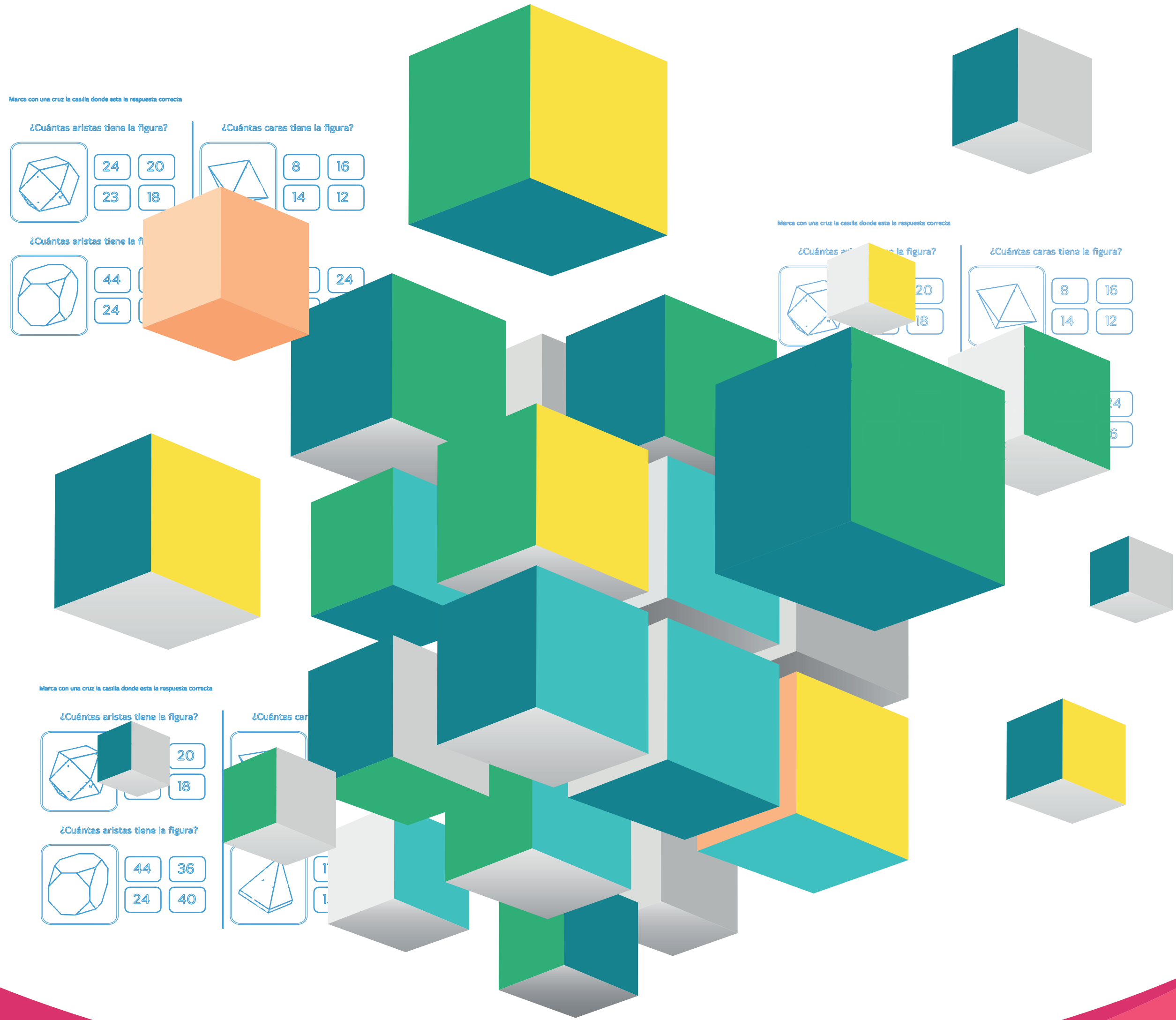
INSTITUCIÓN EDUCATIVA PRIVADA

ADUNI SCHOOL



COMPENDIO ACADÉMICO DE:

GEOMETRÍA

6
PRIMARIA

6
PRIMARIA

ÍNDICE | GEOMETRÍA MATEMÁTICA

01 **Segmentos:** Operaciones de adición y sustracción, punto medio (Página 5 - 9)

02 **Ángulos I:** Clasificación por la posición de sus lados, bisectriz (Página 10 - 14)

03 **Ángulos II:** Clasificación según su suma (Página 15 - 19)

04 Ángulos entre rectas paralelas y una secante (Página 20 - 24)

05 **Triángulos I:** Propiedades fundamentales (Página 25 - 29)

06 **Triángulos II:** Clasificación según la medida de sus ángulos y según la longitud de sus lados (Página 30 -35)

07 **Triángulos III:** Propiedades auxiliares (Página 36 - 40)

08 Teorema de Pitágoras y triángulos pitagóricos (Página 41 - 45)

09 **Cuadriláteros I:** Propiedades fundamentales y paralelogramos (Página 46 - 51)

10 **Cuadriláteros II:** Trapecio y trapezoide; sus propiedades (Página 52 - 57)

11 Polígono regular, perímetro, lados y ángulos exterior e interior (Página 58 - 63)

12 **Circunferencia I:** Propiedades fundamentales, Poncelet y Pitot (Página 64 - 69)

13 **Circunferencia II:** Ángulo central, inscrito y sus propiedades (Página 70 - 75)

14 **Líneas proporcionales:** Teorema de Thales (Página 76- 80)

15 **Semejanza de triángulos:** Tres criterios (Página 81-85)

16 Superficies de figuras geométricas triangulares (Página 86 - 90)

17 **Superficies de figuras geométricas cuadrangulares:** Rombo, romboide,rectángulo, cuadrado y trapecio (Página 91 - 95)

18 Superficie de figuras geométricas circulares (Página 96 - 100)

6
PRIMARIA

ÍNDICE | GEOMETRÍA MATEMÁTICA

19 **Plano cartesiano:** Ubicación de puntos y distancia entre dos puntos (Página 101 - 106)

20 **Transformación de figuras geométricas en el plano cartesiano:** Rotación y traslación (Página 107 - 111)

21 **Poliedros regulares:** Área lateral y área total (Página 112 - 117)

22 **Prisma recto:** Área lateral y volumen (Página 118 - 123)

23 **Cilindro:** Área lateral y volumen (Página 124 - 128)

24 **Pirámide:** Área lateral y volumen (Página 129 - 134)

25 **Cono:** Área lateral y volumen (Página 135 - 139)

26 **Unidades para medir:** cm o mm, litros o mililitros. (Página 140 - 144)

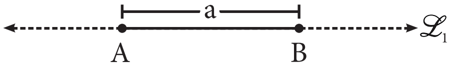
27 Volumen de prismas en unidades arbitrarias de medida (m, cm, mm). (Página 145 - 150)

TEMA 01

SEGMENTOS: OPERACIONES DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN, PUNTO MEDIO

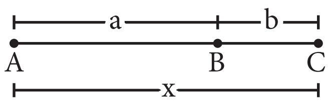
SEGMENTO DE RECTA

Porción de línea recta comprendida entre dos puntos de ella, a los cuales se les denomina extremos.



- Segmento de extremos A y B: $\overline{AB}$
- Longitud del segmento: AB
- En la figura: AB = a

A. Adición y sustracción

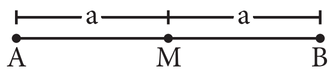


Adición:
x = a + b

Sustracción:
a = x – b

B. Punto medio

Es el punto que divide al segmento en dos partes de igual longitud.



- Partes: $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$
- Punto medio: M $\Rightarrow$ AM = MB

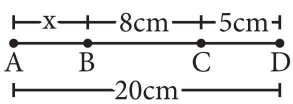
Recuerda

En la figura, los puntos son colineales y consecutivos.

Trabajando en clase

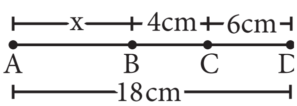
Nivel básico

1. Calcula «x».



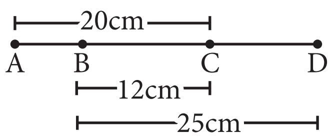
Resolución:
Nos piden: longitud del segmento, AB = x
En la parte superior:
Longitud total = x + 8 cm + 5 cm
En la parte inferior:
Longitud total = 20 cm
Entonces: x + 8 cm + 5 cm = 20 cm
$\Rightarrow$ x = 7 cm

2. Calcula «x».



Resolución:

3. Calcula CD – AB.

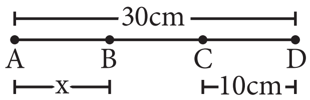


Resolución:

Resolución:

Nivel intermedio

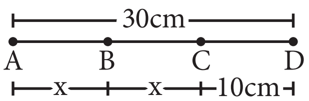
4. Calcula «x», si: B es punto medio de $\overline{AC}$.



Resolución:

Nos piden: AB = x

B es punto medio de $\overline{AC}$ ⇒ AB = BC



Todo: $\overline{AD}$ partes: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$

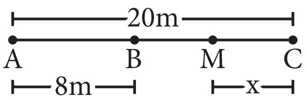
$x + x + 10 = 30\text{ cm} \Rightarrow 2x = 20\text{ cm}$

$x = 10\text{ cm}$

Respuesta:

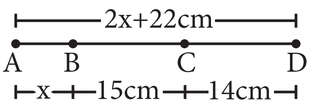
10 cm

5. Calcula «x», si: M es punto medio de $\overline{BC}$.



Resolución:

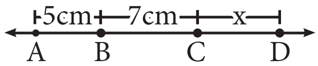
6. Calcula «x».



Nivel avanzado

7. En una línea recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, de forma que AB = 5 cm, BC = 7 cm y CD = 3(AB) – BC. Calcula AD.

Resolución:



Nos piden: AD = 5 cm + 7 cm + x

AD = 12 cm + x

Del dato: CD = 3(AB) – BC

CD = 3(5) – 7 cm

CD = 8 cm ⇒ x = 8 cm

Luego: AD = x + 12 cm

AD = 8 cm + 12 cm

∴ AD = 20 cm

Respuesta:

20 cm

8. En una línea recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, de forma que AB = 2 cm, BC = 6 cm y CD = 2(AB) + BC. Calcula AD.

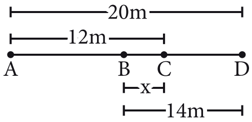
Resolución:

9. En una línea recta se toman los puntos consecutivos A, B, C y D, de modo que AB = x, BC = 2x, CD = 8 cm y AD = 23 cm. Calcula «x».

Resolución:

Práctica

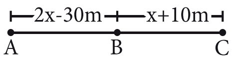
1. De acuerdo con el gráfico, calcula «x».



a) 4 m
b) 5 m
c) 6 m
d) 7 m
e) 8 m

Resolución:

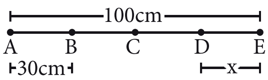
2. De acuerdo con el gráfico, calcula «x» si B es punto medio de $\overline{AC}$.



a) 20 m
b) 30 m
c) 40 m
d) 50 m
e) 60 m

Resolución:

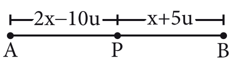
3. Según la figura, calcula «x» si B y D son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$.



a) 10 cm
b) 20 cm
c) 30 cm
d) 40 cm
e) 50 cm

Resolución:

4. Según la figura, calcula «x» si P es punto medio de $\overline{AB}$.



a) 15 u
b) 10 u
c) 25 u
d) 20 u
e) 5 u

Resolución:

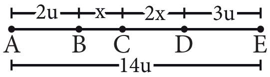
5. En una línea recta se toman los puntos consecutivos A, B, C y D, de modo que AB = x, BC = 3x, CD = 12 cm y AD = 48 cm. Calcula «x».

a) 6 cm
b) 7 cm
c) 8 cm
d) 9 cm
e) 10 cm

Resolución:

Autoevaluación

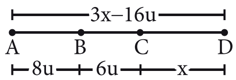
1. De acuerdo con el gráfico, calcula «x».



a) 2 u
b) 3 u
c) 4 u
d) 5 u
e) 6 u

Resolución:

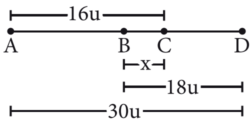
2. De acuerdo con el gráfico, calcula «x».



a) 11 u
b) 12 u
c) 13 u
d) 14 u
e) 15 u

Resolución:

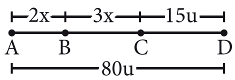
3. De acuerdo con el gráfico, calcula «x».



a) 2 u
b) 3 u
c) 4 u
d) 5 u
e) 6 u

Resolución:

4. Según la figura, calcula «x».



a) 10 u
b) 11 u
c) 12 u
d) 13 u
e) 14 u

Resolución:

5. Sobre una línea recta se toman los puntos consecutivos A, B, C y D, de modo que AC = 16 u, BD = 14 u, AD = 25 u. Calcula BC.

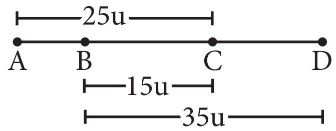
a) 3 u
b) 4 u
c) 5 u
d) 6 u
e) 7 u

Resolución:

Tarea

Nivel básico

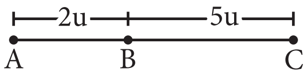
1. De acuerdo con el gráfico, calcula 2CD + 3AB.



a) 50 u
b) 55 u
c) 60 u
d) 65 u
e) 70 u

Resolución:

2. Si los puntos A, B y C son colineales, calcula (5AB + 3BC) – AC.

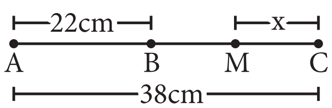


a) 9 u
b) 12 u
c) 15 u
d) 18 u
e) 21 u

Resolución:

Nivel intermedio

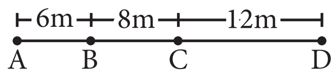
3. De acuerdo con el gráfico, calcula «x» si M es punto medio de $\overline{BC}$.



a) 2 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 8 cm
e) 10 cm

Resolución:

4. A partir de la figura, resuelve: $\dfrac{2AB + CD}{BC}$



a) 2m
b) 3m
c) 4m
d) 5m
e) 6m

Resolución:

Nivel avanzado

5. En una línea recta se toman los puntos consecutivos A, B, C y D, de modo que AB = 8cm, BC = 10 cm, CD = 3(AB) – BC. Calcula AD.

a) 30 cm
b) 31 cm
c) 32 cm
d) 33 cm
e) 34 cm

Resolución:

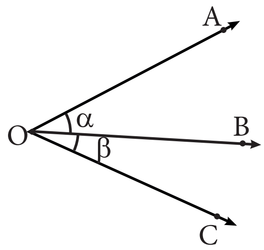
TEMA 02

ÁNGULOS I: CLASIFICACIÓN POR LA POSICIÓN DE SUS LADOS, BISECTRIZ

Los ángulos, según la posición de sus lados, se clasifican de la siguiente manera:

A. Ángulos adyacentes

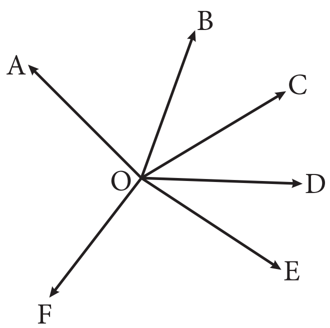
Es aquel par de ángulos que tienen el mismo vértice y un lado en común, asimismo, los lados no comunes en posiciones diferentes.



- Vértice: O
- Lado común: $\overrightarrow{OB}$
- Los ángulos AOB y BOC son adyacentes

B. Ángulos consecutivos

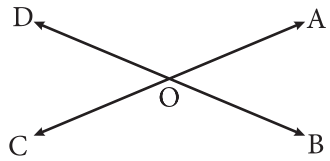
Es la unión sucesiva de varios ángulos adyacentes, siempre partiendo de un mismo vértice y tomados uno a continuación del otro.



Así, tenemos los ángulos consecutivos: AOB, BOC, COD, DOE y EOF.

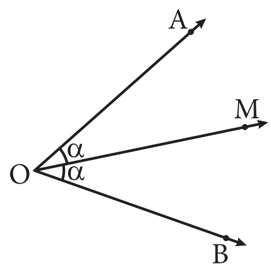
C. Ángulos opuestos por el vértice

Cuando dos rectas se intersectan se determinan 4 ángulos. Cada par de ellos que no son adyacentes se llaman ángulos opuestos por el vértice.



Los ángulos AOB y COD son opuestos por el vértice como también lo son los ángulos AOD y BOC.

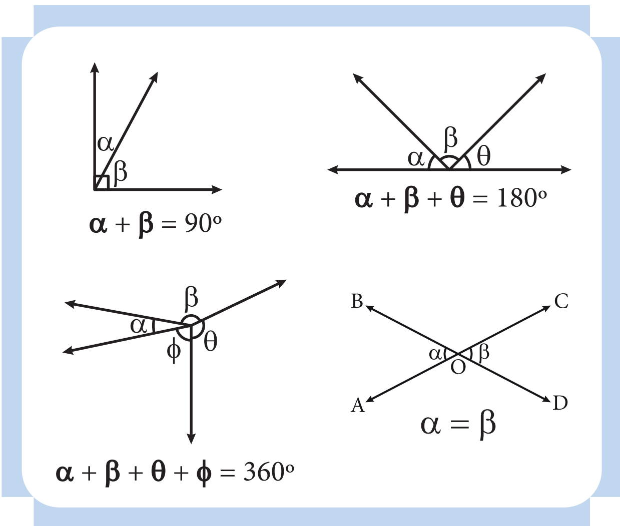
Bisectriz



Es el rayo que biseca al ángulo.

$\overrightarrow{OM}$ bisectriz del $\measuredangle$AOB.

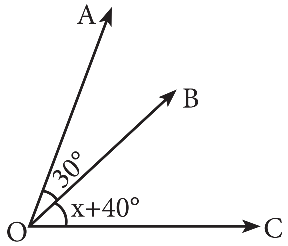
Se cumple: m$\measuredangle$AOM = m$\measuredangle$MOB = $\boldsymbol{\alpha}$



Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula «x», si: la m∡AOC = 80°.



Resolución:

Nos piden: x

Sabemos: m∡AOC = 80°; m∡AOB = 30°.

Luego: m∡AOC = m∡AOB + m∡BOC

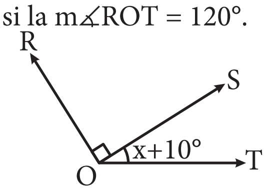
80° = 30° + x + 40°

80° = x + 70°

80° – 70° = x

∴ 10° = x

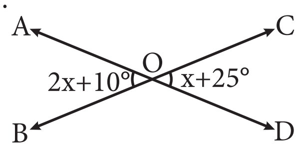
2. Calcula «x», si la m∡ROT = 120°.



Resolución:

Nivel intermedio

3. Calcula «x».



Resolución:

Se pide «x»: tenemos ángulos opuestos por el vértice, y de acuerdo a la propiedad, tienen la misma medida.

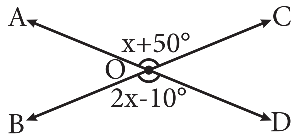
Entonces:

2x + 10° = x + 25°

2x – x = 25° – 10°

∴ x = 15°

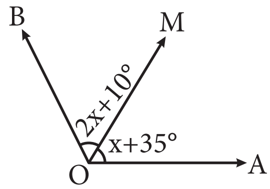
4. Calcula: «3x».



Resolución:

Nivel avanzado

5. Calcula «x», si: $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ∡AOB.



Resolución:

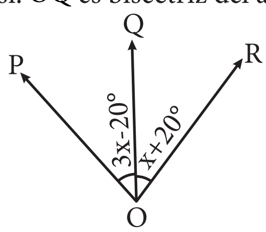
Nos piden «x» y sabemos que $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz.

m∡AOM = m∡BOM

2x + 10° = x + 35°

∴ x = 25°

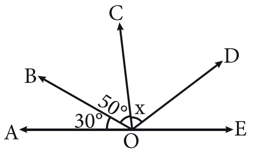
6. Calcula «x», si: $\overrightarrow{OQ}$ es bisectriz del ángulo POR.



Resolución:

Práctica

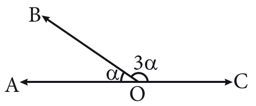
1. Calcula «x» si los ángulos AOB y EOD son congruentes.



a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 80°

Resolución:

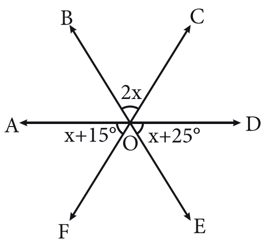
2. Calcula «α».



a) 25°
b) 30°
c) 35°
d) 40°
e) 45°

Resolución:

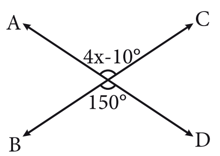
3. Calcula «x».



a) 25°
b) 30°
c) 35°
d) 40°
e) 45°

Resolución:

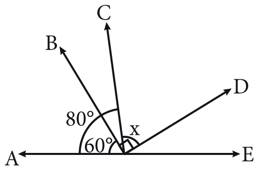
4. Calcula «x».



a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 80°

Resolución:

5. Calcula «x».



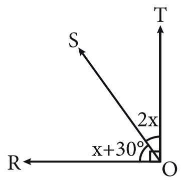
a) 50°
b) 60°
c) 70°
d) 80°
e) 90°

Resolución:

Autoevaluación

1. Calcula «x».

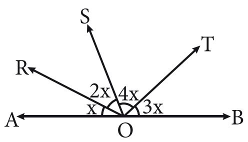
a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 50°



Resolución:

2. Calcula la medida del ángulo mayor.

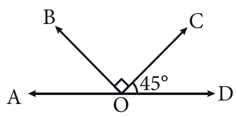
a) 24°
b) 36°
c) 18°
d) 72°
e) 86°



Resolución:

3. Calcula la medida del ángulo AOB.

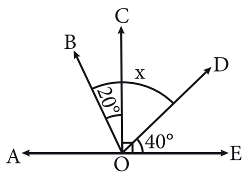
a) 30°
b) 35°
c) 40°
d) 45°
e) 50°



Resolución:

4. Calcula «x».

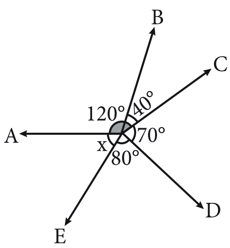
a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 70°



Resolución:

5. Calcula «x».

a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 70°



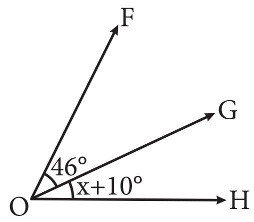
Resolución:

Tarea

Nivel básico

1. Calcula «x» si la m∠FOH = 76°.

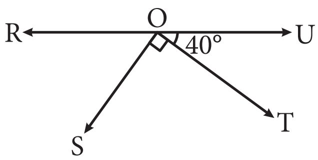
a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 50°



Resolución:

2. Calcula m∠ROS.

a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 50°

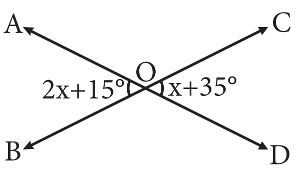


Resolución:

Nivel intermedio

3. Calcula «x» a partir del gráfico:

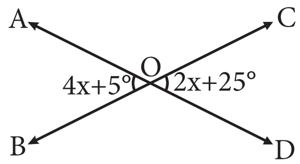
a) 20°
b) 30°
c) 40°
d) 50°
e) 60°



Resolución:

4. Calcula «x» a partir del gráfico:

a) 7°
b) 8°
c) 9°
d) 10°
e) 11°

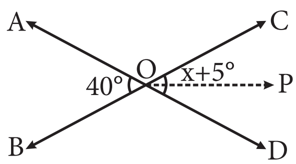


Resolución:

Nivel avanzado

5. Calcula «x» si $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del ángulo COD.

a) 5°
b) 10°
c) 15°
d) 20°
e) 25°



Resolución:

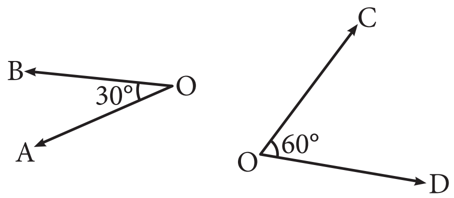
TEMA 03

ÁNGULOS II: CLASIFICACIÓN SEGÚN SU SUMA

Los ángulos se clasifican de la siguiente manera:

A. Ángulos complementarios

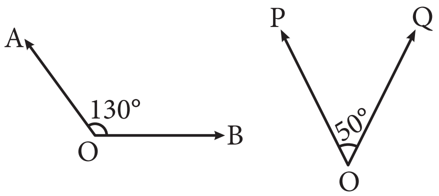
Es aquel par de ángulos cuyas medidas suman 90°.



Veamos un ejemplo:
Si te doy un ángulo de 37°, ¿cuál es su ángulo complementario o complemento?
Es lo que le falta para sumar 90°, entonces será 53°.

B. Ángulos suplementarios

Es aquel par de ángulos cuyas medidas suman 180°.



Veamos un ejemplo:
Si te menciono al ángulo de medida 120°, ¿cuál es su ángulo suplementario o suplemento? Es lo que le falta para sumar 180°, entonces será 60°.
¡Muy importante!

- Complemento C_α
  $C_\alpha = 90° - \alpha$
  Observación: $CC_\alpha = \alpha$

- Suplemento $S\alpha$
  $S_\alpha = 180° - \alpha$
  Observación: $SS_\alpha = \alpha$

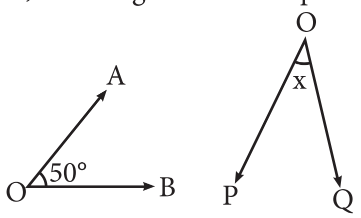
Recuerda

- No existe el complemento de un ángulo cuya medida sea negativa.
- No existe el complemento de un ángulo cuya medida sea mayor a 90°.
- No existe el suplemento de un ángulo cuya medida sea negativa.
- No existe el suplemento de un ángulo cuya medida sea mayor a 180°.

Trabajando en clase

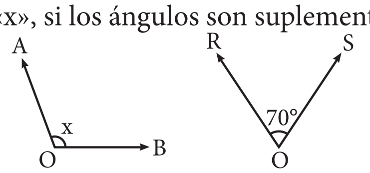
Nivel básico

1. Calcula «x», si los ángulos son complementarios.



Resolución:
Piden «x» y se sabe que los ángulos son complementarios:
$x + 50° = 90°$
$\therefore x = 40°$

2. Calcula «x», si los ángulos son suplementarios.



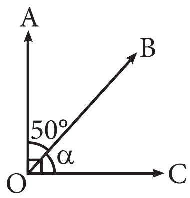
Resolución:

3. Calcula el complemento de la tercera parte de 210°.

Resolución:

Nivel intermedio

4. Calcula: C_{α}



Resolución:

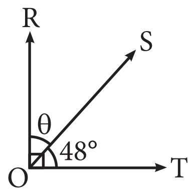
Nos piden: C_{α} Se sabe que: $\alpha + 50° = 90°$

$\Rightarrow \alpha = 40°$ Luego:

$C_{(40)} = 90° - 40°$

$\therefore C_{(40)} = 50°$

5. Calcula: C_{θ}



Resolución:

6. Calcula: $E = C_{40°} + S_{100°} - C_{85°}$

Resolución:

Nivel avanzado

7. Si el complemento más el suplemento de cierto ángulo es 190°, ¿cuál es la medida de dicho ángulo?

Resolución:

Sabemos: $C_x + S_x = 190°$

Pero: $C_x = 90° - x$

$S_x = 180° - x$

Luego:

$90° - x + 180° - x = 190°$

$270° - 2x = 190°$

$270° - 190° = 2x$

$80° = 2x$

$80° \div 2 = x$

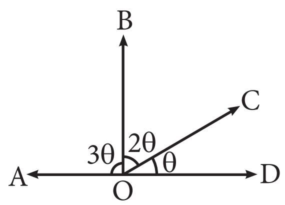
$40° = x$

$\therefore$ dicho ángulo es 40°

8. Si el complemento más el suplemento de cierto ángulo es 100°, ¿cuál es la medida de dicho ángulo?

Resolución:

9. Calcula: C_{θ}



Resolución:

Práctica

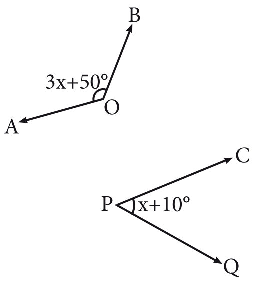
1. Calcula el suplemento de la cuarta parte de 360°.

a) 60°
b) 70°
c) 80°
d) 90°
e) 110°

Resolución:

2. Si los ángulos son suplementarios, calcula «x»

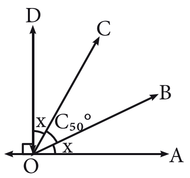
a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 50°



Resolución:

3. Calcula «x».

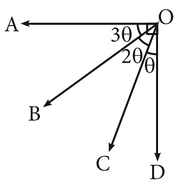
a) 25°
b) 30°
c) 35°
d) 40°
e) 45°



Resolución:

4. Calcula S_θ.

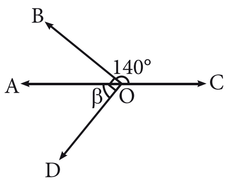
a) 195°
b) 185°
c) 175°
d) 170°
e) 165°



Resolución:

5. Calcula C_β.

a) 70°
b) 60°
c) 50°
d) 40°
e) 30°



Resolución:

Autoevaluación

1. Si: C_θ = complemento de θ

S_θ = suplemento de θ

Reduce: $E = CCSSCC_{(20)}$

a) 20°
b) 30°
c) 50°
d) 60°
e) 70°

Resolución:

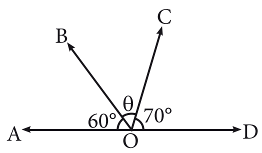
2. Calcula: $R = CC_{30°} + S_{100°} - CCC_{70°}$

a) 50°
b) 60°
c) 70°
d) 80°
e) 90°

Resolución:

3. Calcula S_θ

a) 100°
b) 110°
c) 120°
d) 130°
e) 140°



Resolución:

4. ¿A qué ángulo se debe restar su suplemento para obtener 40°?

a) 80°
b) 90°
c) 100°
d) 110°
e) 120°

Resolución:

5. Si el suplemento más el complemento de «a» es 150°, calcula «a».

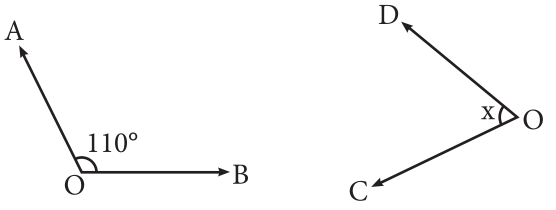
a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 80°

Resolución:

Tarea

Nivel básico

1. Calcula «x» si los ángulos son suplementarios.



a) 50°
b) 60°
c) 70°
d) 80°
e) 90°

Resolución:

2. Completa las siguientes tablas:

Medida del ángulo	Complemento del ángulo
12°	
45°	
78°	
	25°
	60°
27°	
	16°

Medida del ángulo	Suplemento del ángulo
13°	
62°	
	145°
123°	
	106°
	143°
155°	

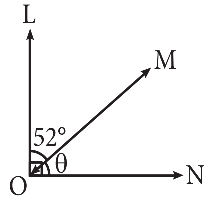
Nivel intermedio

3. Se tienen dos ángulos suplementarios; si uno de ellos mide 135°, ¿cuánto mide el otro ángulo?

a) 40°
b) 45°
c) 50°
d) 55°
e) 60°

Resolución:

4. Calcula $S(C_\theta)$.



a) 128°
b) 33°
c) 35°
d) 38°
e) 41°

Resolución:

Nivel avanzado

5. Si el complemento más el suplemento de cierto ángulo es 160°, ¿cuál es la medida de dicho ángulo?

a) 55° b) 56° c) 57° d) 58° e) 59°

Resolución:

6. Si el complemento más el suplemento de cierto ángulo es 120°, ¿cuál es la medida de dicho ángulo?

a) 74° b) 75° c) 76° d) 77° e) 78°

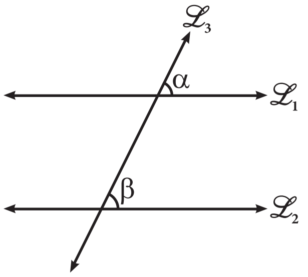
Resolución:

TEMA 04

ÁNGULOS ENTRE RECTAS PARALELAS Y UNA SECANTE

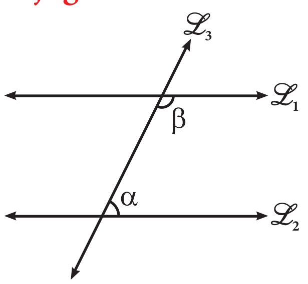
Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

A. Ángulos correspondientes



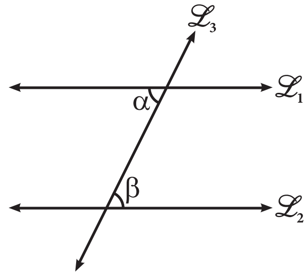
$\boxed{\alpha = \beta}$

B. Ángulos conjugados internos



$\boxed{\alpha + \beta = 180^\circ}$

C. Ángulos alternos internos

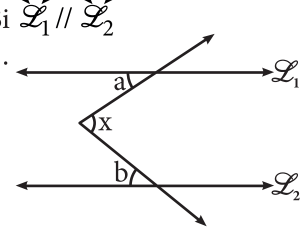


$\boxed{\alpha = \beta}$

Propiedades

Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

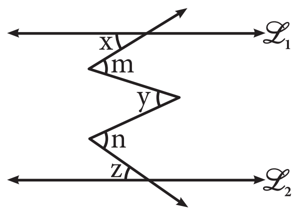
1.



Se cumple:

$\boxed{x = a + b}$

2.



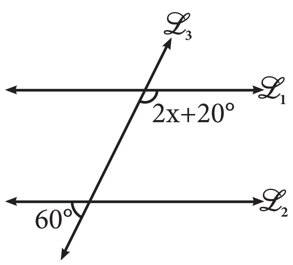
Se cumple:

$\boxed{m + n = x + y + z}$

Trabajando en clase

Nivel básico

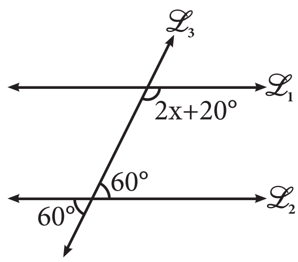
1. Calcula «x», si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.



Resolución:

Nos piden: x

Por ángulos opuestos por el vértice: trasladamos 60°.



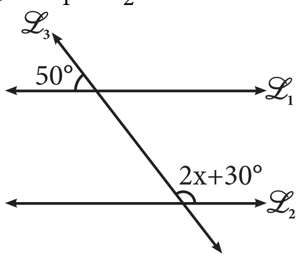
Luego, por ángulos conjugados:

$2x + 20° + 60° = 180°$

$2x = 100°$

$\therefore\ x = 50°$

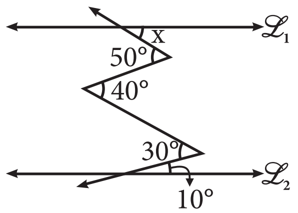
2. Calcula «x», si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.



Resolución:

Nivel intermedio

3. Calcula «x», si: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.



Resolución:

Nos piden: x

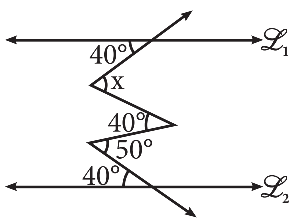
Por la propiedad:

$x + 40° + 10° = 50° + 30°$

$x + 50° = 80°$

$x = 30°$

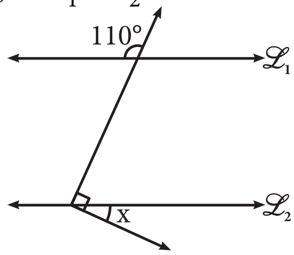
4. Calcula «x», si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.



Resolución:

Nivel avanzado

5. Calcula «x», si: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

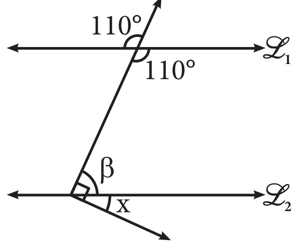


Resolución:

Nos piden: x

Por propiedad: $110° + \boldsymbol{\beta} = 180°$

$\boldsymbol{\beta} = 70°$

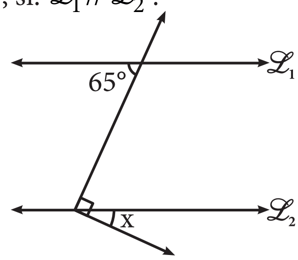


Luego: $x + \boldsymbol{\beta} = 90°$

$x + 70° = 90$

$\therefore\ x = 20°$

6. Calcula «x», si: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

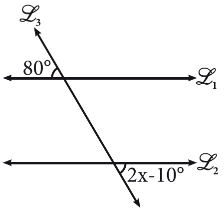


Resolución:

Práctica

1. Calcula «x» si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

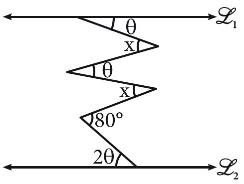
a) 30°
b) 35°
c) 40°
d) 45°
e) 50°



Resolución:

2. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, calcula «x».

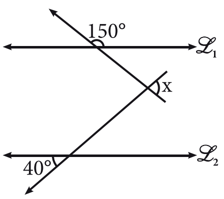
a) 20°
b) 30°
c) 40°
d) 50°
e) 60°



Resolución:

3. Calcula «x» si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

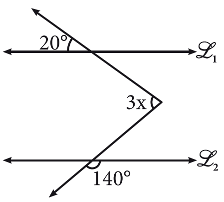
a) 60°
b) 70°
c) 80°
d) 90°
e) 100°



Resolución:

4. Calcula «x» si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

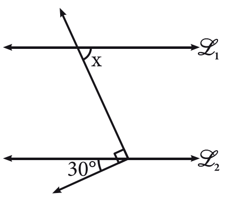
a) 20°
b) 30°
c) 35°
d) 40°
e) 45°



Resolución:

5. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, calcula «x».

a) 50°
b) 60°
c) 70°
d) 80°
e) 90°

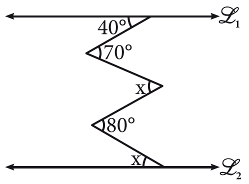


Resolución:

Autoevaluación

1. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, calcula «x».

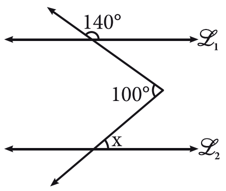
a) 35°
b) 40°
c) 45°
d) 50°
e) 55°



Resolución:

2. Calcula «x» si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

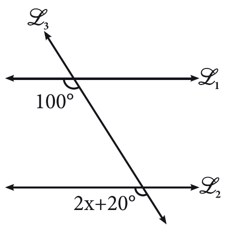
a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 70°



Resolución:

3. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, calcula «x».

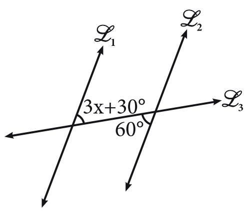
a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 50°



Resolución:

4. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, calcula «x».

