UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za strojništvo

Strukturna dinamika 3D natisnjenih termoaktivnih metamaterialov za nizkofrekvenčne pasovne vrzeli

Magistrsko delo magistrskega študijskega programa II. stopnje Strojništvo

Gašper Bizjan

Ljubljana, marec 2023

UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za strojništvo

Strukturna dinamika 3D natisnjenih termoaktivnih metamaterialov za nizkofrekvenčne pasovne vrzeli

Magistrsko delo magistrskega študijskega programa II. stopnje
Strojništvo

Gašper Bizjan

Mentor: prof. dr. Janko Slavič, univ. dipl. inž.

Ljubljana, marec 2023

[Prostor za podpisano temo magistrskega dela]

Zahvala

[Pisanje zahvale ali posvetila je neobvezno.]

[Pri zahvali napišite zahvalo tistim, ki so pomagali pri nastanku dela in brez katerih delo ne bi nastalo v takšni obliki, kot je. Navadno se je potrebno zahvaliti v prvi vrsti mentorju, somentorju in inštituciji, ki je morda finančno ali kako drugače podprla izvedbo zaključnega dela. Nato sledijo asistenti, ostali sodelavci in vaši kolegi, ki so pomagali pri teoretičnem in eksperimentalnem delu. Na koncu se po navadi zahvalimo še družini.]

IZJAVA

Diplomsko delo sem samostojno izdelal pod vodstvom mentorja [Ime in PRIIMEK]

[Ime in PRIIMEK]

Dne, [Datum oddaje diplomske naloge]

Izvleček

UDK [123.45:678.91:234.56(789.1)]

Tek. štev.: [MAG II/99]

[Zasnova predloge za zaključne naloge na Fakulteti za strojništvo]

[Janez Novak]

Ključne besede: [predloga]
[zaključna naloga]
[navodila]
[vsebina]
[diplomiranje]
[pravilnik]

[V začetku izvlečka je jedrnat opis obravnavanega problema. Sledi opis izbrane metodologije in nato opis najpomembnejših rezultatov oz. ugotovitev brez dodatnih pojasnjevanj. Obseg izvlečka naj ne presega 200 besed oz. 600 znakov vključno s presledki.]

Abstract

UDC [123.45:678.91:234.56(789.1)]

No.: [MAG II/99]

[Design for a template for final theses at the Faculty of Mechanical Engineering]

[Janez Novak]

Key words: [template]
[final thesis]
[instructions]
[contents]
[graduation]
[regulations]

[Angleški prevod izvlečka. . .]

Kazalo

Kazalo slik

Kazalo preglednic

Seznam uporabljenih simbolov

Oznaka	Enota	Pomen
A	m^2	površina preseka
b	m	globina nosilca
c	N s^2/m, J/kg K	koeficient dušenja, specifična toplota
d, Δ	m, /	(brezdimenzijska) dolžina pomika kosinusnega nosilca
e	/	Eulerjevo število 2,71828...
E	Pa, J	modul elastičnosti ali energija
f	/, Hz	brezdimenzijska sila ali lastna frekvenca
F	N	sila
h	m, W/mK	višina kosinusnega loka, toplotna prestopnost
i	/	imaginarno število $\sqrt{-1}$
I	m^4, A	vztrajnostni moment prereza, električni tok
k	N/mm	(nelinearna) togost
K	N/mm	linearna togost ROC
l, L	m	dolžina
$\mathcal{L}$	/	Lagrangian
m	kg	masa (resonatorja)
M	N m, kg	moment ali masa ROC
N	/	brezdimenzijska aksialna sila
P	N, W	sila ali moč
q, Q	/, m	(brezd.) relativna pr. stopnja ali vozliščni pomiki MKE
R	m, /, Ω	radij nosilca, brezdimenzijska lateralna sila ali el. upornost
s, S	m, /	(brezdimenzijska) dolžina aksialnega nosilca
t	m, s	globina nosilca, čas
T	°C, /	temperatura ali prenosna funkcija
u, U	/, J, m, V	(normalizirana) energija, pr. stopnja ali el. napetost
v, V	/, m, m^3	(brezdimenzijska) pr. stopnja resonatorja, volumen
w, W	/	(brezdimenzijski) pomik (kosinusnega nosilca)
$\overline{w}$, $\overline{W}$	m, /	(normirana) prva deformacijska oblika kosinusnega nosilca
x, X	/, m	(brezdimenzijska) prostostna stopnja
$[A]$	/	dinamska matrika sistema
$[B]$	/	matrika odvodov oblikovnih funkcij
$[C]$	N s^2/m	disipacijska matrika
$[D]$	/	materialna matrika
$[I]$	/	identiteta
$[J]$	/	Jakobijeva matrika
$[K]$	Pa m^2/m	togostna matrika
$[M]$	kg	masna matrika
$[N]$	/	aproksimacijske funkcije
$[T]$	/	transformacijska matrika

α	/	brezdimenzijska togost
β	/	brezdimenzijska masa
γ	/	razmerje dolžin
δ	/	koeficient brezdimenzijske sile tretje potence
δF	N	virtualna sila
δM	N m	virtualni moment
δW	J	virtualno delo
ϵ	/	brezdimenzijski red amplitude gibanja
ε	/	specifična deformacija
ζ	/	razmernik dušenja
η	/	koeficient brezdimenzijske sile pete potence
θ	rad	kot horizontalne vzmeti
κ	1/rad	krožna frekvenca resonatorja
$\varkappa$	/	razmerje krožnih frekvenc
λ	/	lastne vrednosti
μ	/	razmerje togosti ali disperzijska krivulja
ν		Poissonov količnik
π	/	konstanta 3,1416...
ρ	$\mathrm{kg/m^2}$	gostota
ϱ	$\Omega\ \mathrm{mm^2/m}$	specifična električna upornost
σ	Pa	napetost
τ	/	brezdimenzijski čas
ϕ	rad, F	prostostna stopnja kota
$\overline{\phi}$	F	površinske sile
$\overline{\Phi}$	F	volumske sile
ω	1/rad	krožna frekvenca ROC-ja
Ω	/	razmerje frekvence z lastno frekvenco ROC

Indeksi	
0	začetno stanje, lastna frekvenca
I,1	1. polje 1. glavnega sistema
II,1	2. polje 1. glavnega sistema
I,2	1. polje 2. glavnega sistema
II,2	2. polje 2. glavnega sistema
A	točka A
b	upogibno
B	točka B
c	koncentrirano
d	disperzijsko
f	aktuacijsko
g	steklenje
h	horizontalno
k	kinetično, končno
KNT	kvazi ničelna togost
MNT	mehanizem negativne togosti
n	negativna
$n1$	negativna togost prvega območja
$n2$	negativna togost drugega območja
$n3$	negativna togost tretjega območja
N	notranje
opt	optimalno
p	pozitivno, potencialno, konstanten tlak
ROC	reprezentativna osnovna celica
s, S	tlačno, površinsko
sd	standardna deviacija
sp	spodnja
sr	srednja
t	celotno
v	vertikalno, volumsko
Z	zunanje
zg	zgornja
∞	neskončno oddaljeno

Seznam uporabljenih okrajšav

Okrajšava	Pomen
3D	tridimenzionalno
DVB	dinamični vibracijski blažilec
FPF	frekvenčna prenosna funkcija
GPLA	polilaktična kislina z aditivom grafitnega prahu (ang. *Graphite Polylactic Acid*)
KE	končni element
KNT	kvazi ničelna togost
KS	koordinatni sistem
MKE	metoda končnih elementov
MM	metamateriali
MNT	mehanizem negativne togosti
NT	negativna togost
PLA	polilaktična kislina (ang. *Polylactic acid*)
PT	pozitivna togost
PZF	pasovno zavrnitveni filter
ROC	reprezentativna osnovna celica
VSND	visoka statična in nizka dinamična

1 Uvod

1.1 Ozadje problema

Prisotnost nenadzorovanih vibracij v inženirskih aplikacijah hitro vodi v prekomerno obrabo, poškodbe ali celo v kritično in nevarno odpoved materiala ter strojnih delov. Z implementacijo vibroizolacije lahko omogočimo zaščito opazovanega sistema pred zunanjim povzročiteljem dinamičnih sil.

V praksi je največkrat uporabljena linearna vibroizolacija, ki je učinkoviti le, če je njena lastna frekvenca precej nižja od frekvence vzbujanja. Za odpravo te pomanjkljivosti je bila zasnovana nelinearna vibroizolacija z visoko statično in nizko dinamično (VSND) togostjo, ki izolira vibracije v nizkofrekvenčnem območju. Pri tem visoka statična togost pomeni veliko nosilnost, medtem ko nizka dinamična togost pomeni povečano območje izolacije pri nizkih frekvencah. Skoraj ničelna dinamična togost v delovni točki, ki je značilna za nelinearno vibroizolacijo, se imenuje kvazi ničelna togost (KNT), nelinearni izolatorji z značilnostmi KNT pa se v nadaljevanju imenujejo kvazi ničelni togostni izolatorji ali KNT izolatorji.

Metamateriali (MM) so v zadnjih dveh desetletjih deležni vse večjega raziskovalnega zanimanja, saj imajo zanimive optične, elektromagnetne, akustične in mehanske lastnosti. Znani tudi pod imenom metastrukture, izražajo posebne fizikalne lastnosti, ki jih v naravi ne najdemo. Gre za serijo ponavljajočih se in geometrijsko skrbno načrtovanih podstruktur. Podobni so celičnim strukturam, njihove posebne fizikalne lastnosti, ki jih v naravi ne najdemo, pa je mogoče preučevati iz osnovne reprezentativne celice (ROC). Vibroizolativni MM sestoji iz periodično razporejenih lokalnih resonatorjev, ki absorbirajo vibracijsko energijo v določenem frekvenčnem območju.

Zaradi prostorske razporeditve osnovne celice se je aditivna tehnologija izkazala kot odlični proces za izdelavo metastruktur. Geometrijsko kompleksne podstrukture lahko skoraj poljubno postavimo v prostoru in jih na makronivoju formuliramo v MM poljubne oblike.

Rešitev s pasivno vibroizolacijo ima prednost enostavnosti rešitve, brez kompleksnih mehanizmov, ki bi potrebovali zunanje napajanje ali krmiljenje. Negativna posledica je nezmožnost prilagajanja na spremembe delovnih pogojev stroja ali okolice. Rešitev predstavlja semi-pasivna vibroizolacija, ki omogoča regulacijo in prilagajanje na spremembe.

1.2 Cilji naloge

Osrednja problematika naloge je raziskava dinamike 3D tiskanih termoaktivnih metamaterialnih KNT vibroizolatorjev za uporabo v nizkofrekvenčnem področju.

V prvem delu naloge predstavimo MM in nato potrebne teoretične osnove za formulacijo reprezentativne osnovne celice (ROC) MM, ki izkazuje VSND togost ali kvazi ničelno togost (KNT). Bistveno vlogo za doseganje KNT lastnosti nelinearnih vibroizolatorjev igrajo elementi z negativno togostjo (NT) imajo ključno vlogo pri oblikovanju funkcije KNT, saj nevtralizirajo pozitivno togostjo (PT) struktur. Značilnost NT se lahko uresniči iz različnih struktur, kot so poševne vzmeti, upogibni nosilci, magnetne vzmeti in biološko navdihnjene strukture. Pri metamaterialih lahko NT lastnost dosežemo z vključitvijo bistabilne strukture, ki ob preskoku iz enega v drugo stabilno stanje nasprotuje PT strukture.

Večje število zaporednih ROC tvori enodimenzionalni KNT MM. Za dinamično analizo MM vibroizolatorja je opisana teorija dvomasnega dušilca nihanj. Z obravnavo MM kot neskončne periodične strukture lahko analitično določimo frekvenčno pasovno vrzel, v kateri je odziv sistema manjši.

Analitični popisi realnih struktur imajo svoje omejitve, saj je natančen popis geometrije nemogoč. S tem razlogom bomo dinamiko problema rešili z metodo končnih elementov (MKE).

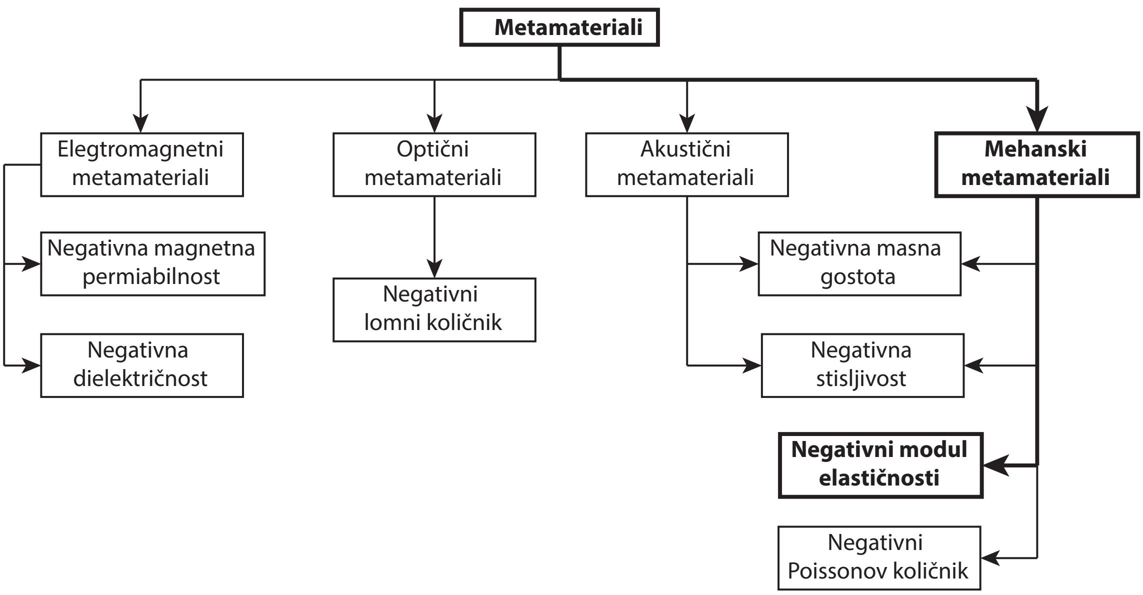
Opišemo tudi teorijo MM, ki je izdelan z uporabo aditivne tehnologije, pri čemer uporabimo filament iz polilaktične kisline (PLA - *Polylactic acid*) z aditivom grafitnega prahu - torej GPLA (*Graphite Polylactic acid*), kar omogoča prevajanje elektrike skozi MM. Z uporovnim segrevanjem materiala preko Joulovega toka bomo dosegli njegovo mehčanje in zmanjšanje togosti, ki je bistvena lastnost pri obravnavi nihanja. Tako dosežemo adaptivni metamaterial, ki ima v primerjavi z pasivnimi vibroizolatorji prilagodljivo in posledično širše uporabno frekvenčno območje. Na GPLA vzorcih izmerimo potrebne materialne lastnosti za konkretno določitev parametrov ROC.

Zadnji korak, ki bo del magistrske naloge, je meritev odziva na dinamične motnje v okolici lastnih frekvenc in vpliv izdelane MM vibroizolacije. Tukaj bomo z spreminjanjem delovnih pogojev želeli zmanjšati učinkovitost metamateriala, ki pa se bo zaradi svoje adaptivnosti bil zmožen novim parametrom prilagoditi.

2 Teoretične osnove

2.1 Osnove metamaterialov

Metamateriali (MM) so umetno strukturirani kompoziti, ki so zgrajeni iz periodično razporejenih gradnikov, ki ne le da izboljšujejo lastnosti osnovnega materiala, temveč dajejo tudi različne funkcionalnosti, kot so negativni lomni količnik, negativna masna gostota, negativno Poissonovo razmerje, negativna dielektričnost, negativna permeabilnost, negativna stisljivost, negativni koeficienta toplotnega raztezka in tako dalje. Lastnosti metamaterialov so spremenjene tako, da presegajo lastnosti, ki jih najdemo v naravi. Tam najdemo celične strukture, kot so votlosti v pluti ali kosteh, vendar tam ne gre za periodične strukture, vendar le naključno razporejene nehomogenosti materiala. Pravi MM imajo periodično razporejene reprezentativne osnovne celice (ROC). Povzeto po [1] in [2]. Prvi MM so bili uvedeni na elektromagnetnem področju, pozneje pa je bil koncept metamaterialov razširjen tudi na optiko, akustiko in navsezadnje tudi na mehaniko trdnih teles kot vibroizolator z negativno togostjo. Klasifikacijo MM lahko vidimo na sliki 2.1.



Slika 2.1: Klasifikacija metamaterialov.

Mehanski in akustični metamateriali med drugim vključujejo celične metamateriale, pomožne metamateriale z negativnim Poissonovim količnikom, pentamode metamateriale z znatno večjim stisljivostnim modulom kot strižnim modulom, metamaterialne strukture na osnovi origamija in materiale z lastnostjo pasovne vrzeli. Te vsi so obetavni za nadzor vibracij in zvoka. V našem primeru uporabimo koncept metamateriala z lastnostjo pasovne vrzeli.

Mehanske metamateriale za vibroizolacijo lahko razvijemo tako, da v glavni strukturi naredimo nekaj mehanskih podenot ali reprezentativnih osnovnih celic (ROC), tako da lahko mehanski valovi, ki se prenašajo v gradnikih, resonirajo s podenotami strukture. MM tako izraža lastnosti pasovno zavrnitvenega filtra (PZF), kar pomeni, da v določenem frekvenčnem območju MM ne dopušča, ali vsaj bistveno zmanjša širjenje valovanja. Naš cilj je torej razviti nov model MM za izboljšanje položaja in pasovne širine zavrnitvenega pasu. Obstajata dva pristopa za preučevanje značilnosti zapornih pasov: Braggovo sipanje (*ang. Bragg scattering*) in princip lokalnih resonanc.

Kadar je širjenje valovanja odvisno le od periodične razporeditve in velikosti ROC v mediju, se te imenujejo fononski kristali. Pri fononskih kristalih je ena od najpomembnejših značilnosti učinek Braggovega sipanja, ki jih povzroči destruktivna interferenca prihajajočih in odbitih valov. Učinek Braggovega sipanja je omejen z velikostjo konstante mreže podstruktur. Na splošno so mere ROC v MM običajno manjše od valovne dolžine lastnosti, na katero vplivajo. Za dušenje visokih frekvenc posledično potrebujemo majhne, za nizkofrekvenčne PZF pa bi potrebovali zelo velike ROC, kar je iz vidika izdelave metamateriala nepraktično.

Rešitev omejitve velikosti je učinek lokalne resonance. Ta povzroči nizkofrekvenčno pasovno vrzel z mrežno konstanto, ki je za več redov manjša od valovne dolžine razširjajočih se valov. Fenomen pasovne vrzeli in pasovne širine, ki nastane zaradi lokalne resonance, je odvisen od geometrijskih parametrov in materialnih lastnosti resonatorjev; ni odvisen od periodičnosti in razporeditve ROC. Običajno to pomeni, da je vsaka ROC sistem masa-vzmet, katere lastna frekvenca $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ je odvisna od togosti k njene interne vzmeti in mase m (poglavje 2.3.1). Za nizkofrekvenčno izolacijo vibracij mora biti bodisi masa zelo velika bodisi togost majhna. Resonator je omejen z veliko maso ali majhno togostjo. Da bi premagali to omejitev lahko v ROC z obstoječo pozitivno togostjo (PT) dodamo negativno togost (NT) in tako linearno togost spremenimo v nelinearno. Tako dosežemo kvazi ničelno togost (KNT), kar omogoča PZF zelo nizkih frekvenc.

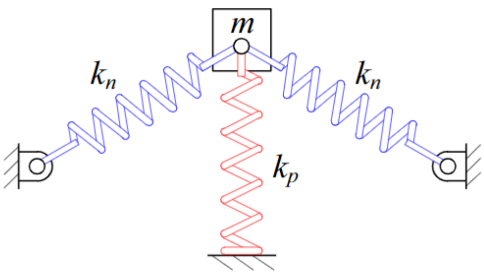
V sledečem poglavju 2.2 matematično zasnujemo ROC z KNT preko enačb strukturne statike in stabilnosti.

2.2 Analitična izpeljava ROC

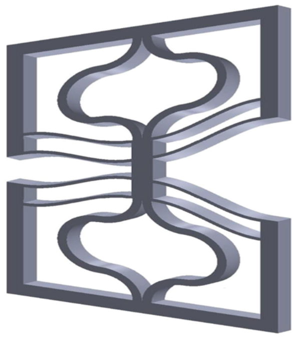
V sledečem poglavju zasnujemo reprezentativno osnovno celico (ROC) z visoko statično in nizko dinamično togostjo (VSND), ki ima lastnost kvazi ničelne togosti (KNT) ([3–5]). Za primer sistema z eno prostostno stopnjo, sposobnost pasivnega dušenja pri nizkih frekvencah zavisi od sposobnosti zagotoviti majhno togost ali veliko maso sistema. Ker je masa najpogosteje nespremenljiva, želimo čim manjšo togost, kar pa pomeni nesposobnost prenašanja večjih statičnih obremenitev. Torej želimo vibroizolacijo, kjer prvotno statično obremenitev prevzame visoka togost, dinamične obremenitve pa se srečajo z nizko togostjo. VSND togost dosežemo z nelinearno vzmetjo s KNT, ki jo dobimo tako, da pozitivni togosti nasprotujemo z negativno togostjo.

Najbolj tipični KNT vibroizolator [6] je sestavljen iz treh vzmeti - iz vertikalne vzmeti, ki nosi statične obremenitve na tlak in zagotavlja pozitivno togost k_p ter dveh paralelno vezanih horizontalnih vzmeti. Te nudijo negativno togost k_n, ki izniči pozitivno togost navpične vzmeti (slika 2.2a).

Za našo aplikacijo metamateriala narejenega z aditivno tehnologijo, kjer je ROC zvezna struktura, moramo vzmeti nadomestiti s strukturam prijazni metodi izdelave. Pozitivno togost lahko tvorimo z navpičnimi ukrivljenimi nosilci in negativno togost z ukrivljenimi horizontalnimi nosilci, kjer imamo ob obremenitvi preskok sistema. Nosilci so zaprti znotraj bolj togega okvirja (slika 2.2b).



