

Similarità di sottografi nelle reti complesse



Gaspare Ferraro

Relatori

Prof. Roberto Grossi

Prof. Andrea Marino

Università di Pisa
Dipartimento di Informatica

Pisa, 1 dicembre 2017

Parte I

Il problema



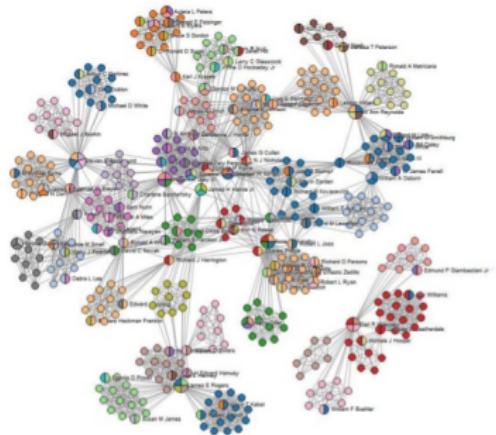
Reti complesse

Grafi con caratteristiche topologiche non banali che occorrono modellando sistemi reali (quali social network, computer network, collaboration network...).



Reti complesse

Grafi con caratteristiche topologiche non banali che occorrono modellando sistemi reali (quali social network, computer network, collaboration network...).

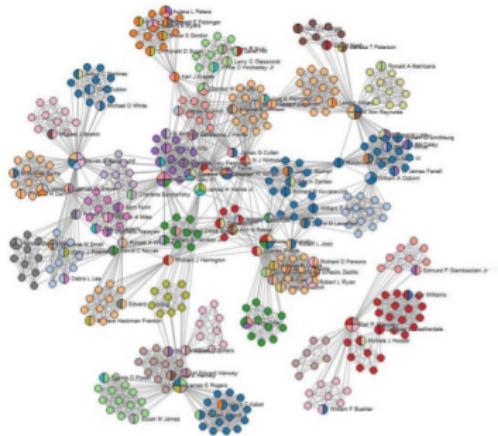


Cluster di amicizie in un social network



Reti complesse

Grafi con caratteristiche topologiche non banali che occorrono modellando sistemi reali (quali social network, computer network, collaboration network...).



Cluster di amicizie in un social network



Rotte dei voli commerciali

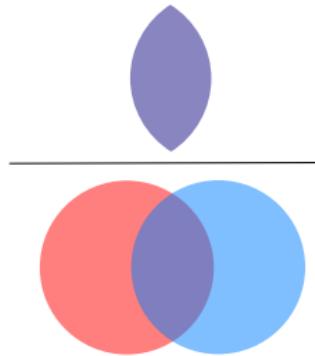
Indici di similarità



Indici di similarità

Jaccard

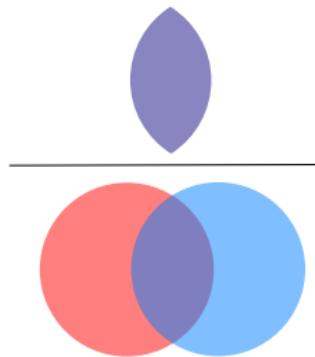
$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$



Indici di similarità

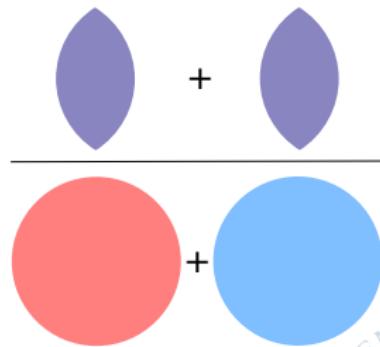
Jaccard

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$



Bray-Curtis

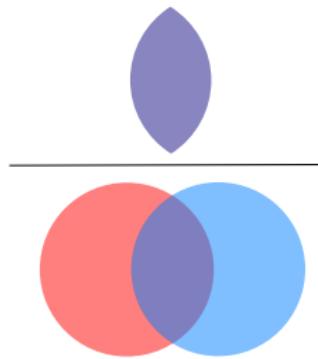
$$BC(A, B) = \frac{2 \times |A \cap B|}{|A| + |B|}$$



Indici di similarità

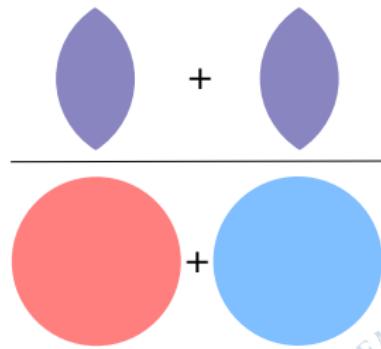
Jaccard

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$



Bray-Curtis

$$BC(A, B) = \frac{2 \times |A \cap B|}{|A| + |B|}$$



$J(A, B) = BC(A, B) = 0$ se $A \cap B = \emptyset$

$J(A, B) = BC(A, B) = 1$ se $A = B$



Reti etichettate e q -grammi

"Nessun uomo è un'isola, completo in se stesso; ogni uomo è un pezzo del continente, una parte del tutto."

