谱理论与量子力学

GasinAn

2023 年 9 月 4 日

Printed in China

目录

第一章　Hilbert 空间

1.1　定义和基本性质

定义 1.1. 完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

定理 1.1. Hilbert 空间是可分的, 当且仅当其有可数正交归一基.

任意可分 Hilbert 空间同构于 ℓ^2 和 L^2. 以下只讨论可分 Hilbert 空间.

定义 1.2. 序列 $\{|f_n\rangle\}$ 称为强收敛于 $|f\rangle$, 若 $\{\||f_n\rangle - |f\rangle\|\}$ 在 $n \to \infty$ 时收敛于 0.

定义 1.3. 序列 $\{|f_n\rangle\}$ 称为弱收敛于 $|f\rangle$, 若 $\forall |g\rangle$, $\{\langle g|f_n\rangle\}$ 在 $n \to \infty$ 时收敛于 $\langle g|f\rangle$.

可称强收敛为依范数收敛, 弱收敛为依分量收敛.

1.2　矢量值函数

用强收敛可定义任意矢量值函数 $|f(\cdot)\rangle : I \in \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ 的强连续性, 强可微性和强 Riemann 可积性等.

1.3　Hilbert 空间的子集

定义 1.4. 若 U 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, U 的闭包 $\overline{U} = \mathcal{H}$, 则 U 称为稠密的.

定义 1.5. 若 M 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, M 对 $\mathcal{H}$ 的线性运算封闭, 则 M 称为线性流形.

定义 1.6. 若 N 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, 则 $\mathcal{H}$ 中所有能表示为 N 中有限个元素的线性叠加的矢量组成的集合是一个线性流形, 称为由 N 生成的线性流形.

定义 1.7. 若 N 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, 由 N 生成的线性流形是稠密的, 则 N 称为完全的.

定义 1.8. 若 M 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, M 是完备线性流形, 则 M 称为子空间.

定义 1.9. 若 N 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, 则由 N 生成的线性流形的闭包 M_N 是一个子空间, 称为由 N 生成的子空间.

定义 1.10. 若 U 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, 则 $U^\perp := \{|f\rangle \in \mathcal{H} \,|\, |f\rangle \perp |g\rangle, \forall |g\rangle \in U\}$ 称为 U 的正交补.

定理 1.2. 若 U 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, 则 $U^\perp$ 为子空间, $U^{\perp\perp}$ 为由 N 生成的子空间.

定理 1.3. 若 M 是子空间, 则 $\forall |f\rangle \in \mathcal{H}$, $\exists |f\rangle$的唯一分解$|f\rangle = |f_{\mathrm{T}}\rangle + |f_{\mathrm{N}}\rangle$, $|f_{\mathrm{T}}\rangle \in M$, $|f_{\mathrm{N}}\rangle \in M^\perp$.

定义 1.11. 若 $\{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n\}$ 中的元素都是 Hilbert 空间, 则 $\{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n\}$ 中的元素的正交和 $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ 为一个 Hilbert 空间, 其元素形如 $|f_1\rangle \dots |f_n\rangle$, $f_i \in \mathcal{H}_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, 满足

$$(\langle f_n| \dots \langle f_1|)(|g_1\rangle \dots |g_n\rangle) = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}_i \langle f_i|g_i\rangle, \forall |f_1\rangle \dots |f_n\rangle, |g_1\rangle \dots |g_n\rangle \in \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i.$$

定义 1.12. 若 $\{\mathcal{H}_i | i \in \mathbb{N}\}$ 中的元素都是 Hilbert 空间, 则 $\{\mathcal{H}_i | i \in \mathbb{N}\}$ 中的元素的正交和 $\bigoplus_{i=1}^\infty \mathcal{H}_i$ 为一个 Hilbert 空间, 其元素形如 $|f_1\rangle \dots |f_i\rangle \dots$, $f_i \in \mathcal{H}_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, 满足

$$(\dots \langle f_i| \dots \langle f_1|)(|g_1\rangle \dots |g_i\rangle \dots) = \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}_i \langle f_i|g_i\rangle, \forall |f_1\rangle \dots |f_i\rangle \dots, |g_1\rangle \dots |g_i\rangle \dots \in \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i.$$

1.4 测度和积分

测度和 Lebesgue 积分的内容参见https://github.com/GasinAn/PRNotes.