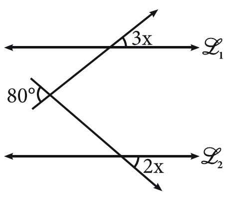
a) 5°
b) 10°
c) 15°
d) 20°
e) 25°



Resolución:

5. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, calcula «x».

a) 16°
b) 18°
c) 20°
d) 22°
e) 25°



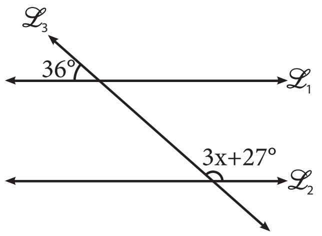
Resolución:

Tarea

Nivel básico

1. Calcula «x» si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

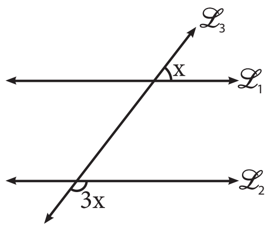
a) 37°
b) 38°
c) 39°
d) 40°
e) 41°



Resolución:

2. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, calcula «x».

a) 36°
b) 39°
c) 42°
d) 45°
e) 48°

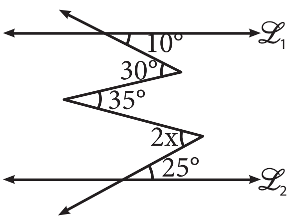


Resolución:

Nivel intermedio

3. Calcula «x» si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

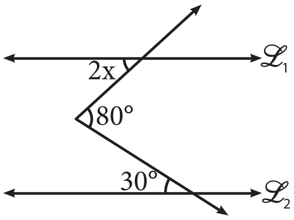
a) 5°
b) 10°
c) 20°
d) 30°
e) 35°



Resolución:

4. Calcula «x» si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

a) 19°
b) 21°
c) 23°
d) 25°
e) 27°

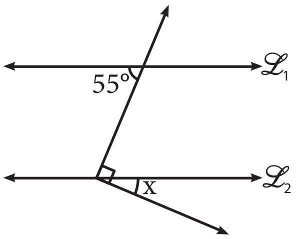


Resolución:

Nivel avanzado

5. Calcula «x» si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \parallel \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$.

a) 25°
b) 35°
c) 45°
d) 55°
e) 65°



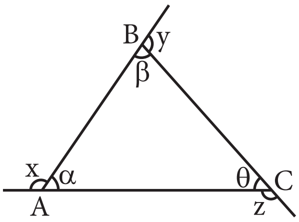
Resolución:

TEMA 05

TRIÁNGULOS I: PROPIEDADES FUNDAMENTALES

Un triángulo es la figura geométrica que se forma al unir tres puntos no colineales (vértices) mediante segmentos de recta (lados).

Elementos



- Vértices: A, B, C
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$
- Notación: ΔABC

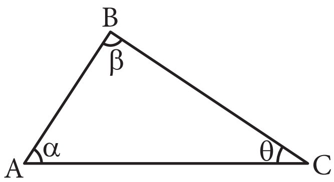
Se lee: triángulo de vértices A, B y C.

Ángulos determinados:

- Interiores: α, β, θ
- Exteriores: x, y, z

Propiedades fundamentales

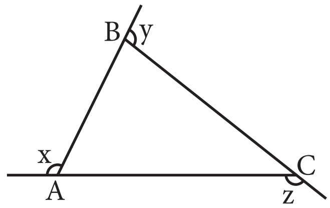
1. En todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos interiores es igual a 180°.



En el triángulo ABC

$$\boxed{\alpha + \beta + \theta = 180°}$$

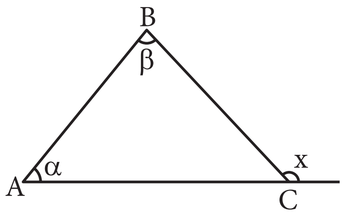
2. En todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos exteriores (uno por vértice) es igual a 360°.



En el triángulo ABC

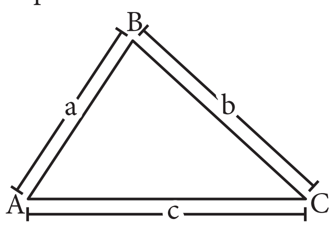
$$\boxed{x + y + z = 360°}$$

3. En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de dos ángulos internos no adyacentes a él.



$$\boxed{x = \alpha + \beta}$$

Longitud del perímetro del ΔABC

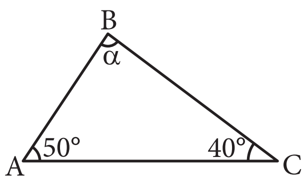


$$\boxed{2p = a + b + c}$$

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula «α».



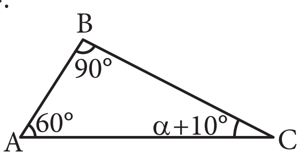
Resolución:

Nos piden: α

Ahora, en el triángulo ABC:

$$\alpha + 40° + 50° = 180°$$
$$\alpha + 90° = 180°$$
$$x = 180° - 90°$$
$$\therefore x = 90°$$

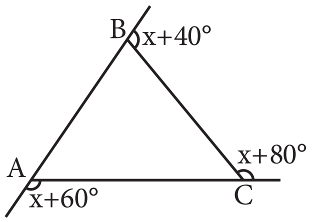
2. Calcula «α».



Resolución:

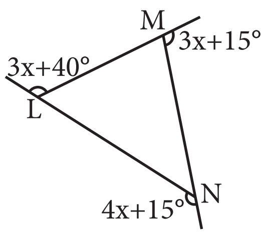
Nivel intermedio

3. Calcula «x».



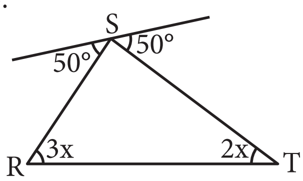
Resolución:
Se pide: x
Por propiedad de la suma de los ángulos exteriores:
$x + 60° + x + 80° + x + 40° = 360°$
$3x + 180° = 360°$
$3x = 180°$
$x = 60°$

4. Calcula «x».



Resolución:

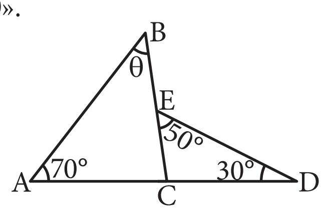
5. Calcula «x».



Resolución:

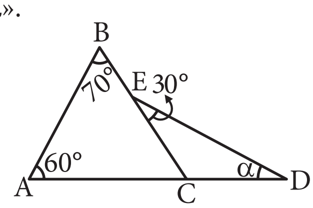
Nivel avanzado

6. Calcula «θ».



Resolución:
Se pide: θ por ángulo exterior:
$m\measuredangle ACB = 50° + 30°$
$m\measuredangle ACB = 80°$
Suma de ángulos internos en el ΔABC:
$70° + \theta + 80° = 180°$
$150° + \theta = 180°$
$\theta = 30°$

7. Calcula «α».

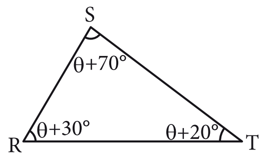


Resolución:

Práctica

1. En el triángulo RST, calcula «θ».

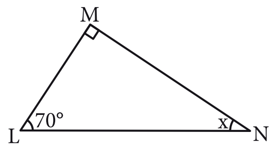
a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 50°



Resolución:

2. Calcula «x».

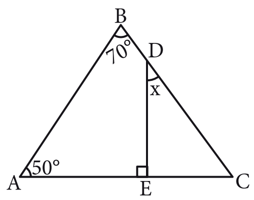
a) 3°
b) 5°
c) 10°
d) 15°
e) 20°



Resolución:

3. Calcula el valor de «x».

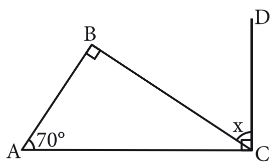
a) 20°
b) 30°
c) 40°
d) 50°
e) 60°



Resolución:

4. Calcula «x».

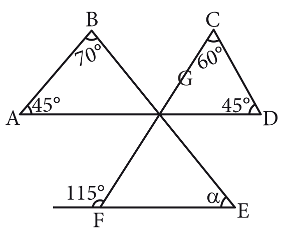
a) 61°
b) 64°
c) 67°
d) 70°
e) 73°



Resolución:

5. Calcula el valor de «α».

a) 73°
b) 77°
c) 75°
d) 79°
e) 81°

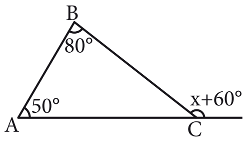


Resolución:

Autoevaluación

1. Calcula «x».

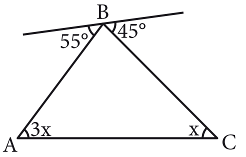
a) 56°
b) 63°
c) 70°
d) 73°
e) 76°



Resolución:

2. Calcula «x».

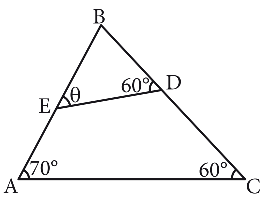
a) 10°
b) 15°
c) 20°
d) 25°
e) 30°



Resolución:

3. Calcula el valor de «θ».

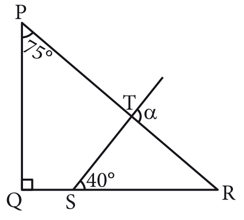
a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 70°



Resolución:

4. Calcula «α».

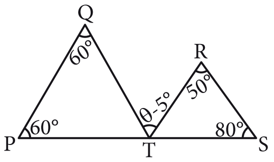
a) 35°
b) 45°
c) 55°
d) 65°
e) 75°



Resolución:

5. Calcula el valor de «2θ».

a) 150°
b) 151°
c) 152°
d) 153°
e) 154°



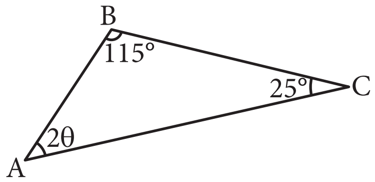
Resolución:

Tarea

Nivel básico

1. En el triángulo ABC, calcula «θ».

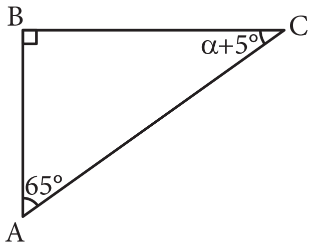
a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 50°



Resolución:

2. Calcula «α».

a) 20°
b) 23°
c) 26°
d) 29°
e) 32°

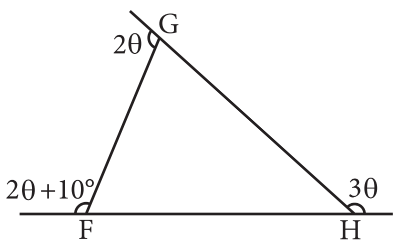


Resolución:

Nivel intermedio

3. Calcula «θ».

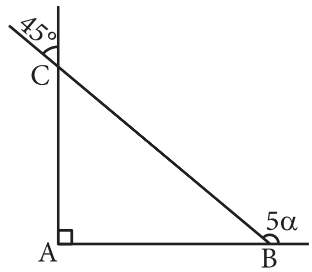
a) 20°
b) 30°
c) 40°
d) 50°
e) 60°



Resolución:

4. Calcula «α».

a) 23°
b) 25°
c) 27°
d) 29°
e) 31°

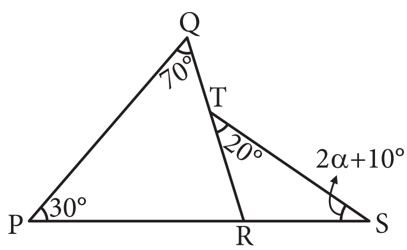


Resolución:

Nivel avanzado

5. Calcula «α».

a) 25°
b) 26°
c) 27°
d) 28°
e) 29°



Resolución:

TEMA 06

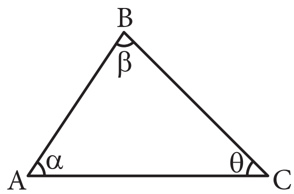
TRIÁNGULOS II: CLASIFICACIÓN SEGÚN LA MEDIDA DE SUS ÁNGULOS Y SEGÚN LA LONGITUD DE SUS LADOS

Los triángulos se clasifican de acuerdo con las medidas de los ángulos interiores y las longitudes de sus lados.

A. Según la medida de sus ángulos interiores

1. Triángulo acutángulo

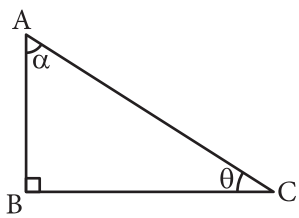
   Las medidas de sus ángulos interiores son menores de 90°.



Si α, β y θ son menores de 90°, y mayores que 0° entonces el triángulo ABC es acutángulo.

2. Triángulo rectángulo

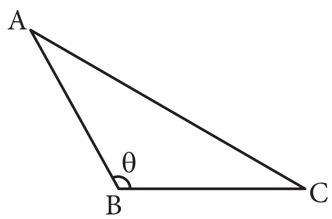
   La medida de uno de sus ángulos es 90°.



Si m∡ABC = 90°, entonces el triángulo ABC es un triángulo rectángulo recto en B.

3. Triángulo obtusángulo

   La medida de uno de sus ángulos es mayor de 90°.

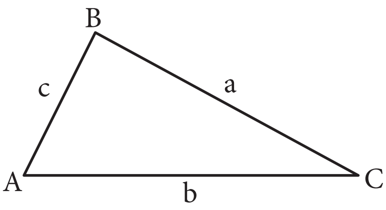


Si 90° > θ > 180°, entonces el triángulo ABC es obtusángulo, obtuso en B.

B. Según la medida de sus lados

1. Triángulo escaleno

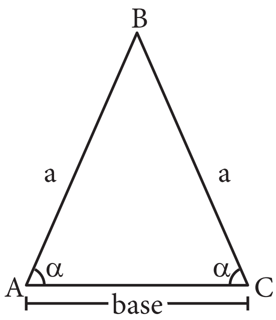
Sus lados son de diferente longitud.



$$a \neq b \neq c$$

2. Triángulo isósceles

Es aquel que tiene dos lados de igual longitud. Al lado diferente se le denomina base.

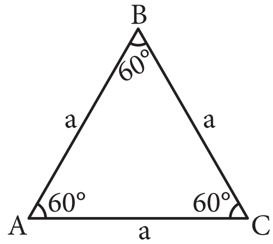


$$AB = BC = a$$

Base: $\overline{AC}$

3. Triángulo equilátero

Es aquel que tiene sus lados de igual longitud.



$$AB = BC = AC$$

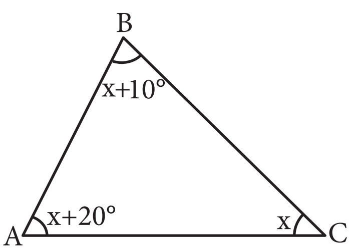
$$m\measuredangle A = m\measuredangle B = m\measuredangle C$$

¡Qué interesante a resolver más ejercicios!

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula «x» e indica qué tipo de triángulo es ABC, según la medida de sus ángulos.

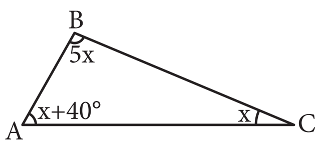


Resolución:

$$x + 10° + x + 20° + x = 180°$$
$$3x + 30° = 180°$$
$$3x = 150°$$
$$x = 50°$$

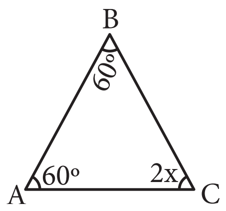
Reemplazando «x» en el triángulo, tenemos ángulos menores de 90°. Entonces, es un triángulo acutángulo.

2. Calcula «x» e indica qué tipo de triángulo es ABC, según la medida de sus ángulos.



Resolución:

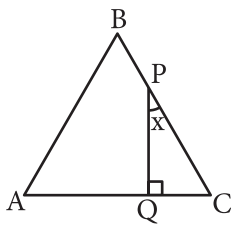
3. Calcula «x» y clasifícalo según la medida de sus ángulos.



Resolución:

Nivel intermedio

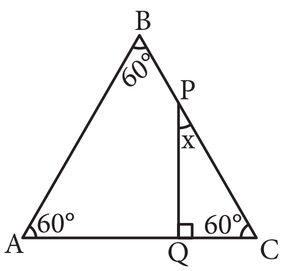
4. Calcula «x» si el triángulo ABC es equilátero.



Resolución:

Nos piden: x

Completando el gráfico:



Según el gráfico: ⊿PQC

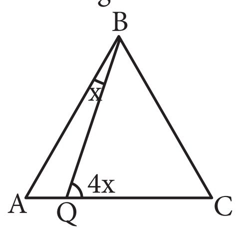
$$x + 60° + 90° = 180°$$

$$x + 150° = 180°$$

$$x = 180° - 150°$$

$$\therefore\ x = 30°$$

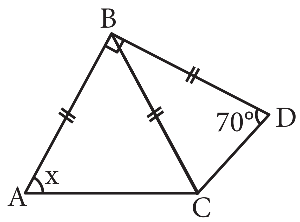
5. Calcula «x», si: el triángulo ABC es equilátero.



Resolución:

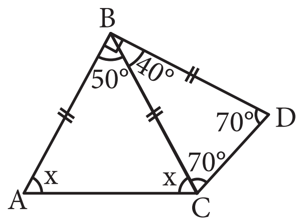
Nivel avanzado

6. Calcula «x».



Resolución:

Del gráfico:



Los triángulos ABC y CBD son isósceles.

En el triángulo ABC:

$$m\measuredangle CBD = 40°$$

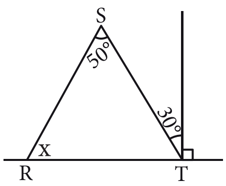
En el triángulo ABC:

$$2x + 50° = 180°$$

$$\therefore\ x = 65°$$

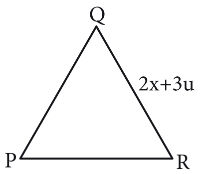
Práctica

1. Clasifica el ΔRST según la medida de sus ángulos interiores y calcula «x».
   a) Rectángulo
   b) Obtusángulo
   c) Acutángulo
   d) Isósceles
   e) Equilátero



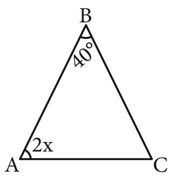
Resolución:

2. Calcula «x» si el perímetro del triángulo equilátero PQR es 21 u.
   a) 2 u
   b) 3 u
   c) 4 u
   d) 5 u
   e) 6 u



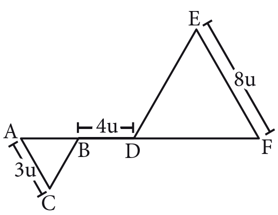
Resolución:

3. Calcula «x» si AB = BC.
   a) 30°
   b) 35°
   c) 40°
   d) 45°
   e) 50°



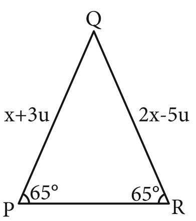
Resolución:

4. Si los triángulos ABC y FDE son equiláteros, calcula AF.
   a) 10 u
   b) 12 u
   c) 13 u
   d) 15 u
   e) 18 u



Resolución:

5. Calcula «x» si el triángulo PQR es isósceles.
   a) 6 u
   b) 7 u
   c) 8 u
   d) 9 u
   e) 10 u

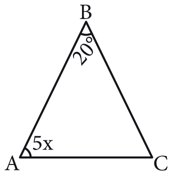


Resolución:

Autoevaluación

1. Calcula «x» si el triángulo ABC es isósceles y AB = BC.

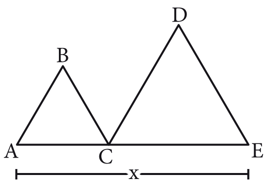
   a) 14°
   b) 15°
   c) 16°
   d) 17°
   e) 18°



Resolución:

2. Calcula «x» si los triángulos ABC y CDE son equiláteros y sus perímetros, 15 cm y 18 cm.

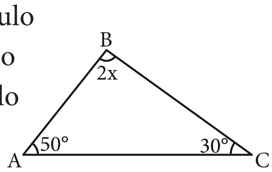
   a) 7 cm
   b) 8 cm
   c) 9 cm
   d) 10 cm
   e) 11 cm



Resolución:

3. Calcula «x» e indica qué tipo de triángulo es ABC, según sus ángulos.

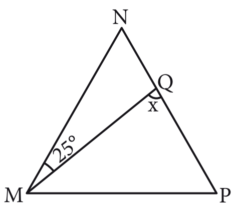
   a) Equilátero
   b) Escaleno
   c) Obtusángulo
   d) Rectángulo
   e) Acutángulo



Resolución:

4. Calcula «x» si el triángulo MNP es equilátero.

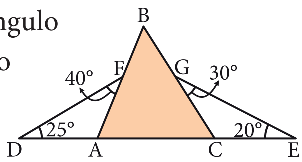
   a) 60°
   b) 65°
   c) 70°
   d) 80°
   e) 85°



Resolución:

5. Clasifica el ΔABC según la medida de sus ángulos interiores.

   a) Isósceles
   b) Acutángulo
   c) Equilátero
   d) Obtusángulo
   e) Escaleno

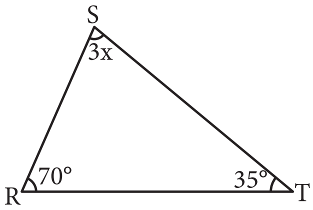


Resolución:

Tarea

Nivel básico

1. Indica qué tipo de triángulo es RST, según sus ángulos y calcula «x».

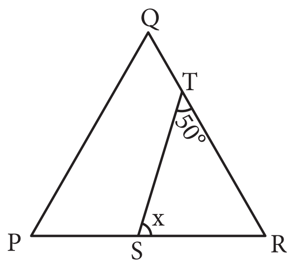


a) Equilátero, 35°
b) Rectángulo, 35°
c) Obtusángulo, 30°
d) Acutángulo, 25°
e) Isósceles, 25°

Resolución:

Nivel intermedio

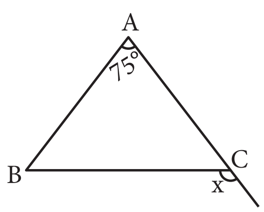
2. Calcula «x» si el triángulo PQR es equilátero.



a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 80°

Resolución:

3. Calcula «x» si el triángulo ABC es isósceles y AB = BC.

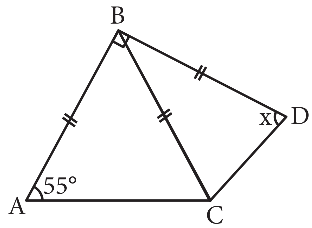


a) 102°
b) 105°
c) 110°
d) 115°
e) 120°

Resolución:

Nivel avanzado

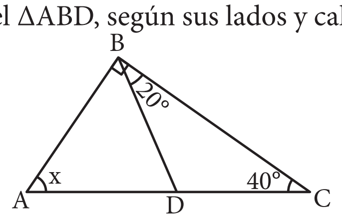
4. Calcula «x».



a) 60°
b) 70°
c) 80°
d) 90°
e) 100°

Resolución:

5. Clasifica el ΔABD, según sus lados y calcula «x».



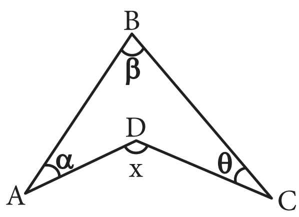
a) Equilátero, 50°
b) Obtusángulo, 60°
c) Rectángulo, 60°
d) Escaleno, 50°
e) Isósceles, 50°

Resolución:

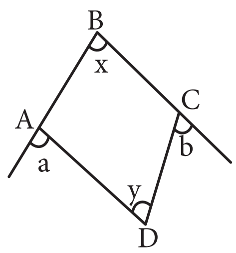
TEMA 07

TRIÁNGULOS III: PROPIEDADES AUXILIARES

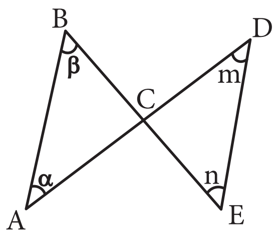
En la figura:



$x = \alpha + \beta + \theta$



$a + b = x + y$



$\alpha + \beta = m + n$

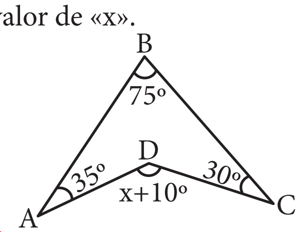
¿Sabías que?...

Los triángulos tienen propiedades auxiliares.

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula el valor de «x».



Resolución:

Nos piden «x».

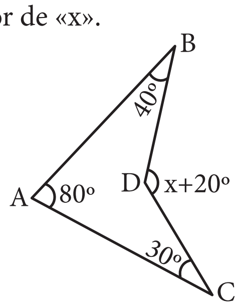
Según la figura, se cumple:

$x + 10º = 35º + 75º + 30º$

$x + 10º = 140º$

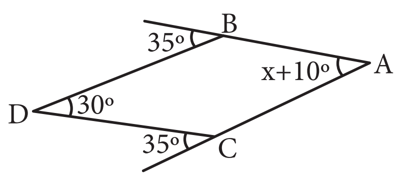
$\therefore\ x = 130º$

2. Calcula el valor de «x».



Resolución:

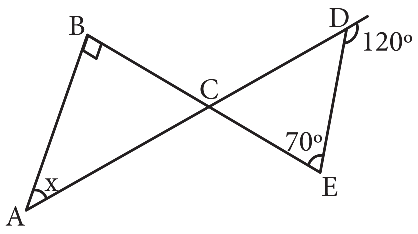
3. Calcula el valor de «x».



Resolución:

Nivel intermedio

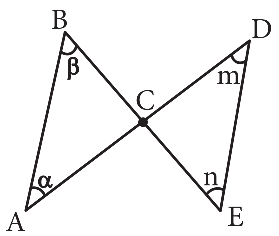
4. Calcula el valor de «x».



Resolución

Nos piden «x».

Aplicamos la propiedad:



$$\alpha + \beta = m + n$$

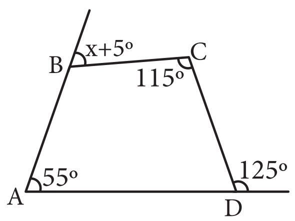
Según el gráfico, se cumple:

$90° + x = 60° + 70°$

$x = 130° - 90°$

$\therefore\ x = 40°$

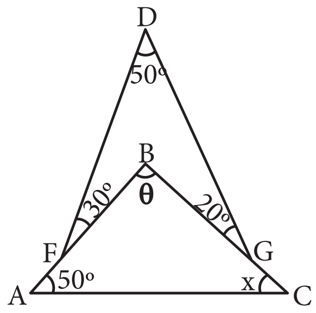
5. Calcula el valor de «x».



Resolución:

Nivel avanzado

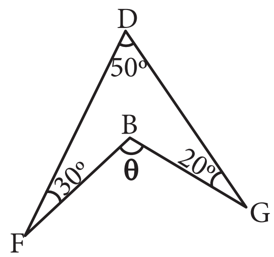
6. Calcula el valor de «x».



Resolución

Nos piden «x».

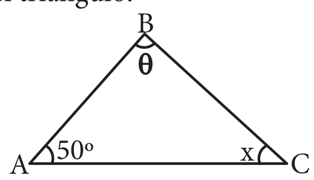
Del gráfico:



$\theta = 30° + 50° + 20°$

$\theta = 100°$

Luego, en el triángulo:



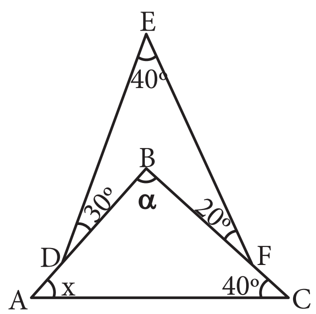
$x + \theta + 50° = 180°$

$x + 100° + 50° = 180°$

$x = 180° - 150°$

$\therefore\ x = 30°$

7. Calcula el valor de «x».

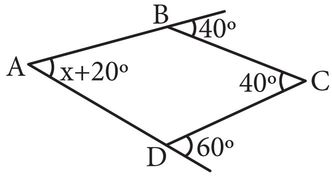


Resolución:

Práctica

1. Calcula el valor de «x».

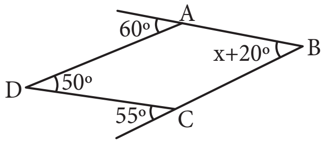
a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 80°



Resolución:

2. Calcula el valor de «x».

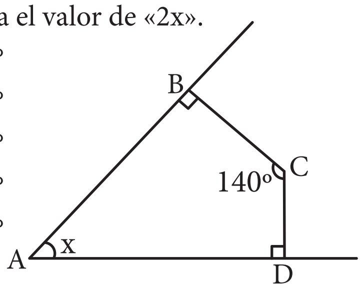
a) 35°
b) 40°
c) 45°
d) 50°
e) 55°



Resolución:

3. Calcula el valor de «2x».

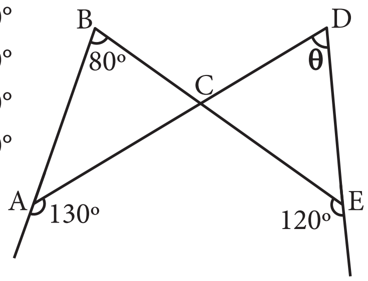
a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 80°



Resolución:

4. Calcula el valor de «θ».

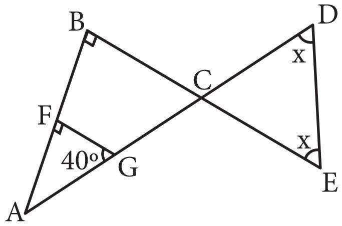
a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 80°



Resolución:

5. Calcula el valor de «x».

a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 70°

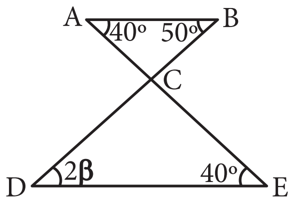


Resolución:

Autoevaluación

1. Calcula el valor de «β».

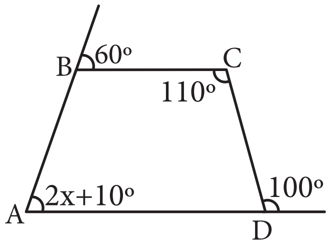
a) 20°
b) 25°
c) 40°
d) 50°
e) 60°



Resolución:

2. Calcula el valor de «x».

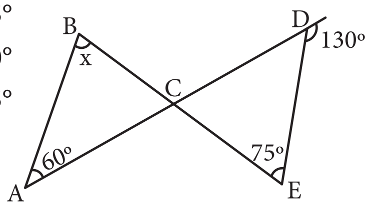
a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 35°
e) 40°



Resolución:

3. Calcula el valor de «x».

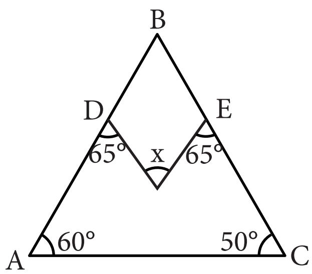
a) 55°
b) 60°
c) 65°
d) 70°
e) 75°



Resolución:

4. Calcula el valor de «x».

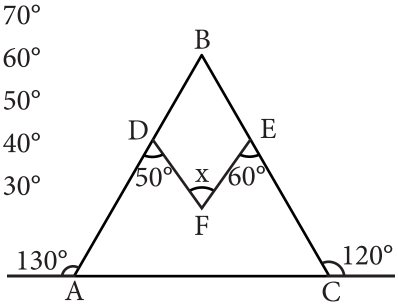
a) 40°
b) 50°
c) 80°
d) 70°
e) 60°



Resolución:

5. Calcula el valor de «x».

a) 70°
b) 60°
c) 50°
d) 40°
e) 30°



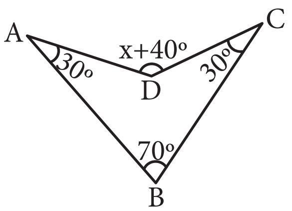
Resolución:

Tarea

Nivel básico

1. Calcula el valor de «x».

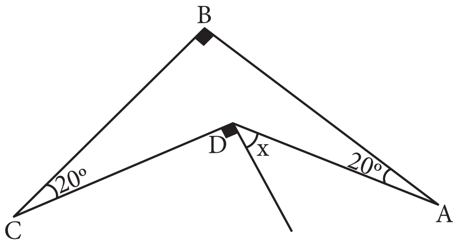
a) 80°
b) 90°
c) 120°
d) 130°
e) 140°



Resolución:

2. Calcula el valor de «x».

a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 50°

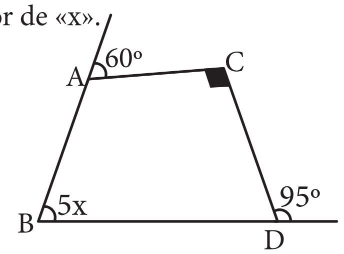


Resolución:

Nivel intermedio

3. Calcula el valor de «x».

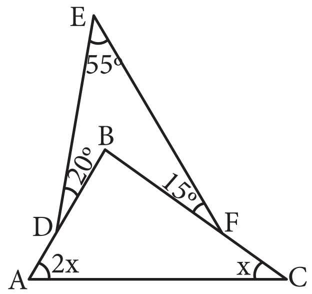
a) 13°
b) 15°
c) 18°
d) 19°
e) 20°



Resolución:

4. Calcula el valor de «x».

a) 10°
b) 15°
c) 20°
d) 25°
e) 30°

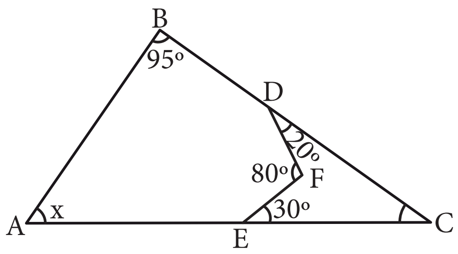


Resolución:

Nivel avanzado

5. Calcula el valor de «x».

a) 45°
b) 50°
c) 55°
d) 60°
e) 65°

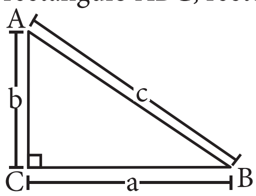


Resolución:

TEMA 08

TEOREMA DE PITÁGORAS Y TRIÁNGULOS PITAGÓRICOS

Sea el triángulo rectángulo ABC, recto en C.

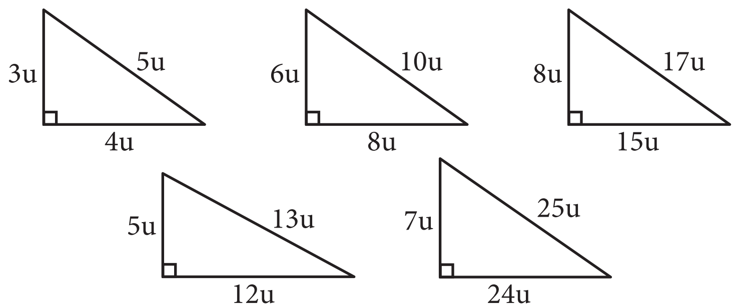


Catetos: $\overline{AC}$, $\overline{CB}$
Hipotenusa: AB

Teorema de Pitágoras

«La suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa».

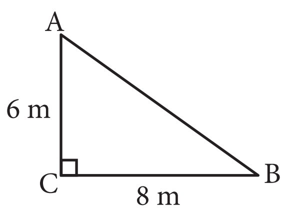
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula el valor de la hipotenusa.



Resolución:

Por teorema de Pitágoras tenemos:

$AB^2 = (6\ m)^2 + (8\ m)^2$

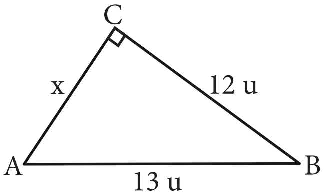
$AB^2 = 36\ m^2 + 64\ m^2$

$AB^2 = 100\ m^2$

$AB = \sqrt{100\ m^2}$

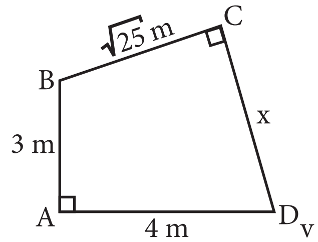
$\therefore AB = 10\ m$

2. Calcula el valor de «x».



Resolución:

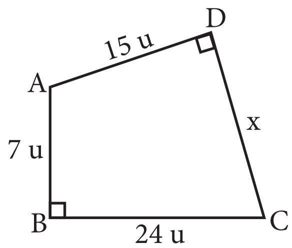
4. Calcula el valor de «x».



Resolución:

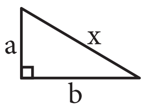
Nivel intermedio

3. Calcula el valor de «x».



Resolución

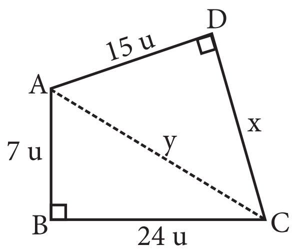
Recuerda:



$x^2 = a^2 + b^2$

Nos piden «x».

Se traza $\overline{AC}$.



Calculamos AC = y

$y^2 = 7^2 + 24^2$ $\quad y^2 = 625$

$y = 25$ u $\quad$ Luego calculamos «x»

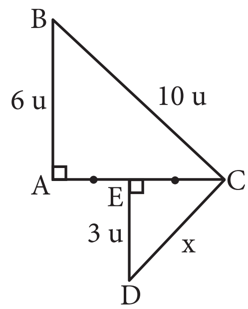
$x^2 + 15^2 = 25^2$ $\quad x^2 + 225 = 625$

$x^2 = 400$

$\therefore$ x = 20 u

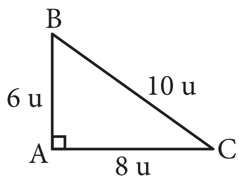
Nivel avanzado

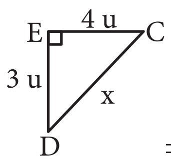
5. Calcula el valor de «x».



Resolución

Nos piden «x».