John Donne

Analizzare non solo l'insieme dei nodi, ma anche la loro interfaccia verso l'esterno!



Reti etichettate e q -grammi

"Nessun uomo è un'isola, completo in se stesso; ogni uomo è un pezzo del continente, una parte del tutto."

John Donne

Analizzare non solo l'insieme dei nodi, ma anche la loro interfaccia verso l'esterno!
Come modellare le interazioni?



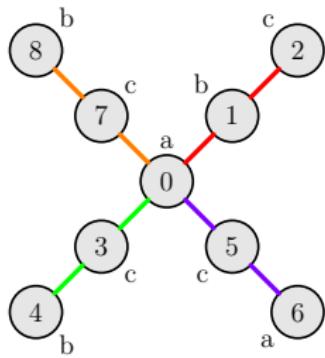
Reti etichettate e q -grammi

"Nessun uomo è un'isola, completo in se stesso; ogni uomo è un pezzo del continente, una parte del tutto."

John Donne

Analizzare non solo l'insieme dei nodi, ma anche la loro interfaccia verso l'esterno!
Come modellare le interazioni?

Rete etichettata



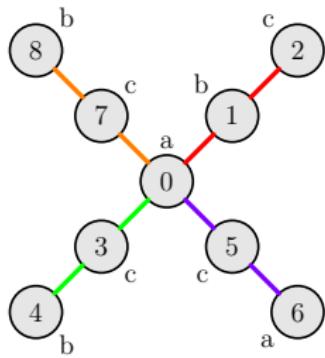
Reti etichettate e q -grammi

"Nessun uomo è un'isola, completo in se stesso; ogni uomo è un pezzo del continente, una parte del tutto."

John Donne

Analizzare non solo l'insieme dei nodi, ma anche la loro interfaccia verso l'esterno!
Come modellare le interazioni?

Rete etichettata



q-grammi: sottosequenza di q elementi consecutivi in un testo

+

q-path: cammino di q nodi *distinti* collegati in un grafo



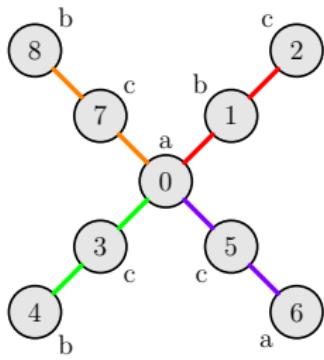
Reti etichettate e q -grammi

"Nessun uomo è un'isola, completo in se stesso; ogni uomo è un pezzo del continente, una parte del tutto."

John Donne

Analizzare non solo l'insieme dei nodi, ma anche la loro interfaccia verso l'esterno!
Come modellare le interazioni?

Rete etichettata



q -grammi: sottosequenza di q elementi consecutivi in un testo

+

q -path: cammino di q nodi *distinti* collegati in un grafo

Esempio 3-grammi che terminano in 0:

- cba: (2-1-0)
- bca: (4-3-0 , 8-7-0)
- aca: (6-5-0)



Frequenze dei q -grammi

Notazione:

$f_X[w] = y \rightarrow$ Il q -gramma w ha frequenza y nei q -path che terminano in nodi di X

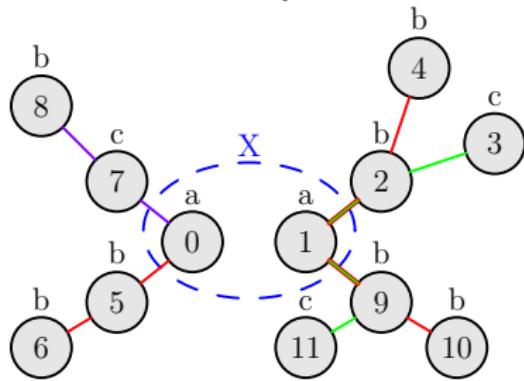


Frequenze dei q -grammi

Notazione:

$f_X[w] = y \rightarrow$ Il q -gramma w ha frequenza y nei q -path che terminano in nodi di X

Esempio:



Dato $X = \{0, 1\}$ e $q = 3$ abbiamo:

- $f_X[bba] = 3$ (path: **4-2-1**, **6-5-0**, **10-9-1**).
- $f_X[bca] = 1$ (path: **8-7-0**).
- $f_X[cba] = 2$ (path: **3-2-1**, **11-9-1**).