(a)



(b)

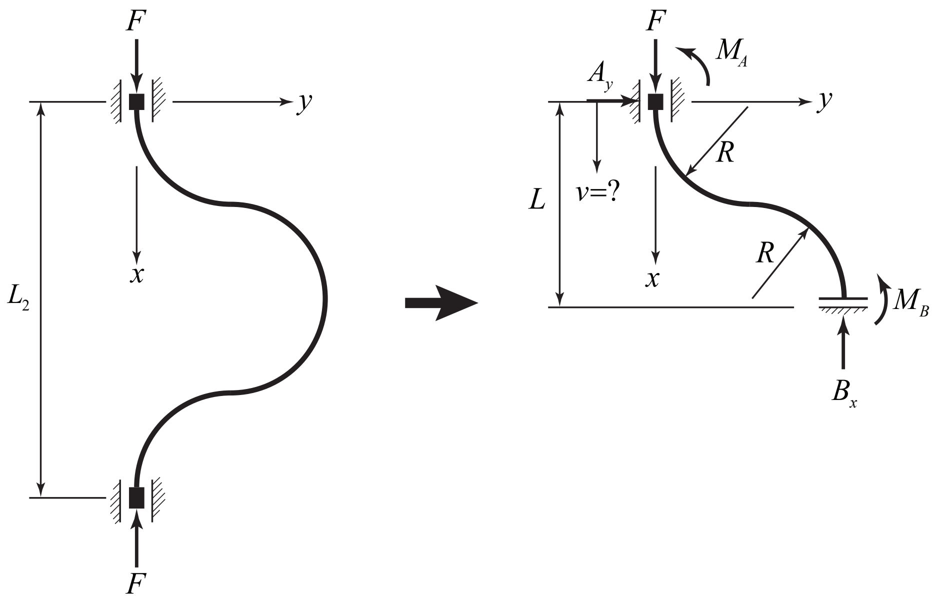
Slika 2.2: (a) Vzmetni KNT mehanizem in (b) 3D tiskana KNT ROC.

V sledečem poglavju analitično z enačbami, statike, trdnosti in stabilnosti zasnujemo KNT ROC. Sprva izpeljemo enačbe za navpične nosilce za pozitivno togost k_p in nato enačbe za poševne nosilce z negativno togostjo k_n. Z glavnim pogojem KNT povežemo vse nosilce skupaj v ROC z KNT:

$$\frac{1}{2}(2k_p + k_n) = 0\,. \tag{2.1}$$

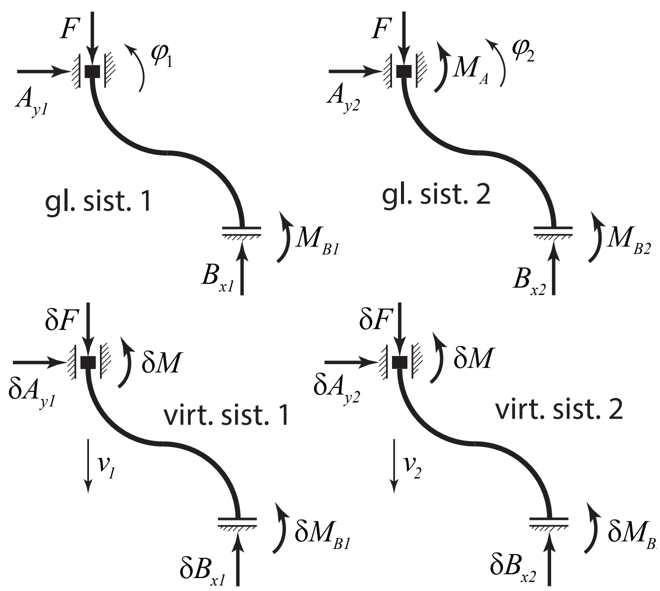
2.2.1 Izpeljava elementa s pozitivno togostjo

Pozitivni element je sestavljen iz simetričnih ukrivljenih nosilcev z togostjo k_p in ga obravnavamo kot en sam Eulerjev-Bernoullijev nosilec, pri čemer upoštevamo le notranji moment (slika 2.3). Zaradi simetrij obravnavamo le polovico enega od nosilcev in ga predstavimo v diagramu prostega telesa.



Slika 2.3: Diagram prostega telesa problema.

Osnovni sistem je statično nedoločen in ga razdelimo na dva določena glavna sistema, kjer je prvemu sistemu odvzeta momenta reakcija, ki se pojavi v drugem sistemu kot obremenitev (slika 2.4).



Slika 2.4: Glavni in virtualni sistemi.

Za izračun pomika togosti k_p uporabimo virtualno delo, ki je aplikacija principa najmanjše akcije - virtualno delo, ki ga opravi virtualna obremenitev, bo vedno minimalen. Vsakemu od glavnih sistemov (ločeno) pripišemo virtualne obremenitve δF in δM. Glavna sistema imata dve polji I in II, ki jih modeliramo kot četrtino krožnice $\varphi \in [0, \varphi/2]$. Glavni sistem 1 z obremenitvijo F in glavni sistem 2 z obremenitvijo M_A imata notranje momente definirane kot:

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{I},1}(\varphi) &= -FR(1-\cos\varphi) \\ M_{\mathrm{II},1}(\varphi) &= -FR(1+\sin\varphi) \\ M_{\mathrm{I},2}(\varphi) &= -M_\mathrm{A} \\ M_{\mathrm{II},2}(\varphi) &= -M_\mathrm{A}\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kjer je R polmer loka nosilca.

Virtualni moment δM povzroča rotacijo v točki A in je uporabljen za izračun neznane reakcijske sile M_A. Notranje obremenitve virtualnih sistemov so:

$$\delta M_{\mathrm{I},1} = \delta M_{\mathrm{II},1} = \delta M_{\mathrm{I},2} = \delta M_{\mathrm{II},2} = -\delta M\,. \tag{2.3}$$

Virtualno delo notranjih obremenitev δW_N in zunanjih obremenitev δW_Z, zaradi N sil in K momentov, je po principu virtualnih sil in momentov definirano kot:

$$\delta W_\mathrm{N} = \int_s \frac{M\,\delta M}{EI}\,\mathrm{d}s = \int_\varphi \frac{M\,\delta M}{EI} R\,\mathrm{d}\varphi\,, \tag{2.4}$$

$$\delta W_\mathrm{Z} = \sum_{i=1}^{N} \delta F_i \delta v_i + \sum_{j=1}^{K} \delta M_j \delta\varphi_j\,, \tag{2.5}$$

pri čemer je E modul elastičnosti in $I = I_1 = b\,t_1^3/12$ vztrajnostni moment prereza. b je globina in t_1 širina nosilca. Velja:

$$\delta W_\mathrm{N} = \delta W_\mathrm{Z}\,. \tag{2.6}$$

Za prvi sistem lahko izračunamo in nato iz enakosti v enačbi (2.6) dobimo φ_1:

$$W_{\mathrm{N},1} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_{\mathrm{I},1}\,\delta M_{\mathrm{I},1}}{EI} R\,\mathrm{d}s + \int_0^{\pi/2} \frac{M_{\mathrm{II},1}\,\delta M_{\mathrm{II},1}}{EI} R\,\mathrm{d}\varphi = \pi\,\frac{FR^2\,\delta M}{EI}\,, \tag{2.7}$$

$$W_{\mathrm{Z},1} = \delta M\,\varphi_1\,, \tag{2.8}$$

$$\varphi_1 = \pi \frac{FR^2}{EI}\,. \tag{2.9}$$

Podobno uporabimo notranje reakcije drugega glavnega in virtualnega sistema za:

$$\varphi_2 = \pi \frac{M_A}{EI}\,. \tag{2.10}$$

Dejanska rotacija je zaradi toge podpore omejena in velja pogoj $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$, kar pomeni, da je momentna reakcija v podpori enaka:

$$M_\mathrm{A} = -FR\,. \tag{2.11}$$

Ker nas zanima togost $k_p = \Delta F/\Delta v$, potrebujemo skrček nosilca v navpični smeri v, ki je posledica delovanja virtualne sile δF v točki A. Notranje obremenitve so:

$$\begin{aligned} \delta M_{\mathrm{I},1}(\varphi) &= \delta M_{\mathrm{I},2}(\varphi) = -\delta F(1-\cos\varphi)\,, \\ \delta M_{\mathrm{II},1}(\varphi) &= \delta M_{\mathrm{II},2}(\varphi) = -\delta F(1+\sin\varphi)\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Podobno kot smo že prej, uporabimo notranje reakcije prvega in drugega glavnega ter virtualnega sistema in nato preko virtualnega dela dobimo:

$$v_1 = \frac{3\pi}{2}\frac{FR^3}{EI} \quad \text{in} \tag{2.13}$$

$$v_2 = \pi\frac{M_A R^2}{EI} = -\pi\frac{FR^3}{EI}\,. \tag{2.14}$$

Navpični pomik elementa s pozitivno togostjo v_p povzroči dejanska sila F. Upoštevamo simetrijo, superpozicijo in dolžino celotnega nosilca, ki je $l_1 = 4R$. Vidimo, da je:

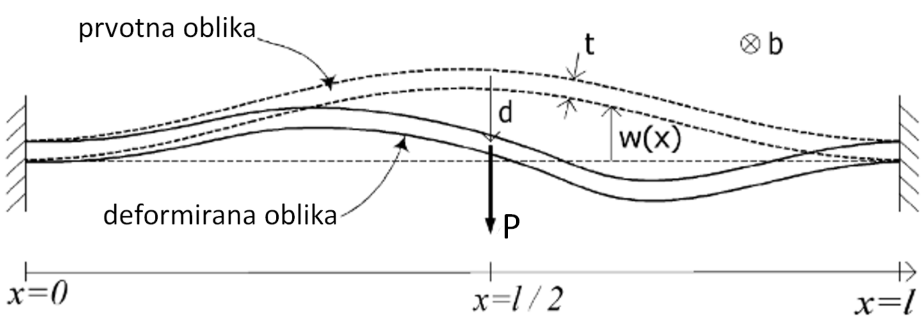
$$v_p = 2(v_1+v_2) = \frac{\pi}{2^6}\frac{Fl_1^3}{EI_1}\,. \tag{2.15}$$

končno togost pozitivnega elementa izračunamo kot:

$$k_p = \frac{\Delta F}{\Delta v_p} = \frac{F-0}{v_p-0} = \frac{2^6}{\pi}\frac{EI_1}{l_1^3} \approx 20{,}372\,\frac{EI_1}{l_1^3}\,. \tag{2.16}$$

2.2.2 Izpeljava elementa z negativni togostjo

Element z negativno togostjo ROC sestoji iz štirih togo vpetih kosinusnih lokov dolžine l_2, globine b, debeline t_2, razdaljo od poravnane lege do srednje linije loka h in modul elastičnosti E. Izpeljimo nadomestno togost iz sledeče bistabilnostne analize [7] spodnjega elementa (slika 2.5).



Slika 2.5: Shema kosinusnega nosilca.

Izhajamo iz enačbe Euler-Bernulijevega nosilca obremenjenega z aksialno silo P:

$$EI_2 \frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + P \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = 0\,, \tag{2.17}$$

kjer je $w = w(x)$ prečni pomik nosilca. Togo vpet nosilec ima robne pogoje:

$$w(0) = w(l_2) = 0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=l_2} = 0\,. \tag{2.18}$$

Vpeljemo definicijo normirane aksialne sile, ki je enaka:

$$N^2 = \frac{P\, l_2^2}{EI_2}\,. \tag{2.19}$$

Reševanje diferencialne enačbe vodi v pogojno enačbo:

$$\sin\left(\frac{N}{2}\right)\left[\tan\left(\frac{N}{2}\right) - \frac{N}{2}\right] = 0 \tag{2.20}$$

in dve vrsti rešitev, kjer je prva:

$$\left.\begin{aligned} w_j(x) &= C\left[1 - \cos\left(N_j \tfrac{x}{l_2}\right)\right] \\ N_j &= (j+1)\pi \end{aligned}\right\} \quad j = 1, 3, 5 \ldots \tag{2.21}$$

in druga:

$$\left.\begin{aligned} w_j(x) &= C\left[1 - 2\frac{x}{l_2} - \cos\left(N_j \frac{x}{l_2}\right) + \frac{2\sin\left(N_j \tfrac{x}{l_2}\right)}{N_j}\right] \\ N_j &= 2{,}86\pi;\ 4{,}92\pi \ldots \end{aligned}\right\} \quad j = 2, 4, 6 \ldots \tag{2.22}$$

Zgornja analiza podaja matematično osnovo stabilnostne analize uklona nosilca. Namesto prednapetega nosilca, lahko izhajamo iz nosilca, katerega izhodišče je hkrati prva deformacijska oblika z enačbo:

$$\bar{w}(x) = \frac{h}{2}\left[1 - \cos\left(2\pi \frac{x}{l_2}\right)\right]\,. \tag{2.23}$$

Ob obremenitvi nosilca z lateralno silo F pri $x = l_2/2$, se središče nosilca ob predpostavki majhnih pomikov poda za d in dolžina nosilca postane s:

$$d = \bar{w}\left(\frac{l_2}{2}\right) - w\left(\frac{l_2}{2}\right)\,, \tag{2.24}$$

$$s = \int_0^{l_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int_0^{l_2} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,. \tag{2.25}$$

Sprememba s povzroči nastanek aksialne sile:

$$P = E\,b\,t\left(1 - \frac{s}{s_0}\right)\,, \tag{2.26}$$

kjer je $s_0 = l_2$ začetna dolžina nosilca.

Med deformacijo je prisotna upogibna energija u_b, tlačna energija u_s in energija aktuacije u_f. Variacija energij je:

$$\partial u_b = \partial\left[\frac{EI}{2}\int_0^{l_2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\bar{w}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x\right]\,, \tag{2.27}$$

$$\partial u_s = -P\partial s\,, \tag{2.28}$$

$$\partial u_s = -F\partial d\,. \tag{2.29}$$

Problem rešujemo s superpozicijo deformacijskih oblik. Deformacijske oblike po enačbah (2.21) in (2.22) so ortogonalne in jih lahko uporabimo tudi kot osnovo za izračun pomika w prvotno deformiranega nosilca, saj so robni pogoji enaki. Sprva normiramo parameter:

$$X = \frac{x}{l_2}\,,\ W(X) = \frac{Xl_2}{h}\,. \tag{2.30}$$

Torej je superpozicija oblike nosilca:

$$W(X) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j W_j(X)\,. \tag{2.31}$$

in obe rešitvi:

$$\left.\begin{array}{l} W_j(X) = 1 - \cos(N_j X) \\ N_j = (j+1)\pi \end{array}\right\} \quad j = 1, 3, 5\ldots \tag{2.32}$$

$$\left.\begin{array}{l} W_j(x) = 1 - 2X - \cos(N_j X) + \frac{2\sin(N_j X)}{N_j} \\ N_j = 2{,}86\pi; 1{,}92\pi\ldots \end{array}\right\} \quad j = 2, 4, 6\ldots \tag{2.33}$$

Prvotna normirana oblika nosilca je:

$$\bar{W}(X) = \frac{1}{2}W_0(X)\,. \tag{2.34}$$

Normiramo tudi preostale parametre:

$$\begin{gathered} R = \frac{Fl_2^3}{EIh},\quad \Delta = \frac{d}{h},\quad S = \frac{sl_2}{h^2},\quad N^2 = \frac{Pl_2^2}{EI},\quad Q = \frac{h}{t_2} \\ U_b = \frac{u_b l_2^3}{EIh^2},\quad U_s = \frac{u_s l_2^3}{E_j Ih^2},\quad U_f = \frac{u_f l_2^3}{EIh^2}\,. \end{gathered} \tag{2.35}$$

S superpozicijo in normiranjem lahko relacije (2.24) do (2.27) izrazimo kot:

$$\begin{aligned}
\Delta &= 1 - 2 \sum_{j=1,5,9\ldots} A_j \,, \\
S &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^2 N_j^2}{4} \,, \\
\frac{N^2}{12Q^2} &= (S)_{W=\bar{W}} - S = \frac{N_1^2}{16} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^2 N_j^2}{4} \,, \\
\partial U_b &= \partial \left[\frac{\left(\frac{1}{2} - A_1\right)^2 N_1^4}{4} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{A_j^2 N_j^4}{4} \right] \,, \\
\partial U_s &= -N^2 \partial S = -N^2 \partial \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^2 N_j^2}{4} \right) \quad \text{in} \\
\partial U_f &= -R \partial \Delta = 2R \sum_{j=1,5,9\ldots} A_j \,.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Variacija celotne energije U_t je vsota posameznih energij:

$$\begin{aligned}
\partial U_t = & \left(\frac{N_1^4 - N^2 N_1^2}{2} A_1 - \frac{N_1^4}{4} + 2F \right) \partial A_1 \\
& + \sum_{j=2,3,4,6,7\ldots} \left(\frac{N_j^4 - N^2 N_j^2}{4} \right) \partial A_j^2 \\
& + \sum_{j=5,9,13\ldots} \left(\frac{N_j^4 - N^2 N_j^2}{2} A_j + 2F \right) \partial A_j \,,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

in mora biti minimizirana:

$$\partial U_t \geq 0 \,. \tag{2.38}$$

Koeficienti ∂A_j, $j = 1, 5, 9, 13, ...$ morajo biti nič, kar nam podaja:

$$A_1 = -\frac{1}{2} \frac{N_1^2}{N^2 - N_1^2} + \frac{4R}{N_1^2 \left(N^2 - N_1^2\right)} \,, \tag{2.39}$$

$$A_j = \frac{4F}{N_j^2 \left(N^2 - N_j^2\right)}, \quad j = 5, 9, 13 \ldots \tag{2.40}$$

Enačbo (2.38) morajo izpolnjevati tudi koeficienti ∂A_j^2, $j = 2, 3, 4, 6, 7, ...$, ki imajo glede na pogoje vrednosti:

$$A_j \begin{cases} = 0, & N^2 < N_j^2 \\ \text{mora biti omejen} & N^2 > N_j^2 \\ \text{poljubna vrednost dokler je } j = 2, 3, 4, 6, 7, ... & N^2 = N_j^2 \end{cases} \tag{2.41}$$

Iz praktičnih razlogov je mogoče mehansko omejiti le drugo deformacijsko obliko, ne da bi to vplivalo na prvo, zato drugi pogoj (2.41) narekuje, da lahko dobi j vrednost 2, kadar druga oblika ni omejena, ali 3, kadar je druga oblike omejena.

Enačba (2.41) omogoča tri vrste rešitev. Prva je:

$$\begin{cases} R = R_1 \\ N^2 < \begin{cases} N_1^2, \text{ z omejeno drugo deformacijsko obliko} \\ N_2^2, \text{ z neomejeno drugo deformacijsko obliko} \end{cases} \\ A_j = 0, \quad j \neq 1, 5, 9, 13 \ldots \end{cases} \tag{2.42}$$

druga:

$$\begin{cases} R = R_2 \\ N^2 = N_2^2 \\ A_j = 0, \quad j \neq 1, 2, 5, 9, 13 \ldots \end{cases} \tag{2.43}$$

in tretja:

$$\begin{cases} R = R_3 \\ N^2 = N_3^2 \\ A_j = 0, \quad j \neq 1, 3, 5, 9, 13 \ldots \end{cases} \tag{2.44}$$

Z do sedaj izpeljanimi enačbami lahko definiramo relacijo med normirano obremenitvijo R in pomikom Δ kosinusnega nosilca. Če zanemarimo višje rede j-ja, lahko dobimo analitične rešitve. Torej pri $A_j = 0$ in $j = 5, 9, 13, ...$ dobimo:

$$R_1 = \frac{3\pi^4 Q^2}{2}\Delta\left(\Delta - \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{3Q^2}}\right)\left(\Delta - \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{3Q^2}}\right) \tag{2.45}$$

$$R_2 = \frac{N_1^2\left(N_2^2 - N_1^2\right)}{8}\left(\frac{N_2^2}{N_2^2 - N_1^2} - \Delta\right) = 4{,}18\pi^4 - 2{,}18\pi^4\Delta \tag{2.46}$$

$$R_3 = \frac{N_1^2\left(N_3^2 - N_1^2\right)}{8}\left(\frac{N_3^2}{N_3^2 - N_1^2} - \Delta\right) = 8\pi^4 - 6\pi^4\Delta \tag{2.47}$$

R_2 obstaja, če imamo omejeno drugo obliko in če je $Q > 2N_2/\sqrt{3}N_1 = 1{,}67$. R_3 obstaja, če imamo omejeno drugo obliko in če je $Q > 2N_3/\sqrt{3}N_1 = 2{,}31$.

Z omejeno drugo deformacijsko obliko in dovolj velikim $Q > 2{,}31$ lahko vse tri rešitve R lineariziramo. Če R_1, R_2, R_3 in Δ ponovno dimenzioniramo po enačbah (2.35), lahko za $Q \approx 6$ dobimo vrednosti spodaj:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{zg}} &\approx 8\pi^4\frac{EI_2h}{l_2^3}, \quad F_{\mathrm{sp}} &&\approx -4\pi^4\frac{EI_2h}{l_2^3}, \quad d_{\mathrm{sr}} &&= 1{,}33h \\ d_{\mathrm{zg}} &\approx \frac{8t_2}{3Q}, \quad d_{\mathrm{sp}} &&\approx 2h - \frac{8t_2}{3Q}, \quad d_{\mathrm{k}} &&\approx 2h - \frac{4t_2}{3Q}\,. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Analitična rešitev je le aproksimacija, saj smo zanemarili višje člene enačbe (2.40). Z upoštevanjem višjih redov enačbe, bi dobili boljšo aproksimacijo togosti. Dodatno upoštevamo še dva člena:

$$\sum_{j=1,5,9,13\ldots} \frac{4\left(N^2-N_1^2\right)^2}{N_j^2\left(N^2-N_j^2\right)^2} F_1^2 - N_1^2 F_1 + \frac{N^2\left(N^2-N_1^2\right)^2}{12Q^2} - \frac{N_1^2 N^2\left(N^2-2N_1^2\right)}{16} = 0\,, \tag{2.49}$$

kar vodi v parametre F-d krivulje za $Q \approx 6$, ki so grafično prikazani na sliki 2.7a :

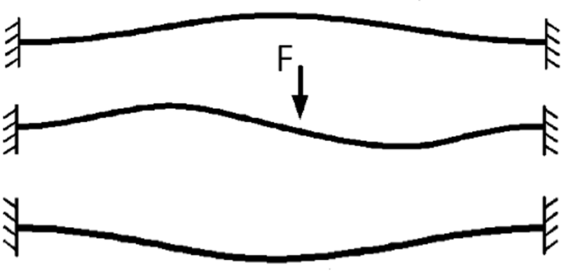
$$\begin{aligned} F_{\mathrm{zg}} &\approx 740\frac{EI_2 h}{l_2^3}, \quad F_{\mathrm{sp}} \approx -370\frac{EI_2 h}{l_2^3}, \quad d_{\mathrm{sr}} = 1{,}33h \\ d_{\mathrm{zg}} &\approx 0{,}16h, \quad d_{\mathrm{sp}} \approx 1{,}92h, \quad d_{\mathrm{k}} \approx 1{,}99h\,. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Strukturna energija v ukrivljenem nosilcu med deformacijo vsebuje upogibno in tlačno energijo. Z vidika energije se upogibna energija v nosilcu monotono povečuje, kadar koli se nosilec premika navzdol; medtem ko se tlačna energija poveča do maksimuma pred preskokom na drugo stran. Če je nosilec zasnovan tako, da je zmanjšanje tlačne energije po prečkanju sredinske črte hitrejše od povečanja energije upogibanja, nastane negativna sila, kar kaže na bistabilnost.