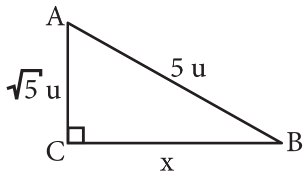




$\Rightarrow$ x = 5 u

Práctica

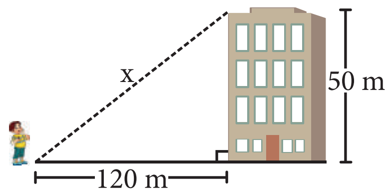
1. Calcula el valor de «x».



a) $\sqrt{15}$ u
b) $\sqrt{20}$ u
c) $\sqrt{21}$ u
d) $\sqrt{22}$ u
e) $\sqrt{23}$ u

Resolución:

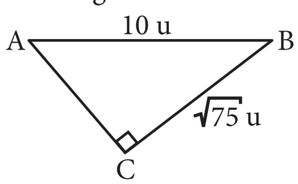
2. Calcula el valor de «x».



a) 110 m
b) 120 m
c) 130 m
d) 140 m
e) 150 m

Resolución:

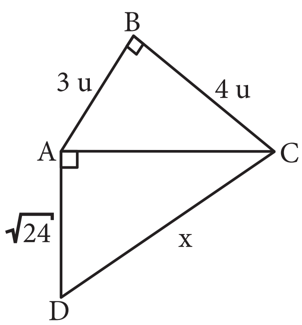
3. Calcula la longitud del cateto $\overline{AC}$.



a) $\sqrt{5}$ u
b) 5 u
c) 8 u
d) 10 u
e) 15 u

Resolución:

4. Calcula el valor de «x».

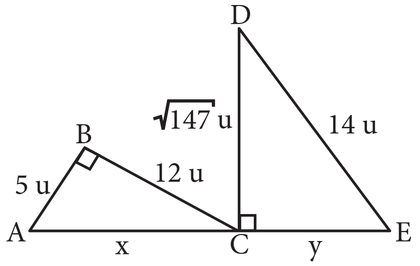


a) 6 u
b) 12 u
c) 7 u
d) 15 u
e) 8 u

Resolución:

Autoevaluación

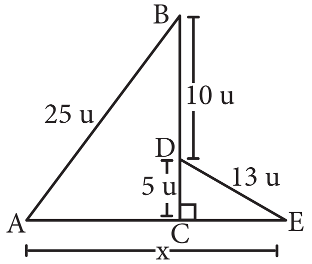
1. Calcula el valor de x + y.



a) 10 u
b) 15 u
c) 20 u
d) 25 u
e) 30 u

Resolución:

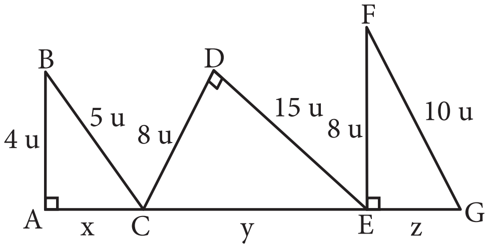
2. Calcula el valor de «x».



a) 12 u
b) 22 u
c) 24 u
d) 32 u
e) 36 u

Resolución:

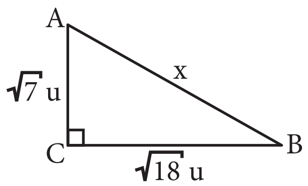
3. Calcula el valor de x + y + z.



a) 22 u
b) 32 u
c) 24 u
d) 25 u
e) 26 u

Resolución:

4. Calcula el valor de la hipotenusa.

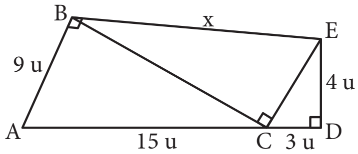


Resolución:

Tarea

Nivel básico

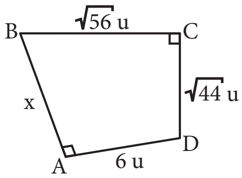
1. Calcula el valor de «x».



a) 12 u
b) 13 u
c) 14 u
d) 15 u
e) 16 u

Resolución:

2. Calcula el valor de «x».

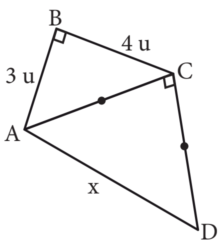


a) 7 u
b) 8 u
c) 9 u
d) 10 u
e) 11 u

Resolución:

Nivel intermedio

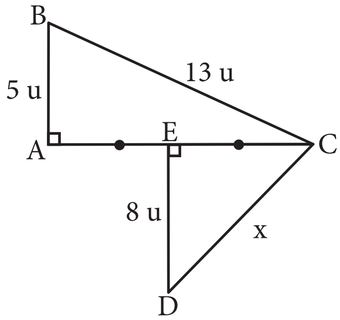
3. Calcula AD.



a) $2\sqrt{2}$ u
b) $3\sqrt{2}$ u
c) 13 u
d) 15 u
e) $5\sqrt{2}$ u

Resolución:

4. Calcula el valor de «x».



a) 6 u
b) 7 u
c) 8 u
d) 9 u
e) 10 u

Resolución:

Nivel avanzado

5. Los catetos de un triángulo rectángulo tienen de longitud $\sqrt{6}$ u y $\sqrt{10}$ u. Calcula la hipotenusa.

a) 2 u
b) 3 u
c) 4 u
d) 5 u
e) 6 u

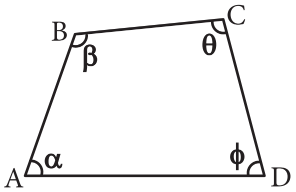
Resolución:

TEMA 09

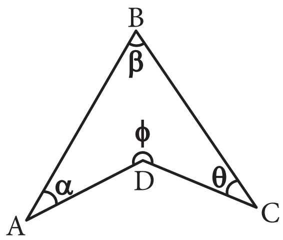
CUADRILÁTEROS I: PROPIEDADES FUNDAMENTALES Y PARALELOGRAMOS

Un cuadrilátero es un polígono que tiene 4 lados y 4 ángulos; y pueden ser:

Cuadrilátero convexo



Cuadrilátero no convexo



Notación:

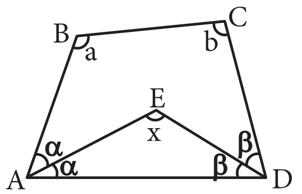
- ⏢ ABCD: Cuadrilátero ABCD.
- Vértices: A, B, C y D
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$

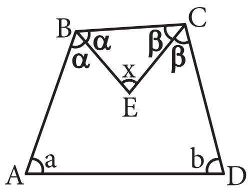
Se cumple:

$$\boxed{\alpha + \beta + \theta + \phi = 360^\circ}$$

Propiedad

En ambos casos «x» está determinado por bisectrices.



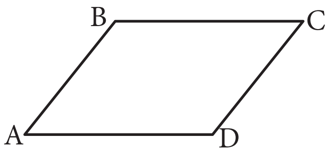


$$\boxed{x = \frac{a+b}{2}}$$

Paralelogramo

Es el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos entre sí.

En la figura:



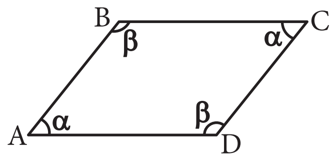
$\overline{AB}//\overline{CD}$ y $\overline{BC}//\overline{AD}$

AB = CD

BC = AD

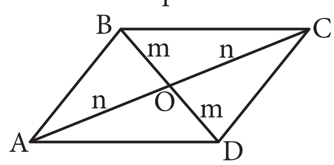
Propiedades

1.



$$\boxed{\alpha + \beta = 180^\circ}$$

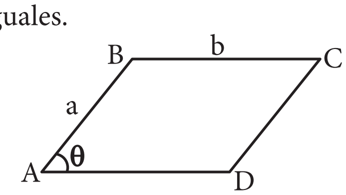
2. En todo paralelogramo las diagonales se bisecan, es decir, se cortan en su punto medio.



Clasificación de paralelogramos

A. Romboide

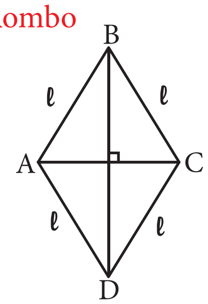
Paralelogramo cuyos lados contiguos son desiguales.



$a \neq b$

$\theta \neq 90^\circ$

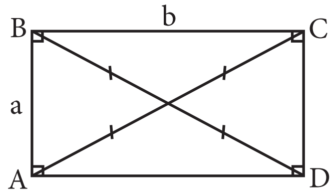
B. Rombo



AB = BC = CD = AD

C. Rectángulo

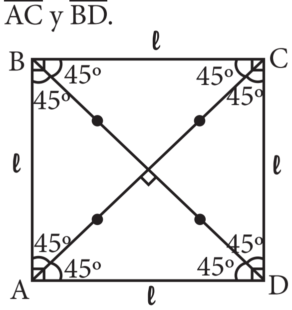
Las diagonales se bisecan.



$a \neq b$

D. Cuadrado

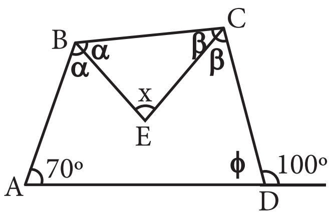
Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.



Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula el valor de «x».



Resolución

Nos piden «x».

$\phi = 80°$

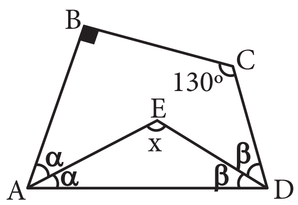
Por propiedad

$x = \dfrac{70° + 80°}{2}$

$x = \dfrac{150°}{2}$

$x = 75°$

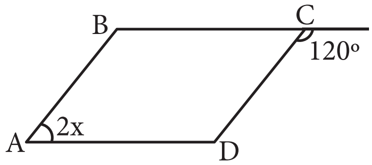
2. Calcula el valor de «$\dfrac{x}{2}$».



Resolución:

Nivel intermedio

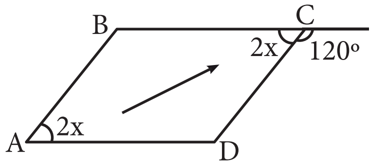
3. Calcula «x» si ABCD es un romboide.



Resolución

Nos piden «x».

Por propiedad: ángulos opuestos tienen igual medida.

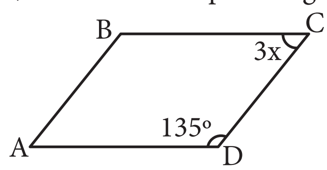


$2x + 120° = 180°$

$2x = 60°$

$\therefore\ x = 30°$

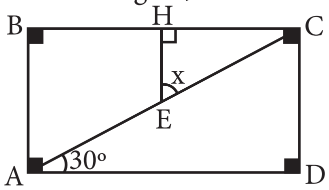
4. Calcula «x», si ABCD es un paralelogramo.



Resolución:

Nivel avanzado

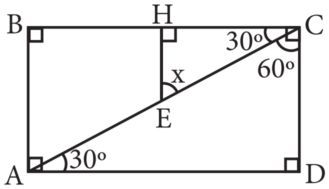
5. Si ABCD es un rectángulo, calcula «x».



Resolución

Nos piden «x».

Por tanto:



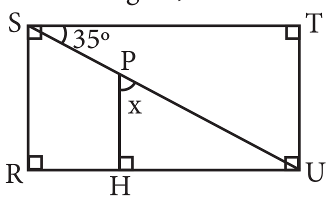
$\Rightarrow$ En el triángulo HCE se cumple:

$30° + 90° + x = 180°$

$x + 120° = 180°$

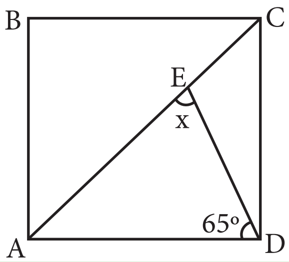
$\therefore\ x = 60°$

6. Si RSTU es un rectángulo, calcula «x».



Resolución:

7. Si ABCD es un cuadrado, calcula «x».

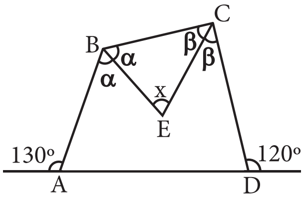


Resolución:

Notas importantes

Práctica

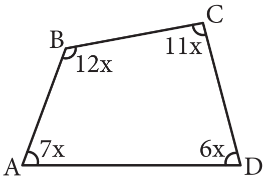
1. Calcula el valor de «x».



a) 55°
b) 60°
c) 65°
d) 70°
e) 75°

Resolución:

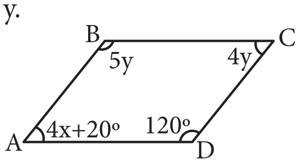
2. Calcula el valor de «2x».



a) 10°
b) 15°
c) 20°
d) 25°
e) 30°

Resolución:

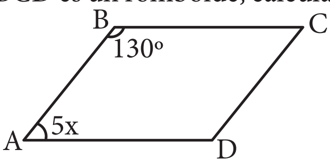
3. Si ABCD es un paralelogramo, calcula la x + y.



a) 30°
b) 53°
c) 45°
d) 43°
e) 36°

Resolución:

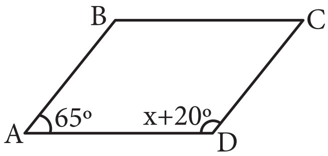
4. Si ABCD es un romboide, calcula «x».



a) 6°
b) 8°
c) 10°
d) 12°
e) 14°

Resolución:

5. Si ABCD es un paralelogramo, calcula «x».

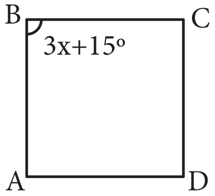


a) 85°
b) 95°
c) 105°
d) 115°
e) 125°

Resolución:

Autoevaluación

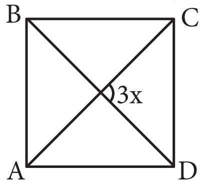
1. Si ABCD es un cuadrado, calcula «x».



a) 20°
b) 55°
c) 35°
d) 30°
e) 25°

Resolución:

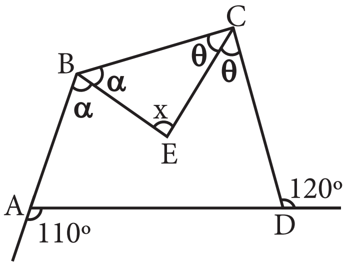
2. Si ABCD es un cuadrado, calcula «x».



a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 60°

Resolución:

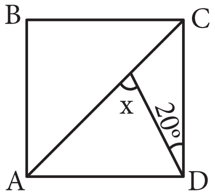
3. Calcula el valor de «x».



a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 40°
e) 65°

Resolución:

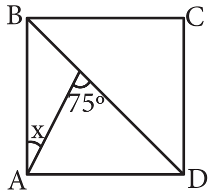
4. Si ABCD es un cuadrado, calcula «x».



a) 55°
b) 65°
c) 68°
d) 70°
e) 75°

Resolución:

5. Si ABCD es un cuadrado, calcula «x».



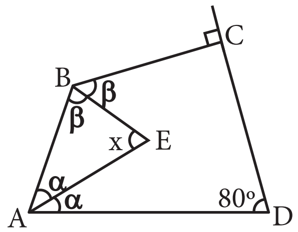
a) 20°
b) 30°
c) 40°
d) 15°
e) 60°

Resolución:

Tarea

Nivel básico

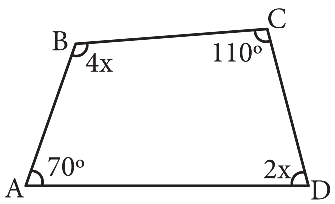
1. Calcula el valor de «x».



a) 65° b) 75° c) 85° d) 95° e) 105°

Resolución:

2. Calcula «x».

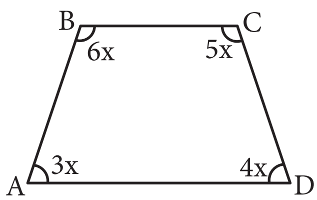


a) 30° b) 40° c) 50° d) 60° e) 70°

Resolución:

Nivel intermedio

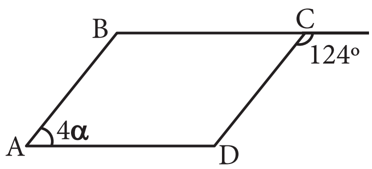
3. Calcula el valor de «x».



a) 10° b) 40° c) 20° d) 50° e) 30°

Resolución:

4. ABCD es un paralelogramo, calcula el valor de «α».

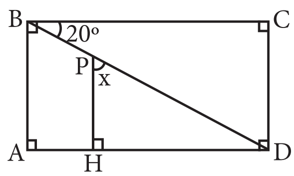


a) 10°
b) 12°
c) 13°
d) 14°
e) 16°

Resolución:

Nivel avanzado

5. Si ABCD es un rectángulo, calcula el valor de «x».



a) 40°
b) 50°
c) 60°
d) 70°
e) 80°

Resolución:

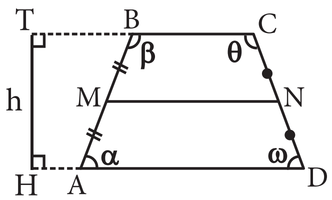
TEMA 10

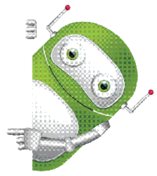
CUADRILÁTEROS II: TRAPECIO Y TRAPEZOIDE; SUS PROPIEDADES

A. Trapecio

Es aquel cuadrilátero que tiene solo un par de lados opuestos paralelos a los cuales se denomina bases.

En la figura: $\overline{BC}//\overline{AD}$, $\alpha + \beta = 180°$, $\theta + \omega = 180°$





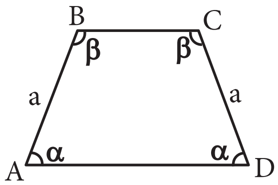
1. Elementos

- Bases: base mayor $\overline{AD}$, base menor $\overline{BC}$
- Laterales o lados no paralelos: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$
- Mediana: $\overline{MN}$
- Altura: $\overline{TH}$ (TH = h)

2. Clasificación

a. Trapecio isósceles

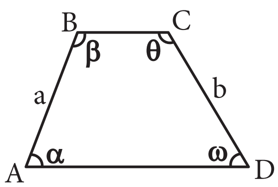
Es el trapecio que tiene sus lados laterales congruentes, es decir, de igual longitud.



$\boxed{\alpha + \beta = 180°}$

b. Trapecio escaleno

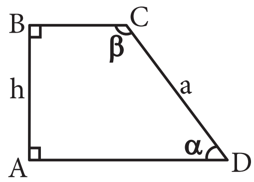
Es aquel trapecio cuyos lados laterales son de diferente longitud.



$\boxed{\alpha + \beta = 180° \wedge \theta + \omega = 180°}$

c. Trapecio rectángulo

Es un trapecio escaleno en el cual uno de los lados laterales es perpendicular a las bases.

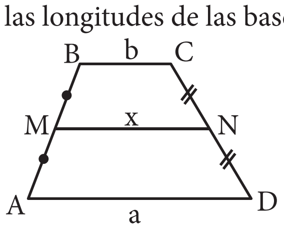


$\boxed{\alpha + \beta = 180°}$

3. Propiedades

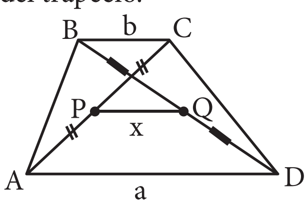
a. Cálculo de la mediana

Su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de las bases.



$$\boxed{x = \frac{a+b}{2}}$$

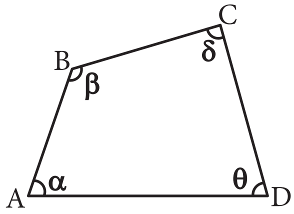
b. En todo trapecio, el segmento que resulta de unir los puntos medios de las diagonales es parte de la mediana, y su longitud se calcula como la semidiferencia de las longitudes de las bases del trapecio.



$$\boxed{x = \frac{a-b}{2}}$$

B. Trapezoide

Es el cuadrilátero que no tiene lados opuestos paralelos.

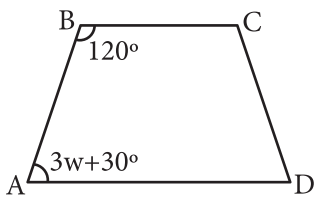


$\boxed{\alpha + \beta + \delta + \theta = 360°}$

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Si ABCD es un trapecio ($\overline{BC}//\overline{AD}$), calcula «w».



Resolución

Nos piden «w».

Por propiedad:

$3w + 30° + 120° = 180°$

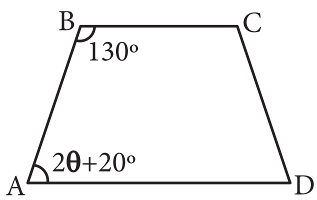
$3w + 150° = 180°$

$3w = 180° - 150°$

$w = \dfrac{30°}{3}$

$\therefore\ w = 10°$

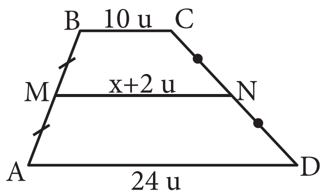
2. Del trapecio ABCD ($\overline{BC}//\overline{AD}$), calcula «θ».



Resolución:

Nivel intermedio

3. Si ABCD es un trapecio ($\overline{AD}//\overline{BC}$), calcula «x».



Resolución

Nos piden «x».

Por propiedad:

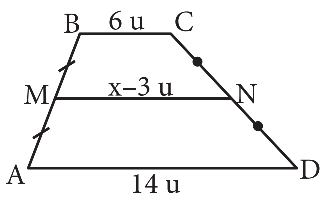
$x + 2\ u = \dfrac{24 + 10}{2}$

$x + 2\ u = 17\ u$

$x = 17\ u - 2\ u$

$x = 15\ u$

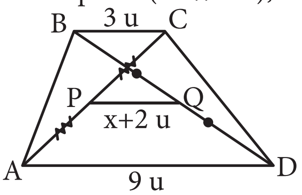
4. Si ABCD es un trapecio ($\overline{BC}//\overline{AD}$), calcula «x».



Resolución:

Nivel avanzado

5. Si ABCD es un trapecio ($\overline{BC}//\overline{AD}$), calcula «x».



Resolución

Nos piden «x».

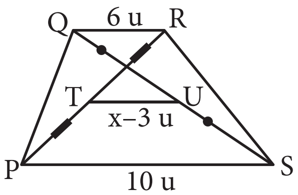
Por propiedad:

$$x + 2\ u = \frac{9 - 3}{2}$$

$x + 2\ u = 3\ u$

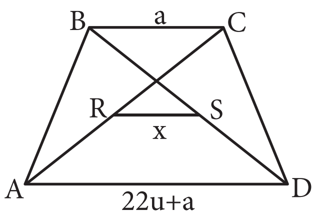
$\therefore\ x = 1\ u$

6. Si PQRS es un trapecio, ($\overline{QR}//\overline{PS}$), calcula «x».



Resolución:

7. Si ABCD es un trapecio ($\overline{AD}//\overline{BC}$), calcula «x».

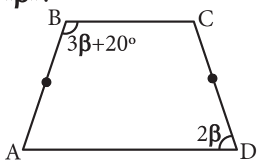


Resolución:

Notas importantes

Práctica

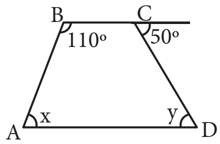
1. En el trapecio isósceles, ($\overline{BC}//\overline{AD}$), calcula «β».



a) 20°
b) 31°
c) 32
d) 33°
e) 34°

Resolución:

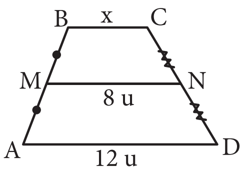
2. En el trapecio ABCD ($\overline{AD}//\overline{BC}$), calcula x + y.



a) 100°
b) 110°
c) 120°
d) 130°
e) 140°

Resolución:

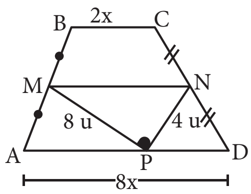
3. Si ABCD es un trapecio ($\overline{BC}//\overline{AD}$), calcula «x».



a) 2 u
b) 3 u
c) 4 u
d) 5 u
e) 6 u

Resolución:

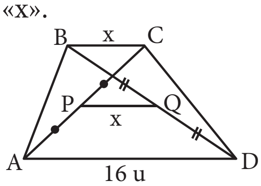
4. En el trapecio ABCD ($\overline{BC}//\overline{AD}$), calcula «x».



a) 2 u
b) 4 u
c) 6 u
d) 8 u
e) 10 u

Resolución:

5. Si ABCD es un trapecio ($\overline{BC}//\overline{AD}$), calcula «x».

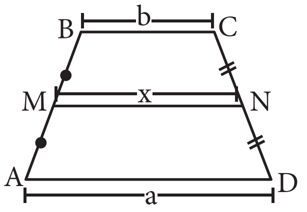


a) 3 u
b) 4 u
c) 5 u
d) 6 u
e) 8 u

Resolución:

Autoevaluación

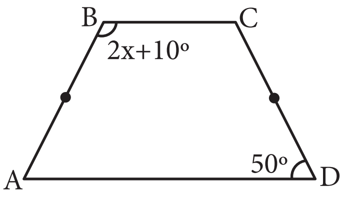
1. Si ABCD es un trapecio ($\overline{BC}//\overline{AD}$), calcula «x»; a + b = 30 m.



a) 10 m
b) 12 m
c) 13 m
d) 14 m
e) 15 m

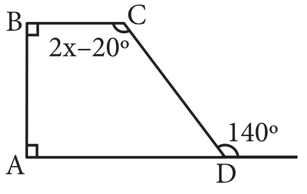
Resolución:

2. Si ABCD es un trapecio isósceles ($\overline{AD}//\overline{BC}$), calcula «x».



Resolución:

3. Si ABCD es un trapecio rectángulo ($\overline{AD}//\overline{BC}$), calcula «x».



Resolución:

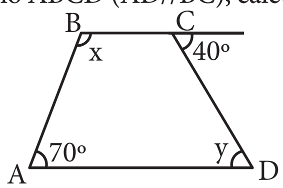
4. En un trapecio ABCD, $\overline{AD}//\overline{BC}$. Calcula la longitud de la mediana del trapecio si AD = 16 u y BC = 8 u.

Resolución:

Tarea

Nivel básico

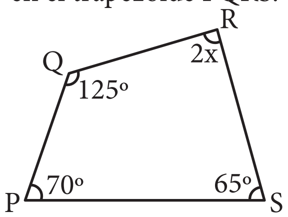
1. En el trapecio ABCD ($\overline{AD}//\overline{BC}$), calcula x + y.



a) 120° d) 150°
b) 130° e) 160°
c) 140°

Resolución:

2. Calcula «x» en el trapezoide PQRS.

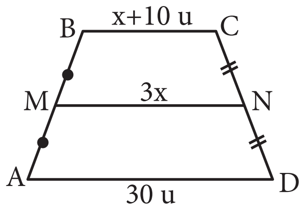


a) 40° b) 70° c) 50° d) 80° e) 60°

Resolución:

Nivel intermedio

3. Si ABCD es un trapecio ($\overline{AD}//\overline{BC}$), calcula la longitud de su mediana.



a) 5 u b) 8 u c) 6 u d) 9 u e) 10u

Resolución:

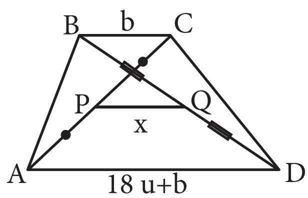
4. En un trapecio ABCD ($\overline{AD}//\overline{BC}$), calcula la longitud de la mediana. AD = 42 m y BC = 24 m.

a) 13° d) 43°
b) 23° e) 53°
c) 33°

Resolución:

Nivel avanzado

5. Si ABCD es un trapecio, calcula «x» ($\overline{BC}//\overline{AD}$).



a) 5 u d) 11 u
b) 7 u e) 13 u
c) 9 u

Resolución:

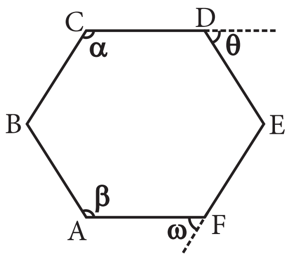
TEMA 11

POLÍGONO REGULAR, PERÍMETRO, LADOS Y ÁNGULOS EXTERIOR E INTERIOR

La siguiente figura muestra una representación real de los polígonos.

Piedra de los doce ángulos

Los polígonos son figuras geométricas cerradas que se forman al unir consecutivamente tres o más puntos no colineales mediante segmentos de recta, de tal modo que dicha figura limite una región del plano.



- Elementos
  Vértices: A, B, C, D, E y F
  Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$

- Medidas angulares asociadas:
  Interiores: α, ... β
  Exteriores: θ, ... ω

El polígono mostrado tiene 6 lados y 6 vértices.

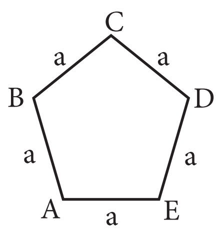
$\boxed{\text{N° de lados} = \text{N° de vértices}}$

Los polígonos, según el número de lados que tienen, reciben los siguientes nombres:

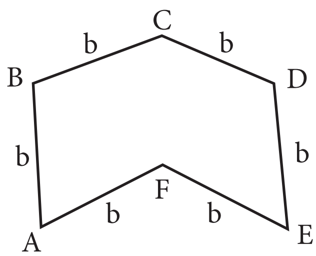
Número de lados	Nombre del polígono
3	triángulo
4	cuadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	nonágono
10	decágono
11	endecágono
12	dodecágono
15	pentadecágono
20	icoságono

A. Polígono equilátero

Es aquel polígono cuyos lados tienen la misma longitud.



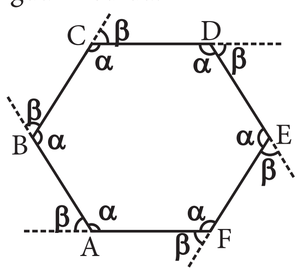
Polígono equilátero convexo



Polígono equilátero no convexo

B. Polígono equiángulo

Es aquel polígono cuyos ángulos interiores son de igual medida.



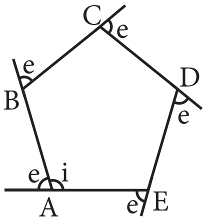
Sea «n» el número de lados

$$\boxed{\alpha = \frac{180°(n-2)}{n}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{360°}{n}}$$

C. Polígono regular

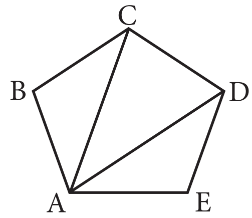
Es aquel polígono que es equilátero y equiángulo a la vez.



$$e = \frac{360°}{n}$$

$$e + i = 180°$$

Cálculo del número de diagonales



$\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ son diagonales

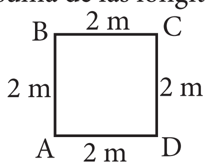
T_D: número total de diagonales

n: número de lados

$$T_D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Perímetro (2p)

Es la suma de las longitudes de los lados de un polígono.



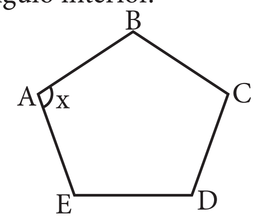
$2p = 2\ m + 2\ m + 2\ m + 2\ m$

$2p = 8\ m$

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Si el polígono mostrado es regular, calcula la medida de su ángulo interior.



Resolución

Nos piden «x». Dato n = 5

Como el polígono es regular, calculando el ángulo externo se puede determinar el ángulo interior.

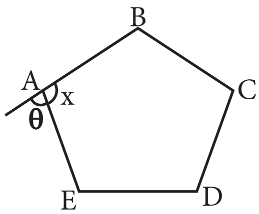
Por fórmula:

$\theta = \frac{360°}{5} \Rightarrow \theta = 72°$

Luego: $x + \theta = 180°$

$x + 72° = 180°$

$\therefore x = 108°$



2. Calcula el ángulo interior de un decágono regular.

Resolución:

Nivel intermedio

3. El ángulo exterior de un polígono regular es 40°, calcula su perímetro si su lado mide 8 u.

Resolución

Nos piden 2p = ?

Por dato: lado = 8 u

$\measuredangle exterior = \frac{360°}{n} = 40° \Rightarrow n = 9$

El polígono es un pentágono

$\Rightarrow 2p = 9(8\ u)$

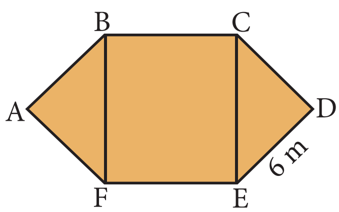
$\therefore 2p = 72\ u$

4. El ángulo exterior de un polígono regular es 18°, calcula su perímetro si su lado mide 12 u.

Resolución:

Nivel avanzado

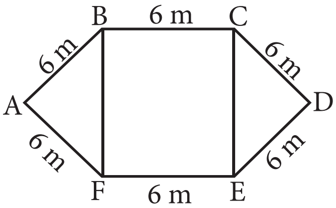
5. Si los polígonos mostrados son regulares, calcula el perímetro de la región poligonal sombreada.



Resolución

Nos piden: 2p

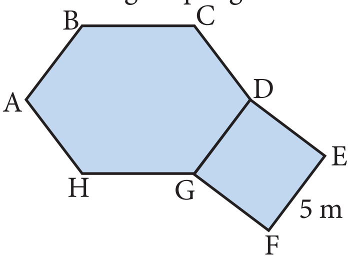
Polígonos regulares: longitudes de los lados iguales



Luego: 2p = 6(6 m)

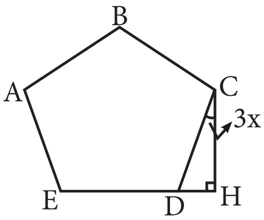
∴ 2p = 36 m

6. Si los polígonos mostrados son regulares, calcula el perímetro de la región poligonal sombreada.



Resolución:

7. Si ABCD es un pentágono regular, calcula el valor de «x».

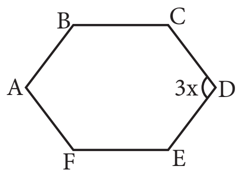


Resolución:

Notas importantes

Práctica

1. El polígono ABCDEF es regular, calcula «x».



a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 70°

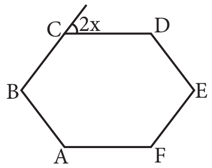
Resolución:

2. El perímetro de un dodecágono regular es 84 u. Calcula la medida de su lado.

a) 3 u
b) 4 u
c) 5 u
d) 6 u
e) 7 u

Resolución:

3. El polígono mostrado es regular. Calcula el valor de «x».



a) 20°
b) 30°
c) 40°
d) 50°
e) 60°

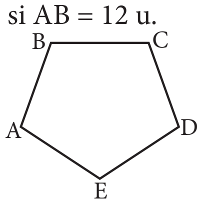
Resolución:

4. En un polígono convexo, el número de diagonales es igual a cuatro veces el número de vértices, ¿cuál es el número de lados?

a) 5
b) 12
c) 11
d) 10
e) 9

Resolución:

5. Calcula el perímetro del pentágono equilátero si AB = 12 u.

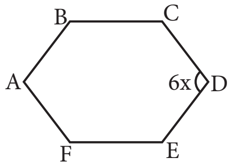


a) 40 u
b) 50 u
c) 60 u
d) 70 u
e) 80 u

Resolución:

Autoevaluación

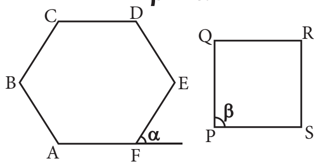
1. El polígono ABCDEF es regular, calcula «x».



a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 70°

Resolución:

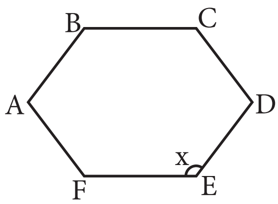
2. En los polígonos regulares ABCDEF, PQRS. Determina **β – α**.



a) 20°
b) 30°
c) 40°
d) 50°
e) 60°

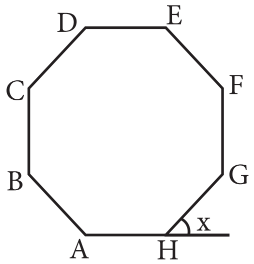
Resolución:

3. Si el polígono mostrado es regular, calcula la medida de su ángulo interior.



Resolución:

4. Si el polígono mostrado es regular, calcula el ángulo exterior.



Resolución:

5. Calcula el número total de diagonales de un pentadecágono.

Resolución:

Tarea

Nivel básico

1. El ángulo exterior de un polígono regular es 36º, calcula su perímetro si mide 8 m de lado.

a) 60 m
b) 70 m
c) 80 m
d) 90 m
e) 100 m

Resolución:

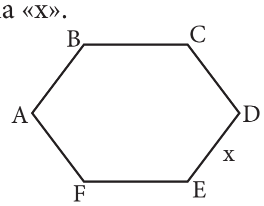
2. El ángulo exterior de un polígono regular es 90º; calcula su perímetro si su lado mide 5 m.

a) 10 m
b) 20 m
c) 30 m
d) 40 m
e) 50 m

Resolución:

Nivel intermedio

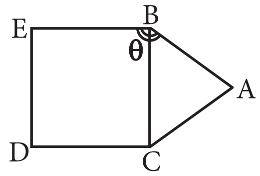
3. El polígono mostrado es regular, de perímetro 84 u. Calcula «x».



a) 12 u
b) 13 u
c) 14 u
d) 16 u
e) 18 u

Resolución:

4. En los polígonos regulares ABC y BCDE, calcula el valor de «θ».

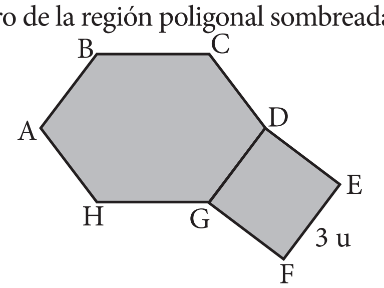


a) 120º
b) 130º
c) 140º
d) 150º
e) 160º

Resolución:

Nivel avanzado

5. Si los polígonos mostrados son regulares, calcula el perímetro de la región poligonal sombreada.



a) 18 u
b) 19 u
c) 20 u
d) 21 u
e) 24 u

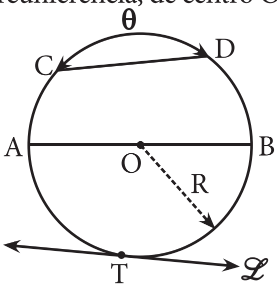
Resolución:

TEMA 12

CIRCUNFERENCIA I: PROPIEDADES FUNDAMENTALES, PONCELET Y PITOT

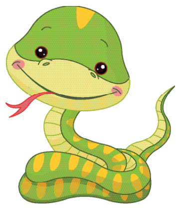
Definición

La circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidista de otro punto fijo del plano llamado centro.
Se observa la circunferencia, de centro O y radio R.



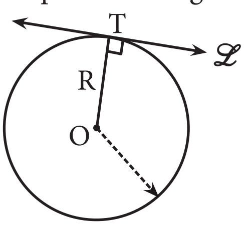
Elementos asociados

- Diámetro: AB (AB = 2R)
- Cuerda: $\overline{CD}$
- Recta tangente: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$
- Punto de tangencia: T
- Arco: $\overset{\frown}{CD}$
  Medida del arco: θ
  $m\overset{\frown}{CD} = \theta$



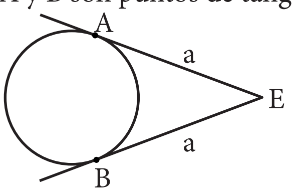
Propiedades fundamentales

1. Si T es punto de tangencia y O es centro.



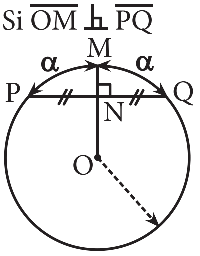
Se cumple:
$\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

2. Si A y B son puntos de tangencia.



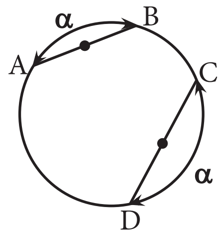
Se cumple:
AE = EB

3. Si $\overline{OM} \perp \overline{PQ}$



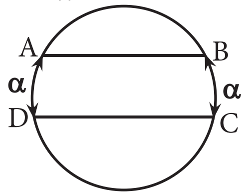
Se cumple: PN = NQ
$m\overset{\frown}{PM} = m\overset{\frown}{MQ}$

4. Si AB = CD



Se cumple:
$m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$

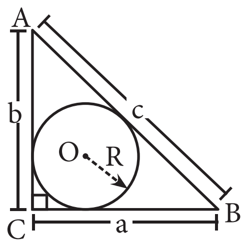
5. Si $\overline{AB} // \overline{CD}$



Se cumple:
$m\overset{\frown}{AD} = m\overset{\frown}{BC}$

Teorema de Poncelet

La circunferencia está inscrita en el triángulo rectángulo. El radio de la circunferencia recibe el nombre de inradio.

