谱理论与量子力学

GasinAn

2023 年 9 月 2 日

Printed in China

目录

第一章　Hilbert 空间

1.1　定义和基本性质

定义 1.1. 完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

定理 1.1. Hilbert 空间是可分的, 当且仅当其有可数正交归一基.

任意可分 Hilbert 空间同构于 ℓ^2 和 L^2. 以下只讨论可分 Hilbert 空间.

定义 1.2. 序列 $\{|f_n\rangle\}$ 称为强收敛于 $|f\rangle$, 若 $\{\||f_n\rangle - |f\rangle\|\}$ 在 $n \to \infty$ 时收敛于 0.

定义 1.3. 序列 $\{|f_n\rangle\}$ 称为弱收敛于 $|f\rangle$, 若 $\forall |g\rangle$, $\{\langle g|f_n\rangle\}$ 在 $n \to \infty$ 时收敛于 $\langle g|f\rangle$.

可称强收敛为依范数收敛, 弱收敛为依分量收敛.

1.2　矢量值函数

用强收敛可定义任意矢量值函数 $|f(\cdot)\rangle : I \in \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ 的强连续性, 强可微性和强 Riemann 可积性.

1.3　Hilbert 空间的子集

定义 1.4. 若 U 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, U 的闭包 $\overline{U} = \mathcal{H}$, 则 U 称为稠密的.

定义 1.5. 若 M 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, M 对 $\mathcal{H}$ 的线性运算封闭, 则 M 称为线性流形.

定义 1.6. 若 N 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, 则 $\mathcal{H}$ 中所有能表示为 N 中有限个元素的线性叠加的矢量组成的集合是一个线性流形, 称为由 N 生成的线性流形.

定义 1.7. 若 N 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, 由 N 生成的线性流形是稠密的, 则 N 称为完全的.

定义 1.8. 若 M 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, M 是完备线性流形, 则 M 称为子空间.

定义 1.9. 若 N 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, 则由 N 生成的线性流形的闭包 M_N 是一个子空间, 称为由 N 生成的子空间.

定义 1.10. 若 U 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, 则 $U^\perp := \{|f\rangle \in \mathcal{H} \,|\, |f\rangle \perp |g\rangle, \forall |g\rangle \in U\}$ 称为 U 的正交补.

定理 1.2. 若 U 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集, 则 $U^\perp$ 为子空间, $U^{\perp\perp}$ 为由 N 生成的子空间.

定理 1.3. 若 M 是子空间, 则 $\forall |f\rangle \in \mathcal{H}$, $\exists |f\rangle$的唯一分解$|f\rangle = |f_\mathrm{T}\rangle + |f_\mathrm{N}\rangle$, $|f_\mathrm{T}\rangle \in M$, $|f_\mathrm{N}\rangle \in M^\perp$.

定义 1.11. 若 $\{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n\}$ 中的元素都是 Hilbert 空间, 则 $\{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n\}$ 中的元素的正交和 $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ 为一个 Hilbert 空间, 其元素形如 $|f_1\rangle \ldots |f_n\rangle$, $f_i \in \mathcal{H}_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, 满足

$$(\langle f_n| \ldots \langle f_1|)(|g_1\rangle \ldots |g_n\rangle) = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}_i \langle f_i|g_i\rangle, \forall |f_1\rangle \ldots |f_n\rangle, |g_1\rangle \ldots |g_n\rangle \in \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i.$$

定义 1.12. 若 $\{\mathcal{H}_i | i \in \mathbb{N}\}$ 中的元素都是 Hilbert 空间, 则 $\{\mathcal{H}_i | i \in \mathbb{N}\}$ 中的元素的正交和 $\bigoplus_{i=1}^\infty \mathcal{H}_i$ 为一个 Hilbert 空间, 其元素形如 $|f_1\rangle \ldots |f_i\rangle \ldots$, $f_i \in \mathcal{H}_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, 满足

$$(\ldots \langle f_i| \ldots \langle f_1|)(|g_1\rangle \ldots |g_i\rangle \ldots) = \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}_i \langle f_i|g_i\rangle, \forall |f_1\rangle \ldots |f_i\rangle \ldots, |g_1\rangle \ldots |g_i\rangle \ldots \in \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i.$$

1.4 测度和积分

测度和 Lebesgue 积分的内容参见https://github.com/GasinAn/PRNotes.