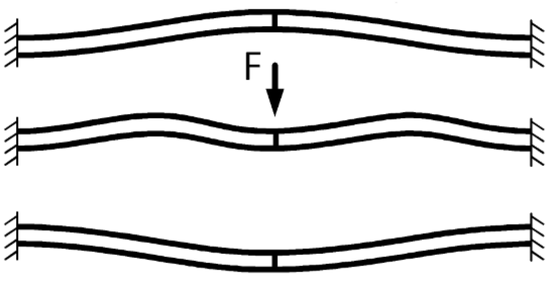
Na podlagi zgoraj zapisanega, je kosinusni nosilec bistabilen, če sta izpolnjena dva pogoja:

1. Q (razmerje med višino vrha nosilca in njegovo debelino) mora biti dovolj velik,
2. druga deformacijska oblika mora biti omejena.

Pogoje lahko izpolnimo tako, da uporabimo strukturo z dvojnim kosinusnim nosilcem, ki ima med obema nosilcema togo povezavo. Središčna povezava prenaša rotacijo enega od središč nosilcev na osno gibanje drugega nosilca. Ker sta nosilca toga v aksialni smeri, se lahko rotacijsko gibanje obeh nosilcev močno zmanjša. Monostabilni mehanizem z enim nosilcem prikazan na sliki 2.6a, medtem ko je bistabilni dvojni ukrivljeni nosilci so prikazani na sliki 2.6b.



(a)



(b)

Slika 2.6: (a) Monostabilna in (b) bistabilna konstrukcija iz nosilcev.

Krivulja F-d dvojnega ukrivljenega nosilca bi bila videti tako, kot je prikazano na sliki 2.7a, pri čemer so vrednosti pomikov enake, vrednosti sile pa podvojene glede na vrednosti v enačbah (2.50):

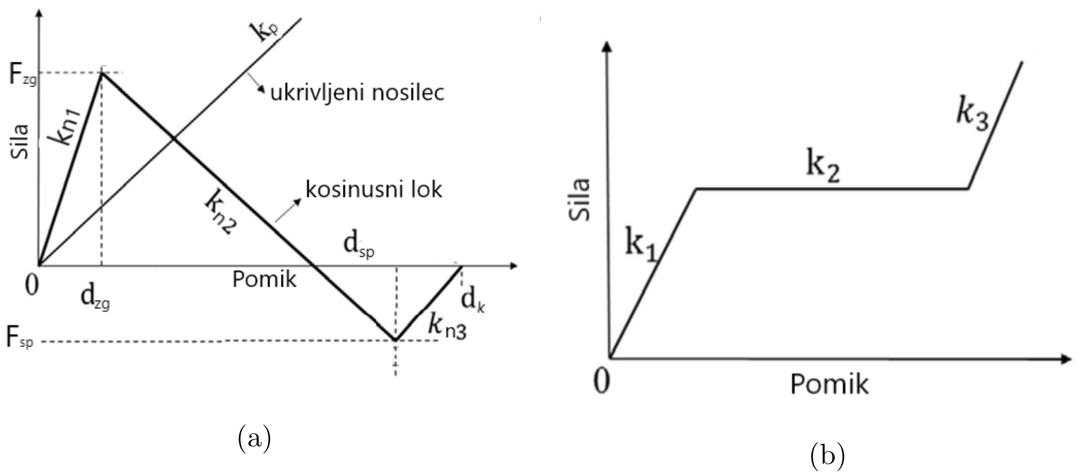
$$\begin{aligned} F_{\mathrm{zg}} &\approx 1480\frac{EI_2 h}{l_2^3}, \quad F_{\mathrm{sp}} \approx -740\frac{EI_2 h}{l_2^3}, \quad d_{\mathrm{sr}} = 1{,}33h \\ d_{\mathrm{zg}} &\approx 0{,}16h, \quad d_{\mathrm{sp}} \approx 1{,}92h, \quad d_{\mathrm{k}} \approx 1{,}99h\,. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Z F-d diagrama 2.7a so iz naklona premic razvidna tri področja linearne togosti. Prva nadomestna togost je k_{n1}, druga je iskana negativna togost k_{n2}, saj dosežemo negativne sile, in tretja je k_{n3}.

Izpeljane togosti so:

$$k_{n1} = 9250\frac{EI_2}{l_2^3}, \quad k_{n2} = -1253{,}18\frac{EI_2}{l_2^3} \text{ in } k_{n3} = 10571{,}42\frac{EI_2}{l_2^3}\,. \tag{2.52}$$

V F-d diagram vrišemo tudi v poglavju 2.2.1 izpeljano togost k_p. V sledečem poglavju združimo elemente pozitivne in negativne togosti in tvorimo KNT ROC.



(a) (b)

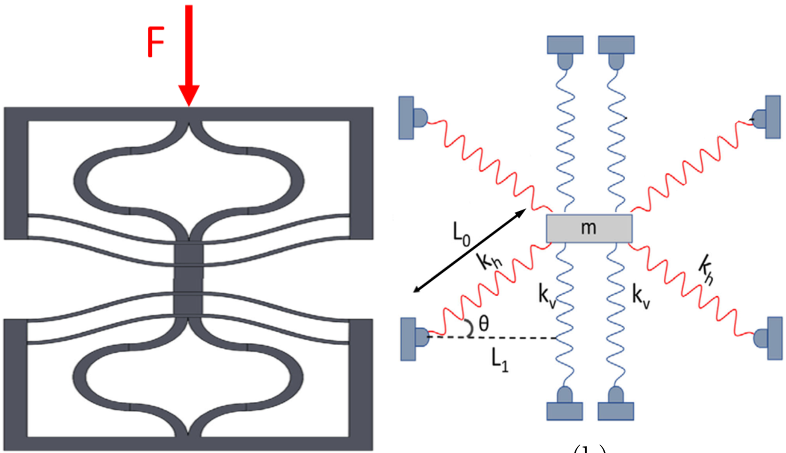
Slika 2.7: (a) F-d graf pozitivnega in negativnega nosilca in (b) celotne ROC.

2.2.3 Statična analiza ROC

Ker imamo z bistabilnim kosinusnim nosilcem negativne togosti (poglavje 2.2.2) paralelno povezana dva nosilca pozitivne togosti (2.2.1), ter nato ta sistem zaporedno povezan z enakim sistemom, lahko posamezne nadomestne togosti seštejemo v:

$$k_1 = \frac{1}{2}(k_{n1} + 2k_p), \quad k_2 = \frac{1}{2}(k_{n2} + 2k_p) \text{ in } \quad k_3 = \frac{1}{2}(k_{n3} + 2k_p)\,. \tag{2.53}$$

Na tem mestu lahko upoštevamo prej zastavljeni pogoj za KNT (2.1) in za $k_2 = 0$ določimo to območje kot območje ničelne togosti. Torej ob stiskanju ROC v vertikalni smeri (slika 2.8a) na začetku potrebujemo vedno večjo silo F. Na neki točki ob pravilno dimenzioniranih nosilcih, za nadaljnjo pomikanje, sila ostaja enaka. To je zaradi negativne togosti k_{n2}, ki deluje z nasprotujočo silo. Ko nekaj časa pomikamo ROC, ponovno preidemo v območje pozitivne togosti in potrebna sila se spet poveča. V vmesnem področju imamo prisotno KNT. Na sliki 2.8b vidimo sistem vzmeti z maso, ki jo uporabimo kot referenco za izpeljavo povezave med razmerjem togosti μ in geometrijskega parametra γ, ki ju uporabimo za dimenzioniranje nosilcev [3].



(a) (b)

Slika 2.8: (a) Shema ROC in (b) referenčni sistem z maso in vzmetjo.

Navpični nosilci za pozitivno togost imajo enako togost kot vertikalne vzmeti:

$$k_v = k_p\,. \tag{2.54}$$

Dvojna bistabilna kosinusna nosilca sta z horizontalno vzmetjo povezana preko relacije:

$$k_h \sin\theta = k_{n2}\,, \tag{2.55}$$

kjer predpostavimo, da je vertikalna komponenta ekvivalentne togosti horizontalne vzmeti enaka k_{n2}. Ko ROC doživi vertikalni pomik d iz statične ravnovesne lege, vsaka polovica doživi pomik $X = d/2$ in je sila kosinusnega nosilca:

$$F_h = k_h\left(L_0 - \sqrt{L_1^2 + X^2}\right)\,. \tag{2.56}$$

Tukaj je L_0 prvotna razdalja od roba nosilca do njegove sredine in L_1 horizontalna razdalja od roba do sredine. Vertikalna komponenta kosinusnega sile nosilca F_{MNT}, ki služi kot mehanizem negativne togosti (MNT), je:

$$F_{\mathrm{MNT}} = -F_h \sin\theta = -F_h \frac{X}{\sqrt{L_1^2 + X^2}}\,, \tag{2.57}$$

s kotom med kosinusnim nosilcem in horizontalno ravnino θ.

Za ROC je relacija sila-pomik:

$$F_v = k_v X \tag{2.58}$$

in relacija za MNT, pridobljena z združitvijo enačb (2.56) in (2.57), je:

$$F_{\mathrm{MNT}}(X) = -\frac{1}{2}k_h \left(\frac{L_0}{\sqrt{L_1^2 + X^2}} - 1 \right) X\,. \tag{2.59}$$

Za zasnovano ROC je odvisnost sile od pomika:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{ROC}}(X) &= F_v + F_{\mathrm{MNT}}(X) \\ F_{\mathrm{ROC}}(X) &= k_v X - \frac{1}{2}k_h \left(\frac{L_0}{\sqrt{L_1^2 + X^2}} - 1 \right) X\,. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Zgornjo enačbo lahko zapišemo v brezdimenzijski obliki z vpeljavo:

$$f_{\mathrm{ROC}}(x) = \frac{F_{\mathrm{ROC}}(X)}{k_v L_0}, \quad \mu = \frac{k_h}{k_v}, \quad \gamma = \frac{L_1}{L_0}, \quad x = \frac{X}{L_0}\,. \tag{2.61}$$

Tako lahko zapišemo brezdimenzijsko enačbo ROC na sliki 2.8a, ki je:

$$f_{\mathrm{ROC}}(x) = x - \frac{1}{2}\mu \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + x^2}} - 1 \right) x\,. \tag{2.62}$$

Brezdimenzijsko odvisnost togosti in pomika dobimo z odvajanjem $f_{\mathrm{ROC}}(x)$:

$$k_{\mathrm{ROC}}(x) = 1 + \frac{1}{2}\mu - \frac{\mu\gamma^2}{2(\gamma^2 + x^2)^{3/2}}\,. \tag{2.63}$$

Togost je najmanjša v ravnovesni legi $x = 0$. Za pridobitev karakteristike KNT izpeljemo za $k_{\mathrm{KNT}} = k_{\mathrm{ROC}}(x = 0) = 0$ pogojno razmerje μ_{KNT} in γ_{KNT}:

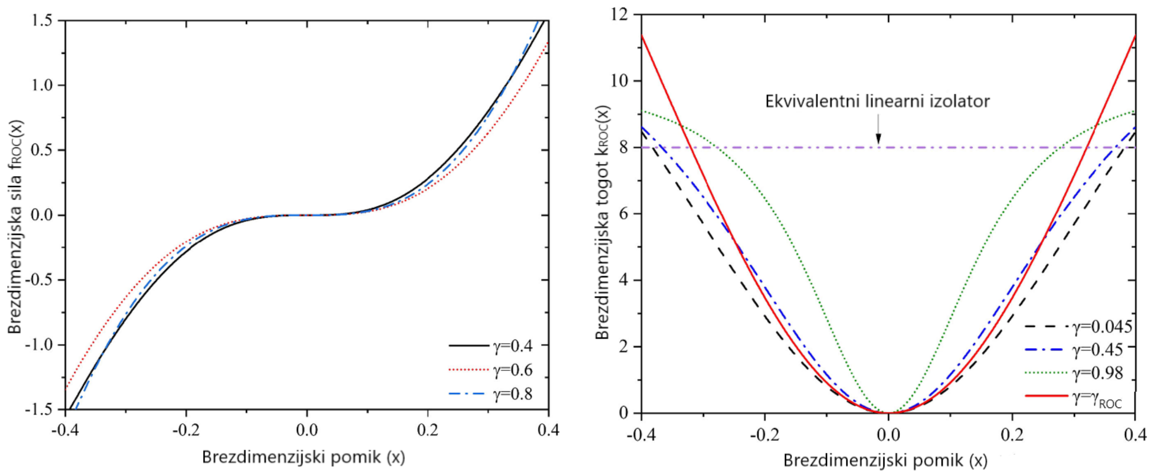
$$k_{\mathrm{ROC}}(0) = 1 + \frac{1}{2}\mu \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) = 0\,, \tag{2.64}$$

$$\mu_{\mathrm{KNT}} = \frac{2\gamma}{1-\gamma}\,, \tag{2.65}$$

$$\gamma_{\mathrm{KNT}} = \frac{\mu}{\mu + 2}\,. \tag{2.66}$$

Jasno je, da je togost v statičnem ravnovesju negativna in nestabilna, če je vrednost $\mu > \mu_{\text{KNT}}$ ali $\gamma < \gamma_{\text{KNT}}$. Za namene stabilne izolacije je bolje doseči pozitivno togost v ravnovesnem položaju z izbiro parametrov na podlagi pogojev $\mu < \mu_{\text{KNT}}$ ali $\gamma > \gamma_{\text{KNT}}$.

Brezdimenzijska sila kot funkcija brezdimenzijskega pomika v enačbi (2.62), je prikazana na sliki 2.9a za različne vrednosti γ pri $\mu = \mu_{\text{KNT}}$. Območje KNT je opazno, ko vrednost f_{ROC} ostane enaka nič pri spreminjajočem x. Območje KNT se povečuje s γ. Prav tako prikažemo brezdimenzijsko karakteristiko togosti in pomika $k_{\text{ROC}}(x)$, ki je prikazana na sliki 2.9b. S slike vidimo, da je v položaju statičnega ravnovesja $x = 0$ negativna togost, ki jo dobimo s kosinusnimi nosilci, popolnoma uravnotežena s pozitivno togostjo, tako da je kombinirana togost enaka nič.



(a) (b)

Slika 2.9: (a) brezdimenzijska sila in (b) togost z variiranjem γ.

Iz krivulje togosti in pomika, prikazane na sliki 2.9b, je razvidno, da je za določeno območje pomika v odvisnosti od μ vrednost togosti KNT izolatorja manjša od vrednosti ekvivalentnega linearnega izolatorja. Območje pomikov, ki izpolnjuje nižjo vrednost togosti KNT izolatorja, je pomemben pokazatelj značilnosti togosti in pomikov in ga lahko izračunamo tako, da nastavimo vrednost togosti KNT izolatorja za manjšo od vrednosti ekvivalentnega linearnega izolatorja $k_{\text{KNT}}(x) < 1$. V definiciji za $k_{\text{KNT}}(x)$ upoštevamo $\mu = \mu_{\text{KNT}} = 2\gamma/1 - \gamma$ in dobimo:

$$|x| < \gamma^{2/3}\sqrt{1-\gamma^{2/3}}\,, \tag{2.67}$$

$$L_{\text{sd}} = 2x = 2\gamma^{2/3}\sqrt{1-\gamma^{2/3}}\,, \tag{2.68}$$

kjer je L_{sd} dolžina pomika z nizko togostjo. Največjo vrednost L_{sd} lahko dobimo z odvajanjem zgornje enačbe glede na γ in izenačitvijo z ničlo. Rešitev kaže, da je L_{sd} največja pri $\gamma = 0{,}5443$:

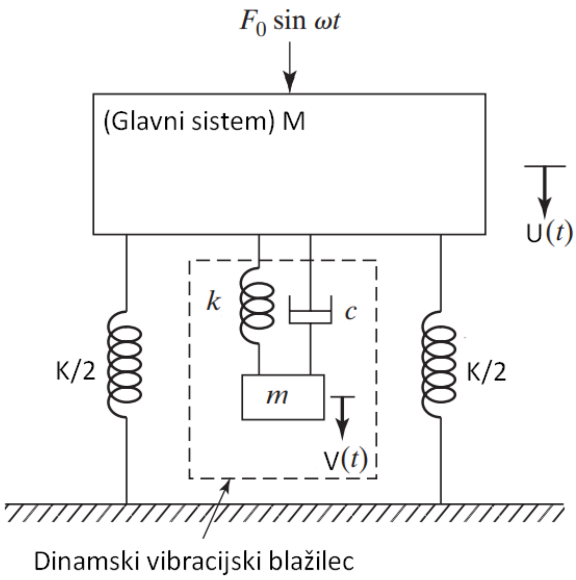
$$L_{\text{sd}}(\gamma = 0{,}5443) = 0{,}7698\,. \tag{2.69}$$

2.3 Dinamika MM vibroizolatorja

Vibroizolacijo tvorimo z lastnostjo metamateriala (MM) kot pasovno zavrnitvenega filtra (PZF). Uporabimo učinek lokalne resonance, ki na nivoju posamezne celice deluje kot dvomasni vibracijski blažilec, predstavljen v 2.3.1. Idejo enodimenzionalnega blažilca lahko razširimo na več prostostnih stopenj tako, da ima vsak ROC v MM svoj blažilec. Z analitično izpeljavo v 2.3.2 dosežemo pasivno vibroizolacijo v nizkih frekvencah z dušenjem mehanskega vala v enodimenzionalni verigi ROC-jev.

2.3.1 Dvomasni dušilec nihanj

Dinamični vibracijski blažilec ali DVB uporabimo za zmanjšanje neželenih vibracij stroja na katerem ga uporabimo [8]. DVB na sliki 2.10 sestoji iz mase m, ki je preko togosti k in dušenja c povezana na glavni objekt mase M in togosti K, katerega odzive želimo zmanjšati. Skupaj ju obravnavamo kot dinamični sistem z dvema prostostnima stopnjama. Pri tem je U translatorna prostostna stopnja glavnega sistema in V translatorna prostostna stopnja resonatorja.



Slika 2.10: Nedušen sistem z DVB-jem

Izhodišče obravnave sta gibalni enačbi sistema za maso M in m, pri čemer na prvo maso vpliva harmonično delujoča obremenitev z amplitudo F_0 in krožno frekvenco ω:

$$\begin{aligned} M\ddot{U} + Ku + c(\dot{U} - \dot{V}) + k(U - V) &= F_0 \sin \omega t\,, \\ m\ddot{V} + c(\dot{V} - \dot{U}) + k(V - U) &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Predpostavimo harmonski odziv:

$$
\begin{aligned}
U &= U_0 \sin \omega t\,, \\
V &= V_0 \sin \omega t
\end{aligned} \tag{2.71}
$$

in za sistem enačb izpeljemo izraze amplitud mas m in M:

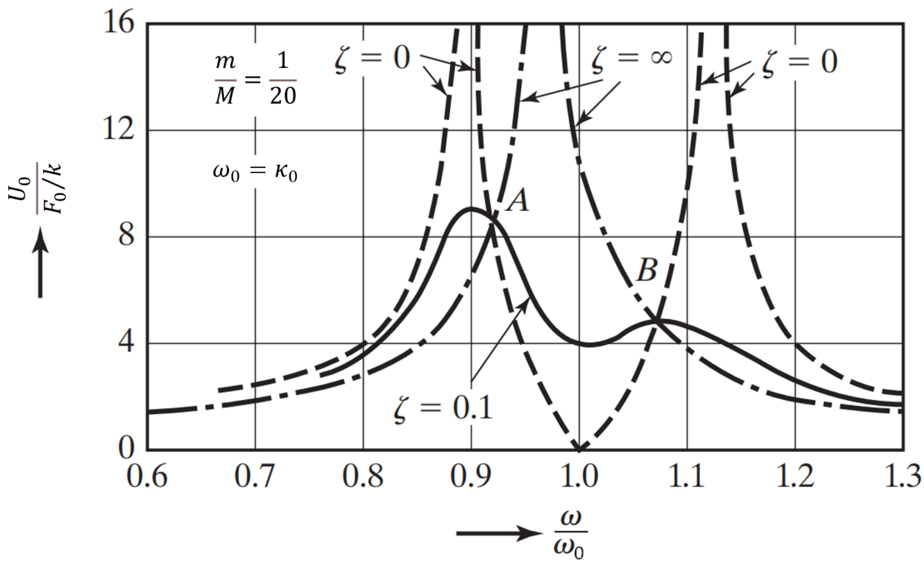
$$U_0 = \frac{F_0\,(k - m\,\omega^2 + i\,c\,\omega)}{[(K - M\omega^2)\,(k - m\,\omega^2) - m\,k\,\omega^2] + i\,\omega\,c\,(K - M\omega^2 - m\,\omega^2)}\,, \tag{2.72}$$

$$V_0 = \frac{U_0\,(k + i\,\omega\,c)}{(k - m\,\omega^2 + i\,\omega\,c)}\,. \tag{2.73}$$

Bistvo problema je zmanjšanje amplitude U_0, ki predstavlja velikost odziva glavnega sistema. Definiramo razmerje mas $\beta = m/M$, razmerje naravnih frekvenc glavnega sistema $\omega_0^2 = K/M$, razmerje naravnih frekvenc resonatorja $\kappa_0^2 = k/m$, razmerje naravnih frekvenc $\varkappa = \omega_0/\kappa_0$, razmerje vzbujevalne frekvence in lastne frekvence glavnega sistema $\Omega = \omega/\omega_0$ in razmernik dušenja $\zeta = c/(2m\omega_0)$. Amplitude U_0 in V_0, lahko izrazimo s spodnjimi enačbami in za $m/M = 1/20$ in nekaj različnih vrednosti ζ prikažemo odziv glavnega sistema z DVB-jem na sliki 2.11. Torej:

$$\frac{U_0}{F_0/K} = \left[\frac{(2\zeta\Omega)^2 + \left(\Omega^2 - \varkappa^2\right)^2}{(2\zeta\Omega)^2\left(\Omega^2 - 1 + \beta\Omega^2\right)^2 + \left\{\beta\varkappa^2\Omega^2 - (\Omega^2 - 1)\,(\Omega^2 - \varkappa^2)\right\}^2}\right]^{1/2}\,, \tag{2.74}$$

$$\frac{V_0}{F_0/K} = \left[\frac{(2\zeta\Omega)^2 + \varkappa^4}{(2\zeta\Omega)^2\left(\Omega^2 - 1 + \beta\Omega^2\right)^2 + \left\{\beta\varkappa^2\Omega^2 - (\Omega^2 - 1)\,(\Omega^2 - \varkappa^2)\right\}^2}\right]^{1/2}\,. \tag{2.75}$$



Slika 2.11: Dušen sistem z DVB-jem.