Il problema

Dato un grafo $G = (V, E, L)$, etichettato su un alfabeto Σ , ed un intero q , calcolare la similarità tra due porzioni di grafo $A, B \subset V$ in base alle frequenze dei q -grammi dei q -path che terminano in nodi di A e B .



Il problema

Dato un grafo $G = (V, E, L)$, etichettato su un alfabeto Σ , ed un intero q , calcolare la similarità tra due porzioni di grafo $A, B \subset V$ in base alle frequenze dei q -grammi dei q -path che terminano in nodi di A e B .

Estendiamo i due indici ai q -grammi, usando $f_A[w]$ e $f_B[w]$ per i q -grammi w in Σ^q :



Il problema

Dato un grafo $G = (V, E, L)$, etichettato su un alfabeto Σ , ed un intero q , calcolare la similarità tra due porzioni di grafo $A, B \subset V$ in base alle frequenze dei q -grammi dei q -path che terminano in nodi di A e B .

Estendiamo i due indici ai q -grammi, usando $f_A[w]$ e $f_B[w]$ per i q -grammi w in Σ^q :

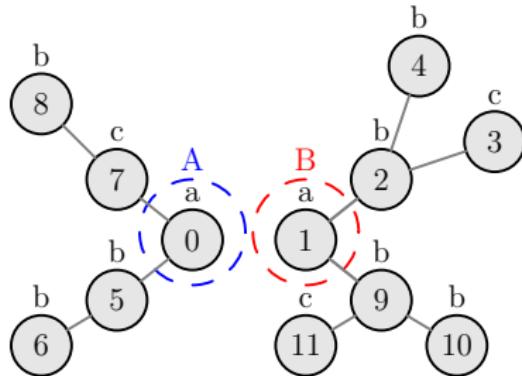
$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} \implies J(A, B) = \frac{\sum_{w \in \Sigma^q} \min(f_A[w], f_B[w])}{\sum_{w \in \Sigma^q} f_{A \cup B}[w]}$$

$$BC(A, B) = \frac{2 \times |A \cap B|}{|A| + |B|} \implies BC(A, B) = \frac{2 \times \sum_{w \in \Sigma^q} \min(f_A[w], f_B[w])}{\sum_{w \in \Sigma^q} (f_A[w] + f_B[w])}$$



Esempio calcolo Bray-Curtis

Similarità secondo Bray-Curtis tra gli insiemi $A = \{0\}$ e $B = \{1\}$ usando i 3-grammi



w	$f_A[w]$	$f_B[w]$	$\min(f_A[w], f_B[w])$	$f_A[w] + f_B[w]$
bba	1	2	1	3
bca	1	0	0	1
cba	0	2	0	2
Totale			1	6

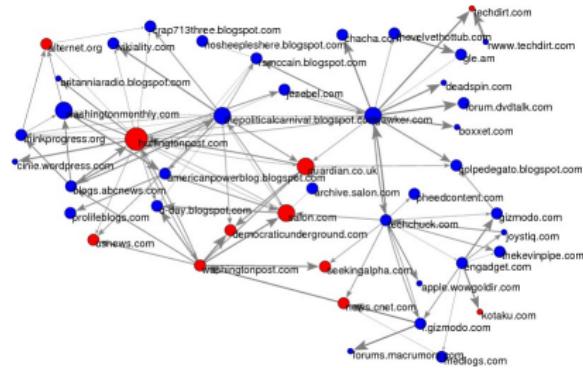
$$BC(A, B) = \frac{2 \times \sum_{w \in \Sigma^q} \min(f_A[w], f_B[w])}{\sum_{w \in \Sigma^q} (f_A[w] + f_B[w])} = \frac{2 \times 1}{6} = \frac{1}{3}$$