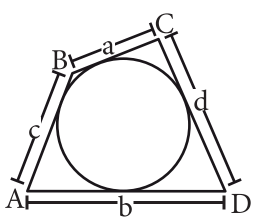


Longitud de los catetos: a y b
Longitud de la hipotenusa: c

Se cumple: $\boxed{a + b = c + 2R}$

Teorema de Pitot

En un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de longitudes de dos lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados.

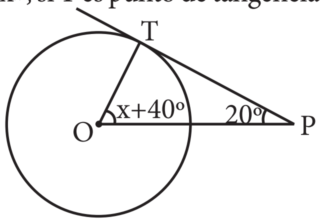


Se cumple: $\boxed{a + b = c + d}$

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula «x», si T es punto de tangencia y O es centro.

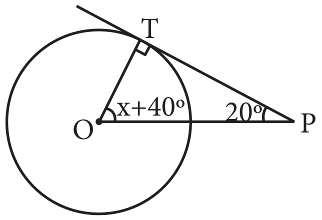


Resolución:

Nos piden «x».

Por propiedad $\overline{OT} \perp \overline{TP}$

Del gráfico:



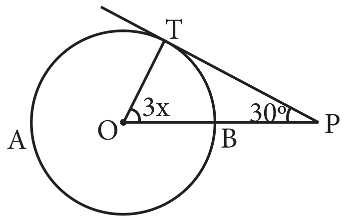
Entonces:

$x + 40° + 20° = 90°$

$x + 60° = 90°$

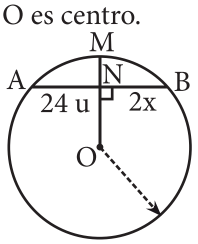
$\therefore\ x = 30°$

2. Calcula «x», si T es punto de tangencia y O es centro.



Resolución:

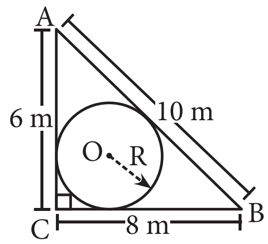
3. Calcula «x» si O es centro.



Resolución:

Nivel intermedio

4. La circunferencia está inscrita en el triángulo rectángulo, calcula el inradio, si O es centro.



Resolución

Nos piden: inradio (R)

Por el teorema de Poncelet:

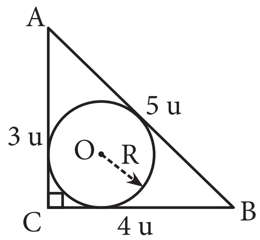
$6m + 8m = 10m + 2R$

$14m - 10m = 2R$

$4m = 2R$

$\therefore\ R = 2m$

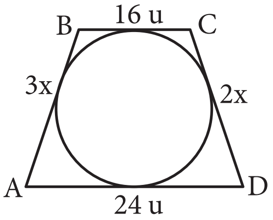
5. La circunferencia está inscrita en el triángulo rectángulo, calcula el inradio, siendo O centro.



Resolución:

Nivel avanzado

6. Calcula el valor de «x».



Resolución

Nos piden: «x»

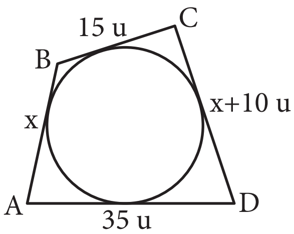
Por teorema de Pitot

$3x + 2x = 16 + 24$

$5x = 40$

$\therefore\ x = 8\ u$

7. Calcula el valor de «x».

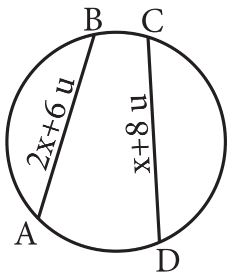


Resolución:

Notas importantes

Práctica

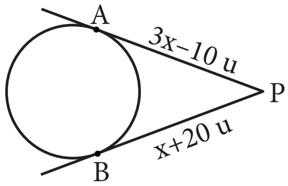
1. Si AB = CD, calcula el valor de «x».



a) 1 u
b) 3 u
c) 5 u
d) 2 u
e) 4 u

Resolución:

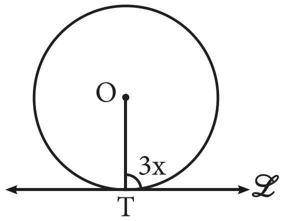
2. Calcula «x» si $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ son tangentes a la circunferencia.



a) 10 u
b) 20 u
c) 30 u
d) 15 u
e) 25 u

Resolución:

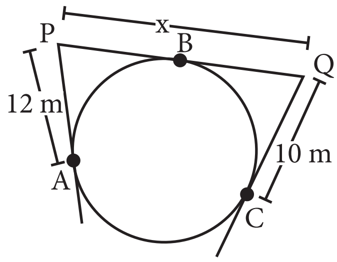
3. Calcula «x» si T es punto de tangencia y O es centro.



a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 15°
e) 25°

Resolución:

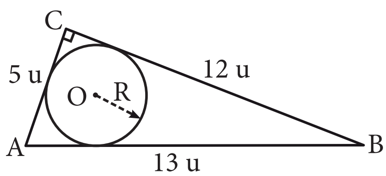
4. A, B y C son puntos de tangencia. Calcula «x».



a) 18 m
b) 22 m
c) 26 m
d) 20 m
e) 24 m

Resolución:

5. La circunferencia está inscrita en el triángulo rectángulo, calcula el inradio si O es centro.

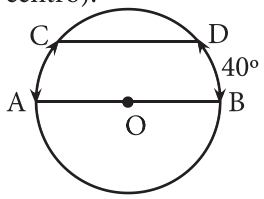


a) 2 u b) 4 u c) 6 u d) 3 u e) 5 u

Resolución:

Autoevaluación

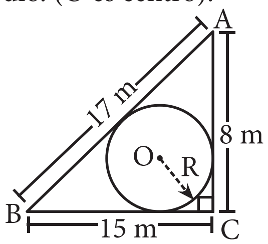
1. Si $\overline{AB}//\overline{CD}$, calcula la $m\overset{\frown}{CD}$. (O es centro).



a) 80°
b) 100°
c) 120°
d) 90°
e) 110°

Resolución:

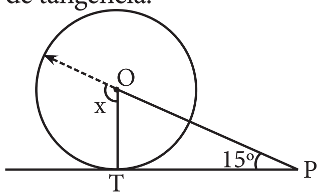
2. La circunferencia está inscrita en el triángulo rectángulo, calcula el inradio. (O es centro).



a) 2 m
b) 4 m
c) 6 m
d) 3 m
e) 5 m

Resolución:

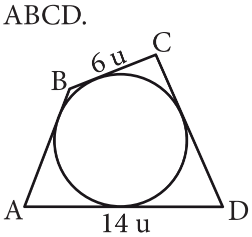
3. Calcula «x» si O es centro y T es punto de tangencia.



a) 90°
b) 75°
c) 120°
d) 100°
e) 110°

Resolución:

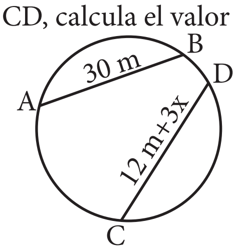
4. Calcula el perímetro del cuadrilátero ABCD.



a) 20 u
b) 40 u
c) 60 u
d) 30 u
e) 50 u

Resolución:

5. Si AB = CD, calcula el valor de «x».

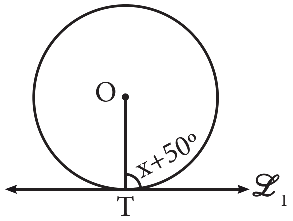


Resolución:

Tarea

Nivel básico

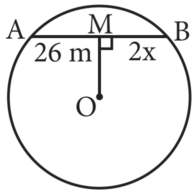
1. Calcula «x» si T es punto de tangencia y O es centro.



a) 20° b) 30° c) 40° d) 50° e) 60°

Resolución:

2. Calcula «x» si O es centro.

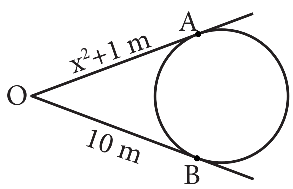


a) 11 m b) 12 m c) 13 m d) 14 m e) 15 m

Resolución:

Nivel intermedio

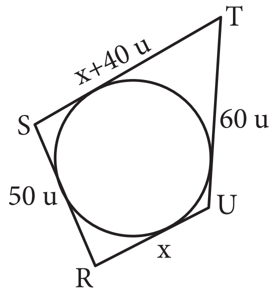
3. Calcula «x» si $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son tangentes a la circunferencia.



a) 2m b) 3m c) 4m d) 5m e) 6m

Resolución:

4. Calcula el valor de «x».

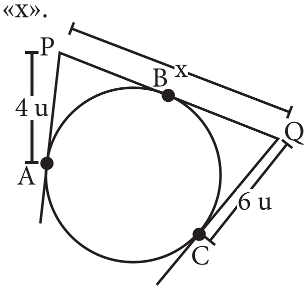


a) 25u b) 30u c) 32u d) 35u e) 38u

Resolución:

Nivel avanzado

5. En el gráfico, A, B y C son puntos de tangencia. Calcula «x».



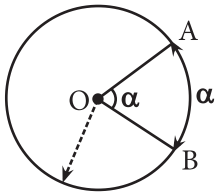
Resolución:

TEMA 13

CIRCUNFERENCIA II: ÁNGULO CENTRAL, INSCRITO Y SUS PROPIEDADES

Ángulo central

Es aquel ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.

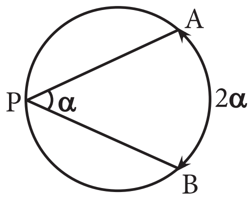


O: centro
$\overset{\frown}{AB}$: Arco
$\overline{OA}$, $\overline{OB}$: radios
Tenemos:

$\boxed{m\angle AOB = m\overset{\frown}{AB}}$

Ángulo inscrito

Es aquel ángulo cuyo vértice se encuentra en un punto de la circunferencia y está formado por dos cuerdas.



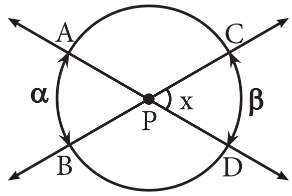
$\angle APB$: ángulo inscrito

$\boxed{m\overset{\frown}{AB} = 2m\angle APB}$

También existen otros ángulos en la circunferencia, veamos:

Ángulo interior

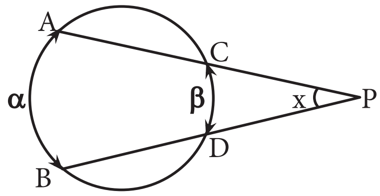
Es aquel ángulo que está formado por dos rectas secantes que se intersecan en el interior de una circunferencia.



$\boxed{x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}}$

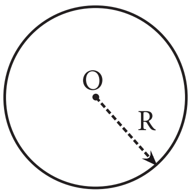
Ángulo exterior

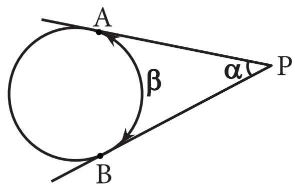
Es aquel ángulo formado por dos rectas secantes que se intersectan en el exterior de la circunferencia.



$\boxed{x = \dfrac{\alpha - \beta}{2}}$

Medida de la circunferencia = 360º



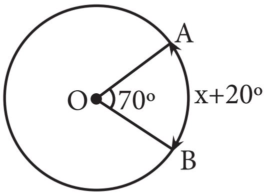


$\boxed{\alpha + \beta = 180^\circ}$

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula el valor de «x» si O es centro.



Resolución:

Piden «x».

Según el gráfico:

$m\sphericalangle AOB = 70° \rightarrow$ ángulo central

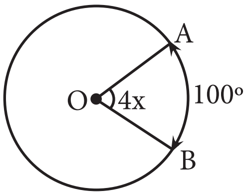
$m\overset{\frown}{AB} = x + 20°$

Por propiedad:

$x + 20° = 70°$

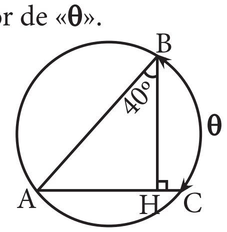
$\therefore\ x = 50°$

2. Calcula el valor de «x» si O es centro.



Resolución:

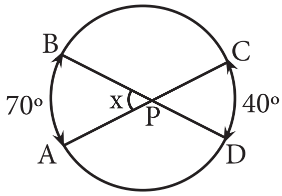
3. Calcula el valor de «θ».



Resolución:

Nivel intermedio

4. Calcula el valor de «x».



Resolución

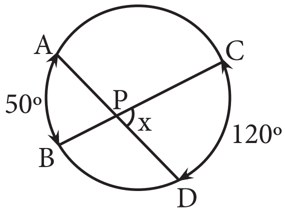
Nos piden «x»

Por propiedad del ángulo interior:

$$x = \frac{70° + 40°}{2}$$

$\therefore\ x = 55°$

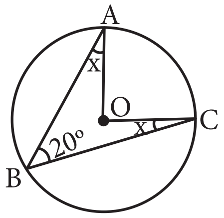
5. Calcula el valor de «x».



Resolución:

Nivel avanzado

6. Calcula «x» si O es centro.



Resolución

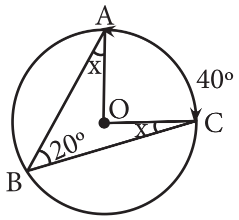
Piden «x» por ángulo inscrito

Se cumple:

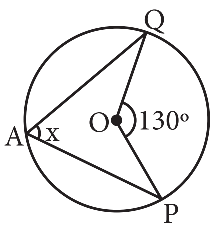
$x + x + 20° = 40°$

$2x = 20°$

$x = 10°$



7. Calcula el valor de «x».

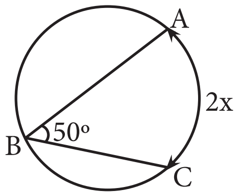


Resolución:

Notas importantes

Práctica

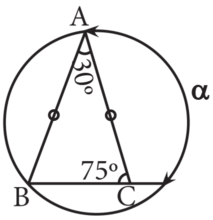
1. Calcula «x».



a) 10°
b) 30°
c) 50°
d) 20°
e) 40°

Resolución:

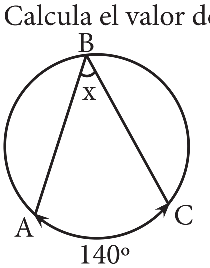
2. Calcula el valor de «α».



a) 85°
b) 100°
c) 160°
d) 95°
e) 150°

Resolución:

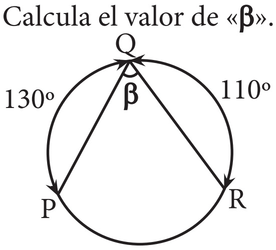
3. Calcula el valor de «x».



a) 50°
b) 70°
c) 90
d) 60°
e) 80°

Resolución:

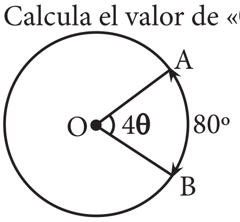
4. Calcula el valor de «β».



a) 30°
b) 50°
c) 70°
d) 40°
e) 60°

Resolución:

5. Calcula el valor de «θ» si O es centro.

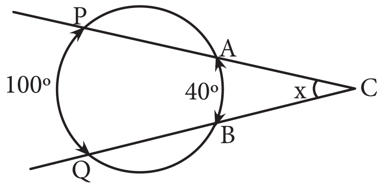


a) 10°
b) 30°
c) 50°
d) 20°
e) 40°

Resolución:

Autoevaluación

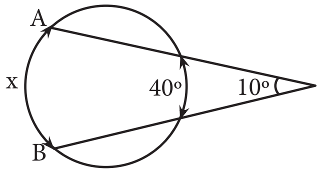
1. Calcula el valor de «x».



a) 25° d) 35°
b) 45° e) 30°
c) 40°

Resolución:

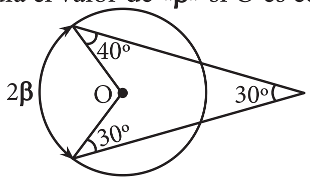
2. Calcula el valor de «x».



a) 70° d) 90°
b) 15° e) 80°
c) 100°

Resolución:

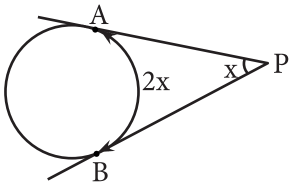
3. Calcula el valor de «β» si O es centro.



a) 40° d) 60°
b) 80° e) 50°
c) 70°

Resolución:

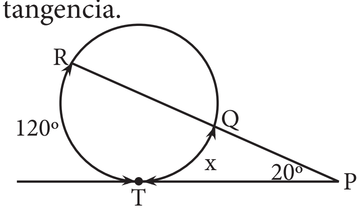
4. Calcula el valor de «x».



a) 40° d) 60°
b) 80° e) 50°
c) 70°

Resolución:

5. Calcula el valor de «x» si T es punto de tangencia.



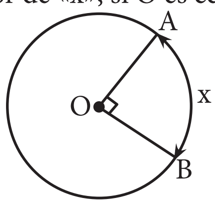
a) 50° d) 90°
b) 110° e) 80°
c) 100°

Resolución:

Tarea

Nivel básico

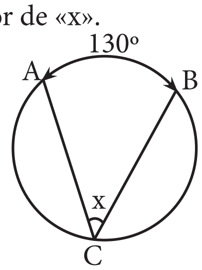
1. Calcula el valor de «x», si O es centro.



a) 45°
b) 55°
c) 60°
d) 70°
e) 90°

Resolución:

2. Calcula el valor de «x».

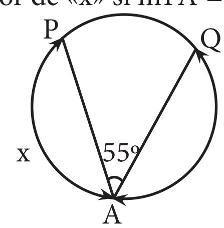


a) 45°
b) 55°
c) 65°
d) 75°
e) 85°

Resolución:

Nivel intermedio

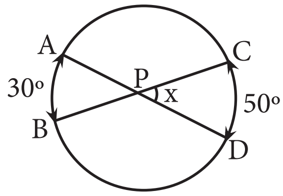
3. Calcula el valor de «x» si $m\overset{\frown}{PA} = m\overset{\frown}{QA}$.



a) 110°
b) 115°
c) 120°
d) 125°
e) 130°

Resolución:

4. Calcula el valor de «x».

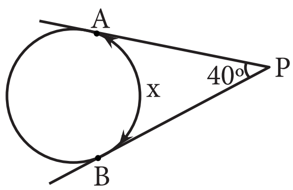


a) 30°
b) 40°
c) 50°
d) 60°
e) 70°

Resolución:

Nivel avanzado

5. Calcula el valor de «x» si A y B son puntos de tangencia.



a) 120°
b) 130°
c) 140°
d) 150°
e) 160°

Resolución:

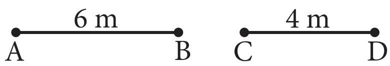
TEMA 14

LÍNEAS PROPORCIONALES: TEOREMA DE THALES

Razón de dos segmentos

Se denomina razón de dos segmentos al cociente de valores numéricos expresados en la misma unidad.

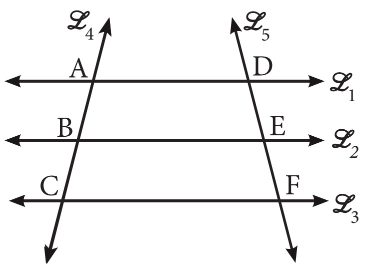
Ejemplo:



$$\frac{AB}{CD}=\frac{6\text{ m}}{4\text{ m}}=\frac{3}{2}$$

Teorema de Thales

Tres o más rectas paralelas, al ser interceptadas por dos o más rectas secantes, determinan segmentos proporcionales.



Según la figura, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, se cumple:

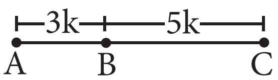
$$\boxed{\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}}$$

Observación:

Si al comparar segmentos obtenemos la misma razón, diremos que los segmentos son proporcionales:

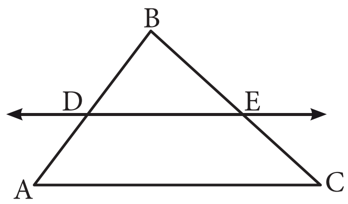
Sea $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{5}$

Entonces, AB = 3k, BC = 5k



Corolario

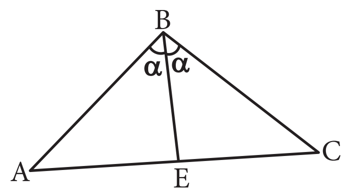
Toda recta paralela a un lado de un triangulo que intersecta a los otros dos lados del triangulo, lo divide en partes directamente proporcionales, siendo $\overline{DE}//\overline{AC}$.



Se cumple:

$$\boxed{\frac{BD}{DA}=\frac{BE}{EC}}$$

Teorema de la bisectriz interior



$\overline{BE}$: bisectriz interior

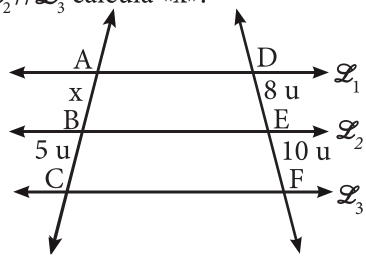
Se cumple:

$$\boxed{\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EC}}$$

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$ calcula «x».

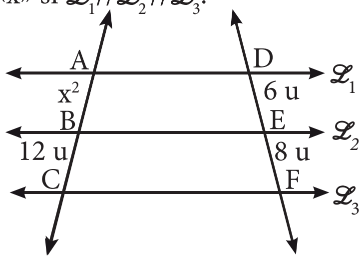


Resolución:

Nos piden «x». Como las rectas son paralelas, podemos aplicar el teorema de Thales. En forma practica, multiplicando en aspa.

$$x\,.\,(10) = (5)(8)$$
$$10x = 40$$
$$x = 4\text{ u}$$

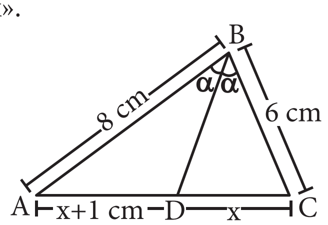
2. Calcula «x» si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$.



Resolución:

Nivel intermedio

3. Calcula «x».



Resolución:

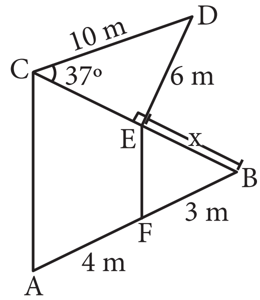
Nos piden «x». Como $\overline{BD}$ es bisectriz podemos utilizar el teorema de la bisectriz interior.

$$\frac{8}{6} = \frac{x+1}{x} \rightarrow 8x = 6(x+1)$$

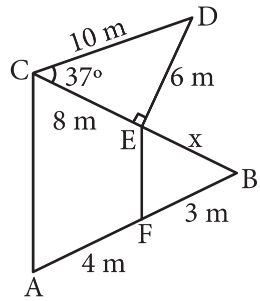
$$8x = 6x + 6$$
$$2x = 6$$
$$x = 3\text{ cm}$$

Nivel avanzado

4. Si $\overline{EF}//\overline{AC}$, calcula «x».



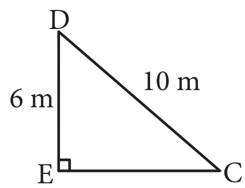
Resolución:



Nos piden «x».

En el triángulo CDE, aplicamos Pitágoras para calcular CE.

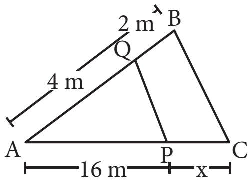
$$CE^2 + 6^2 = 10^2$$
$$CE^2 = 64$$
$$CE = 8\text{ m}$$



Luego $\frac{x}{8} = \frac{3}{4} \rightarrow x = 6\text{ m}$

Práctica

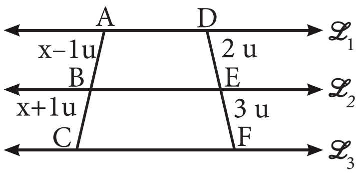
1. Calcula «x» si $\overline{PQ}//\overline{BC}$.



a) 4 m
b) 5 m
c) 6 m
d) 7 m
e) 8 m

Resolución:

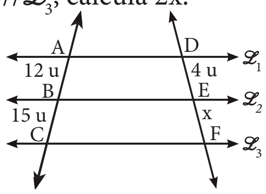
2. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, calcula «x».



a) 4 u
b) 5 u
c) 6 u
d) 8 u
e) 10 u

Resolución:

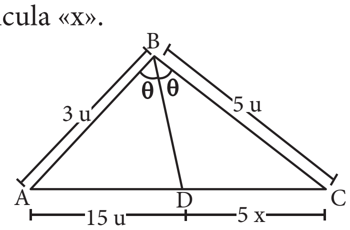
3. $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, calcula 2x.



a) 5 u
b) 7 u
c) 8 u
d) 9 u
e) 10 u

Resolución:

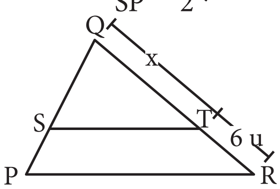
4. Calcula «x».



a) 3 u
b) 8 u
c) 6 u
d) 5 u
e) 4 u

Resolución:

5. Calcula «x» si $\dfrac{QS}{SP}=\dfrac{3}{2}$ y $\overline{ST}//\overline{PR}$.

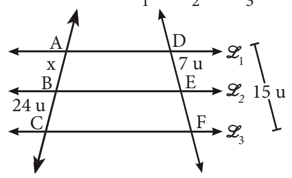


a) 6u
b) 7u
c) 8u
d) 9u
e) 12u

Resolución:

Autoevaluación

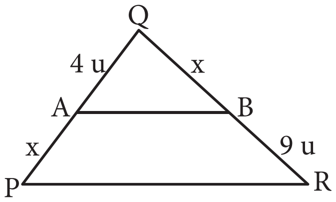
1. Calcula «x» si $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathcal{L}_3}$.



a) 18 u
b) 21 u
c) 24 u
d) 26 u
e) 28 u

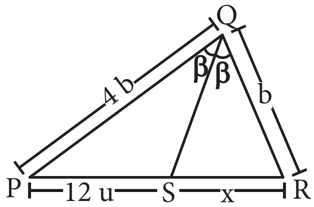
Resolución:

2. Calcula «x», si $\overline{AB} // \overline{PR}$.



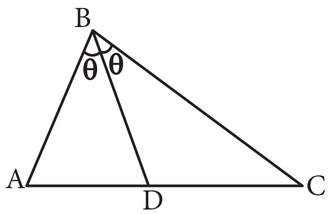
Resolución:

3. Calcula «x».



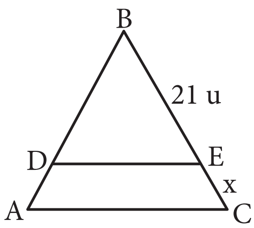
Resolución:

4. Calcula DC, si AB = 12 m, BC = 15 m, AD = 4 m.



Resolución:

5. Calcula «x» si $\frac{BD}{AD} = \frac{7}{2}$ y $\overline{AC} // \overline{DE}$.

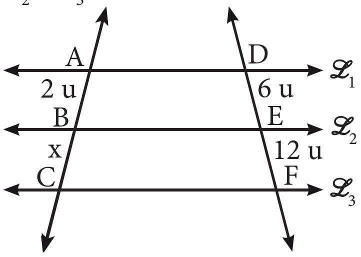


Resolución:

Tarea

Nivel básico

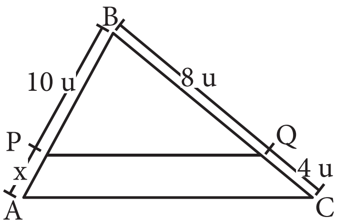
1. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}//\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$, calcula «x».



a) 2 u b) 3 u c) 4 u d) 6 u e) 8 u

Resolución:

2. Calcula «x» si $\overline{AC}//\overline{PQ}$.

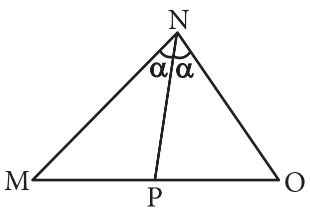


a) 3 u b) 5 u c) 6 u d) 7u e) 8 u

Resolución:

Nivel intermedio

3. Calcula OP si MN = 6 u, NO = 2 u, MP = 15 u.

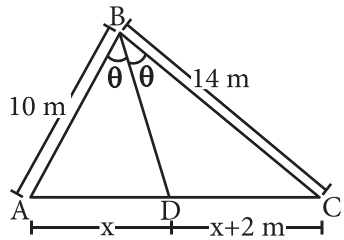


a) 3 u b) 4 u c) 5 u d) 6 u e) 8 u

Resolución:

Nivel avanzado

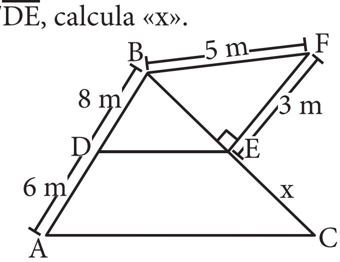
4. Calcula «x».



a) 5m b) 6m c) 7m d) 8m e) 9m

Resolución:

5. Si $\overline{AC}//\overline{DE}$, calcula «x».



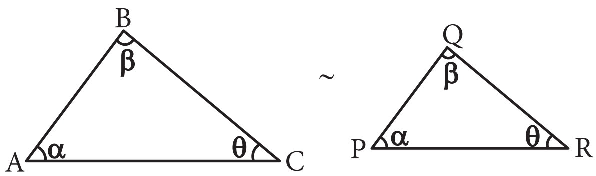
a) 2 m
b) 3 m
c) 4 m
d) 5 m
e) 6 m

Resolución:

TEMA 15

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS: TRES CRITERIOS

Dos triángulos son semejantes si tienen la misma medida angular interna y los lados que se oponen son proporcionales.

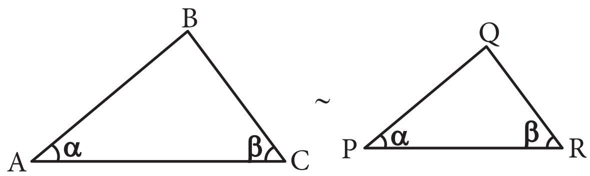


Notación:
ΔABC ~ ΔPQR
Se lee: El triángulo ABC es semejante al triángulo PQR.

Criterios de semejanza de triángulos

1. Caso AAA

Dos triángulos son semejantes si dos ángulos interiores del primer triángulo son de igual medida que dos ángulos interiores del segundo triángulo, respectivamente.



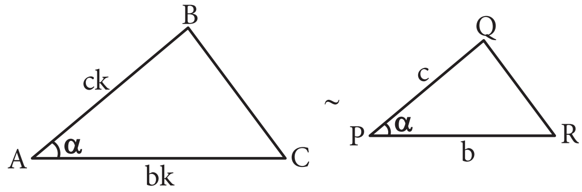
Si $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = r$; $(r \neq 0 \text{ y } r \neq 1)$

r = razón de semejanza

Entonces: ΔABC ~ ΔPQR

2. Caso LAL

Dos triángulos son semejantes si un ángulo del primer triángulo es de igual medida que un ángulo del segundo y los lados que lo determinan son respectivamente proporcionales.

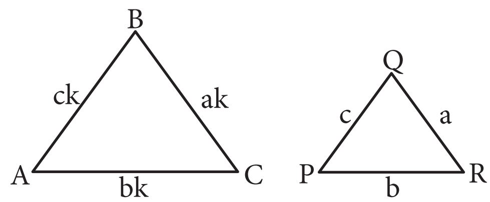


Si $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = r$; $(r \neq 0 \text{ y } r \neq 1)$

Entonces: ΔABC ~ ΔPQR

3. Caso LLL

Dos triángulos son semejantes si los tres lados del primer triángulo son respectivamente proporcionales a los tres lados del segundo triángulo.

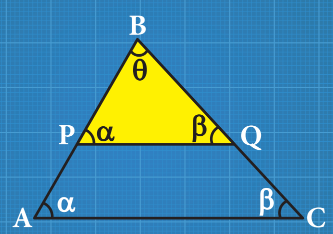


Si $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = r$; $(r \neq 0 \text{ y } r \neq 1)$

Entonces: ΔABC ~ ΔPQR

¡Muy importante!

$\overline{PQ} // \overline{AC}$

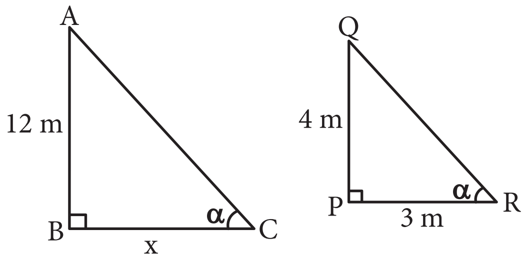


Se puede observar dos triángulos que tienen los mismos ángulos interiores. Luego, se cumple: ΔABC ~ ΔPQR

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula «x».



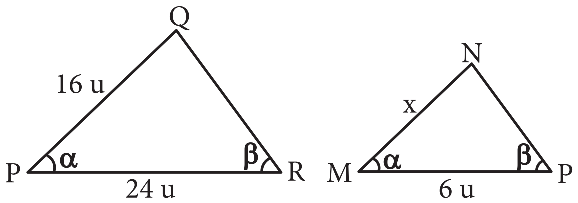
Resolución:

Nos piden «x», x = BC = ? Identificamos que los triángulos mostrados son semejantes, tienen dos ángulos de igual medida.

Luego, caso AAA: $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{PR}$

$$\frac{12\text{ m}}{4\text{ m}} = \frac{x}{3\text{ m}} \rightarrow x = 9\text{ m}$$

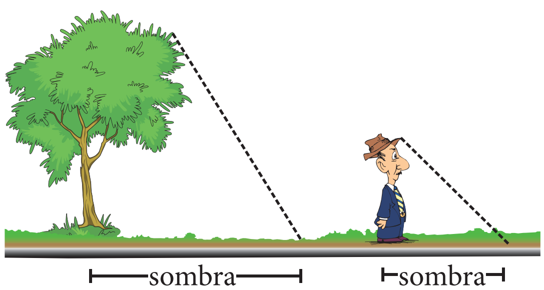
2. Calcula «x».



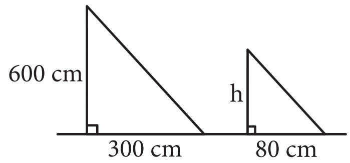
Resolución:

Nivel intermedio

3. Un árbol de 600 cm de altura proyecta una sombra de 300 cm. Calcula la altura de una persona que tiene 80 cm de sombra.



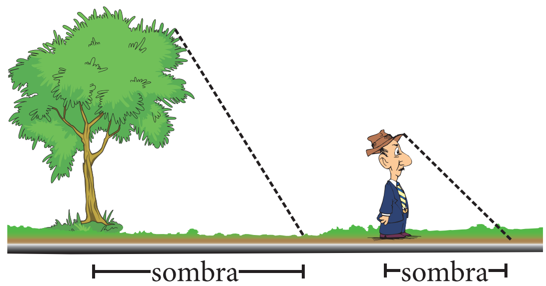
Resolución



Los triángulos determinados son semejantes.

Luego: $\dfrac{600}{h} = \dfrac{300}{80} \Rightarrow h = 160\text{ cm}$

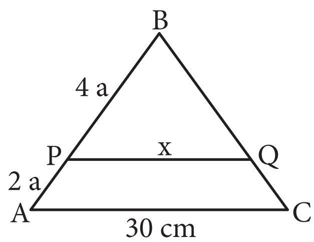
4. Un árbol de 468 cm de altura proyecta una sombra de 234 cm. Calcula la altura de una persona que tiene 74 cm de sombra.