Za primer dušenja $c = \zeta = 0$ lahko vidimo, da je:

$$
\begin{aligned}
(k - m\,\omega^2)F_0 &= 0\,, \\
\omega^2 &= \frac{k}{m}\,.
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

Če smo torej prvotni sistem vzbujali z krožno frekvenco blizu prve krožne frekvence:

$$
\omega^2 \simeq \omega_0^2 = \frac{K}{M}, \tag{2.77}
$$

sledi iz zgornjih enačb pogoj za dimenzioniranje DVB-ja pri zanemarljivem dušenju:

$$
\omega^2 = \frac{K}{M} = \frac{k}{m}\,, \tag{2.78}
$$

pri čemer je amplituda odziva z dodanim DVB-jem, kjer še vedno obratujemo pri originalnih pogojih z frekvenco ω_0, tako nič. Z drugimi besedami je ustrezno dimenzioniran DVB tak, ki ima razmerje med svojo togostjo in maso enako kot je razmerje med togostjo in maso glavnega sistema.

Iz slike 2.11 je razvidno, da v točki A in B vse krivulje sovpadajo neodvisno od dušenja. Z prisotnostjo dušenja pogoj (2.78) postane:

$$
\Omega = \frac{1}{1+\beta}\,, \tag{2.79}
$$

dobimo še dodatni pogoj za najboljše razmerje dušenja:

$$
\zeta_{opt}^2 = \frac{3\beta}{8(1+\beta)^3}\,. \tag{2.80}
$$

V tem poglavju smo torej ugotovili, da lahko zmanjšamo odziv glavnega sistema z ustreznim dimenzioniranjem dinamičnega vibracijskega blažilca. Vidimo tudi, da ima DVB veliko pomanjkljivost. Majhen odziv sistema povzroči le v ozkem območju okoli prvotne lastne frekvence ω_0.

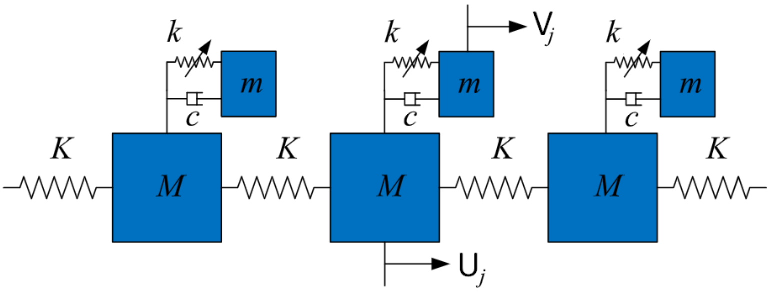
V primeru, da se vzbujevalna frekvenca ali lastnosti sistema glede na prvotno dimenzioniranje spremenijo, DVB ne bo več tako učinkovit, v okolici izven območja dušenja lahko pride celo do povečanja amplitud. Z ustreznim krmiljenjem mase m ali togosti k lahko povečamo uporabno območje DVB-ja. V našem primeru, kjer segrevamo GPLA in tako vplivamo na modul elastičnosti, lahko spreminjamo togost resonatorja ROC-ja.

Velja tudi, da je lastne frekvenca $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ odvisna od togosti k. za dušenje nizkih frekvenc bi potrebovali zelo majhno togost k, ki jo pri MM uresničimo z nelinearnostjo.

V sledečem poglavju 2.3.2 apliciramo teorijo 1D DVB na prej dimenzionirani ROC in tvorimo metamaterialno verigo z lastnostjo PZF.

2.3.2 Dinamika neskončne periodične verige

Enodimenzionalni kvazi-ničelni togostni metamaterial (1D KNT MM) lahko predstavimo kot model verige j-tih mas-togosti-dušilcev, ki je prikazan na sliki 2.12. V MM verigi, se v okvirju mase M nahaja resonator mase m. Vsak okvir ima prostostno stopnjo U_j in vsak resonator V_j. Resonatorji so v okvirje vpeti preko vzmeti z nelinearno karakteristično togostjo $k = k_{\text{ROC}}$, ki v ROC povzroča silo F_{ROC} in ima koeficient dušenja c. Posamezne osnovne celice so med seboj povezane v verigo preko vzmeti, ki jo tvorita dva elementa pozitivne togosti $K = 2k_p$ ([5], [9]).



Slika 2.12: enodimenzionalna metamaterialna veriga.

Ko je število ROC neskončno, ali zadosti veliko, se tvori periodičnost verige, kjer ima vsaka celica periodične robne pogoje. Z j-to ROC lahko zapišemo gibalne enačbe:

$$M\ddot{U}_j + 2KU_j - KU_{j-1} - KU_{j+1} + c\left(\dot{U}_j - \dot{V}_j\right) + F_{\text{ROC}}(U_j - V_j) = 0 \tag{2.81}$$

$$m\ddot{V}_j + c\left(\dot{V}_j - \dot{U}_j\right) + F_{\text{ROC}}\left(V_j - U_j\right) = 0\,. \tag{2.82}$$

Za analizo pretvorimo enačbi v brezdimenzijsko obliko z vpeljavo:

$$\begin{gathered}\tau = \omega_0 t, \quad u_j = \frac{U_j}{L_0}, \quad v_j = \frac{V_j}{L_0}, \quad q_j = v_j - u_j, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{k\,m}} \\ \alpha = \frac{k}{K}, \quad \beta = \frac{m}{M}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}, \quad \kappa_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{\kappa_0}{\omega_0}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,.\end{gathered} \tag{2.83}$$

Razen τ, ki predstavlja brezdimenzijski čas, smo spremenljivke že definirali v poglavju 2.3.1. Vpeljemo tudi brezdimenzijsko silo $f_{\text{ROC}} = F_{\text{ROC}}/(k_v L_0)$ iz dela 2.2.3. Nadaljnji časovni odvodi diferencialnih enačb (2.81) in (2.82) so tako po brezdimenzijskem času:

$$u_j'' + 2u_j - u_{j-1} - u_{j+1} - 2\zeta\beta\varkappa q_j' - \alpha f_{\text{ROC}}(q_j) = 0\,, \tag{2.84}$$

$$q_j'' + 2\zeta\varkappa q_j' + \varkappa^2 f_{\text{ROC}}(q_j) + u_j'' = 0\,. \tag{2.85}$$

Za nadaljnjo analizo brezdimenzijsko silo $f_{\text{ROC}}(q_j)$ v enačbi (2.62) v okolici ravnovesne lege $q_j = 0$ s pomočjo Taylorjeve aproksimacije razvijemo v:

$$f_{\text{ROC}}(q_j) = \frac{1}{2}\left(2 + \mu - \frac{\mu}{\gamma}\right) q_j + \frac{\mu}{4\gamma^3} q_j^3 - \frac{3\mu}{16\gamma^5} q_j^5 + \frac{5\mu}{32\gamma^7} q_j^7 + \ldots \tag{2.86}$$

Z upoštevanjem ponovne izpeljave enačb (2.65), (2.66) za konstantno togost (namesto posplošenega pogoja KNT) $k_{\mathrm{ROC}}(0) = \upsilon$ ter aproksimacije petega reda dobimo:

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{ROC}}(q_j) &\approx \upsilon q_j + \frac{1-\upsilon}{2\gamma^2(1-\gamma)} q_j^3 - \frac{3(1-\upsilon)}{8\gamma^4(1-\gamma)} q_j^5 \,, \\
f_{\mathrm{ROC}}(q_j) &\approx \upsilon q_j + \delta q_j^3 + \eta q_j^5 \,.
\end{aligned} \tag{2.87}
$$

Analitična rešitev nelinearnega sistema enačb (2.84) in (2.85) ni znana. Aproksimativno rešitev je mogoče dobiti z uporabo metode harmonskega ravnotežja [10], [11]. Predpostavimo periodični odziv pomika $q_j(\tau)$ v obliki kompleksne Fouriereve vrste:

$$
q_{k,j}(\tau) = \sum_k \epsilon^{(k-1)/2} A_{k,j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Omega\tau} + \epsilon^{(k-1)/2} \overline{A}_{k,j} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\Omega\tau}, \quad k \; = 1, 3, 5, \ldots \,, \tag{2.88}
$$

kjer je ϵ brezdimenzijski parameter, ki kaže na red amplitude gibanja in $\Omega = \omega/\omega_0$ normirana lastna krožna frekvenca. Višje rede zanemarimo in za $k = 1$ dobimo:

$$
q_j(\tau) = A_j \mathrm{e}^{i\Omega\tau} + \overline{A}_j \mathrm{e}^{-i\Omega\tau} \,. \tag{2.89}
$$

Nastavek vstavimo v enačbo (2.85) in dvojno integriramo glede na τ, kjer dobimo izraz odziva j-te mase, ter pri tem zanemarimo člene višjega reda $\mathcal{O}(A_j \mathrm{e}^{3i\Omega\tau})$:

$$
\begin{aligned}
u_j =& \frac{A_j}{\Omega^2} \left[A_j \overline{A}_j (\upsilon + 3\delta + 10 A_j \overline{A}_j \eta) \varkappa^2 + 2i\zeta\varkappa\Omega - \Omega^2 \right] \mathrm{e}^{i\Omega\tau} + ... \\
&... + \frac{\overline{A}_j}{\Omega^2} \left[A_j \overline{A}_j (\upsilon + 3\delta + 10 A_j \overline{A}_j \eta) \varkappa^2 + 2i\zeta\varkappa\Omega - \Omega^2 \right] \mathrm{e}^{-i\Omega\tau} + \mathcal{O}(A_j \mathrm{e}^{3i\Omega\tau}) \,.
\end{aligned} \tag{2.90}
$$

Nastavek (2.89) in zgornjo enačbo (2.90) vstavimo v (2.84) in nastavimo koeficiente pred $\mathrm{e}^{\pm i\Omega\tau}$ na nič. Dobimo amplitudno-frekvenčni enačbi:

$$
\begin{aligned}
A_{j-1} + A_{j+1} - & A_j \left(2 + (\upsilon + A_j \overline{A}_j (3\delta + 10 A_j \overline{A}_j \eta)) \left(\alpha + \varkappa^2\right)\right) - ... \\
&... + \frac{\varkappa^2}{\Omega^2} \left(3 A_{j-1}^2 \overline{A}_{j-1} \delta - 6 A_j^2 \overline{A}_j \delta + 10 A_{j-1}^3 \overline{A}_{j-1}^2 \eta\right) - ... \\
&... - \frac{\varkappa^2}{\Omega^2} \left(20 A_j^3 \overline{A}_j^2 \eta + A_{j-1} \upsilon - 2 A_j \upsilon\right) + ... \\
&... + \frac{\varkappa^2}{\Omega^2} \left(A_{j+1} (A_{j+1} \overline{A}_{j+1} (3\delta + 10 A_{j+1} \overline{A}_{j+1} \eta) + \upsilon)\right) - ... \\
&... - \frac{2i(A_{j-1} - 2A_j + A_{j+1})\zeta\varkappa}{\Omega} - 2i A_j (1+\beta)\zeta\varkappa\Omega + A_j \Omega^2 = 0 \,,
\end{aligned} \tag{2.91}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{A}_{j-1} + \overline{A}_{j+1} - & \overline{A}_j \left(2 + (\upsilon + A_j \overline{A}_j (3\delta + 10 A_j \overline{A}_j \eta)) \left(\alpha + \varkappa^2\right)\right) - ... \\
&... + \frac{\varkappa^2}{\Omega^2} \left(3 A_{j-1} \overline{A}_{j-1}^2 \delta - 6 A_j \overline{A}_j^2 \delta + 10 A_{j-1}^2 \overline{A}_{j-1}^3 \eta\right) - ... \\
&... - \frac{\varkappa^2}{\Omega^2} \left(20 A_j^2 \overline{A}_j^3 \eta + A_{j+1} \overline{A}_{j+1}^2 (3\delta + 10 A_{j+1} \overline{A}_{j+1} \eta)\right) + ... \\
&... + \frac{\varkappa^2}{\Omega^2} \left((\overline{A}_{j-1} - 2\overline{A}_j + \overline{A}_{j+1})\upsilon\right) - ... \\
&... - \frac{2i(A_{j-1} - 2A_j + A_{j+1})\zeta\varkappa}{\Omega} - 2i A_j (1+\beta)\zeta\varkappa\Omega + A_j \Omega^2 = 0 \,.
\end{aligned} \tag{2.92}
$$

V zgornje enačbe lahko vstavimo specifične vrednosti amplitud mase j kot tudi sosednjih mas $j+1$ in $j-1$, dobimo sistem enačb za amplitudo odziva pritrjenega oscilatorja. Sistem je nelinearen in ima posledično lahko več rešitev. Amplitudo vala, ki potuje po MM verigi dobimo tako, da vstavimo amplitudo pritrjenega oscilatorja v enačbo (2.90). Val, ki potuje po MM verigi preko pomikov u_j lahko določimo tudi tako, da definiramo faktor širjenja valovanja μ_u, ki predstavlja valovno število k_u pomnoženo z razdaljo med masami ROC-jev L_u. Pomika sosednjih mas, lahko definiramo kot:

$$u_{j\pm1} = B_j \mathrm{e}^{\pm i\mu_u} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega\tau} + \overline{B_j} \mathrm{e}^{\pm i\mu_u} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega\tau}\,, \tag{2.93}$$

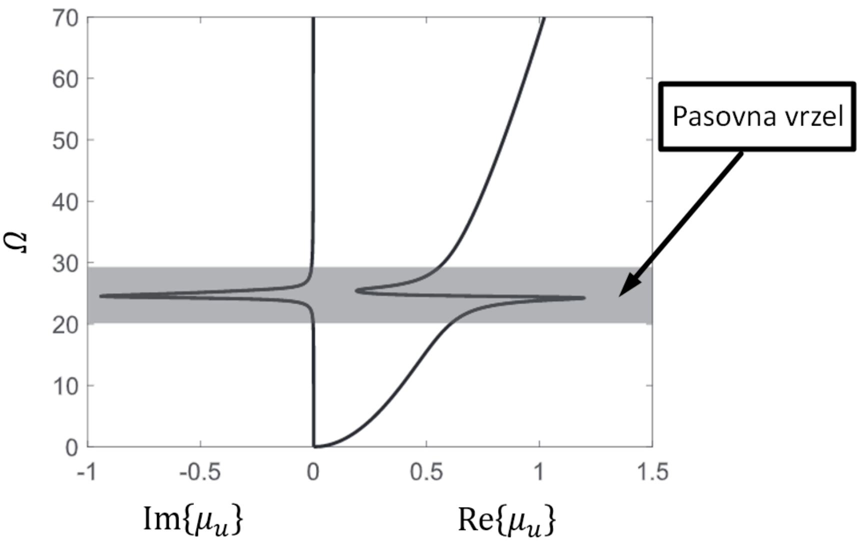
pri čemer so B_j in $\overline{B}_j$ koeficienti pred $\mathrm{e}^{\pm i\Omega\tau}$ enačbe (2.90). Zgornjo enačbo, kot tudi enačbo (2.89) vstavimo v enačbo (2.84), enačimo koeficiente pred $\mathrm{e}^{\pm i\Omega\tau}$ z nič in rešimo za μ_u, ter tako dobimo enačbo disperzijskih krivulj:

$$\cos\mu_u = 1 - \frac{\Omega}{2} - \frac{\Omega^2}{2}\left[\frac{\alpha((3\delta A_j\overline{A}_j + 10\eta A_j^2\overline{A}_j^2) + \upsilon) + 2i\beta\zeta\varkappa\Omega}{\varkappa^2((3\delta A_j\overline{A}_j + 10\eta A_j^2\overline{A}_j^2) + \upsilon) - \Omega^2 + 2i\zeta\varkappa\Omega}\right]. \tag{2.94}$$

Disperzijske krivulje so grafično prikazane na sliki (2.13), kjer so prikazane realne in imaginarne komponente rešitve. Končno lahko zapišemo razmerje med M_j-to in M_{j+1}-to maso kot:

$$u_{j+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{Im}\{\mu\}} u_j\, \mathrm{e}^{-i\,\mathrm{Re}\{\mu\}}\,. \tag{2.95}$$

Do dušenja mehanskih valov v verigi pride v tako imenovani pasovni vrzeli, kjer je $\mathrm{e}^{\mathrm{Im}\{\mu\}}$ manj kot 1. Valovi pri drugih frekvencah izven pasovne vrzeli, potujejo brez izgube energije. Dodatno velja, da je fazni zamik $\mathrm{Re}\{\mu\}$ potujočega vala odvisen od μ. Znotraj pasovne vrzeli, je dušenje največje pri minimumu $\mathrm{e}^{\mathrm{Im}\{\mu\}}$, torej pri $\Omega = \varkappa$. Z drugimi besedami, je frekvenca vzbujanja enaka lastni frekvenci resonatorjev $\Omega = \kappa_0$.



Slika 2.13: enodimenzionalna metamaterialna veriga.

2.4 Metoda končnih elementov

Ker ima realni metamaterial v resnici končno število reprezentativnih celic in ker so te za analitično reševanje preveč kompleksne, bomo njegovo dinamiko rešili z uporabo metode končnih elementov (MKE). V poglavju 3.1 uporabimo MKE v povezavi z eksperimentalnimi meritvami tudi za določitev modula elastičnosti E osnovnega materiala.

MKE je iskanje rešitev kompleksnega realnega problema z uporabo poenostavljenega modela, ki sestoji iz številnih delov, imenovanih končni elementi (KE). Torej zvezno območje diskretiziramo v podobmočja, zato je MKE po naravi aproksimativna metoda in je uporabna takrat, kadar analitična rešitev ni mogoča. Metoda je tudi numerična, saj se končna oblika algebrajskih enačb izrazi v sistemskih matrikah, kar zelo efektivno omogoča računalniško reševanje sistemov velikega števila KE.

Neodvisno od geometrije in celo od vrste fizikalnega problema, ki ga želimo rešiti z MKE, so osnovni koraki formulacije vedno enaki. Preko njih bomo na osnovi pregleda literature [12] izpeljali enačbe MKE in reševali dinamsko analizo lastnih nihanj DVA-ja.

Korak 1: Razdelitev fizikalnega modela v diskretne elemente (diskretizacija).

Na tem mestu izberemo tip, število in velikost KE. Problem bomo reševali z splošnimi volumskimi heksaedričnimi KE.

Korak 2: Izbira aproksimacijskega modela.

Izberemo obliko poljubne aproksimacijske funkcije, ki določa aproksimacijo primarne spremenljivke. Najpogosteje gre za polinomske funkcije.

Korak 3: Izpeljava matrik končnega elementa.

Za KE v svojem lokalnem koordinatnem sistemu (KS) diferencialno enačbo fizikalnega problema zapišemo kot integralsko variacijsko formulacijo. Uporabimo prej izbrano interpolacijsko funkcijo in dobimo značilne matrike sistema v lokalnem KS. Sledi transformacija koordinat v globalne matrike.

Korak 4: Sestavljanje matrik posameznega končnega elementa v sistemske matrike.

Matrike posameznih elementov razširimo na vse prostostne stopnje in jih seštejemo.

Korak 5: Upoštevanje začetnih pogojev ter robnih in prehodnih pogojev.

Korak 6: Reševanje sistema enačb.

Definirajmo sedaj gibalne enačbe končnega elementa za reševanje problema lastnih nihanj in jih kasneje aplicirajmo na oba uporabljena tipa končnih elementov.

