UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za strojništvo

Uporaba vibroakustičnih metamaterialov v strukturni dinamiki za nižanje ravni hrupa

Magistrsko delo magistrskega študijskega programa II. stopnje
Strojništvo

Tilen Košir

Ljubljana, avgust 2020

UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za strojništvo

Uporaba vibroakustičnih metamaterialov v strukturni dinamiki za nižanje ravni hrupa

Magistrsko delo magistrskega študijskega programa II. stopnje
Strojništvo

Tilen Košir

Mentor: prof. dr. Janko Slavič, univ. dipl. inž.
Somentor: prof. dr. Miha Boltežar, univ. dipl. inž.

Ljubljana, avgust 2020

Kandidat
Tilen KOŠIR

MAGISTRSKI ŠTUDIJSKI PROGRAM II. STOPNJE: **MAG II/829**

NASLOV TEME: **Uporaba vibroakustičnih metamaterialov v strukturni dinamiki za nižanje ravni hrupa**

Metamateriali odražajo fizikalne lastnosti, ki jih v naravi ne najdemo in so rezultat skrbno načrtovane oblike obstoječih materialov. S pomočjo ustrezno načrtovane oblike na makro nivoju je tako mogoče doseči frekvenčno omejeno dušenje zvoka in/ali vibracij. Če so v zadnjem desetletju metamateriali napredovali tudi zaradi napredovanja tehnologije 3D tiska, pa je napredek metamaterialov v naslednjih letih predvsem pričakovati zaradi novih možnosti, ki jih odpira nedavno predstavljeno 3D tiskanje zaznaval (npr. deformacij).

V magistrskem delu predstavite:

- teoretične osnove strukturne dinamike,
- teoretične osnove obravnave periodičnih struktur,
- teoretične osnove inverznega in direktnega pristopa obravnave metamaterialov,
- numerični izračun vsaj enega primera metamateriala za dušenje ravni hrupa (inverzni in direktni pristop),
- eksperimentalno preverbo numeričnega modela.

Magistrsko delo je treba oddati v jezikovno in terminološko pravilnem slovenskem jeziku. Rok za oddajo tega dela je en do šest mesecev od dneva prevzema.

Mentor

prof. dr. Janko Slavič, univ.dipl.inž.

Somentor

prof. dr. Miha Boltežar, univ.dipl.inž.

Podpisani sem delo
prevzel v Ljubljani

dne 24.6.2020

Podpis .....

UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za strojništvo
14
Ljubljana

Zahvala

V prvi vrsti bi se rad zahvalil mentorju dr. Janku Slaviču, ki me je odlično usmerjal pri raziskovanju obravnavane tematike in mi vlival upanja v časih, ko ga sam nisem imel. Za prijaznost in pomoč pri izvedbi eksperimentov se zahvaljujem tudi celotnemu kolektivu laboratorija LADISK na Fakulteti za strojništvo pod vodstvom somentorja dr. Mihe Boltežarja. Za podporo v času študija in pisanja zaključne naloge sem hvaležen tudi svoji družini in družini Grašič, ki sta mi zagotovili odlične pogoje za študij.

Spodaj podpisani/-a Tilen Košir študent/-ka Fakultete za strojništvo Univerze v Ljubljani, z vpisno številko 23180667, avtor/-ica pisnega zaključnega dela študija z naslovom: Uporaba vibroakustičnih metamaterialov v strukturni dinamiki za nižanje ravni hrupa ,

IZJAVLJAM,

1.* a) da je pisno zaključno delo študija rezultat mojega samostojnega dela;

b) da je pisno zaključno delo študija rezultat lastnega dela več kandidatov in izpolnjuje pogoje, ki jih Statut UL določa za skupna zaključna dela študija ter je v zahtevanem deležu rezultat mojega samostojnega dela;

2. da je tiskana oblika pisnega zaključnega dela študija istovetna elektronski obliki pisnega zaključnega dela študija;

3. da sem pridobil/-a vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v pisnem zaključnem delu študija in jih v pisnem zaključnem delu študija jasno označil/-a;

4. da sem pri pripravi pisnega zaključnega dela študija ravnal/-a v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobil/-a soglasje etične komisije;

5. da soglašam z uporabo elektronske oblike pisnega zaključnega dela študija za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;

6. da na UL neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve avtorskega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja pisnega zaključnega dela študija na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija UL;

7 da dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v pisnem zaključnem delu študija in tej izjavi, skupaj z objavo pisnega zaključnega dela študija;

8. da dovoljujem uporabo mojega rojstnega datuma v zapisu COBISS.

V Ljubljani, 19. 7 2020 Podpis avtorja/-ice: Košir

* Obkrožite varianto a) ali b).

Izvleček

UDK 519.61:534(043.2)

Tek. štev.: MAG II/829

Uporaba vibroakustičnih metamaterialov v strukturni dinamiki za nižanje ravni hrupa

Tilen Košir

Ključne besede: metamaterial
pasovno zavrnitveni
hrup
vibroakustika
Blochov teorem
periodične strukture
strukturna dinamika
metoda končnih elementov

V delu je predstavljena uporaba metamaterialov za namene zniževanja hrupa na področju akustike in strukturne dinamike. Preko obravnave osnovnega gradnika oz. bazne celice, ki sestoji iz osnovne strukture in resonatorja, so obravnavane lastnosti neskončnega 2D periodičnega metamateriala. Ob pravilni zasnovi je le-ta sposoben formirati pasovno zavrnitveni filter (PZF) v željenem frekvenčnem območju, kjer prosto širjenje valovanj ni dovoljeno. PZF smo identificirali s pomočjo disperzijskih krivulj, ki smo jih izračunali z uporabo direktnega in inverznega pristopa. Preračunan koncept metamateriala se je kasneje tudi izdelal s pomočjo FFF tehnike 3D tiskanja. Izračunano in izmerjeno frekvenčno območje PZF se zadovoljivo ujemata. Ob masnem razmerju resonatorja in osnovne strukture 0.1 je metamaterial v območju PZF zmožen hrup znižati za 4 dB več kot le njegova osnovna struktura ekvivalentne mase.

Abstract

UDC 519.61:534(043.2)

No.: MAG II/829

Vibroacoustic metamaterials for noise reduction in structural dynamics

Tilen Košir

Key words: metamaterial
band gap
noise
vibroacoustics
Bloch theorem
periodic structures
structural dynamics
finite element method

This thesis describes metamaterials for noise reduction in acoustics and structural dynamics. Through analysis of the unit cell of a 2D periodic metamaterial consisting of the base structure and carefully placed resonating structures, the dynamic characteristics of the whole structure were obtained via dispersion curves. Appropriately sized metamaterials can exhibit band gaps in which free wave propagation is not allowed. Band gaps were identified via dispersion curves which were calculated using a direct and inverse approach. Metamaterial design was also manufactured using FFF 3D printing technique. A good agreement between calculated and measured band gap frequency region was identified. 4 dB stronger noise reduction was measured by metamaterial with a mass ratio of 0.1 between resonators and base structure compared to only its base structure with equivalent mass.

Kazalo

Kazalo slik . . . xv

Kazalo preglednic . . . xix

Seznam uporabljenih simbolov . . . xxi

Seznam uporabljenih okrajšav . . . xxiii

1 Uvod . . . 1

1.1 Ozadje problema . . . 1

1.2 Cilji naloge . . . 1

2 Teoretične osnove in pregled literature . . . 3

2.1 Uvod v metamateriale . . . 3

2.2 Osnove lastnih nihanj sistemov več prostostnih stopenj . . . 4

2.3 Metoda končnih elementov . . . 5

2.3.1 Kirchhoffova teorija tankih plošč . . . 5

2.3.2 Izpeljava končnega elementa plošče . . . 8

2.4 Obravnava neskončnih periodičnih struktur . . . 10

2.4.1 Blochov teorem . . . 10

2.4.2 Recipročni prostor, Brillouinove cone in Brillouinove konture . . . 12

2.4.3 Modeliranje osnovne celice v strukturni dinamiki . . . 15

2.5 Metodologije izračuna periodičnih struktur . . . 19

2.5.1 Inverzni pristop - $\omega(\mu)$ . . . 19

2.5.2 Direktni pristop - $\mu(\omega)$ . . . 20

2.5.3 Glavni vplivni faktorji na disperzijske krivulje . . . 22

3 Zasnova in preračun metamateriala . . . 25

3.1 Zasnova oblike metamateriala . . . 25

3.2 Materialne lastnosti MM . . . 26

3.3 Priprava mreže MM . . . 27

3.4 Numerični preračun disperzijskih krivulj . . . 29

3.4.1 Generiranje APDL skripte MM in resonatorja . . . 29

3.4.2 Določitev debelin resonatorja 30
3.4.3 Generiranje dinamske matrike $\tilde{\mathbf{D}}(\omega, \mu_x, \mu_y)$ 31
3.4.4 Izračun disperzijskih krivulj - Inverzna metoda $\omega(\mu)$ 31
3.4.5 Izračun disperzijskih krivulj - direktna metoda $\mu(\omega)$ 35

4 Eksperimentalni del 39
4.1 Meritve gostote in elastičnega modula PLA plastike 39
4.1.1 Meritve gostote 39
4.1.2 Meritve elastičnega modula 39
4.2 Meritev raztrosa 1. lastne frekvence resonatorjev MM 43
4.3 Meritev ravni zvočnega tlaka 47
4.3.1 Izdelava metamateriala 47
4.3.2 Potek izvedbe meritev 49
4.3.3 Rezultati meritev 52

5 Zaključki 57

Literatura 59

Priloga A (Matrike $\tilde{\mathbf{D}}_1$-$\tilde{\mathbf{D}}_9$) 61

Kazalo slik

Slika 2.1: Notranje normalne in strižne napetosti ter kontinuirana obremenitev p (levo), ter notranji specifični momenti in specifične prečne sile (desno) v tankih ploščah po Kirchohoffovi teoriji. 6

Slika 2.2: Prikaz 4 vozliščnega končnega elementa plošče z 12 prostostnimi stopnjami. 9

Slika 2.3: Prikaz 2D periodične strukture in njene bazne celice. 11

Slika 2.4: Tipi periodičnih struktur v 2D prostoru. 12

Slika 2.5: Primer bazne celice in njene recipročne bazne celice. 14

Slika 2.6: Primer tvorjenja Brillouinove cone (BZ) in nereducirne Brillouinove cone (IBZ) s prikazano Brillouinovo konturo (BC). 14

Slika 2.7: Primer pravokotne bazne celice, njene recipročne bazne celice v valovnem prostoru in Brillouinove cone (BZ). 15

Slika 2.8: Primer transformacije prve Brillouinove cone (BZ) iz valovega (k_x, k_y) prostora v valovni (μ_x, μ_y) prostor. 15

Slika 2.9: Prikaz grupiranih vektorjev generaliziranih pomikov dvodimenzionalne bazne celice neskončne periodične strukture. [15] 16

Slika 2.10: Prikaz grupiranih vektorjev generaliziranih vozliščnih sil dvodimenzionalne bazne celice neskončne periodične strukture. [15] 16

Slika 2.11: Prikaz tipičnih disperzijskih krivulj (desno), PZF in obravnavane Brillouinove konture (levo) [5, 14]. 20

Slika 2.12: Prikaz tipičnih disperzijskih krivulj po $\mu(\omega)$ pristopu [5, 14]. 22

Slika 2.13: Vpliv razmerja mas (levo) in razmerja frekvenc (desno) na kreiranje PZF [17]. 23

Slika 2.14: Vpliv dušenja resonatorja in osnovne strukture na realni del vektorja širjenja valovanja za izbrano smer ψ valovanja. a) celotno nedušena struktura, b) dušena osnovna struktura, nedušen resonator, c) nedušena osnovna struktura in dušen resonator, d) dušena celotna struktura. Barve disperzijskih krivulj sovpadajo z $\log_{10}(\mathrm{Im}(\mu))$. V delu [18] je bil uporabljen histerezni model dušenja [18]. 24

Slika 3.1: Končni koncept bazne celice metamateriala. 25

Slika 3.2: Dimenzije bazne celice MM [19]. 26

Slika 3.3: Lupina bazne celice MM in končno uporabljena mreža. 28

Slika 3.4: Prikaz seznamov vozlišč, ki jih potrebujemo za vključitev periodičnih robnih pogojev. 29

Slika 3.5: Shema poteka izračuna disperzijskih krivulj. 29

Slika 3.6: Diagram odvisnosti 1. lastne frekvence togo vpetega resonatorja od debelin t_{masa}, t_{vzmet}. 30

Slika 3.7: Bazna celica MM in pripadajoča Brillouinova kontura. 32

Slika 3.8: Disperzijske krivulje MM in osnovne strukture za $E_{resonator} = 2830$ MPa. 32

Slika 3.9: Upogibna (▽), strižna (◯) in longitudinalna (◇) nihajna oblika osnovne strukture pri različnih vektorjih širjenja valovanja. 33

Slika 3.10: Nihajne oblike MM pri različnih vektorjih širjenja valovanja. 34

Slika 3.11: Disperzijske krivulje za tri različne elastične module resonatorja. . . 34

Slika 3.12: Bazna celica MM in označene smeri valovanja. 35

Slika 3.13: Disperzijske krivulje za nedušen MM. 36

Slika 3.14: Disperzijske krivulje za dušen MM ($\eta = 1.86\%$). 37

Slika 4.1: Dimenzije vzorcev za določitev E modula PLA plastike. 40

Slika 4.2: Merilno mesto za določitev E modula PLA plastike. 41

Slika 4.3: Tri različne količine nanosa voska pri vpetju vzorca na stresalnik (levo: malo voska - V1, sredina: srednje veliko voska - V2, desno: veliko voska - V3). 41

Slika 4.4: Rezultati meritev E modula v obliki FRF. 42

Slika 4.5: Shema postopka izračuna E modula PLA plastike na podlagi meritev $f_{0,1}$. 42

Slika 4.6: Primer vpetja bazne celice MM na stresalnik. 43

Slika 4.7: FRF meritev 1. lastne frekvence resonatorjev baznih celic MM. . . 44

Slika 4.8: Porazdelitveni (levo) in kumulativni (desno) diagram 1. pomerjene lastne frekvence baznih celic. 44

Slika 4.9: Prikaz vrednosti pomerjenih lastnih frekvenc resonatorjev v odvisnosti od lokacije tiskanja na 3D tiskalniku. 45

Slika 4.10: Shema postopka izračuna ekvivalentnega E modula resonatorjev bazne celice MM na podlagi izračunanih lastnih frekvenc. 46

Slika 4.11: Prikaz plošč MM, ki so bile izdelane z FDM tehniko 3D tiskanja. . . 47

Slika 4.12: 3D tisk metamateriala. 48

Slika 4.13: Kocka iz MM za testiranje vpada zvočnega hrupa. 49

Slika 4.14: Končno natisnjene kocke za testiranje vpada zvočnega hrupa. Rdeča kocka vsebuje MM, siva kocka vsebuje le osnovno strukturo MM brez resonatorjev, zelena kocka pa vsebuje le osnovno strukturo ekvivalentne mase kot MM. 49

Slika 4.15: Celotno merilno mesto merjenja ravni zvočnega tlaka. 50

Slika 4.16: Prikaz zvočnika, s katerim smo vzbujali strukturo (levo), in prikaz merilnega mesta merjenja hitrosti zgornje plošče (desno). 51

Slika 4.17: Prikaz obrnjene plošče na rdeči kocki (MM) in mesta meritev hitrosti resonatorjev ($R0$ - $R4$). 52

Slika 4.18: FRF zvočnega tlaka in generiranega signala. 53

Slika 4.19: FRF hitrosti in generiranega signala. 54

Slika 4.20: Primer odbojev zvočnega vala (levo) in neravne površine na osnovni strukturi (desno). 54

Slika 4.21: Raven zvočnega tlaka v odvisnosti od frekvence. Pri izračunu je uporabljen 1/24 oktavni filter. 55

Kazalo preglednic

Preglednica 3.1: Materialne lastnosti MM. 27

Preglednica 3.2: Konvergenca mreže bazne celice za 1. lastno frekvenco pri prostem vpetju. 28

Preglednica 4.1: Izmerjena gostota PLA plastike. 39

Preglednica 4.2: Vrednosti izračunanih ekvivalentnih E modulov resonatorja za izračunane vrednosti lastnih frekvenc. 46

Preglednica 4.3: Parametri tiskanja MM. 48

Seznam uporabljenih simbolov

Oznaka	Enota	Pomen
$\mathbf{C}$	N s m^{-1}	dušilna matrika
$\mathbf{D}(\omega)$	N	dinamska matrika sistema
$\mathbf{d}_i$	m	bazni translacijski vektor osnovne bazne celice
E	MPa	Elastični modul
f	Hz	herčna frekvenca
$\mathbf{f}$	N	vektor sil generaliziranih prostostnih stopenj
G	MPa	Strižni modul
h	m	debelina plošče
k_x, k_y	m^{-1}	komponenti valovnega vektorja
$\mathbf{k}$	m^{-1}	valovni vektor
$\mathbf{K}$	N m^{-1}	togostna matrika
L_x, L_y	m	dolžina bazne celice
M_x,M_y,M_{xy}	N m m^{-1}	notranji specifični moment plošče
$\mathbf{M}$	kg	masna matrika
$\mathbf{q}$	m	vektor pomikov generaliziranih prostostnih stopenj
Q_x, Q_y	N m^{-1}	notranja specifična sila plošče
p	MPa	zunanje kontinuirana obremenitev plošče
$\mathbf{r}$	m	krajevni vektor
t	s	čas
$\mathbf{t}_i$	m^{-1}	bazni translacijski vektor recipročne bazne celice
U	m	skalarna funkcija pomikov plošče v x smeri
V	m	skalarna funkcija pomikov plošče v y smeri
$\mathbf{v}$	m, rad	vektor prostostnih stopenj končnega elementa
w	m	skalarna funkcija pomikov plošče v z smeri
ϵ_{ij}	/	komponenta tenzorja specifičnih deformacij
η	/	koeficient histereznega dušenja
θ_x, θ_y	rad	zasuk plošče
μ_x, μ_y	m^{-1}	komponenti vektorja širjenja valovanja
$\boldsymbol{\mu}$	m	vektor širjenja valovanja
$\mathbf{\Lambda}_L$	/	leva reducirna matrika
$\mathbf{\Lambda}_R$	/	desna reducirna matrika
ρ	kg m^{-3}	Poissonov količnik
σ_{ij}	MPa	komponenta napetostnega tenzorja
ν	/	Poissonov količnik
ψ	rad	smer širjenja valovanja
ω	rad s^{-1}	krožna kotna frekvenca

Seznam uporabljenih okrajšav

Okrajšava	Pomen
BC	Brillouinova kontura
BZ	Brillouinova cona
EVP	problem lastnih vrednosti (”eigenvalue problem”)
FFF	”fused filament fabrication”
FRF	frekvenčno prenosna funkcija
IBZ	nereducirna Brillouinova cona
MM	metamaterial
PZF	pasovno zavrnitveni filter

1 Uvod

1.1 Ozadje problema

Uvedba lahkih struktur v različna področja strojništva in širše, kot so avto industrija, energetika, bela tehnika ipd., so rezultat predvsem raznih ekonomskih in ekoloških zahtev, s katerimi se morajo inženirji spopadati na vsakodnevni ravni. Ena od večjih negativnih posledic uvedbe tankih in lahkih struktur v vsakodnevne stroje in produkte je njihova slaba vibroakustična izolativnost, ki hitro privede do povišanega nivoja hrupnosti izdelkov. Raven hrupnosti komercialnih izdelkov je danes strogo regulirana, zato kupci iz dneva v dan zaostrujejo in postavljajo nove zahteve, ki se tičejo akustičnih emisij. V zadnjih letih se v znanstvenih sferah precej pozornosti posveča eni izmed možnih rešitev, ki bi lahko pripomogla k nižanju hrupnosti izdelkov. To so tako imenovani vibroakustični metamateriali. Metamateriali so skrbno načrtovane geometrijske strukture na makro nivoju, z efektivnimi materialnimi lastnostmi, ki jih v naravi ne najdemo. Njihova uporaba se je sprva uveljavila na področju elektromagnetizma (negativni lomni količnik, cloaking, valovna vodila ...), kasneje pa se je začela uveljavljati tudi na področju akustike in elastodinamike. Na področju vibroakustike metamateriali v osnovi sestojijo iz osnovne strukture in primerno razporejenih lokalnih resonatorjev, s pomočjo katerih je mogoče dušiti hrup zvočnega vira v točno določenem frekvenčnem področju.

1.2 Cilji naloge

Cilj naloge je preračunati in izdelati delujoč metamaterial, ki bo dušil hrup v željenem frekvenčnem območju. Sam proces preračuna in izdelave metamateriala je bil ločen na tri glavne sklope, ki hkrati sledijo tudi poglavjem te magistrske naloge.

V poglavju 2 so predstavljene glavne teoretične osnove, ki jih potrebujemo za fizikalno razumevanje problema. Opisana je teorija lastnih nihanj sistemov z več prostostnimi stopnjami, metoda končnih elementov, teorija obravnave neskončnih periodičnih struktur in metode izračuna periodičnih struktur. V poglavju 3 je predstavljena zasnova in preračun izbranega koncepta metamateriala. Opisani in komentirani so osnovni koraki, ki nas privedejo do končnega izračuna disperzijskih krivulj metamateriala z uporabo inverznega in direktnega pristopa. V 4. poglavju pa je predstavljen eksperimentalni

del magistrske naloge. Opisane so vse meritve, ki so bile potrebne za identifikacijo materialnih lastnosti PLA plastike, predstavljen je proces 3D tiska metamateriala in meritve vpada ravni hrupnosti zvočnega vira čez metamaterial.

2 Teoretične osnove in pregled literature

2.1 Uvod v metamateriale

Na področju strukturne dinamike in akustike nas zanimajo metamateriali (MM), ki so zmožni kreirati pasovno zavrnitvene filtre (PZF). PZF je v najbolj osnovnem pomenu frekvenčno področje, v katerem metamaterial teoretično ne dopušča prostega širjenja valovanja. Znotraj takšnih frekvenčnih območij lahko pričakujemo močno slabljenje vibracij in hrupa, ki prihajajo iz okolice.

PZF je z vibroakustičnimi metamateriali fizikalno gledano moč kreirati prek dveh različnih mehanizmov. Prvi uporabljen fizikalni princip na tem področju je Braggovo sipanje (ang. Bragg Scattering) [1]. Zanj je značilno, da je periodična struktura metamateriala sestavljena iz osnovnih gradnikov, ki vsebujejo visoke impedančne spremembe (na primer hipne spremembe v masi, gostoti ...). Slednje povzroči Braggovo sipanje valovnih dolžin, ki so primerljive karakteristični dolžini osnovnih gradnikov metamateriala (imenovanih tudi bazne celice). Braggovo sipanje je fizikalni efekt, kjer se prihajajoči val in odbiti val (zaradi visokega impedančnega preskoka v mediju) delno ali popolnoma izničita, pri tem pa pride do destruktivne interference znotraj PZF. Slaba lastnost tega fizikalnega principa PZF je, da ni primeren za konstruiranje PZF v nižjih frekvenčnih področjih, saj bi za takšen frekvenčni spekter hitro potrebovali debele strukture večjih dimenzij, kar pa uničuje prvoten namen konstruiranja metamaterialov [2]. V nadaljevanju bomo tak tip filtra imenovali interferenčni PZF.

Drug fizikalni mehanizem deluje na principu lokalnih resonanc. V tem primeru ima struktura periodično nameščene lokalne resonatorje. Resonančni PZF za delovanje ni odvisen od periodičnosti, temveč od fizičnega razmaka med resonatorji na strukturi. Ta mora biti po velikostnem redu nekajkrat nižji od valovnih dolžin v mediju, ki jih želimo slabiti [3]. Poleg tega je pogoj za nastanek PZF tudi ne-ničelna rezultantna sila, ki jo mora resonator s svojo resonančno lastno obliko inducirati na osnovno strukturo MM [3]. Resonančni PZF, ki se kreira okoli lastne frekvence resonatorjev, je rezultat Fano tipa interference [4] med prihajajočimi valovi in radiiranimi oz. preusmerjenimi valovi v protifazi, ki prihajajo iz resonatorjev. Prednost tega fizikalnega principa je, da je možno kreirati PZF v frekvenčnih področjih, ki so veliko nižje od limitne frekvence Braggovega sipanja. Sama konstrukcija resonančnih MM je lahko tudi lažja in tanjša

od interferenčnih MM, zlasti pri nižjih frekvencah. Slaba lastnost resonančnih MM pa je, da lahko izven frekvenčnega področja PZF slabljenje vibracij in akustičnega hrupa tudi močno poslabšamo [5].

Potrebno je poudariti, da je pri konstruiranju MM možno kreirati PZF, ki slabi valovanja v vseh smereh željenega frekvenčnega področja, ali pa le v določenih smereh. V okviru magistrske naloge bomo imeli opravka z 2D periodičnimi MM, katerih konstrukcija bo spominjala na ploščo z dodanimi lokalnimi resonatorji. Zanimal nas bo predvsem PZF, ki slabi valovanje upogibnih valovanj plošče v ravnimi periodičnosti strukture. Upogibna nihanja oz. valovanja plošč, sten, lupin itd. so namreč pogosto glavni vir akustičnega hrupa struktur [6].

2.2 Osnove lastnih nihanj sistemov več prostostnih stopenj

V okviru tega poglavja predpostavimo, da smo že izpeljali ali kako drugače pridobili gibalne enačbe opazovanega sistema z več prostostnimi stopnjami, kot prikazuje enačba (2.1), kjer je upoštevan viskozni model dušenja.

$$\mathbf{M}\ \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\ \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{2.1}$$

Kjer je $\mathbf{M}$ masna matrika sistema, $\mathbf{C}$ dušilna matrika, $\mathbf{K}$ togostna matrika, $\mathbf{q}(t)$ in $\mathbf{f}(t)$ pa predstavljata vektorja generaliziranih pomikov in vzbujevalnih sil. Pri reševanju enačb predpostavimo harmonski odziv [7], zato lahko nastavek rešitve zapišemo v obliki, kot ga prikazujeta enačbi (2.2) in (2.3).