第二章　线性算符

2.1　代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

定义 2.1. $\mathcal{H}$ 上所有有界线性算符组成的集合称为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

定义 2.2. $\forall \hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\hat{A}$ 的范数

$$\|\hat{A}\| := \inf \left\{ M \in \mathbb{R} \,\middle|\, \|\hat{A}|f\rangle\| \leq M|f\rangle, \forall |f\rangle \in \mathcal{H} \right\} = \sup_{|g\rangle \in \mathcal{H},\, \||g\rangle\|=1} \|\hat{A}|g\rangle\|.$$

定理 2.1. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是完备的.

定义 2.3. $\forall \hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\hat{A}^\dagger$ 称为 $\hat{A}$ 的伴随, 若 $(\langle f|\hat{A}^\dagger)|g\rangle = \langle f|(\hat{A}|g\rangle)$, $\forall |f\rangle, |g\rangle \in \mathcal{H}$.

定义 2.4. $\forall \hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\hat{A}$ 称为自伴的, 若 $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$.

定义 2.5. 序列 $\{\hat{A}_n\}$ 称为强收敛于 $\hat{A}$, 若 $\forall |f\rangle \in \mathcal{H}$, $\{\hat{A}_n|f\rangle\}$ 强收敛于 $\hat{A}|f\rangle$.

定义 2.6. 序列 $\{\hat{A}_n\}$ 称为弱收敛于 $\hat{A}$, 若 $\forall |f\rangle \in \mathcal{H}$, $\{\hat{A}_n|f\rangle\}$ 弱收敛于 $\hat{A}|f\rangle$.

定义 2.7. 序列 $\{\hat{A}_n\}$ 称为一致收敛于 $\hat{A}$, 若 $\{\|\hat{A}_n - \hat{A}\|\}$ 在 $n \to \infty$ 时收敛于 0.

可称强收敛为依矢量范数收敛, 弱收敛为依矢量分量收敛, 一致收敛为依范数收敛.

2.2　投影算符和等距算符

定义 2.8. $\hat{P} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 称为投影算符, 若 $\hat{P}$ 自伴, 且 $\hat{P}^2 = \hat{P}$.

定理 2.2. 若 $\hat{P} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是投影算符, 则 $\exists$子空间$M = \{|f\rangle \in \mathcal{H} \,|\, \hat{P}|f\rangle = |f\rangle\}$, 使得 $\hat{P} = \hat{P}_M$.

定理 2.3. 若投影算符序列 $\{\hat{P}_n\}$ 强收敛于 $\hat{P}$, 则 $\hat{P}$ 是投影算符.

定义 2.9. $\hat{\Omega} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 称为半等距算符, 若 $\hat{\Omega}^\dagger\hat{\Omega} = \hat{P}$ 为投影.

定义 2.10. $\hat{\Omega} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 称为等距算符, 若 $\hat{\Omega}^\dagger\hat{\Omega} = \hat{I}$.

定义 2.11. $\hat{U} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 称为幺正算符, 若 $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I} = \hat{U}\hat{U}^\dagger$.

2.3 紧算符

定义 2.12. 算符 $\hat{A}$ 称为有限秩算符, 若 $\hat{A}$ 能表示成 $\hat{A} = \sum_{i=1}^n |h_i\rangle\langle g|$.

定理 2.4. 若 $\hat{A}$ 为有限秩算符, 则 $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

定理 2.5. 若 $\dim R_{\hat{A}} < \infty$, 则 $\hat{A}$ 为有限秩算符.

定义 2.13. 算符 $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 称为紧算符, 若 $\exists$有限秩算符序列$\{\hat{A}_n\}$, $\{\hat{A}_n\}$ 一致收敛于 $\hat{A}$.

定义 2.14. $\mathcal{H}$ 上所有紧算符组成的集合称为 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

定理 2.6. $\hat{P}_M \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, 当且仅当 $\dim M < \infty$.

定义 2.15. $\forall \hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\hat{A}$ 的 Hilbert-Schmidt 范数

$$\|\hat{A}\|_{\mathrm{HS}} := \left[\sum_i \|\hat{A}|e_i\rangle\|^2\right]^{1/2},$$

其中 $|e_i\rangle$ 是 $\mathcal{H}$ 的一组正交归一基.

定义 2.16. 算符 $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 称为 Hilbert-Schmidt 算符, 若 $\|\hat{A}\|_{\mathrm{HS}} < \infty$.

定义 2.17. $\mathcal{H}$ 上所有 Hilbert-Schmidt 算符组成的集合称为 $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$.

定理 2.7. 若 $\hat{A}$ 为 Hilbert-Schmidt 算符, 则 $\hat{A}$ 为紧算符.

2.4 无界算符

定义 2.18. 算符 $\hat{A}$ 称为线性算符, 若 $D_{\hat{A}}$ 是线性流形且 $\hat{A}$ 线性.

