



UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA

Matemática II (MAT022)

Clase 19

Coordinación MAT022



Contenidos

Volúmenes por secciones transversales

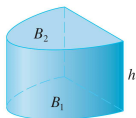
Volúmenes por secciones transversales

Definición

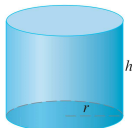
*Un sólido es un **cilindro recto** cuando esta delimitado por dos regiones planas congruentes R_1 y R_2 situadas en planos paralelos y por una superficie lateral generada por un segmento rectilíneo cuyos extremos coinciden con los límites de R_1 y R_2 que se desplaza de manera que es siempre perpendicular a los planos paralelos. La altura del cilindro recto es la distancia entre los planos y la base es R_1 ó R_2 .*

Observación

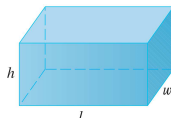
Si la base es un rectángulo, el cilindro recto obtenido se denomina paralelepípedo rectángulo, si la base es un círculo se obtiene un cilindro circular recto.



a) Cilindro $V = Ah$



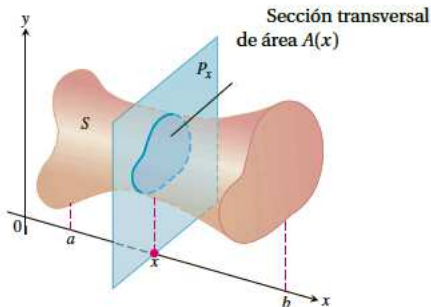
b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$



c) Caja rectangular $V = lwh$

Si el área de la base de un cilindro recto mide A unidades y la altura es h unidades el volumen del cilindro recto es $V = Ah$. Usaremos tal fórmula para determinar el volumen de sólidos más complejos.

Sea S el sólido cuyo volumen queremos calcular. Trazamos un eje de forma que en cada posición de tal eje, se conozca el área de la sección perpendicular del sólido a dicho eje. Denotemos el eje por OX y $A(x)$ el área de la sección, supongamos además que el sólido se encuentra entre los planos $x = a$ y $x = b$.



Probaremos que:

Si la función de área transversal $A(x)$ es integrable en $[a, b]$ entonces el volumen del sólido es

$$V(S) = \int_a^b A(x) dx$$

En efecto, sea $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. El concepto de volumen debe cumplir ciertas nociones básicas

- i. $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow V(S_1) \leq V(S_2)$
- ii. $V(S_1 \cap S_2) = 0 \Rightarrow V(S_1 \cup S_2) = V(S_1) + V(S_2)$

Sean entonces C_i la parte del sólido entre los planos $x = x_{i-1}$ y $x = x_i$, \underline{C}_i el cilindro recto de base $m_i(A)$ (ínfimo de $A(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$) y altura $x_i - x_{i-1}$, \overline{C}_i el cilindro de base $M_i(A)$ (supremo de $A(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$) y altura $x_i - x_{i-1}$ entonces se cumple

$$\forall i, V(\underline{C}_i) \leq V(C_i) \leq V(\overline{C}_i)$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n V(\underline{C}_i) \leq \sum_{i=1}^n V(C_i) \leq \sum_{i=1}^n V(\overline{C}_i)$$

se sigue que $s(A, \mathcal{P}) \leq V(S) \leq S(A, \mathcal{P})$, como la partición es arbitraria, concluimos que

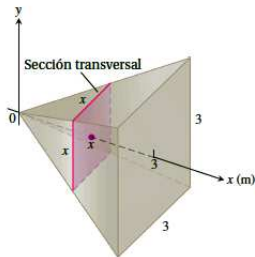
$$\int_a^b A(x) dx \leq V(S) \leq \overline{\int_a^b A(x) dx}$$

si A es integrable es razonable entonces definir

$$V(S) = \int_a^b A(x) dx$$

Ejemplo

Una pirámide de 3 metros de altura tiene una base cuadrada que tiene lado igual a 3. Calcular su volumen



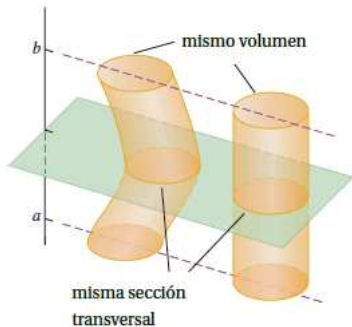
La sección transversal de la pirámide perpendicular en la altitud x desde el vértice en este caso mide x de esta forma el área de la sección transversal $A(x)$ es x^2 .