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}\ e^{i\omega t} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}\ e^{i\omega t} \tag{2.3}$$

Kjer $\mathbf{q}$ predstavlja vektor amplitud generaliziranih pomikov, $\mathbf{f}$ vektor amplitud generaliziranih vzbujevalnih sil, ω in t pa predstavljata vzbujevalno krožno frekvenco ter čas. Če nastavka uporabimo v enačbi (2.1) in enačbo nekoliko uredimo, dobimo enačbo (2.4).

$$(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{q} = \mathbf{f} \tag{2.4}$$

Enačbo (2.4) lahko zapišemo tudi v obliki, kot jo prikazuje enačba (2.5), kjer $\hat{\mathbf{D}}(\omega)$ predstavlja dinamsko matriko sistema.

$$\hat{\mathbf{D}}(\omega)\ \mathbf{q} = \mathbf{f} \tag{2.5}$$

$$\hat{\mathbf{D}}(\omega) = -\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K} \tag{2.6}$$

V okviru magistrske naloge nas zanima predvsem iskanje lastnih frekvenc in oblik sistema. Lastne frekvence so lastnosti sistema in nam povejo, s kakšnimi frekvencami nihanja se lahko dinamski sistem odzove na neke začetne pogoje ob odsotnosti vzbujevalnih sil [8]. Vsaki lastni frekvenci pripada natančno ena lastna oblika sistema, ki nam pove, s kakšno obliko opazovani sistem pri dani lastni frekvenci niha. Lastne frekvence in oblike lahko poiščemo tako, da vektor generaliziranih sil enačimo z nič in poiščemo netrivialno rešitev sistema enačb. Netrivialno rešitev sistema enačb dobimo, ko velja enačba (2.7) [7]. Slednji problem navadno prevedemo na reševanje problema lastnih vrednosti, ki ga je s stališča numerike bolj stabilen.

$$\det\left(\hat{\mathbf{D}}(\omega)\right) = 0 \tag{2.7}$$

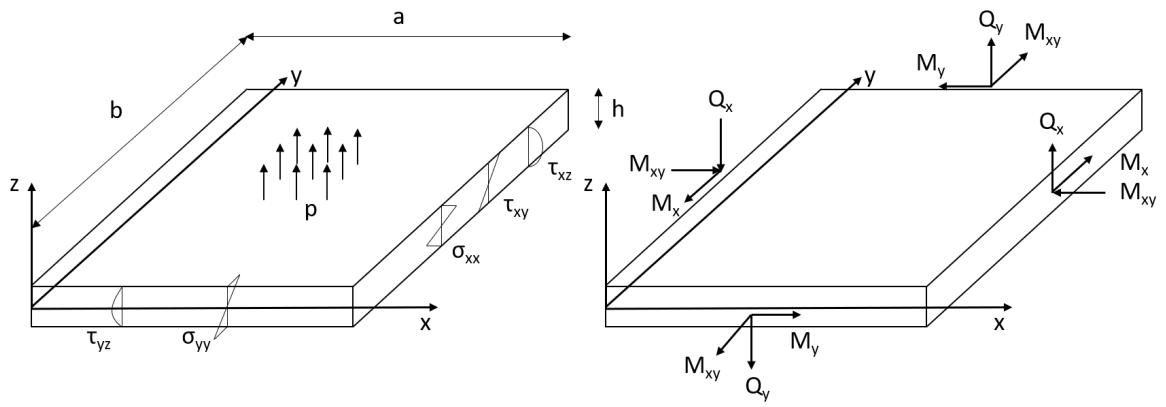
2.3 Metoda končnih elementov

Metoda končnih elementov je aproksimativna metoda za reševanje parcialnih diferencialnih enačb in je ena najbolj razširjenih in uporabljenih metod za reševanje različnih fizikalnih problemov v tehniki. V našem primeru bomo to metodo uporabili za pridobitev masne in togostne matrike $\mathbf{M}$ in $\mathbf{K}$. V naslednjih poglavjih bomo operirali z geometrijskimi oblikami, ki jih lahko poenostavimo na sestav plošč. V ta namen bo teorija končnih elementov na kratko predstavljena za primer konstrukcijskega elementa plošče.

2.3.1 Kirchhoffova teorija tankih plošč

Pri izpeljavi končnega elementa bomo izhajali iz Kirchhoffove teorije tankih plošč, ki jo bomo predstavili v nadaljevanju. Sama teorija izhaja iz naslednjih predpostavk [9, 10]:

- Neobremenjena plošča leži v ravnini $x - y$, smer z pa kaže v smeri debeline plošče.
- Debelina plošče je v primerjavi z ostalima dimenzijama plošče majhna.
- Nevtralna ravnina je na sredini plošče.
- Polje pomikov se po debelini plošče ne spreminja (pomiki niso funkcija koordinate z).
- Relativne specifične deformacije γ_{xz} in γ_{yz} so zanemarljive.
- Relativna normalna specifična deformacija ε_{zz} je zanemarljiva, prav tako normalna napetost σ_{zz}.



Slika 2.1: Notranje normalne in strižne napetosti ter kontinuirana obremenitev p (levo), ter notranji specifični momenti in specifične prečne sile (desno) v tankih ploščah po Kirchohoffovi teoriji.

Zaradi predpostavljenih malih rotacij in pomikov lahko za vsako materialno točko zapišemo pomike v x smeri z enačbo (2.8), pomike v y smeri pa z enačbo (2.9).

$$U = -z\ \alpha_x = -z\ \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.8}$$

$$V = -z\ \alpha_y = -z\ \frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.9}$$

Kjer sta U in V skalarni funkciji pomikov v x in y smeri, α_x in α_y rotaciji okoli osi x in y, w pa predstavlja skalarno funkcijo pomikov v z smeri. Ukrivljenosti plošče k_x, k_y in k_{xy} lahko zapišemo z enačbami (2.10)-(2.12).

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.10}$$

$$k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2.11}$$

$$k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.12}$$

Na podlagi predpostavk in zapisanih enačb lahko osnovne enačbe, ki povezujejo pomike s specifičnimi deformacijami, poenostavimo na zapis, prikazan z enačbami (2.13)-(2.15).

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.13}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2.14}$$

$$\gamma_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.15}$$

Kjer ε_{xx} in ε_{yy} predstavljata normalni specifični deformaciji v x in y smeri, γ_{xy} pa predstavlja strižno deformacijo v ravnini $x - y$. Po Kirchhoffovi teoriji plošč lahko na podlagi Hookovega zakona zapišemo napetosti v ravnini $x-y$ z enačbami (2.16)-(2.18).

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\ \varepsilon_{yy}\right) \tag{2.16}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\ \varepsilon_{xx}\right) \tag{2.17}$$

$$\tau_{xy} = G\ \gamma_{xy} \tag{2.18}$$

Kjer σ_{xx} in σ_{yy} predstavljata normalne napetosti v x in y smeri, τ_{xy} pa predstavlja strižno napetost v ravnini $x-y$. E, G in ν so materialne konstante Hookovega zakona in predstavljajo elastični modul, strižni modul ter Poissonov količnik (povezava med tremi materialnimi konstantami je $G = E/(2(1+\nu))$). Na sliki 2.1 lahko vidimo normalne in strižne napetosti v $x - y$ ravnini, ki delujejo na robu plošče. Po višini z se spreminjajo linearno, tako da na nevtralni ravnini ne dobimo nobenih napetosti. Čeprav smo strižne deformacije γ_{xz} in γ_{yz} zanemarili, lahko po tej teoriji strižne napetosti τ_{xz} in τ_{yz} še vedno izračunamo. τ_{xz} in τ_{yz} se po debelini plošče spreminjata kvadratično, kot prikazuje slika 2.1. Na sliki 2.1 imamo prikazane tudi notranje specifične momente plošče M_x, M_y in M_{xy}:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z\ \sigma_x \mathrm{d}z \tag{2.19}$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z\ \sigma_y \mathrm{d}z \tag{2.20}$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\ \tau_{xy} \mathrm{d}z \tag{2.21}$$

Kjer h predstavlja debelino plošče. Če v enačbah (2.19)-(2.21) upoštevamo enačbe za definicijo napetosti (2.16)-(2.18), in nadalje vstavimo v dobljene enačbe še definicije ukrivljenosti, ki so opisane z enačbami (2.10)-(2.12), dobimo enačbe notranjih momentov [10]:

$$M_x = D(k_x + \nu\ k_y) \tag{2.22}$$

$$M_y = D(\nu\ k_x + k_y) \tag{2.23}$$

$$M_{xy} = D\ \frac{1-\nu}{2}\ k_{xy} \tag{2.24}$$

Kjer D predstavlja togost plošče in velja $D = E\ h^3/(12(1-\nu^2))$. Ob upoštevanju ravnotežja specifičnih sil in momentov na majhnem delčku plošče dimenzij dx in dy dobimo glavne diferencialne enačbe plošče:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_y = 0 \tag{2.27}$$

Kjer p predstavlja kontinuirano prečno obremenitev na ploščo v smeri z, Q_x ter Q_y pa predstavljata notranje specifične prečne strižne sile. Ob uporabi enačb (2.22)-(2.24) v enačbah (2.25)-(2.27) in ob vstavitvi enačb (2.26) ter (2.27) v enačbo (2.25), dobimo končno obliko vodilne diferencialne enačbe tanke izotropne plošče:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2\ \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = p \tag{2.28}$$

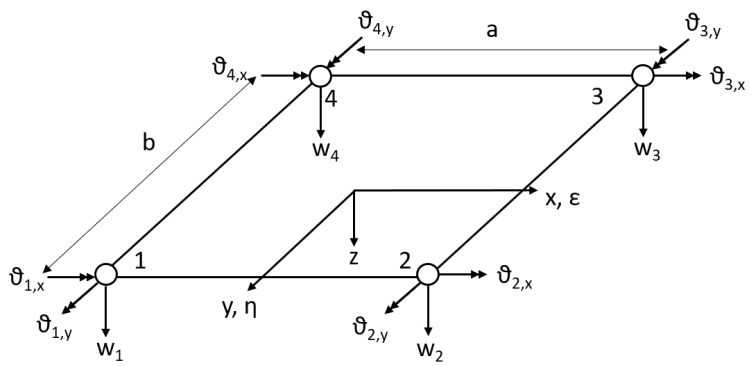
Izpeljali smo vodilno diferencialno enačbo tankih plošč, ki velja za statične probleme. Če bi v izpeljavi ravnotežja sil in momentov upoštevali še vztrajnostne sile, pa bi vodilna diferencialna enačba upogiba tankih plošč imela obliko:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2\ \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \rho\ h\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \tag{2.29}$$

Kjer ρ predstavlja gostoto.

2.3.2 Izpeljava končnega elementa plošče

Z znano vodilno diferencialno enačbo plošče lahko v nadaljevanju izpeljemo formulacijo njenega končnega elementa. Pri metodi končnih elementov strukturo razdelimo na manjše dele (strukturo zamrežimo), pri čemer znotraj vsakega delčka (končnega elementa) zajamemo diferencialno enačbo plošče. Rešitev diferencialne enačbe znotraj vsakega končnega elementa predpostavimo v obliki polinoma. Red polinomske aproksimacije je odvisen od števila vozlišč končnega elementa in števila prostostnih stopenj znotraj vsakega vozlišča. Postopek izpeljave končnega elementa bomo predstavili na primeru štirivozliščnega končnega elementa, ki je prikazan na sliki 2.2.



Slika 2.2: Prikaz 4 vozliščnega končnega elementa plošče z 12 prostostnimi stopnjami.

Končni element ima v vsakem vozlišču tri prostostne stopnje in sicer en pomik (v smeri z), ter dva zasuka (okoli osi x in y). Skupno ima torej en končni element 12 prostostnih stopenj. Aproksimacijo pomikov (rešitve diferencialne enačbe) znotraj končnega elementa zapišemo [10]:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2\ \varepsilon + \alpha_3\ \eta + \alpha_4\ \varepsilon + \alpha_5\ \varepsilon\ \eta + \alpha_6\ \eta^2 + \alpha_7\ \varepsilon^3 + \alpha_8\ \varepsilon^2\ \eta + \alpha_9\ \varepsilon\ \eta^2 + \alpha_{10}\ \eta^3 + \alpha_{11}\ \varepsilon^3\ \eta + \alpha_{12}\ \varepsilon\ \eta^3 \tag{2.30}$$

Kjer ε in η predstavljata lokalni koordinati končnega elementa, ki sta enaki $x = \varepsilon\ a$ in $y = b\ \eta$, α_1 - α_{12} pa so konstante polinoma. a in b predstavljata dimenziji širine končnega elementa plošče. Zasuka okoli x in y osi pa sta definirana:

$$\theta_x = \frac{1}{b}\frac{\partial w}{\partial \eta} \tag{2.31}$$

$$\theta_y = \frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \tag{2.32}$$

Polinomski izraz aproksimacije, ki je opisan z enačbo (2.30), lahko zapišemo tudi v matrični obliki, kot prikazuje enačba 2.33.

$$w = \left[\ 1 \quad \varepsilon \quad \eta \quad \varepsilon^2 \quad \ldots \quad \varepsilon^3\eta \quad \varepsilon\eta^3\ \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{array} \right\} = \mathbf{p}^T(\varepsilon, \eta) \cdot \boldsymbol{\alpha} \tag{2.33}$$

Konstante, zbrane v vektorju $\boldsymbol{\alpha}$, nimajo fizikalnega pomena, zato stremimo k zapisu aproksimacije pomikov, ki je opisan z enačbo (2.35), kjer imajo izračunane konstante tudi fizikalni pomen.

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}\ \boldsymbol{\alpha} \tag{2.34}$$

$$\mathbf{v}^T = \left[\ w_1 \quad \theta_{1,x} \quad \theta_{1,y} \quad \ldots \quad w_4 \quad \theta_{4,x} \quad \theta_{4,y}\ \right] \tag{2.35}$$

Kjer je $\mathbf{v}$ vektor pomikov in zasukov končnega elementa, matrika $\mathbf{B}$ pa predstavlja matriko konstant, ki opravi potrebno transformacijo. Dobimo jo tako, da upoštevamo pogoje $w = w_i$, $\partial w/\partial x = \theta_{i,x}$ in $\partial w/\partial y = \theta_{i,y}$ za vsako vozlišče i (i = 1,2,3,4) [10]. Matriko $\mathbf{B}$ imenujemo tudi matrika oblikovnih funkcij.

V naslednjem koraku na podlagi zapisa deformacijske energije in Castiglianovega teorema izpeljemo izraz togostne matrike končnega elementa $\mathbf{K}_e$. Izpeljava je v detajle opisana v literaturi [9–11], za nas pa je pomembna le končna oblika togostne matrike končnega elementa plošče, ki je podana z enačbo (2.36).

$$\mathbf{K}_e = \int_A (\mathbf{CB})\mathbf{D}(\mathbf{CB})^T \mathrm{d}A \tag{2.36}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E\ h^3}{12\ (1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

Kjer integracija na območju A poteka znotraj območja $[0, a] \times [0, b]$. V nadaljevanju potrebujemo še masno matriko končnega elementa $\mathbf{M}_e$, ki jo v literaturi [11] izpeljejo na podlagi virtualnega dela. Končna oblika matrike je podana z enačbo (2.39).

$$\mathbf{M}_e = \rho\ h \int_A \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathrm{d}A \tag{2.39}$$

Z znanima matrikama $\mathbf{K}_e$ in $\mathbf{M}_e$ posameznega končnega elementa lahko v naslednjem koraku iz več končnih elementov tvorimo globalno togostno in masno matriko dinamskega sistema $\mathbf{K}$ in $\mathbf{M}$. Pri ustreznem zlaganju matrik končnih elementov v globalne matrike je za primer 3D sestava plošč potrebno pozornost posvetiti tudi razširitvi prostostnih stopenj posameznega končnega elementa, kot je to opisano v [12].

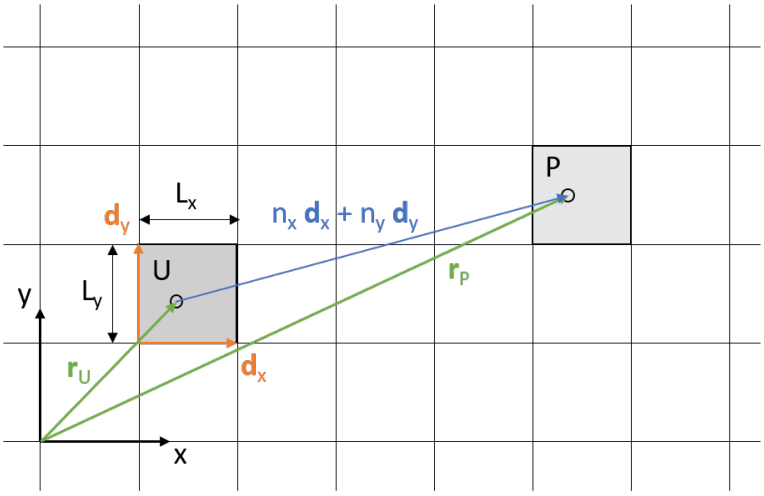
2.4 Obravnava neskončnih periodičnih struktur

Metamateriali so navadno periodične strukture. Periodične oblike je pogosto smiselno obravnavati kot neskončno periodične, saj v tem primeru s pomočjo Blochovega teorema smemo preučevati odziv celotnega sistema le na nivoju osnovne ponavljajoče se celice.

2.4.1 Blochov teorem

Blochov teorem nam narekuje na kakšen način smemo obravnavati širjenje valovanja na nivoju osnovne celice stroge neskončne periodične strukture. V sklopu pregleda teorije bo predstavljen le del teorema, ki je potreben za obravnavo metamaterialov periodične

narave. Že v začetku se bomo omejili na 2D translatorno periodično strukturo, pri čemer je osnovna ponavljajoča se celica pravokotne oblike z dimenzijami $L_x \times L_y$ v smeri periodičnosti. Za takšno periodično strukturo definiramo referenčni vektor $\mathbf{r}_U$, ki definira referenčno točko U, in referenčni vektor $\mathbf{r}_P$, ki definira poljubno točko P na periodični strukturi. Povezavo med točkama U in P, ki je med drugim prikazan tudi na sliki 2.3, lahko zapišemo z enačbo (2.40).



Slika 2.3: Prikaz 2D periodične strukture in njene bazne celice.

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_U + n_x \mathbf{d}_x + n_y \mathbf{d}_y \tag{2.40}$$

Kjer sta $\mathbf{d}_x$ in $\mathbf{d}_y$ bazna enotska vektorja osnovne celice (dolžin L_x in L_y), n_x in n_y pa sta celi števili, ki ponazarjata število baznih celic v x in y smeri med točkama U in P. Ob nadaljni predpostavki, da imamo opravka s časovno harmonskim nihanjem, lahko odziv valovanja 2D strukture $\mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ po Blochovem teoremu zapišemo [13]:

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.41}$$

Kjer $\mathbf{r}$ ponazarja vektor pozicije v $x-y$ ravnini, ω frekvenco valovanja, $\mathbf{k}$ valovni vektor ($\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, pri čemer k_i v splošnem predstavlja kompleksno valovno število v smeri $\mathbf{d}_i$), i kompleksno število ($i^2 = -1$), $\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ pa je poljubna periodična funkcija. V enačbi (2.41) $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ razumemo kot ravno/plano valovanje, ki potuje v smeri vektorja $\mathbf{k}$, $e^{\mathrm{i}\omega t}$ pa kot njegovo harmonsko valovanje. Za periodično funkcijo $\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ nadalje velja zakonitost:

$$\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{q}}\left(\mathbf{r} + n_x \mathbf{d}_x + n_y \mathbf{d}_y, \mathbf{k}\right) \tag{2.42}$$

Slednja enačba nam narekuje, da je oblika periodične funkcije znotraj vsake bazne celice enaka, posledično pa lahko na podlagi referenčne bazne celice z odzivom $\mathbf{q}_{ref}(\mathbf{r_U}, \mathbf{k}, t)$ v točki U napovemo odziv neskončne periodične strukture $\mathbf{q}(\mathbf{r_P}, \mathbf{k}, t)$ v točki P, kot opisuje enačba (2.43).

$$\mathbf{q}\left(\mathbf{r}_P, \mathbf{k}, t\right) = \mathbf{q}_{\mathrm{ref}}\left(\mathbf{r}_U, \mathbf{k}, t\right) e^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot(n_x \mathbf{d}_\mathrm{x} + n_y \mathbf{d}_\mathrm{y})} \tag{2.43}$$

Iz enačbe (2.43) lahko razberemo tudi, da se, zaradi širjenja valovanja po strukturi znotraj sosednjih (ali oddaljenih) baznih celic, odziv razlikuje le po amplitudi in faznem zamiku, po obliki pa ostaja enak referenčni bazni celici. Enačbo (2.43) lahko podamo tudi v obliki:

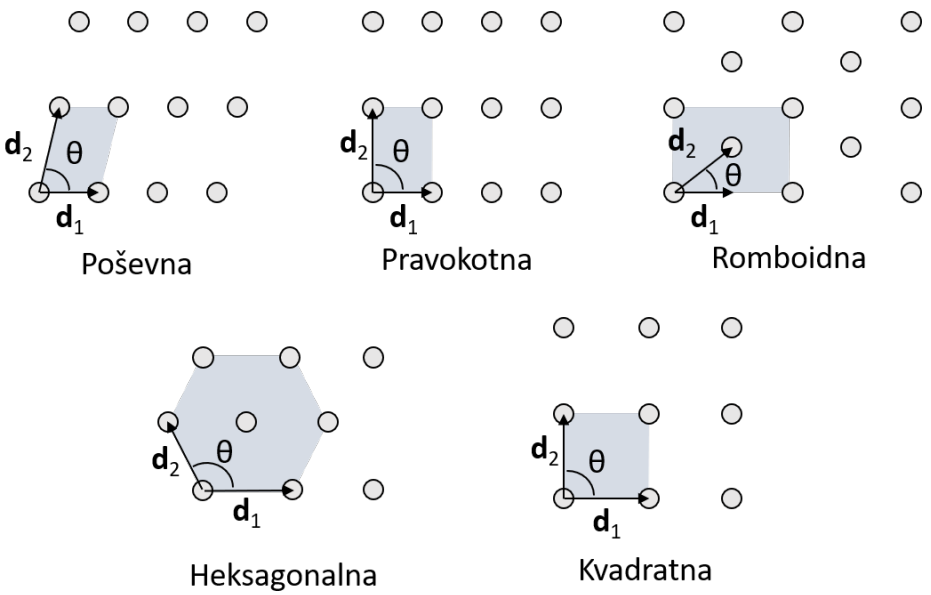
$$\mathbf{q}\left(\mathbf{r}_P, \boldsymbol{\mu}, t\right) = \mathbf{q}_{\text{ref}}\left(\mathbf{r}_U, \boldsymbol{\mu}, t\right) e^{\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{n}} \tag{2.44}$$

Kjer je $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$, $\boldsymbol{\mu}$ pa predstavlja kompleksni vektor širjenja valovanja, definiran kot $\boldsymbol{\mu} = (\mu_x, \mu_y) = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{d}_x, \mathbf{k}\cdot\mathbf{d}_y) = (k_x L_x, k_y L_y)$. Komponenti vektorja širjenja valovanja μ_x in μ_y imata tudi smiseln fizikalen pomen, saj njuna realna komponenta predstavlja relativno spremembo faze, imaginarna komponenta pa predstavlja relativno spremembo amplitude vala, ki potuje po neskončni strukturi v smeri vektorja $\boldsymbol{\mu}$ oziroma $\mathbf{k}$ [14].

Predstavljen povzetek Blochovega teorema nam torej omogoča modeliranje in obravnavo le osnovne bazne celice, s katero je moč napovedati odziv celotne periodične strukture.

2.4.2 Recipročni prostor, Brillouinove cone in Brillouinove konture

Preden uporabimo Blochov teorem na dejanski problem strukturne dinamike, je potrebno povedati nekaj besed o splošni periodičnosti kristalnih struktur in načinu njihove obravnave. V 2D prostoru poznamo 5 tipov periodičnih struktur in sicer poševno, pravokotno, kvadratno, heksagonalno in romboidno periodično strukturo [13], glejte sliko 2.4.



Slika 2.4: Tipi periodičnih struktur v 2D prostoru.

Oblike kristalov so definirane z vektorjema $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, imenovana tudi kot osnovna osna/bazna translacijska vektorja. Slednja povezujeta sosednje točke v periodični strukturi, s čimer

definirata obliko in orientacijo direktne (fizične) bazne celice. Periodične strukture navadno ne obravnavamo v prostoru direktne bazne celice, temveč v valovnem prostoru njene recipročne bazne celice [3] [13]. Bazne vektorje recipročne osnovne celice $\mathbf{t}_1$ in $\mathbf{t}_2$ dobimo s pomočjo enačbe:

$$\boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{t}_j = 2\pi\delta_{ij} \tag{2.45}$$

Kjer indeksa i, j zavzemata vrednosti 1, 2, δ_{ij} pa predstavlja Kroneckerjev delta tenzor. Za lažjo predstavo lahko $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ ter $\mathbf{t}_1$ in $\mathbf{t}_1$ zapišemo tudi v matrični obliki:

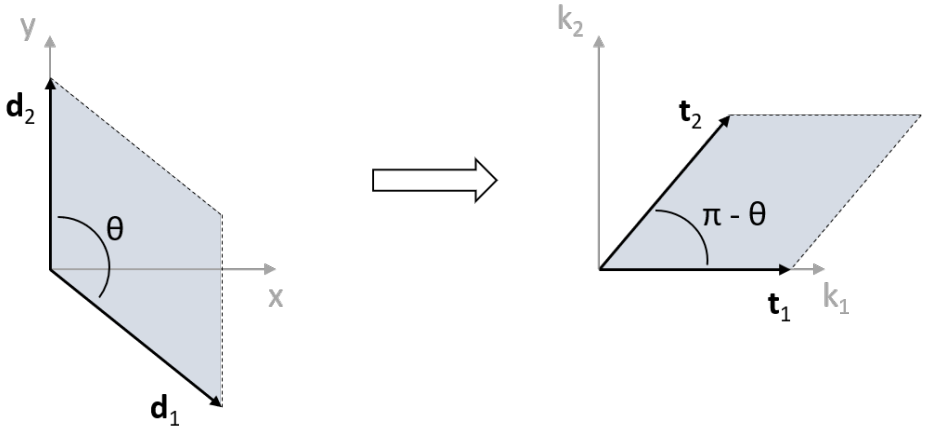
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{1x} & d_{1y} \\ d_{2x} & d_{2y} \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{1x} & t_{2x} \\ t_{1y} & t_{2y} \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

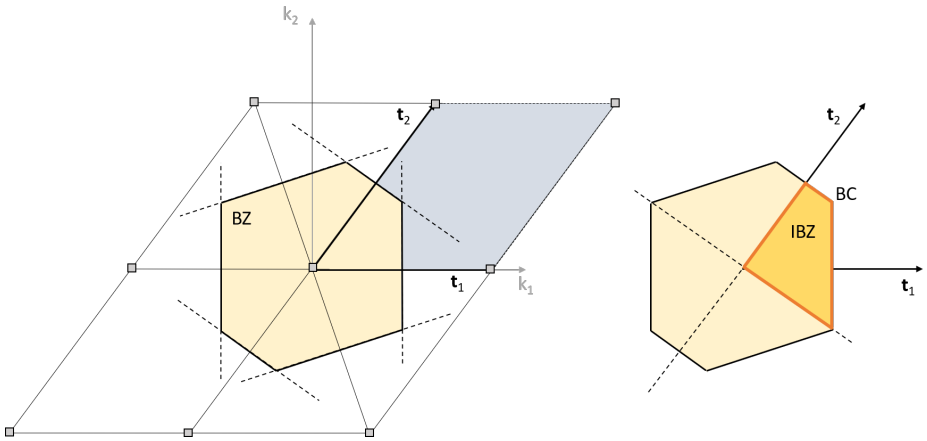
Kjer npr. element d_{1x} matrike $\mathbf{D}$ pomeni x komponento baznega vektorja $\mathbf{d}_1$. Za skalarni produkt $\mathbf{D} \cdot \mathbf{T}$ velja torej enačba 2.48.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{T} &= \begin{pmatrix} d_{1x} & d_{1y} \\ d_{2x} & d_{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1x} & t_{2x} \\ t_{1y} & t_{2y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{1x}t_{1x} + d_{1y}t_{1y} & d_{1x}t_{2x} + d_{1y}t_{2y} \\ d_{2x}t_{1x} + d_{2y}t_{1y} & d_{2x}t_{2x} + d_{2y}t_{2y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{t}_1) & (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{t}_2) \\ (\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{t}_1) & (\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{t}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi & 0 \\ 0 & 2\pi \end{pmatrix} = 2\pi\delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.48}$$

Iz zgornje enačbe je moč razbrati tudi, da sta $\mathbf{d}_1$ in $\mathbf{t}_2$ med seboj ortagonalna, prav tako sta med seboj ortagonalna $\mathbf{d}_2$ in $\mathbf{t}_1$, saj je njun skalarni produkt nič. Na sliki 2.5 je prikazan primer direktne bazne celice in njene recipročne bazne celice. Z recipročno bazno celico bomo v nadaljevanju analizirali periodične strukture. Pomembno je poudariti, da za preučevanje periodičnih struktur ni potrebno analizirati celotne recipročne bazne celice, temveč le del, imenovan prva Brillouinova cona. Prva Brillouinova cona je najmanjši osnovni gradnik, iz katerega je moč konstruirati celotno periodično strukturo in je manjša oziroma enaka osnovni bazni recipročni celici. Grafično lahko obliko Brillouinove cone dobimo v 2D strukturah, kot prikazuje slika 2.6. Z izbrano referenčno točko v recipročni bazni celici tvorimo daljico z vsemi sosednjimi točkami in tvorimo simetrale teh daljic (črtkane črte), kot prikazuje slika. Prostor, ki ga oklepajo simetrale, imenujemo Brillouinova cona. Brillouinove cone imajo pogosto dodatne simetrijske ravnine. Ob upoštevanju simetrije je Brillouinovo cono mogoče še dodatno reducirati na nereducirno Brillouinovo cono (imenovano tudi "irreducible Brillouin zone"), kot prikazuje slika 2.6 desno.