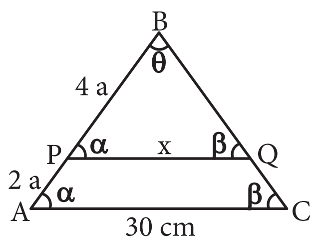
Resolución:

Nivel avanzado

5. Si $\overline{AC} // \overline{PQ}$, calcula «x».



Resolución



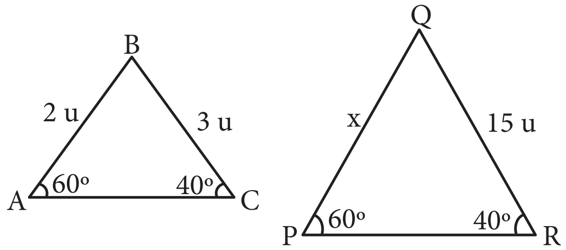
Nos piden: «x»

Sabemos que el ΔABC ~ ΔPBQ

Luego tenemos: $\dfrac{x}{30} = \dfrac{4\cancel{a}}{6\cancel{a}} \Rightarrow x = 20\text{ cm}$

Práctica

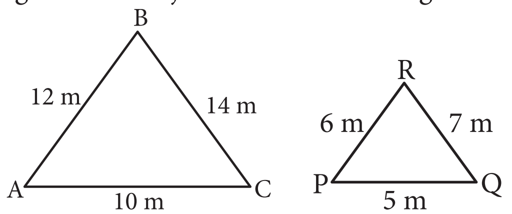
1. Calcula «x».



a) 8u b) 9 u c) 10 u d) 11u e) 12 u

Resolución:

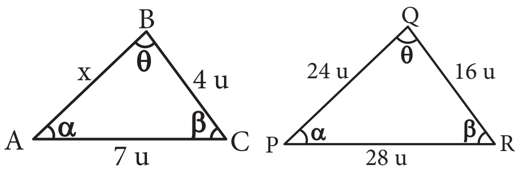
2. Determina el criterio que se emplea para asegurar la semejanza de los dos triángulos.



a) ALA b) LLL c) LLA d) LAL e) AAL

Resolución:

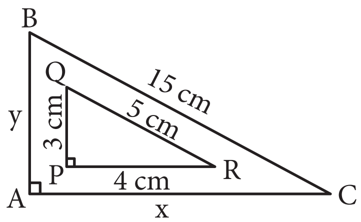
3. Calcula «x».



a) 4 u b) 5 u c) 6 u d) 7 u e) 8 u

Resolución:

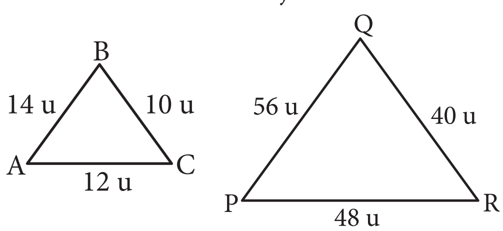
4. Se muestra una escuadra, calcula x + y.



a) 15 cm c) 20 cm e) 24 cm
b) 18 cm d) 21 cm

Resolución:

5. Los triángulos mostrados son semejantes. Calcula la razón de semejanza.



a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Resolución:

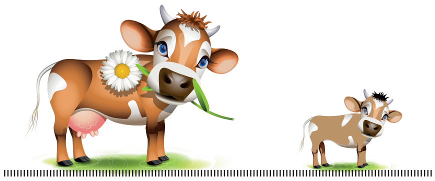
Autoevaluación

1. Los lados de un triángulo rectángulo miden 6 cm, 8 cm y 10 cm, respectivamente, ¿cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero si su hipotenusa mide 20 cm?

a) 6 cm y 8 cm
b) 8 cm y 10 cm
c) 10 cm y 12 cm
d) 12 cm y 14 cm
e) 12 cm y 16 cm

Resolución:

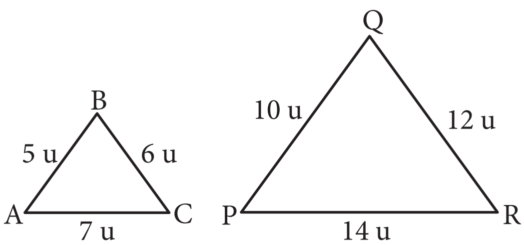
2. Según el esquema, la vaca de 180 cm tiene una cola de 45 cm; entonces, un becerro de 100 cm tendrá una cola de ___________.



a) 20 cm
b) 25 cm
c) 30 cm
d) 35 cm
e) 40 cm

Resolución:

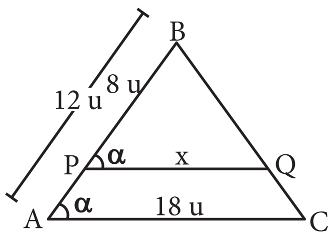
3. Los triángulos mostrados son semejantes. Calcula la razón de semejanza.



a) 4
b) 5
c) 2
d) 3
e) 6

Resolución:

4. Calcula el valor de «x».



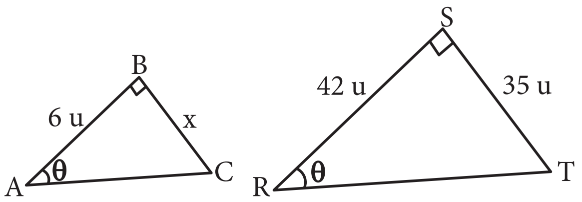
a) 8 u
b) 10 u
c) 12 u
d) 14 u
e) 16 u

Resolución:

Tarea

Nivel básico

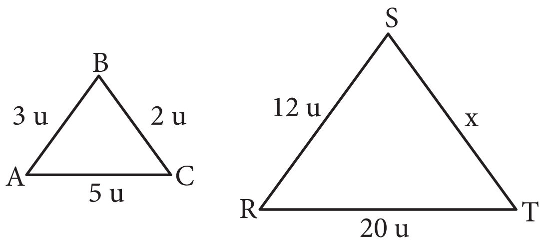
1. Calcula «x».



a) 8 u   b) 4 u   c) 5 u   d) 6 u   e) 7 u

Resolución:

2. Calcula «x».

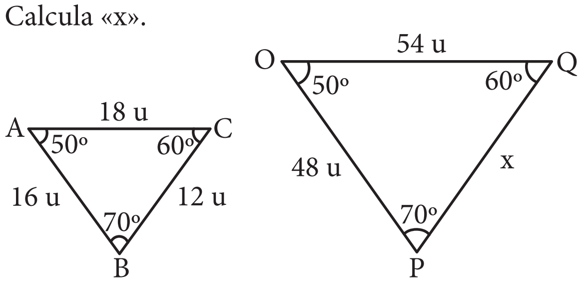


a) 2 u   b) 4 u   c) 6 u   d) 8 u   e) 10 u

Resolución:

Nivel intermedio

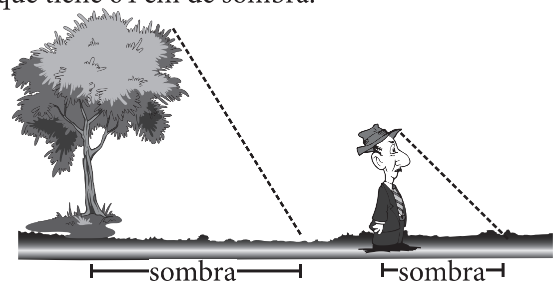
3. Calcula «x».



a) 24 u   c) 42 u   e) 52u
b) 36 u   d) 48 u

Resolución:

4. Un árbol de 540 cm de altura proyecta una sombra de 180 cm. Calcula la altura de una persona que tiene 64 cm de sombra.

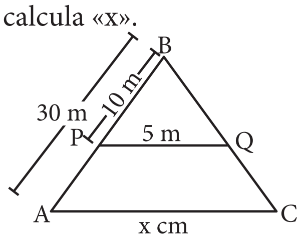


a) 162 cm   c) 182 cm   e) 198 cm
b) 172 cm   d) 192 cm

Resolución:

Nivel avanzado

5. Si $\overline{AC}//\overline{PQ}$, calcula «x».



a) 10 m   c) 20 m   e) 30 m
b) 15 m   d) 25 m

Resolución:

TEMA 16

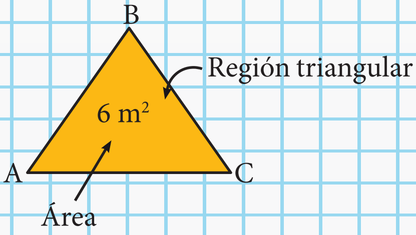
SUPERFICIES DE FIGURAS GEOMÉTRICAS TRIANGULARES

Región plana cerrada

Es una porción de plano limitado por una línea cerrada. La línea cerrada es el contorno o borde de una región.

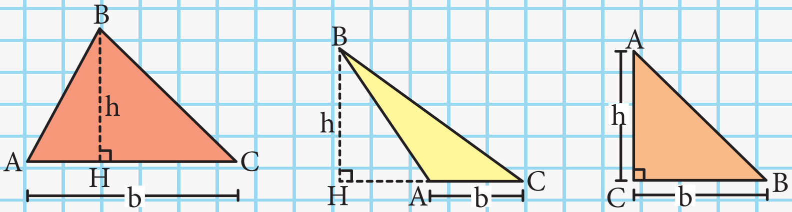
Área

Es la medida de una región.



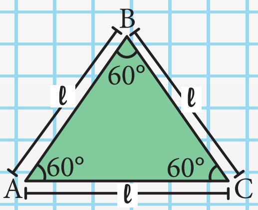
1. Área de regiones triangulares

El área de toda región triangular es igual al semiproducto de la longitud de un lado y la altura relativa a dicho lado.



$$\boxed{A_{\Delta ABC}=\frac{b.h}{2}}$$

2. Área del triángulo equilátero

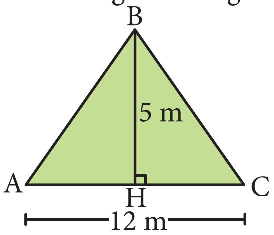


$$\boxed{A_{\Delta ABC}=\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}$$

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula el área de la región triangular ABC.



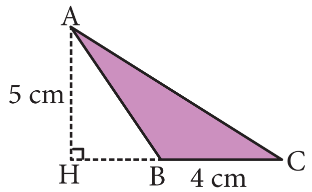
Resolución:

Nos piden: $A_{\Delta ABC} = \dfrac{(\text{base}) \,.\, (\text{altura})}{2}$

Base: AC = 12 m
Altura: BH = 5 m

Luego: $A_{\Delta ABC} = \dfrac{(12\text{ m}) \,.\, (5\text{ m})}{2} = 30\text{ m}^2$

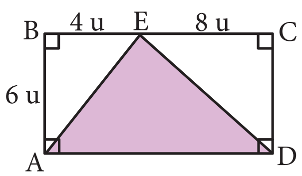
2. Calcula el área de la región triangular ABC.



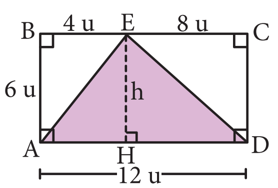
Resolución:

Nivel intermedio

3. Calcula el área de la región sombreada.



Resolución:
Nos piden: $A_{\Delta AED}$
Según el grafico, ABCD es un rectángulo.

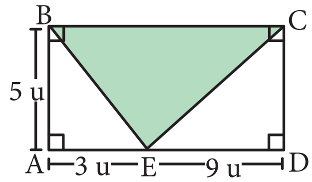


$\Rightarrow$ AD = BE + EC
AD = 4 u + 8 u
AD = 12 u

Luego trazamos $\overline{EH} // \overline{AB}$
EH = 6 u

$A_{\Delta AED} = \dfrac{(12\text{ u}) \,.\, (6\text{ u})}{2} = 36\text{ u}^2$

4. Calcula el área de la región sombreada.



Resolución:

Nivel avanzado

5. El área de la región triangular ABC es 24 u², la medida de su base es 8 u. Calcula la longitud de la altura relativa a la base.
Resolución:
Nos piden la altura = ?

- ❖ Por datos tenemos $A_{\Delta ABC} = 24\text{ u}^2$ y la base = 8 u
- ❖ Pero sabemos que $A = \dfrac{(\text{base}) \,.\, (\text{altura})}{2}$

Reemplazamos: $24 = \dfrac{8 \times h}{2}$

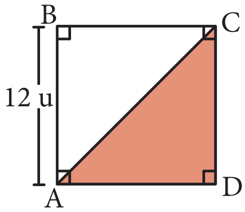
$48 = 8\,h$
$6\text{ u} = h$

6. El área de la región triangular PQR es 30 u², la longitud de la altura relativa a la base es 15 u. Calcula la medida de su base.

Resolución:

Práctica

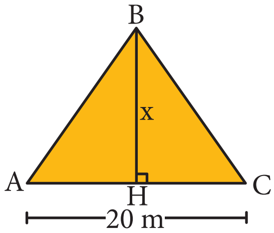
1. Calcula el área de la región sombreada si ABCD es un cuadrado.



a) 60 u²
b) 68 u²
c) 72 u²
d) 82 u²
e) 144 u²

Resolución:

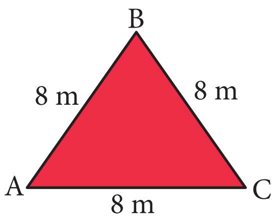
2. Si el área de la región triangular ABC es 100 m², calcula el valor de «x».



a) 10 m
b) 12 m
c) 15 m
d) 20 m
e) 25 m

Resolución:

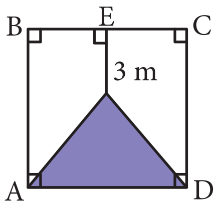
3. Calcula el área de la región triangular equilátera.



a) $4\sqrt{3}$ m²
b) $8\sqrt{3}$ m²
c) $16\sqrt{3}$ m²
d) $24\sqrt{3}$ m²
e) $64\sqrt{3}$ m²

Resolución:

4. Si el perímetro del cuadrado ABCD es 36 m. Calcula el área de la región sombreada.

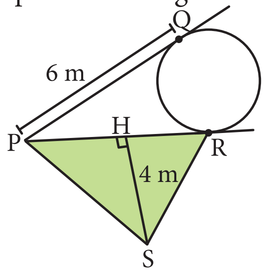


a) 18 m²
b) 27 m²
c) 32 m²
d) 40 m²
e) 48 m²

Resolución:

Autoevaluación

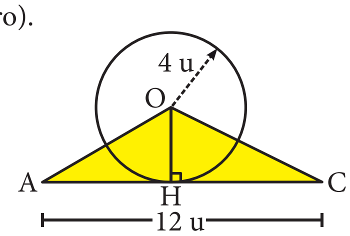
1. Calcula el área de la región triangular PRS, si Q y R son puntos de tangencia.



a) 10 m^2
b) 12 m^2
c) 16 m^2
d) 24 m^2
e) 48 m^2

Resolución:

2. Calcula el área de la región sombreada. (O es centro).



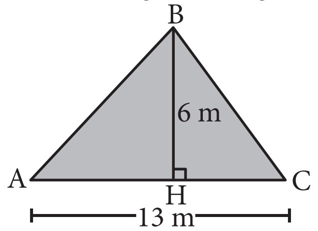
a) 12 u^2
b) 24 u^2
c) 36 u^2
d) 48 u^2
e) 56 u^2

Resolución:

Tarea

Nivel básico

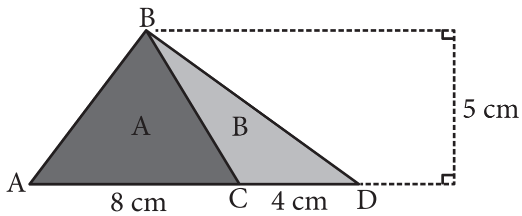
1. Calcula el área de la región triangular ABC.



a) 24 m² b) 30 m² c) 39 m² d) 42 m² e) 48 m²

Resolución:

2. Calcula A + B.

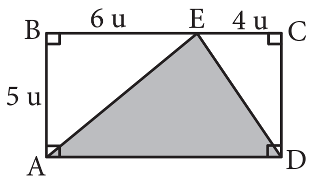


a) 20 cm² b) 30 cm² c) 40 cm² d) 50 cm² e) 60 cm²

Resolución:

Nivel intermedio

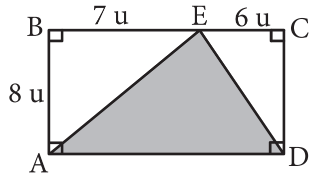
3. Calcula el área de la región sombreada.



a) 20 u²
b) 25 u²
c) 30 u²
d) 35 u²
e) 90 u²

Resolución:

4. Calcula el área de la región sombreada.



a) 50 u² b) 56 u² c) 53 u² d) 55 u² e) 52 u²

Resolución:

Nivel avanzado

5. Si el área de la región triangular ABC es 48 u², la medida de su base es 12 u. Calcula la longitud de su altura relativa a la base.

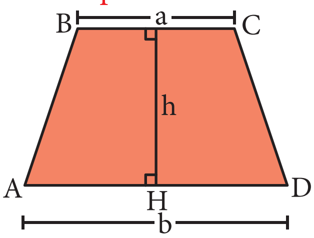
a) 5 u
b) 6 u
c) 7 u
d) 8 u
e) 9 u

Resolución:

TEMA 17

SUPERFICIES DE FIGURAS GEOMÉTRICAS CUADRANGULARES: ROMBO, ROMBOIDE, RECTÁNGULO, CUADRADO Y TRAPECIO

1. En el trapecio



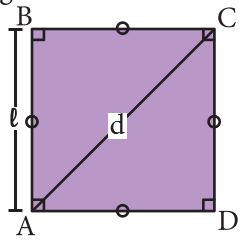
$$A_{ABCD} = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$$

El área de una región trapecial es igual al producto de la semisuma de las longitudes de sus bases y su altura.

2. En los paralelogramos

A. Cuadrado

El área de una región cuadrada es igual a la longitud de su lado elevado al cuadrado.

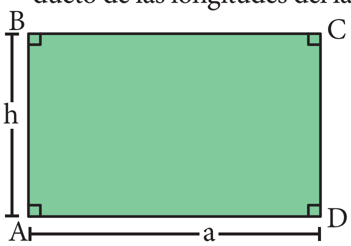


$$A_{\square ABCD} = \ell^2$$

$$A_{\square ABCD} = \frac{d^2}{2}$$

B. Rectángulo

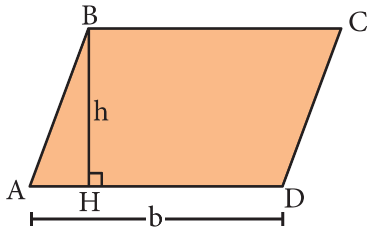
El área de una región rectangular es igual al producto de las longitudes del largo y el ancho.



$$A_{\square ABCD} = a.h$$

C. Romboide

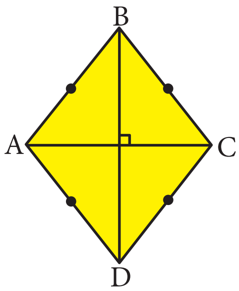
El área de una región romboidal ABCD es igual al producto de las longitudes de la base y la altura.



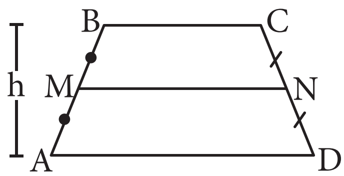
$$A_{ABCD} = b.h$$

D. Rombo

El área de una región rombal es igual al semiproducto de las longitudes de sus diagonales.

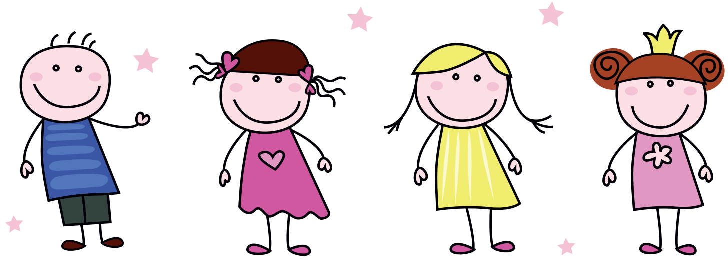


$$A_{\lozenge ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}$$



$\overline{MN}$: mediana

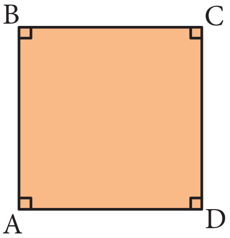
$$A_{ABCD} = m.h$$



Trabajando en clase

Nivel básico

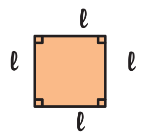
1. El perímetro de la región cuadrada ABCD es 24 m. Calcula su área.



Resolución:

Nos piden: Área = ℓ^2

$\underbrace{\text{Perímetro}}_{4\ell} = 24 \text{ m}$

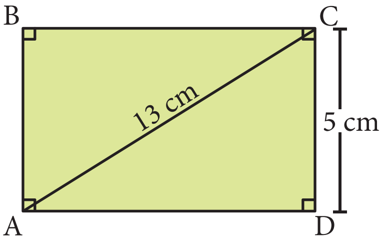


$4\ell = 24$ m

$\ell = 6$ m

Luego: Área = $(6 \text{ m})^2 = 36 \text{ m}^2$

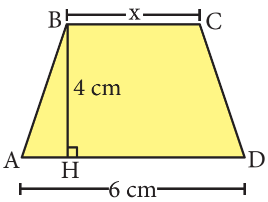
2.



Resolución:

Nivel intermedio

3. Si el área de la región trapecial ABCD es 20 m², calcula «x». $\overline{AD}//\overline{BC}$.



Resolución:

Nos piden «x»

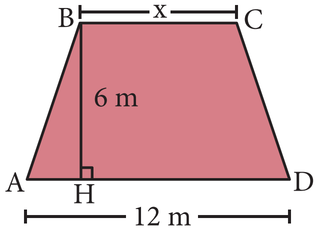
Dato: área del trapecio = 20 m²

Sabemos que: $A = \left(\dfrac{6+x}{2}\right)4$

Por dato: $A = \left(\dfrac{6+x}{2}\right)4 = 20$

$x = 4$ m

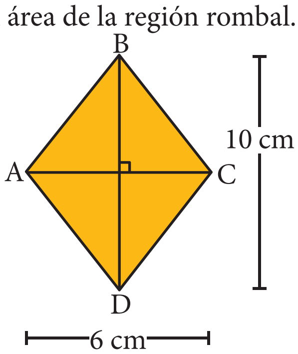
4. Si el área de la región trapecial ABCD es 54 m², calcula «x». $\overline{BC}//\overline{AD}$.



Resolución:

Nivel avanzado

5. Calcula el área de la región rombal.



Resolución:

Nos piden:

$\text{Área} = \dfrac{(D_{mayor}) \cdot (d_{menor})}{2}$

Es decir:

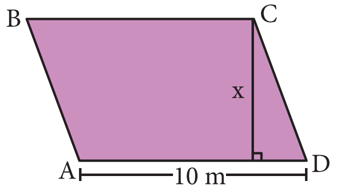
$\text{Área rombo} = \dfrac{(AC) \cdot (BD)}{2}$

Luego:

$\text{Área del rombo} = \dfrac{(6 \text{ cm}) \cdot (8 \text{ cm})}{2} = 24 \text{ cm}^2$

Práctica

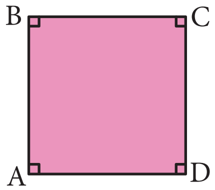
1. Calcula «x» si ABCD es un romboide de área 30 m².



a) 2 m c) 4 m e) 6 m
b) 3 m d) 5 m

Resolución:

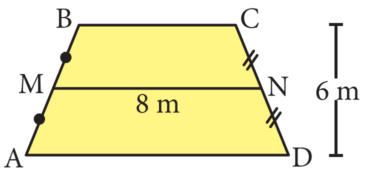
2. Calcula el área de la región del cuadrado ABCD si su perímetro es 12 u.



a) 3 u² c) 9 u² e) 16 u²
b) 6 u² d) 12 u²

Resolución:

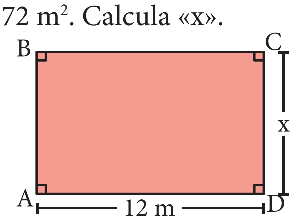
3. Calcula el área de la región sombreada si $\overline{AD}//\overline{BC}$.



a) 36 m² c) 46 m² e) 52 m²
b) 42 m² d) 48 m²

Resolución:

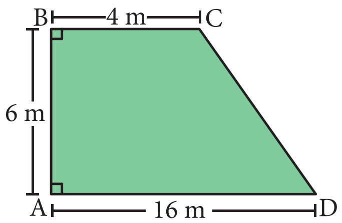
4. La región rectangular mostrada posee un área de 72 m². Calcula «x».



a) 4 m c) 6 m e) 10 m
b) 5 m d) 8 m

Resolución:

5. Calcula el área de la región sombreada si $\overline{BC}//\overline{AD}$.



a) 40 m² c) 50 m² e) 70 m²
b) 45 m² d) 60 m²

Resolución:

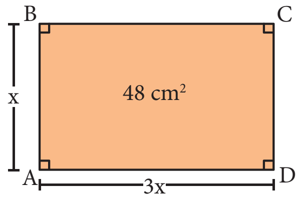
Autoevaluación

1. Calcula el perímetro de un cuadrado si el área de su región es 121 cm^2.

a) 11 cm
b) 22 cm
c) 33 cm
d) 44 cm
e) 55 cm

Resolución:

2. Calcula «x».



a) 3 cm
b) 4 cm
c) 5 cm
d) 6 cm
e) 7 cm

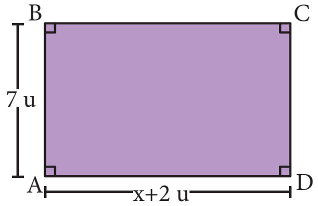
Resolución:

3. Calcula el área de una región cuadrada si su perímetro es 8 m.

a) 2 m^2
b) 4 m^2
c) 6 m^2
d) 8 m^2
e) 16 m^2

Resolución:

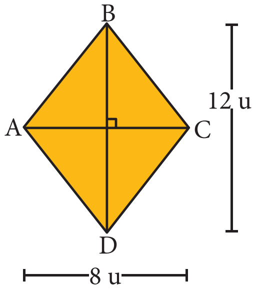
4. La región rectangular mostrada posee un área de 84 u^2, calcula «x».



a) 8 u
b) 10 u
c) 12 u
d) 14 u
e) 16 u

Resolución:

5. Calcula el área de la región rombal.



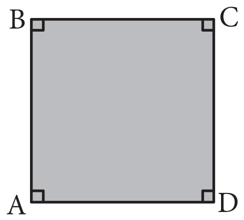
a) 12 u^2
b) 36 u^2
c) 96 u^2
d) 24 u^2
e) 48 u^2

Resolución:

Tarea

Nivel básico

1. El perímetro de la región cuadrada ABCD es 44 m. Calcula su área.



a) 81 m² b) 100 m² c)121 m²
d) 121 m² e) 144 m²

Resolución:

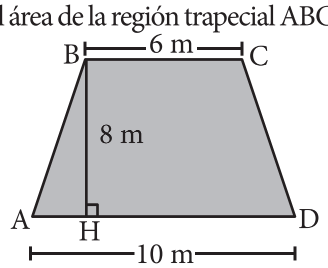
2. Calcula el área de un cuadrado si se sabe que su perímetro es 36 cm.

a) 50 cm² b) 60 cm² c) 70 cm²
d)81 cm² e)85 cm²

Resolución:

Nivel intermedio

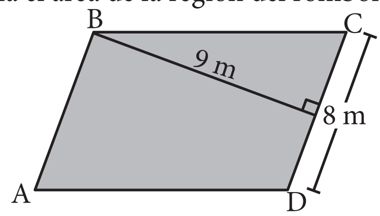
3. Calcula el área de la región trapecial ABCD ($\overline{AD}//\overline{BC}$).



a) 24 m² d) 54 m²
b) 36 m² e) 64m²
c) 48 m²

Resolución:

4. Calcula el área de la región del romboide ABCD.

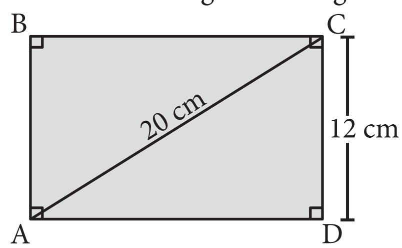


a) 60 m² d) 72 m²
b) 62 m² e) 80 m²
c) 70 m²

Resolución:

Nivel avanzado

5. Calcula el área de la región rectangular ABCD.



a) 72 cm² d) 108 cm²
b) 84 cm² e) 144 cm²
c) 192 cm²

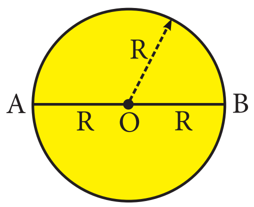
Resolución:

TEMA 18

SUPERFICIE DE FIGURAS GEOMÉTRICAS CIRCULARES

Círculo

Es una porción del plano limitado por una circunferencia.



O: Centro

R: Radio

$\overline{AB}$: Diámetro = 2R

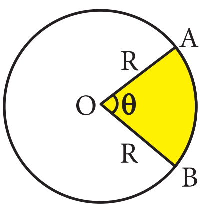
π: número constante

A = Área del círculo

$\boxed{A_{\circ} = \pi R^2}$

Sector circular

Porción del círculo limitado por el ángulo central y el arco correspondiente.



$\boxed{A = \dfrac{\theta.\pi R^2}{360°}}$

θ = Medida del ángulo central

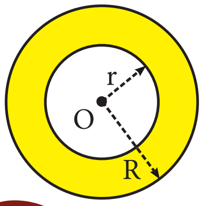
R = Radio

A = Área del sector circular.

O = Centro

Corona circular

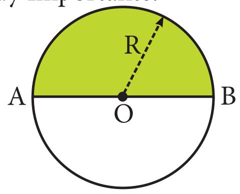
Porción de círculo limitado por dos circunferencias concéntricas.



$\boxed{A = \pi(R^2 - r^2)}$

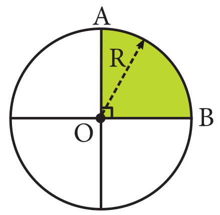
O es centro

Muy Importante:



Semicírculo

$\boxed{A = \dfrac{\pi R^2}{2}}$



Cuadrante

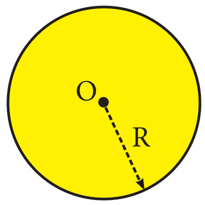
$\boxed{A = \dfrac{\pi R^2}{4}}$

Siendo O el centro

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula el área del círculo si su radio es 4 m y O es centro.



Resolución:

Nos piden: $A_{\circ}$

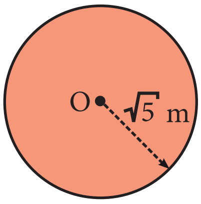
Sabemos que R = 4 m

Luego: $A_{\circ} = \pi R^2$

$A_{\circ} = \pi(4\ m)^2$

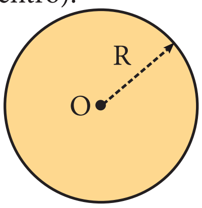
$A_{\circ} = 16\pi\ m^2$

2. Calcula el área del círculo si su radio es $\sqrt{5}$ m y O es centro.



Resolución:

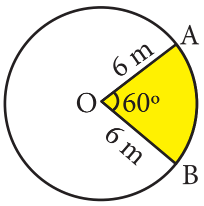
3. Si el círculo mostrado tiene un área de 16 m^2, calcula R (O es centro).



Resolución:

Nivel intermedio

4. Calcula el área del sector circular (O es centro).
Resolución:



Datos:
r = 6 m, m∡AOB = 60°

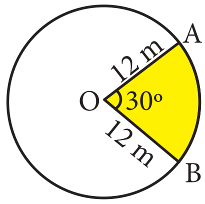
Luego: $A_{\lhd} = \dfrac{\pi r^2 \theta}{360°}$

Reemplazando:

$A_{\lhd} = \dfrac{\pi(6)^2 60°}{360°} = \dfrac{\pi.36}{6}$

$A_{\lhd} = 6\pi\ m^2$

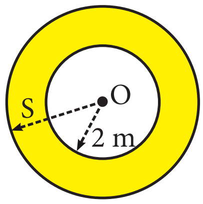
5. Calcula el área del sector circular (O es centro).



Resolución:

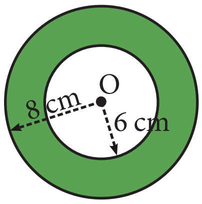
Nivel avanzado

6. Calcula el área de la corona circular (O es centro).



Resolución:
Nos piden: Área de la corona circular
$A = \pi(R^2 - r^2)$
Remplazando: $A = \pi(S^2 - 2^2)$
$A = 21\ \pi\ m^2$

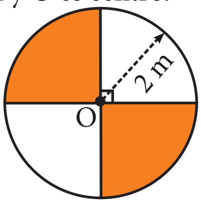
7. Calcula el área de la corona circular (O es centro).



Resolución:

Práctica

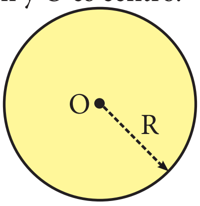
1. Calcula el área de la región sombreada si su radio es 2 m y O es centro.



a) π m^2
b) 2π m^2
c) 3π m^2
d) 4π m^2
e) 8π m^2

Resolución:

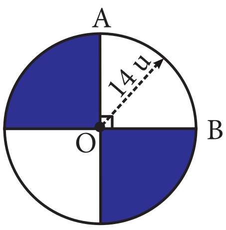
2. Calcula el área de la región circular si su radio mide 9 m y O es centro.



a) 49π m^2
b) 54π m^2
c) 64π m^2
d) 81π m^2
e) 84π m^2

Resolución:

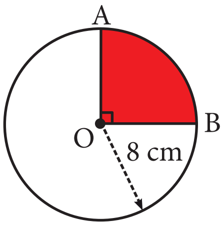
3. Calcula el área de la región sombreada. (O es centro).



a) 64π u^2
b) 81π u^2
c) 98π u^2
d) 102π u^2
e) 196π u^2

Resolución:

4. Calcula el área del cuadrante. (O es centro).

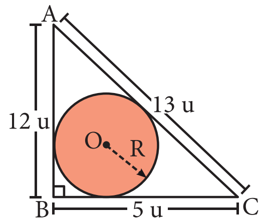


a) 8π cm^2
b) 10π cm^2
c) 12πcm^2
d) 14π cm^2
e) 16π cm^2

Resolución:

Autoevaluación

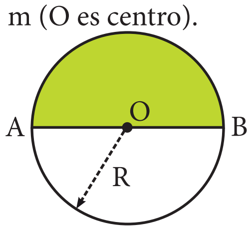
1. Calcula el área de la región sombreada si O es centro.



a) 2π u²
b) 3π u²
c) 4π u²
d) 6π u²
e) 8π u²

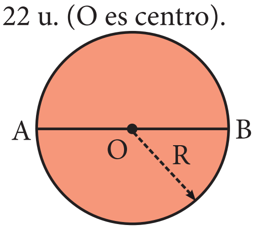
Resolución:

2. Calcula el área de la región sombreada si su radio es 6 m (O es centro).



Resolución:

3. Calcula el área de la región circular de diámetro AB = 22 u. (O es centro).



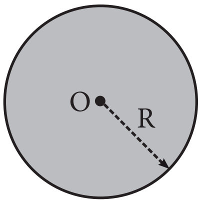
a) 64π u²
b) 81π u²
c) 100π u²
d) 121π u²
e) 144π u²

Resolución:

Tarea

Nivel básico

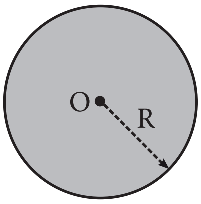
1. Calcula el área de la región circular de radio 2 u (O es centro).



a) 2π u^2 b) 3π u^2 c) 4π u^2 d) 6π u^2 e) 7π u^2

Resolución:

2. Calcula el área de la región $\sqrt{6}$ u (O es centro).

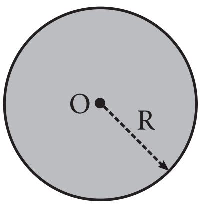


a) 4π u^2 b) 5π u^2 c) 6π u^2 d) 7π u^2 e) 8π u^2

Resolución:

Nivel intermedio

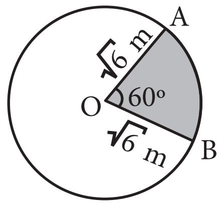
3. Si el círculo mostrado tiene un área de 36π u^2, calcula R (O es centro).



a) 4 u b) 5 u c) 6 u d) 7 u e) 8 u

Resolución:

4. Calcula el área del sector circular (O es centro).

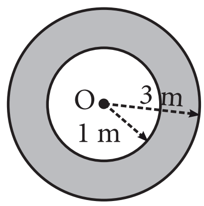


a) π m^2 b) 2π m^2 c) 3π m^2 d) 4π m^2 e) 5π m^2

Resolución:

Nivel avanzado

5. Calcula el área de la corona circular si O es centro.



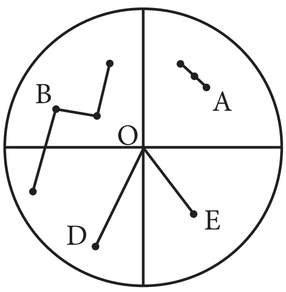
a) 5π m^2 b) 6π m^2 c) 7π m^2 d) 8π m^2 e) 9π m^2

Resolución:

TEMA 19

PLANO CARTESIANO: UBICACIÓN DE PUNTOS Y DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Los controladores de vuelo conocen la ubicación de un avión en cada instante, con ello evitan que los aviones choquen. También pueden conocer la línea de vuelo y distancia entre aviones. Observa el esquema.



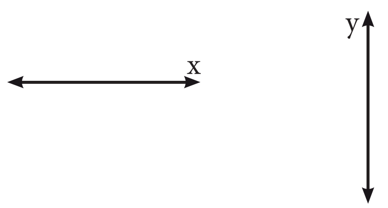
La circunferencia esta dividida en 4 partes, cada parte se le llama cuadrante.

Por ejemplo:

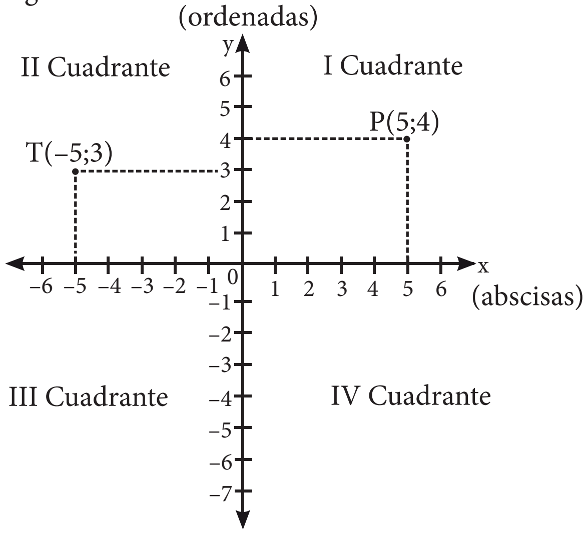
1. El avión A se encuentra en el primer cuadrante.
2. El avión B se encuentra en el segundo cuadrante.
3. El avión D se encuentra en el tercer cuadrante.
4. El avión E se encuentra en el cuarto cuadrante.
5. O es el origen.

El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas (ejes).

Eje de las abscisas: x Eje de ordenadas: y



Luego tenemos:



En este plano cartesiano los puntos pueden ser representados:

a) El punto P tiene coordenadas (5; 4).
b) El punto T tiene coordenadas (–5; 3).

En forma general:

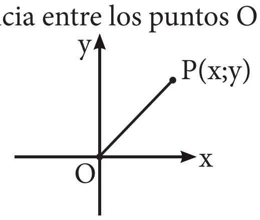
$$\underbrace{N(x;\ y)}_{\text{coordenadas}}$$

Abscisa: x

Ordenada: y

Notación

Distancia entre los puntos O y P: d(O, P)



O: origen

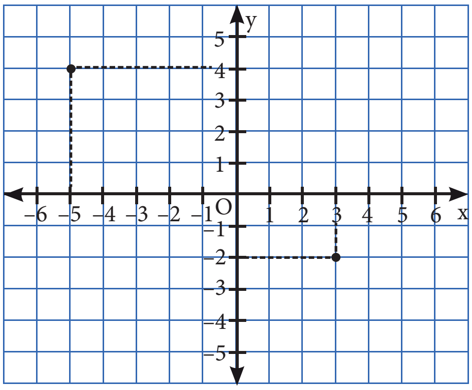
$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Ubica los puntos A(–5;4) y B(3;–2) en el plano cartesiano.

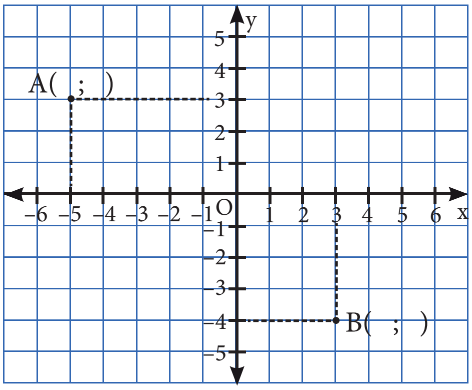
Resolución:



A(–5; 4)
x → –5
y → 4

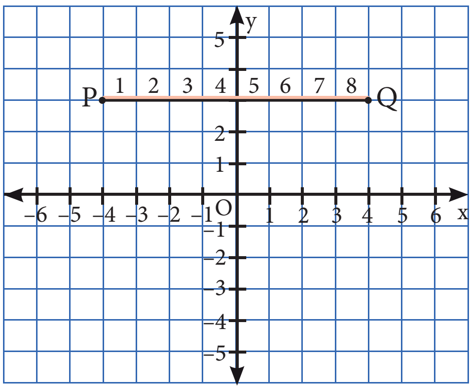
B(3;–2)
x → 3
y → –2

2. Indica las coordenadas de los puntos A y B.



Nivel intermedio

3. Calcula d(P, Q).



Resolución:

Nos piden:

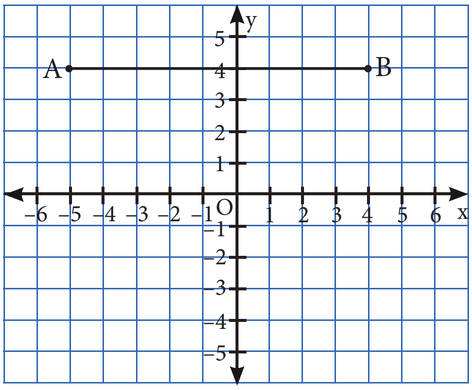
d(P, Q)

Para calcular la distancia contamos las casillas.