定义 2.19. 若 $\hat{A}$ 是线性算符, 则 $N_{\hat{A}} := \{|f\rangle \in D_{\hat{A}} \,|\, \hat{A}|f\rangle = |0\rangle\}$ 称为 $\hat{A}$ 的零空间.

定义 2.20. 对算符 $\hat{A}$, $\hat{B}$,

1. 若 $D_{\hat{A}} = D_{\hat{B}}$, 且 $\forall |f\rangle \in D_{\hat{A}}$, $\hat{A}|f\rangle = \hat{B}|f\rangle$, 则称 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 相等, 并记作 $\hat{A} = \hat{B}$;

2. 若 $D_{\hat{A}} \subset D_{\hat{B}}$, 且 $\forall |f\rangle \in D_{\hat{A}}$, $\hat{A}|f\rangle = \hat{B}|f\rangle$, 则称 $\hat{A}$ 是 $\hat{B}$ 的限制, $\hat{B}$ 是 $\hat{A}$ 的延拓, 并记作 $\hat{A} \subset \hat{B}$.

定义 2.21. 算符 $\hat{A}$ 称为可闭算符, 若 $D_{\hat{A}}$ 中序列 $\{|f_n\rangle\}$ 强收敛于 $|0\rangle$ 且序列 $\{|\hat{A}f_n\rangle\}$ 是强 Cauchy 序列时, $\{|\hat{A}f_n\rangle\}$ 强收敛于 $|0\rangle$.

定义 2.22. 算符 $\hat{A}$ 称为闭算符, 若 $D_{\hat{A}}$ 中序列 $\{|f_n\rangle\}$ 强收敛于 $|f\rangle$ 且序列 $\{|\hat{A}f_n\rangle\}$ 是强 Cauchy 序列时, $|f\rangle \in D_{\hat{A}}$ 且 $\{|\hat{A}f_n\rangle\}$ 强收敛于 $|f\rangle$.

定理 2.8. 若 $\hat{A}$ 为闭算符, 则 $N_{\hat{A}}$ 为子空间.

定理 2.9. $\hat{A}$ 可逆, 当且仅当 $N_{\hat{A}} = \{|0\rangle\}$.

定义 2.23. 算符 $\hat{A}$ 称为稠定算符, 若 $D_{\hat{A}}$ 是稠密的.

定义 2.24. 若 $\hat{A}$ 是有界算符, 则存在 $\hat{A}$ 的由 $D_{\hat{A}}$ 到 $\overline{D_{\hat{A}}}$ 的自然延拓, 称为 $\hat{A}$ 的闭包, 记作 $\overline{\hat{A}}$.

定义 2.25. 算符 $\hat{A}^\dagger$ 称为稠定算符 $\hat{A}$ 的伴随, 若 $D_{\hat{A}^\dagger} = \{|f\rangle \in \mathcal{H} \,|\, \exists |f^\dagger\rangle \in \mathcal{H}, \langle f^\dagger|g\rangle = \langle f|(\hat{A}|g\rangle), \forall |g\rangle \in D_{\hat{A}}\}$, 且 $\hat{A}^\dagger|f\rangle = |f^\dagger\rangle$.

定义 2.26. 若 $\hat{A}$ 是稠定算符, 则 $\hat{A}^\dagger$ 是闭算符.

定义 2.27. 若 $\hat{A}$ 是稠定可闭算符, 则 $\overline{\hat{A}}^\dagger = \hat{A}^\dagger$.

定义 2.28. 若 $\hat{A}$ 和 $\hat{A}^\dagger$ 都是稠定算符, 则 $\hat{A} \subset \hat{A}^{\dagger\dagger}$.

定义 2.29. 若 $\hat{A}$ 和 $\hat{A}^\dagger$ 都是稠定算符, 且 $\hat{A}$ 是闭算符, 则 $\hat{A} = \hat{A}^{\dagger\dagger}$.

定义 2.30. 稠定算符 $\hat{A}$ 称为自伴算符, 若 $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.

定义 2.31. 稠定算符 $\hat{A}$ 称为 Hermitean 算符, 若 $(\langle f|\hat{A})|g\rangle = \langle f|(\hat{A}|g\rangle)$, $\forall |f\rangle, |g\rangle \in D_{\hat{A}}$.

定理 2.10. 稠定算符 $\hat{A}$ 是 Hermitean 算符, 当且仅当 $\hat{A} \subset \hat{A}^\dagger$.

定义 2.32. Hermitean 算符 $\hat{A}$ 称为本质自伴算符, 若 $\overline{\hat{A}}$ 是自伴算符.

定理 2.11. Hermitean 算符 $\hat{A}$ 是本质自伴算符, 当且仅当 $\hat{A}^\dagger$ 是 Hermitean 算符.

2.5 算符的预解和谱

定义 2.33. 若 $\hat{A}$ 是闭算符, 则 $\hat{A}$ 的预解 $\mathrm{r}(\hat{A})$ 定义为 $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \hat{A} - z\hat{I}$ 可逆, $(\hat{A} - z\hat{I})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$, $\hat{A}$ 的谱 $\mathrm{s}(\hat{A})$ 定义为 $\mathcal{H} - \mathrm{r}(\hat{A})$.

定理 2.12. 若 $\hat{A}$ 是闭算符, 则 $\mathrm{r}(\hat{A})$ 是开集, $\mathrm{s}(\hat{A})$ 是闭集.

定义 2.34. $z \in \mathbb{C}$ 称为算符 $\hat{A}$ 的本征值, 若 $\hat{A} - z\hat{I}$ 可逆.

定理 2.13. 若 $\hat{A}$ 是 Hermitean 算符, 则 $\hat{A}$ 的所有本征值为实数.

定理 2.14. 若 $\hat{A}$ 是自伴算符, 则 $\mathrm{s}(\hat{A}) \subset \mathbb{R}$.

定理 2.15. 若 $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 则 $\mathrm{s}(\hat{A}) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq \|\hat{A}\|\}$.

2.6 自伴算符的微扰

定理 2.16. 若 $\hat{A}$ 和 $\hat{A}'$ 是 Hermitean 算符, $D_{\hat{A}} \cap D_{\hat{A}'}$ 是稠密的, 则 $\hat{A} + \hat{A}'$ 是 Hermitean 算符.

定理 2.17. 若 $\hat{A}$ 是自伴算符, $\hat{A}'$ 是 Hermitean 算符, 且 $\hat{A}' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 则 $\hat{A} + \hat{A}'$ 是自伴算符.

定义 2.35. 算符 $\hat{A}'$ 称为 $\hat{A}$ 有界算符, 若 $D_{\hat{A}} \subset D_{\hat{A}'}$ 且 $\exists \alpha \geq 0, \beta_\alpha \geq 0$, $\|\hat{A}'|f\rangle\| \leq \alpha \|\hat{A}|f\rangle\| + \beta_\alpha \||f\rangle\|$, $\forall |f\rangle \in D_{\hat{A}}$, 并且 α 的下确界 a 称为 $\hat{A}'$ 的 $\hat{A}$ 界.

定义 2.36.

1. 自伴算符 $\hat{A}$ 称为下半有界算符, 若 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $(-\infty, \lambda) \subset \mathrm{r}(\hat{A})$.

2. 自伴算符 $\hat{A}$ 称为上半有界算符, 若 $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $(\lambda,\infty)\subset \mathrm{r}(\hat{A})$.

定理 2.18. 若 $\hat{A}$ 是自伴算符, $\hat{A}'$ 是 $\hat{A}$ 有界 Hermitean 算符, 且 $\hat{A}'$ 的 $\hat{A}$ 界 $a<1$, 则:

1. $\hat{A}+\hat{A}'$ 是自伴算符.
2. $\hat{A}'$ 也是 $\hat{A}+\hat{A}'$ 有界 Hermitean 算符.
3. 若 $\hat{A}$ 是半有界算符, 则 $\hat{A}+\hat{A}'$ 也是半有界算符.
4. 若条件放宽, $\hat{A}$ 是本质自伴算符, 或 $a\leq 1$, 则 $\hat{A}+\hat{A}'$ 是本质自伴算符.

定义 2.37. 当 $\hat{A}$ 为闭算符时, 算符 $\hat{B}$ 称为 $\hat{A}$ 紧算符, 若 $D_{\hat{A}}\subset D_{\hat{B}}$ 且 $\exists z\in \mathrm{r}(\hat{A})$, $\hat{B}(\hat{A}-z\hat{I})^{-1}$ 是紧算符.

定理 2.19. 若 $\hat{A}$ 是自伴算符, $\hat{B}$ 是 $\hat{A}$ 紧 Hermitean 算符, 则:

1. $\hat{B}(\hat{A}-z\hat{I})^{-1}\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$, $\forall z\in \mathrm{r}(\hat{A})$.
2. $\hat{B}$ 是 $\hat{A}$ 有界算符, $\hat{A}$ 界为 0.
3. 若 $\hat{A}'$ 是 $\hat{A}$ 有界 Hermitean 算符, 且 $\hat{A}'$ 的 $\hat{A}$ 界 $a<1$, 则 $\hat{B}$ 也是 $\hat{A}+\hat{A}'$ 紧 Hermitean 算符.

第三章　Hermitean 算符和其延拓

第四章　自伴算符的谱理论

4.1　Borel-Stieltjes 测度

定义 4.1. 若右连续单调不降实函数 F 满足 $F(-\infty) = 0$, 则 F 称为分布函数.

定义 4.2. 若 F 为分布函数, $\mathcal{B}$ 为 Borel 集代数, 则由 F 诱导出的, 和 F 一一对应的 $\sigma(\mathcal{B})$ 上的测度 μ_F 称为和 F 对应的 Borel-Stieltjes 测度.

4.2　谱测度

定义 4.3. 若子空间族 $\{M_\lambda\}$ 满足:

1. $M_{\lambda_1} \subset M_{\lambda_2}$, 若 $\lambda_1 \leq \lambda_2$,
2. $\bigcap_\lambda M_\lambda = \{|0\rangle\}$, $\bigcup_\lambda M_\lambda$ 稠密,

则 $\{M_\lambda\}$ 称为标准单调不降子空间族.

定义 4.4. 若子空间族 $\{M_\lambda\}$ 为标准单调不降子空间族, 则 $\{\hat{E}_\lambda\} := \{\hat{P}_{M_\lambda}\}$ 满足:

1. $\hat{E}_{\lambda_1}\hat{E}_{\lambda_2} = \hat{E}_{\min\{\lambda_1,\lambda_2\}}$,
2. $\lambda \to -\infty$ 时 $\{\hat{E}_\lambda\}$ 的强极限为 $\hat{O}$, $\lambda \to +\infty$ 时 $\{\hat{E}_\lambda\}$ 的强极限为 $\hat{I}$,

$\{\hat{E}_\lambda\}$ 称为标准单调不降投影族, $\hat{E}_{-\infty} := \hat{O}$, $\hat{E}_{+\infty} := \hat{I}$.

定义 4.5. 若 $\{\hat{E}_\lambda\}$ 是标准单调不降投影族, $\{\hat{E}_\lambda\}$ 右连续, 即 $\hat{E}_\lambda$ 的右强极限 $\hat{E}_{\lambda+0} = \hat{E}_\lambda, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, 则 $\{\hat{E}_\lambda\}$ 称为谱族.

定义 4.6. 若 $\{\hat{E}_\lambda\}$ 是谱族, $-\infty < a < b < +\infty$, 则 $\mu_{\hat{E}}((a,b]) := \hat{E}_b - \hat{E}_a$, 如此可将任意左开右闭区间 $(a,b]$ 和一个投影 $\mu_{\hat{E}}((a,b])$ 对应, 并进一步可以将任意 Borel 集 B 和一个投影 $\mu_{\hat{E}}(B)$ 对应, 映射 $\mu_{\hat{E}}$ 称为由谱族 $\{\hat{E}_\lambda\}$ 生成的谱测度.

定义 4.7. 若 $\{\hat{E}_\lambda\}$ 是谱族, $|f\rangle \in \mathcal{H}$, 则实函数 $F_{|f\rangle;\hat{E}} : \lambda \mapsto \|\hat{E}_\lambda|f\rangle\|^2$ 为分布函数, 称和 $F_{|f\rangle;\hat{E}}$ 对应的 Borel-Stieltjes 测度 $\mu_{|f\rangle;\hat{E}}$ 为由 $|f\rangle$ 和 $\{\hat{E}_\lambda\}$ 生成的 Borel-Stieltjes 测度.

定理 4.1. 若函数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 连续, $\{\hat{E}_\lambda\}$ 是谱族, 则可定义一个 Riemann 积分 $\int \varphi(\lambda)\, \mu_{\hat{E}}(\mathrm{d}\lambda)$, 此积分是定义在某稠密集 $D_{\varphi;\hat{E}}$ 上的闭算符, 且其伴随为 $\int \bar{\varphi}(\lambda)\mu_{\hat{E}}(\mathrm{d}\lambda)$.

定义 4.8. 若 $\{\hat{E}_\lambda\}$ 是谱族, 则算符 $\int \lambda\, \mu_{\hat{E}}(\mathrm{d}\lambda)$ 称为和谱族 $\{\hat{E}_\lambda\}$ 对应的算符.

定理 4.2. 若 $\hat{A}$ 是自伴算符, 则存在唯一谱族 $\{\hat{E}_{\lambda;\hat{A}}\}$, 使得

$$\hat{A} = \int a\, |a\rangle\langle a|(\mathrm{d}a) := \int a\, \mu_{\hat{E}_{\hat{A}}}(\mathrm{d}a).$$