2.4.1 Gibalne enačbe končnega elementa

Pomike po območju končnega elementa $\vec{U}$, aproksimiramo preko diskretnih vrednosti pomikov vozlišč $\vec{Q}^e$ in matrike oblikovnih oziroma aproksimacijskih funkcij $[N]$:

$$\vec{U}(x,y,z,t) = \begin{Bmatrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{Bmatrix} = [N(x,y,z)]\vec{Q}^e(t)\,. \tag{2.96}$$

Za KE lahko izrazimo specifične deformacije $\vec{\epsilon}$ in napetosti $\vec{\sigma}$:

$$\vec{\varepsilon} = [B]\vec{Q}^e\,, \tag{2.97}$$

$$\vec{\sigma} = [D]\vec{\varepsilon} = [D][B]\vec{Q}^e, \tag{2.98}$$

kjer je $[B]$ matrika odvodov oblikovnih funkcij in $[D]$ materialna matrika, v kateri se nahaja modul elastičnosti. Z odvajanjem enačbe (2.96) po času definiramo polje pomikov, kjer je $\dot{\vec{Q}}^e$ diskretna vrednost vozliščnih hitrosti:

$$\dot{\vec{U}}(x,y,z,t) = [N(x,y,z)]\dot{\vec{Q}}^e(t)\,. \tag{2.99}$$

Gibalne enačbe izpeljemo preko Lagrangeve formulacije:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\right\} - \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q}\right\} + \left\{\frac{\partial E_d}{\partial \dot{Q}}\right\} = \{0\}\,, \tag{2.100}$$

kjer je Lagrangian $\mathcal{L}$ definiran z razliko kinetične E_k in potencialne E_p energije. Za vsak element lahko kinetično, potencialno in disipacijsko energijo zapišemo kot E_d:

$$E_k^e = \frac{1}{2}\iiint_{V^e} \rho \dot{\vec{U}}^{\mathrm{T}} \dot{\vec{U}}\ \mathrm{d}V\,, \tag{2.101}$$

$$E_p^e = \frac{1}{2}\iiint_{V^e} \vec{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\vec{\sigma}\mathrm{d}V - \iint_{S^e} \vec{U}^{\mathrm{T}}\vec{\vec{\Phi}}\mathrm{d}S - \iiint_{V^e} \vec{U}^{\mathrm{T}}\vec{\vec{\phi}}\mathrm{d}V\,, \tag{2.102}$$

$$E_d^e = \frac{1}{2}\iiint_{V^e} c\dot{\vec{U}}^{\mathrm{T}}\dot{\vec{U}}\ \mathrm{d}V\,. \tag{2.103}$$

Pri tem je ρ gostota in c koeficient dušenja. $\vec{\vec{\Phi}}$ je vektor sil na zunanjih površinah in $\vec{\vec{\phi}}$ vektor sil kot posledica volumskih obremenitev elementa. Seštejemo energije po posameznih elementih:

$$E_k = \sum_{e=1}^{E} E_k^e = \frac{1}{2}\dot{\vec{Q}}^{\mathrm{T}}\left[\sum_{e=1}^{E}\iiint_{V^e}\rho[N]^{\mathrm{T}}[N]\mathrm{d}V\right]\dot{\vec{Q}}\,, \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned} E_p = \sum_{e=1}^{E} E_p^e = \frac{1}{2}\vec{Q}^{\mathrm{T}}&\left[\sum_{e=1}^{E}\iiint_{V^e}[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V\right]\vec{Q} \\ &- \vec{Q}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{e=1}^{E}\iint_{S^e}[N]^{\mathrm{T}}\vec{\Phi}(t)\mathrm{d}S^e + \iiint_{V^e}[N]^{\mathrm{T}}\vec{\vec{\phi}}(t)\mathrm{d}V\right) - \vec{Q}^{\mathrm{T}}\vec{F_c}(t)\,, \end{aligned} \tag{2.105}$$

$$E_d = \sum_{e=1}^{E} E_d^e = \frac{1}{2}\dot{\vec{Q}}^{\mathrm{T}}\left[\sum_{e=1}^{E}\iiint_{V^{(e)}}c[N]^{\mathrm{T}}[N]\mathrm{d}V\right]\dot{\vec{Q}}\,. \tag{2.106}$$

Pri tem so $\vec{Q}$ globalni vektor vozliščnih pomikov, $\dot{\vec{Q}}$ hitrosti in $\vec{F}_c$ vektor koncentriranih vozliščnih sil. Iz zgornjih izrazov lahko razberemo masno $[M^e]$, togostno $[K^e]$ in disipacijsko $[C^e]$ matriko posameznega elementa in vektor ekvivalentnih vozliščnih sil zaradi površinskih učinkov $\vec{F}^e_S$ ter zaradi volumskih učinkov $\vec{F}^e_V$:

$$[M^e] = \iiint_{V^e} \rho[N]^{\mathrm{T}}[N]\mathrm{d}V\,, \tag{2.107}$$

$$[K^e] = \iiint_{V^e} [B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}V\,, \tag{2.108}$$

$$[C^e] = \iiint_{V^e} c[N]^{\mathrm{T}}[N]\mathrm{d}V\,, \tag{2.109}$$

$$\vec{F}^e_S = \iint_{S^e} [N]^{\mathrm{T}}\vec{\overline{\Phi}} \cdot \mathrm{d}S\,, \tag{2.110}$$

$$\vec{F}^e_V = \iint_{V^e} [N]^{\mathrm{T}}\vec{\overline{\phi}} \cdot \mathrm{d}V\,. \tag{2.111}$$

Če lokalne matrike razširimo na vse prostostne stopnje in jih seštejemo dobimo masno $[M]$, togostno $[K]$ in disipacijsko $[C]$ matriko celotnega sistema. Seštevek vseh ekvivalentnih vozliščnih vrednosti sil po vseh elementih F^e_S in F^e_V in dodatni prispevek vseh koncentriranih vozliščnih vrednosti nam vrne globalni vektor vozliščnih sil $\vec{F}(t)$. Definicijo masne, togostne in disipacijske matrike upoštevamo pri energijskih izrazih, ki jih vstavimo v enačbo (2.100) in dobimo globalni sistem gibalnih enačb pridobljen z metodo končnih elementov, pri čemer je $\ddot{\vec{Q}}$ vektor globalnih vozliščnih pospeškov:

$$[M]\ddot{\vec{Q}}(t) + [C]\dot{\vec{Q}}(t) + [K]\vec{Q}(t) = \vec{F}(t)\,. \tag{2.112}$$

V nadaljnji obravnavi lahko zanemarimo dušenje:

$$[M]\ddot{\vec{Q}}(t) + [K]\vec{Q}(t) = \vec{F}(t)\,. \tag{2.113}$$

2.4.2 Statična analiza pri velikih pomikih

Če želimo ovrednotiti nelinearne učinke KNT vzmeti poglavja 2.2 z uporabo MKE, moramo razumeti, da obstajajo tri vrste nelinearnosti, ki jih moramo upoštevati. Materialne nelinearnosti so potrebne za napovedovanje plastičnih deformacij. Kontaktne nelinearnosti so potrebne za napovedovanje spremembe stanja in drsnega trenja med sestavnimi deli. Tretja možnost, geometrijska nelinearnost, vključuje spremembe geometrije, ki vodijo v povečanje togosti. Povzeto po [13].

V enačbi (2.97) smo specifične deformacije definirali kot linearne funkcije diskretnih vrednosti pomikov vozlišč $\vec{Q}^e$. Pri velikih pomikih ne moramo predpostaviti linearne odvisnosti deformacije. Postopamo tako, da je togost $[K]$ enačbe (2.113) funkcija pomika, zanemarimo pa tudi $[M]$:

$$[K(\vec{Q})]\,\vec{Q} = \vec{F}\,. \tag{2.114}$$

Ker je numerično reševanje nelinearnega problema kompleksno, postopamo tako, da rešujemo iterativno in ob vsakem časovnem koraku primerjamo linearno togost $[K]$ pridobljeno iz statičnega ravnovesja sil enačbe (2.113) in posodobimo geometrijo.

2.4.3 Analiza lastnih nihanj

Poljubnemu sistemu lahko v začetku opazovanja dodelimo neke začetne pogoje, nato pa mu prepustimo, da prosto niha. Po vnosu začetnih pogojev struktura ni pod vplivom nobene zunanje sile in pravimo, da je sistem v stanju proste vibracije [14]. Matematični izhodišče pri iskanju lastnih frekvenc (lastnih vrednosti) in pripadajočih lastnih oblik predstavlja enačba (2.113), pri čemer je $\overrightarrow{F}=0$:

$$[M]\ddot{\overrightarrow{Q}}+[K]\overrightarrow{Q}=\overrightarrow{0}\,. \tag{2.115}$$

Gre za sistem n homogenih gibalnih enačb, kjer je n število prostostnih stopenj. Za nedušene in harmonične proste vibracije iščemo rešitev kot n harmonskih funkcij zapisanih v vektorski notaciji kot:

$$\overrightarrow{Q}=\overline{\overrightarrow{Q}}\,e^{i\omega t}\,, \tag{2.116}$$

kjer so iskane neznane vrednosti amplitude $\overline{\overrightarrow{Q}}$ in lastne frekvence ω. Sistem ima n lastnih frekvenc ter enako število lastnih oblik. Nastavek (2.116) uporabimo v enačbi (2.115):

$$\begin{aligned}-\omega^2[M]\ddot{\overline{\overrightarrow{Q}}}\,e^{i\omega t}+[K]\overline{\overrightarrow{Q}}\,e^{i\omega t}&=\overrightarrow{0}\ \ /\ \text{predp.}\ \ e^{i\omega t}\neq 0\,,\\ \big([K]-\omega^2[M]\big)\,\overline{\overrightarrow{Q}}&=\overrightarrow{0}\ \ /\ \text{pomnožimo z}\ [M^{-1}]\,,\\ (\,[A\,]-\lambda\,[\,I\,]\,)\,\overline{\overrightarrow{Q}}&=\overrightarrow{0}\,,\end{aligned} \tag{2.117}$$

kjer je matrika $[A\,]=[K][M^{-1}]$ imenovana dinamska matrika sistema. $\lambda=\omega^2$ je parameter, ki vodi do lastnih vrednosti sistema. Netrivialna rešitev zahteva vsaj eno neničelno amplitudo v vektorju $\overline{\overrightarrow{Q}}$, torej iščemo neničelnost determinante ali karakteristično enačbo sistema:

$$\det(\,[A\,]-\lambda\,[\,I\,]\,)=0\,, \tag{2.118}$$

Razvoj determinante pripelje do polinoma n-te stopnje:

$$\lambda^n+X_1\lambda^{n-1}+...+X_n=0\ \ , \tag{2.119}$$

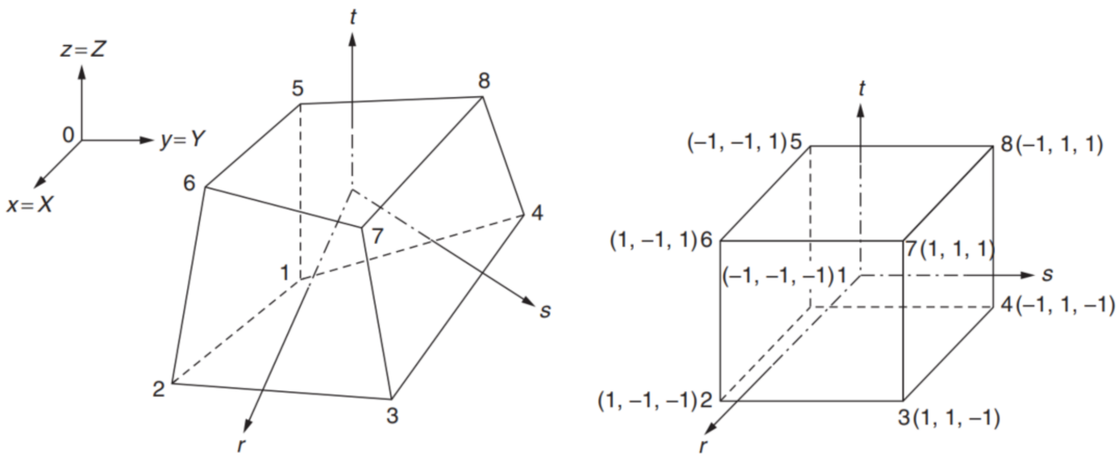
iz katerega izrazimo n lastnih vrednosti sistema. Lastne vrednosti uredimo po velikosti λ_i, $i=1,...,n$, tako da najmanjše število pomeni prva lastna vrednost in hkrati prva lastna frekvenca f_0:

$$f_{0,i}=\frac{\omega_i}{2\pi}=\frac{\sqrt{\lambda_i}}{2\pi}\ ;\ i=1,\dots,n\,. \tag{2.120}$$

Z vstavljanjem izračunanih lastnih vrednosti λ_i v enačbo (2.117) izračunamo pripadajoče lastne vektorje $\overline{Q}_i$. Lastni vektorji ne predstavljajo dejanske amplitude, temveč medsebojno relativne vrednosti. Če te relativne vrednosti normiramo in formuliramo v vektor $\overline{\overrightarrow{Q}}$, ta predstavlja modalno obliko pripadajoče lastne frekvence. V sistemu z velikim številom matrik (v resnici že pri 3×3 matriki) postane postopek iskanja lastnih vrednosti analitično težko rešljiv. Lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje iščemo numerično. Numerične metoda hkrati vrnejo sezname lastnih vrednosti λ ter seznam desnih normiranih lastnih vektorjev $\overline{\overrightarrow{Q}}$.

2.4.4 Masna in togostna matrika končnih elementov

V izpeljavi dinamičnih enačb po metodi končnih elementov vidimo, da potrebujemo določiti masno in togostno matriko končnega elementa. Natančno geometrijo metamateriala popišemo z heksaedričnimi volumskimi KE. Te tvori osem vozlišč i = 1-8, katerega vsako ima tri prostostne stopnje u_i, v_i, w_i. Izpeljavo izvedemo za izoparametrični KE, tako da je element v naravnem koordinatnem sistemu (KS) r, s, t vedno kocka (slika 2.14). Preko Jakobijeve matrike $[J]$ lahko izpeljavo v naravnem transformiramo v kartezijev KS. Velja, da lahko zaradi fizike ponekod problem obravnavamo poenostavljeno. Takrat lahko matrike poenostavimo na dvodimenzionalne.



Slika 2.14: Heksaedrični KE v kartezijevem (levo) in naravnem (desno) KS [12].

Enačbi za masno matriko pridobljeno z (2.107) in togostno matriko z (2.108) se v primeru izoparametričnega heksaerdičnega KE glasita:

$$[M^e] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \rho\,([J]^{-1}[N])^{\mathrm{T}}([J]^{-1}[N])\;\det[J]\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,, \tag{2.121}$$

$$[K^e] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} ([J]^{-1}[B])^{\mathrm{T}}[D]([J]^{-1}[B])\;\det[J]\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,, \tag{2.122}$$

kjer je matrika oblikovnih funkcij v naravnem KS:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & \dots & N_8 \end{bmatrix}, \tag{2.123}$$

$$N_i(r,s,t) = \frac{1}{8}\,(1+m_i)\,(1+ss_i)\,(1+tt_i)\,; \quad i = 1,2,\dots,8 \tag{2.124}$$

in matrika odvodov oblikovnih funkcij, ki je dimenzije 6 x 24:

$$[B] = [[B_1]\,[B_2]\dots[B_8]]\;. \tag{2.125}$$

Jakbijeva matrika je definirana kot:

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8}\left(\frac{\partial N_i}{\partial r}x_i\right) & \sum_{i=1}^{8}\left(\frac{\partial N_i}{\partial r}y_i\right) & \sum_{i=1}^{8}\left(\frac{\partial N_i}{\partial r}z_i\right) \\ \sum_{i=1}^{8}\left(\frac{\partial N_i}{\partial s}x_i\right) & \sum_{i=1}^{8}\left(\frac{\partial N_i}{\partial s}y_i\right) & \sum_{i=1}^{8}\left(\frac{\partial N_i}{\partial s}z_i\right) \\ \sum_{i=1}^{8}\left(\frac{\partial N_i}{\partial t}x_i\right) & \sum_{i=1}^{8}\left(\frac{\partial N_i}{\partial t}y_i\right) & \sum_{i=1}^{8}\left(\frac{\partial N_i}{\partial t}z_i\right) \end{bmatrix}. \tag{2.126}$$

2.5 Termoaktivne lastnosti GPLA

Polilaktična kislina ali PLA (*Polylactic acid*) je termoplastični poliester in je eden najbolj pogosto uporabljenih filamentov FFF (*fused filament fabrication*) 3D tiskalnikov. Prednost te bioplastike je relativno dobra reciklabilnost [15].

Bistvena lastnost polimernega mat je steklasti prehod iz trdnega v tekoče pri temperaturi steklenja T_g. Pri sobni temperaturi je PLA trd in krhek, z višanjem temperature preide v steklasto stanje (od $0{,}8\,T_g$ do T_g) in nato v gumielastično področje (od T_g do $1{,}4\,T_g$), kjer se material z višanjem temperature mehča a plastično ne deformira. Pri ponovnem ohlajevanju se material povrne v prvotno stanje. Pri segrevanju nad $1{,}4\,T_g$ material preide v plastično in nato talilno področje [16].

Mehčanje materiala z višanjem temperature se izraža kot padanje modula elastičnosti E oziroma togosti materiala, ki je temeljna karakteristika pri obravnavi dinamskih sistemov. Naš cilj je ugotoviti povezavo med modulom elastičnosti in temperaturo in preko nje krmiliti togost metamateriala. To dosežemo v poglavju 3.1.

Sprva torej potrebujemo mehanizem preko katerega bomo material lahko segrevali. Osnovnemu PLA-ju lahko z različnimi aditivi spremenimo lastnosti. V naši aplikaciji je bistvenega pomena dodatek grafitnega prahu, ki tvori GPLA (*Graphite Polylactic acid*). Električna prevodnost grafita znatno zniža specifično upornost ϱ GPLA-ja.

2.5.1 Termoelektrični pojav

Relativno nizka specifična upornost GPLA materiala pomeni, da lahko z nizkimi napetostmi dosežemo visoke tokove. Upoštevamo Ohmov zakon:

$$I = \frac{U}{R} \tag{2.127}$$

pri čemer je upornost R GPLA-ja:

$$R = \varrho\, l/A\,. \tag{2.128}$$

Zamislimo si tok skozi absorber s prečnim presekom površine A in dolžino l. Tako lahko električni tok I pri določeni napetosti U skozi GPLA zapišemo kot:

$$I = \frac{U\,A}{\varrho\, l}\,. \tag{2.129}$$

Tako imenovana Joulova moč je proporcionalna uporu in kvadratu toka:

$$P \propto I^2 R. \tag{2.130}$$

Na podlagi znanega vira toplote, lahko zapišemo zakon prenosa toplote. Polimeri imajo relativno nizek koeficient toplotne prevodnosti in dodatno je kontakt v podpori majhen. Tako zanemarimo vpliv toplotne prevodnosti skozi GPLA vzorec. Zaradi relativno nizkih temperatur zanemarimo tudi izgubo energije zaradi sevanja. Edini mehanizem izgube toplote je tako konvekcija.

Zapišemo energijski zakon [17]:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{st} &= P_{in} - \dot{Q}_{out}\,, \\ m\,c_p \frac{dT(t)}{dt} &= I^2 R - h_s\,A_s\,(T(t) - T_\infty)\ , \\ (\rho A l)\,c_p \frac{dT(t)}{dt} &= \frac{A}{\varrho\, l} U^2 - h_s\,A_s\,(T(t) - T_\infty)\ , \end{aligned} \tag{2.131}$$

kjer je $T = T(t)$ temperatura ob času t, c_p specifična toplota materiala in A_s celotna površina v kontaktu z okoliškim zrakom s koeficientom toplotne prestopnosti h, kjer je temperatura okolice T_∞. Predpostavimo, da so lastnosti materiala konstante in da ima GPLA ob začetku temperaturo okolice $T(t=0) = T_\infty$.

Rešimo zgornjo diferencialno enačbo (2.131):

$$T(t) = T_\infty + \frac{A\,U^2 \left(1 - e^{-\frac{A_s h_s}{A c_p l \rho}\cdot t}\right)}{A_s h l \varrho}\,. \tag{2.132}$$

Pokazali smo, da lahko z električnim tokom GPLA segrejemo. Z zgornjo enačbo analitično aproksimiramo potrebno električno napetost $U = \Delta V$, da v času t dosežemo potrebno temperaturo.

Kasneje v eksperimentalnem delu povežemo temperaturo z modulom elastičnosti, kar pomeni, da lahko preko električne napetosti, ki jo je dokaj enostavno nadzirati, krmilimo togost metamateriala.

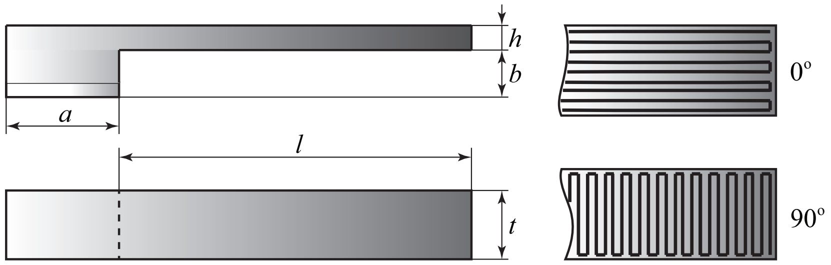
3 Metodologija raziskave

Znotraj tega poglavja, sprva določimo materialne lastnosti GPLA, ki bodo nato uporabljene za zasnovo konkretne reprezentativne osnovne celice (ROC), ki smo jo analitično definirali v poglavju 2.2. Ogledamo si tudi vpliv spremembe $E(T)$ na posamezno celico. Zasnovano ROC numerično analiziramo z MKE modelom znotraj okolja *ANSYS Mechanical*. S potrjeno skladnostjo med analitičnim in MKE modelom, uporabimo 3D tiskanje za izdelavo ROC. To tudi eksperimentalno vrednotimo in ji določimo razmerje med silo in pomikom pri različnih temperaturah $F(X,T)$.

3.1 Meritev materialnih lastnosti GPLA-ja

Preden se lotimo izdelave in analize metamateriala, moramo raziskati materialne lastnosti, ki so potrebne za njegovo dimenzioniranje in krmiljenje temperature z enačbo (2.132). Na podlagi meritev in analize vzorcev določimo gostoto ρ, specifično električno upornost ϱ in modul elastičnosti E GPLA-ja v odvisnosti od temperature. Eksperimente smo opravili v sklopu [18].

Materialne lastnosti FFF (*Fused filament fabrication*) 3D tiskanih struktur so močno odvisne od parametrov izdelave. Vzorce (slika 3.1) smo modelirali v *SolidWorks* CAD programu. Tiskamo z debelino sloja 0,2 mm v smeri vzporedno dolžini (0°) ali v smeri pravokotno na dolžino nosilcev (90°) s 100% polnitvijo. Dimenzije $a = 10$ mm, $b = 5$ mm, $h = 2$ mm in $t = 8$ mm so konstantne, variiramo le dolžino l, ki je prvič 30 mm in drugič 60 mm. S kombinacijo smeri tiska in dolžin analiziramo štiri vzorce. Uporabimo filament proizvajalca *ProtoPlant* na FFF 3D printerju *Ultimaker 3*.



