

谱理论与量子力学

GasinAn

2023 年 9 月 2 日

Copyright © 2023 by GasinAn

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, in any form or by any means, without permission in writing from the publisher, except by a BNUser.

The author and publisher of this book have used their best efforts in preparing this book. These efforts include the development, research, and testing of the theories, technologies and programs to determine their effectiveness. The author and publisher make no warranty of any kind, express or implied, with regard to these techniques or programs contained in this book. The author and publisher shall not be liable in any event of incidental or consequential damages in connection with, or arising out of, the furnishing, performance, or use of these techniques or programs.

Printed in China

目录

第一章 Hilbert 空间

1.1 定义和基本性质

定义 1.1. 完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

定理 1.1. Hilbert 空间是可分的, 当且仅当其有可数正交归一基.

任意可分 Hilbert 空间同构于 ℓ^2 和 L^2 . 以下只讨论可分 Hilbert 空间.

定义 1.2. 序列 $\{|f_n\rangle\}$ 称为强收敛于 $|f\rangle$, 若 $\{\|f_n - f\|\}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时收敛于 0.

定义 1.3. 序列 $\{|f_n\rangle\}$ 称为弱收敛于 $|f\rangle$, 若 $\forall |g\rangle, \{\langle g|f_n\rangle\}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时收敛于 $\langle g|f\rangle$.

可称强收敛为依范数收敛, 弱收敛为依分量收敛.

1.2 矢量值函数

用强收敛可定义任意矢量值函数 $|f(\cdot)\rangle : I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ 的强连续性, 强可微性和强 Riemann 可积性.

1.3 Hilbert 空间的子集

定义 1.4. 若 U 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的子集, U 的闭包 $\bar{U} = \mathcal{H}$, 则 U 称为稠密的.

定义 1.5. 若 M 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的子集, M 对 \mathcal{H} 的线性运算封闭, 则 M 称为线性流形.

定义 1.6. 若 N 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的子集, 则 \mathcal{H} 中所有能表示为 N 中有限个元素的线性叠加的矢量组成的集合是一个线性流形, 称为由 N 生成的线性流形.

定义 1.7. 若 N 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的子集, 由 N 生成的线性流形是稠密的, 则 N 称为完全的.

定义 1.8. 若 M 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的子集, M 是完备线性流形, 则 M 称为子空间.

定义 1.9. 若 N 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的子集, 则由 N 生成的线性流形的闭包 M_N 是一个子空间, 称为由 N 生成的子空间.

定义 1.10. 若 U 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的子集, 则 $U^\perp := \{|f\rangle \in \mathcal{H} | |f\rangle \perp |g\rangle, \forall |g\rangle \in U\}$ 称为 U 的正交补.

定理 1.2. 若 U 是 Hilbert 空间 \mathcal{H} 的子集, 则 U^\perp 为子空间, $U^{\perp\perp}$ 为由 N 生成的子空间.

定理 1.3. 若 M 是子空间, 则 $\forall |f\rangle \in \mathcal{H}$, $\exists |f\rangle$ 的唯一分解 $|f\rangle = |f_T\rangle + |f_N\rangle$, $|f_T\rangle \in M$, $|f_N\rangle \in M^\perp$.

定义 1.11. 若 $\{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n\}$ 中的元素都是 Hilbert 空间, 则 $\{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n\}$ 中的元素的正交和 $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ 为一个 Hilbert 空间, 其元素形如 $|f_1\rangle \dots |f_n\rangle$, $f_i \in \mathcal{H}_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, 满足

$$(\langle f_n | \dots \langle f_1 |)(|g_1\rangle \dots |g_n\rangle) = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}_i \langle f_i | g_i \rangle, \forall |f_1\rangle \dots |f_n\rangle, |g_1\rangle \dots |g_n\rangle \in \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i.$$

定义 1.12. 若 $\{\mathcal{H}_i | i \in \mathbb{N}\}$ 中的元素都是 Hilbert 空间, 则 $\{\mathcal{H}_i | i \in \mathbb{N}\}$ 中的元素的正交和 $\bigoplus_{i=1}^\infty \mathcal{H}_i$ 为一个 Hilbert 空间, 其元素形如 $|f_1\rangle \dots |f_i\rangle \dots$, $f_i \in \mathcal{H}_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, 满足

$$(\dots \langle f_i | \dots \langle f_1 |)(|g_1\rangle \dots |g_i\rangle \dots) = \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}_i \langle f_i | g_i \rangle, \forall |f_1\rangle \dots |f_i\rangle \dots, |g_1\rangle \dots |g_i\rangle \dots \in \bigoplus_{i=1}^\infty \mathcal{H}_i.$$

1.4 测度和积分

测度和 Lebesgue 积分的内容参见<https://github.com/GasinAn/PRNotes>.