Slika 2.5: Primer bazne celice in njene recipročne bazne celice.

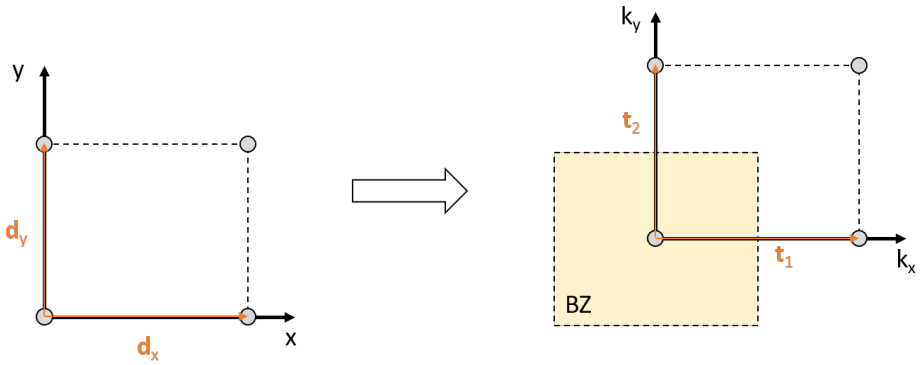


Slika 2.6: Primer tvorjenja Brillouinove cone (BZ) in nereducirne Brillouinove cone (IBZ) s prikazano Brillouinovo konturo (BC).

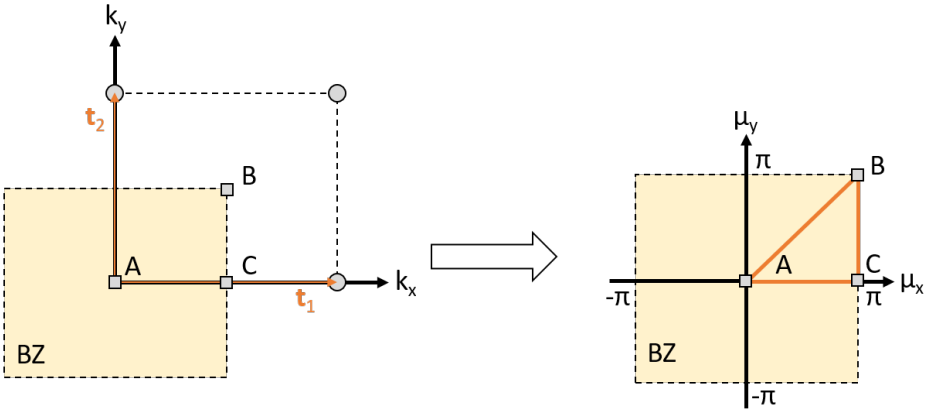
Če torej povzamemo, navadno osnovno bazno celico periodične strukture transformiramo v recipročno bazno celico v valovnem prostoru, na podlagi katere tvorimo prvo Brillouinovo cono. Slednjo nato dodatno reduciramo v nereducirno Brillouinovo cono, ki predstavlja najmanjši možni prostor, ki ga je potrebno obravnavati, da izvemo celotni odziv periodične strukture. Za potrebe obravnave periodičnih struktur na področju mehanskih nihanj pogosto zadošča le obravnava robov nereducirne Brillouinove cone, ki jih s skupnim imenom poimenujemo Brillouinova kontura. Ta je prav tako prikazana na sliki 2.6. Slednja trditev temelji na predpostavki, da se vsi minimumi in maksimumi odziva nahajajo na Brillouinovi konturi [3, 13].

V sklopu te magistrske naloge bomo imeli opravka le s pravokotnimi baznimi celicami. Posebnost pravokotne bazne celice je, da je oblika direktne in recipročne bazne celice enaka, kot prikazuje slika 2.7. Za pravokotno bazno celico velja tudi, da bazna vektorja celice $\mathbf{d}_1$ in $\mathbf{d}_2$ sovpadata z x in y osmi, enako velja za bazna vektorja recipročne bazne celice $\mathbf{t}_1$ in $\mathbf{t}_2$. V ta namen v nadaljevanju zamenjamo indeksa 1, 2 z x, y. Iz slike 2.7 je moč opaziti tudi, da je recipročna bazna celica hkrati tudi enakih dimenzij kot prva Brillouinova cona. Direktna in recipročna mreža imata enako periodičnost, ki smo ju v poglavju 2.4.1 v enačbi (2.44) zapisali kot eksponentni člen $e^{\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}\,\mathbf{n}}$. Vemo,

da je $\boldsymbol{\mu}$ vektor širjenja valovanja ($\boldsymbol{\mu} = (\mu_x, \mu_y) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}_x, \mathbf{k} \cdot \mathbf{d}_y)$), periodičnost pa se izraža v primeru, ko je izraz $\boldsymbol{\mu}\ \mathbf{n}$ enak večkratniku števila 2π. Z uvedbo $\boldsymbol{\mu}$ torej prvo Brillouinovo cono transformiramo v kvadrat dimenzij $[-\pi, \pi]^2$ s koordinatnim sistemom μ_x, μ_y, kot prikazuje slika 2.8. Na sliki je prikazana tudi Brillouinova kontura, ki je pridobljena na račun dodatnih simetrij pravokotne bazne celice.



Slika 2.7: Primer pravokotne bazne celice, njene recipročne bazne celice v valovnem prostoru in Brillouinove cone (BZ).



Slika 2.8: Primer transformacije prve Brillouinove cone (BZ) iz valovega (k_x, k_y) prostora v valovni (μ_x, μ_y) prostor.

2.4.3 Modeliranje osnovne celice v strukturni dinamiki

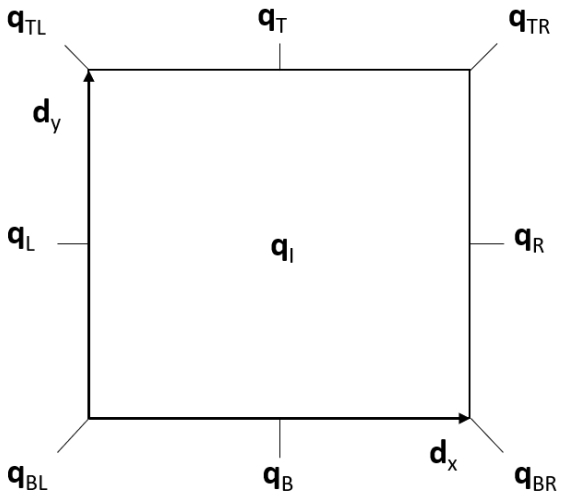
V poglavjih 2.2 in 2.3 smo pojasnili, kako za poljubno strukturo pridemo do masne, togostne in dušilne matrike $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$ ter $\mathbf{C}$. Zapisali smo tudi, kako s pomočjo le-teh lahko tvorimo dinamsko matriko sistema, ki je opisana z enačbo (2.49), in sistem enačb dinamskega problema, ki je podan z enačbo (2.50).

$$\hat{\mathbf{D}}(\omega) = \mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \tag{2.49}$$

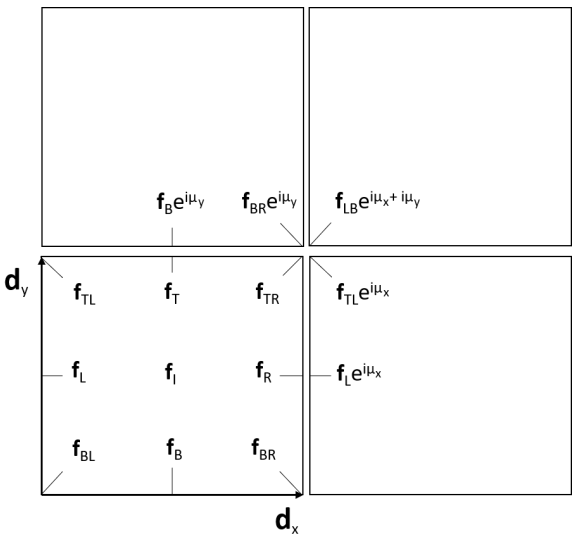
$$\hat{\mathbf{D}}(\omega)\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{f}} \tag{2.50}$$

Kjer $\hat{\mathbf{D}}(\omega)$ predstavlja dinamsko matriko bazne celice, $\hat{\mathbf{q}}$ in $\hat{\mathbf{f}}$ pa predstavljata vektorja generaliziranih prostostnih stopenj ter vozliščnih sil. Dinamska matrika bazne celice zaenkrat ne vključuje nikakršnih robnih pogojev. V nadaljevanju bomo na podlagi Blochovega teorema izpeljali dinamsko matriko sistema, ki bo vključevala periodične robne pogoje.

Generalizirane vozliščne pomike v vektorju $\hat{\mathbf{q}}$ in vozliščne sile v vektorju $\hat{\mathbf{f}}$ grupiramo v vektorje $\mathbf{q}_i$ in $\mathbf{f}_i$, glede na njihovo lokacijo v bazni celici, kot prikazujeta sliki 2.9 in 2.10. Temu primerno uredimo vektorja $\hat{\mathbf{q}}$ in $\hat{\mathbf{f}}$, kot je to prikazano v enačbah (2.51) in (2.52) [5, 15].



Slika 2.9: Prikaz grupiranih vektorjev generaliziranih pomikov dvodimenzionalne bazne celice neskončne periodične strukture. [15]



Slika 2.10: Prikaz grupiranih vektorjev generaliziranih vozliščnih sil dvodimenzionalne bazne celice neskončne periodične strukture. [15]

$$\hat{\mathbf{q}} = \left[\mathbf{q}_{BL}^T\ \mathbf{q}_{BR}^T\ \mathbf{q}_{TL}^T\ \mathbf{q}_{TR}^T\ \mathbf{q}_L^T \mathbf{q}_R^T\ \mathbf{q}_B^T\ \mathbf{q}_T^T\ \mathbf{q}_I^T\right]^T \tag{2.51}$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \left[\mathbf{f}_{BL}^T\ \mathbf{f}_{BR}^T\ \mathbf{f}_{TL}^T\ \mathbf{f}_{TR}^T\ \mathbf{f}_L^T \mathbf{f}_R^T\ \mathbf{f}_B^T\ \mathbf{f}_T^T\ \mathbf{f}_I^T\right]^T \tag{2.52}$$

kjer poudarimo potrebno urejenost vozlišč glede na lokacijo. Indeksi v zgornjih enačbah pomenijo naslednje:

- BL - vozlišča, ki ležijo na robu levo spodaj,
- BR - vozlišča, ki ležijo na robu desno spodaj,
- TL - vozlišča, ki ležijo na robu levo zgoraj,
- TR - vozlišča, ki ležijo na robu desno zgoraj,
- L - vozlišča, ki ležijo na levem robu,
- R - vozlišča, ki ležijo na desnem robu,
- B - vozlišča, ki ležijo na spodnjem robu,
- T - vozlišča, ki ležijo na zgornjem robu,
- I - notranja vozlišča, ki ne ležijo na robu in ne bodo imeli predpisanih robnih pogojev.

Po enakem ključu je potrebno razporediti tudi elemente dinamske matrike. Za potrebe kasnejših matematičnih operacij lahko sistem enačb predstavimo tudi v obliki:

$$\hat{\mathbf{D}} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}_I \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \tag{2.53}$$

S čimer ločimo notranje vozliščne pomike od robnih. Ker bomo v nadaljevanju reševali problem lastnih nihanj, v zgornji enačbi predpostavimo tudi, da na notranja vozlišča ne deluje nobena zunanja sila. V nadaljevanju bomo s pomočjo Blochovega teorema pripisali periodične robne pogoje. Poglavje 2.4.1 smo končali z enačbo (2.44), ki nam med drugim narekuje, da lahko pomike na nasprotnih robovih bazne celice ustrezno skaliramo z $e^{i\mu_x}$ v smeri $\mathbf{d}_x$ in z $e^{i\mu_y}$ v smeri $\mathbf{d}_y$, s čimer tvorimo povezave pomikov [15]:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{q}_R = \mathbf{q}_L\ \mathrm{e}^{i\mu_x}, & \mathbf{q}_T = \mathbf{q}_B\ \mathrm{e}^{i\mu_y} & \\ \mathbf{q}_{BR} = \mathbf{q}_{BL}\ \mathrm{e}^{i\mu_x}, & \mathbf{q}_{TL} = \mathbf{q}_{BL}\ \mathrm{e}^{i\mu_y}, & \mathbf{q}_{TR} = \mathbf{q}_{BL}\ \mathrm{e}^{i\mu_x + i\mu_y} \end{array} \tag{2.54}$$

Z uporabo zgornjih relacij lahko vektor generaliziranih vozliščnih pomikov $\mathbf{q}$ (ta ne vsebuje notranjih vozlišč) reduciramo s pomočjo reducirne matrike $\mathbf{\Lambda}_R$ [5]:

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Lambda}_R\ \mathbf{q}_{red}; \quad \mathbf{q}_{red} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_{BL} \\ \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_B \end{array} \right\}; \quad \mathbf{\Lambda}_R = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}_{BL,BL} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \lambda_x \mathbf{Q}_{BR,BL} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \lambda_y \mathbf{Q}_{TL,BL} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \lambda_x \lambda_y \mathbf{Q}_{TR,BL} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{L,L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_x \mathbf{Q}_{R,L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{B,B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_y \mathbf{Q}_{T,B} \end{array} \right] \tag{2.55}$$

kjer je $\mathbf{q}_{red}$ reduciran vektor generaliziranih vozliščnih pomikov na robu, za skaliranje amplitude in faze vozliščnih pomikov pa smo uvedli simbola $\lambda_x = e^{i\mu_x}$ in $\lambda_y = e^{i\mu_y}$. Matrike $\mathbf{Q}_{ij}$ v zgornjih enačbah predstavljajo ustrezne selekcijske matrike. Njihov pomen postane pomemben v primerih, ko med seboj povezani robovi bazne celice ne vsebujejo enako število vozlišč. V primeru, ko imata povezana robova enako število vozlišč, je torej $\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{Q}_{ii} = I_{ii}$ enotska matrika dimenzije $i \times i$.

Ob upoštevanju konsistentnosti notranjih veličin lahko podobno kot za pomike z enačbo (2.54) povežemo še grupirane vektorje vozliščnih sil:

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}_R = -\mathbf{f}_L\ \lambda_x, \quad \mathbf{f}_T = -\mathbf{f}_B\ \lambda_y \\ &\mathbf{f}_{BR} = -\mathbf{f}_{BL}\ \lambda_x, \quad \mathbf{f}_{TL} = -\mathbf{f}_{BL}\ \lambda_y, \quad \mathbf{f}_{TR} = -\mathbf{f}_{BL}\ \lambda_x\ \lambda_y \end{aligned} \tag{2.56}$$

Podobno kot pri pomikih za vektor generaliziranih vozliščnih sil na robu $\mathbf{f}$ definiramo reduciran vektor vozliščnih sil $\mathbf{f}_{red}$ na podlagi relacij iz enačbe (2.56).

$$\mathbf{\Lambda}_L\ \mathbf{f} = \mathbf{f}_{red}; \quad \mathbf{f}_{red} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}_{BL} \\ \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_B \end{array} \right\} \tag{2.57}$$

Kjer smo definirali levo reducirno matriko $\mathbf{\Lambda}_L$, katere oblika je podana z enačbo 2.58.

$$\mathbf{\Lambda_L} = \left[\begin{array}{cccccccc} \mathbf{Q}_{BL,BL} & \lambda_x^{-1}\mathbf{Q}_{BL,BR} & \lambda_y^{-1}\mathbf{Q}_{BL,TL} & \lambda_x^{-1}\lambda_y^{-1}\mathbf{Q}_{BL,TR} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{L,L} & \lambda_x^{-1}\mathbf{Q}_{L,R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{B,B} & \lambda_y^{-1}\mathbf{Q}_{B,T} \end{array} \right] \tag{2.58}$$

Do tega trenutka smo izpeljali levo in desno reducirno matriko $\mathbf{\Lambda}_L$ in $\mathbf{\Lambda}_R$, s katerimi bomo v nadaljevanju reducirali prostostne stopnje povezane z robovi BR, TL, TR, R in T. Notranjih vozliščnih pomikov in sil v $\mathbf{\Lambda}_L$ in $\mathbf{\Lambda}_R$ nismo zajeli, saj jih bomo iz dinamske matrike v naslednjem koraku eliminirali s pomočjo kondenzacije. Za vsako frekvenco ω lahko kondenzacijo opravimo po enačbi [5]:

$$\mathbf{D}_{i,j} = \hat{\mathbf{D}}_{i,j} - \hat{\mathbf{D}}_{i,I}\hat{\mathbf{D}}_{I,I}^{-1}\hat{\mathbf{D}}_{I,j} \tag{2.59}$$

Nastali sistem enačb sedaj ne vsebuje več notranjih prostostnih stopenj bazne celice, predstavljenih z indeksom I. Novonastali sistem enačb ima sedaj obliko, opisano z enačbo:

$$\mathbf{D}(\omega)\mathbf{q} = \mathbf{f} \tag{2.60}$$

kjer $\mathbf{D}$ predstavlja kondenzirano dinamsko matriko. V kolikor bi za potrebe kasnejših analiz potrebovali notranje generalizirane vozliščne pomike, te lahko izračunamo po enačbi (2.61).

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_I = -\mathbf{D}_{I,I}^{-1}(&\mathbf{D}_{I,BL}\mathbf{q}_{BL} + \mathbf{D}_{I,BR}\mathbf{q}_{BR} + \mathbf{D}_{I,TL}\mathbf{q}_{TL} + \mathbf{D}_{I,TR}\mathbf{q}_{TR} + \mathbf{D}_{I,L}\mathbf{q}_L \\ &+\mathbf{D}_{I,R}\mathbf{q}_R + \mathbf{D}_{I,B}\mathbf{q}_B + \mathbf{D}_{I,T}\mathbf{q}_T) \end{aligned} \tag{2.61}$$

V kondenziran sistem enačb lahko sedaj vpeljemo reduciran vektor generaliziranih vozliščnih pomikov, dobljen sistem enačb pa z leve pomnožimo še z $\mathbf{\Lambda}_L$, s čimer vpeljemo še reduciran vektor generaliziranih vozliščnih sil. Postopek je opisan z enačbami:

$$\mathbf{D}(\omega)\mathbf{\Lambda}_R\mathbf{q}_{red} = \mathbf{f} \tag{2.62}$$

$$\mathbf{\Lambda}_L\mathbf{D}(\omega)\mathbf{\Lambda}_R\mathbf{q}_{red} = \mathbf{\Lambda}_L\mathbf{f} \tag{2.63}$$

$$\mathbf{\Lambda}_L\mathbf{D}(\omega)\mathbf{\Lambda}_R\mathbf{q}_{red} = \mathbf{f}_{red} \tag{2.64}$$

V nadaljevanju nas bodo zanimala le lastna nihanja bazne celice, zato lahko nadalje predpostavimo še $\mathbf{f}_{red} = \mathbf{0}$, s čimer dobimo končen sistem enačb, opisan z enačbo:

$$\mathbf{\Lambda}_L\ \mathbf{D}\ \mathbf{\Lambda}_R\ \mathbf{q}_{red} = \tilde{\mathbf{D}}\left(\omega, \lambda_x, \lambda_y\right)\ \mathbf{q}_{red} = \tilde{\mathbf{D}}\left(\omega, \mu_x, \mu_y\right)\ \mathbf{q}_{red} = \mathbf{0} \tag{2.65}$$

V zgornjem sistemu enačb so sedaj ustrezno upoštevani periodični robni pogoji. Matrika $\tilde{\mathbf{D}}$ je funkcija kar treh spremenljivk in sicer krožne frekvence ω ter komponent vektorja širjenja valovanja μ_x in μ_y. V naslednjem poglavju bomo predstavili dve metodi, ki se uporabljata za reševanje lastnega problema v periodičnih strukturah.

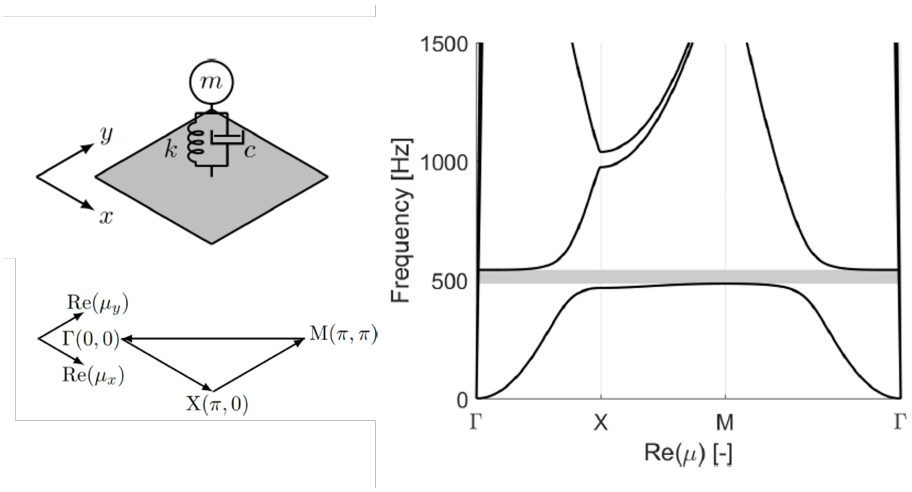
2.5 Metodologije izračuna periodičnih struktur

V poglavju 2.4.3 smo izpeljali dinamsko matriko bazne celice $\tilde{\mathbf{D}}\left(\omega, \mu_x, \mu_y\right)$, v kateri smo ustrezno upoštevali tudi robne pogoje neskončnih periodičnih struktur. V tem poglavju bomo omenjeno matriko uporabili in predstavili dve metodi, ki se uporabljata za identifikacijo območja PZF za dan metamaterial.

Končni rezultat izračuna MM, ki bo predstavljen v nadaljevanju, so disperzijske krivulje, ki opisujejo širjenje valovanja po neskončni periodični strukturi preko povezave med frekvenco nihanja in valovnim številom oz. valovno konstanto širjenja valovanja. Oblika in predstavitev disperzijskih krivulj se lahko nekoliko razlikuje od uporabljene metode za izračun, zato bodo te predstavljene tekom posamezne metode.

2.5.1 Inverzni pristop - $\omega(\mu)$

Pri inverznem pristopu, ki bo v nadaljevanju imenovan kot $\omega(\mu)$ pristop, se predpostavlja prosto širjenje valovanja [3] [5]. Posledično pričakujemo, da so komponente vektorja širjenja valovanja ($\boldsymbol{\mu}$) μ_x in μ_y realne. Velikost in smer $\boldsymbol{\mu}$ določimo na podlagi Brillouinovih kontur, za katere smo v poglavju 2.4.2 omenili, da so za obravnavo vibroakustičnih MM dovolj. Za vsak izbran $\boldsymbol{\mu}$ torej rešimo problem lastnih vrednosti (EVP) matrike $\tilde{\mathbf{D}}\left(\omega, \mu_x, \mu_y\right)$, pri čemer kot rezultat dobimo lastne frekvence strukture ω. Slednje so lahko realne, imaginarne ali kompleksne. Navadno uporabljamo $\omega(\mu)$ pristop za identifikacijo PZF nedušene strukture, zato kot rezultat EVP pričakujemo tudi realne ω. Slika 2.11 prikazuje tipično obliko izračunanih disperzijskih krivulj in območje PZF za nedušen MM. Na abscisni osi navadno označimo pot Brilluoinove konture, ki sovpada z vektorjem širjenja valovanja ($\boldsymbol{\mu}$).



Slika 2.11: Prikaz tipičnih disperzijskih krivulj (desno), PZF in obravnavane Brillouinove konture (levo) [5, 14].

2.5.2 Direktni pristop - $\mu(\omega)$

Direktni pristop, v nadaljevanju imenovan kot $\mu(\omega)$, predpostavlja časovno harmonsko širjenje valovanja [5, 14]. Za reševanje problema torej predpostavimo realne frekvence ω in preko disperzijskega lastnega problema izračunamo konstante širjenja valovanja μ. Slednje konstante μ so lahko realne, imaginarne ali kompleksne. Ker s tem pristopom navadno analiziramo bazne celice z vključenim dušenjem, je μ navadno kompleksna veličina. Realni del predstavlja relativno spremembo amplitude čez bazno celico in s tem slabljenje valovanja, imaginarni del pa predstavlja spremembo faze valovanja čez bazno celico. Uporaba direktnega pristopa za analizo 2D periodičnih struktur naleti na določene težave. S fiksiranjem frekvence valovanja ω v dinamski matriki bazne celice $\tilde{\mathbf{D}}(\omega, \mu_x, \mu_y)$ še vedno obstajata dve neznanki μ_x in μ_y, saj se valovanje lahko širi v poljubni smeri ravnine. Reševanja EVP se lahko lotimo na več načinov [14]:

- Privzamemo smer širjenja valovanja ψ in kot rezultat izračuna dobimo magnitudo vektorja širjenja valovanja μ.
- Privzamemo eno od komponent $\boldsymbol{\mu}$ (μ_x ali μ_y) in kot rezultat EVP dobimo drugo komponento.
- Privzamemo kot med Re[μ] in Im[μ] v kompleksni ravnini in rešimo EVP.

V sklopu te magistrske naloge bomo za lažjo primerjavo rezultatov med pristopoma privzeli smer širjenja valovanja ψ, kot je prikazano na sliki 2.12. V nadaljevanju bomo izpeljali končno obliko EVP, ki ga z $\mu(\omega)$ dejansko rešimo.

