UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Matemática II (MAT022)

Clase 18

Coordinación MAT022

Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Contenidos

DMAT
Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Área en coordenadas paramétricas

Área en coordenadas paramétricas

Teorema

Sean $f(t), g(t)$ funciones definidas en $[a,b]$ y derivables por tramos tales que

$$C : \begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

describe una curva cerrada simple orientada en sentido positivo entonces el área encerrada por la curva está dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} dt = \frac{1}{2}\int_a^b \big(f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\big)\, dt$$

DMAT
Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Ejemplo

Muestre que al usar la fórmula anterior en

$$C:\begin{cases} x = f(t)\cos t \\ y = f(t)\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta]$$

se obtiene el área encerrada por la ecuación polar

$$r = f(\theta) \text{ con } \theta\in[\alpha,\beta]$$

Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Observación

$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt = -\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt$$

en efecto, basta realizar una integración por partes y utilizar que la curva es cerrada, de esto podemos obtener

$$A = \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$$

o bien

$$A = -\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt$$

Observación

Si la curva es recorrida en sentido negativo debemos cambiar el signo en las integrales.

Ejemplo

Verificar que las tres fórmulas anteriores dan lo esperado para la curva

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Ejemplo

Encontrar el área encerrada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ejemplo

Encontrar el área encerrada por la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

DMAT
Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Longitud de arco

Longitud de Arco

Dada una curva plana C definida en forma paramétrica por:

$$C : \begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases} \text{ para } t \in [a,b]$$

donde $x(t)$, $y(t)$ son funciones con derivada continua sobre $[a,b]$, hallaremos una fórmula integral para calcular la longitud de la curva.

Longitud de Arco

Consideremos una partición $\mathscr{P} = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$ y consideremos los puntos sobre la curva $Q_i = (x(t_i), y(t_i))$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces la longitud de la curva es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} d(Q_i, Q_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

DMAT
Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Longitud de Arco

Por el teorema del valor medio, existen puntos t_i^* y t_i^{**} en el intevalo $[t_{i-1}, t_i]$ tales que

$$\begin{aligned}
\frac{x(t_i)-x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} &= x'(t_i^*) \\
\frac{y(t_i)-y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} &= y'(t_i^{**})
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2 &= (x'(t_i^*))^2(\Delta t_i)^2+(y'(t_i^{**}))^2(\Delta t_i)^2 \\
&= \left[(x'(t_i^*))^2+(y'(t_i^{**}))^2\right](\Delta t_i)^2
\end{aligned}$$

Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Longitud de Arco

de modo que

$$\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2} \quad = \quad \sqrt{(x'(t_i^*))^2+(y'(t_i^{**}))^2}\Delta t_i$$

así

$$\sum_{i=1}^{n} d(Q_i,Q_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(t_i^*))^2+(y'(t_i^{**}))^2}\Delta t_i$$

aunque esta úlltima expresión no es una suma de Riemann se demuestra que

$$\lim_{||\mathscr{P}||\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(t_i^*))^2+(y'(t_i^{**}))^2}\Delta t_i \quad = \quad \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

DMAT
Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Longitud de Arco

Teorema

Si C *es una curva suave de ecuaciones paramétricas* $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [a,b]$, *entonces su longitud está dada por*

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Ejemplo

1. Calcular el perímetro de la región encerrada por la astroide: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, donde $a>0$.

2. Hallar la longitud de un arco de la cicloide:

$$\begin{aligned} x &= a(t-\sin t) \\ y &= a(1-\cos t) \end{aligned}$$

Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Longitud de arco en coordenadas cartesianas

Si queremos calcular la longitud de la gráfica de una función $y = f(x)$ para $x \in [a,b]$, podemos emplear la fórmula anterior junto a la parametrización

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad \text{para } t \in [a,b]$$

y obtenemos

$$\boxed{L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt}$$

Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Longitud de arco en coordenadas polares

Si queremos calcular la longitud de la gáfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ para $\theta \in [\alpha, \beta]$, entonces podemos emplear la fórmula para longitud de curvas paramétricas junto a la parametrización

$$\mathrm{C}: \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{para } \theta \in [\alpha, \beta]$$

y obtenemos que la longitud de la curva polar está dada por

$$L(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\big(f'(\theta)\big)^2 + \big(f(\theta)\big)^2}\, d\theta$$

Ejemplo

Calcular el perímetro de la cardioide $r = a(1+\cos(\theta))$, *donde* $a > 0$.