Slika 3.1: Geometrija vzorcev za določanje materialnih lastnosti [18].

Gostota GPLA plastike $\rho = m/V$ je bila določena na podlagi pomerjene mase m in na podlagi dimenzij vzorcev izračunanega volumna V. Za maso je bila uporabljena tehtnica *EMB 200-3* proizvajalca *KERN*.

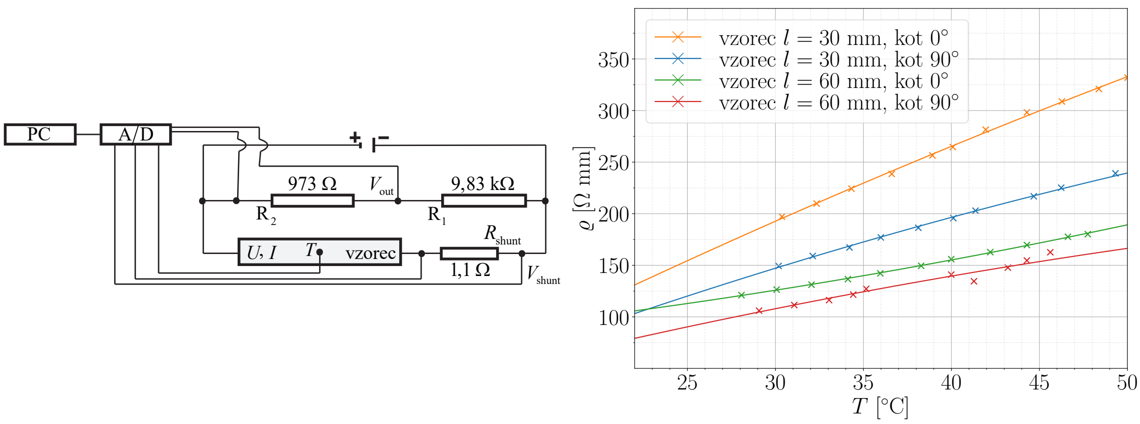
Volumen prvega modela znaša $V_1 = 34708$ mm^3 in masa $m_1 = 39{,}53$ g. Za drugi model je volumen $V_2 = 35586$ mm^3 in masa $m_2 = 36{,}33$ g. Gostota prvega je tako $\rho_1 = 1107$ kg/m^3 in drugega $\rho_2 = 1105$ kg/m^3. Povprečna gostota vseh GPLA vzorcev pri 26 °C je $\rho_{GPLA} = 1106$ kg/m^3.

Vzorce opremimo tako, da omogočimo prevajanje toka in meritev temperature. Na mestu kontakta jih prebarvamo s srebrno prevodno barvo in prelepimo s tanko bakreno žico. Na sredini namestimo termočlen tipa K, ki je sposoben meriti temperaturo od 0 do 100 ^{o}C. Vzorec je del električnega merilnega vezja in deluje kot upor (slika 3.2a). Padec napetosti U merimo preko delilnika napetosti U_{out}. Tok I lahko določimo z uporabo upora znane in dovolj majhne vrednosti, na katerem izmerimo napetost U_{shunt}. Meritev na delilniku in *shuntu* pretvorimo v napetost in tok na vzorcu prek izrazov:

$$U = \frac{U_{out}}{0{,}09007} - U_{shunt}\,, \tag{3.1}$$

$$I = \frac{U_{shunt}}{1{,}1\,\Omega}\,. \tag{3.2}$$

Temperaturo merimo na merilni kartici *NI 9211*, tok in napetost pa na *NI 9215*. Priključeni sta na računalnik, na katerem meritve analiziramo s programom *LabView*. Specifično električno upornost ϱ določimo z Ohmovim zakonom $R = U/I$ in enačbo (2.128) ter jo prikažemo v spodnjem grafu 3.2b. Vidimo, da s temperaturo upornost narašča.



(a) (b)

Slika 3.2: (a) Shema vezja meritve in (b) specifična upornost ϱ GPLA materiala [18].

Določimo modul elastičnosti GPLA-ja ter njegovo odvisnost od temperature. Predstavimo metodo določanja modula elastičnosti materiala prek identifikacije lastne frekvence in geometrije strukture [19], [20], ki jo analiziramo z MKE. Predpostavimo Hookov zakon, oziroma z drugimi besedami linearno teorijo elastičnosti, in frekvenčno neodvisnost materiala. Obravnavano geometrijo strukture rešujemo z analizo lastnih frekvenc po MKE. Izhajamo iz enačbe 2.117, kjer matrike $[A] = [K][M^{-1}]$ vsebujejo modul elastičnosti E, Poissonov količnik ν in gostoto ρ:

$$[K] = E\,[K_0]\,, \tag{3.3}$$

$$[M] = \rho\,[M_0]\,. \tag{3.4}$$

$[K_0]$ predstavlja togostno matriko neodvisno od modula elastičnosti E in $[M_0]$ masno matriko neodvisno od gostote ρ. $[K_0]$ ni povsem odvisna le od geometrije strukture, saj je še vedno odvisna od Poissonovega količnika ν. Vendar če se omejimo na strukture, ki jih lahko obravnavamo kot Euler-Bernoullijev nosilec [21], je ν zanemarljiv in $[K_0]$ materialno neodvisna matrika. Sistem enačb (2.117), kjer je $\lambda = \omega^2$:

$$\begin{aligned}
\big(\,[A] - \omega^2\,[I]\,\big)\,\vec{\vec{Q}} &= \vec{0}\,,\\
\big(\,[K][M^{-1}] - \omega^2\,[I]\,\big)\,\vec{\vec{Q}} &= \vec{0}\,,\\
\big(\,[K] - \omega^2\,[M]\,\big)\,\vec{\vec{Q}} &= \vec{0}\,,\\
\big(\,E\,[K_0] - \omega^2\rho\,[M_0]\big)\,\vec{\vec{Q}} &= \vec{0}\,,\\
\Big(\,[K_0] - \omega^2\frac{\rho}{E}\,[I]\,\Big)\,\vec{\vec{Q}} &= \vec{0}\,,
\end{aligned}$$

preoblikujemo v nov problem lastnih vrednosti z $\lambda = \omega^2\rho/E$:

$$\big(\,[K_0] - \lambda\,[I]\,\big)\,\vec{\vec{Q}} = \vec{0}\,. \tag{3.5}$$

Materialno neodvisni lastni problem uporabimo za izračun i-te lastne vrednosti po MKE, ki jo povežemo z eksperimentalno izmerjeno i-to lastno frekvenco $f_{0,i}$, kot je definirana v enačbi (2.120). Tako je:

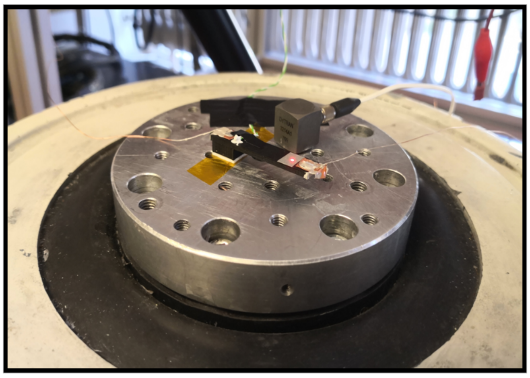
$$\lambda_i = 4\pi^2\frac{\rho}{E}f_{oi}^2\,. \tag{3.6}$$

Za določanje efektivnega modula elastičnosti E v nadaljevanju potrebujemo gostoto ρ, pomerjeno prvo lastno frekvenco $f_{0,1}$ ter po MKE izračunano prvo lastno vrednost λ_1. Na podlagi enačbe (3.6) lahko določimo modul elastičnosti E kot:

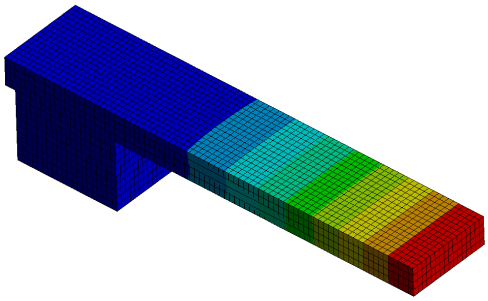
$$E = 4\pi^2\,\frac{\rho\,f_{0,1}^2}{\lambda_1}\,. \tag{3.7}$$

V naslednjem koraku vzorce na mestu izoliranih (belih PLA) površin s sekundnim lepilom pritrdimo na ploščo stresalnika *LDS V555* (slika 3.3b). Nanjo smo namestili referenčni pospeškomer proizvajalca *PCB Piezotronics*, ki je povezan na tretjo merilno kartico *NI 9234*, na kateri je tudi laserski merilnik hitrosti *Polytec PDV 100* (slika 3.3a). Sedaj izvedemo modalno analizo testiranih vzorcev z MKE v programu *ANSYS Mechanical* [22]. Poissonov količnik je privzet iz literature in znaša $\nu = 0{,}39$ [23]. Za vsak vzorec določimo matriki $[K_0]$, $[M_0]$ ter rešimo problem lastnega nihanja po enačbi (3.6) in izračunamo prvo lastno vrednost λ_1 (slika 3.3c).

(a)



(b)



(c)

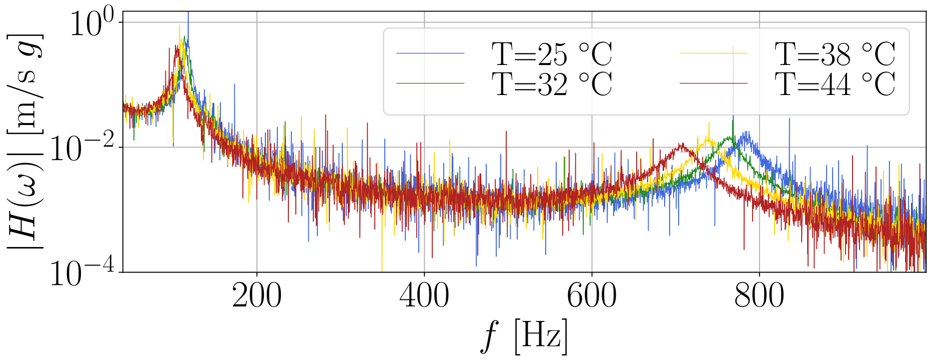
Slika 3.3: Prikaz (a) eksperimenta za meritev modula elastičnosti (b) GPLA vzorca in (c) njegovega MKE modela za analizo lastnih vrednosti.

Vzorce smo vzbujali z belim šumom s konstantno amplitudo pospeška na frekvenčnem razponu od 40 do 1000 Hz. S pomerjenimi signali pospeška in hitrosti smo določili amplitudni del frekvenčne prenosne funkcije FPF vsakega vzorca pri različnih temperaturah in prvo lastno frekvenco $f_{0,1}$ (slika 3.4a).

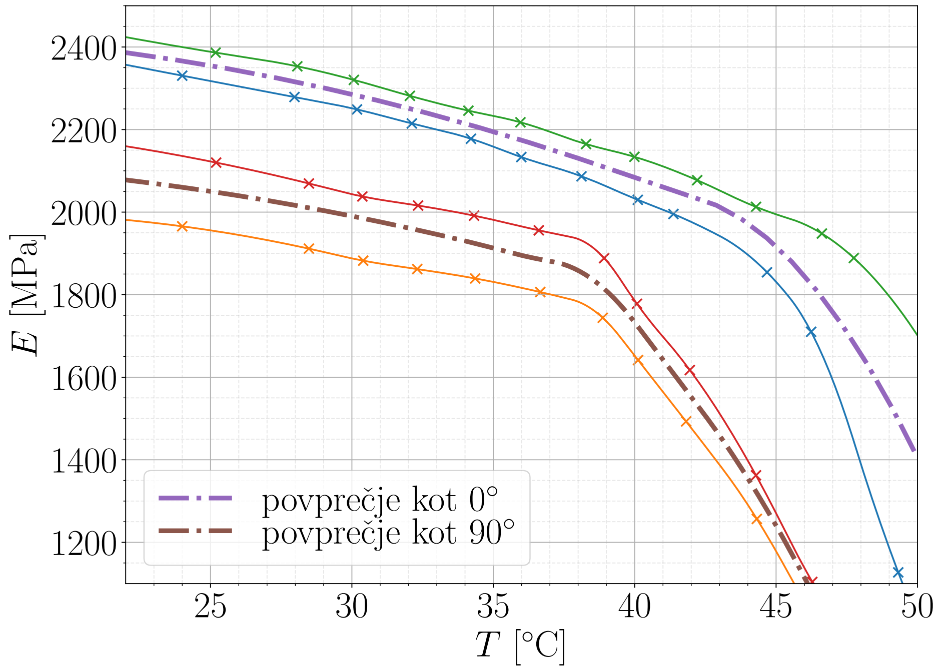
Z uporabo enačbe (3.7) določimo ekvivalentni modul elastičnosti GPLA materiala $E = E(T)$ in ga predstavimo v spodnjem grafu 3.4b ter določimo temperaturo steklenja $T_g = 45$ °C v primeru printanja pri orientaciji 0°. Pri tej temperaturi postane struktura stalno deformirana zaradi pričetka taljenja in se z ohlajanjem ne povrne v prvotno stanje.

Modul elastičnosti $E_{GPLA}(22\ °C) = 2400$ MPa in $E_{GPLA}(42\ °C) = 2000$ MPa pri orientaciji 0° in $E_{GPLA}(22\ °C) = 2100$ MPa in $E_{GPLA}(35\ °C) = 1900$ MPa pri orientaciji 90°. V nadaljevanju bomo metamaterial modelriali z uporabo kota printanja 0°.

Tako smo določili gostoto ρ in modul elastičnosti E, ki sta potrebni za modeliranje ROC ter MM, kar je naslednji korak raziskave.



(a)



(b)

Slika 3.4: (a) Shema vezja meritve, (b) FPF vzorca $l = 60$ in 0°, (c) specifična upornost ϱ in (b) modul elastičnosti E GPLA pri različnih temperaturah [18].

3.2 Zasnova in statična analiza ROC

Z definiranimi pogoji dimenzioniranja v poglavju 2.2 in z znanimi materialnimi lastnostmi modula elastičnosti E in gostote ρ pridobljenimi v poglavju 2.5, lahko zasnujemo in z MKE (poglavje 2.4) ter eksperimentalno ovrednotimo dejanski primer reprezentativne osnovne celice (ROC), ki izkazuje kvazi ničelno togost (KNT). Nato znano ROC vpeljemo v poglavje 2.3 in jo tvorimo v metamaterialno (MM) verigo, ki izkazuje lastnost pasovno zavrnitvenega filtra (PZF). Analitično verigo neskončnih členov aproksimiramo z zaporedjem desetih ROC-jev in dinamični sistem rešimo numerično.

3.2.1 Dimenzioniranje in zasnova ROC

Proces izdelave ROC je iterativen in zajema analitično dimenzioniranje, numerično validiranje in nato še končno prilagajanje oblike glede na rezultate statičnega eksperimenta. V analitičnem dimenzioniranju uporabimo končno enačbo (2.16) pozitivne togosti poglavja 2.2.1 in enačbe (2.52) negativnih togosti ter ob združitvenih pogojih (2.53) za KNT dobimo dimenzijske enačbe, ki omogočajo ustrezno nelinearno togost. Modula elastičnosti pozitivnega dela E_p in negativnega dela E_n ROC sta v osnovi dimenzionirana pri sobni temperaturi. Vrednost lahko razberemo iz grafa 3.4b in je $E(22°\mathrm{C}) = 2400$ MPa, pri čemer upoštevamo, da je ROC tiskan pri kotu 0°. Kasneje s segrevanjem modul elastičnosti manjšamo. Te rezultate vidimo v poglavju 4.1.

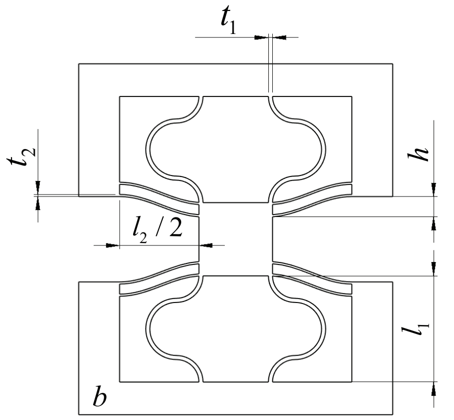
Odločimo se za pravokotni prerez ROC-ja, kar vodi v vztrajnostni moment ploskve:

$$I_1 = \frac{b\,t_1^3}{l_1}, \qquad I_2 = \frac{b\,t_2^3}{l_2}. \tag{3.8}$$

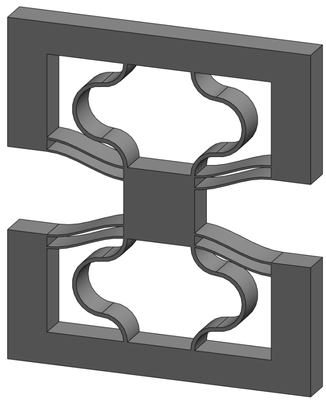
Tekom iteriranja smo ugotovili, da dobimo boljšo vedenje negativnega nosilca, če upoštevamo h neodvisno od Q. Torej namesto $h = Q\,t_2$ je sedaj $h = 10\,t_2$. Razlog zavisi od nelinearnosti materiala, ki je nismo morali upoštevati. Ta sprememba ne vpliva na izpeljavo negativne togosti (2.52) in dobro popravi vedenje končne 3D tiskane ROC. Poleg ustrezne togosti, potrebujemo v ROC integrirati tudi resonančno maso m, ki kasneje zagotovi znano razmerje β med lastno maso in maso celotne celice M. Pomembno je tudi izpostaviti, da smo omejeni na minimalno dimenzijo šobe 3D tiskalnika, kar znaša 0,25 mm. Torej so vse analitične dimenzije faktor tega števila.

Analitično izračunane vrednosti mer ROC (slika 3.5a) najdemo v tabeli 3.1. Kot je vidno v tabeli dimenzij, smo vrednosti za posamezen model morali nekoliko spremeniti. Skozi iteracije, smo zaradi težav z numerično stabilnostjo morali prilagoditi dimenzije CAD modela za MKE simulacije. Pri pripravi CAD modela za 3D tisk, preko programa *PrusaSlicer*-ja (generira G-kodo za 3D tiskalnik), smo morali prilagoditi najmanjšo dimenzijo t_2. Le tako je v programu zaznalo eno samo linijo pri tisku. V tabeli so tudi vidne z kljunastim merilom pomerjene dimenzije končne ROC.

CAD (*Computer Aided Design*) model, ki je viden na sliki 3.5b, smo izdelali v programu *Solidworks* in ga uporabili v Ansys analizi, kot tudi za 3D tiskanje ROC (slika 3.6a). Končen ROC uporabljen v statičnih meritvah je viden na sliki 3.6b. Kot vidimo, so največja odstopanja v debelini posamezne stene pri tisku. To je verjetno tudi eden od razlogov za potrebo povečanja višine h.



(a)

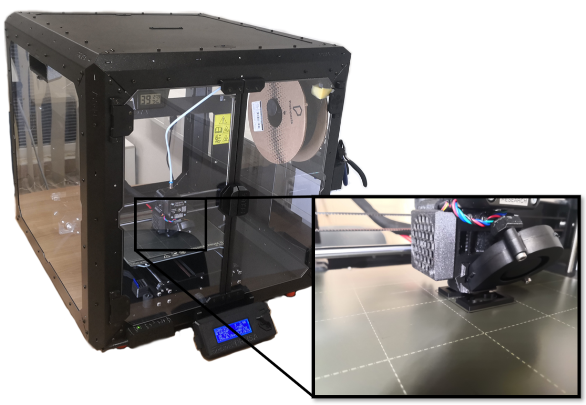


(b)

Slika 3.5: (a) Skica ROC-ja z dimenzijami tabele 3.1 in (b) *Solidworks* CAD model.

Preglednica 3.1: Vrednosti dimenzij pri različnih modelih ROC.

		Analitika	**Solidoworks**	**Ansys FEM**	**3D tiskanje**
E	[MPa]	2400	2400	2400	/
t_1	[mm]	0,50	0,50	0,52	$0{,}48 \pm 0{,}02$
t_2	[mm]	0,25	0,26	0,22	$0{,}30 \pm 0{,}02$
l_1	[mm]	13,00	13,00	13,00	$12{,}99 \pm 0{,}01$
l_2	[mm]	20,34	20,34	20,34	$20{,}33 \pm 0{,}01$
h	[mm]	2,50	2,50	2,50	$2{,}51 \pm 0{,}01$
b	[mm]	4,00	4,00	4,00	$4{,}08 \pm 0{,}03$



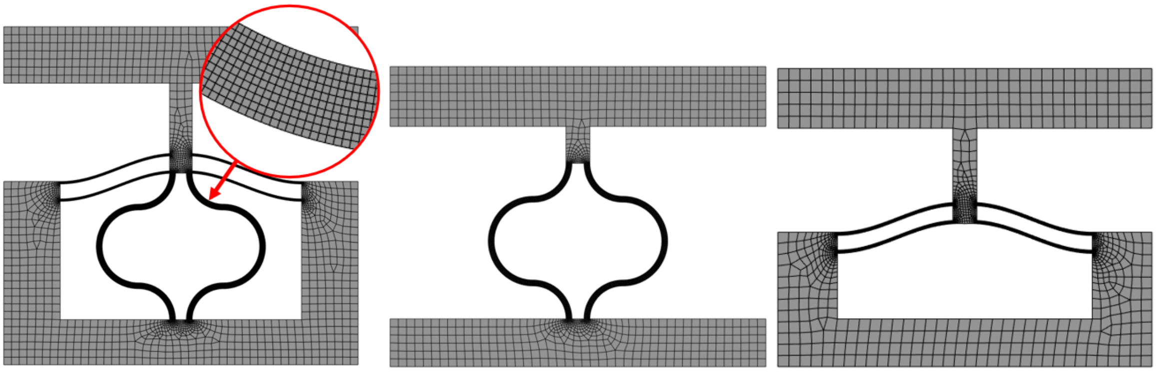
(a)

(b)

Slika 3.6: (a) FDM 3D tiskalnik za izdelavo metamateriala in (b) ROC.