Luego, tenemos 8 casillas

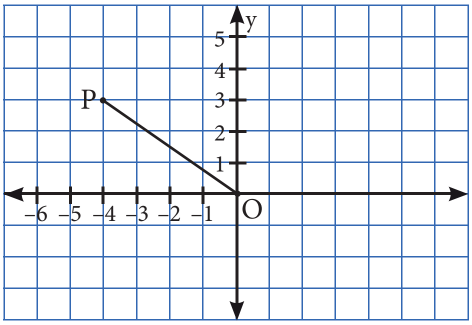
Entonces d(P; Q) = 8 u

4. Calcula d(A; B).

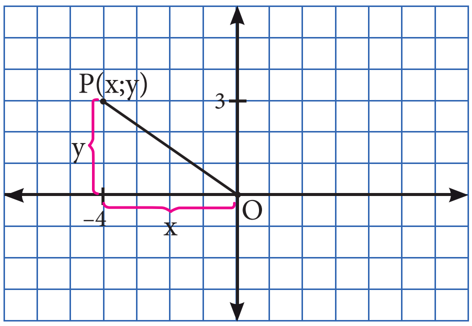


Nivel avanzado

5. Calcula d(O, P).



Resolución



Nos piden:

$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x = -4$

$y = 3$

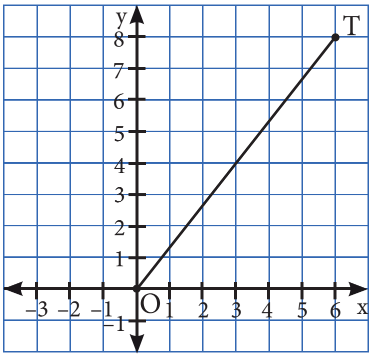
Luego:

$d(O, P) = \sqrt{(-4)^2 + 3^2}$

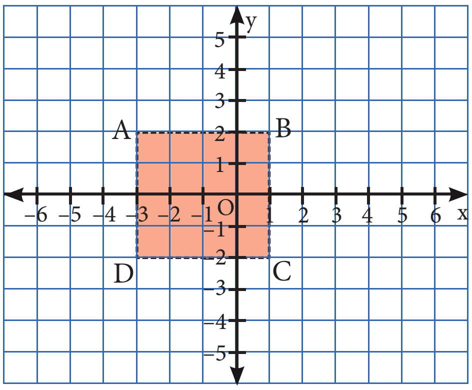
$d(O, P) = \sqrt{16 + 9}$

$d(O, P) = \sqrt{25} = 5$

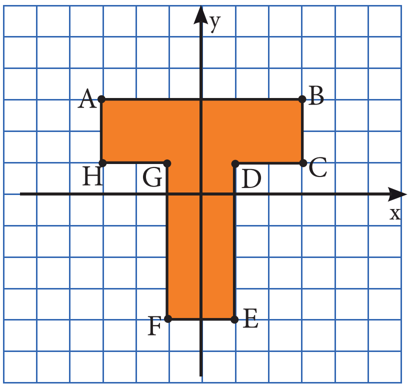
6. En el plano cartesiano calcula d(O; T).



7. Calcula el perímetro de la región sombreada.



8. Calcula el perímetro de la región sombreada.

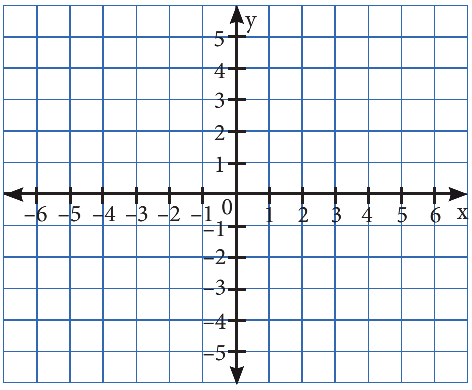


a) 20 u
b) 22 u
c) 23 u
d) 24 u
e) 26 u

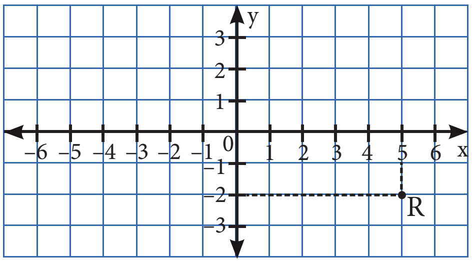
Notas importantes

Práctica

1. Ubica los puntos E(–4;2), F(1;–3), g(3;–2), h(5;4); luego, indica a qué cuadrante pertenecen.

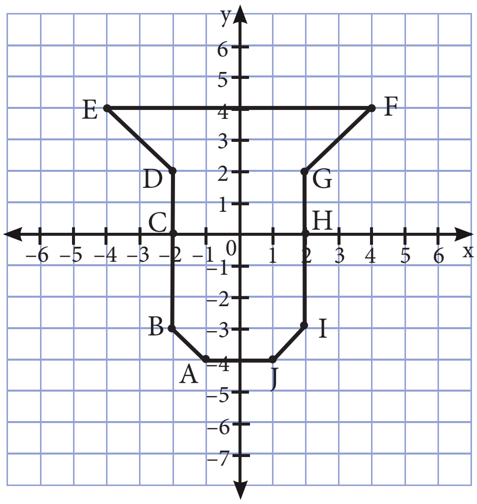


2. Señala las coordenadas y el cuadrante donde se encuentra el punto R.

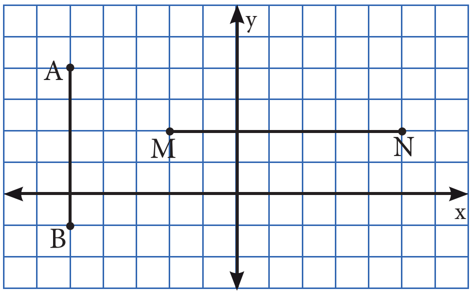


a) R(4;2), I cuadrante
b) R(4;1), III cuadrante
c) R(5;1), II cuadrante
d) R(5;–2) IV cuadrante
e) R(5;–3), I cuadrante

3. Indica las coordenadas de los puntos que pertenezcan al III cuadrante.

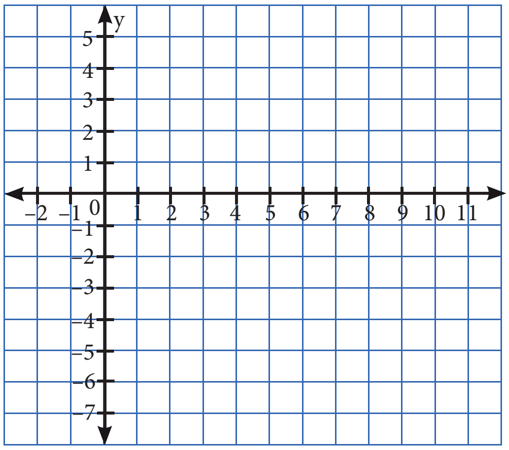


4. Calcula la suma de las distancias:
d(A,B) + d(M,N)



a) 12 u
b) 13 u
c) 14 u
d) 15 u
e) 16 u

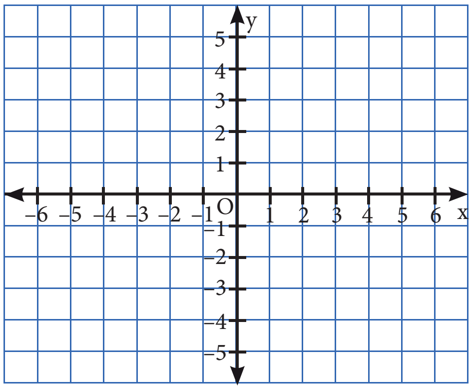
5. Calcula la distancia del punto S(–2;–5) al punto T(8;–5).



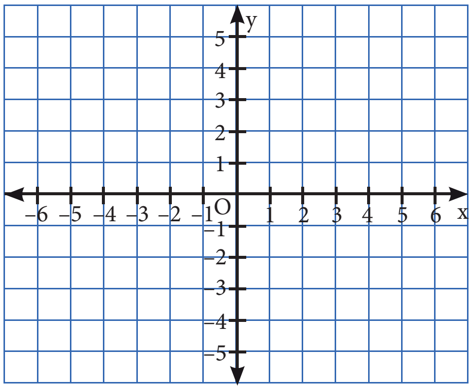
a) 2 u
b) 4 u
c) 6 u
d) 8 u
e) 10 u

Autoevaluación

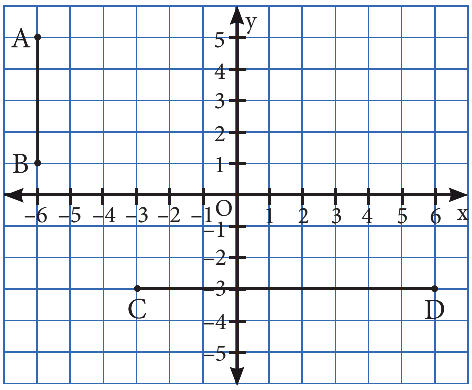
1. Ubica los puntos P(–2;4); Q(4;2) en el plano cartesiano.



2. Ubica los puntos T(1;1), U(–3;2), V(4;–3), luego indica a que cuadrante pertenecen.



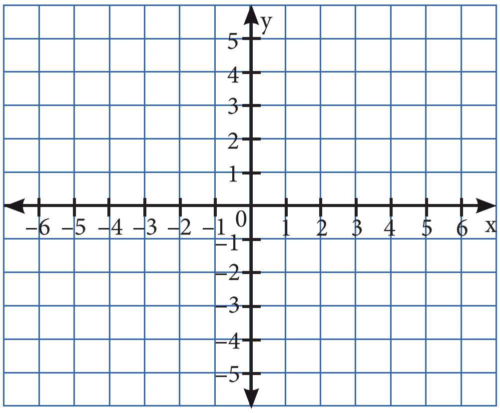
3. Calcula la suma de las distancias: d(AB) + d(CD).



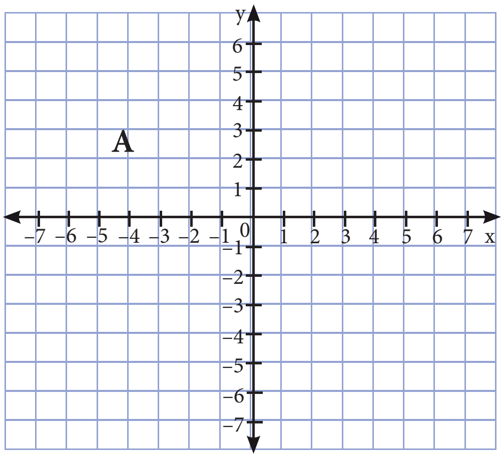
Tarea

Nivel básico

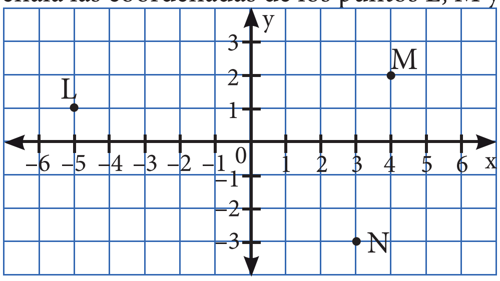
1. Ubica los puntos P(–2;2), Q(4;4) y R(1;–4) en el plano cartesiano.



2. Ubica los puntos A(–4;0), B(6;3) y C(3;–7) en el plano cartesiano.



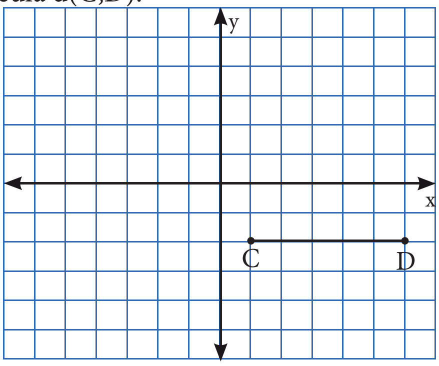
3. Señala las coordenadas de los puntos L, M y N.



a) L(–3;2), M(3;1), N(2;–2)
b) L(–5;1) M(4;2), N(3;–3)
c) L(–5;2), M(4;3), N(3;–2)
d) L(–5;0), M(3;3), N(3;–1)
e) L(–5;4), M(4;4), N(3;0)

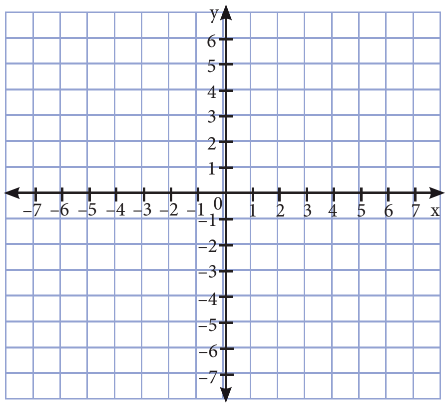
Nivel intermedio

4. Calcula d(C;D).



a) 3 u
b) 4 u
c) 5 u
d) 6 u
e) 7 u

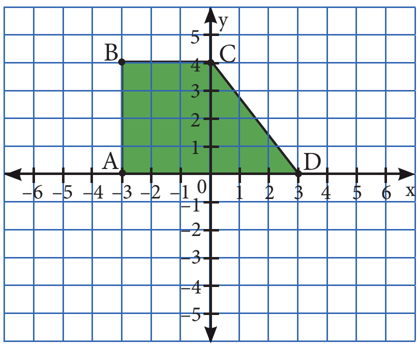
5. Sean las coordenadas A(–5;–3), B(6;–3) y C(–5;–7), calcula d(A;B) + d(A;C).



a) 15 u
b) 16 u
c) 17 u
d) 18 u
e) 19 u

Nivel avanzado

6. Calcula el perímetro de la región sombreada.



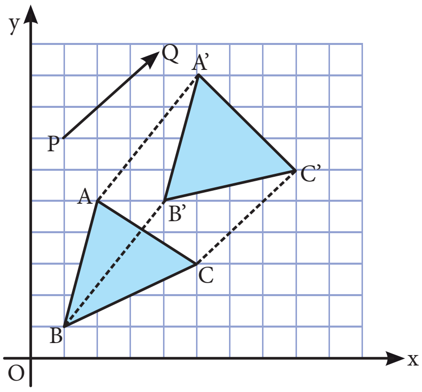
a) 10 u
b) 12 u
c) 14 u
d) 16 u
e) 18 u

TEMA 20

TRANSFORMACIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO CARTESIANO: ROTACIÓN Y TRASLACIÓN

1. Traslación

Es una transformación que conserva el tamaño, la forma y el sentido de orientación de las figuras. Esta transformación se realiza siguiendo la dirección y sentido de un vector llamado vector directriz.



Vector

Es un segmento rectilíneo orientado en el que se distingue un punto de origen y un punto final.

a. Módulo

Es un número real positivo que nos indica la longitud del vector.

b. Dirección

Recta «invisible» que contiene al vector.

c. Sentido

Es la orientación que sigue el vector indicado por la cabeza de la flecha.

Para efectuar el desplazamiento de una figura usaremos lo siguiente: $\overrightarrow{a}\ b\uparrow$; significa que avanzaremos «a» unidades a la derecha y «b» unidades arriba.

- $\rightarrow$ a la derecha
- $\leftarrow$ a la izquierda
- $\uparrow$ arriba
- $\downarrow$ abajo

2. Rotación

La rotación es una transformación en la que la figura gira alrededor de un centro de rotación un determinado ángulo en sentido horario o antihorario, obteniéndose otra figura congruente a la inicial.

❖ La rotación de 180° es llamada simetría central o simetría respecto a un punto P.

$$\boxed{P = \frac{A + A'}{2}}$$

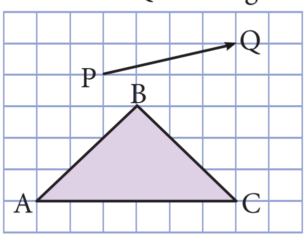
❖ Simetría central respecto al origen de coordenadas:

$$A(a;b) \xrightarrow{S_0} A(-a;-b)$$

Trabajando en clase

Nivel básico

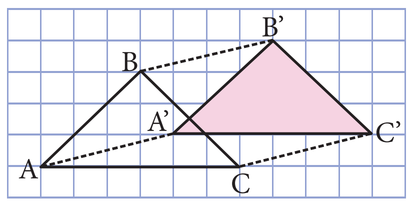
1. Aplica la traslación $\overrightarrow{PQ}$ al triángulo ABC.



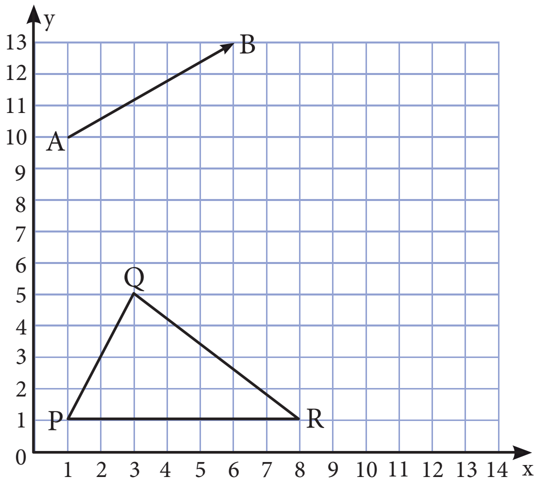
Resolución:

Para aplicar la traslación de un polígono se aplica la traslación a cada uno de sus vértices.

Luego, cada vértice se traslada $\overrightarrow{4}\ 1\uparrow$; significa que avanzaremos 4 unidades a la derecha y una unidad hacia arriba cada vértice del triángulo.

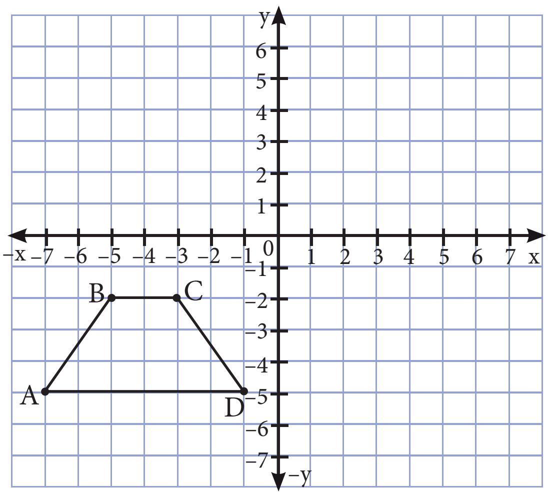


2. Aplica la traslación $\overrightarrow{AB}$ al triángulo PQR.



Nivel intermedio

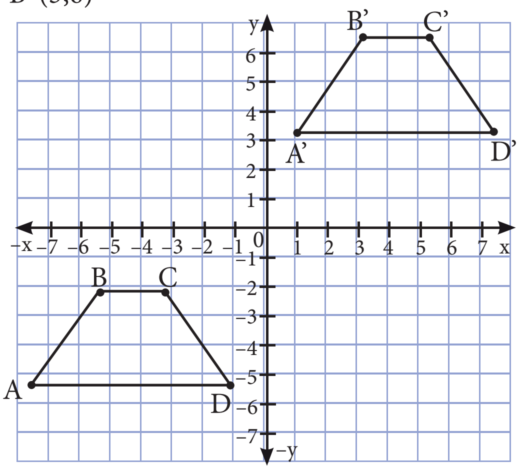
3. Traslada el siguiente polígono de modo que las coordenadas de A' sean (1;3). Indica las coordenadas de B'.



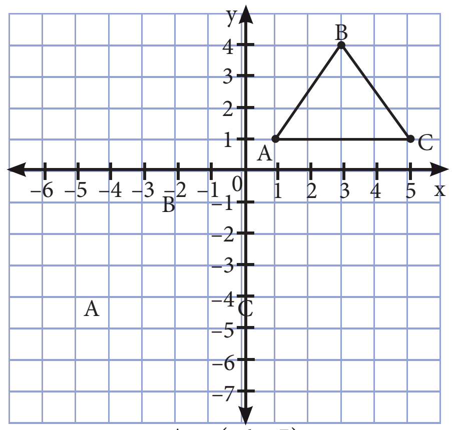
Resolución:

Para aplicar la traslación debemos ubicar primero las coordenadas de A(1;3) en el plano cartesiano.Se comprueba que el punto A se ha trasladado $\vec{8}$ 8↑. Luego se trasladan los otros vértices obteniéndose las coordenadas del trapecio A' B' C' D'.

→ B' (3;6)



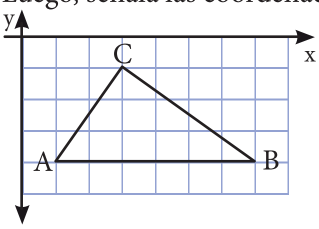
4. Traslada el siguiente polígono de modo que las coordenadas de C' sean (–2;–5). Indica las coordenadas de A.



A = (-6; -5)

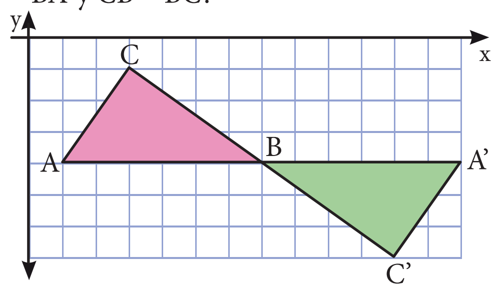
Nivel avanzado

5. Aplica una simetría central al triángulo con centro en B. Luego, señala las coordenadas de C'.



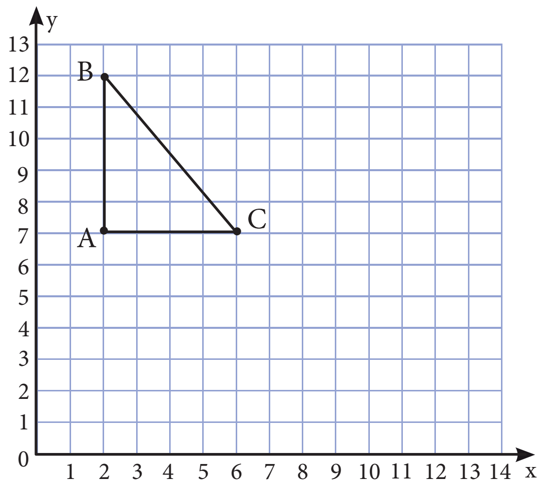
Resolución

Como B es el centro, prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ hasta el punto A' y C' respectivamente, de manera que AB = BA' y CB = BC'.



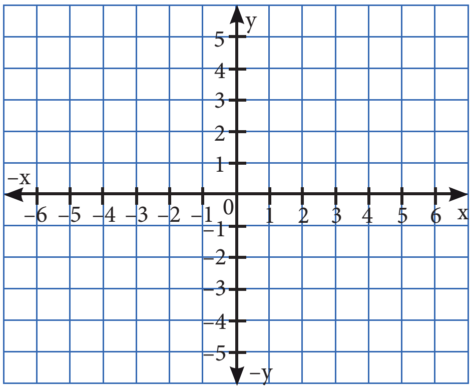
⇒ Coordenadas de C (11; 7)

6 . Aplica una simetría central al triángulo con centro en C y luego señala las coordenadas de B'.



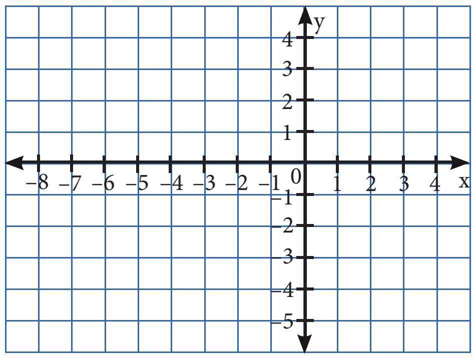
Práctica

1. Traslada el siguiente polígono cuyos vértices tiene por coordenadas A(1;–4), B(3;–2), C(6;–2) y D(4;–4) $\overrightarrow{2}\ 6\uparrow$. Indica las coordenadas de B'.



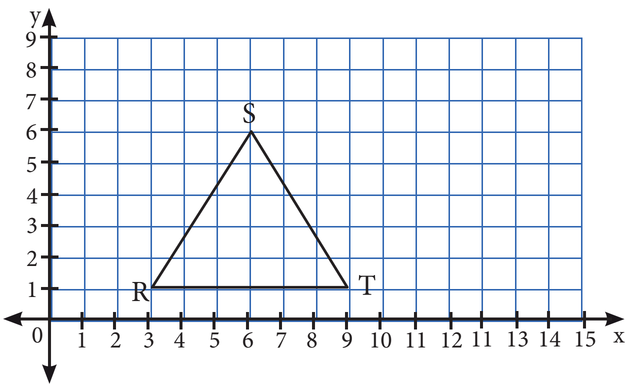
a) (–5;4)
b) (5;4)
c) (3;4)
d) (4;4)
e) (4;3)

2. Traslada el siguiente polígono cuyos vértices tienen por coordendas P(1;1), Q(5;1) y R(5;3) $\overleftarrow{6}\ 2\downarrow$. Indica las coordenadas de P'.



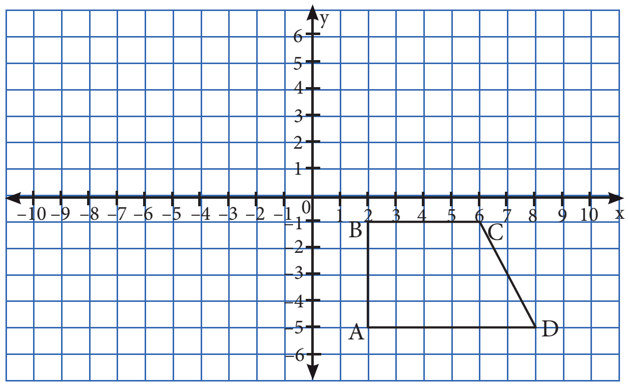
a) (5;1)
b) (4;2)
c) (3;2)
d) (–5;–1)
e) (–5;1)

3. Aplica la traslación $\overrightarrow{5}\ 3\uparrow$ al triángulo RST y señala las coordenadas de R'.



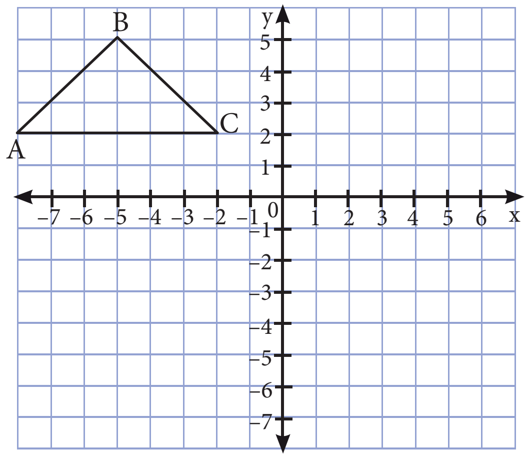
a) (4;8)
b) (–3;2)
c) (2;–3)
d) (2;3)
e) (8;4)

4. Aplica la traslación $\overleftarrow{9}\ 3\uparrow$ al trapecio ABCD y señala las coordenadas de D'.



a) (–1;–2)
b) (1;–2)
c) (–1;2)
d) (3;2)
e) (–3;2)

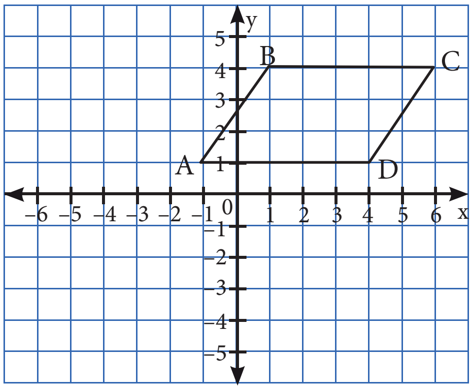
5. ¿Cuáles son las coordenadas del polígono ABC que es simétrico al punto C? Indica las coordenadas del punto A'.



a) (3;4)
b) (2;4)
c) (4;2)
d) (2;3)
e) (4;3)

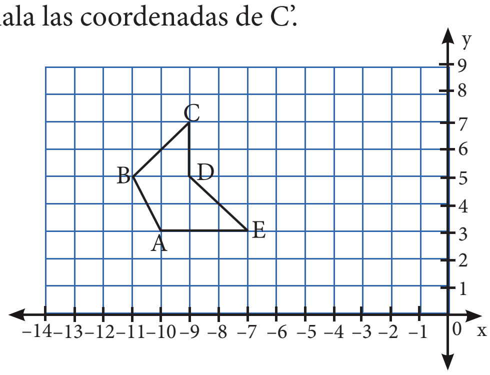
Autoevaluación

1. Aplica una simetría central al paralelogramo con centro en A. Indica las coordenadas de B'.



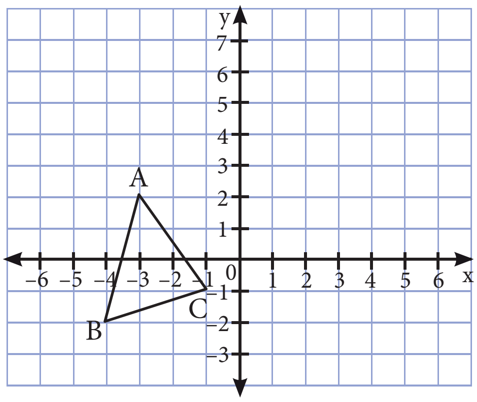
a) (–6; 1) c) (3;–2) e) (–3;–2)
b) (6;–1) d) (–5;1)

2. Aplica la traslación $\overrightarrow{6}$ 2↓ al pentágono ABCDE y luego señala las coordenadas de C'.



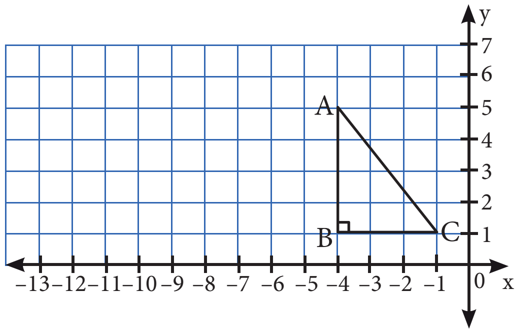
a) (–3;5) c) (–6;–5) e) (–6;5)
b) (–6;4) d) (–4;6)

3. Aplica la traslación 2→ 1↑ y señala las coordenadas de A'.

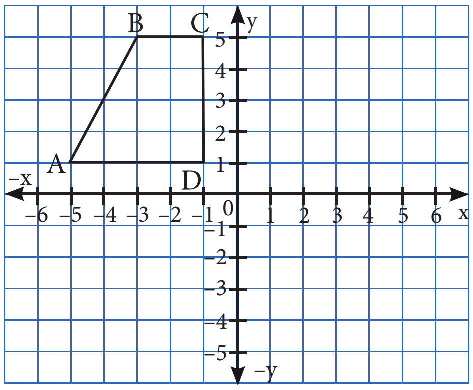


a) (1;3) c) (3;1) e) (3;2)
b) (–1;3) d) (–3;2)

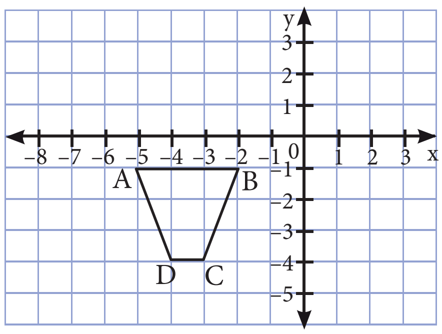
4. Aplica la traslación $\overleftarrow{8}$ 2↑ al triángulo ABC y señala las coordenadas de B'.



5. ¿Cuáles son las coordenadas de polígono A' B' C' D' que es simétrico al punto D?



6. Aplica una simetría central al cuadrilátero ABCD con centro en B. Señala las coordenadas de C'.

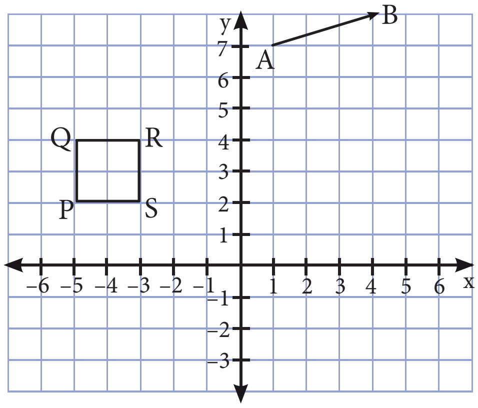


a) (2;3) d) (2;1)
b) (1;–1) e) (2;4)
c) (–1;2)

Tarea

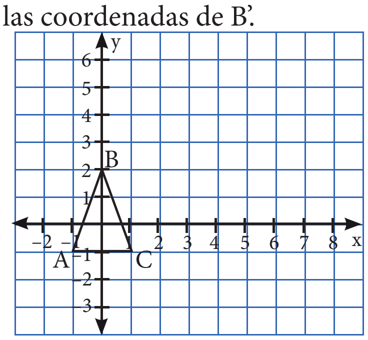
Nivel básico

1. Aplica la traslación $\overrightarrow{AB}$ al cuadrado PQRS. Indica las coordenadas de R'.



a) (6;0)
b) (0;5)
c) (1;6)
d) (6;1)
e) (2; 3)

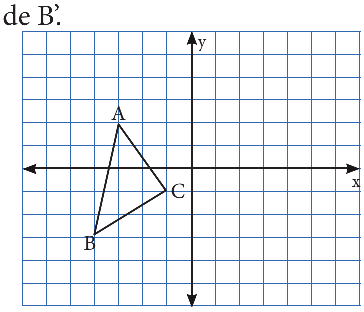
2. Aplica la traslación $\overrightarrow{3}$; $4\uparrow$ al triángulo ABC y luego señala las coordenadas de B'.



a) B(0;2)
b) B(3;2)
c) B(3;6)
d) B(–3;6)
e) B(–3;–6)

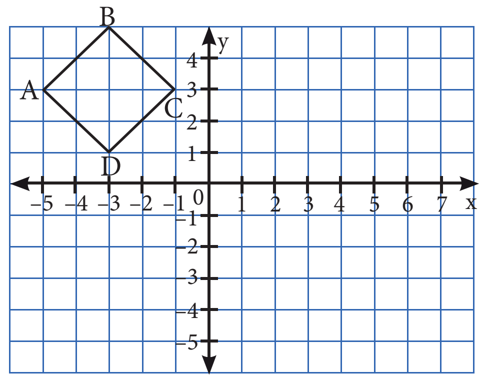
Nivel intermedio

3. Traslada el siguiente polígono de modo que las coordenadas de A' sean (2;4). Señala las coordenadas de B'.



a) (1;–1)
b) (0;1)
c) (2;3)
d) (3;2)
e) (1;3)

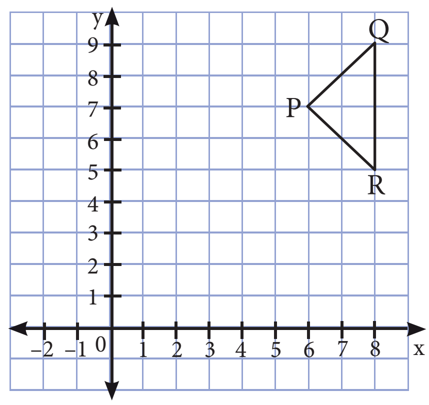
4. Traslada el siguiente polígono de modo que las coordenadas de A' sean (1;–3). Indica las coordenadas de D'.



a) (3;5)
b) (3;–5)
c) (1;2)
d) (4;3)
e) (2;–2)

Nivel avanzado

5. Aplica una simetría central P; luego señala las coordenadas de R'.



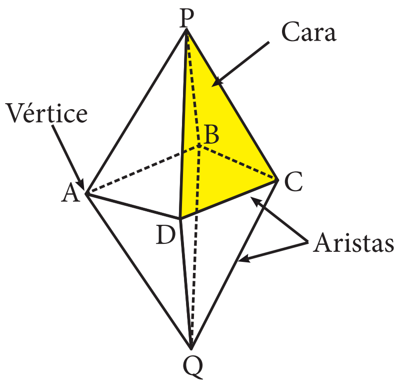
a) (3;6)
b) (4;9)
c) (4;5)
d) (6;7)
e) (7;6)

TEMA 21

POLIEDROS REGULARES: ÁREA LATERAL Y ÁREA TOTAL

1. Poliedro

Es todo cuerpo sólido limitado por superficies planas llamadas caras.



2. Poliedros regulares

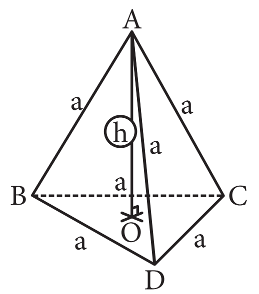
Un poliedro regular es aquel cuyas caras son todas polígonos regulares.

a. Tetraedro regular

Poliedro que tiene 4 caras triangulares, 4 vértices y 6 aristas.

Notación: A – BCD

O: centro de la cara BCD



$A_{ST} = a^2\sqrt{3}$

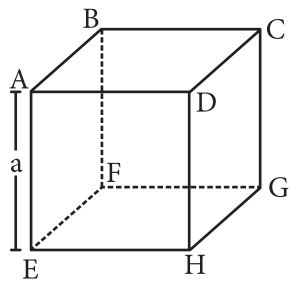
Siendo:

A_{ST}: Área de la superficie tetraédrica.

a: arista

b. Hexaedro regular o cubo

Poliedro que tiene 6 caras cuadradas, 8 vértices y 12 aristas.



$A_{SC} = 6a^2$

Siendo:

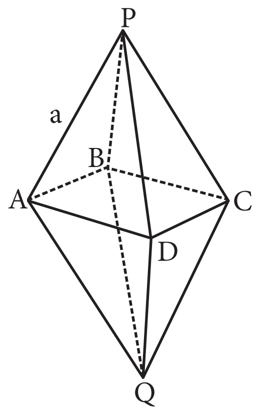
A_{SC}: área de la superficie cúbica.

a: arista

c. Octoedro regular

Poliedro formado por 8 caras triangulares equiláteras.

Notación: P – ABCD – Q



$A_{SO} = 2a^2$

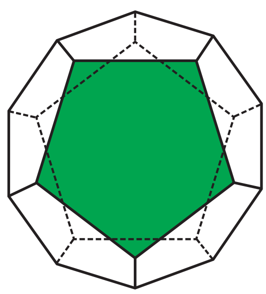
Siendo:

A_{SO}: área de la superficie octaédrica.

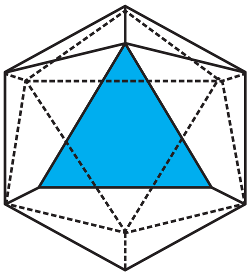
a: arista

d. Dodecaedro regular

Poliedro que tiene 12 caras pentagonales, 20 vértices y 30 aristas.



e. Icosaedro regular
Poliedro que tiene 20 caras triangulares, 12 vértices y 30 aristas.

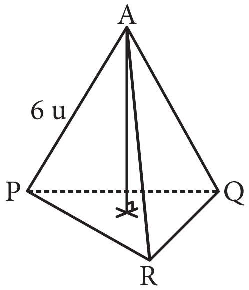


Las áreas de las superficies de los poliedros regulares se deducen de multiplicar el área de una cara por su número de caras.