Applicazioni pratiche



Applicazioni pratiche

NetInf



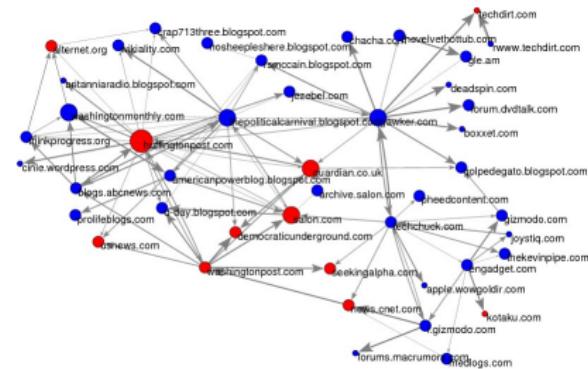
Diffusione delle notizie tra i vari blog e siti di informazione statunitensi

Fonte: *SNAP Stanford*



Applicazioni pratiche

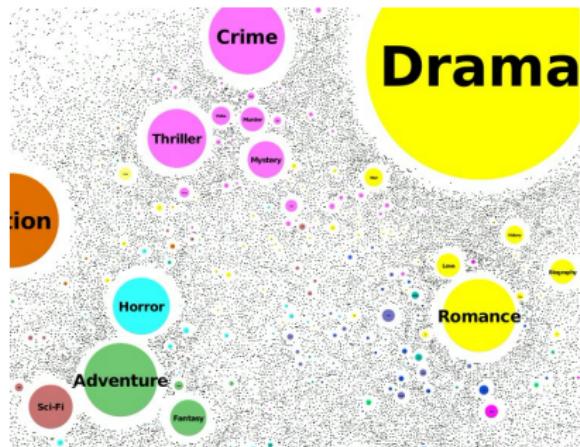
NetInf



Diffusione delle notizie tra i vari blog e siti di informazione statunitensi

Fonte: SNAP Stanford

IMDb



Interazione tra i film con attori in comune

Fonte: IMDb

Esempi di similarità



Esempi di similarità

Attore/Attrice	Attore/Attrice	BC index	J index
Stan Laurel	Oliver Hardy	0.936167	0.774053
Robert De Niro	Al Pacino	0.730935	0.231474
Woody Allen	Meryl Streep	0.556071	0.222857
Meryl Streep	Roberto Benigni	0.482909	0.160181

IMDb, Similarità tra ego-network di attori famosi



Esempi di similarità

Attore/Attrice	Attore/Attrice	BC index	J index
Stan Laurel	Oliver Hardy	0.936167	0.774053
Robert De Niro	Al Pacino	0.730935	0.231474
Woody Allen	Meryl Streep	0.556071	0.222857
Meryl Streep	Roberto Benigni	0.482909	0.160181

IMDb, Similarità tra ego-network di attori famosi

Sito	Sito	BC index	J index
nytimes.com	huffpost.com	0.760524	0.388977
nytimes.com	washingtonpost.com	0.732766	0.366383
nytimes.com	sportingnews.com	0.330400	0.166200
nytimes.com	rollingstone.com	0.056660	0.034336

NETINF, Similarità tra siti di informazione



Parte II

Approcci di risoluzione



Ricerca esaustiva

Approccio **Brute-force**:

- Enumerare tutti i q -path esistenti
- Contare le frequenze esatte di $f_A[w]$ e $f_B[w]$
- Calcolare la similarità usando la definizione



Ricerca esaustiva

Approccio **Brute-force**:

- Enumerare tutti i q -path esistenti
- Contare le frequenze esatte di $f_A[w]$ e $f_B[w]$
- Calcolare la similarità usando la definizione

Complessità:

- Tempo: $O(|V|^q)$
- Spazio: $O(|\Sigma|^q q)$



Ricerca esaustiva

Approccio **Brute-force**:

- Enumerare tutti i q -path esistenti
- Contare le frequenze esatte di $f_A[w]$ e $f_B[w]$
- Calcolare la similarità usando la definizione

Complessità:

- Tempo: $O(|V|^q)$
- Spazio: $O(|\Sigma|^q q)$

Problema!

Limitare la ricerca approssimando il valore di similarità



Ricerca esaustiva

Approccio **Brute-force**:

- Enumerare tutti i q -path esistenti
- Contare le frequenze esatte di $f_A[w]$ e $f_B[w]$
- Calcolare la similarità usando la definizione

Complessità:

- Tempo: $O(|V|^q)$
- Spazio: $O(|\Sigma|^q q)$

Problema!