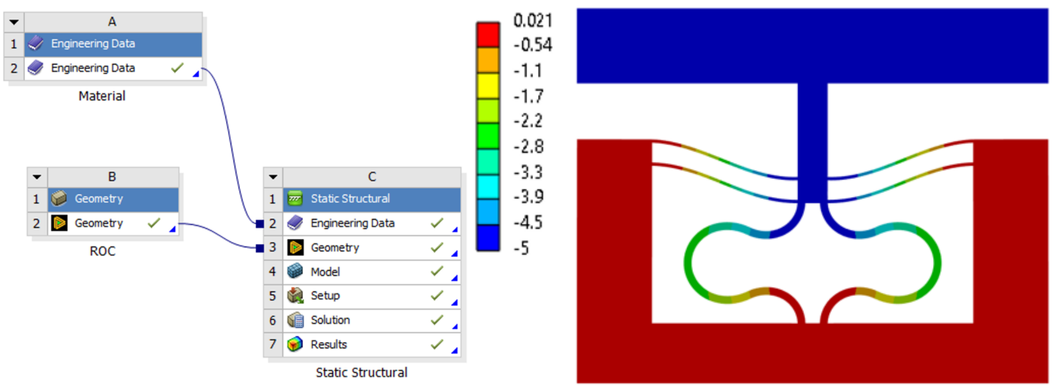
3.2.2 Numerična analiza ROC z MKE

Za MKE analizo smo uporabili ANSYS *Mechanical*. Za izvajanje statične nelinearne analize uporabimo paket, ki je namenjen analizi mehanskih struktur (slika 3.8a). Za uporabljenim paketom stoji Ansysov skriptni jezik APDL (*ang. Ansys Parametric Design Language*). Jezik nudi parameterizacijo, izvajanje logičnih funkcij in drugih kompleksnih matematičnih operacij, kar vodi v efektivni komercialni program za reševanje po MKE [22]. Predpostavili smo strukturni model lupine in uporabili CAD model, ki je prilagojen MKE analizi. Struktura je spodaj fiksno vpeta, zgoraj pa je vnesen pomik. Predpostavimo lahko simetrijo, zato obravnavamo le polovico ROC-ja. Ker gre za zaporedno vezano vzmet, imamo zaradi simetrije enako silo kot pri celotni ROC, vendar upoštevamo le pol pomika. Polovični ROC na sliki 3.7a smo pomrežili z 13206 elementi preko 15007 vozlišč z tipom elementa SHELL181. Vpeljali smo materialni model GPLA-ja glede na meritve prikazane v grafu 3.4b. Poleg celotnega modela smo obravnavali tudi ROC, ki ima ločen pozitivni (9178 elementov in 10121 vozlišč, slika 3.7b) in negativni (5043 elementov in 5979 vozlišč, slika 3.7c) nosilec. Na sliki 3.8b lahko z MKE analizo vidimo obliko deformirane ROC. Rezultate $F(X)$ pri različnih temperaturah lahko vidimo v poglavju 4.1.



(a) (b) (c)

Slika 3.7: Mreža (a) polovice, (b) pozitivne polovice in (c) negativna polovica ROC.



(a) (b)

Slika 3.8: (a) Grafični prikaz statične analize in (b) končna deformacija ROC [mm].

3.2.3 Eksperimentalna analiza ROC

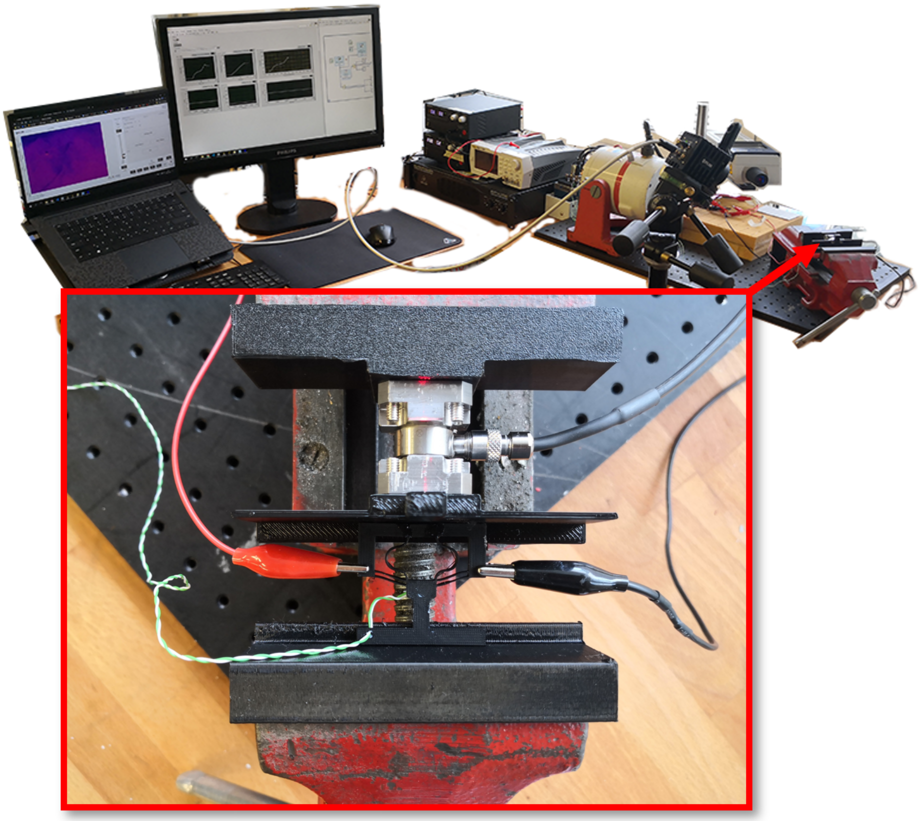
Končni 3D tiskani ROC na sliki 2.2b, lahko eksperimentalno ovrednotimo njeno nelinearno togost in ji določimo silo v odvisnosti od pomika $F(X)$ pri različnih temperaturah. Eksperimentalna postavitev je vidna na sliki 3.9 in shematično prikazana na shemi 3.10.

ROC vpnemo v primež, ki z zapiranjem dovoljuje nadziran in natančen pomik testiranega vzorca. Pomik X merimo z laserjem *Polytec VGO-200-P* z nastavljeno občutljivostjo 5 mm/V. Za vpetje in zaščito ROC smo iz PLA natisnili nosilne elemente. Med eno od čeljusti primeža in testiranim vzorcem se nahaja piezoelektrični silomer *KISTLER 9317B* z občutljivostjo 11,34 pC/N, ki dovolj dolgo zadrži naboj za meritev statične sile F. Naboj silomera ojačamo z nabojnim ojačevalnikom *KISTLER 5073A4* na 5,01V(N). Napajamo ga z napajalnikom *Voltcraft DPPS-32-15*. Tako laser kot tudi silomer sta priključena na merilno kartico *NI 9234*. Z obračanjem ročaja primeža tega zapiramo in tako nadzirano stiskamo ROC in pri tem opazujemo pomik in silo.

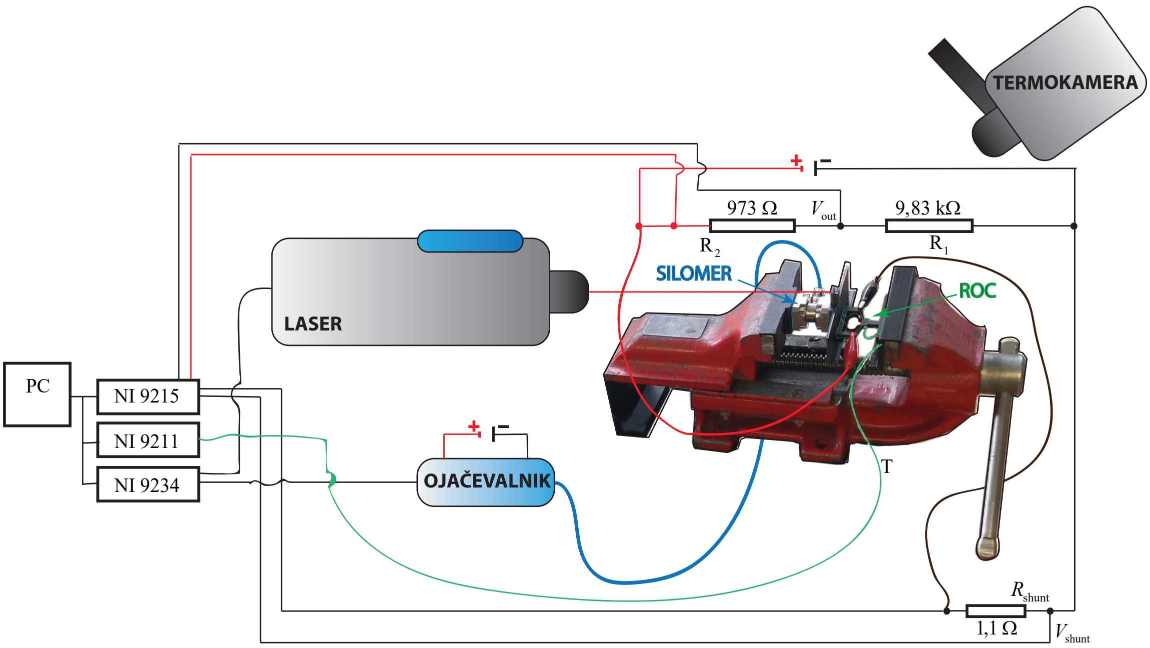
Z enakim vezjem, ki smo ga uporabili za eksperimentalno določanje $E_{GPLA}(T)$ v poglavju 3.1, tudi segrevamo in merimo temperaturo ROC. Pozitivni in negativni del priklopimo tako, da tok teče skozi negativne nosilce. Segrevamo z Joulovim efektom preko še enega napajalnika *Voltcraft*. Napetost U in tok I merimo na kartici *NI 9215* in na kartici *NI 9211* preko termočlena tipa K temperaturo. Spreminjanje temperature opazujemo tudi preko termo-kamere *FLIR A50*. Meritve $F(X)$ v odvisnosti od temperature T izvedemo v programu *LabView*. Postopamo tako, da vzorec segrejemo na določeno temperaturo preko električnega toka in nato izvedemo stiskanje z primežom. Za vsako temperaturo uporabimo novi vzorec.

Rezultate statične analize v obliki primerjave $F(X)$ celotne, ločene pozitivne ter ločene negativne ROC vidimo v rezultatih poglavja 4.1 na grafu 4.1. Tam primerjamo tudi z analitičnimi in numeričnimi rezultati MKE.

Analiziramo tudi teoretično obnašanje ROC pri spremembi temperature zaradi segrevanja z Joulovim tokom na grafu 4.3 in na grafu 4.4 opazujemo eksperiment $F(X)$ pri segrevanju.



Slika 3.9: Eksperimentalna postavitev za določanje $F(X,T)$.

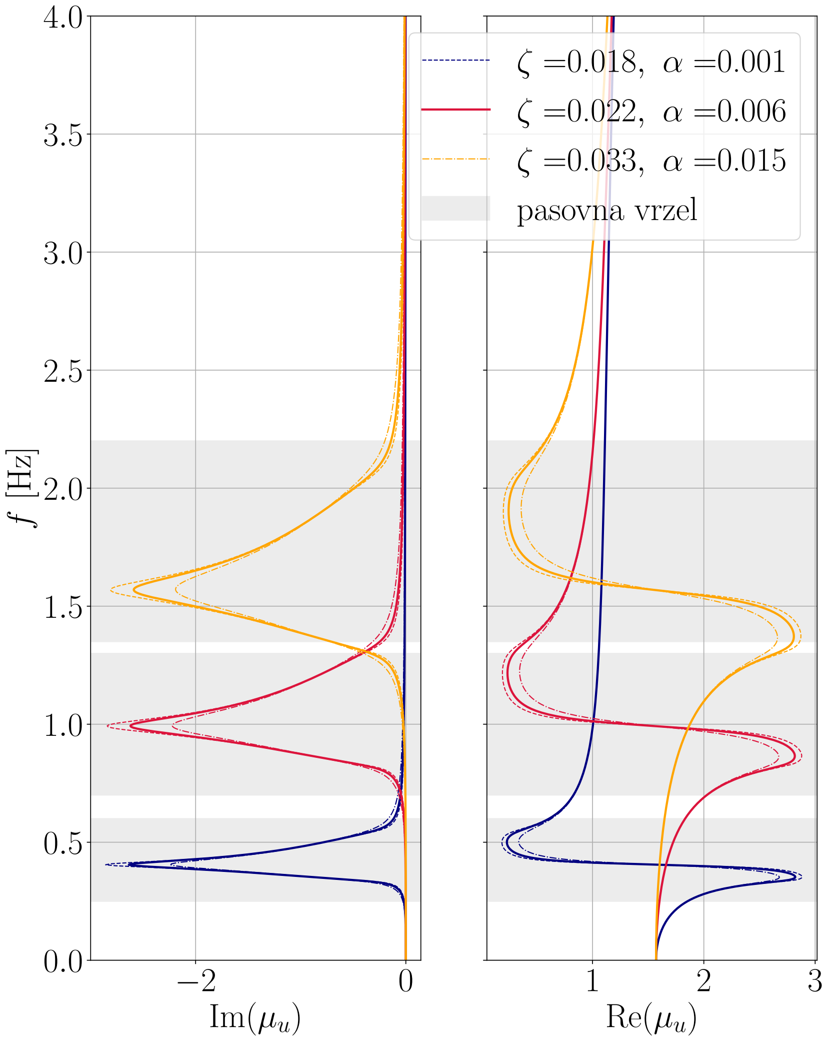


Slika 3.10: Shema eksperimenta za določanje $F(X,T)$.

3.3 Zasnova in dinamična analiza MM

3.3.1 Zasnova MM in njegove analitične disperzijske krivulje

V naslednjem koraku grafično prikažemo enačbo disperzijske krivulje (2.94) za konkretni primer metamateriala n-tih ROC-jev zasnovanih v prejšnjem poglavju. Preko znane geometrije in znane gostote ρ_{GPLA} lahko določimo maso ROC-ja $M = 1{,}72$ g in maso resonatorja $m = 0{,}44$ g. Tako lahko določimo vse brezdimenzijske vrednosti na podlagi poglavja 2.3. Določimo amplitudi $A = 7$ in $B = 0{,}007$, ter brezdimenzijsko maso $\beta = m/M = 0{,}26$. V grafu 3.11 prikažemo disperzijske krivulje za različne vrednosti brezdimenzijske togosti α in dušenja ζ. Tam kjer je $\mathrm{Im}(\mu_u) < 0$ je prenosnost vibracij zmanjšana in je prisotna pasovna vrzel. Vidimo, da je pasovna vrzel za nizko togost k pri zelo nizkih frekvencah.



Slika 3.11: Disperzijska krivulja $\mu(f)$.

3.3.2 Numerična analiza MM in njegovih disperzijskih krivulj

Iz zasnovane ROC tvorimo enodimenzionalno verigo n ROC-jev oziroma naš metamaterial (MM), ki je viden na sliki 3.12. Prva vzmet s togostjo $K = 2k_p$ je fiksno pritrjena na podlago, zadnja vzmet in tako tudi zadnja masa M je prosta. Prvi ROC v verigi je harmonično vzbujen pri različnih frekvencah f.

Izpeljemo gibalno enačbo sistema:

$$[M]\ddot{\vec{X}}(t) + [C]\dot{\vec{X}}(t) + [K]\vec{X}(t) = \vec{F}(t)\,, \tag{3.9}$$

kjer je $\vec{X} = \begin{bmatrix} U_1 & Q_1 & U_2 & Q_2 & \cdots & U_n & Q_n \end{bmatrix}^T$ vektor pomikov U_j primarnih mas in relativnih pomikov Q_j med primarno in resonančno maso za $j = 1, ..., n$. Masne $[M]$, dušilne $[C]$ in togostne $[K]$ matrike so podane kot:

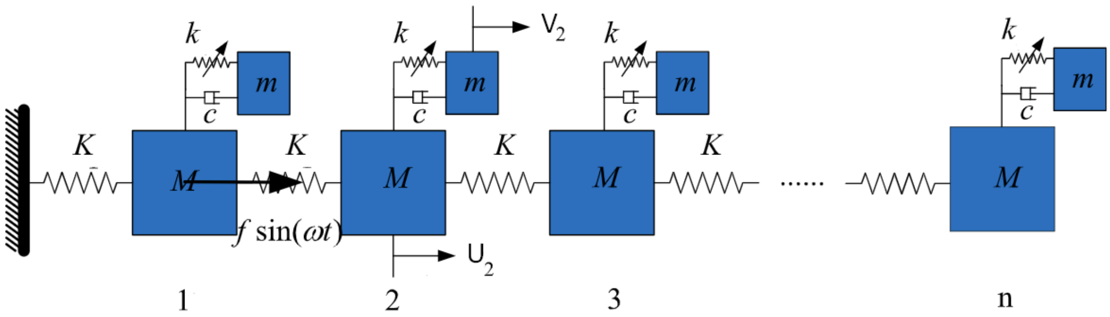
$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m & m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & m & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m & m \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & -c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

$$[K(Q_j)] = \begin{bmatrix} 2K & -k & -K & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & 2K & -k & -K & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -K & 0 & 2K & -k & -K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -K & 0 & 2K & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

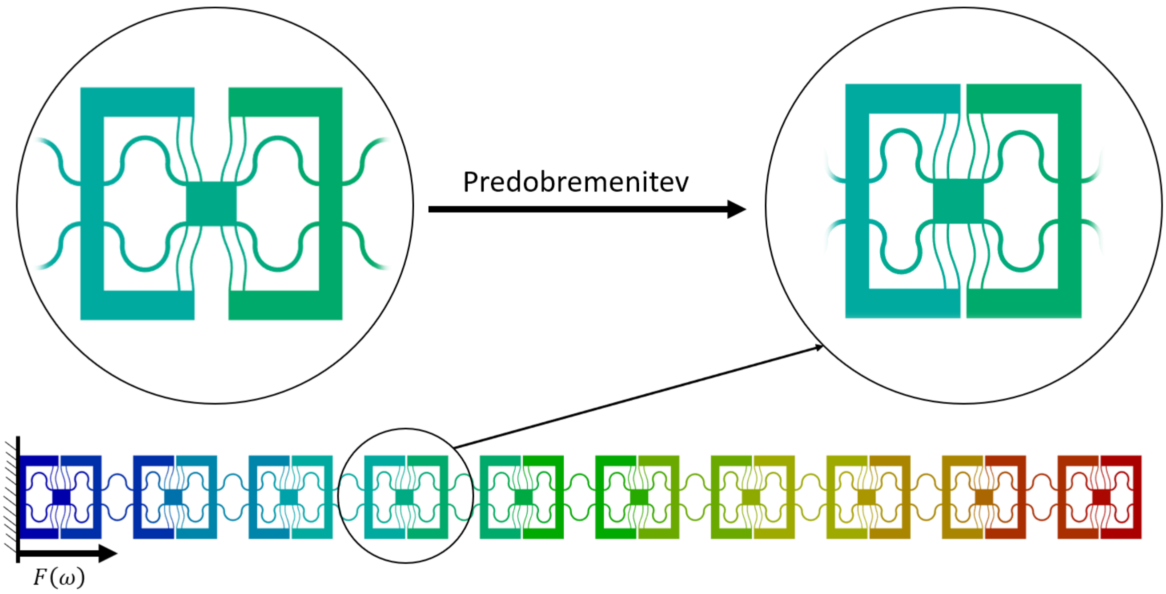
in je $k = F'_{\mathrm{ROC}}(Q_j)$ nelinearna togost.

Vektor sile je podan kot $\vec{F} = \begin{bmatrix} f\sin(2\pi f t) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$.



Slika 3.12: Enodimenzionalna metamaterialna veriga z robnimi pogoji.

na spodnji sliki 3.13 vidimo, da je dinamska numerična analiza narejena na statično predobremenjenem MM. Predobremenitev je enaka statični masi, ki jo želimo vibroizolirati.



Slika 3.13: MM veriga z $n = 10$ pri čemer je vidna predobremenitev.

Problem lahko rešimo direktno z numeričnim reševanjem diferencialne enačbe pri začetnih pogojih $\vec{X} = \dot{\vec{X}} = \vec{0}$ z uporabo implicitne Runge-Kutta sheme. Časovno integriramo pri različnih frekvencah f, in v frekvenčni domeni preko Fouriereve transformacije pogledamo prenosljivost $T_{\text{R-K}}$, ki je razmerje med pomikom zadnje glavne mase U_n in prve mase U_1.

Indirektno lahko homogeni del gibalne enačbe (3.9) rešimo brez integriranja z linearizacijo togosti [8]. Če predpostavimo, da imamo dovolj majhne pomike lahko za $k \approx 0$ določimo prenosno funkcijo T_{lin} z uporabo pseudoinverza:

$$-\vec{X} = \left\{[K] + i\,\omega[D] - \omega^2[M]\right\}^{-1}\vec{F}\,. \tag{3.13}$$

3.3.3 Eksperimentalna analiza MM vibroizolatorja

V sledečem poglavju si ogledamo prenosno funkcijo $T(f)$ kot končen rezultat.