Trabajando en clase

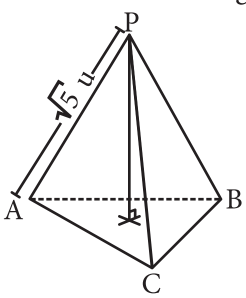
Nivel básico

1. Calcula el área total del tetraedro regular mostrado.



Resolución:
Nos piden: A_{ST}
Observamos que el poliedro es un tetraedro regular
$A_{ST} = a^2\sqrt{3}$
a: arista del tetraedro
$A_{ST} = (6)^2\sqrt{3}$
$\therefore A_{ST} = 36\sqrt{3}\ u^2$

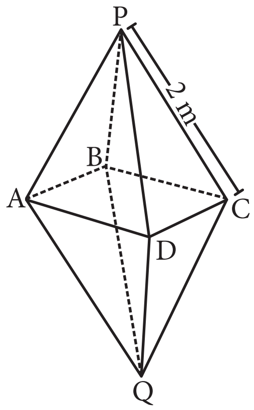
2. Calcula el área total del tetraedro regular mostrado.



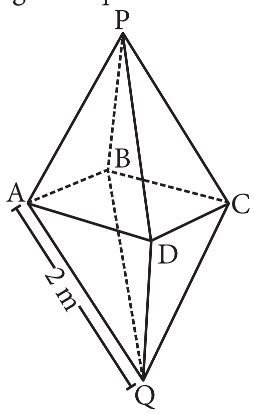
Resolución:

Nivel intermedio

3. Si la figura mostrada es un octaedro regular, calcula el área total.



Resolución:
Nos piden: «A_{SO}»
un octaedro regular es un poliedro en el cual sus caras son triángulos equiláteros.

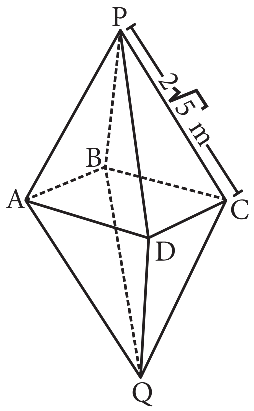


$A_{SO} = 2a^2\sqrt{3}$
$A_{SO} = 2(2)^2\sqrt{3}$
$A_{SO} = 8\sqrt{3}$
$\therefore 8\sqrt{3}\ m^2$

4. Calcula el área total de un octaedro regular de arista 6 m.

Resolución:

5. Calcula el área total del octaedro regular.



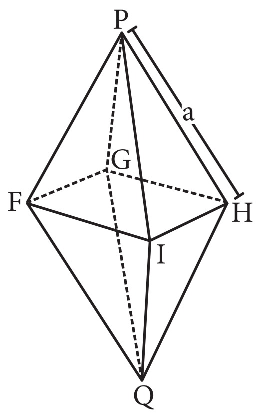
Resolución:

Nivel avanzado

6. Si el área total de un octaedro es $50\sqrt{3}$ m², calcula «a».

Resolución

Piden «a»



$A_{SO} = 50\sqrt{3}\ m^2$

$2a^2\cancel{\sqrt{3}} = 50\cancel{\sqrt{3}}\ m^2$

$a^2 = 25\ m^2$

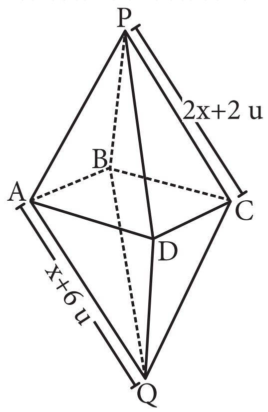
$a = \sqrt{25}\ m^2$

$a = 5$ m

7. El área total de un octaedro es $128\sqrt{3}$ u². Calcula su arista.

Resolución:

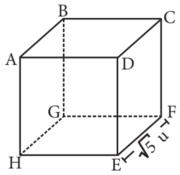
8. Calcula el área total del octaedro regular.



Resolución:

Práctica

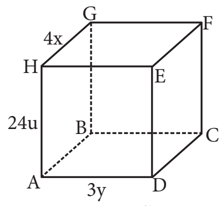
1. En el cubo mostrado, calcula el área total de dicho solido



a) 28 u²
b) 30 u²
c) 32 u²
d) 34 u²
e) 36 u²

Resolución:

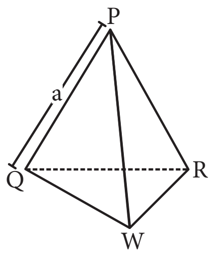
2. Según el cubo mostrado, calcula «x + y».



a) 10 u
b) 12 u
c) 14 u
d) 16 u
e) 20 u

Resolución:

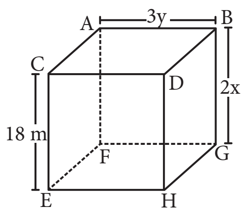
3. El área de la superficie tetraédrica es $144\sqrt{3}$ u²
Calcula la longitud de su arista.



a) 9 u
b) 10 u
c) 11 u
d) 12 u
e) 13 u

Resolución:

4. Según el cubo mostrado, calcula «x + y».

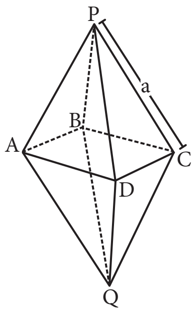


a) 13 m
b) 14 m
c) 15 m
d) 16 m
e) 17 m

Resolución:

Autoevaluación

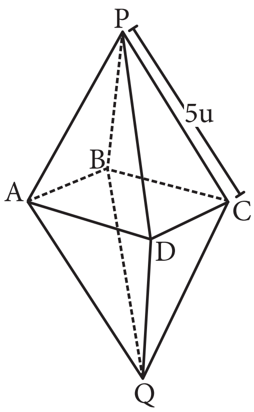
1. El octaedro regular mostrado tiene como área $98\sqrt{3}\,m^2$. Calcula «a».



a) 3 m
b) 5 m
c) 7 m
d) 9 m
e) 11 m

Resolución:

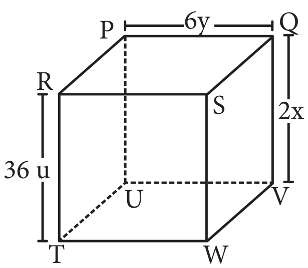
2. Calcula el área total del octaedro regular.



a) $25\sqrt{3}\ u^2$
b) $50\sqrt{3}\ u^2$
c) $100\sqrt{3}\ u^2$
d) $150\sqrt{3}\ u^2$
e) $200\sqrt{3}\ u^2$

Resolución:

3. Según el cubo mostrado, calcula «x – y».



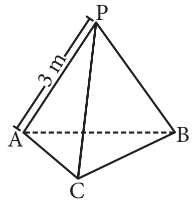
a) 10 u
b) 12 u
c) 14 u
d) 16 u
e) 18 u

Resolución:

Tarea

Nivel básico

1. Calcula el área total del tetraedro regular mostrado.



a) $5\sqrt{3}$ m²
b) $6\sqrt{3}$ m²
c) $7\sqrt{3}$ m²
d) $8\sqrt{3}$ m²
e) $9\sqrt{3}$ m²

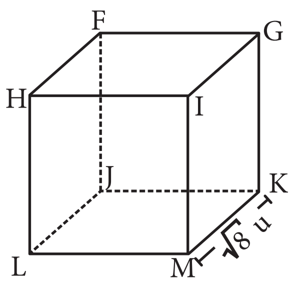
Resolución:

2. ¿Cuántos vértices tiene un triángulo regular?

a) 2
b) 3
c) 6
d) 8
e) 10

Nivel intermedio

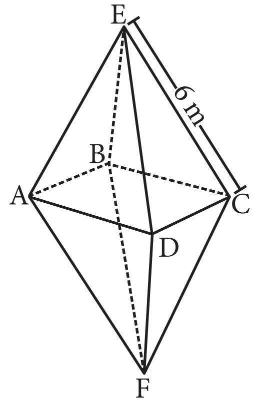
3. En el cubo mostrado, calcula el área total de dicho sólido.



a) 40 u²
b) 44 u²
c) 48 u²
d) 48 u²
e) 50 u²

Resolución:

4. Calcula el área total del octaedro.

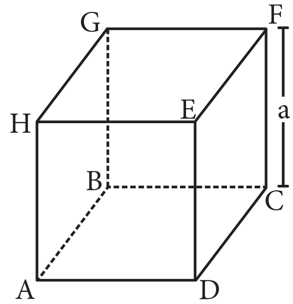


a) $72\sqrt{3}$ m²
b) $73\sqrt{3}$ m²
c) $74\sqrt{3}$ m²
d) $75\sqrt{3}$ m²
e) $76\sqrt{3}$ m²

Resolución:

Nivel avanzado

5. El área total de un hexaedro es 150 m². Calcula «a».



a) 2 m
b) 3 m
c) 4 m
d) 5 m
e) 6 m

Resolución:

TEMA 22

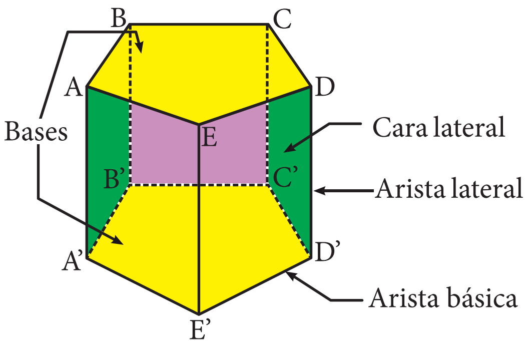
PRISMA RECTO: ÁREA LATERAL Y VOLUMEN

1. Prisma recto

Es un poliedro con dos bases, las cuales son polígonos congruentes ubicados en planos paralelos y cuyas aristas son perpendiculares a la base.

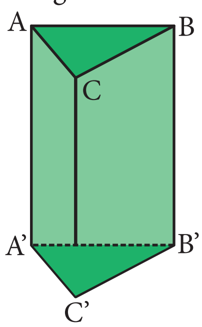
2. Elementos de un prisma

Los prismas se clasifican según la forma de sus bases.



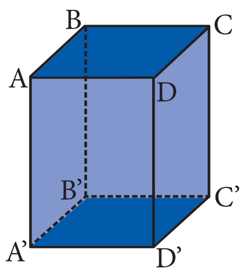
a. Prisma triangular

La base es un triángulo.



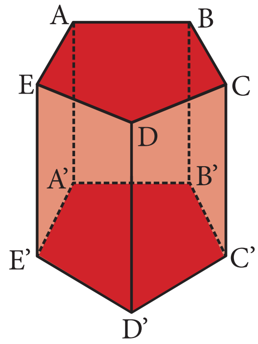
b. Prisma cuadrangular

La base es un cuadrado.



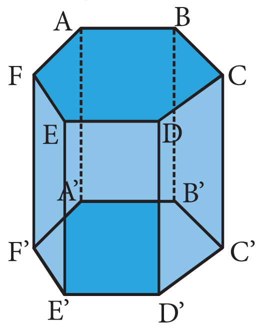
c. Prisma pentagonal

La base es un pentágono.

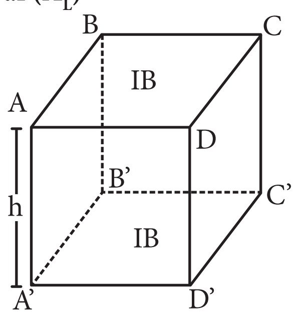


d. Prisma hexagonal

La base es un hexágono.



Área lateral (A_L)



$$A_{lateral} = (2p_B)(h)$$

Donde:
A_{SL}: área de la superficie lateral.
$2P_B$: perímetro de la base.
h: altura

Volumen (V)

$$V = \mathbb{B} \cdot h$$

Donde:
V = área de la base × altura
$\mathbb{B}$: área de la base
h: altura

Los prismas son poliedros que tiene dos bases congruentes y sus caras laterales son paralelogramos.

Trabajando en clase

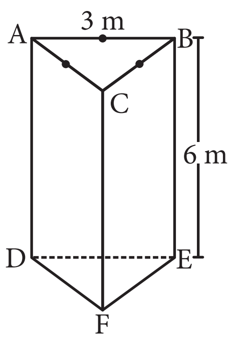
Nivel básico

1. Calcula el A_{SL} (área de la superficie lateral) del prisma triangular recto mostrado.

Resolución:

Nos piden:

$A_{SL} = ?$



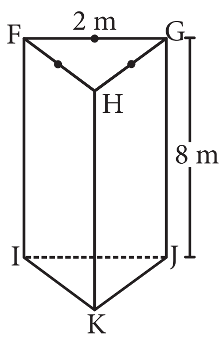
Por fórmula:

$A_{SL} = (2p_{base})(\text{altura})$

$A_{SL} = (9\text{ m})(6\text{ m})$

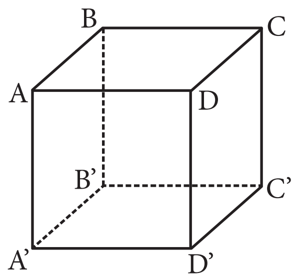
$\therefore A_{SL} = 54\text{ m}^2$

2. Calcula el A_{SL} del prisma rectangular recto mostrado.



Resolución:

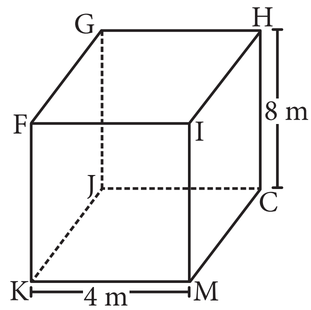
3. Indica el número de caras laterales del siguiente prisma.



Resolución:

Nivel intermedio

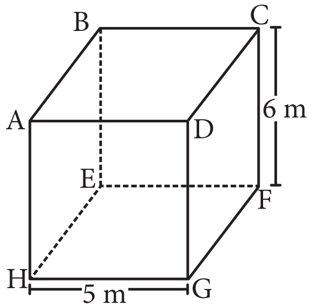
4. Calcula el volumen del prisma cuadrangular regular.



Resolución:
Nos piden: V = ?

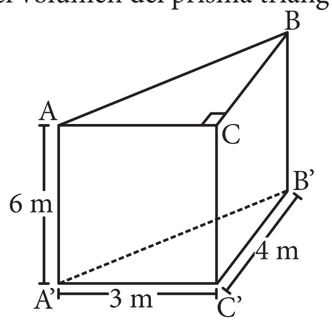
$V = (A_{base})(h)$
$V = (4^2)(8)$
$V = 16 . 8$
$\therefore\ V = 128\ m^3$

5. Calcula el volumen del prisma cuadrangular regular.



Resolución:

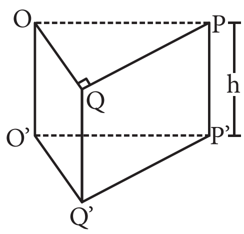
6. Calcula el volumen del prisma triangular recto.



Resolución:

Nivel avanzado

7. El volumen del siguiente prisma triangular recto es 48 m³. Calcula su altura, si el área de su base es 6 m².



Resolución

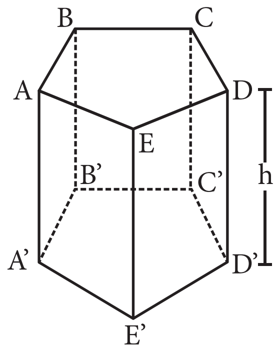
Nos piden: Altura

Por dato: Volumen = $48\ m^3$

$A_{base} = 6\ m^2 \quad V = A_{base} . h \quad 48\ m^3 = 6\ m^2 . h$

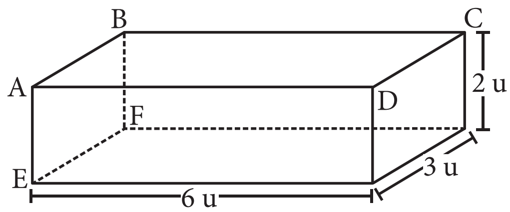
$\dfrac{48\ m^3}{6\ m^2} = h \qquad \therefore\ h = 8\ m$

8. El volumen del siguiente prisma pentagonal recto es 120 m³. Calcula su altura si el área de su base es 24 m².



Resolución:

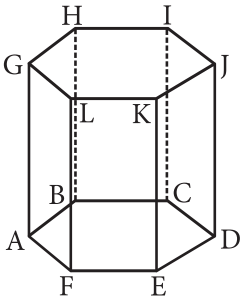
9. Calcula el volumen del siguiente prisma.



Resolución:

Práctica

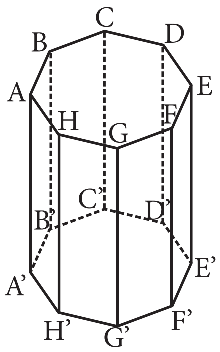
1. Indica el número de caras del siguiente prisma.



a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 10

Resolución:

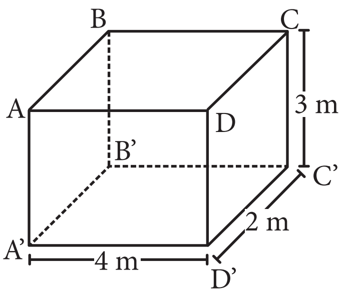
2. Indica el número de caras laterales del siguiente prisma.



a) 3 caras
b) 4 caras
c) 5 caras
d) 8 caras
e) 10 caras

Resolución:

3. Calcula el área de la superficie lateral del prisma mostrado.

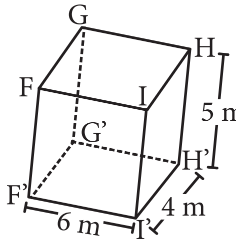


a) 8 m²
b) 16 m²
c) 24 m²
d) 36 m²
e) 48 m²

Resolución:

Autoevaluación

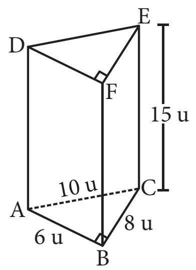
1. Calcula el área de la superficie lateral del prisma mostrado.



a) $24\ m^2$
b) $48\ m^2$
c) $80\ m^2$
d) $100\ m^2$
e) $120\ m^2$

Resolución:

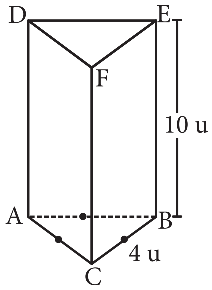
2. Calcula el área de la superficie lateral del siguiente prisma recto.



a) $180\ u^2$
b) $240\ u^2$
c) $300\ u^2$
d) $320\ u^2$
e) $360\ u^2$

Resolución:

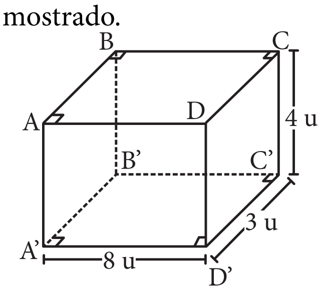
3. Calcula el volumen del prisma triangular recto.



a) $16\sqrt{3}\ u^3$
b) $40\sqrt{3}\ u^3$
c) $48\sqrt{3}\ u^3$
d) $54\sqrt{3}\ u^3$
e) $64\sqrt{3}\ u^3$

Resolución:

4. Calcula la suma de las áreas de las bases del sólido mostrado.



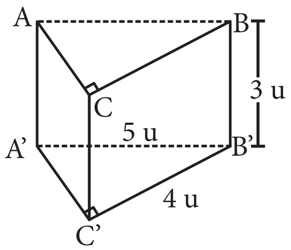
a) $24\ u^2$
b) $36\ u^2$
c) $48\ u^2$
d) $52\ u^2$
e) $96\ u^2$

Resolución:

Tarea

Nivel básico

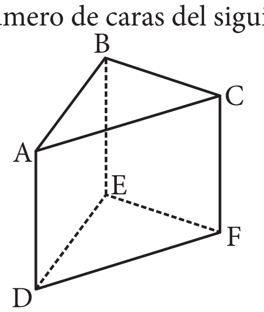
1. Calcula el área de la superficie lateral del prisma triangular recto mostrado.



a) 12 u²
b) 15 u²
c) 30 u²
d) 39 u²
e) 42 u²

Resolución:

2. Indica el número de caras del siguiente prisma.

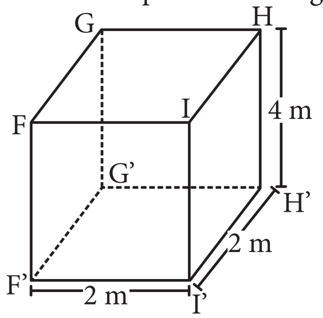


a) 3 caras
b) 4 caras
c) 5 caras
d) 6 caras
e) 8 caras

Resolución:

Nivel intermedio

3. Calcula el volumen del prisma cuadrangular regular.

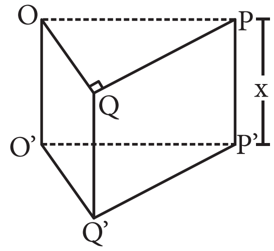


a) 4 m³
b) 8 m³
c) 12 m³
d) 16 m³
e) 24 m³

Resolución:

Nivel avanzado

4. El volumen del siguiente prisma triangular recto es 36 m³. Calcula su altura si el área de su base es 6 m².



a) 4 m b) 5 m c) 6 m d) 12 m e) 16 m

Resolución:

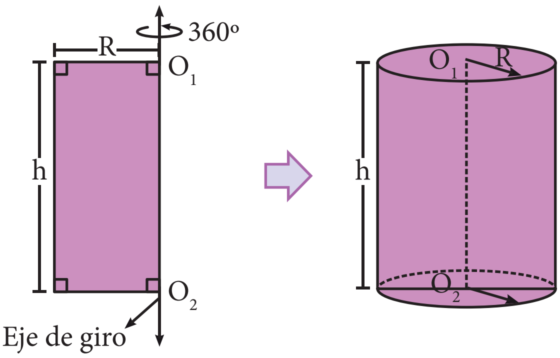
TEMA 23

CILINDRO: ÁREA LATERAL Y VOLUMEN

Los cuerpos redondos son cuerpos geométricos limitados, total o parcialmente, por superficies curvas. Son objetos de mucha utilidad en la vida cotidiana.

Cilindro circular recto

Es llamado también cilindro de revolución, el mismo que se genera cuando una región rectangular gira 360° tomando como eje de giro a la recta que contiene a uno de sus lados.



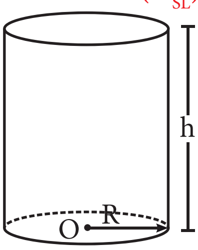
Se cumple: $\boxed{O_1O_2 = h}$

Donde:

h: altura del cilindro

R: radio de la base

Área de la superficie lateral (A_{SL})



$2p_{base} = 2\pi R$ (perímetro de la base)

$A_L = (2p_{base})(\text{altura})$

$$\boxed{A_{SL} = 2\pi Rh}$$

Volumen (V)

$A_{base} = \pi R^2$ (área de la base)

$V = (A_{base})(\text{altura})$

$$\boxed{V = \pi R^2 h}$$

D = 2R

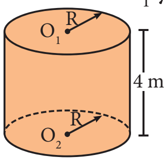
D: diámetro

R: radio

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula el área de la superficie lateral del cilindro circular recto, si R = 2 m. O_1 y O_2 son centros.



Resolución:

Nos piden:

$A_{SL} = ?$

Si R = 2 m, h = 4 m

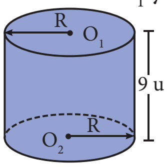
A_{SL} = (perímetro base)(altura)

$A_{SL} = (2P_B)(h) = (2\pi r)(h)$

$A_{SL} = 2\pi(2m)(4m)$

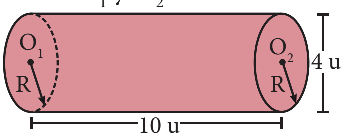
$\therefore A_{SL} = 16\pi\ m^2$

2. Calcula el área de la superficie lateral del cilindro circular recto, si R = 6 u. O_1 y O_2 son centros.



Resolución:

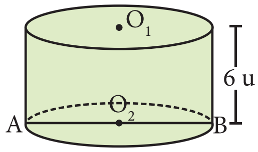
3. Calcula el área de la superficie lateral del cilindro circular recto. O_1 y O_2 son centros.



Resolución:

Nivel intermedio

4. Calcula el volumen del cilindro circular recto mostrado si AB es diámetro y mide 8 u. O_1 y O_2 son centros.



Resolución:

Nos piden: V = ?

Si diámetro = 8 u

Radio = 4 u

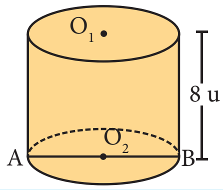
Altura = 4 u

$V = (A_{Base})(\text{altura}) = \pi R^2 h$

$V = \pi(4\ u^2)(6\ u)$

$\therefore V = 96\pi\ u^3$

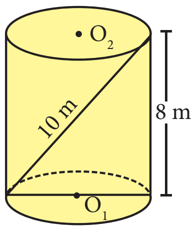
5. Calcula el volumen del cilindro circular recto mostrado si AB es diámetro y mide 6 u. O_1 y O_2 son centros.



Resolución:

Nivel avanzado

6. Calcula el volumen del cilindro recto. O_1 y O_2 son centros.



Resolución

Nos piden: V = ?

Por Pitágoras: $x^2 + 8^2 = 10^2$ $x^2 = 100 - 64$

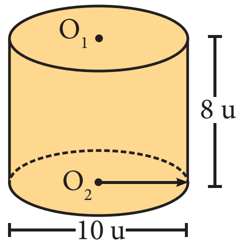
$x^2 = 36$ $x = 6$ m El diámetro es 6 m.

El radio 3 m $V = A_{base} . h$ $V = \pi(3\ m)^2 . (8\ m)$

$\therefore V = 72\pi\ m^3$

Práctica

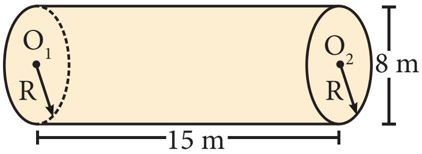
1. Calcula el área de la superficie lateral del cilindro circular recto. O_1 y O_2 son centros.



a) $20\ \pi u^2$
b) $30\ \pi u^2$
c) $40\ \pi u^2$
d) $60\ \pi u^2$
e) $80\ \pi u^2$

Resolución:

2. Calcula el área de la superficie lateral del cilindro circular recto. O_1 y O_2 son centros.



a) $80\ \pi\ m^2$
b) $100\ \pi\ m^2$
c) $120\ \pi\ m^2$
d) $130\ \pi\ m^2$
e) $150\ \pi\ m^2$

Resolución:

3. Calcula el área de la superficie lateral de un cilindro circular recto si R = 2u y su altura mide 5u

a) $5\ \pi\ u^2$
b) $10\ \pi\ u^2$
c) $15\ \pi\ u^2$
d) $20\ \pi\ u^2$
e) $30\ \pi\ u^2$

Resolución:

4. Calcula la altura de un cilindro si tiene $80\pi m^2$ de superficie lateral y 4m de radio de la base.

a) 2 m
b) 3 m
c) 6 m
d) 8 m
e) 10 m

Resolución:

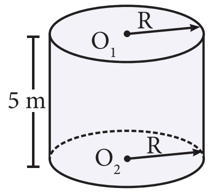
5. Calcula el área de la superficie lateral de un cilindro circular recto, si su diámetro mide 20u y su altura 10u.

a) $50\ \pi\ u^2$
b) $100\ \pi\ u^2$
c) $120\ \pi\ u^2$
d) $200\ \pi\ u^2$
e) $240\ \pi\ u^2$

Resolución:

Autoevaluación

1. Calcula el volumen del cilindro circular recto mostrado si R = 2m. O_1 y O_2 son centros.



a) $5\pi\ m^3$
b) $10\pi\ m^3$
c) $20\pi\ m^3$
d) $25\pi\ m^3$
e) $30\pi\ m^3$

Resolución:

2. Se tiene un cilindro circular recto cuyo radio es 5cm y su altura es igual al diámetro de la base. Calcula su volumen.

a) $100\pi\ cm^3$
b) $50\pi\ cm^3$
c) $200\pi\ cm^3$
d) $250\pi\ cm^3$
e) $300\pi\ cm^3$

Resolución:

3. Se tiene un cilindro circular recto cuyo radio es 2m y su altura el triple de su radio. Calcula A_{SL}.

a) $8\pi\ m^2$
b) $16\pi\ m^2$
c) $24\pi\ m^2$
d) $30\pi\ m^2$
e) $36\pi\ m^2$

Resolución:

4. Calcula el volumen de un cilindro circular recto cuya altura mide 12u y cuyo radio de la base mide la cuarta parte de la altura.

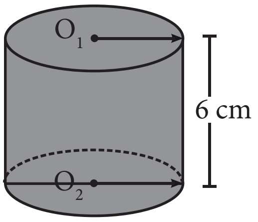
a) $36\pi\ u^3$
b) $108\pi\ u^3$
c) $112\pi\ u^3$
d) $144\pi\ u^3$
e) $154\pi\ u^3$

Resolución:

Tarea

Nivel básico

1. Calcula el área de la superficie lateral del cilindro circular recto, si R = 3 cm. O_1 y O_2 son centros.



a) $12\pi\ cm^2$
b) $16\pi\ cm^2$
c) $24\pi\ cm^2$
d) $30\pi\ cm^2$
e) $36\pi\ cm^2$

Resolución:

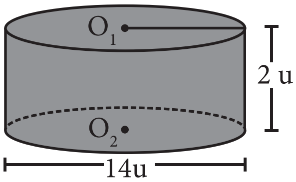
2. Se tiene un cilindro circular recto de radio 5 u y cuya altura es 8. Calcula A_{SL}.

a) $20\pi\ u^2$
b) $30\pi\ u^2$
c) $40\pi\ u^2$
d) $80\pi\ u^2$
e) $100\pi\ u^2$

Resolución:

Nivel intermedio

3. Calcula el volumen del cilindro circular recto mostrado. O_1 y O_2 son centros.



a) $14\pi\ u^3$
b) $18\pi\ u^3$
c) $28\pi\ u^3$
d) $24\pi\ u^3$
e) $22\pi\ u^3$

Resolución:

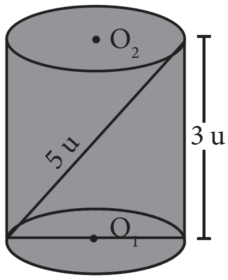
4. Calcula el volumen de un cilindro circular recto cuya altura mide 15 u y cuyo radio de la base mide la tercera parte de la altura.

a) $76\pi\ u^3$
b) $77\pi\ u^3$
c) $80\pi\ u^3$
d) $78\pi\ u^3$
e) $75\pi\ u^3$

Resolución:

Nivel avanzado

5. Calcula el volumen del cilindro circular recto. O_1 y O_2 son centros.



a) $8\pi\ u^3$
b) $12\pi\ u^3$
c) $14\pi\ u^3$
d) $16\pi\ u^3$
e) $24\pi\ u^3$

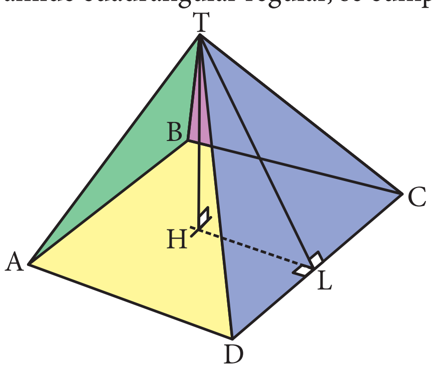
Resolución:

TEMA 24

PIRÁMIDE: ÁREA LATERAL Y VOLUMEN

Las pirámides de Egipto se encuentran en la desierta meseta de Gizeh, a la izquierda del río Nilo. Fueron construidas hace más de 4000 años y son la única maravilla antigua que se conserva.
Estas pirámides servían como tumbas de faraones, quienes eran momificados y puestos dentro, junto con tesoros y objetos personales.

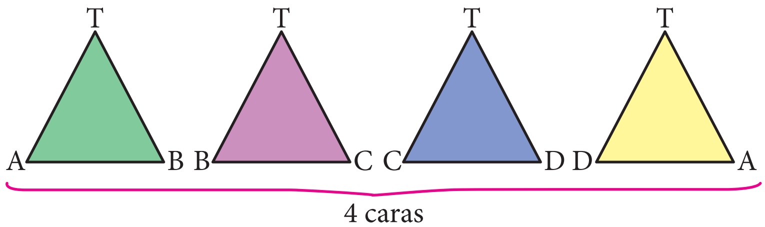
Al sólido geométrico limitado por regiones triangulares y una región poligonal regular llamada base, se le denomina pirámide regular.
En la pirámide cuadrangular regular, se cumple:



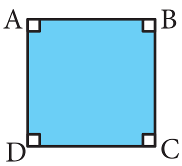
- Vértice: T
- Altura: $\overline{TH}$
- Base: $\square$ ABCD
- Apotema: $\overline{TL}$
- Apotema de la base: $\overline{HL}$

Nota:
Las pirámides se nombran de acuerdo con la cantidad de lados de la base.

Caras laterales



Base



- Número de caras laterales: 4
- Número de caras en total: 5

Denotemos:
- Perímetro de la base: 2p
- Área de la base: A_{Base}
- Área de la superficie lateral: A_{SL}
- Volumen: V

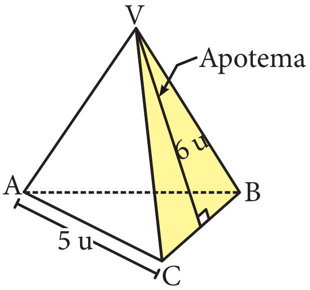
$$A_{SL} = \frac{2p \times (\text{apotema})}{2} \qquad V = \frac{(A_{base}) \times (\text{altura})}{3}$$

En el triángulo THL, se cumple el teorema de Pitágoras.

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula el área de la superficie lateral de la pirámide triangular regular.



Resolución:

Nos piden: A_{SL}

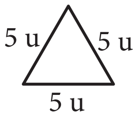
$$A_{SL} = \frac{2p \times (\text{apotema})}{2}$$

2p = perímetro de la base

2p = 5 u + 5 u + 5 u

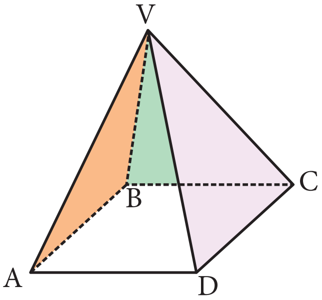
2p = 15 u

Apotema = 6 u



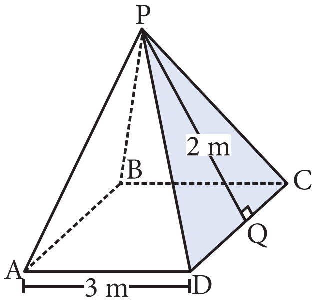
$\Rightarrow A_{SL} = \dfrac{15\text{ u} \times 6\text{ u}}{2} = 45\text{ u}^2$

2. Descompón la superficie lateral de la pirámide cuadrangular regular. Indica cuántas caras laterales tiene.



Resolución:

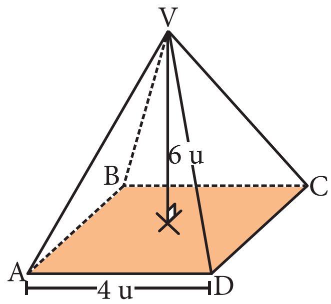
3. Calcula el área de la superficie lateral de la pirámide regular mostrada.



Resolución:

Nivel intermedio

4. Calcula el volumen de la pirámide cuadrangular regular mostrada.



Resolución:

Nos piden: V

$$V = \frac{(A_{base}) \times (\text{altura})}{3}$$

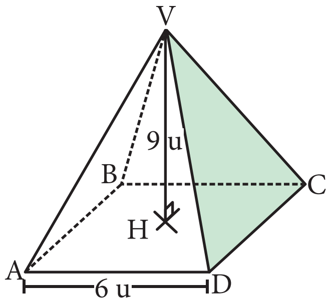
$\Rightarrow A_{base} = (4\text{ u})^2 = 16\text{ u}^2$

$h = 6\text{ u}$

Luego, $V = \dfrac{(16\text{ u}^2)(6\text{ u})}{3}$

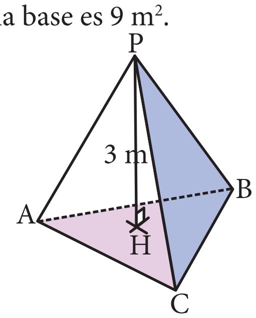
$\therefore V = 32\text{ u}^3$

5. Calcula el volumen de la pirámide cuadrangular regular mostrada.



Resolución:

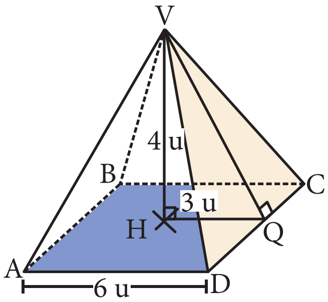
6. Calcula el volumen de la pirámide regular mostrada si el área de la base es 9 m^2.



Resolución:

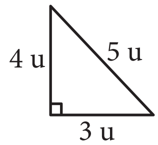
Nivel avanzado

7. Calcula el área de la superficie lateral de la pirámide cuadrangular regular.



Resolución

Por Pitagóras:



Luego: apotema = 5 u

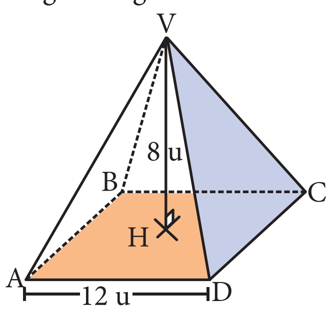
Nos piden: A_{SL}

$$A_{SL} = \frac{(6\text{ u} + 6\text{ u} + 6\text{ u} + 6\text{ u}) \,.\, (5\text{ u})}{2}$$

$$A_{SL} = \frac{(24\text{ u}) \,.\, (5\text{ u})}{2}$$

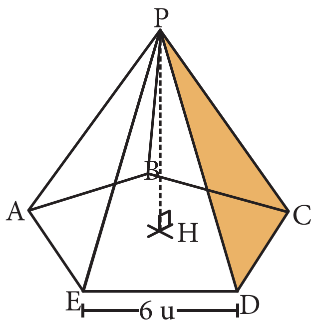
$\therefore A_{SL} = 60\text{ u}^2$

8. Calcula el área de la superficie lateral de la pirámide cuadrangular regular.



Resolución:

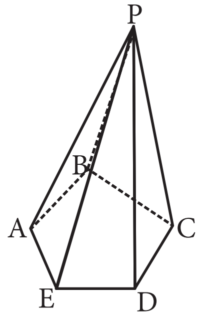
9. Calcula el área de la superficie lateral de la pirámide regular si el apotema mide 8 u.