Limitare la ricerca approssimando il valore di similarità

- Tempo: $O(|V|^q) \rightarrow$ Color Coding $\rightarrow O(2^q |V|)$
- Spazio: $O(|\Sigma|^q q) \rightarrow$ Sampling $\rightarrow O(rq)$ per un certo $r \ll |\Sigma|^q$

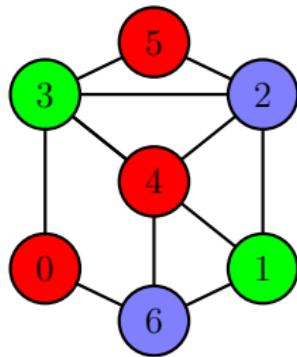


preprocessing: Color Coding



preprocessing: Color Coding

Coloriamo casualmente il grafo con q colori e ci limitiamo ai path colorful
(percorsi con colori non ripetuti)



Il numero dei path è esponenzialmente ridotto di un fattore $q!/q^q \simeq e^{-q}$

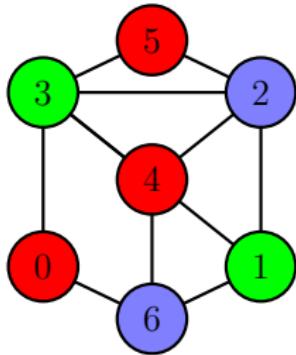
Per $q = 3$ solo il $\sim 22.22\%$

Per $q = 6$ solo il $\sim 1.5\%$



preprocessing: Color Coding

Coloriamo casualmente il grafo con q colori e ci limitiamo ai path colorful (percorsi con colori non ripetuti)

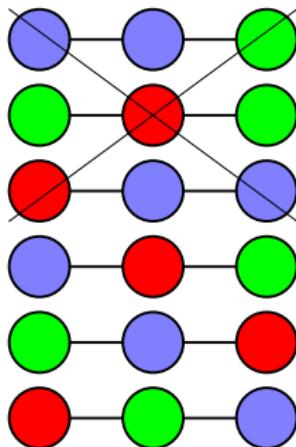


Il numero dei path è esponenzialmente ridotto di un fattore $q!/q^q \simeq e^{-q}$

Per $q = 3$ solo il $\sim 22.22\%$

Per $q = 6$ solo il $\sim 1.5\%$

$q!$ colorazioni accettabili
 q^q possibili colorazioni



Esempi di possibili path

In questo modo:

$$f'_X[w] \simeq e^{-q} f_X[w]$$



Sampling



Sampling

Tabella frequenze dei q -grammi:

w	$f_X[w]$
aaa	721
abc	243
...	...
zyy	13
zzz	368

Potenzialmente:

$$|w| = |\Sigma|^q \text{ (tutti i } q\text{-grammi)}$$

$$\sum_w f_X[w] = O(|V|^q) \text{ (tutti i } q\text{-path)}$$



Sampling

Tabella frequenze dei q -grammi:

w	$f_X[w]$
aaa	721
abc	243
...	...
zyy	13
zzz	368

Riduciamo le dimensioni della tabella **campionando** alcuni q -grammi w con probabilità proporzionale a $f_X[w]$.

Potenzialmente:

$$|w| = |\Sigma|^q \text{ (tutti i } q\text{-grammi)}$$

$$\sum_w f_X[w] = O(|V|^q) \text{ (tutti i } q\text{-path)}$$



Sampling

Tabella frequenze dei q -grammi:

w	$f_X[w]$
aaa	721
abc	243
...	...
zyy	13
zzz	368

Potenzialmente:

$|w| = |\Sigma|^q$ (tutti i q -grammi)

$\sum_w f_X[w] = O(|V|^q)$ (tutti i q -path)

Riduciamo le dimensioni della tabella **campionando** alcuni q -grammi w con probabilità proporzionale a $f_X[w]$.

Questo campionamento viene effettuato **campionando uniformemente** r colorful q -path distinti.

Definiamo quindi:

- R l'insieme dei r q -path campionati ($r \ll |V|^q$)
- \mathcal{W} l'insieme dei q -grammi dei q -path in R ($|\mathcal{W}| \leq r$)



Sampling

Tabella frequenze dei q -grammi:

w	$f_X[w]$
aaa	721
abc	243
...	...
zyy	13
zzz	368

Potenzialmente:

$|w| = |\Sigma|^q$ (tutti i q -grammi)

$\sum_w f_X[w] = O(|V|^q)$ (tutti i q -path)

Riduciamo le dimensioni della tabella **campionando** alcuni q -grammi w con probabilità proporzionale a $f_X[w]$.