Že znano dinamsko matriko bazne celice $\tilde{\mathbf{D}}(\omega, \mu_x, \mu_y)$ oz. $\tilde{\mathbf{D}}(\omega, \lambda_x, \lambda_y)$ razpišemo v obliko, kot jo prikazuje enačba (2.66).

$$\begin{aligned}[\tilde{\mathbf{D}}_1 + \tilde{\mathbf{D}}_2\lambda_x + \tilde{\mathbf{D}}_3\lambda_y + \tilde{\mathbf{D}}_4\lambda_x\lambda_y + \tilde{\mathbf{D}}_5\lambda_x^2 + \tilde{\mathbf{D}}_6\lambda_y^2 + \tilde{\mathbf{D}}_7\lambda_x^2\lambda_y + \tilde{\mathbf{D}}_8\lambda_x\lambda_y^2 \\ + \tilde{\mathbf{D}}_9\lambda_x^2\lambda_y^2]\ \mathbf{q}_{red} = 0\end{aligned} \tag{2.66}$$

Matrike $\tilde{\mathbf{D}}_1$ - $\tilde{\mathbf{D}}_9$ so podane v prilogi A. Da lahko rešimo EVP problem, bi morali eno od preostalih spremenljivk λ_x in λ_y fiksirati. Namesto tega izberemo smer valovanja

ψ, ki je s komponentami valovnega vektorja povezana z enačbo:

$$\frac{\mu_y}{\mu_x} = \frac{L_y}{L_x}\tan(\psi) \tag{2.67}$$

Kjer L_y in L_x predstavljata širini bazne celice. Za primer bazne celice, ki bo v konkretnem primeru te magistrske naloge pravokotna, torej velja $L_y/L_x = 1$. S fiksirano smerjo imamo prosto le še eno spremenljivko, t.j. magnituda valovnega vektorja μ. Da lahko EVP rešimo z že znanimi metodami, moramo μ_x in μ_y zapisati v obliki, kot prikazuje enačba (2.68).

$$\mu_x = m_1\sigma \quad \mu_y = m_2\sigma \tag{2.68}$$

Kjer morata m_1 in m_2 obvezno biti celi števili. Če razpišemo izraz za λ_i in uvedemo $\alpha = e^{i\sigma}$, dobimo izraz, opisan z enačbo (2.69).

$$\lambda_i = e^{i\mu_i} = e^{im_i\sigma} = \alpha^{m_i} \tag{2.69}$$

Ob upoštevanju enačbe (2.69) dobi EVP problem obliko, opisano z enačbo (2.70).

$$\begin{aligned}[\tilde{\mathbf{D}}_1 + \tilde{\mathbf{D}}_2\alpha^{m_1} + \tilde{\mathbf{D}}_3\alpha^{m_2} + \tilde{\mathbf{D}}_4\alpha^{m_1+m_2} + \tilde{\mathbf{D}}_5\alpha^{2m_1} + \tilde{\mathbf{D}}_6\alpha^{2m_2} + \tilde{\mathbf{D}}_7\alpha^{2m_1+m_2} \\ +\tilde{\mathbf{D}}_8\alpha^{m_1+2m_2} + \tilde{\mathbf{D}}_9\alpha^{2m_1+2m_2}]\ \mathbf{q}_{red} = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{2.70}$$

Zgornji izraz je sedaj mogoče rešiti po znanih metodah reševanja EVP. Ob izbranih vrednostih m_1 in m_2 dobi EVP problem obliko, kot jo prikazuje enačba (2.71).

$$\left[\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\alpha^1 + \mathbf{A}_2\alpha^2 + ... + \mathbf{A}_m\alpha^m\right]\mathbf{q}_{red} = \mathbf{0} \tag{2.71}$$

Kjer posamezne matrike A_i predstavljajo ustrezno seštete matrike $\tilde{\mathbf{D}}_1$-$\tilde{\mathbf{D}}_9$, indeks m pa je lahko celo število od 0 pa do $m_1 + m_2$. Zgornji izraz predstavlja polinomski problem lastnih vrednosti, ki ga lahko nadalje prevedemo na linearni problem lastnih vrednosti [16]:

$$(\mathbf{Q} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{Z} = \mathbf{0} \tag{2.72}$$

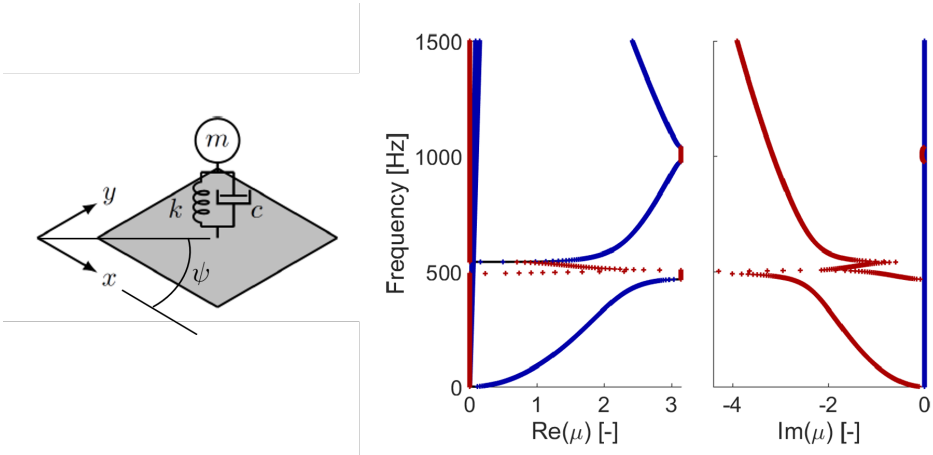
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_m^{-1}\mathbf{A}_{m-1} & \cdots & -\mathbf{A}_m^{-1}\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_m^{-1}\mathbf{A}_0 \\ \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} \alpha^{m-1}\mathbf{q}_{red} \\ \vdots \\ \alpha\mathbf{q}_{red} \\ \mathbf{q}_{red} \end{Bmatrix} \tag{2.73}$$

V teoriji lahko tovrsten EVP vedno rešimo, pri čemer kot rezultat dobimo lastne vrednosti α. Magnitudo μ lastnih valovnih vektorjev lahko na podlagi α izračunamo po enačbi:

$$\mu = -i\ln(\alpha)\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \tag{2.74}$$

Omeniti je potrebno, da lahko pri izbrani metodi računanja EVP smer valovanja ψ močno podaljša računski čas, saj je matrika $\mathbf{Q}$ razsežnosti $m_1 \times m_2$, izbira m_1 in m_2 pa je odvisna od ψ [16].

Slika 2.12 prikazuje tipičen prikaz disperzijskih krivulj, izračunanih po $\mu(\omega)$ metodi za izbrano smer ψ. Navadno podamo dva diagrama, pri čemer na abscisno os na enem diagramu navedemo realni del $\mathrm{Re}(\mu)$, na drugem pa imaginarni del $\mathrm{Im}(\mu)$. Kot smo že omenili, realni del predstavlja relativno spremembo amplitude čez bazno celico in s tem slabljenje valovanja, imaginarni del pa predstavlja spremembo faze valovanja čez bazno celico. PZF prepoznamo predvsem po imaginarnem delu $\mathrm{Im}[\mu]$, ki se v frekvenčnem območju PZF bliža ali je enak faznemu zamiku π, s čimer je vzpostavljena popolna ali delna destruktivna interferenca.



Slika 2.12: Prikaz tipičnih disperzijskih krivulj po $\mu(\omega)$ pristopu [5, 14].

2.5.3 Glavni vplivni faktorji na disperzijske krivulje

V sklopu teoretičnega pregleda je smiselno opredeliti tudi glavne faktorje, ki vplivajo na kreiranje PZF, njegovo zmožnost slabljenja širjenja valovanja ter njegovo širino v frekvenčnem prostoru. V [17] je analiziran vpliv mase resonatorja in njegove lastne frekvence na PZF upogibnih valovanj plošč. V delu je predpostavljena 2D periodična struktura z idealiziranimi resonatorji masa-vzmet, ki so enakomerno razporejeni po neskončni plošči. Z enačbo (2.75) je definirano masno razmerje med maso resonatorja in osnovne strukture (plošče).

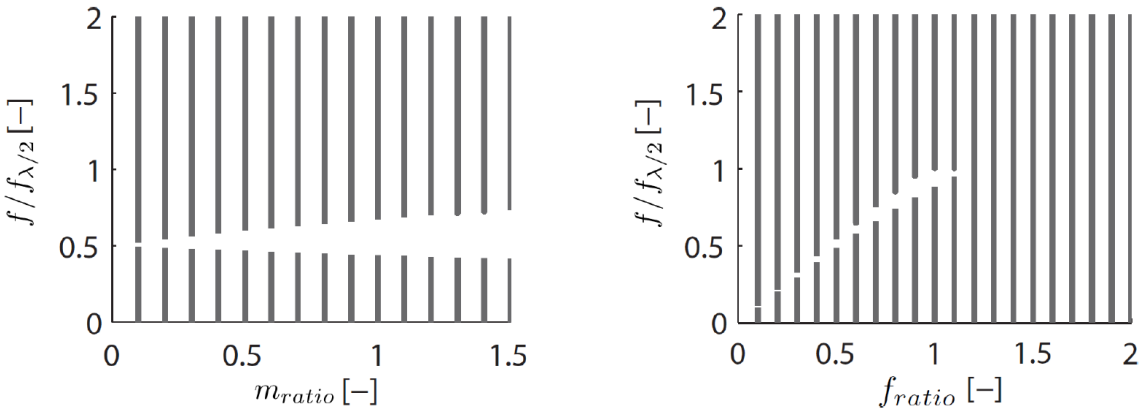
$$m_{\mathrm{ratio}} = \frac{m_{\mathrm{res}}}{m_{\mathrm{host}}} \tag{2.75}$$

Kjer m_{res} pomeni masa resonatorja, m_{host} pa predstavlja maso osnovne strukture znotraj ene bazne celice. Nadalje je definirano še frekvenčno razmerje, kot prikazuje enačba:

$$f_{\mathrm{ratio}} = \frac{f_{\mathrm{res}}}{f_{\lambda/2}} \tag{2.76}$$

Kjer je f_{res} lastna frekvenca resonatorja ($f_{\mathrm{res}} = 1/(2\pi)\sqrt{k/m_{\mathrm{res}}}$), $f_{\lambda/2}$ pa predstavlja limitno frekvenco Braggove interference, pri kateri $\lambda/2$ ustreza tudi širini bazne celice

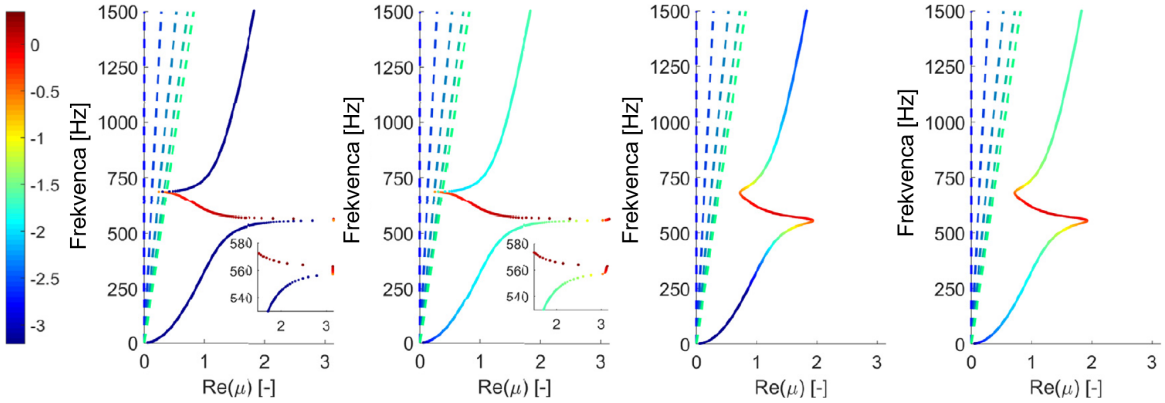
oziroma razmaku med resonatorji. Kot lahko vidimo iz slike 2.13, povečanje mase resonatorja ob konstantnem frekvenčnem razmerju f_{ratio} razširi frekvenčno območje resonančnega PZF. Povečanje lastne frekvence resonatorja na drugi strani ob konstantnem masnem razmerju m_{ratio} prav tako nekoliko razširi PZF, a ga hkrati tudi po frekvenčni skali nekoliko zamakne. V primeru, ko z lastno frekvenco resonatorja f_{res} presežemo $f_{\lambda/2}$, PZF ni več zagotovljen. Nad limitno frekvenco Braggove interference lahko namreč resonatorji ležijo v vozlih upogibnih valovanj plošče, s čimer je njihov vpliv na valovanje onemogočen.



Slika 2.13: Vpliv razmerja mas (levo) in razmerja frekvenc (desno) na kreiranje PZF [17].

Kljub temu se lahko za primere, ko je $f_{\text{res}} > f_{\lambda/2}$, pod $f_{\lambda/2}$, še vedno formira interferečni tip PZF, v primeru, ko imamo zadostno visoko razmerje m_{ratio} [14, 17]. Primeren razmak med resonatorji, ki ustreza $f_{\text{res}} < f_{\lambda/2}$, je torej pogoj le za resonančni tip PZF.

Velik vpliv na karakteristiko PZF ima tudi dušenje. Kot smo že omenili, fizikalni princip za nastanek resonančnega PZF temelji na Fano tipu interference, pri katerem lokalne resonance preusmerjajo prihajajoče valove v protifazi, s čimer se pojavlja destruktivna interferenca. Dušenje v resonatorjih posledično niža amplitude preusmerjenih valov, kar privede do delne in nepopolne destruktivne interference. Poleg tega dušenje vpliva tudi na fazni zamik preusmerjenih valov, kar še dodatno vpliva na interferenco valov. Avtorji del [5, 14, 17, 18] ločujejo dušenje na dva dela, na dušenje v osnovni strukturi bazne celice ter dušenje v resonatorjih. Na sliki 2.14 a) in c) lahko vidimo, kako se slabljenje valov v PZF s povečevanjem dušenja v resonatorju niža, PZF pa se s povečevanjem dušenja nekoliko razširi v frekvenčni skali. V primeru, ko je dušenje preveliko, lahko PZF celo izgine. Če primerjamo primera a) in b), opazimo, da dušenje v osnovni strukturi pripomore k nekoliko večjemu slabljenju valovanja izven PZF.



(a) $\eta_h = 0, \eta_r = 0$ (b) $\eta_h = 0.05, \eta_r = 0$ (c) $\eta_h = 0, \eta_r = 0.05$ (d) $\eta_h = 0.05, \eta_r = 0.05$

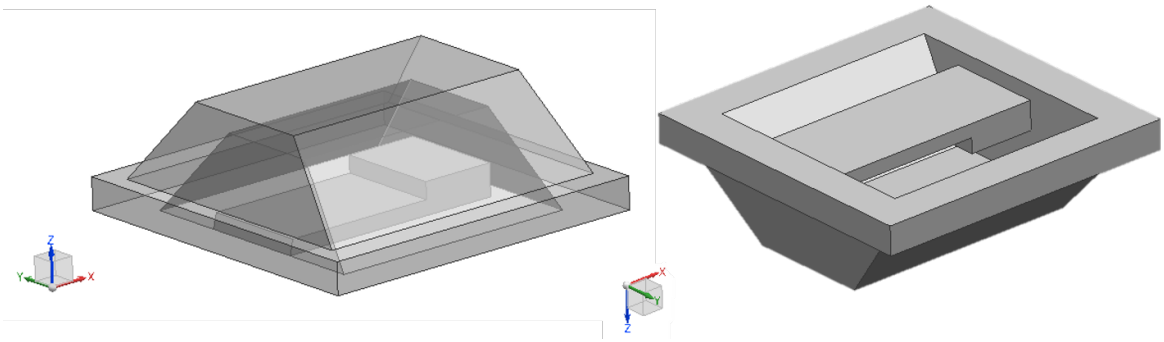
Slika 2.14: Vpliv dušenja resonatorja in osnovne strukture na realni del vektorja širjenja valovanja za izbrano smer ψ valovanja. a) celotno nedušena struktura, b) dušena osnovna struktura, nedušen resonator, c) nedušena osnovna struktura in dušen resonator, d) dušena celotna struktura. Barve disperzijskih krivulj sovpadajo z $\log_{10}(\mathrm{Im}(\mu))$. V delu [18] je bil uporabljen histerezni model dušenja [18].

3 Zasnova in preračun metamateriala

Znotraj tega poglavja je sprva predstavljena in komentirana zasnova MM. Sledi predstavitev priprave mreže za izračun po metodi končnih elementov ter navedba in komentar materialnih lastnosti. Zatem je podrobno opisan izračun disperzijskih krivulj MM po inverzni in direktni metodi. Komentirani so delovanje kode ter pridobljeni rezultati.

3.1 Zasnova oblike metamateriala

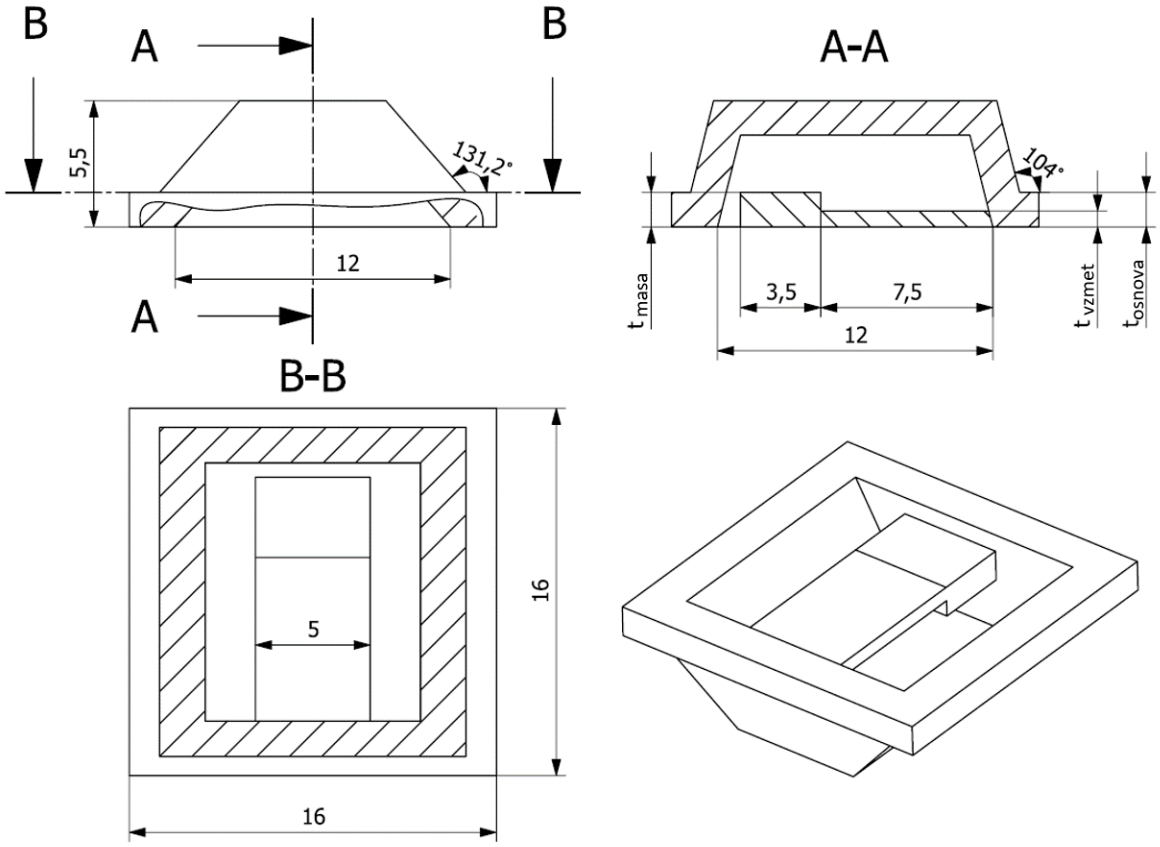
Pri zasnovi MM smo težili k preprostosti in čim večji možnosti parametrizacije. Vemo, da mora biti MM v grobem sestavljen iz osnovne strukture, ki omogoča 2D periodičnost, ter resonatorja na osnovni strukturi. Po številnih iteracijah smo se odločili za obliko MM, ki je prikazana na sliki 3.1. Struktura vsebuje resonator, ki spominja na konzolni nosilec z dodano maso. Takšna oblika omogoča preprosto prilagajanje 1. lastne frekvence fiksno vpetega resonatorja in s tem frekvenčnega področja PZF. S takšno obliko lahko brez težav ustvarimo PZF v nižjem frekvenčnem področju, ob primerni spremembi debelin resonatorja pa je PZF mogoče ustvariti tudi pri višjih frekvencah. Osnovna struktura bazne celice je kvadratne oblike, kar omogoča nekoliko lažji preračun MM, saj je identifikacija recipročne bazne celice in Brillouinovih kontur trivialna.



Slika 3.1: Končni koncept bazne celice metamateriala.

Pri izbrani obliki MM lahko vidimo, da se osnovna struktura prilagaja resonatorju in ne obratno. Razlog za to leži v sami izdelavi MM, saj bo izdelan s pomočjo tehnike FFF

3D tiskanja. Izbran MM omogoča dobro kontrolo oblike in debeline resonatorja, ki so kritične za doseganje lastnih frekvenc resonatorjev s čim nižjim raztrosom. Končne dimenzije MM so podane na sliki 3.2. Dimenzije t_{vzmet}, t_{masa} in t_{osnova} so parametrizirane in omogočajo prilagajanje MM k formiranju PZF v želenem frekvenčnem področju. Debelino osnovne strukture t_{osnova} smo privzeli konstantno in enako 1,5 mm že v fazi zasnove. Širina bazne celice (16 mm) ustreza pogoju $f_{\text{res}} < f_{\lambda/2}$, saj bomo v nadaljevanju strmeli k 1. lastni frekvenci resonatorja okoli 1000 Hz ($f_{\lambda/2} = 2998$Hz, vidno na sliki 3.9 v nadaljevanju). Težimo k masnemu razmerju $m_{\text{ratio}} = 0.1$ (enačba (2.75)).



Slika 3.2: Dimenzije bazne celice MM [19].

3.2 Materialne lastnosti MM

Kot smo že omenili, bo za izdelavo uporabljena FFF tehnika 3D tiska. MM bo natisnjen iz PLA plastike, ki je ena najbolj dostopnih, cenovno ugodnih in okolju prijaznih plastik v svetu 3D tiskanja. Materialne lastnosti PLA plastike so močno odvisne od parametrov izdelave. Parametri izdelave, ki na materialne lastnosti najbolj vplivajo, so temperatura, hitrost tiska, hlajenje, premer šobe ekstruderja, debeline nanosov pri tiskanju itd. Materialne lastnosti PLA plastike so bile testirane preko eksperimentov opisanih v poglavjih 4.1.1 in 4.1.2. Preglednica 3.1 vsebuje pomerjene materialne lastnosti. Opazimo lahko, da imamo podane tri različne vrednosti E modulov za resonator. Tekom testiranj lastne frekvence resonatorjev, ki so opisana v poglavju 4.2, je

bilo ugotovljeno, da je raztros lastnih frekvenc zaradi nekonsistentnih debelin resonatorjev relativno velik. Zaradi lažjega izračuna je bila sprememba debeline resonatorjev upoštevana znotraj E modula. Izbira navedenih vrednosti E modulov je komentirana v poglavju 4.2. Vrednost Poissonovega količnika ν je bila privzeta iz literature [20], koeficient histereznega dušenja η pa je bil ocenjen iz testov, opisanih v poglavju 4.2.

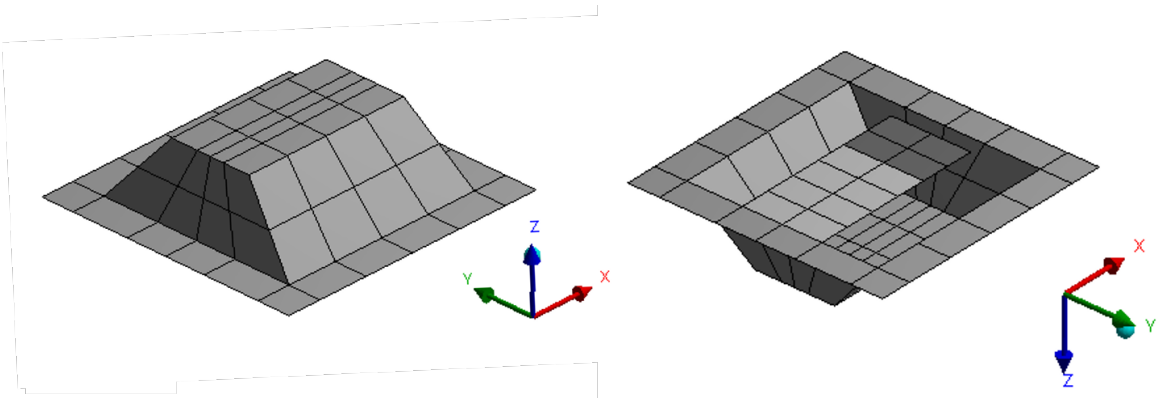
Preglednica 3.1: Materialne lastnosti MM.

Parameter	ρ [kg/m^3]	E [MPa] - osnovna struktura	E [MPa] - resonator	ν [/]	η [%]
Vrednost	1220	2440	2430 / 2830 / 3110	0.33	1.86

3.3 Priprava mreže MM

Kot smo omenili v poglavju 2.3, bomo masno in togostno matriko matriko bazne celice MM pridobili s pomočjo metode končnih elementov. V ta namen moramo strukturo celice najprej ustrezno zamrežiti. Zavedati se moramo, da morata biti dimenziji masne in togostne matrike čim manjši, saj inverzna in direktna metoda izračuna disperzijskih krivulj zahtevata izračun lastnega problema za vsako izbrano frekvenco (pri direktnem pristopu še za vsako izbrano smer valovanja), za kar potrebujemo tipično opraviti od 200 do 600 izračunov. Zaradi navedenih razlogov težimo k mreži s čim manj končnimi elementi in vozlišči. Mreženje smo opravili znotraj programskega paketa ANSYS [21].

Ker imamo opravka z relativno tankimi strukturami, smo bazno celico mrežili z lupinskimi končnimi elementi, ki so znotraj programskega paketa ANSYS poimenovani tudi kot 'SHELL281'. Gre za štirikotni 8-vozliščni lupinski končni element s kvadratno aproksimacijo in posledično 48 prostostnimi stopnjami. Osnovna celica je bila poenostavljena na lupino in bila zamrežena, kot prikazuje slika 3.3. Površine lupine so bile ustrezno deljene, da se je zagotovila strukturirana mreža z najmanj končnimi elementi. Končna mreža bazne celice vsebuje 80 končnih elementov in 276 vozlišč. Znotraj programskega paketa ANSYS se je opravila še konvergenca mreže, pri čemer se je opazovala 1. lastna frekvenca prosto vpete celotne bazne celice MM. Rezultati so zbrani v preglednici 3.2. Opazimo, da je relativna sprememba lastne frekvence ob uporabi končne mreže napram gostejši mreži 0.162 %, kar je za naš izračun zadovoljivo.

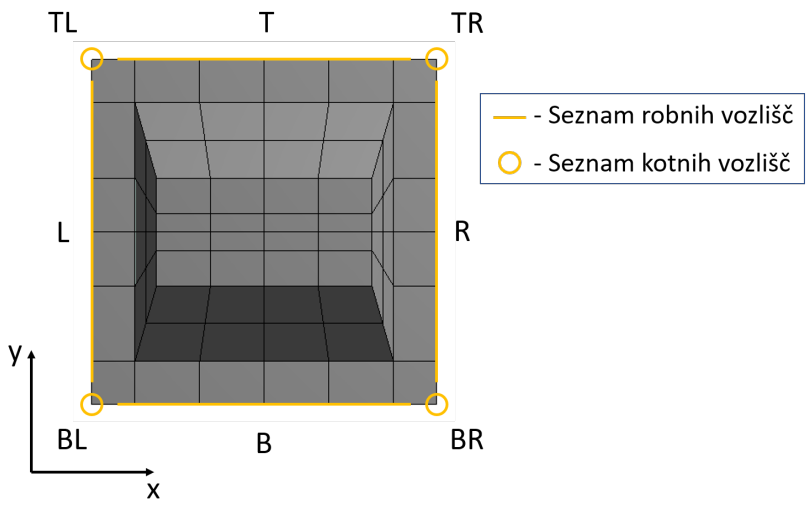


Slika 3.3: Lupina bazne celice MM in končno uporabljena mreža.

