf{P}$ 为概率且 $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, 则称 X 为 n 维 (有限实值) 随机变量 (分量为 1 维有限实值随机变量). 复值随机变量可类似定义.

定义 2.2. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, X 为 n 维有限实值可测函数, $\mu_X : \mathscr{B}^n \to \bar{\mathbb{R}}_+, B \mapsto \mu_X(B) := \mu(X^{-1}(B))$, 则 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n, \mu_X)$ 为测度空间, 称为 X 的测度空间, μ_X 称为 X 的测度. 若 $\mu = \mathbf{P}$ 为概率, 则 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n, \mathbf{P}_X)$ 为概率空间, 称为 X 的概率空间, $\mathbf{P}_X$ 称为 X 的概率.

定义 2.3. 若 n 维有限实值可测函数 X 和 Y 的测度 μ_X 和 μ_Y 相同, 则称 X 和 Y 为同分布的 (若 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n, \mu_X)$ 为测度空间, $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为恒等映射, 则 X 与 I 同分布).

第三章　期望

定义 3.1. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, f 为非负简单函数, 即 $f = \sum_{k=1}^{m} x_k I_{A_k}$, $x_k \geqslant 0$, $A_k \in \mathcal{F}$ 且两两不交, $\cup_{k=1}^{m} A_k = \Omega$, 函数 I_{A_k} 满足 $\forall \omega \in A_k$, $I_{A_k} = 1$, $\forall \omega \notin A_k$, $I_{A_k} = 0$, 则 f 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{m} x_k \mu(A_k). \tag{3.1}$$

定义 3.2. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, f 为非负可测函数, 则 f 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_{\Omega} g \,\mathrm{d}\mu : g\text{为非负简单函数} \right\}. \tag{3.2}$$

定义 3.3. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, f 为可测函数, 则 f 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_{\Omega} f_- \,\mathrm{d}\mu, \tag{3.3}$$

其中 $f_+ := \max\{f, 0\}$, $f_+ := -\min\{f, 0\}$, 但若 $\int_{\Omega} f_+ \,\mathrm{d}\mu = +\infty$, $\int_{\Omega} f_- \,\mathrm{d}\mu = +\infty$, 则称 f 在 Ω 上对 μ 的积分不存在, 否则称 f 在 Ω 上对 μ 的积分存在, 并且若 $\int_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu$ 有限, 则称 f 在 Ω 上对 μ 可积.

定义 3.4. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, f 为复可测函数, $\int_{\Omega} \Re(f) \,\mathrm{d}\mu$, $\int_{\Omega} \Im(f) \,\mathrm{d}\mu$ 都存在, 则 f 在 Ω 上对 μ 的积分为

$$\int_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} \Re(f) \,\mathrm{d}\mu + i \int_{\Omega} \Im(f) \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.4}$$

定义 3.5. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, $F \in \mathcal{F}$, f 为复可测函数, 则 f 在 F 上对 μ 的积分为

$$\int_{F} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} f I_F \,\mathrm{d}\mu, \tag{3.5}$$

其中函数 I_F 满足 $\forall \omega \in F$, $I_F = 1$, $\forall \omega \notin F$, $I_F = 0$

定义 3.6. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为测度空间, $F \in \mathcal{F}$, f 为复可测函数, 则称 f 在 F 上对 $\mathbf{P}$ 的积分为 f 在 F 上对 $\mathbf{P}$ 的期望, 记作 $\mathbf{E}_{F,\mathbf{P}} f$.

定义 3.7. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, $A \in \Omega$, $\exists B \in \mathcal{F}$, $B \supset A$ 且 $\mu(B) = 0$, 则称 A 为一 μ 零集.

定义 3.8. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, 有一与 $\omega \in \Omega$ 有关的性质 $\mathscr{P} = \{\mathscr{P}(\omega) : \omega \in \Omega\}$, $\big\{\omega \in \Omega : \mathscr{P}(\omega)\text{不成立}\big\}$ 为 μ 零集, 则称 $\mathscr{P}$ 几乎处处成立, 简记作 $\mathscr{P}$, a.e.. 若 μ 为概率, 则 $\mathscr{P}$ 几乎处处成立又称 $\mathscr{P}$ 几乎必然成立, 简记作 $\mathscr{P}$, a.s..

定义 3.9. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, $F \in \mathcal{F}$, 对任意函数 f, 若存在可测函数 g, $f = g$, a.e., 则 f 在 F 上对 μ 的积分为

$$\int_F f \, \mathrm{d}\mu = \int_F g \, \mathrm{d}\mu. \tag{3.6}$$

定义 3.10. 若 $(\Omega, \mathcal{F})$ 和 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 为测度空间, 函数 $f : \Omega \to \Omega'$ 满足 $\forall A' \in \mathcal{F}'$, $f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ (可测集的原像是可测集), 则称 f 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 的可测映射.

定义 3.11. 若 $(\Omega, \mathcal{F})$ 和 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 为测度空间, μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度, f 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 的可测映射, $\mu_f : \mathcal{F}' \to \bar{\mathbb{R}}_+, A' \mapsto \mu_f(A') := \mu(f^{-1}(A'))$, 则 μ_f 为测度, 称为 μ 在 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 上由 f 导出的测度.

定理 3.1. 若 $(\Omega, \mathcal{F})$ 和 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 为测度空间, μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度, f 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 的可测映射, g 为 $(\Omega', \mathcal{F}')$ 上的可测函数, 则

$$\int_{f^{-1}(A')} (g \circ f) \, \mathrm{d}\mu = \int_{A'} g \, \mathrm{d}\mu_f, \tag{3.7}$$

上式的意义是: 若等式的一边存在, 则另一边存在, 且二者相等.

定义 3.12. 若 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间, 对任意函数 f, 若 f 的积分存在, 则 f 在 $\mathcal{F}$ 上对 μ 的不定积分为 $\int f \, \mathrm{d}\mu : \mathcal{F} \to \bar{\mathbb{C}}, A \mapsto \left[\int f \, \mathrm{d}\mu\right](A)$, 其中

$$\left[\int f \, \mathrm{d}\mu\right](A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu. \tag{3.8}$$