Questo campionamento viene effettuato **campionando uniformemente** r colorful q -path distinti.

Definiamo quindi:

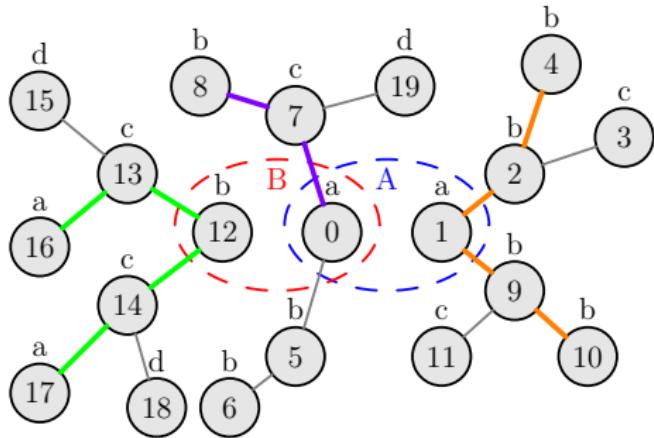
- R l'insieme dei r q -path campionati ($r \ll |V|^q$)
- \mathcal{W} l'insieme dei q -grammi dei q -path in R ($|\mathcal{W}| \leq r$)

Jaccard: campionamento con $X = A \cup B$
Bray-Curtis: campionamento con $X = A \uplus B$



Esempio di sampling

Campioniamo 5 diversi 3-path da $X = A \cup B = \{0, 1, 12\}$



Campione dei 3-path

$$R = \{ \textcolor{orange}{4-2-1}, \textcolor{violet}{8-7-0}, \textcolor{orange}{10-9-1}, \textcolor{green}{16-13-12}, \textcolor{green}{17-14-12} \}$$

Insieme corrispondente dei 3-grammi

$$\mathcal{W} = \{ \textcolor{orange}{acb}, \textcolor{orange}{bba}, \textcolor{violet}{bca} \}$$



Approssimazione degli indici

Dato un campione \mathcal{W} di q -grammi
approssimiamo i due indici limitandoci al campione



Approssimazione degli indici

Dato un campione \mathcal{W} di q -grammi
approssimiamo i due indici limitandoci al campione

$$J(A, B) = \frac{\sum_{w \in \Sigma^q} \min(f_A[w], f_B[w])}{\sum_{w \in \Sigma^q} f_{A \cup B}[w]}$$



$$J_{\mathcal{W}}(A, B) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}} \min(f_A[w], f_B[w])}{\sum_{w \in \mathcal{W}} f_{A \cup B}[w]}$$



Approssimazione degli indici

Dato un campione \mathcal{W} di q -grammi
approssimiamo i due indici limitandoci al campione

$$J(A, B) = \frac{\sum_{w \in \Sigma^q} \min(f_A[w], f_B[w])}{\sum_{w \in \Sigma^q} f_{A \cup B}[w]}$$



$$J_{\mathcal{W}}(A, B) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}} \min(f_A[w], f_B[w])}{\sum_{w \in \mathcal{W}} f_{A \cup B}[w]}$$

$$BC(A, B) = \frac{2 \times \sum_{w \in \Sigma^q} \min(f_A[w], f_B[w])}{\sum_{w \in \Sigma^q} (f_A[w] + f_B[w])}$$



$$BC_{\mathcal{W}}(A, B) = \frac{2 \times \sum_{w \in \mathcal{W}} \min(f_A[w], f_B[w])}{\sum_{w \in \mathcal{W}} (f_A[w] + f_B[w])}$$



query: F-Count e F-Samp

Come calcoliamo $f_A[w]$ e $f_B[w]$ per $w \in \mathcal{W}$?



query: F-Count e F-Samp

Come calcoliamo $f_A[w]$ e $f_B[w]$ per $w \in \mathcal{W}$?

F-Count

Calcoliamo in modo esatto i valori di $f_A[w]$ e $f_B[w]$ con una ricerca esaustiva limitata ai q -grammi in \mathcal{W}

Pro:

- Più preciso in quanto usiamo le frequenze esatte

Contro:

- Potenzialmente lento in quanto potrebbe analizzare una grande porzione di grafo



query: F-Count e F-Samp

Come calcoliamo $f_A[w]$ e $f_B[w]$ per $w \in \mathcal{W}$?