Preglednica 3.2: Konvergenca mreže bazne celice za 1. lastno frekvenco pri prostem vpetju.

Število elementov [/]	5120	1280	320	80
Število vozlišč [/]	15648	3984	1032	276
1. lastna frekvenca [Hz]	963.84	963.85	964.16	965.40
Odstopanje [%]	0	0.001	0.033	0.162

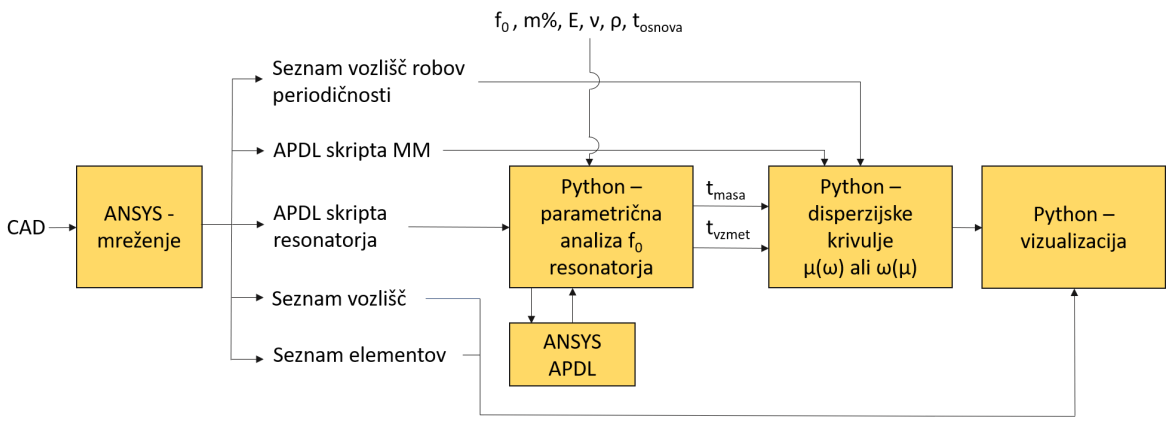
V nadaljevanju smo za potrebe izračuna disperzijskih krivulj na pridobljeno dinamsko matriko sistema pripeli še ustrezne periodične pogoje, ki smo jih opisali v poglavju 2.4.3. V ta namen potrebujemo še sezname vozlišč, ki ležijo na robovih bazne celice. Na sliki 3.4 je prikazano, katera vozlišča spadajo v posamezni seznam in kako je ta poimenovan. Potrebno je poudariti, da znotraj ANSYS programskega okolja disperzijskih krivulj ni mogoče računati. Rezultat tega koraka je zato ANSYS APDL skripta. APDL skripta je tekstovna datoteka, ki vsebuje nastavitve in potek analize v ANSYS programskem okolju. Za dan primer bi torej zagnana skripta generirala mrežo bazne celice, ji predpisala materialne lastnosti in izvedla modalno analizo **prosto vpete** bazne celice. APDL skripta nam bo v nadaljevanju služila le kot pomoč pri generiranju masne in togostne matrike, ter ustreznih seznamov, ki vsebujejo vozlišča na robu bazne celice. Poleg omenjene skripte generiramo še dodatno APDL skripto, ki vsebuje potek analize fiksno vpetega resonatorja bazne celice, osnovna struktura pa je v tej analizi odstranjena. Ta skripta nam bo v naslednjem koraku služila v pomoč pri uglaševanju 1. lastne frekvence resonatorja, preko debelin lupin.



Slika 3.4: Prikaz seznamov vozlišč, ki jih potrebujemo za vključitev periodičnih robnih pogojev.

3.4 Numerični preračun disperzijskih krivulj

Za potrebe izračuna disperzijskih krivulj je bila spisana Python koda, ki ob pomoči programskega paketa Ansys APDL izračuna disperzijske krivulje sistema. Za lažje razumevanje samega delovanja kode je na sliki 3.5 prikazana shema delovanja programa.



Slika 3.5: Shema poteka izračuna disperzijskih krivulj.

3.4.1 Generiranje APDL skripte MM in resonatorja

V prvem koraku smo uvozili površinski CAD model bazne celice v ANSYS Workbench, kjer smo geometrijo pomrežili (poglavje 3.3) in generirali naslednje:

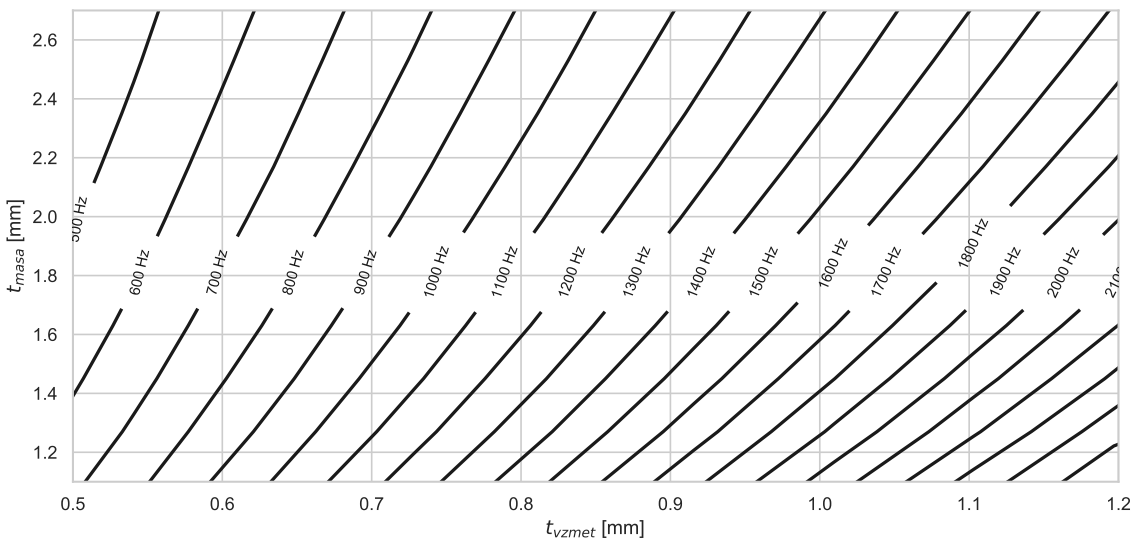
- APDL skripto modalne analize prosto vpete bazne celice,
- APDL skripto modalne analize fiksno vpetega resonatorja,
- sezname vozlišč, ki ležijo na robovih periodičnosti,
- seznam vseh vozlišč,

– seznam vseh elementov.

3.4.2 Določitev debelin resonatorja

Cilj tega koraka je bil poiskati ustrezne debeline t_{masa}, t_{vzmet} resonatorja, za želeno lastno frekvenco, dodano maso, ter podane materialne lastnosti. Ker nas je zaradi vidika same kasnejše izdelave metamateriala zanimal tudi vpliv omenjenih debelin na lastno frekvenco resonatorja, smo storili naslednje:

1. Ustvarili smo vektor debelin $t_{\mathbf{masa}}$, t_{vzmet}.
2. Za vsako možno kombinacijo debelin $t_{\mathbf{masa}}$, t_{vzmet} je program storil naslednje:
   – V APDL skripti fiksno vpetega resonatorja nastavi materialne lastnosti in debeline lupin.
   – Zažene ANSYS APDL s popravljeno skripto, s čimer se ustvari tekstovna datoteka z lastnimi frekvencami.
   – prebere tekstovno datoteko in shrani vrednost 1. lastne frekvence.
3. Zbrane rezultate 1. lastne frekvence vseh možnih kombinacij debelin preuredi in napravi diagram 1. lastne frekvence v odvisnosti od debelin, kot je prikazano na sliki 3.6.



Slika 3.6: Diagram odvisnosti 1. lastne frekvence togo vpetega resonatorja od debelin t_{masa}, t_{vzmet}.

Iz rezultatov si izberemo želeno vrednost 1. lastne frekvence in delež dodane mase osnovni plošči, ter za ta dva podatka poiščemo ustrezni debelini resonatorja. V našem primeru sta za lastno frekvenco $f_0 = 1050.6$ Hz in $m_{\text{ratio}} = 0.1$ primerni debelini $t_{\text{masa}} = 1.5$ mm, $t_{\text{vzmet}} = 0.7$ mm. Tovrsten način za pridobitev ustreznih debelin je računsko zelo potraten, a je nujen, v kolikor želimo imeti dober vpogled v vpliv debelin

na 1. lastno frekvenco. Iz diagrama lahko opazimo, kako manjša variacija debeline t_{vzmet} zaradi izdelave lahko povzroči relativno veliko spremembo lastne frekvence fiksno vpetega resonatorja.

3.4.3 Generiranje dinamske matrike $\tilde{\mathbf{D}}\left(\omega, \mu_x, \mu_y\right)$

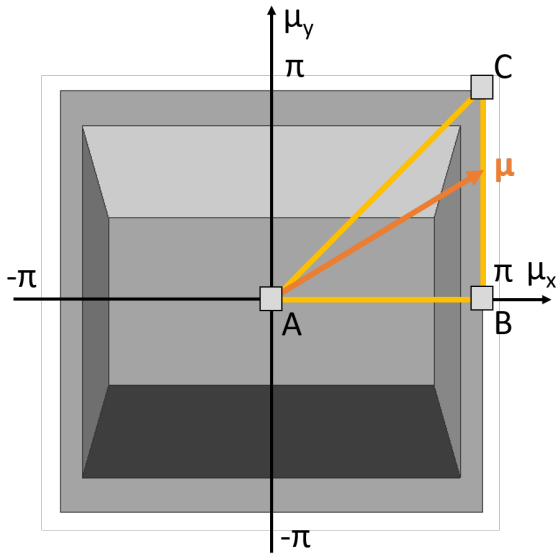
V drugem koraku za ustrezno izbrane debeline in materialne lastnosti program stori naslednje:

1. V APDL skripti bazne celice nastavi materialne lastnosti in debeline.
2. Zažene ANSYS APDL s popravljeno skripto, s čimer se ustvari '.full' datoteka modalne analize prosto vpete bazne celice.
3. Prebere '.full' datoteko in iz nje razbere masno in togostno matriko bazne celice, ter kreira dinamsko matriko sistema $\mathbf{D}(\omega)$.
4. Na podlagi seznamov robnih vozlišč kreira matriki $\mathbf{\Lambda}_L$ in $\mathbf{\Lambda}_R$.
5. Kreira dinamsko matriko $\tilde{\mathbf{D}}\left(\omega, \mu_x, \mu_y\right) = \mathbf{\Lambda}_L \mathbf{D} \mathbf{\Lambda}_R$, kjer upošteva periodične robne pogoje po Blochovem teoremu.

Pridobljeno dinamsko matriko je mogoče sedaj rešiti z inverzno ali direktno metodo.

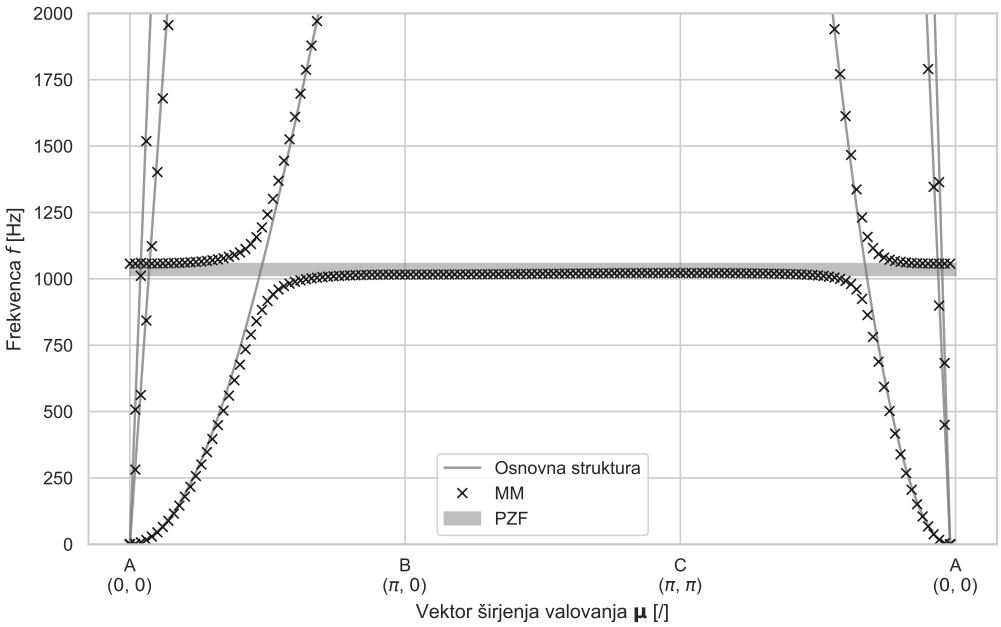
3.4.4 Izračun disperzijskih krivulj - Inverzna metoda $\omega(\mu)$

Kot smo že omenili v poglavju 2.5.1, pri tej metodi zanemarimo dušenje strukture in predpostavimo prosto širjenje valovanja, s čimer predpostavimo realne komponente vektorja širjenja valovanja. Smer in velikost vektorja širjenja valovanja $\boldsymbol{\mu}$ mora ustrezati Brillouionovi konturi, ki je za naš MM prikazana na sliki 3.7.



Slika 3.7: Bazna celica MM in pripadajoča Brillouinova kontura.

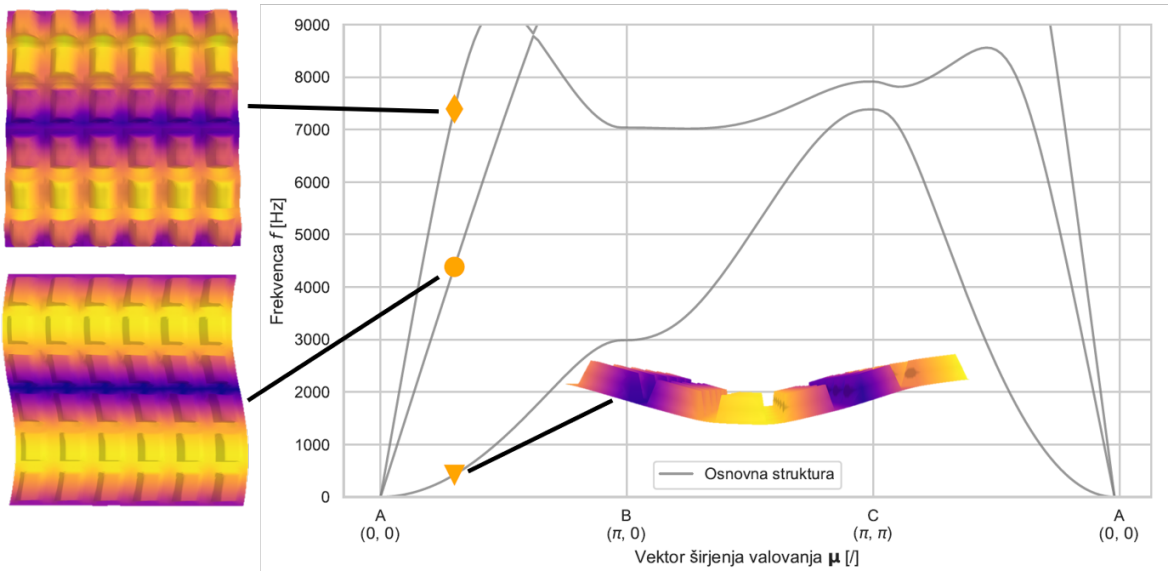
V naslednjem koraku ustvarimo 150 vektorjev širjenja valovanja $\boldsymbol{\mu}$, ki so ustrezno enakomerno porazdeljeni po Brilluionovi konturi in za vsakega rešimo problem lastnih vrednosti. Izračunane lastne frekvence ω ustrezno uredimo glede na $\boldsymbol{\mu}$ in izrišemo diagram disperzijskih krivulj, ki je prikazan na sliki 3.8.



Slika 3.8: Disperzijske krivulje MM in osnovne strukture za $E_{resonator} = 2830$ MPa.

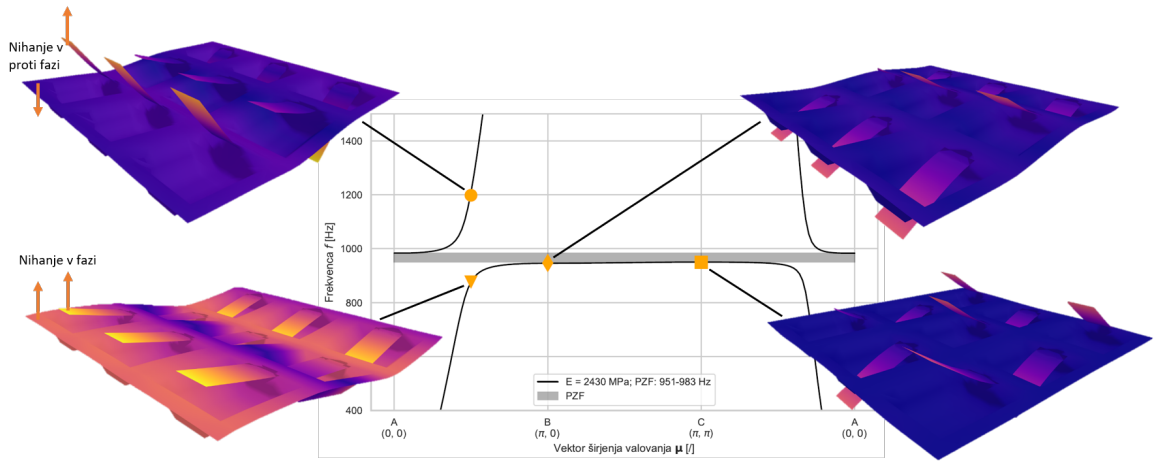
Na sliki 3.8 lahko opazimo, da imata osnovna struktura in MM tri različne disperzijske krivulje, ki ustrezajo upogibni, strižni in longitudinalni nihajni obliki. Vse tri nihajne oblike osnovne strukture so vidne na sliki 3.9. Longitudinalna in strižna nihajna oblika

izkazujeta nihanje v ravnini, medtem ko upogibna nihajna oblika izkazuje nihanje izven ravnine. Z vidika akustike so za radiiranje hrupa najbolj pomembne upogibne nihajne oblike, saj izkazujejo največjo sposobnost sevanja akustične energije na sosednji medij (zrak). Longitudinalna in strižna nihajna oblika z nihanjem v ravnini nista sposobni sevati akustične energije na sosednji medij tako efektivno kot upogibna, saj se gibanje okoliškega zraka zaradi teh dveh nihajnih oblik le malo spremeni. Na podlagi slednje razlage in dejstva, da nas zanima le frekvenčno območje od 0-2000 Hz, lahko torej ti dve nihajni obliki zanemarimo. Na sliki 3.9 lahko odčitamo tudi $f_{\lambda/2}$, ki je za upogibno nihajno obliko enaka $f_{\lambda/2} = 2998$ Hz. Pri $\boldsymbol{\mu} = (\pi, 0)$ je namreč razmak med baznimi celicami enak polovici valovne dolžine upogibnega valovanja. Spomnimo se, da je eden od pogojev za nastanek resonančnega PZF $f_{\text{res}} < f_{\lambda/2}$. V našem primeru je pogoj izpolnjen, saj $f_{res} = 1050.6$ Hz.



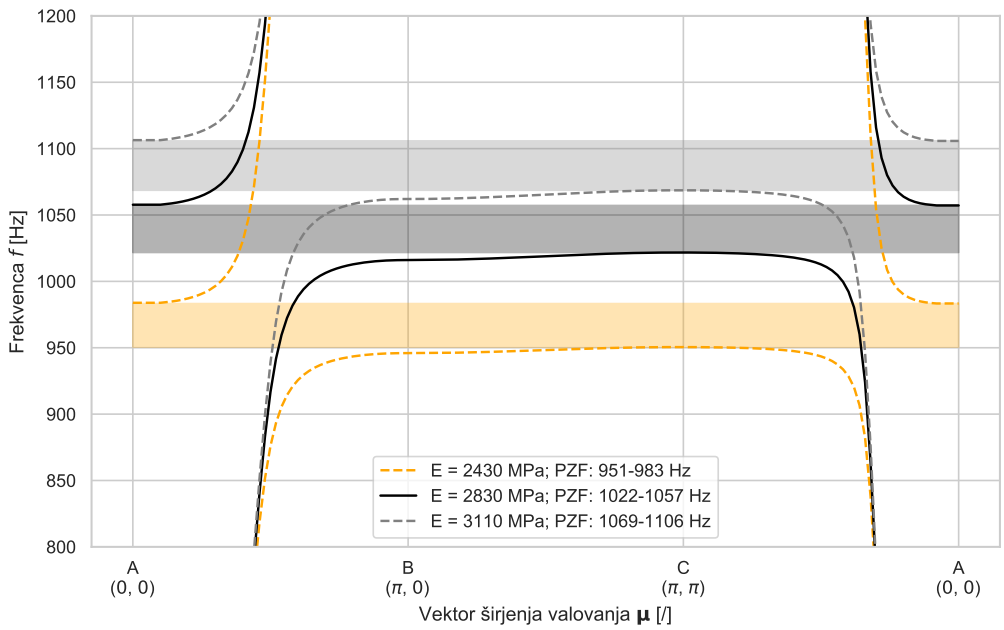
Slika 3.9: Upogibna (▽), strižna (◯) in longitudinalna (◇) nihajna oblika osnovne strukture pri različnih vektorjih širjenja valovanja.

Na sliki 3.8 lahko v opazovanem frekvenčnem območju za MM in osnovno strukturo opazimo enako strižno in longitudinalno disperzijsko krivuljo, za primer upogibne nihajne oblike pa opazimo, kako se v območju resonančne frekvence resonatorja pri MM ustvari PZF v območju 1022 - 1057 Hz. Iz slednjega je razvidno, kako resonator miri nihanja le upogibnih lastnih oblik osnovne strukture blizu območja njegove resonančne frekvence (1050.6 Hz). Če podrobno pogledamo upogibno disperzijsko krivuljo MM, se ta razdeli na dve novi nihajni obliki. Pri prvi disperzijski krivulji nihajo resonatorji v fazi z osnovno strukturo (slika 3.10 - nihajna oblika levo spodaj), v primeru druge upogibne disperzijske krivulje pa nihajo resonatorji v primerjavi z osnovno strukturo v proti fazi (slika 3.10 - nihajna oblika levo zgoraj). V ravnem delu disperzijske krivulje osnovna struktura izkazuje le malo deformacij, vsa energija je koncentrirana v nihanju resonatorjev (slika 3.10 - nihajni obliki na desni).



Slika 3.10: Nihajne oblike MM pri različnih vektorjih širjenja valovanja.

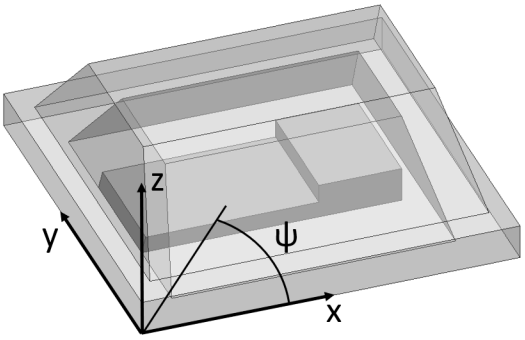
Disperzijske krivulje smo po inverzni metodi izračunali za tri različne elastične module resonatorja, katerih vrednosti so podane v preglednici 3.1. Tri različne module smo pri izračunu uporabili zaradi pomerjenega raztrosa 1. lastne frekvence resonatorja (V E modul smo zajeli raztros debeline t_{vzmet} resonatorjev). Rezultati izračuna so vidni na sliki 3.11, kjer so zaradi preglednosti prikazane le upogibne disperzijske krivulje. Opazimo, da je širina PZF približno enaka za vse elastične module, njegova pozicija na frekvenčni osi pa dokaj variira. Če rezultate že sedaj navežemo na eksperimentalni del, lahko pri fizični realizaciji MM pričakujemo znižanje ravni zvočnega hrupa in vibracij površin v širšem frekvenčnem spektru, nekje med 951 Hz in 1106 Hz. Pričakujemo lahko tudi, da bo v območju PZF raven znižanja vibracij in hrupa manjša, kot če bi imeli ožji raztros lastne frekvence resonatorjev.



Slika 3.11: Disperzijske krivulje za tri različne elastične module resonatorja.

3.4.5 Izračun disperzijskih krivulj - direktna metoda $\mu(\omega)$

Kot smo že razložili v poglavju 2.5.1, pristop predpostavlja časovno harmonsko širjenje valovanja, s čimer predpostavimo valovanje s krožno frekvenco ω in iščemo $\boldsymbol{\mu}$. Omenili smo tudi, da za izračun predpostavimo smer širjenja valovanja ψ in iščemo magnitudo širjenja valovanja μ. Za naš MM si bomo v okviru te magistrske naloge izbrali tri smeri valovanja; $\psi = \{0°, 45°, 90°\}$, kot prikazuje slika 3.12.



Slika 3.12: Bazna celica MM in označene smeri valovanja.

Spomnimo se, da z uvedbo smeri valovanja prevedemo izračun μ na lastni problem, kot ga prikazuje enačba (3.1), μ pa lahko iz lastnih vrednosti α preračunamo po enačbi (3.2).

$$(\mathbf{Q} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{Z} = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

$$\mu = -i\ln(\alpha)\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \tag{3.2}$$

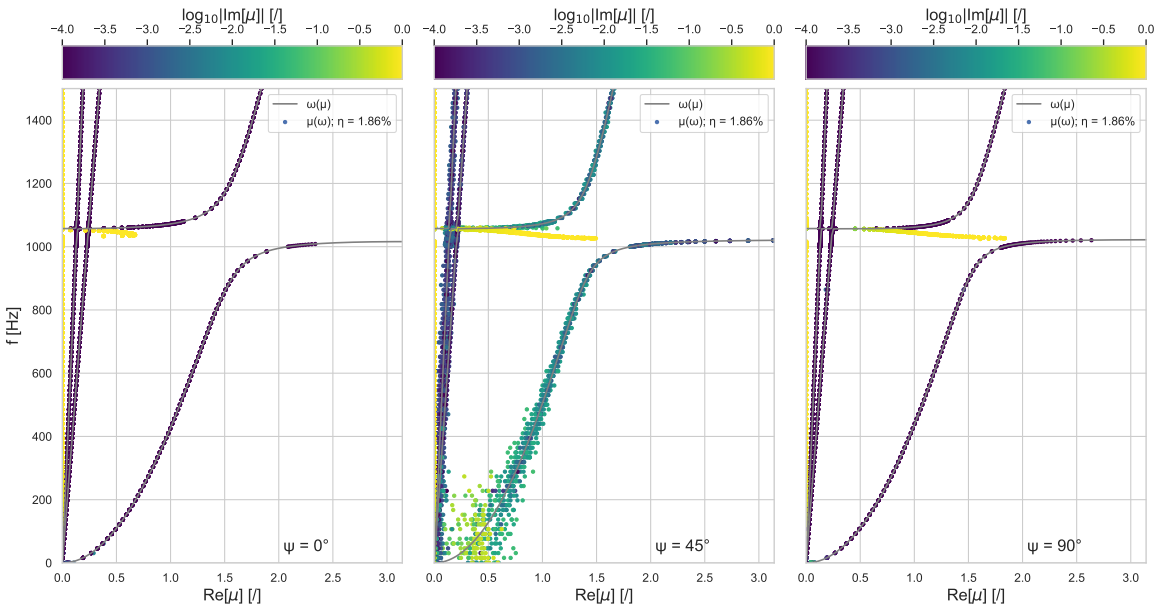
Pri izračunu disperzijskih krivulj tokrat upoštevamo histerezno dušenje strukture, ki ga v dinamsko matriko $\hat{\mathbf{D}}$[1] zajamemo po enačbi (3.3).

$$\hat{\mathbf{D}}(\omega) = -\omega^2\mathbf{M} + (1 + i\eta)\mathbf{K} \tag{3.3}$$

Po opisanem postopku izvedemo preračun disperzijskih krivulj za vse tri omenjene smeri valovanja, pri čemer za vsako smer opravimo preračun dušene in nedušene strukture, kar skupno nanese 6 izračunov disperzijskih krivulj. Izračune smo opravili le za srednjo vrednost elastičnega modula resonatorja. Na sliki 3.13 lahko vidimo izračunane disperzijske krivulje za nedušeno strukturo po obeh metodah ($\omega(\mu)$ in $\mu(\omega)$). Za smeri $\psi = 0°$ in $\psi = 90°$ lahko opazimo odlično ujemanje metod v področjih izven PZF, kjer še vedno izračunamo realne amplitude vektorja širjenja valovanj z imaginarnim delom $\mathrm{Im}(\mu) = 0$. V področju PZF lahko vidimo, da po direktni $\mu(\omega)$ metodi za vse tri smeri ψ izračunamo kompleksne amplitude vektorja širjenja valovanja. Te predstavljajo prostorski eksponentni upad upogibnih valovanj, zato jih po $\omega(\mu)$ metodi tudi nismo izračunali (predpostavili smo prosto širjenje valovanj, ki v področju PZF ni možno).

[1] Opomba: $\hat{\mathbf{D}}$ je dinamska matrika **prosto vpete** bazne celice MM.

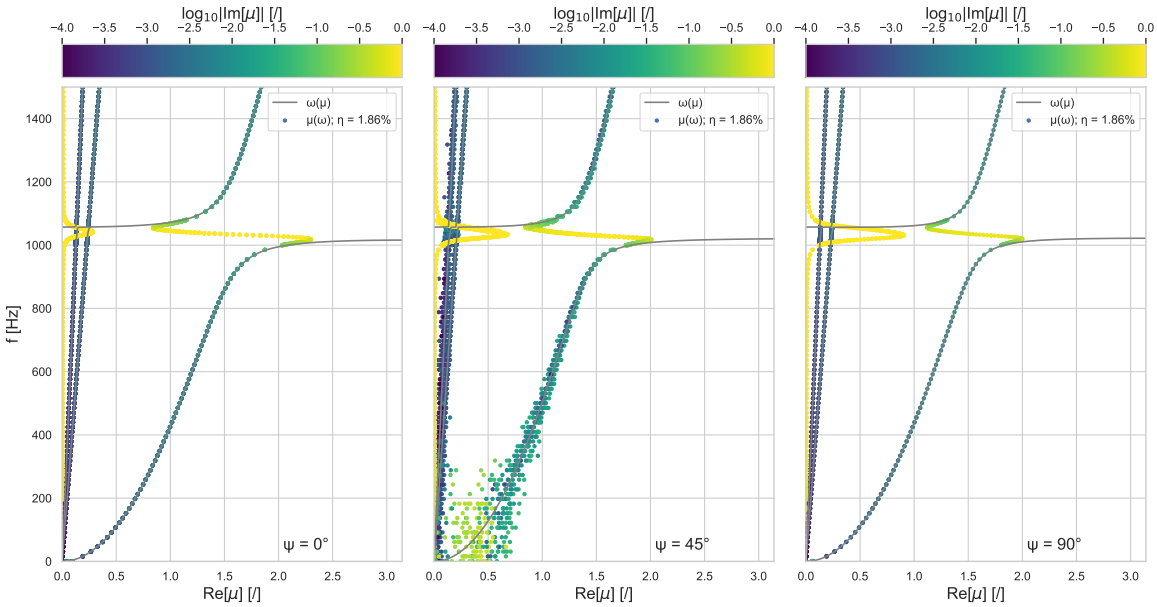
Za smer valovanja $\psi = 45°$ opazimo odstopanje $\mu(\omega)$ in $\omega(\mu)$ metod. Razlika se kaže v Re[μ] zlasti pri nižjih frekvencah ter napačno izračunanih vrednosti Im[μ]. Vrednosti Im[μ] izven PZF bi namreč morale biti podobne smerem $\psi = 0°$ in $\psi = 90°$. Razlog za odstop je velika numerična napaka pri izračunu disperzijskih krivulj po $\mu(\omega)$ pristopu, ki je rezultat izredno slabo pogojene matrike $\mathbf{Q}$. Matriko $\mathbf{Q}$ dobimo, ko razširimo polinomski problem lastnih vrednosti, ki je v poglavju 2.5.2 opisan z enačbama (2.70) in (2.71). Le-ta je nesimetrična in že v teoriji vsebuje velik delež stolpcev, ki imajo vse elemente enake 0. Numerična napaka hitro narašča z dimenzijo matrike $\mathbf{Q}$, ki je odvisna od števila končnih elementov mreže in pa izbrane smeri valovanja ψ. Za $\psi = 0°$ in $\psi = 90°$, je matrika $\mathbf{Q}$ dimenzij $2n \times 2n$, kjer je n število prostostnih stopenj v masni in togostni matriki, za $\psi = 45°$ pa je matrika $\mathbf{Q}$ dimenzij kar $4n \times 4n$. Kljub numerični napaki, se rezultati zlasti okrog PZF še vedno zadovoljivo ujemajo.



Slika 3.13: Disperzijske krivulje za nedušen MM.

Rezultati za vse tri smeri ψ dušenega MM so vidni na sliki 3.14. Z dodanim dušenjem osnovne strukture postanejo izračunane amplitude vektorja širjenja valovanja kompleksne tudi izven PZF. Rezultati so logični, saj dušenje strukture že v naravi povzroči eksponentni upad valovanj. Meji PZF se zaradi dodanega dušenja z resonatorjem zabrišeta. Vrednost imaginarnega dela μ ob mejah PZF, ki predstavlja relativni fazni zamik, nakazuje na delno destruktivno interferenco tudi izven nedušenega PZF, kar nekoliko razširi območje PZF. PZF ob upoštevanju dušenja v bistvu postane le območje močnega slabljenja valovanj. Iz izračunov lahko opazimo, da se sposobnost slabljenja valovanj MM razlikuje glede na smer valovanj ψ. V primeru, ko bo imelo valovanje smer $\psi = 0°$, bo njegovo slabljenje največje, z večanjem kota do $\psi = 90°$ pa bodo resonatorji imeli vedno manjši vpliv na širjenje valovanj. Logičnost ugotovitev lahko poiščemo v sami geometriji MM. V primeru ko $\psi = 0°$ je usmerjenost resonatorja namreč enaka smeri valovanja. V tej smeri resonator dobro miri nihanja osnovne strukture preko reakcijskih momentov in sil, ki jih inducira ob njegovem vpetju na osnovno strukturo. Z večanjem smeri valovanja do $\psi = 90°$, ostaja efekt reakcijske sile enak, efekt reakcijskega momenta pa se zmanjšuje. Z dodanim dušenjem MM pa pridemo

tudi do ugotovitve, da bo MM dobro slabil valovanja le nekje v prvi polovici PZF, kjer se Re(μ) hipno poveča. V drugem delu, ko Re(μ) upade, MM slabi valovanje slabše kot le osnovna struktura.



Slika 3.14: Disperzijske krivulje za dušen MM ($\eta = 1.86\%$).

4 Eksperimentalni del

V tem poglavju so predstavljeni vsi poteki in rezultati eksperimentov, ki so bili potrebni za izračun disperzijskih krivulj MM in njihovo validacijo. Najprej je predstavljen test, opravljen na stresalniku, s katerim smo ocenili E modul PLA plastike. V naslednjem poglavju sledi test raztrosa prve lastne frekvence resonatorjev MM in s tem določitev ekvivalentnih E modulov resonatorjev. V zadnjem poglavju je predstavljena še sama izdelava MM in test ravni zvočnega hrupa za realiziran MM.

4.1 Meritve gostote in elastičnega modula PLA plastike

4.1.1 Meritve gostote

Gostota PLA plastike je bila izmerjena preko treh natisnjenih PLA kock s 100% polnitvijo dimenzij 40x40x40 mm. S pomočjo tehtnice se je pomerila masa kocke, s pomočjo kljunastega merila pa se je izmerila povprečna dimenzija vsake stranice. Na podlagi pomerjene mase in izračunanega volumna se je izračunala vrednost gostote PLA plastike, ki je podana v preglednici 4.1.

Preglednica 4.1: Izmerjena gostota PLA plastike.

Parameter	ρ [kg/m^3]
Vrednost	1220 ± 20

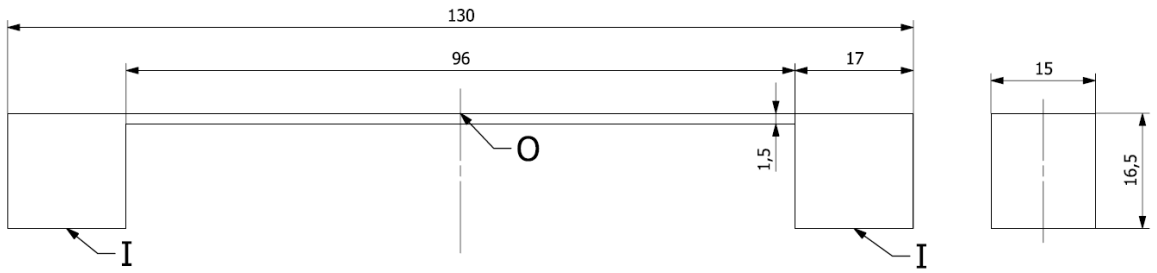
4.1.2 Meritve elastičnega modula

V tem magistrskem delu se izračun disperzijskih krivulj opravlja z izotropnim Hookovim materialnim zakonom. Znano je, da 3D tisk polimerov povzroči anizotropnost materiala, ki pa je v sklopu izračuna MM ne upoštevamo. V ta namen smo skušali pomeriti ekvivalentni elastični modul, ki kar najbolje popiše materialno obnašanje v vseh smereh. Slednje smo dosegli tako, da smo vzorce tiskali z enako usmeritvijo in enakimi parametri izdelave (temperatura, hitrost tiskanja, delež polnitve, smer tiskanja...) kot

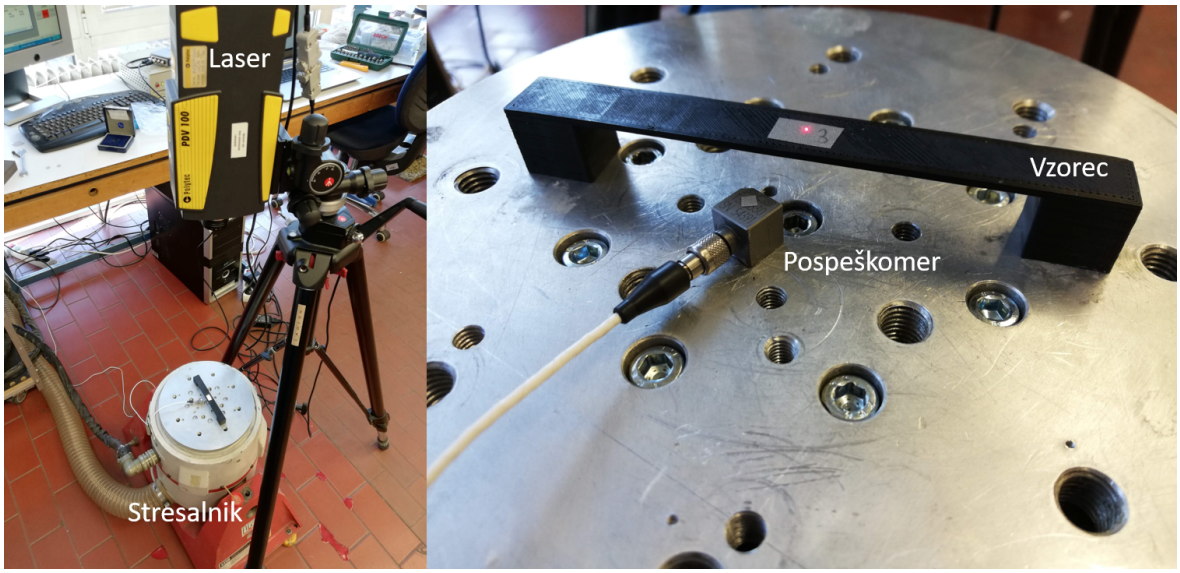
MM. E modul smo v nadaljevanju preračunali iz izmerjene 1. lastne frekvence vzorcev po postopku, ki je opisan v nadaljevanju.

Meritve elastičnega modula E smo opravili na stresalniku. Izdelali smo 6 vzorcev, katerih dimenzije so vidne na sliki 4.1. Vzorec smo na mestih, označenih s črko I, z voskom vpeli na vpenjalno ploščo stresalnika. Stresalnik LDS V555 smo vezali na Dactron krmilnik, ki je povezan z računalnikom, na katerem je nameščen program za krmiljenje stresalnika. Na stresalnik smo namestili referenčni pospeškomer proizvajalca PCB Piezotronics, ki je povezan na krmilnik stresalnika (za namene krmiljenja) in pa na merilno kartico proizvajalca National Instruments, ki služi zajemu signalov za kasnejšo obdelavo. Odziv vzorca smo z laserjem PDV 100 proizvajalca Polytec merili na mestu, ki je na sliki 4.1 označen s črko O. Hitrost, ki jo merimo z laserjem smo prav tako zajemali na merilni kartici, ki je bila povezana na prenosni računalnik z nameščenim programom LabView. Merilno mesto je vidno na sliki 4.2.

Vsak vpet vzorec smo na stresalniku obremenili s 4 sinusni preleti (dva navzgor in dva navzdol) od 70 Hz do 500 Hz, s hitrostjo 3 oktave na minuto ter konstantno amplitudo pospeška 0.5 g. Na enem izmed vzorcev smo izvedli tudi test linearnosti strukture, kjer smo strukturo posamično obremenjevali z amplitudo pospeška 0.25 g, 0.5 g in 1.0 g. Prav tako smo preverili vpliv količine nanosa voska (slika 4.3) pri vpetju vzorca na stresalnik. S pomerjenimi signali pospeška pri vpetju vzorca in odziva hitrosti na sredini vzorca smo izračunali frekvenčno prenosno funkcijo (FRF) vsakega vzorca. Rezultate meritev v relevantnem frekvenčnem območju lahko vidimo na sliki 4.4. Iz FRF vzorca 6 pri različnih amplitudah obremenjevanja vidimo, da se struktura obnaša linearno, saj se FRF v celoti pokrivajo. Opazimo, da dodana količina voska na vpetje vzorca vpliva tako, da se zaradi povečanega dušenja strukturina lastna frekvenca niža s količino dodanega voska, niža pa se tudi sam odziv strukture v resonančnem področju. Kljub vplivu voska lahko vidimo, da imajo sami natisnjeni vzorci iz PLA večji raztros. Izračunana povprečna lastna frekvenca vseh šestih vzorcev z intervalom 95% stopnje zaupanja znaša $f_{0,1} = 232 \pm 6$ Hz.

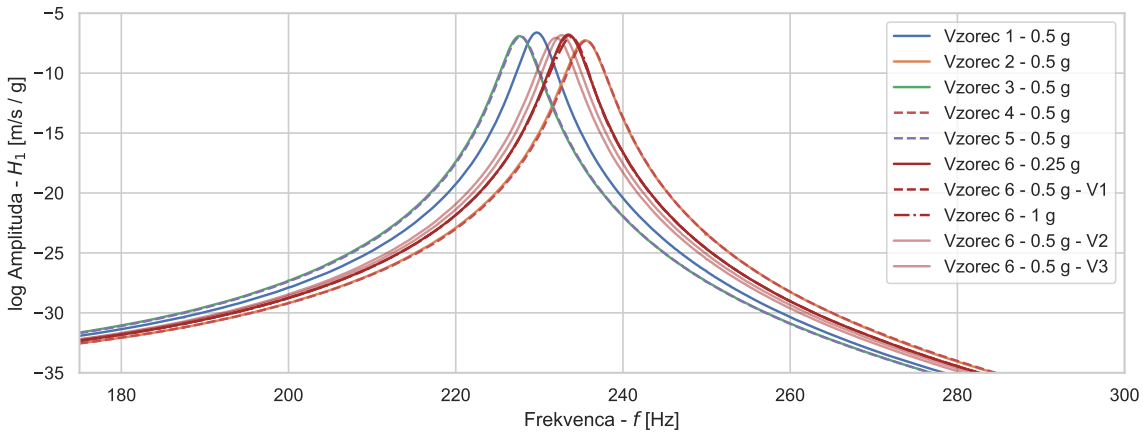


Slika 4.1: Dimenzije vzorcev za določitev E modula PLA plastike.



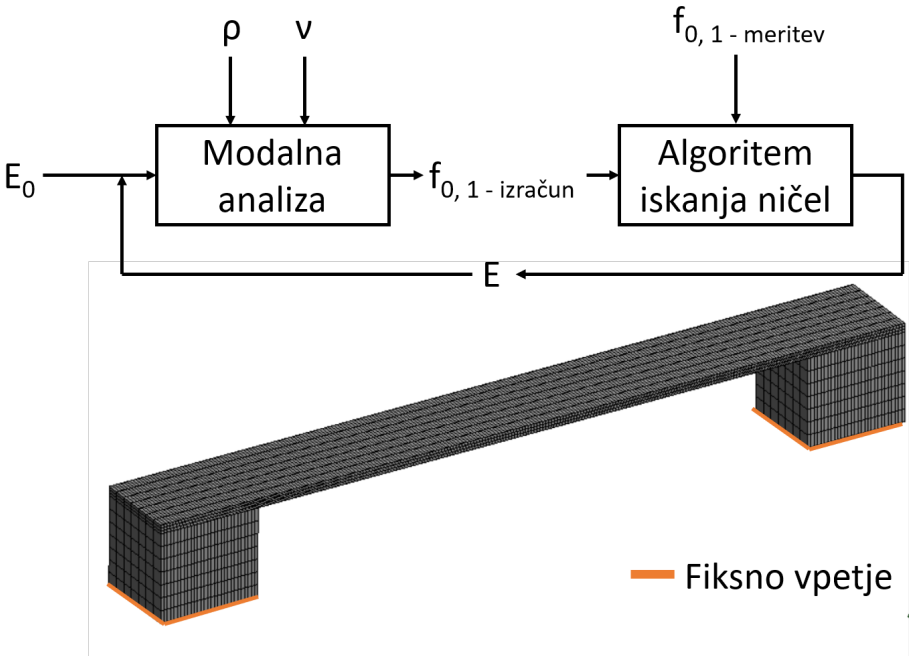
Slika 4.2: Merilno mesto za določitev E modula PLA plastike.

Slika 4.3: Tri različne količine nanosa voska pri vpetju vzorca na stresalnik (levo: malo voska - V1, sredina: srednje veliko voska - V2, desno: veliko voska - V3).



Slika 4.4: Rezultati meritev E modula v obliki FRF.

V naslednjem koraku smo v ANSYS programskem okolju izvedli modalno analizo testiranega vzorca. Na sliki 4.5 lahko vidimo mesto fiksnega vpetja vzorca in njegovo mrežo v analizi. Modalna analiza nam je služila kot funkcija, ki sprejme E modul, kot rezultat pa nam vrne vrednost prve lastne frekvence. To funkcijo smo uporabili v algoritmu iskanja ničel, s katerim smo preračunali E modul strukture, ki daje enako vrednost prve lastne frekvence pomerjeni srednji vrednosti. Gostota v analizi je bila enaka pomerjeni in je znašala $\rho = 1220$ kg/m^3, Poissonov količnik pa je bil privzet iz literature in je znašal $\nu = 0.33$. Postopek izračuna je shematsko prikazan na sliki 4.5. Izračunan E modul PLA plastike po omenjenem postopku je znašal $E = 2440$ MPa. V izračunu disperzijskih krivulj je bil pridobljeni E modul uporabljen kot elastični modul osnovne strukture.

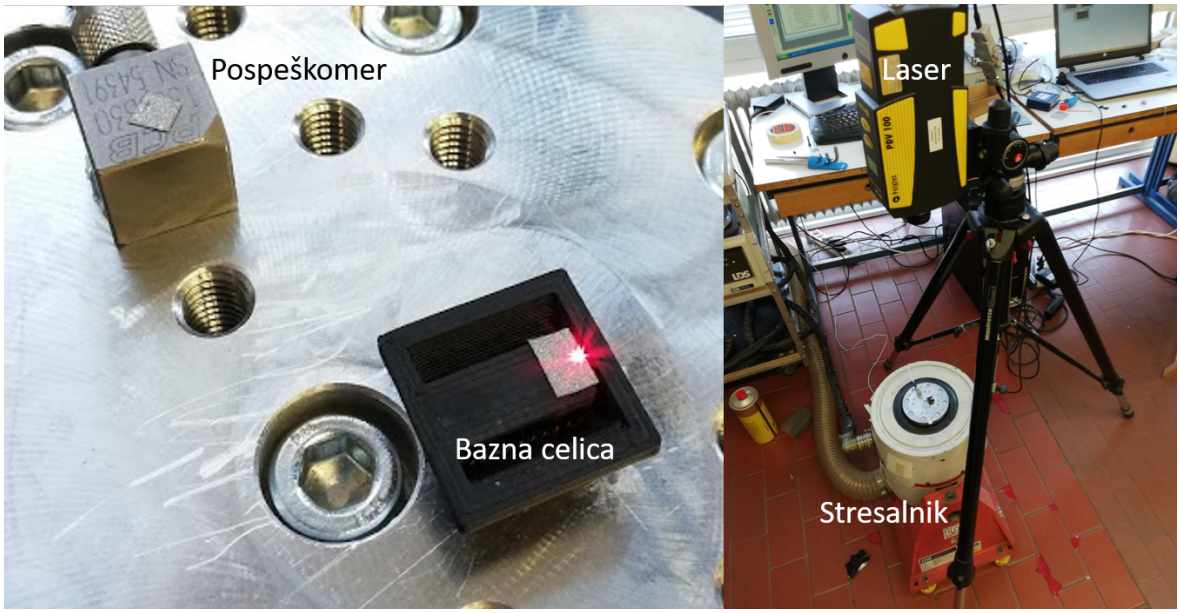


Slika 4.5: Shema postopka izračuna E modula PLA plastike na podlagi meritev $f_{0,1}$.

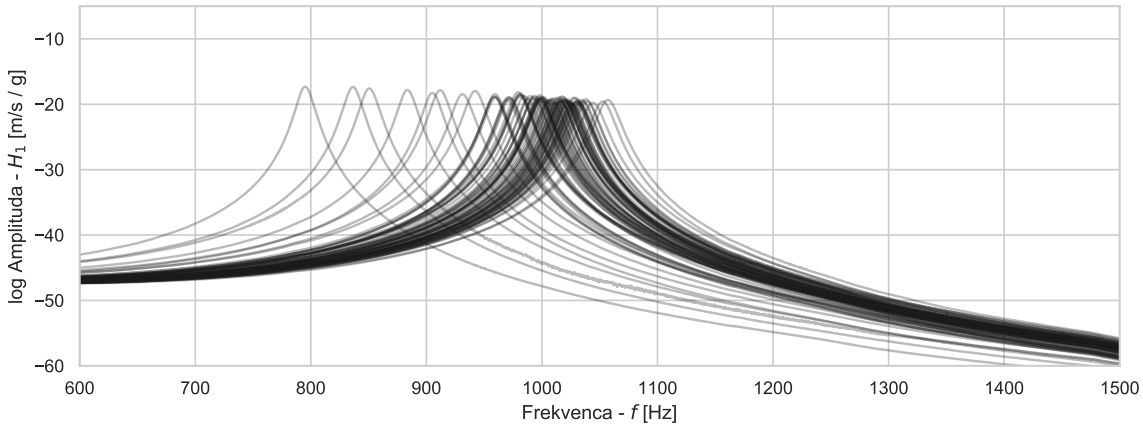
4.2 Meritev raztrosa 1. lastne frekvence resonatorjev MM

Za potrebe testa ravni zvočnega tlaka smo natisnili plošče dimenzij 164x164 mm, ki so sestavljene iz 81 baznih celic (9x9 razporeditev). V naslednjem poglavju je postopek izdelave plošč bolj podrobno opisan. Poleg plošč smo naenkrat natisnili še dodatnih 81 baznih celic, ki med seboj niso bile spojene. Pozicije tiskanja posamičnih baznih celic so sovpadale s tistimi baznimi celicami, ki sestavljajo plošče MM. Slednje smo izdelali z namenom, da bi na stresalniku lahko pomerili raztros lastnih frekvenc resonatorjev na ploščah MM. Bazne celice so bile natisnjene s parametri tiskanja, ki so zbrani v tabeli 4.3 v naslednjem poglavju. Vsako celico posebej smo z voskom pritrdili na stresalnik in z laserjem merili odziv resonatorja, kot prikazuje slika 4.6. Merilna veriga, način zajema podatkov in način obremenjevanja so enaki kot v poglavju 4.1.2 in zato ne bodo ponovljeni.

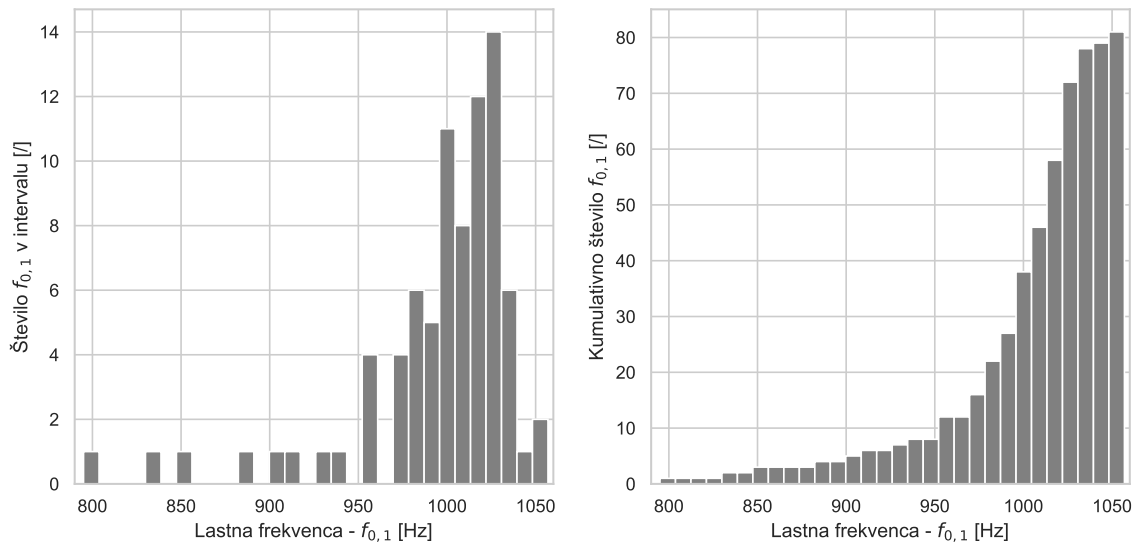
Iz zajetih signalov smo izračunali FRF vseh baznih celic, ki so vidni na sliki 4.7. Opazimo relativno velik raztros 1. lastnih frekvenc, ki ga za boljšo predstavo prikažemo še v obliki porazdelitvenega in kumulativnega diagrama (slika 4.8).



Slika 4.6: Primer vpetja bazne celice MM na stresalnik.

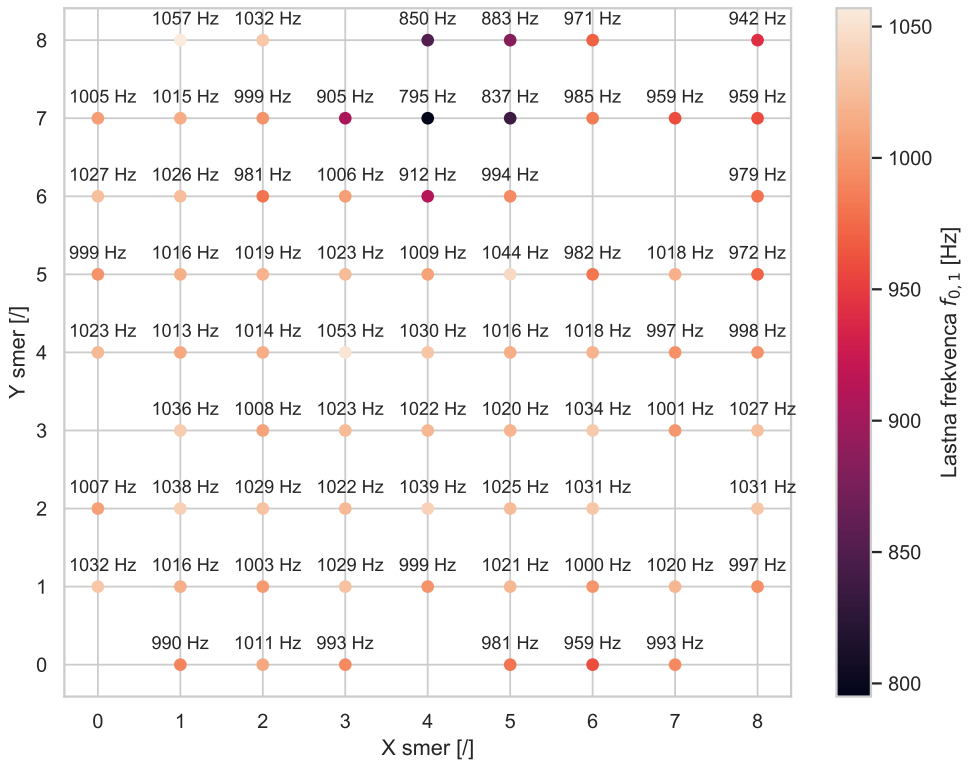


Slika 4.7: FRF meritev 1. lastne frekvence resonatorjev baznih celic MM.



Slika 4.8: Porazdelitveni (levo) in kumulativni (desno) diagram 1. pomerjene lastne frekvence baznih celic.

Opazimo, da je večina pomerjenih lastnih frekvenc znotraj intervala 950-1050 Hz. Opazimo tudi, da ima nekaj resonatorjev lastno frekvenco pod 900 Hz. Razlog za tako velik raztros lastnih frekvenc leži v neravni mizi 3D tiskalnika. Miza 3D tiskalnika ni bila idealno plana, čeprav je bila pred tiskom plošč in baznih celic nastavljena s pomočjo merilne ure. Vsaka manjša neravnina povzroči spremembo debeline t_{vzmet} resonatorjev. Ker je debelina t_{vzmet} ranga 0.7 mm, že najmanjše variacije razmaka med grelno mizo in šobo tiskalnika (ranga cca. 0.05-0.08 mm) močno spremenijo lastno frekvenco resonatorja. Lokacija neravnin mize je dobro razvidna na sliki 4.9, kjer prikazujemo lastno frekvenco resonatorja v odvisnosti od lokacije natisnjene bazne celice na 3D tiskalniku. Bazne celice na manjkajočih mestih so bile prav tako pomerjene na stresalniku, na sliki 4.9 pa niso prikazane, ker se je med testiranjem izgubila informacija o njihovi lokaciji.



Slika 4.9: Prikaz vrednosti pomerjenih lastnih frekvenc resonatorjev v odvisnosti od lokacije tiskanja na 3D tiskalniku.

Na sliki 4.9 opazimo, da so bili pomerjeni resonatorji z ekstremno nizko lastno frekvenco natisnjeni na sredini zgornjega dela mize 3D tiskalnika. Opazimo lahko tudi, da iz leve proti desni lastne frekvence resonatorjev nekoliko padajo. Slednje nakazuje, da razdalja med šobo in grelno mizo med tiskom ni bila konstantna - na levi strani je bila pri prvem nanosu razdalja nekoliko večja kot na desni strani.

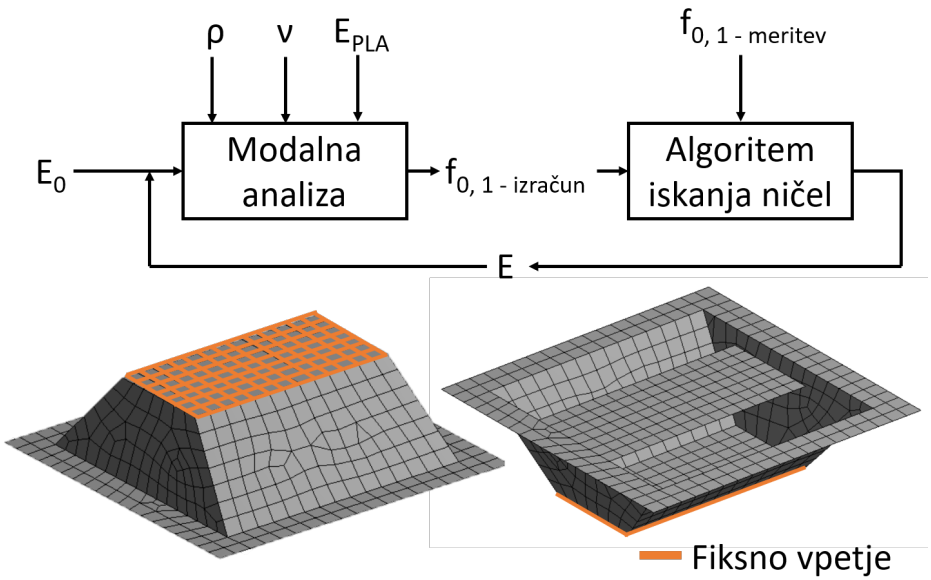
V nadaljevanju želimo izmerjene podatke o lastnih frekvencah uporabiti pri določitvi ekvivalentnega elastičnega modula resonatorjev, ki v svoji vrednosti zajame spremembo debeline resonatorja zaradi izdelave. V prvem koraku smo predpostavili, da je porazdelitev lastnih frekvenc resonatorjev po vseh natisnjenih ploščah enaka pomerjeni. V drugem koraku smo določili srednjo vrednost lastne frekvence in njen 95% interval zaupanja, na podlagi porazdelitve prikazane na sliki 4.8. Pri izračunu intervala 95% stopnje zaupanja smo izločili vse lastne frekvence pod 930 Hz. Razlog za to je dejstvo, da se resonatorji s tako nizko lastno frekvenco nahajajo bolj na robu plošč MM in imajo s tem na dušenje hrupa manjši vpliv, saj so pomiki in hitrosti plošče ob vpetju manjši. Vključitev teh podatkov bi povzročila preveliko popačenje izračunanih vrednosti E modula. Izračunana srednja vrednost lastne frekvence znaša 1005.9 Hz, mejni frekvenci intervala 95% stopnje zaupanja pa znašata 937.6 Hz in 1050.68 Hz.

V naslednjem koraku smo za vrednosti lastnih frekvenc 937.6 Hz, 1005.9 HZ in 1050.68 Hz izračunali ekvivalentne module elastičnosti E. V ANSYS programskem okolju smo

izvedli modalno analizo bazne celice. Na sliki 4.10 lahko vidimo mesto fiksnega vpetja bazne celice in njeno mrežo v analizi. Modalna analiza nam je služila kot funkcija, ki sprejme ekvivalentni E modul, kot rezultat pa nam vrne vrednost prve lastne frekvence. To funkcijo smo uporabili v algoritmu iskanja ničel, s katerim smo preračunali ekvivalentni E modul. Izračun smo opravili za vsako omenjeno lastno frekvenco posamično. Gostota v analizi je bila enaka pomerjeni in je znašala $\rho = 1220$ kg/m^3, Poissonov količnik pa je bil privzet iz literature in je znašal $\nu = 0.33$. E modul osnovne strukture je v analizi vedno ostal enak pomerjeni vrednosti PLA plastike $E = 2440$ MPa. Postopek izračuna je shematsko prikazan na sliki 4.10, izračunani ekvivalentni moduli elastičnosti pa so podani v tabeli 4.2. V poglavju 3.4 so izračunane vrednosti uporabljene za preračun disperzijskih krivulj. Poleg ekvivalentnih E modulov smo na podlagi izmerjenih FRF po 3-decibelni metodi ocenili tudi koeficient histereznega dušenja η, ki je skupaj z intervalom 95% stopnje zaupanja znašal $\eta = 1.86 \pm 0.06$ %. Izračunana vrednost η se je uporabila pri izračunu disperzijskih krivulj MM po direktnem $\mu(\omega)$ pristopu.

Preglednica 4.2: Vrednosti izračunanih ekvivalentnih E modulov resonatorja za izračunane vrednosti lastnih frekvenc.

Lastna Frekvenca $f_{0,1}$ [Hz]	937.6	1005.9	1050.7
Ekvivalentni E modul [MPa]	2430	2830	3110

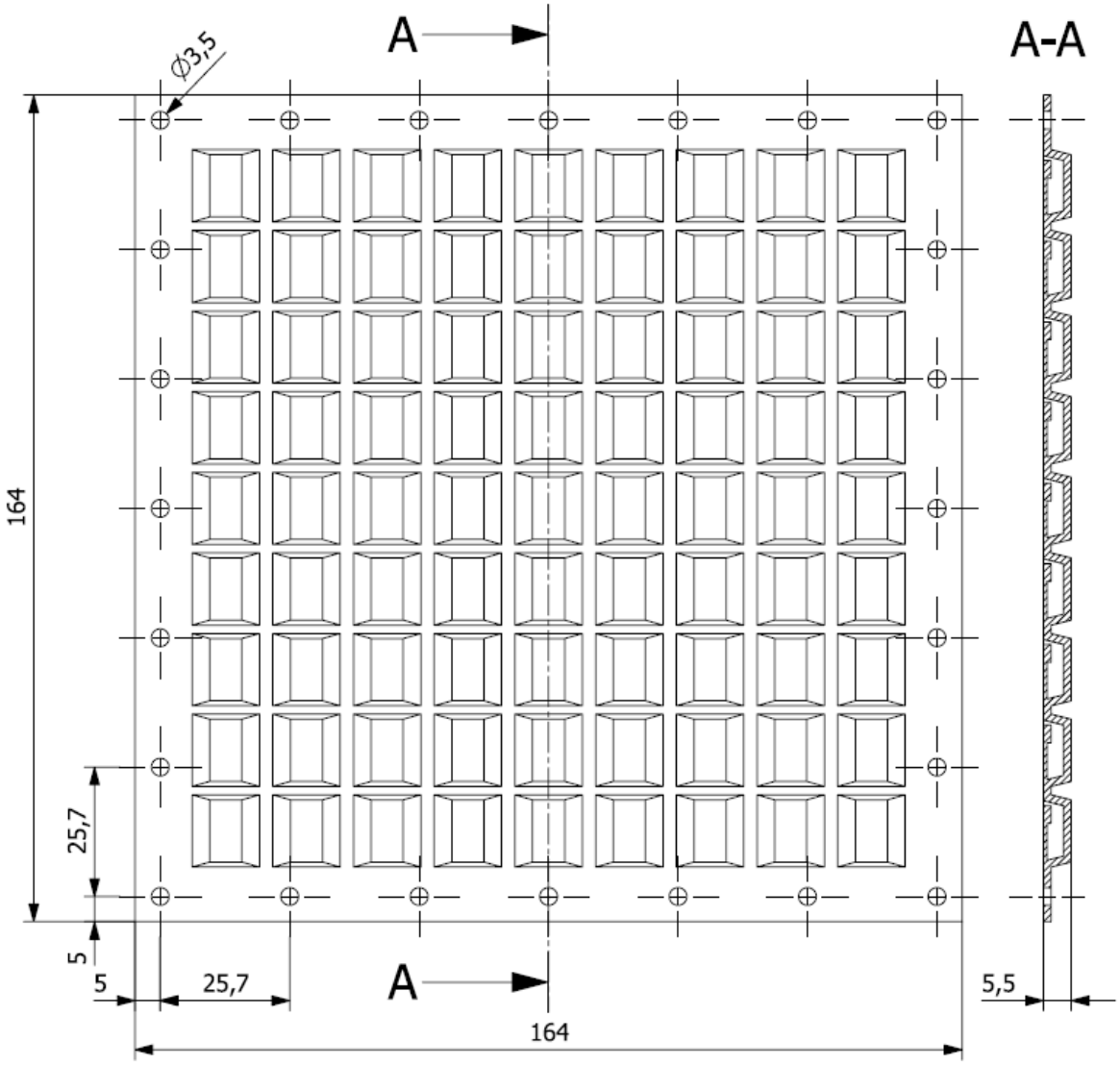


Slika 4.10: Shema postopka izračuna ekvivalentnega E modula resonatorjev bazne celice MM na podlagi izračunanih lastnih frekvenc.

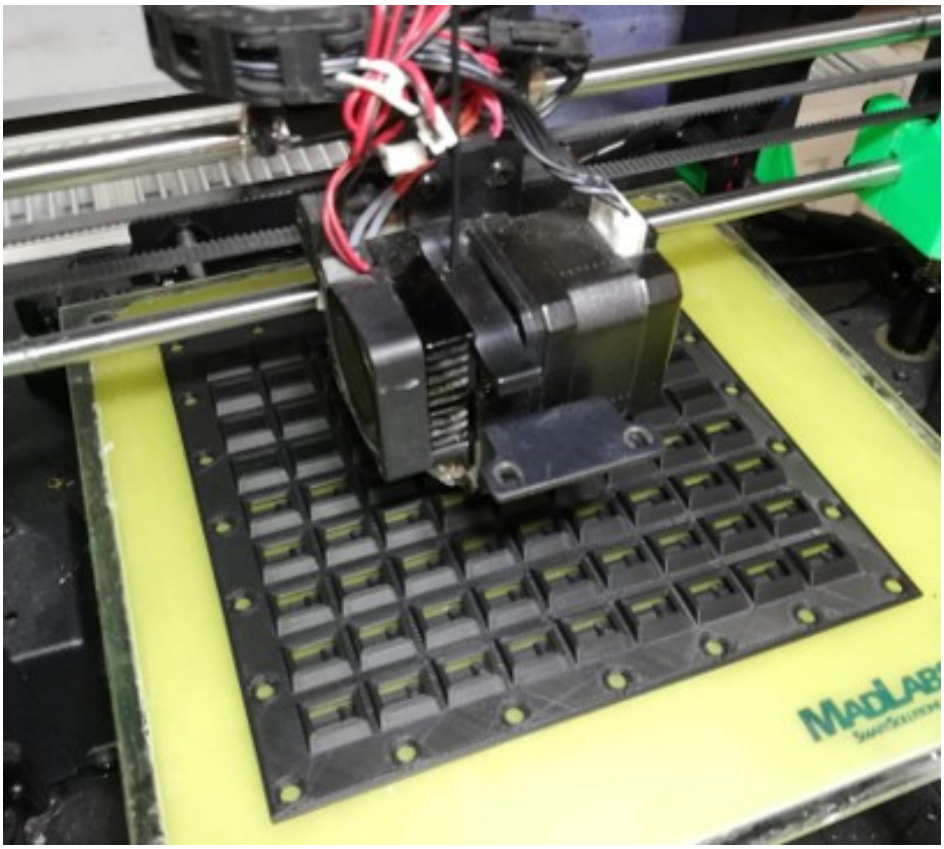
4.3 Meritev ravni zvočnega tlaka

4.3.1 Izdelava metamateriala

Za potrebe testa ravni zvočnega hrupa je bilo potrebno MM tudi izdelati. Iz osnovne bazne celice MM se je naredila plošča dimenzij 164x164 mm, ki vsebuje 81 osnovnih celic, kot prikazuje slika 4.11. Pri straneh smo ji dodali raven rob z luknjami, ki bo kasneje služil kot mesto vpetja plošče. Kot že večkrat omenjeno je bil MM natisnjen s FFF tehniko. Glavni parametri, s katerimi smo MM natisnili, so zbrani v preglednici 4.3. MM smo natisnili na tiskalniku Wanhao Duplicator i3 v2.1, uporabili pa smo črni mat filament proizvajalca Trček. Na sliki 4.12 je prikazan proces tiskanja.



Slika 4.11: Prikaz plošč MM, ki so bile izdelane z FDM tehniko 3D tiskanja.

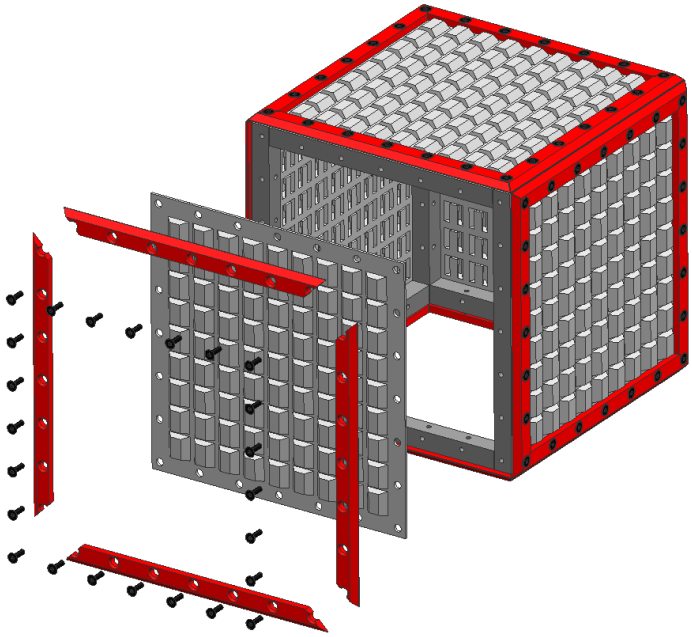


Slika 4.12: 3D tisk metamateriala.

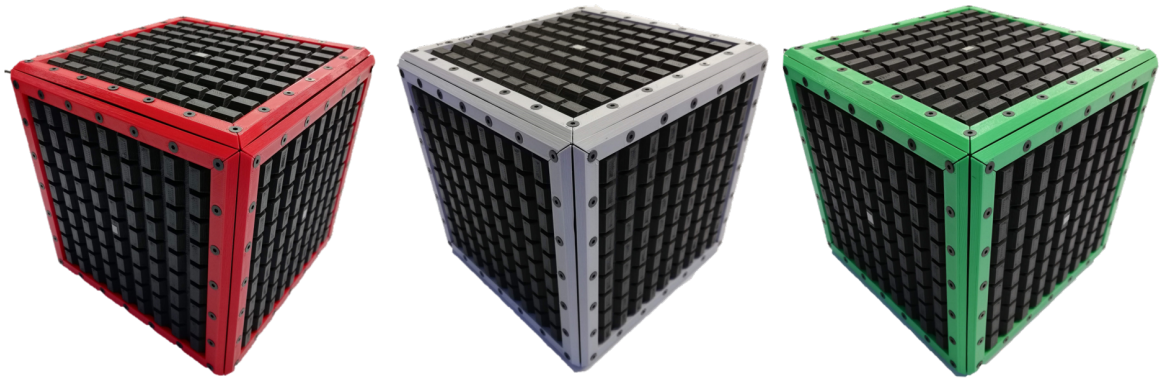
Preglednica 4.3: Parametri tiskanja MM.

Parameter	Temperatura ekstruderja [°]	Temperatura mize [°]	Hitrost [mm/s]	Višina sloja [mm]	Hlajenje [%]	Polnitev [%]
Vrednost	215	60	50	0.1, 0.2	100	100

Natisnili smo 5 plošč MM, ki smo jih kasneje sestavili v kocko, kot je prikazano na sliki 4.13. Vse komponente kocke (razen vijakov), so prav tako natisnjene z enakimi parametri tiskanja kot MM (z izjemo polnitve, ki je znašala 20 %). Poleg kocke iz MM smo izdelali še dve kocki, katere plošče so sestavljene le iz osnovne strukture MM brez resonatorjev (siva in zelena kocka na sliki 4.14). Razlika med njima je v debelini plošče: siva kocka ima debelino plošče enako MM, zelena kocka pa ima plošče večje debeline, s čimer dosežemo ekvivalentno maso ploščam MM. Izdelane kocke smo uporabili pri testiranju vpada ravni zvočnega tlaka, ki je opisan v tem poglavju.



Slika 4.13: Kocka iz MM za testiranje vpada zvočnega hrupa.

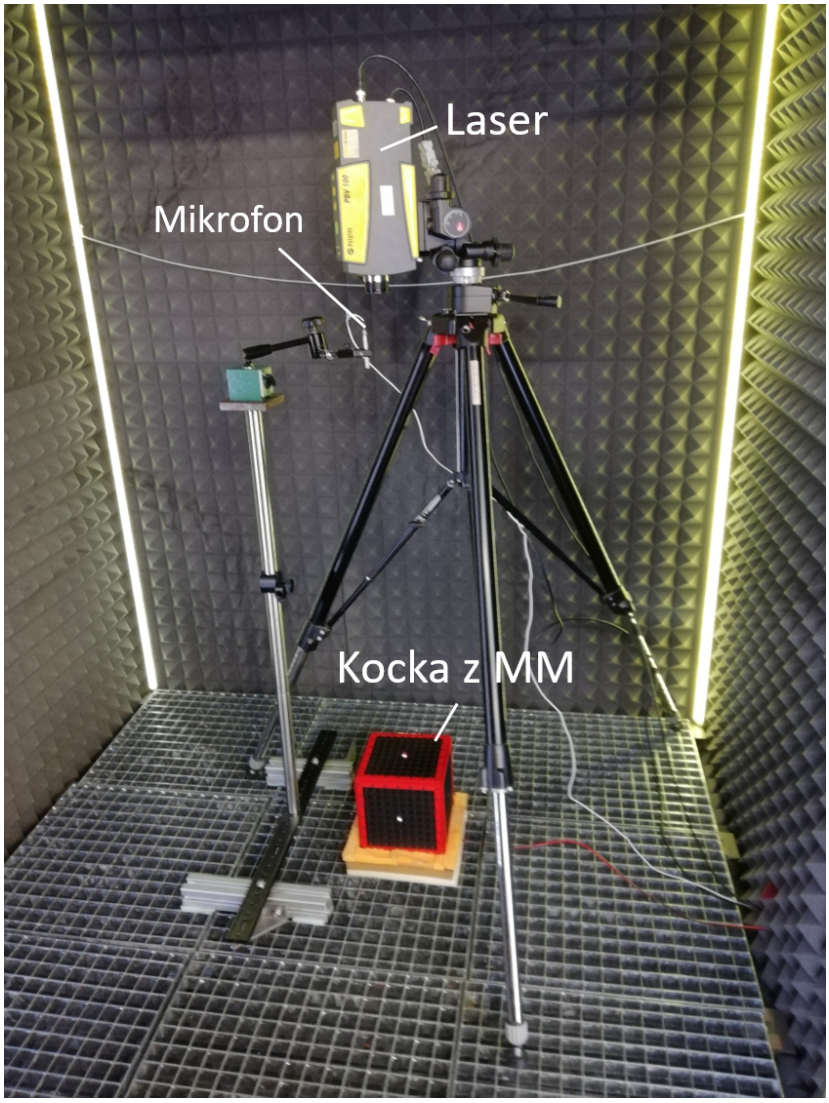


Slika 4.14: Končno natisnjene kocke za testiranje vpada zvočnega hrupa. Rdeča kocka vsebuje MM, siva kocka vsebuje le osnovno strukturo MM brez resonatorjev, zelena kocka pa vsebuje le osnovno strukturo ekvivalentne mase kot MM.

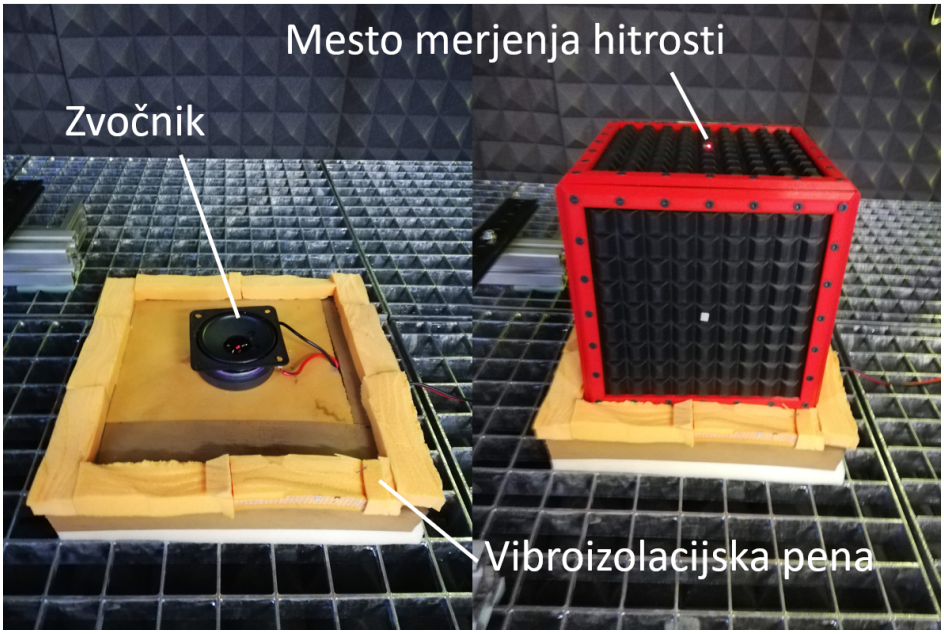
4.3.2 Potek izvedbe meritev

Meritve ravni zvočnega tlaka smo opravili v gluhi sobi. S pomočjo generatorja signala DG1022 proizvajalca RIGOL smo generirali željen sinusni prelet. Signal smo ojačali s pomočjo ojačevalnika EMA 255 proizvajalca Blaupunkt, ki je bil nadalje vezan na zvočnik. Zvočnik je bil postavljen na vibro izolacijsko peno, čez pa smo postavili kocko iz MM. Generiran zvočni tlak smo zajeli z mikrofonom 130F21 SN 50663 proizvajalca PCB Piezotronics, ki je bil vezan na merilno kartico proizvajalca National Instruments.

Mikrofon je bil od kock oddaljen 82 cm in usmerjen direktno na sredino zgornje plošče kocke. Na merilno kartico smo zajemali še signal laserskega merilnika hitrosti PDV 100 proizvajalca Polytec, s katerim smo merili hitrost sredinske točke zgornjih stranic kock. Merilno kartico smo imeli povezano z računalnikom, na katerem je bil nameščen program LabView. Merilno mesto je vidno na slikah 4.15 in 4.16.



