



UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática

Guía 2 - Complementos Matemática II (MAT-022)

Rango, Sistemas de Ecuaciones e Inversas con Operaciones Elementales

Problema 1. Determinar el rango de las siguientes matrices, en términos del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -a & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Hallar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que el rango de la matriz A sea el menor posible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & a & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -3 & b \end{pmatrix}$$

Problema 3. Si B es la inversa de A^2 , probar que AB es la inversa de A .

Problema 4. En cada uno de los siguientes sistemas, determine $a \in \mathbb{R}$ para que el sistema tenga:

(a) Infinitas soluciones

(b) ninguna solución

(c) una única solución

$$(4.1) \quad \left| \begin{array}{rcl} x + ay + 3z & = & 2 \\ x + (2a-1)y + 2z & = & 2 \\ x + ay + (a+4)z & = & 2a+4 \end{array} \right|$$

$$(4.2) \quad \left| \begin{array}{rcl} ax + y + z & = & 1 \\ x + ay + z & = & 1 \\ x + y + az & = & -2 \end{array} \right|$$

Problema 5. En los siguientes sistemas de ecuaciones, determine condiciones sobre $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que éstos tengan solución única, infinitas soluciones o no tengan solución:

$$(a) \quad \left| \begin{array}{rcl} ax_1 + bx_2 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ bx_1 + bx_2 + (a+b)x_3 & = & 0 \end{array} \right|$$

$$(b) \quad \left| \begin{array}{rcl} x_1 - ax_2 - bx_4 & = & 0 \\ ax_2 + x_3 + bx_4 & = & a \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 & = & b \\ ax_1 + bx_3 & = & 0 \end{array} \right|$$

Problema 6. Calcular A^{-1} si

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$