Resolución:

Práctica

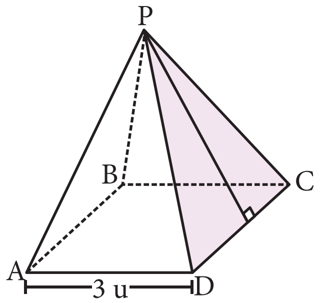
1. Descompón al superficie lateral de la pirámide regular mostrada e indica cuantas caras laterales tiene.



a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

Resolución:

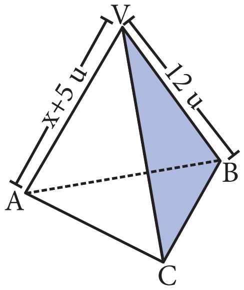
2. Calcula el área de la superficie lateral de la pirámide regular mostrada, si su apotema mide 4u.



a) 6 u²
b) 12 u²
c) 24 u²
d) 48 u²
e) 56 u²

Resolución:

3. Calcula el valor de «x» en la pirámide regular.

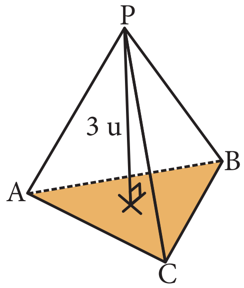


a) 5 u
b) 6 u
c) 7 u
d) 8 u
e) 9 u

Resolución:

Autoevaluación

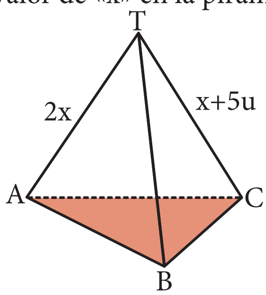
1. Calcula el volumen de la pirámide regular mostrada si el área de la base es $4\sqrt{3}u^2$.



a) $3\sqrt{3}\ u^3$
b) $4\sqrt{3}\ u^3$
c) $5\sqrt{3}\ u^3$
d) $6\sqrt{3}\ u^3$
e) $8\sqrt{3}\ u^3$

Resolución:

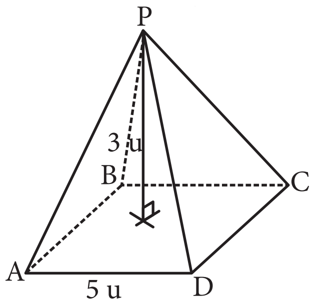
2. Calcula el valor de «x» en la pirámide regular.



a) 4 u
b) 5 u
c) 6 u
d) 7 u
e) 8 u

Resolución:

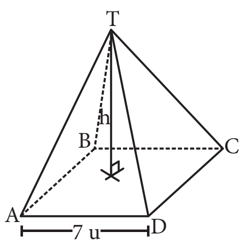
3. Calcula el volumen de la siguiente pirámide regular.



a) $15\ u^3$
b) $20\ u^3$
c) $25\ u^3$
d) $50\ u^3$
e) $75\ u^3$

Resolución:

4. Calcula la altura de la pirámide cuadrangular regular, si el volumen es $98u^3$.



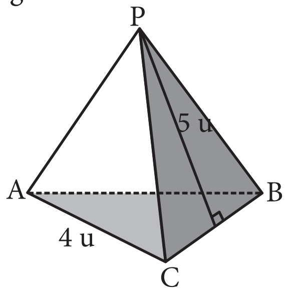
a) 4 u
b) 5 u
c) 6 u
d) 7 u
e) 8 u

Resolución:

Tarea

Nivel básico

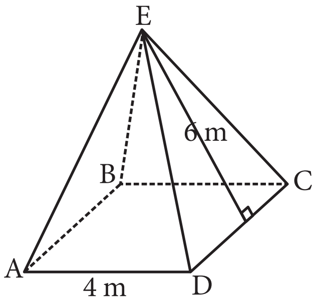
1. Calcula el área de la superficie lateral de la pirámide triangular regular.



a) 30 u^2
b) 45 u^2
c) 52 u^2
d) 64 u^2
e) 72 u^2

Resolución:

2. Calcula el área de la superficie lateral de la pirámide cuadrangular regular.

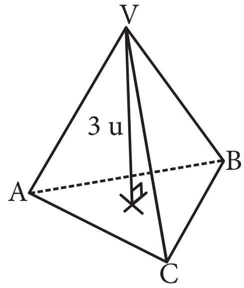


a) 36 m^2
b) 64 m^2
c) 48 m^2
d) 72 m^2
e) 52 m^2

Resolución:

Nivel intermedio

3. Calcula el volumen de la pirámide regular mostrada si el área de la base es $9\sqrt{3}$ u^2.

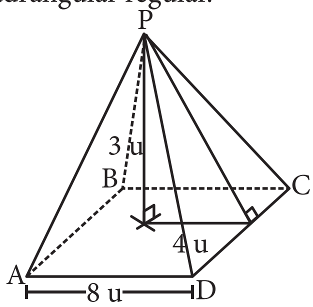


a) $6\sqrt{3}$ u^3
b) $9\sqrt{3}$ u^3
c) $12\sqrt{3}$ u^3
d) $15\sqrt{3}$ u^3
e) $21\sqrt{3}$ u^3

Resolución:

Nivel avanzado

4. Calcula el área de la superficie lateral de la pirámide cuadrangular regular.



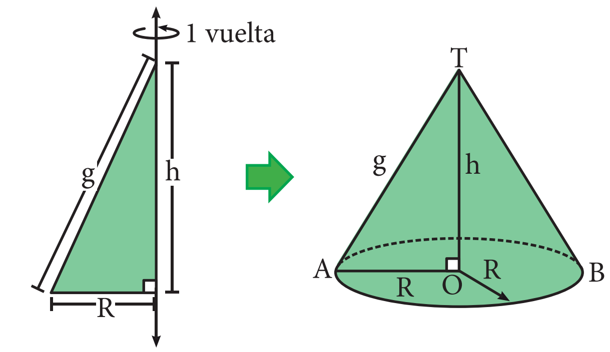
a) 64 u^2
b) 76 u^2
c) 80 u^2
d) 81 u^2
e) 96 u^2

Resolución:

TEMA 25

CONO: ÁREA LATERAL Y VOLUMEN

El cono circular recto o de revolución es el sólido generado por una región triangular (limitada por un triángulo rectángulo) cuando gira una vuelta alrededor de uno de sus catetos.



Del gráfico anterior:
- Generatriz: g
- Altura: h
- Radio de la base: R
- Centro: O
- Vértice: T

$$g^2 = h^2 + R^2$$

Denotemos:
- Área de la base: $\mathbb{B}$ (Base: círculo)
- Área de la superficie lateral: A_{SL}

$$A_{SL} = \pi \,.\, R.\, g$$

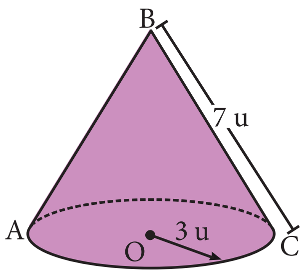
- Volumen: V

$$\mathbb{B} = \pi \,.\, R^2 \qquad V = \frac{\pi \,.\, R^2 \,.\, h}{3}$$

Trabajando en clase

Nivel básico

1. Calcula el área de la superficie lateral del cono circular recto mostrado, si O es centro.



Resolución:

Nos piden:

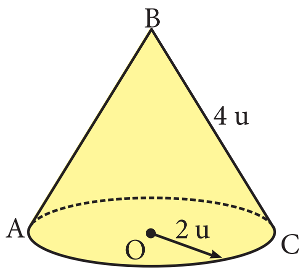
A_{SL}

$$A_{SL} = \pi \,.\, R.\, g$$

$A_{SL} = p \,.\, (3\text{ u})(7\text{ u})$

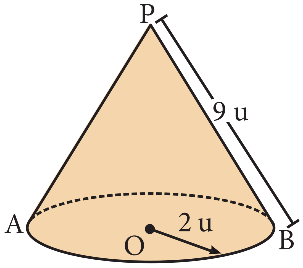
$\therefore\ A_{SL} = 21\pi\text{ u}^2$

2. Calcula el área de la superficie lateral del cono circular recto mostrado, si O es centro.



Resolución:

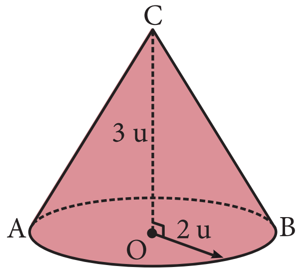
3. Calcula el área de la superficie lateral del cono circular recto mostrado, si O es centro.



Resolución:

Nivel intermedio

4. Calcula el volumen del cono circular recto, si O es centro.



Resolución:

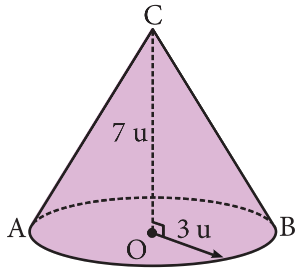
Nos piden: V

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

$\Rightarrow V = \dfrac{\pi(2)^2 \cdot (3)}{3}$

$\therefore\ V = 4\pi\ u^3$

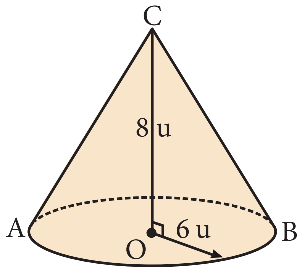
5. Calcula el volumen del cono circular recto, si O es centro.



Resolución:

Nivel avanzado

6. Calcula el área de la superficie lateral del cono circular recto mostrado, si O es centro.

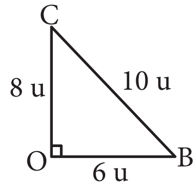


$g^2 = 8^2 + 6^2$
$g^2 = 64 + 36$
$g^2 = 100$
$g = 10$

Resolución

Nos piden: $A_{SL} = \pi \cdot R \cdot g$

De la figura: (Pitágoras)



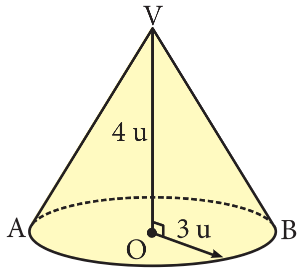
$R = 6$ u $\qquad g = 10$

Reemplazando:

$A_{SL} = \pi \cdot (6\ u)(10\ u)$

$\therefore\ A_{SL} = 60\pi\ u^2$

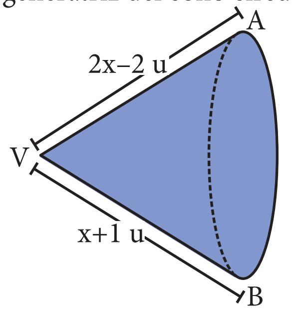
7. Calcula el área de la superficie lateral del cono circular recto mostrado, si O es centro.



Resolución:

Práctica

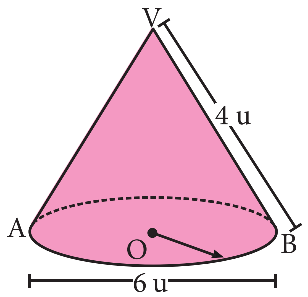
1. Calcula la generatriz del cono circular recto.



a) 2 u
b) 3 u
c) 4 u
d) 5 u
e) 6 u

Resolución:

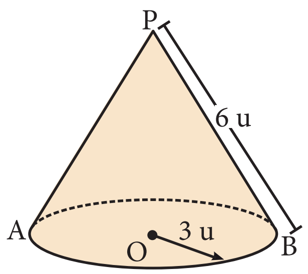
2. Calcula el área de la superficie lateral del cono circular recto mostrado, si O es centro.



a) 8π u²
b) 12π u²
c) 16π u²
d) 24π u²
e) 36π u²

Resolución:

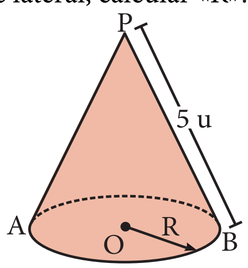
3. Calcula el área de la superficie lateral del cono circular recto mostrado, si O es centro.



a) 6π u²
b) 12π u²
c) 16π u²
d) 18π u²
e) 24π u²

Resolución:

4. El cono circular recto mostrado tiene 20π u² de superficie lateral, calcular «R». O es centro.

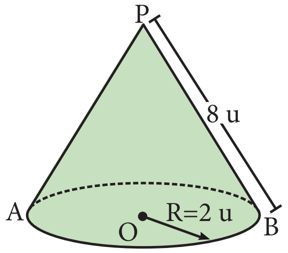


a) 1 u
b) 2 u
c) 3 u
d) 4 u
e) 5 u

Resolución:

Autoevaluación

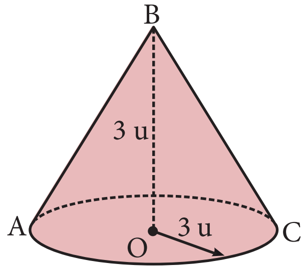
1. Calcula el área de la superficie lateral del cono circular recto, si O es centro.



a) $12\pi\ u^2$
b) $16\pi\ u^2$
c) $20\pi\ u^2$
d) $24\pi\ u^2$
e) $36\pi\ u^2$

Resolución:

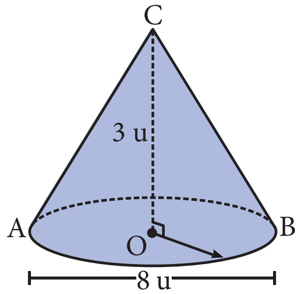
2. Calcula el volumen del cono circular recto, si O es centro.



a) $6\pi\ u^3$
b) $9\pi\ u^3$
c) $12\pi\ u^3$
d) $15\pi\ u^3$
e) $18\pi\ u^3$

Resolución:

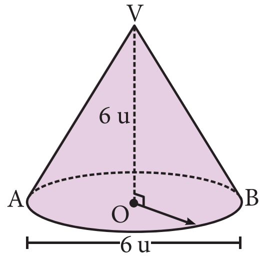
3. Calcula el volumen del cono circular recto, si O es centro.



a) $12\pi\ u^3$
b) $14\pi\ u^3$
c) $16\pi\ u^3$
d) $20\pi\ u^3$
e) $24\pi\ u^3$

Resolución:

4. Calcula el volumen del cono circular recto, si O es centro.



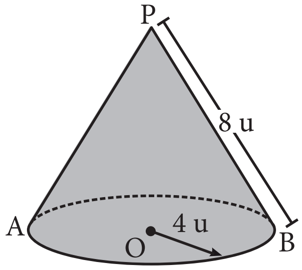
a) $8\pi\ u^3$
b) $12\pi\ u^3$
c) $16\pi\ u^3$
d) $18\pi\ u^3$
e) $22\pi\ u^3$

Resolución:

Tarea

Nivel básico

1. Calcula el área de la superficie lateral del cono circular recto mostrado, si O es centro.



a) $16\pi\ u^2$
b) $18\pi\ u^2$
c) $24\pi\ u^2$
d) $30\pi\ u^2$
e) $32\pi\ u^2$

Resolución:

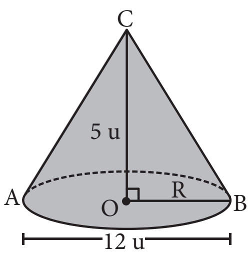
2. El radio de la base de un cono circular recto mide 5 u y la generatriz 9 u. Calcula el área de la superficie lateral.

a) $32\pi\ u^2$
b) $36\pi\ u^2$
c) $39\pi\ u^2$
d) $42\pi\ u^2$
e) $45\pi\ u^2$

Resolución:

Nivel intermedio

3. Calcula el volumen del cono circular recto, si O es centro.

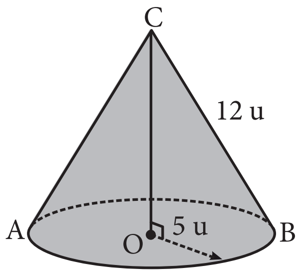


a) $30\pi\ u^3$
b) $60\pi\ u^3$
c) $75\pi\ u^3$
d) $120\pi\ u^3$
e) $180\pi\ u^2$

Resolución:

Nivel avanzado

4. Calcula el volumen del cono circular recto mostrado, si O es centro.



a) $100\pi\ u^3$
b) $110\pi\ u^3$
c) $120\pi\ u^3$
d) $130\pi\ u^3$
e) $180\pi\ u^3$

Resolución:

TEMA 26

UNIDADES PARA MEDIR: CM O MM, LITROS O MILILITROS

Unidades de longitud

La unidad principal de longitud es el metro (m). Para longitudes más grande (por ejemplo la distancia entre ciudades) se utiliza el kilómetro (km). Para indicar la medida de longitudes más pequeñas se utlizia el decímetro (dm), el centímetro (cm) y el milímetro (mm).

1 m y 5 dm

2 dm y 7 cm

28 mm

- 1 kilómetro (km) = 1000 m
- 1 hectómetro (hm) = 100 m
- 1 decámetro (dam) = 10 m
- 1 m = 10 decímetros (dm)
- 1 m = 100 centímetros (cm)
- 1 m = 1000 milímetros (mm)

Conversión de unidades de longitud

De unidad grande a más pequeña, se multiplica.

×10 ×10 ×10 ×10 ×10 ×10

km hm dam m dm cm mm

÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10

De unidad pequeña a más grande, se divide.

Ejemplos de conversión:

¿Cuántos milímetros hay en 50 cm?

Como se convertirá una unidad mayor a una menor, se multiplica 50 × 10 = 500 mm

¿Cuántos metros hay en 800 cm?

Como se convertirá una unidad menor a una mayor, se divide 800 ÷ 100 = 8 m

Unidades de capacidad

Se le llama a la cantidad de líquido que cabe en un recipiente.

Al igual que las unidades de longitud, las de capacidad también tienen otras unidades:

- 1 kilolitro (kl) = 1000 litros
- 1 hectolitro (hl) = 100 litros
- 1 decalitro (dal) = 10 litros
- 1 litro = 10 decilitros (dl)
- 1 litro = 1000 mililitros (ml)

La unidad principal de capacidad es el litro (L).

Conversión de unidades de capacidad

De unidad grande a más pequeña, se multiplica.

×10 ×10 ×10 ×10 ×10 ×10

kl hl dal L dl cl ml

÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10 ÷10

De unidad pequeña a más grande, se divide.

Ejemplos de conversión:

¿Cuántos mililitros hay en 2 litros?

Como se convertirá una unidad mayor a una mejor, se multiplica 2 × 1000 = 2000 ml

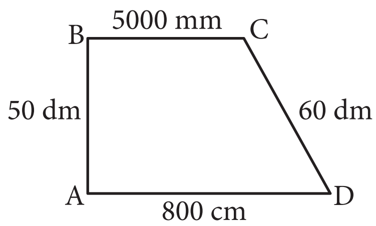
¿Cuántos litros hay en 90 dl?

Como se convertirá una unidad menor a una mayor, se divide 90 ÷ 10 = 9 litros

Trabajando en clase

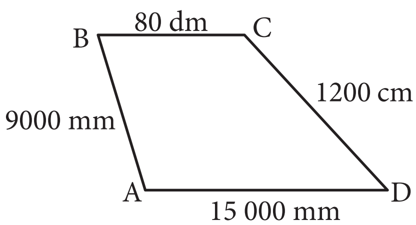
Nivel básico

1. Calcula el perímetro (en metros) del siguiente terreno.



Resolución:
Nos piden: Perímetro en metros, tenemos que hacer conversiones:
50 dm equivale a 5 m
60 dm equivale a 6 m
800 cm equivale a 8 m
5000 mm equivale a 5 m
Luego el perímetro será:
2p = 5 m + 6 m + 8 m + 5 m
∴ 2p = 24 m

2. Calcula el perímetro (en metros) del siguiente terreno.



Resolución:

Nivel intermedio

3. José compró una gaseosa de 3000 ml; Juan, una de 20 dl; y Pedro, una de 1L. ¿Cuántos litros de gaseosa compraron en total?
Resolución:
Nos piden: Total de litros comprados
3000 ml ~ 3000 ÷ 1000 = 3 L
20 dl ~ 20 ÷ 10 = 2 L
1 L ~ = 1 L
Total de militros comprados:
3 L + 2 L + 1 L = 6 litros

4. Ana compró una gaseosa de 2 L; Teresa, una de 30 dl; y Paola, una de 1000 ml. ¿Cuántos litros de gaseosa compraron en total?

Resolución:

Nivel avanzado

5. Los excursionistas de un colegio camina el 1er día 1,5 km; el segundo día 36 600 cm y el tercer día 9000 dm. Calcula ¿cuántos metros caminaron en los 3 días?

Resolución
Nos piden: distancia en m.
1,5 km ~ 1,5 × 1000 = 1500 m
36 600 cm ~ 36 600 ÷ 100 = 366 m
9000 dm ~ 9000 ÷ 10 = 900 m
En total caminaron:
1500 m + 366 m + 900 m = 2766 m

6. Antonio recorre en un auto 7,5 km, en ómnibus 500 hm y camina 5000 dm. Calcula ¿cuántos metros recorre en total?

Resolución:

Práctica

1. Un ciclista recorre el primer día 30hm; el segundo día, 7km 2dam y el tercer día, 500dam. ¿Cuántos m recorrió en total?

a) 15 000 m
b) 15 010 m
c) 15 020 m
d) 15 030 m
e) 15 040 m

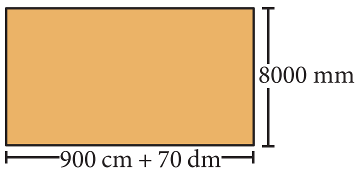
Resolución:

2. Cuando Raquel va al colegio, ella tiene que considerar las siguientes longitudes para llegar: 2 dam camina hasta el paradero y 12,55km en ómnibus y 3hm a pie. ¿Cuántos m recorre en total?

a) 11 800 m
b) 12 870 m
c) 13 800 m
d) 14 800 m
e) 15 800 m

Resolución:

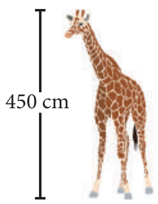
3. Calcula el perímetro (en metros) del siguiente terreno



a) 16 m
b) 24 m
c) 32 m
d) 48 m
e) 60 m

Resolución:

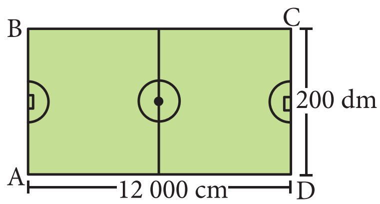
4. ¿Cuántos metros mide la jirafa?



a) 0,45 m
b) 4,5 m
c) 5 m
d) 4500 m
e) 45 m

Resolución:

5. Calcula el perímetro (en metros) del siguiente terreno.

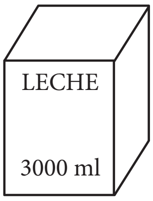


a) 140 m
b) 240 m
c) 280 m
d) 300 m
e) 340 m

Resolución:

Autoevaluación

1. El siguiente recipiente ¿cuántos litros tiene de capacidad?



a) 2 litros
b) 3 litros
c) 0,3 litros
d) 30 litros
e) 300 litros

Resolución:

2. El diámetro de la Tierra 12 756 km y el Venus 12 200 km. ¿Cuántos metros excede el diámetro de la Tierra al de Venus?

a) 526 000 metros
b) 536 000 metros
c) 546 000 metros
d) 556 000 metros
e) 566 000 metros

Resolución:

3. Tengo 4 barriles de vino de 10 litros cada uno, ¿Cuántos botellas de 500 ml podré llenar?

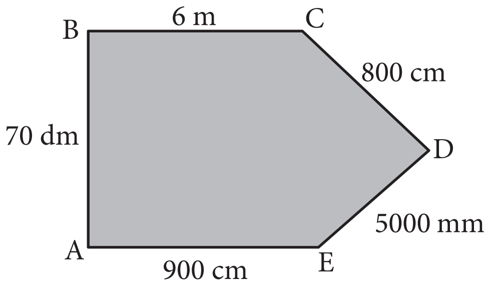
a) 40
b) 50
c) 60
d) 70
e) 80

Resolución:

Tarea

Nivel básico

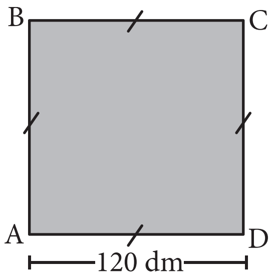
1. Calcula el perímetro (en metros) del siguiente terreno.



a) 25 m c) 35 m e) 45 m
b) 30 m d) 40 m

Resolución:

2. Calcula el perímetro (en metros) del siguiente terreno.



a) 24 m c) 36 m e) 48 m
b) 30 m d) 42 m

Resolución:

3. ¿Cuántos milímetros hay en 6 m?

a) 60 mm d) 60 000 mm
b) 600 mm e) 600 000 mm
c) 6000 mm

Resolución:

Nivel intermedio

4. Teresa compró una gaseosa de 2000 mL; Juana, una de 300 cL; y Rosa una de 20 dL. ¿Cuántos litros de gaseosa compraron en total?

a) 4 L d) 7 L
b) 5 L e) 8 L
c) 6 L

Resolución:

Nivel avanzado

5. Tres amigos caminan el primer día 3,7 km; el segundo día 80 000 cm y el tercer día 7000 dm. Calcula ¿cuántos metros caminaron en los 3 días?

a) 5200 m d) 5800 m
b) 5400 m e) 6200 m
c) 5600 m

Resolución:

TEMA 27

VOLUMEN DE PRISMAS EN UNIDADES ARBITRARIAS DE MEDIDA (M, CM, MM)

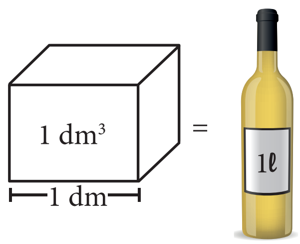
Para medir volúmenes se usan mayormente cubos cuyas aristas miden 1 m; 1 dm; 1 cm o 1 mm.

Si las aristas de un cubo miden	Entonces su volumen es de
1 mm	1 mm^3 (milímetro cúbico)
1 cm	1 cm^3 (centímetro cúbico)
1 dm	1 dm^3 (decímetro cúbico)
1 m	1 m^3 (metro cúbico)

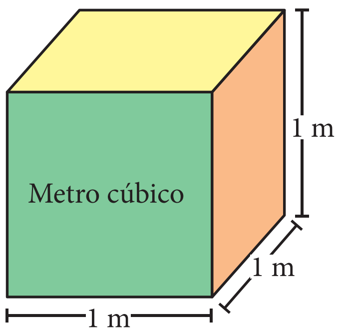
En el caso de líquidos y cuerpos huecos se utilizan en vez de dm^3 y cm^3, las unidades litros (ℓ) y millitros (mℓ).

Entonces:

1 dm^3 = 1ℓ
1 cm^3 = 1 mℓ



Unidad de capacidad



Metro cúbico es el volumen de un cubo que tiene un metro de lado.
Se simboliza: m^3
La capacidad de un metro cúbico es de 1000 litros.

Conversión de medidas de volumen

de unidad grande a más pequeña, se multiplica.

$$m^3 \xrightarrow{\times 1000} dm^3 \xrightarrow{\times 1000} cm^3 \xrightarrow{\times 1000} mm^3$$

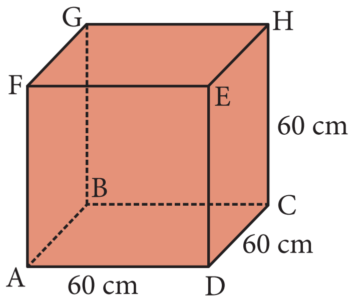
de unidad pequeña a más grande, se divide.

1 m^3 = 1000 ℓ

Trabajando en clase

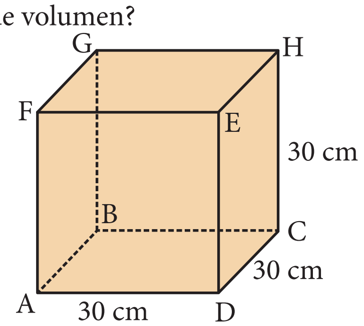
Nivel básico

1. Si un cubo tiene 60 cm de arista, ¿cuántos litros tiene un volumen?



Resolución:
Nos piden:
$V = a^3$
$V = (60\ \text{cm})(60\ \text{cm})(60\ \text{cm})$
$V = 216\,000\ \text{cm}^3$
$\text{dm}^3 \quad \text{cm}^3$
$\div 1000$
$216\,000\ \text{cm}^3 = 216\ \text{dm}^3$
Si $1\ \text{dm}^3 = 1\ \ell$
$216\ \text{dm}^3 = 216\ \ell$

2. Si un cubo tiene 30 cm de arista, ¿cuántos litros tiene de volumen?



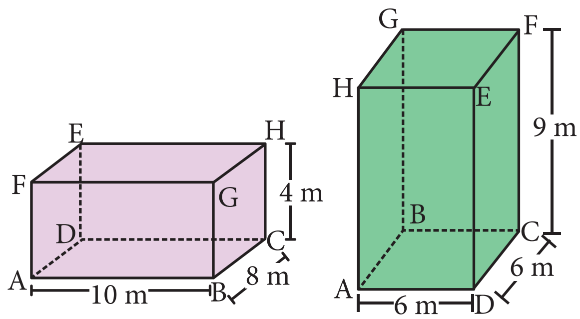
Resolución:

3. Un barco transporta 7000 litros de vino, ¿cuántos metros cúbicos transporta?

Resolución:

Nivel intermedio

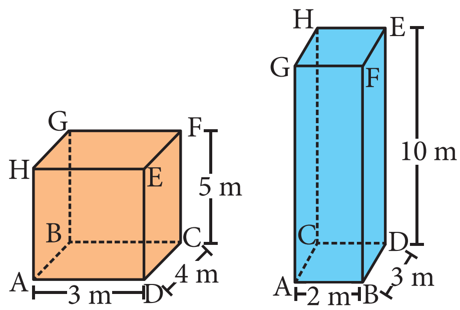
4. ¿Cuál de los recipientes contiene la mayor cantidad de líquido? (Expresa en litros).



(I) (II)

Resolución:
$V_I = (10\ \text{m})(8\ \text{m})(4\ \text{m})$
$V_I = 320\ \text{m}^3$
$V_I = 320\,000\ \ell \quad V_{II} = (6\ \text{m})(6\ \text{m})(9\ \text{m})$
$V_{II} = 324\ \text{m}^3$
$V_{II} = 324\,000\ \ell \quad \therefore$ El mayor es el II

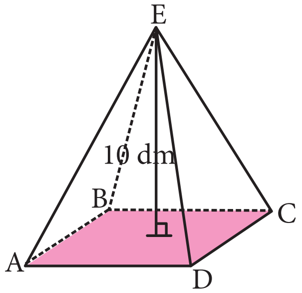
5. ¿Cuál de los recipientes tiene mayor volumen? (Expresa en litros).



(I) (II)

Resolución:

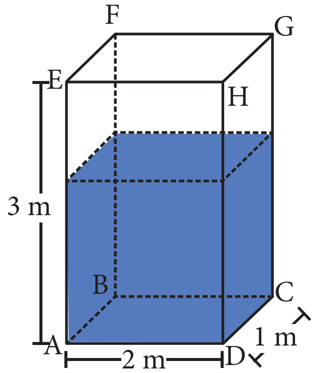
6. Calcula el volumen del siguiente sólido geométrico en litros si el $A_{base} = 16\ dm^2$ y $h = 10\ dm$.



Resolución:

Nivel avanzado

7. El recipiente contiene los 3/5 de su capacidad total; calcula la cantidad de litros que falta.



Resolución

$V = (3\ m)(2\ m)(1\ m)$

$V = 6\ m^3$

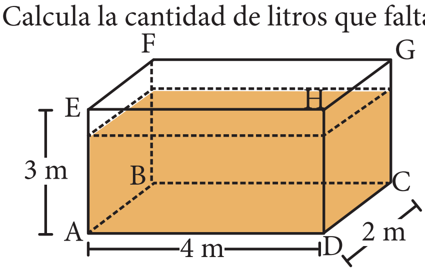
$6\ m^3 = 6000$ litros

Contiene $\frac{3}{5}(6000\ \ell)$

Contiene: $3600\ \ell$

Falta: $2400\ \ell$

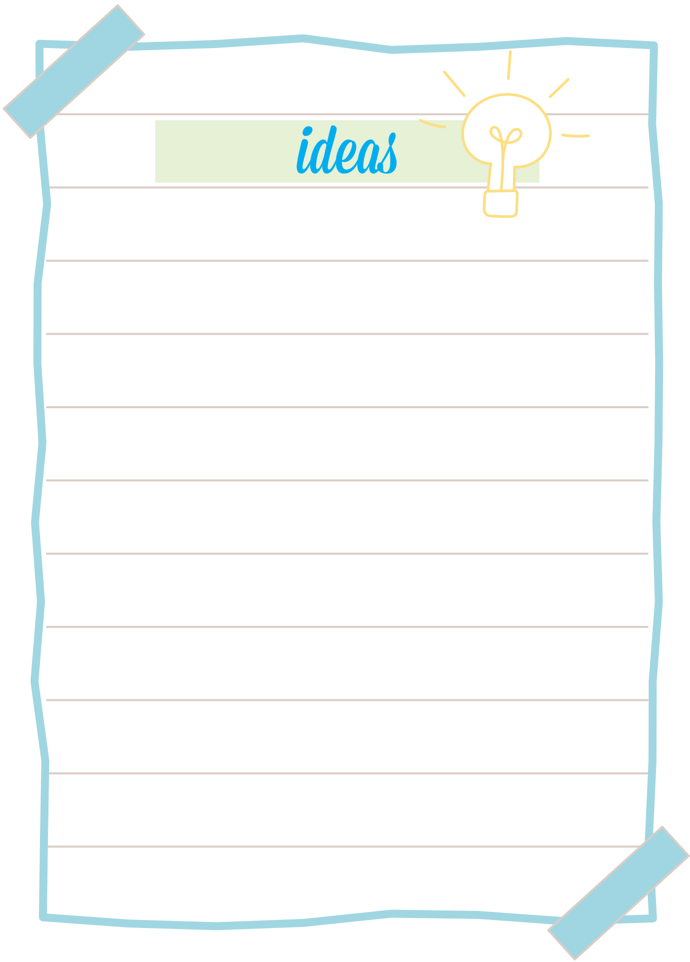
8. El recipiente contiene los 4/5 de su capacidad total. Calcula la cantidad de litros que falta.



Resolución:

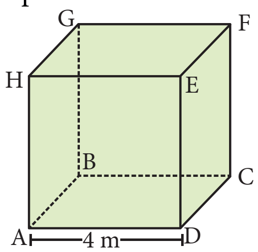
9. Se desea llenar de agua una piscina, que mide 20 m de largo, 8 m de ancho y 2,5 m de profundidad. ¿Cuántos litros de agua serán necesarios?

Resolución:



Práctica

1. Si un cubo mide 4m por cada lado ¿Cuántos litros de agua puede almacenar?



a) 4000 L
b) 8000 L
c) 16 000 L
d) 32 000 L
e) 64 000 L

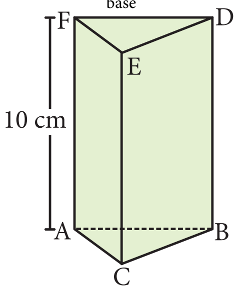
Resolución:

2. Un camión cisterna transporta 7000 litros de agua, ¿Cuántos metros cúbicos transporta?

a) 70 m^3
b) 700 m^3
c) 0,7 m^3
d) 7 m^3
e) 0,07 m^3

Resolución:

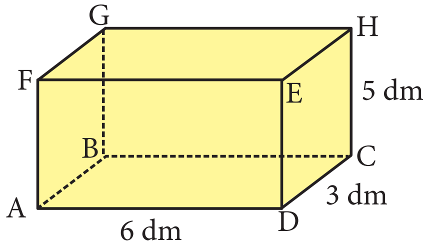
3. Calcula el volumen en litros del siguiente prisma triangular si el A_{base} = 600 cm^2



a) 3 L
b) 20 L
c) 60 L
d) 6 L
e) 30 L

Resolución:

4. Calcula el volumen en litros del recipiente mostrado



a) 900 L
b) 9 L
c) 80 L
d) 90 L
e) 120 L

Resolución:

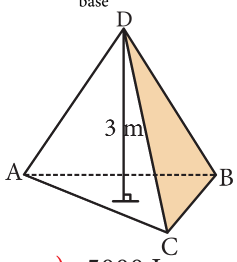
Autoevaluación

1. Si un vinatero compra 3m3 y vende 1280 litros, ¿Cuántos litros del vino faltan vender?

a) 1700 L
b) 1720 L
c) 1820 L
d) 1850 L
e) 1900 L

Resolución:

2. Calcula el volumen del siguiente sólido geométrico en litros si el $A_{base} = 6m^2$



a) 600 L
b) 17 0000 L
c) 5000 L
d) 19 0000 L
e) 18 0000 L

Resolución:

3. Calcula el volumen en litros de un prisma cuadrangular regular cuyo lado de la base mide 5m y su altura mide 8m

a) 50 000 L
b) 400 000 L
c) 150 000 L
d) 200 000 L
e) 250 000 L

Resolución:

4. Se tiene una caja de 1,5 m por cada lado, ¿Cuántos litros de agua caben?

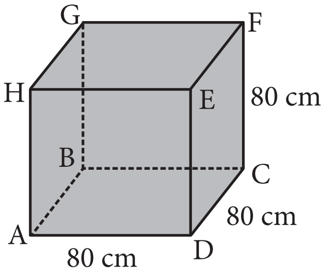
a) 3200 ℓ
b) 3360 ℓ
c) 3375 ℓ
d) 3380 ℓ
e) 2250 ℓ

Resolución:

Tarea

Nivel básico

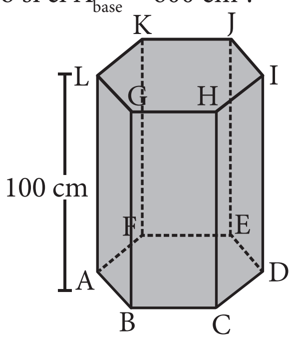
1. Si el cubo tiene 80 cm de arista, ¿cuántos litros tiene de volumen?



a) 80 L
b) 64 L
c) 512 L
d) 600 L
e) 800 L

Resolución:

2. Calcula el volumen en litros del siguiente sólido geométrico si el A_{base} = 600 cm^2.

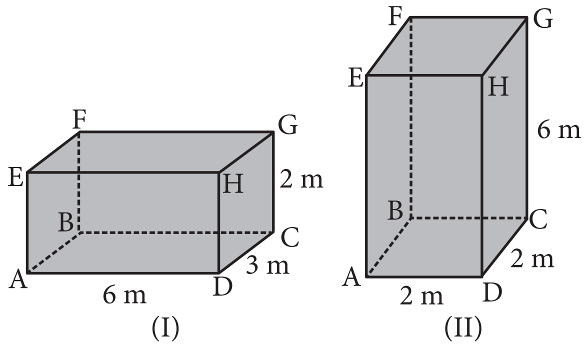


a) 6 L
b) 60 L
c) 600 L
d) 6000 L
e) 60 000 L

Resolución:

Nivel intermedio

3. ¿Cuál de los prismas mostrados tienen mayor volumen? (Expresar en litros).

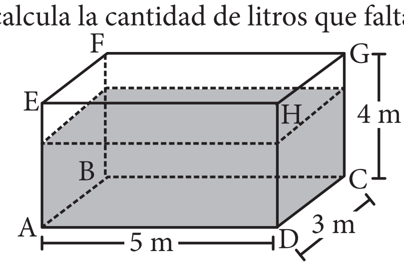


a) 12 000 L (I)
b) 18 000 L(II)
c) 36 000 L (I)
d) 72 000; (I)
e) 84 000; (II)

Resolución:

Nivel avanzado

4. El recipiente contiene los 4/5 de su capacidad total; calcula la cantidad de litros que falta.



a) 8000 L
b) 10 000 L
c) 12 000 L
d) 15 000 L
e) 60 000 L

Resolución: