谱理论与量子力学

GasinAn

2023 年 9 月 1 日

Printed in China

目录

第一章　自伴算符

定义 1.1. 对算符 $\hat{A}: D_{\hat{A}} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, 若 $\overline{D_{\hat{A}}} = \mathcal{H}$, 则称 $\hat{A}$ 为稠定算符.

定理 1.1. 若 $\hat{A}: D_{\hat{A}} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是线性算符, $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$ 则当且仅当 $\hat{A}$ 为稠定算符, 满足 $\forall |\beta\rangle \in D_{\hat{A}}$,

$$\langle\alpha|(\hat{A}|\beta\rangle) = \langle\gamma|\beta\rangle$$

的 $|\gamma\rangle \in \mathcal{H}$ 是唯一的.

定义 1.2. 对稠定线性算符 $\hat{A}: D_{\hat{A}} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, 若 $\hat{A}^\dagger: D_{\hat{A}^\dagger} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}, |\alpha\rangle \mapsto \hat{A}^\dagger|\alpha\rangle$ 满足 $\forall |\beta\rangle \in \mathcal{H}$,

$$\langle\alpha|(\hat{A}|\beta\rangle) = (\langle\alpha|\hat{A}^\dagger)|\beta\rangle$$

则称 $\hat{A}^\dagger$ 为 $\hat{A}$ 的伴随算符. 若 $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$, 则称 $\hat{A}$ 为自伴算符.

定义 1.3. 对稠定线性算符 $\hat{A}: D_{\hat{A}} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, 若 $\forall |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}$,

$$\langle\alpha|(\hat{A}|\beta\rangle) = (\langle\alpha|\hat{A})|\beta\rangle$$

则称 $\hat{A}$ 为 Hermitean 算符.

定义 1.4. 对算符 $\hat{A}: D_{\hat{A}} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\hat{B}: D_{\hat{B}} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$,

1. 若 $D_{\hat{A}} = D_{\hat{B}}$, 且 $\forall |\varphi\rangle \in D_{\hat{A}}$, $\hat{A}|\varphi\rangle = \hat{B}|\varphi\rangle$, 则称 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 相等, 并记作 $\hat{A} = \hat{B}$;

2. 若 $D_{\hat{A}} \subset D_{\hat{B}}$, 且 $\forall |\varphi\rangle \in D_{\hat{A}}$, $\hat{A}|\varphi\rangle = \hat{B}|\varphi\rangle$, 则称 $\hat{A}$ 是 $\hat{B}$ 的限制, $\hat{B}$ 是 $\hat{A}$ 的延拓, 并记作 $\hat{A} \subset \hat{B}$.

定义 1.5. 若 $\hat{A}: D_{\hat{A}} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 为稠定线性算符, 则当且仅当 $\hat{A} \subset \hat{A}^\dagger$, $\hat{A}$ 为 Hermitean 算符.

定义 1.6. 对线性算符 $\hat{A}: D_{\hat{A}} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, 若 $\exists M \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall |\varphi\rangle \in D_{\hat{A}}$,

$$\|\hat{A}|\varphi\rangle\| \leq M \||\varphi\rangle\|,$$

则称 $\hat{A}$ 为有界算符, 否则称 $\hat{A}$ 为无界算符.

定义 1.7. 若 $\hat{A}: D_{\hat{A}} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 为有界 Hermitean 算符, 则 $\hat{A}$ 为自伴算符.