4 Rezultati in diskusija

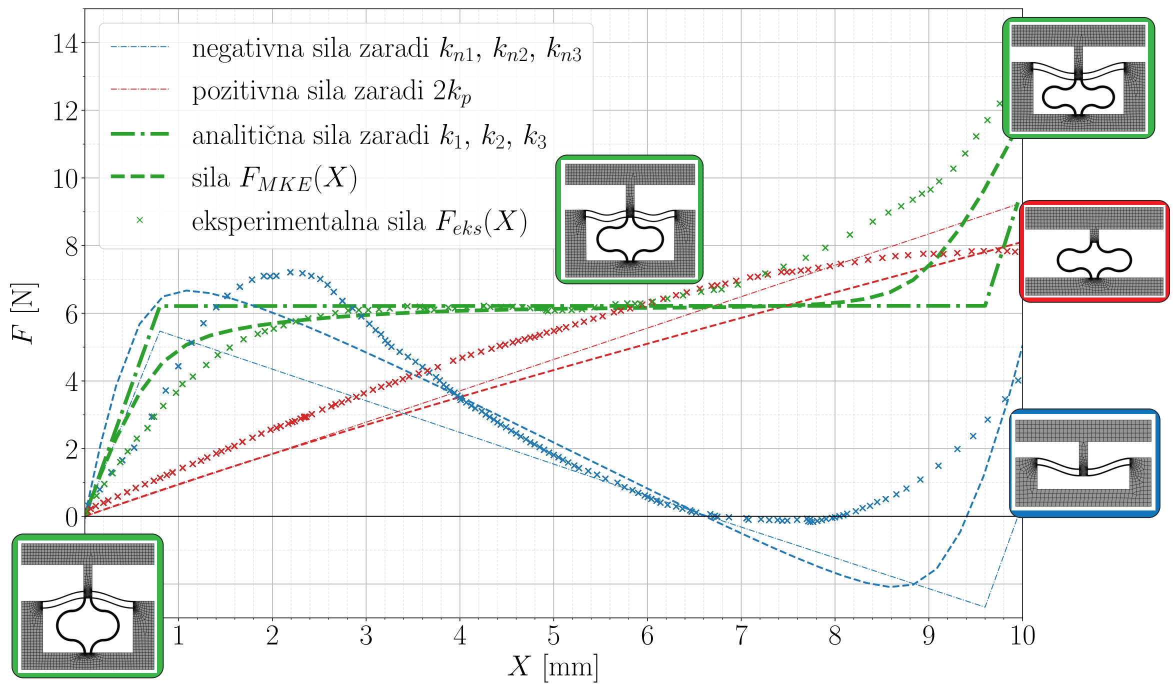
V tem poglavju so predstavljeni rezultati in ugotovitve analitičnih, numeričnih ter eksperimentalnih analiz. V prvem delu se osredotočimo na ugotovitve, ki smo jih izluščili iz posameznega gradnika MM. ROC obravnavamo v ločenih delih in primerjamo med seboj vse tri analize. Pogledamo si tudi obnašanje ROC zaradi segrevanja in posledičnega mehčanja GPLA. Vse ugotovitve nato razširimo in obravnavamo celoten MM, ki predstavlja drugi in končni del rezultatov. Ogledamo si sposobnost vibroizolacije MM, njegove pasovne vrzeli pri različnih statičnih obremenitvah F, vpliv večanja števila celic in vpliv temperature.

4.1 Rezultati statičnih analiz ROC

V prvem delu analiziramo ugotovitve, ki smo jih izluščili iz posameznega ROC. Dimenzionirano osnovno celico lahko vrednotimo z grafom sile-pomika F-X.

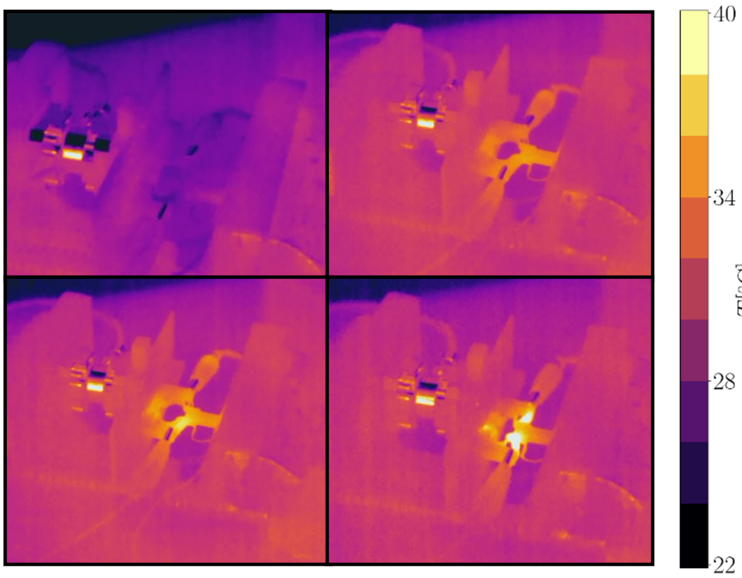
ROC obravnavamo v ločenih delih in primerjamo med seboj vse tri analize na grafu 4.1, kot tudi pripadajoče modele. Zelena predstavlja celotni ROC, rdeča predstavlja pozitivni del ROC, modra pa negativni. Vsaka barva ima analitični, MKE in eksperimentalni rezultat. Opazimo lahko, da kot smo pričakovali, seštevek negativnega in pozitivnega nosilca predstavlja celotni ROC. Analitični rezultat po enačbah poglavja 2.2 je najbolj osnoven z linearnim potekom treh togosti (začetno pozitivno območje, osrednje območje z KNT in končno pozitivno območje). Tukaj nimamo v nobenih nelinearnosti v samem območju. To se spremeni že v numerični analizi z MKE. Čeprav imamo predpostavljen idealen elastični material, je zaradi povečanja togosti zaradi spremembe geometrije, tudi potek sile v pozitivnem (rdečem) rezultatu nelinearen. Največjo nelinearnost imamo pri eksperimentu. Tukaj je poleg velikih sprememb geometrije prisotna nelinearnost zaradi plastičnih deformacij materiala, lezenja, odstopanja od idealne oblike, itd. Omenimo, da pri eksperimentu doseči negativno silo ni bilo mogoče, zato je posledično najmanjša sila $F_{eks} = 0$.

Kljub vsemu pa lahko opazimo, da končni eksperiment sovpada analitičnim kot tudi numeričnim ugotovitvam. Dokazali smo, da so vse izpeljave za določanje geometrije ROC v poglavju 2.2 dobre.



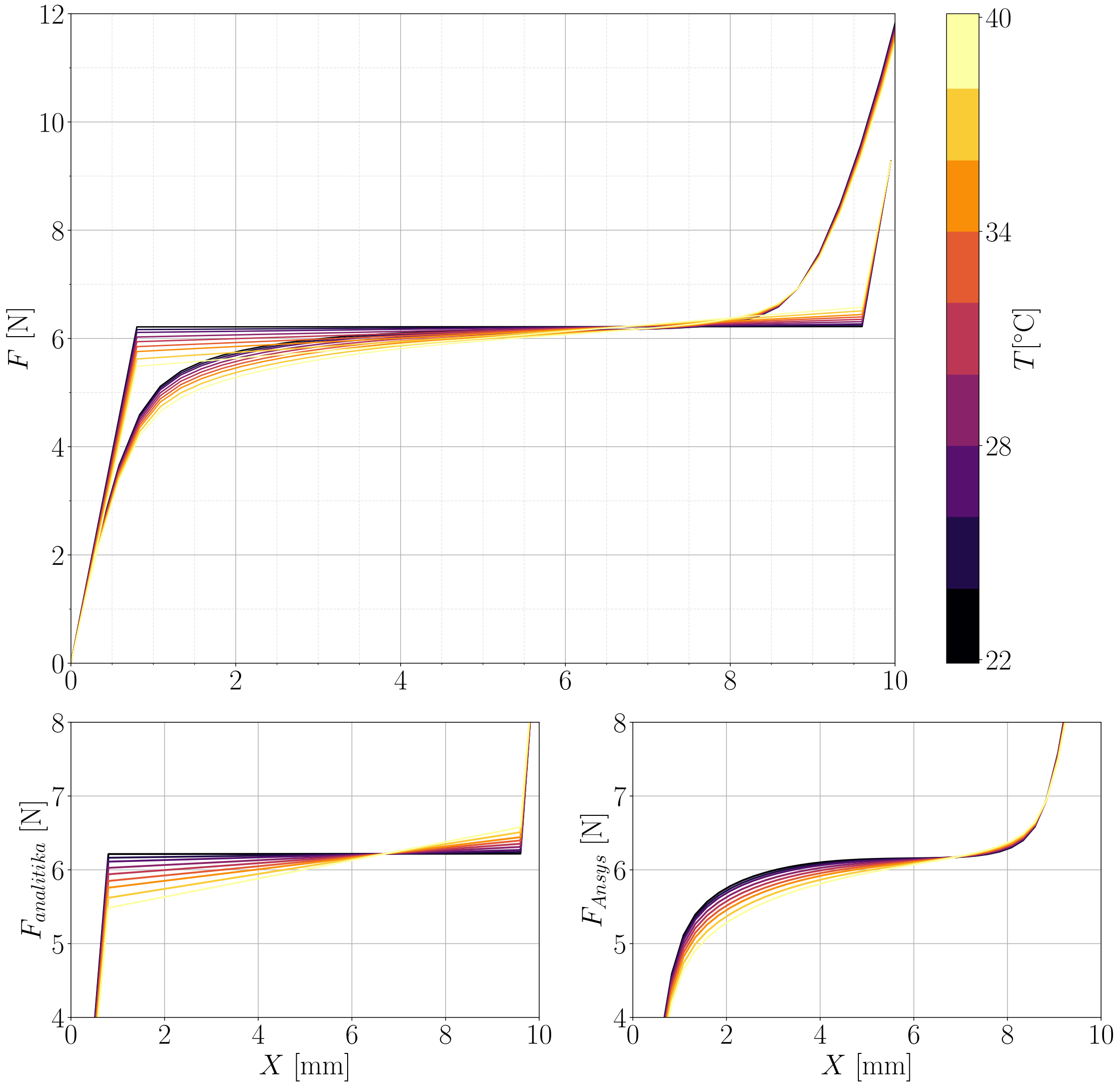
Slika 4.1: Analitične, numerične in eksperimentalne primerjave poteka F-X ROC-ja.

V sledečem delu si ogledamo spremembo togosti zaradi segrevanja z Joulovim tokom. Uporabimo termo-kamero in analiziramo toplotno polje znotraj ROC. V idealnem primeru, enakomerno segrevamo le negativne nosilce ROC, pozitivni deli pa ostanejo pri sobni temperaturi. Tako zmanjšujemo negativno komponento ROC, kar vodi v povečanje togosti v območju KNT. Če bi segrevali pozitivni del, bi dobili negativno togost, kar vodi v nestabilnosti strukture. Z povečanjem togosti lahko poleg nizko-frekvenčnih območij dušimo tudi višja. Kot vidimo na sliki 4.2 se s časom segreva celotna ROC, vendar pa je glavni del omejen na željeno območje.



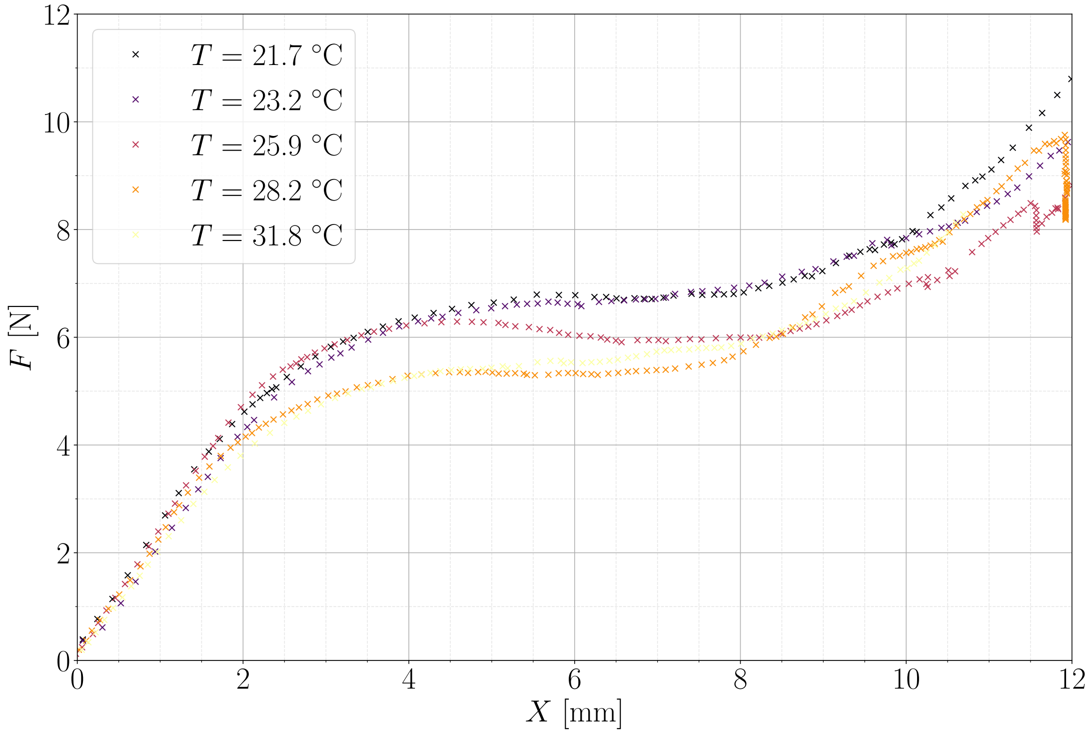
Slika 4.2: Potek segrevanja ROC opazovan na termo-kameri.

Oglejmo si sedaj $F(X)$ pri različnih temperaturah. Na sliki 4.3 vidimo primerjavo analitičnega in numeričnega obnašanja ob segrevanju negativnega nosilca ROC. Segrevanje vpliva na togost, saj se spremeni modul elastičnosti E_{GPLA} na grafu 3.4b. Vidimo, da se nosilnost ne spremeni bistveno, spremeni se le togost in sicer z večanjem temperature (in manjšanjem togosti materiala) povečujemo togost ROC v območju prvotne KNT.



Slika 4.3: Analitične in numerične primerjave poteka F-X ROC-ja pri ΔT.

Na grafu 4.4 vidimo končni $F(X)$ eksperimenta pri različnih temperaturah T. Vidimo lahko padec togosti kot pri teoriji, čeprav je prisoten precejšnji raztros.

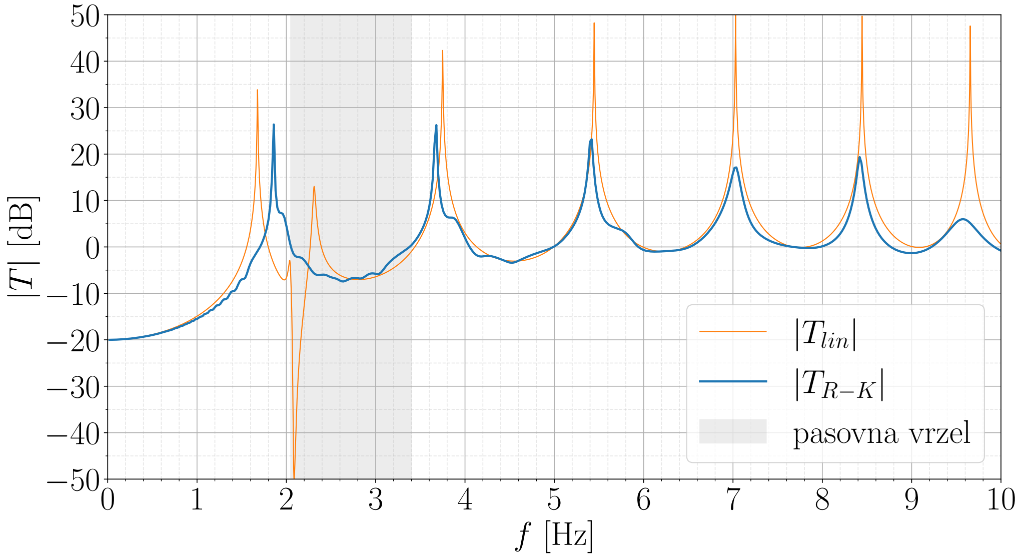


Slika 4.4: Eksperimentalen potek F-X ROC-ja pri ΔT.

Vse ugotovitve statične analize ROC lahko prenesemo na analizo celotnega MM.

4.2 Dinamika adaptivnega MM vibroizolatorja

Prikažemo lahko sposobnost vibroizolacije numerične analize primera metamateriala definiranem v poglavju 3.3.1. V primerjavi na grafu $|T(f)|$ 4.5 vidimo, da se tako direktna metoda z numerično integracijo in indirektna metoda z linearizacija dobro ujemata. Opazimo lahko obstoj pasovne vrzeli v območju med 2 in 3 Hz. Tam se zaradi prisotnosti zavrnitvenega pasu vibracije ne prenašajo.



Slika 4.5: Prenosnost pomika pri različnih frekvencah.

Iz enačbe 2.94 vidimo, da je delovanje metamateriala odvisno predvsem od dušilnega razmerja ζ, masnega razmerja β in razmerja togosti ter predvsem nelinearne togosti α. S slike 3.11 lahko vidimo, da se z večanjem togosti pasovna vrzel pomika proti višjim frekvencam, pri višanju dušenja pa se pasovna vrzel širi, vendar je pri tem manj učinkovita.

Zaradi občutljivosti modula elastičnosti E_{GPLA} na temperaturo, je dejanska prenosnost funkcija temperature $T = T(f, \text{temp.})$.

5 Zaključki

V magisterskem praktikumu smo obravnavali dinamiko 3D natisnjenih termoaktivnih metamaterialnih blažilcev.

1. Predstavili smo osnovno klasifikacijo metamaterialov.
2. Predstavili smo delovanje metamateriala kot vibroabsorberja s PZF.
3. Analitično smo izpeljali osnovno reprezentativno celico metamateriala.
4. Obravnavali smo dinamiko neskončne periodične verige ROC-jev.
5. Eksperimentalno smo določili modul elastičnosti E in gostoto ρ GPLA-ja.
6. Numerično (z MKE) smo ovrednotili statiko ROC in dinamiko (direktna integracija sistema diferencialnih enačb) MM verige.

Predlogi za nadaljnje delo

V magistrski nalogi nadaljujemo z izdelavo MM verige in eksperimentalnim vrednotenjem njene sposobnosti pri blaženju vibracij. Zaradi občutljivosti modula elastičnosti E_{GPLA} na temperaturo, je dejanska prenosnost funkcija temperature $T = T(f, \text{temp.})$. Končni cilj je izdelano MM verigo, ki je prevodna, krmiliti z Joulovim tokom in se tako prilagajati spremembam temperature okolice.

Literatura

[1] S. Dalela, P. S. Balaji in D. P. Jena, “A review on application of mechanical metamaterials for vibration control,” *Mech. Adv. Mater. Struct.*, let. 29, št. 22, str. 3237–3262, Aug. 2022.

[2] J. C. Ji, Q. Luo in K. Ye, “Vibration control based metamaterials and origami structures: A state-of-the-art review,” *Mech. Syst. Signal Process.*, let. 161, št. 107945, str. 107945, Dec. 2021.

[3] S. Dalela, P. Balaji in D. Jena, “Design of a metastructure for vibration isolation with quasi-zero-stiffness characteristics using bistable curved beam,” *Nonlinear Dynamics*, let. 108, št. 3, str. 1931–1971, 2022.

[4] H. Fan, L. Yang, Y. Tian in Z. Wang, “Design of metastructures with quasi-zero dynamic stiffness for vibration isolation,” *Composite Structures*, let. 243, str. 112244, 2020.

[5] C. Cai, J. Zhou, L. Wu, K. Wang, D. Xu in H. Ouyang, “Design and numerical validation of quasi-zero-stiffness metamaterials for very low-frequency band gaps,” *Composite structures*, let. 236, str. 111862, 2020.

[6] C.-C. Lan, S.-A. Yang in Y.-S. Wu, “Design and experiment of a compact quasi-zero-stiffness isolator capable of a wide range of loads,” *Journal of Sound and Vibration*, let. 333, št. 20, str. 4843–4858, 2014.

[7] R. Liu, M. Stremler, K. Sharp, M. Olsen, J. Santiago, R. Adrian, H. Aref, D. Beebe in J. Beebe, “Microelectromech,” v *Syst*, let. 9, št. 2, 2000, str. 190–197.

[8] S. Rao, *Mechanical vibrations.* Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2007.

[9] B. S. Lazarov in J. S. Jensen, “Low-frequency band gaps in chains with attached non-linear oscillators,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, let. 42, št. 10, str. 1186–1193, 2007.

[10] A. C. Huang, “A harmonic balance method for pdes,” Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States); Sandia . . . , Tech. Rep., 2016.

[11] J. J. Thomsen, J. J. Thomsen in J. Thomsen, *Vibrations and stability.* Springer, 2003, let. 2.

[12] S. Rao, *The finite element method in engineering.* Oxford Elsevier: Butterworth-Heinemann, 2010.

[13] M. Crisfield, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures.* John Wiley & Sons, 2000, let. 1.

[14] M. Boltežar, *Nihanja sistemov z več prostostnimi stopnjami.* Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2010, str. 165–177.

[15] *Polylactic acid*, V Wikipediji. Dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Polylactic_acid, ogled: 30. 05. 2021.

[16] *Glass transition*, V Wikipediji. Dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Glass_transition, ogled: 30. 05. 2021.

[17] M. Al-Rubaiai, T. Pinto, C. Qian in X. Tan, "Soft actuators with stifness and shape modulatio using 3d-printed conductive pla," *SoRo Soft Robotics*, let. 0, str. 1–15, 2018.

[18] G. Bizjan, "Dinamika 3d natisnjenih termoaktivnih blažilcev," *Študentska tehniška konferenca ŠTeKam 2021*, 2021.

[19] R. Pintelon, P. Guillaume, K. D. Belder in Y. Rolain, "Measurement of young's modulus via modal analysis experiments: a system identification approach," *13th IFAC Symposium on System Identification*, str. 375–380, 2003.

[20] T. Košir in J. SLavič, "Karakterizacija mehanskih lastnosti fff 3d natisnjenih struktur," *Slovensko društvo za mehaniko srečanje Kuhljevi dnevi*, 2021.

[21] S. Rao, *Vibrations of Continuous Systems.* Hoboken, NJ: Pearson Education, Inc, 2017.

[22] M. Thompson, *ANSYS Mechanical APDL for Finite Element Analysis.* San Diego: Elsevier Science, 2017.

[23] R. Ferreira, I. Amatte, T. A. Dutra, in D. Burger, "Experimental characterization and micrography of 3d printed pla and pla reinforced with short carbon fibers," *Composites Part B: Engineering*, let. 05, str. 124, 2017.

Priloga A