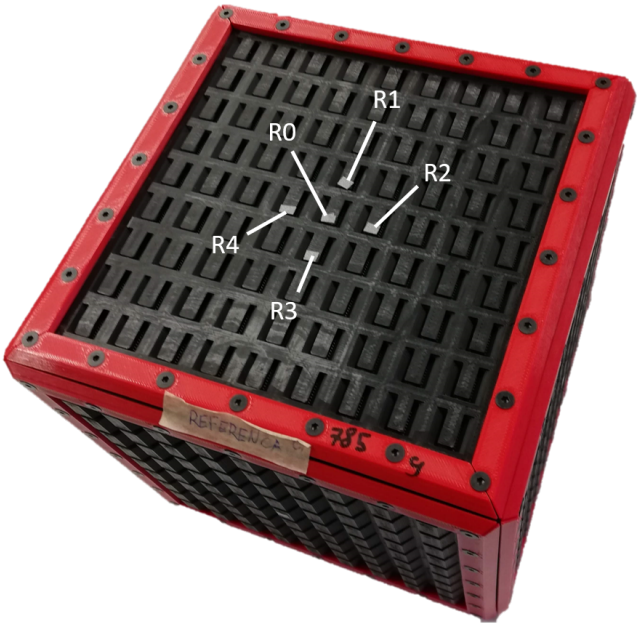
Slika 4.15: Celotno merilno mesto merjenja ravni zvočnega tlaka.



Slika 4.16: Prikaz zvočnika, s katerim smo vzbujali strukturo (levo), in prikaz merilnega mesta merjenja hitrosti zgornje plošče (desno).

Strukturo MM smo vzbujali s sinusnim preletom v frekvenčnem območju od 300 Hz do 2000 Hz, čas posameznega logaritemskega sinusnega preleta pa je trajal 20 s. Vsako meritev smo izvajali 1 minuto in 40 sekund, kar skupaj nanese 5 sinusnih preletov na meritev. V prvem koraku smo na rdeči kocki (MM) izvedli test linearnosti strukture, kjer smo na funkcijskem generatorju spreminjali amplitudo signala od 0.5 V pa do 3.0 V in se prepričali, da je struktura linearna. Nato smo vse nadaljnje teste nadaljevali z amplitudo vzbujanja 3.0 V. V nadaljevanju smo na opisan način izvedli naslednje teste:

- Test hrupnosti oz. ravni zvočnega tlaka brez kocke. Merili smo raven zvočnega tlaka.
- Test hrupnosti oz. ravni zvočnega tlaka rdeče kocke (MM). Merili smo raven zvočnega tlaka in hitrost sredinske točke zgornje plošče.
- Test hrupnosti oz. ravni zvočnega tlaka sive kocke (plošče iz osnovne strukture MM). Merili smo raven zvočnega tlaka in hitrost sredinske točke zgornje plošče.
- Test hrupnosti oz. ravni zvočnega tlaka zelene kocke MM (plošče iz osnovne strukture MM ekvivalentne mase). Merili smo raven zvočnega tlaka in hitrost sredinske točke zgornje plošče.
- Test hrupnosti oz. ravni zvočnega tlaka rdeče kocke, pri čemer smo obrnili zgornjo ploščo. Merili smo raven zvočnega tlaka ter hitrosti odziva sredinskih resonatorjev, kot prikazuje slika 4.17.



Slika 4.17: Prikaz obrnjene plošče na rdeči kocki (MM) in mesta meritev hitrosti resonatorjev ($R0$ - $R4$).

4.3.3 Rezultati meritev

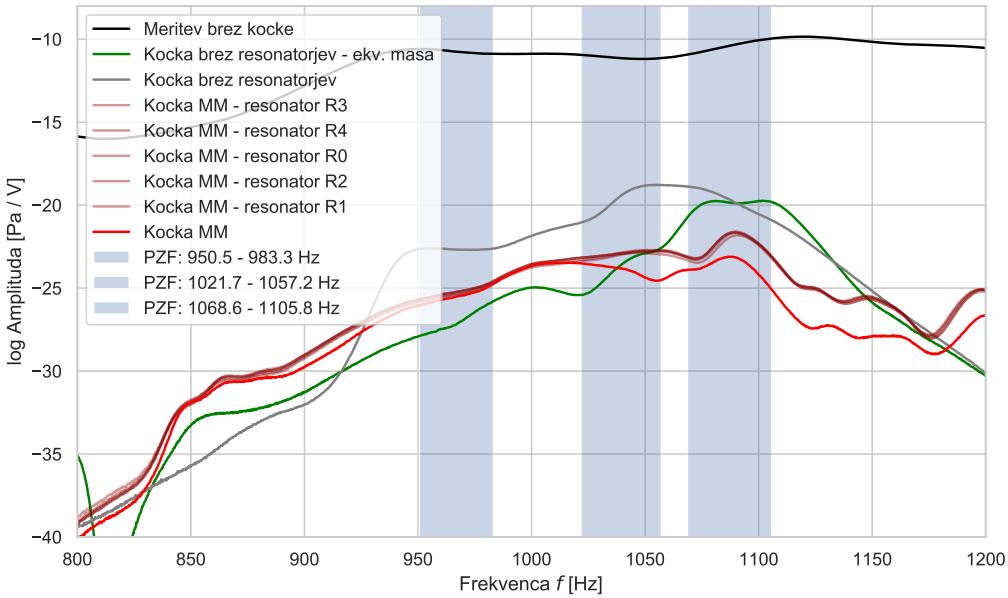
Rezultate vseh testov lahko vidimo na sliki 4.18 v obliki FRF med zvočnim tlakom in generiranim signalom za zanimano frekvenčno območje PZF. Iz meritev opazimo, da ima rdeča kocka z MM najnižji odziv v frekvenčnem območju 1030-1150 Hz, kar približno ustreza območju PZF za srednjo in zgornjo vrednost lastne frekvence resonatorjev. V spodnjem izračunanem intervalu PZF lahko vidimo, da MM deluje slabše kot plošča ekvivalentne mase. Slednje lahko pripišemo porazdelitvi lastne frekvence resonatorjev na sliki 4.8 v poglavju 4.2, kjer lahko vidimo, da lastna frekvenca večine resonatorjev na sredini plošče ustreza vrednosti, ki formira srednje ali zgornje območje PZF. Slednjo trditev potrjuje tudi slika 4.19, kjer lahko iz FRF med hitrostjo in generiranim signalom razberemo visok odziv sredinskih resonatorjev (temno rdeče črte) ravno v območju srednjega in zgornjega PZF. Na podlagi tega lahko tudi trdimo, da pravo PZF območje ustreza frekvenčnemu območju med približno 1020 Hz in 1100 Hz.

Na sliki 4.19 lahko opazimo tudi manjše vrednosti odziva hitrosti sredinske točke plošče v vseh možnih območjih PZF. Hitrost površin navadno direktno povezujemo s hrupnostjo, zato so za srednji in zgornji interval PZF rezultati logični, v spodnjem možnem intervalu PZF pa nekoliko kontradiktorni. Razložimo jih lahko z morebitnimi zračnimi špranjami na mestu vpetja plošč na kocko, ki bi lahko prosto prepuščale del akustičnega hrupa, po drugi strani pa bi lahko vzrok za neujemanje bili vplivi, ki jih v samo preučevanje MM in disperzijskih krivulj nismo zajeli, npr. strižna in longitudinalna valovanja. Na FRF tlaka in generiranega signala bi za MM navadno znotraj PZF pričakovali obliko odziva, ki je podobna disperzijski krivulji direktnega $\mu(\omega)$ pristopa, torej močan vpad odziva v začetku PZF (močno slabljenje valovanja), ki mu sledi hipno zvečanje odziva (odziv večji v primerjavi s ploščami, ki jih sestavlja le osnovna

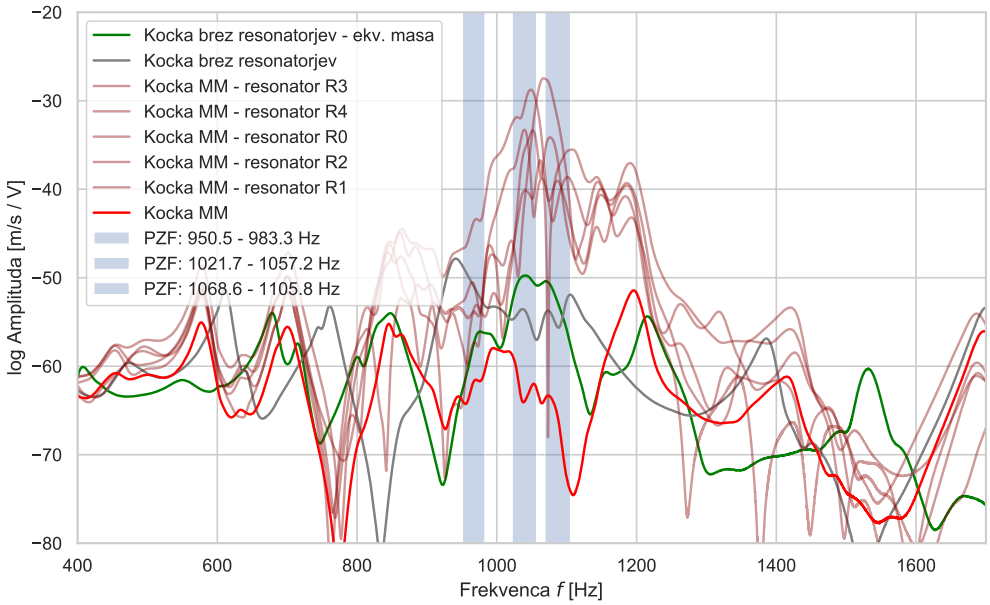
struktura MM). Slednjega v našem primeru ne zasledimo, razlog za to pa pripisujemo širokemu raztrosu lastnih frekvenc resonatorjev, ki tako hipno spremembo odziva v tako ozkem frekvenčnem področju zgladi.

Na sliki 4.18 lahko opazimo tudi, da je v območju PZF pomerjen zvočni tlak odvisen tudi od načina pritrditve plošč MM na kocko. V primeru, ko so resonatorji nameščeni na notranji strani kocke, na mikrofonu zabeležimo nižji zvočni tlak v območju PZF, kot v primeru, ko so resonatorji nameščeni na zunanji strani kocke. V primeru, ko so resonatorji nameščeni na notranji strani, se zvočna valovanja težje prosto odbijajo po notranjosti kocke in formirajo možne konstruktivne interference, s katerimi bi se hrup dodatno ojačal. Razlog za to je oblika MM na notranji strani. Ko se zvočno valovanje zadane v osnovno strukturo MM, ki obdaja resonator, se valovanje težje odbije nazaj v notranjost kocke, saj ima valovanje več možnosti, da energijo izgubi prek odbojev znotraj votline, ki jo formirata osnovna struktura in resonator (glej sliko 4.20). K dušenju hrupa pripomore tudi izredno hrapava in neravna površina osnovne strukture, ki je na sliki 4.20 označena s črko A. Kvaliteta površine je posledica 3D tiska. Po drugi strani se del zvočnih valovanj lahko zaleti direktno v resonator in ne v osnovno strukturo. V slednjem primeru se energija direktno absorbira v resonator, kar povzroči manjši hitrostni odziv osnovne strukture, kot pa če bi resonator moral miriti vso zvočno energijo iz osnovne strukture.

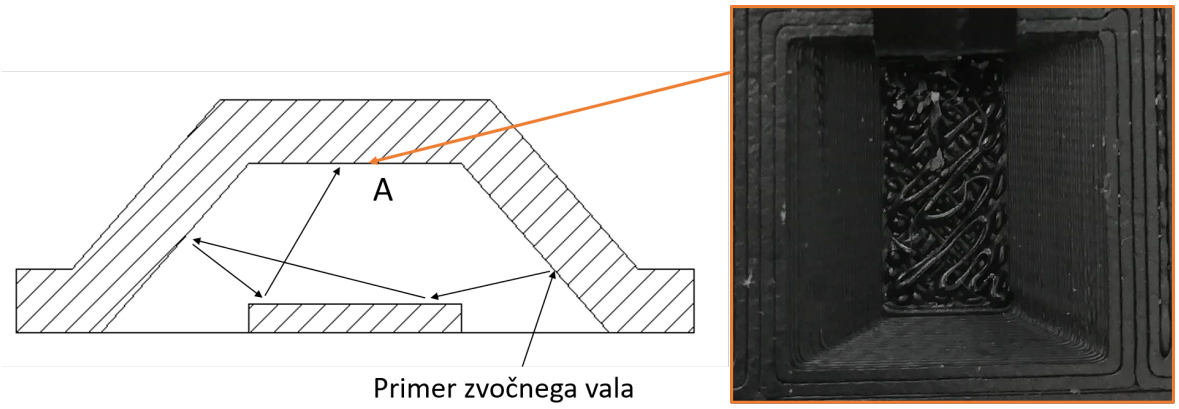
Na sliki 4.21 je prikazan nivo zvočnega tlaka okoli območja domnevnega PZF. Vidimo lahko, da smo znotraj PZF z MM v primerjavi z referenčnima ploščama znižali hrup za približno 4 dB ob masnem razmerju le $m_{\text{ratio}} = 0.1$.



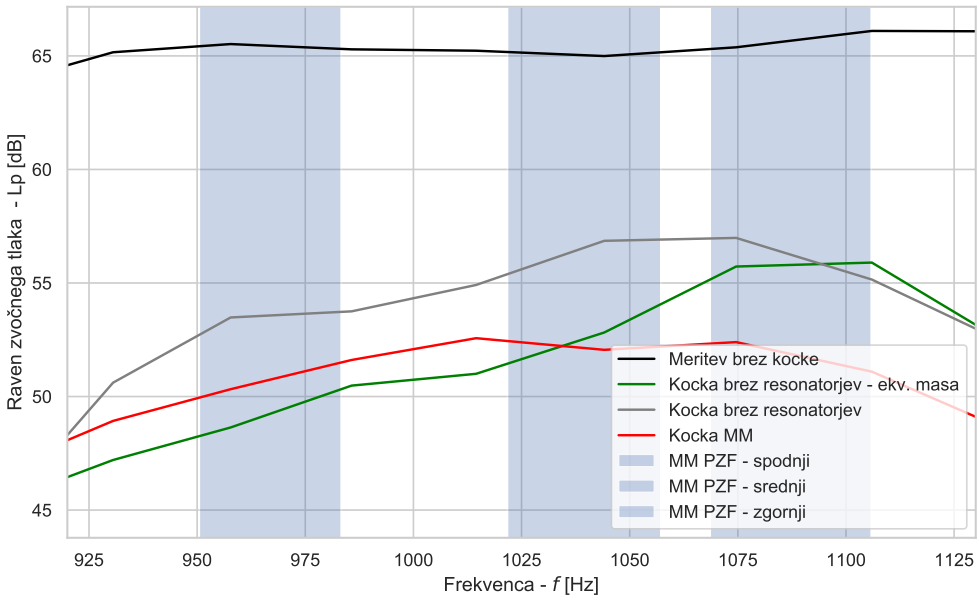
Slika 4.18: FRF zvočnega tlaka in generiranega signala.



Slika 4.19: FRF hitrosti in generiranega signala.



Slika 4.20: Primer odbojev zvočnega vala (levo) in neravne površine na osnovni strukturi (desno).



Slika 4.21: Raven zvočnega tlaka v odvisnosti od frekvence. Pri izračunu je uporabljen 1/24 oktavni filter.

5 Zaključki

V delu smo preučevali potencialno uporabo metamaterialov kot eno izmed možnih rešitev pri dušenju hrupa v akustiki in strukturni dinamiki. Zasnovali smo obliko metamateriala in izračunali disperzijske krivulje po direktni in inverzni metodi. Preko disperzijskih krivulj inverzne metode smo identificirali frekvenčno območje PZF nedušenega metamateriala, preko disperzijskih krivulj direktne metode pa smo fizikalno dogajanje znotraj PZF podrobneje obdelali za dušeno strukturo. V zadnjem delu magistrske naloge smo metamaterial še izdelali in njegovo sposobnost dušenja hrupa znotraj frekvenčnega območja PZF primerjali z dvema kontrolnima osnovnima strukturama. Metamaterial je znotraj frekvenčnega območja PZF najbolj uspešno dušil hrup.

Ugotovili smo:

1. Rezultati direktnega in inverznega pristopa izračuna disperzijskih krivulj se dobro ujemajo.
2. Za direktni pristop izračuna disperzijskih krivulj numerična napaka z naraščanjem števila prostostnih stopenj problema zelo hitro narašča.
3. Geometrijska postavitev resonatorjev na realiziran MM slabi valovanja različno v različnih smereh.
4. Zaradi raztrosa lastnih frekvenc resonatorjev je efekt nižanja hrupa znotraj PZF manjši, v frekvenčnem prostoru pa je eksperimentalni PZF širši od teoretičnega.
5. Ob masnem razmerju $m_{\text{ratio}} = 0.1$ smo znotraj PZF uspeli znižati raven zvočnega tlaka za 4 dB.

Predlogi za nadaljnje delo

V okviru te magistrske naloge je bilo spisane relativno veliko Python kode za izračun disperzijskih krivulj in identifikacijo PZF, ki bi se jo lahko zapakiralo v delujoč program z grafičnim vmesnikom. Ta bi nudil hitrejšo in lažjo obravnavo metamaterialov. Dodelal bi se lahko tudi del kode direktnega pristopa izračuna disperzijskih krivulj, ki je trenutno podvržen relativno veliki numerični napaki. Sam program za preračun metamaterialov bi lahko dodatno nadgradili s preračunom vpada ravni hrupnosti čez metamaterial, podobno kot je to opisano v [14]. Na tak način bi dobili tudi absolutno vrednost znižanja ravni hrupa v decibelih že v fazi izračuna. V okviru koncipiranja

metamaterialov in eksperimentalnega dela, bi se lahko zasnovala še kakšna druga oblika matamateriala z več različnimi masnimi razmerji resonatorja in osnovne strukture. Na takšen način bi lahko vpliv masnega razmerja na PZF preučevali še eksperimentalno. Nekaj več pozornosti bi se lahko posvetilo tudi sami izdelavi metamateriala. Zaželeno bi bilo, da bi se za izdelavo uporabil natančnejši FFF 3D tiskalnik, ali pa bi se uporabila druga tehnika 3D tiskanja, kot sta na primer SLA in SLS. Na tak način bi dosegli manjši raztros lastnih frekvenc resonatorjev metamateriala, kar bi privedlo do boljšega ujemanja eksperimentalnih rezultatov z izračunanimi.

Literatura

[1] C. Kittel: *Introduction to Solid State Physics*, 2010.

[2] L. Fok, M. Ambati, X. Zhang: *Acoustic Metamaterials*. MRS Bulletin **33**(2008) str. 931–934.

[3] C. Claeys, E. Deckers, B. Pluymers, W. Desmet: *A lightweight vibro-acoustic metamaterial demonstrator: Numerical and experimental investigation*. Mechanical Systems and Signal Processing **70-71**(2016) str. 853–880.

[4] C. Goffaux, J. Sánchez-Dehesa, A. L. Yeyati, P. Lambin, A. Khelif, J. O. Vasseur, B. Djafari-Rouhani: *Evidence of Fano-Like Interference Phenomena in Locally Resonant Materials*. Phys. Rev. Lett. **88**(2002).

[5] L. Van Belle, C. Claeys, E. Deckers, W. Desmet: *On the impact of damping on the dispersion curves of a locally resonant metamaterial: Modelling and experimental validation*. Journal of Sound and Vibration **409**(2017) str. 1–23.

[6] R. H. Randall: *An Introduction to Acoustics*. Dover Publications, 2012.

[7] M. Boltežar: *Mehanska nihanja - 1. del (2. popravljena izdaja)*. Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2010.

[8] S. S. Rao: *Mechanical Vibrations*. Prentice Hall, Miami, 2011.

[9] S. S. Rao: *Vibration of Continuous Systems*. John Wiley and Sons, Florida, 2007.

[10] I. Ramu, S. Mohanty: *Study on Free Vibration Analysis of Rectangular Plate Structures Using Finite Element Method*. Procedia Engineering **38**(2012) str. 2758 – 2766.

[11] D. J. Dave: *A Finite Element Approach to Plate Vibration Problems*. Journal of Mechanical Engineering Science **7**(1965) str. 28–32.

[12] D. V. Hutton: *Fundamentals of Finite Element Analysis*. McGraw Hill, New York, 2004.

[13] L. Brillouin: *Wave Propagation in Periodic Structures*. McGraw Hill, New York, 1946.

[14] L. V. Belle: *Vibro-Acoustic Performance of Locally Resonant Metamaterials with Damping*: *Doktorska disertacija*, KU Leuven, 2019.

[15] R. S. Langley: *A Note On The Force Boundary Conditions For Two-Dimensional Periodic Structures With Corner Freedoms.* Journal of Sound Vibration **167**:2 (1993) str. 377–381.

[16] B. R. Mace, E. Manconi: *Modelling wave propagation in two-dimensional structures using finite element analysis.* Journal of Sound and Vibration **318**:4-5 (2008) str. 884–902.

[17] C. Claeys: *On the potential of tuned resonators to obtain low-frequency vibrational stop bands in periodic panels.* Journal of Sound and Vibration **332**(2013) str. 1418–1436.

[18] L. V. Belle: *The impact of damping on the sound transmission loss of locally resonant metamaterial plates.* Journal of Sound and Vibration **461**(2019).

[19] Siemens: *Siemens NX programsko okolje.* Nakup: `https://www.plm.automation.siemens.com/global/en/products/nx/`, Ogled: 19. 7. 2020.

[20] R. T. L. Ferreira, I. C. Amatte, T. A. Dutra, D. Bürger: *Experimental characterization and micrography of 3D printed PLA and PLA reinforced with short carbon fibers.* Composites Part B: Engineering **124**(2017) str. 88 – 100.

[21] Ansys: *Ansys programsko okolje.* Nakup: `https://www.ansys.com/products`, Ogled: 19. 7. 2020.

Priloga A (Matrike $\tilde{\mathbf{D}}_1$-$\tilde{\mathbf{D}}_9$)

$$\tilde{\mathbf{D}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{BL,TR}\mathbf{D}_{TR,BL} & \mathbf{Q}_{BL,TR}\mathbf{D}_{TR,L} & \mathbf{Q}_{BL,TR}\mathbf{D}_{TR,B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{BL,TL}\mathbf{D}_{TL,BL} + \mathbf{Q}_{BL,TR}\mathbf{D}_{TR,BR}\mathbf{Q}_{BR,BL} & \mathbf{Q}_{BL,TL}\mathbf{D}_{TL,L} + \mathbf{Q}_{BL,TR}\mathbf{D}_{TR,R}\mathbf{Q}_{R,L} & \mathbf{Q}_{BL,TL}\mathbf{D}_{TL,B} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_{B,T}\mathbf{D}_{T,BL} & \mathbf{Q}_{B,T}\mathbf{D}_{T,L} & \mathbf{Q}_{B,T}\mathbf{D}_{T,B} \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{BL,BR}\mathbf{D}_{BR,BL} + \mathbf{Q}_{BL,TR}\mathbf{D}_{TR,TL}\mathbf{Q}_{TL,BL} & \mathbf{Q}_{BL,BR}\mathbf{D}_{BR,L} & \mathbf{Q}_{BL,BR}\mathbf{D}_{BR,B} + \mathbf{Q}_{BL,TR}\mathbf{D}_{TR,T}\mathbf{Q}_{T,B} \\ \mathbf{Q}_{L,R}\mathbf{D}_{R,BL} & \mathbf{Q}_{L,R}\mathbf{D}_{R,L} & \mathbf{Q}_{L,R}\mathbf{D}_{R,B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{BL,BL} + \mathbf{Q}_{BL,BR}\mathbf{D}_{BR,BR}\mathbf{Q}_{BR,BL} + \mathbf{Q}_{BL,TL}\mathbf{D}_{TL,TL}\mathbf{Q}_{TL,BL} + \mathbf{Q}_{BL,TR}\mathbf{D}_{TR,TR}\mathbf{Q}_{TR,BL} & \mathbf{D}_{BL,L} + \mathbf{Q}_{BL,BR}\mathbf{D}_{BR,R}\mathbf{Q}_{R,L} & \mathbf{D}_{BL,B} + \mathbf{Q}_{BL,TL}\mathbf{D}_{TL,T}\mathbf{Q}_{T,B} \\ \mathbf{D}_{L,BL} + \mathbf{Q}_{L,R}\mathbf{D}_{R,BR}\mathbf{Q}_{BR,BL} & \mathbf{D}_{L,L} + \mathbf{Q}_{L,R}\mathbf{D}_{R,R}\mathbf{Q}_{R,L} & \mathbf{D}_{L,B} \\ \mathbf{D}_{B,BL} + \mathbf{Q}_{B,T}\mathbf{D}_{T,TL}\mathbf{Q}_{TL,BL} & \mathbf{D}_{B,L} & \mathbf{D}_{B,B} + \mathbf{Q}_{B,T}\mathbf{D}_{T,T}\mathbf{Q}_{T,B} \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{BL,TL}\mathbf{D}_{TL,BR}\mathbf{Q}_{BR,BL} & \mathbf{Q}_{BL,TL}\mathbf{D}_{TL,R}\mathbf{Q}_{R,L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_{B,T}\mathbf{D}_{T,BR}\mathbf{Q}_{BR,BL} & \mathbf{Q}_{B,T}\mathbf{D}_{T,R}\mathbf{Q}_{R,L} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{BL,BR}\mathbf{D}_{BR,TL}\mathbf{Q}_{TL,BL} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{BL,BR}\mathbf{D}_{BR,T}\mathbf{Q}_{T,B} \\ \mathbf{Q}_{L,R}\mathbf{D}_{R,TL}\mathbf{Q}_{TL,BL} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{L,R}\mathbf{D}_{R,T}\mathbf{Q}_{T,B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_7 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{BL,BR}\mathbf{Q}_{BR,BL} + \mathbf{Q}_{BL,TL}\mathbf{D}_{TL,TR}\mathbf{Q}_{TR,BL} & \mathbf{D}_{BL,R}\mathbf{Q}_{R,L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{L,BR}\mathbf{Q}_{BR,BL} & \mathbf{D}_{L,R}\mathbf{Q}_{R,L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{B,BR}\mathbf{Q}_{BR,BL} + \mathbf{Q}_{B,T}\mathbf{D}_{T,TR}\mathbf{Q}_{TR,BL} & \mathbf{D}_{B,R}\mathbf{Q}_{R,L} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{BL,TL}\mathbf{Q}_{TL,BL} + \mathbf{Q}_{BL,BR}\mathbf{D}_{BR,TR}\mathbf{Q}_{TR,BL} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{BL,T}\mathbf{Q}_{T,B} \\ \mathbf{D}_{L,TL}\mathbf{Q}_{T,BL} + \mathbf{Q}_{L,R}\mathbf{D}_{R,TR}\mathbf{Q}_{TR,BL} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{L,T}\mathbf{Q}_{T,B} \\ \mathbf{D}_{B,TL}\mathbf{Q}_{TL,BL} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{B,T}\mathbf{Q}_{T,B} \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_9 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{BL,TR}\mathbf{Q}_{TR,BL} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{L,TR}\mathbf{Q}_{TR,BL} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{B,TR}\mathbf{Q}_{TR,BL} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{7.9}$$