Los límites de integración son 0 y 3. Entonces el volumen de la pirámide es

$$V(P) = \int_0^3 A(x) dx = \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 9 \text{ m}^3$$

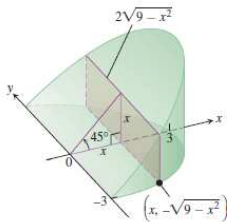
Ejemplo

El principio de Cavalieri dice que sólidos con igual altitud e idénticas secciones transversales en cada nivel tienen el mismo volumen. Esto sigue de forma inmediata de nuestra definición del volumen puesto que la función área $A(x)$ y el intervalo de integración $[a, b]$ es el mismo para ambos sólidos.



Ejemplo

Una cuña es extraída desde un cilindro circular de radio 3 por dos planos. Un plano es perpendicular al eje del cilindro y el segundo corta en primer plano en un ángulo de 45° en el centro del cilindro. Encontrar el volumen de la cuña.



El dibujo nos da una sección transversal perpendicular al eje escogido, las secciones son rectángulos de área

$$\begin{aligned} A(x) &= (\text{alto})(\text{ancho}) \\ &= x \left(2\sqrt{9-x^2} \right) \\ &= 2x\sqrt{9-x^2} \end{aligned}$$

los rectángulos recorren desde $x = 0$ hasta $x = 3$ se sigue:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2} dx = 18$$

Volumenes de sólidos de revolución

Sólidos de Revolución

Definición

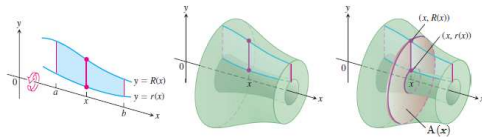
Un sólido de revolución es un sólido generado mediante la rotación de una región plana alrededor de una recta en el mismo plano.

Para calcular el volumen de este tipo de sólidos veremos por ahora dos métodos:

Método de los Discos

Suponga que la región plana está limitada por las gráficas de dos funciones $y = R(x)$, $y = r(x)$ y por las rectas $x = a$ y $x = b$. Supongamos además que para $x \in [a, b]$ se cumple $0 \leq r(x) \leq R(x)$. Esta región gira alrededor del eje X . Note que en la coordenada x el área de la región transversal corresponde a

$$A(x) = (\text{área del círculo mayor}) - (\text{área del círculo menor})$$

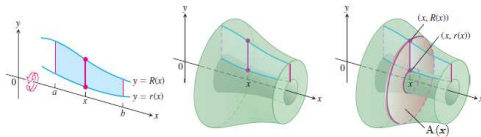


el mayor radio corresponde a $R(x)$ y el menor a $r(x)$ se sigue

$$A(x) = \pi R^2(x) - \pi r^2(x)$$

se sigue que el volumen es dado por

$$V = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b \left(R^2(x) - r^2(x) \right) dx$$

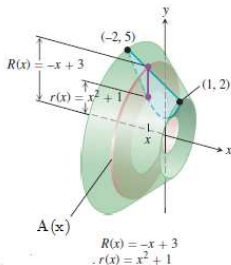


en caso de que las funciones giren entorno a la recta $y = c$ entonces sigue siendo válida la fórmula

$A(x) = (\text{área del círculo mayor}) - (\text{área del círculo menor})$

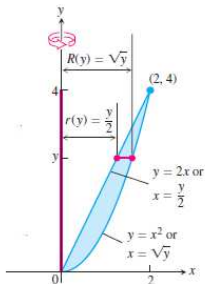
Ejemplo

La región acotada por la curva $y = x^2 + 1$ y la recta $y = -x + 3$ gira alrededor del eje X generando un sólido. Encontrar su volumen.



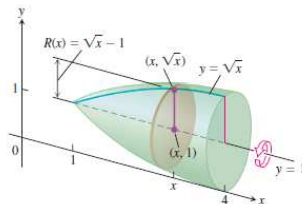
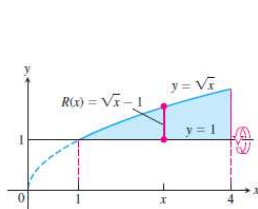
Ejemplo

La región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x$ en el primer cuadrante gira alrededor del eje y para generar un sólido. Encuentre su volumen.



Ejemplo

Encontrar el volumen del sólido de revolución generado al girar la región acotada por $y = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 1, x = 4$ alrededor de la recta $y = 1$.



Ejemplo

Encontrar el volumen del sólido de revolución generado al girar la región acotada por la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$ alrededor de la recta $x = 3$.