F-Count

Calcoliamo in modo esatto i valori di $f_A[w]$ e $f_B[w]$ con una ricerca esaustiva limitata ai q -grammi in \mathcal{W}

Pro:

- Più preciso in quanto usiamo le frequenze esatte

Contro:

- Potenzialmente lento in quanto potrebbe analizzare una grande porzione di grafo

F-Samp

Stimiamo i valori di $f_A[w]$ e $f_B[w]$ usando il campione dei q -path R

Pro:

- Più veloce poichè analizziamo solo gli r q -path campionati

Contro:

- Stima meno precisa dato che usiamo valori approssimati delle frequenze

Parte III

Risultati pratici



preprocessing: Color Coding

Tempi di esecuzione e memoria occupata



preprocessing: Color Coding

Tempi di esecuzione e memoria occupata

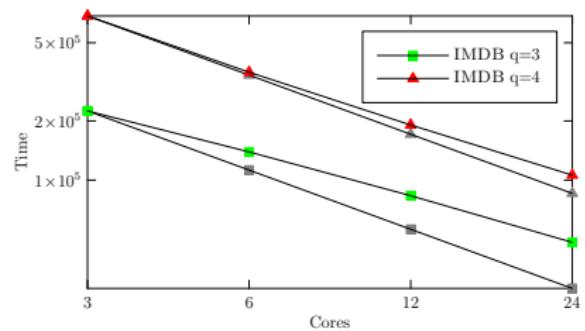
DATASET	q	Tempo	Memoria
NETINF	13	0.39s	11.20MiB
NETINF	14	0.81s	22.63MiB
NETINF	15	1.66s	45.21MiB
NETINF	16	3.47s	90.93MiB
IMDB	3	48.22s	17.94MiB
IMDB	4	105.94s	34.91MiB
IMDB	5	241.22s	69.01MiB
IMDB	6	557.48s	137.26MiB



preprocessing: Color Coding

Tempi di esecuzione e memoria occupata

DATASET	q	Tempo	Memoria
NETINF	13	0.39s	11.20MiB
NETINF	14	0.81s	22.63MiB
NETINF	15	1.66s	45.21MiB
NETINF	16	3.47s	90.93MiB
IMDB	3	48.22s	17.94MiB
IMDB	4	105.94s	34.91MiB
IMDB	5	241.22s	69.01MiB
IMDB	6	557.48s	137.26MiB



Scalabilità al variare dei cores usati

query: F-Count / F-Samp / Base

DATASET	q	$ A $	$ B $	r	Tempi (in ms)		
					F-COUNT	F-SAMP	BASE
NETINF	3	100	100	1 000	20	4	2
NETINF	3	100	100	5 000	60	30	15
NETINF	5	100	100	1 000	2 682	426	3
NETINF	5	100	100	5 000	4 767	784	20
NETINF	7	100	100	100	5 455	4	2
NETINF	7	100	100	200	16 634	197	2
IMDB	3	10	10	100	5 035	66	1
IMDB	4	10	10	100	/	443	8
IMDB	5	10	10	100	/	781	12
IMDB	6	10	10	100	/	1 379	14

Tempi per il calcolo dell'indice di Bray-Curtis
 r = Dimensione del campione



ϵ -approssimazione

Confronto a parità di livello di approssimazione ϵ

		F-COUNT			F-SAMP			BASE		
q	ϵ	r	T	VAR	r	T	VAR	r	T	VAR
3	0.20	2	1	0.0725	400	1	0.1194	420	1	0.1150
3	0.10	3	1	0.0692	1 000	1	0.0601	900	1	0.1338
3	0.05	4	1	0.0535	3 200	1	0.0273	1 500	1	0.1025
4	0.20	3	2	0.0677	1 300	1	0.1194	1 300	1	0.2424
4	0.10	5	4	0.0532	3 200	2	0.0992	2 500	2	0.1806
4	0.05	10	8	0.0518	8 000	4	0.0612	7 900	3	0.1081
5	0.20	5	6	0.0511	5 000	4	0.1678	6 000	3	0.2234
5	0.10	10	18	0.0370	20 000	12	0.0745	30 000	8	0.1234
5	0.05	20	58	0.0204	80 000	30	0.0376	/	/	/

Dati riferiti all'indice di Bray-Curtis su NETINF

Dimensione sottografi $|A| = |B| = 100$

r = Dimensione del campione

T = Tempo medio elaborazione (in millisecondi)

VAR = Varianza indici



Conclusioni



Conclusioni

F-Count

Pro:

- Accurato anche con campioni di piccole dimensioni
- Varianza ridotta

Contro:

- Lento su grafi di elevate dimensioni
- Preprocessing grafo (una volta sola)



Conclusioni

F-Count

Pro:

- Accurato anche con campioni di piccole dimensioni
- Varianza ridotta

Contro:

- Lento su grafi di elevate dimensioni
- Preprocessing grafo (una volta sola)

F-Samp

Pro:

- Efficiente anche in grafi di elevate dimensioni
- Varianza ridotta

Contro:

- Necessita di campioni di grandi dimensioni
- Preprocessing grafo (una volta sola)



Conclusioni

F-Count

Pro:

- Accurato anche con campioni di piccole dimensioni
- Varianza ridotta

Contro:

- Lento su grafi di elevate dimensioni
- Preprocessing grafo (una volta sola)

F-Samp

Pro:

- Efficiente anche in grafi di elevate dimensioni
- Varianza ridotta

Contro:

- Necessita di campioni di grandi dimensioni
- Preprocessing grafo (una volta sola)

Base

Pro:

- Efficiente anche in grafi di elevate dimensioni

Contro:

- Varianza elevata
- Necessita di campioni di grandi dimensioni
- Può non convergere al valore esatto



Fine

Grazie per l'attenzione



Sei gradi di separazione

"Ho letto che ognuno di noi su questo pianeta è separato dagli altri solo da sei persone. Sei gradi di separazione tra noi e tutti gli altri su questo pianeta [...] una tortura cinese essere così vicini ma dover trovare sei persone giuste per il collegamento."

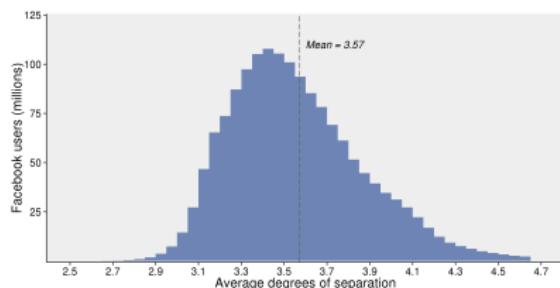
Ouisa Kittredge, Six Degrees of Separation



Sei gradi di separazione

"Ho letto che ognuno di noi su questo pianeta è separato dagli altri solo da sei persone. Sei gradi di separazione tra noi e tutti gli altri su questo pianeta [...] una tortura cinese essere così vicini ma dover trovare sei persone giuste per il collegamento."

Ouisa Kittredge, Six Degrees of Separation



In facebook la separazione media tra gli 1.6 miliardi di utenti registrati è 3.57.

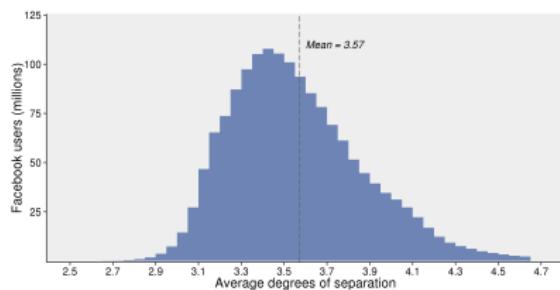
Fonte: Facebook Research, Feb 2016



Sei gradi di separazione

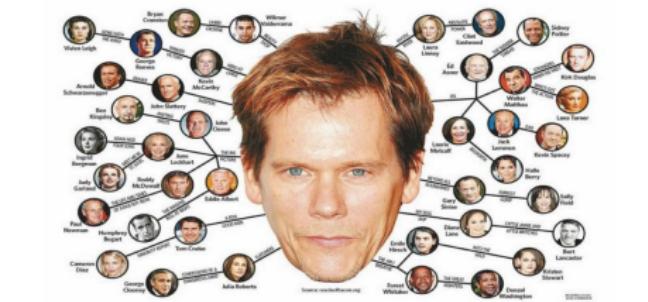
"Ho letto che ognuno di noi su questo pianeta è separato dagli altri solo da sei persone. Sei gradi di separazione tra noi e tutti gli altri su questo pianeta [...] una tortura cinese essere così vicini ma dover trovare sei persone giuste per il collegamento."

Ouisa Kittredge, *Six Degrees of Separation*



In facebook la separazione media tra gli 1.6 miliardi di utenti registrati è 3.57.

Fonte: Facebook Research, Feb 2016



La distanza media di un attore, in termini di collaborazioni, da Kevin Bacon è 3, il 98% degli attori è a distanza ≤ 6 .

Fonte: IMDb, Ott 2017