

UNIVERZA V LJUBLJANI

Fakulteta za strojništvo

Zelo obsegajoči način
↳ učinkna informacija
je enačljivo s tem.
monitorno pasovno vrednost
in aci je mnenje (vsebinsko)
**Struktturna dinamika 3D natisnjenih
termoaktivnih metamaterialov za ~~izkorist~~
nizkofrekvenčne pasovne vrzeli** ~~izkorist~~
~ EGS)

Magistrsko delo magistrskega študijskega programa II. stopnje
Strojništvo

Gašper Bizjan

Ljubljana, april 2023

UNIVERZA V LJUBLJANI

Fakulteta za strojništvo

**Strukturna dinamika 3D natisnjenih
termoaktivnih metamaterialov za
nizkofrekvenčne pasovne vrzeli**

Magistrsko delo magistrskega študijskega programa II. stopnje
Strojništvo

Gašper Bizjan

Mentor: prof. dr. Janko Slavič, univ. dipl. inž.

Ljubljana, april 2023

[Prostor za podpisano temo magistrskega dela]

Zahvala

[Pisanje zahvale ali posvetila je neobvezno.]

[Pri zahvali napišite zahvalo tistim, ki so pomagali pri nastanku dela in brez katerih delo ne bi nastalo v takšni obliki, kot je. Navadno se je potrebno zahvaliti v prvi vrsti mentorju, somentorju in inštituciji, ki je morda finančno ali kako drugače podprla izvedbo zaključnega dela. Nato sledijo asistenti, ostali sodelavci in vaši kolegi, ki so pomagali pri teoretičnem in eksperimentalnem delu. Na koncu se po navadi zahvalimo še družini.]

IZJAVA

Diplomsko delo sem samostojno izdelal pod vodstvom mentorja [Ime in PRIIMEK]

[Ime in
PRIIMEK]

Dne, [Datum oddaje diplomske naloge]

A red handwritten signature consisting of several curved lines forming a stylized, abstract shape.

Izvleček

UDK [123.45:678.91:234.56(789.1)]

Tek. štev.: [MAG II/99]

[**Zasnova predloge za zaključne naloge na Fakulteti za strojnoštvo**]

[Janez Novak]

Ključne besede: [predloga]
[zaključna naloga]
[navodila]
[vsebina]
[diplomiranje]
[pravilnik]

[V začetku izvlečka je jedrnat opis obravnavanega problema. Sledi opis izbrane metodologije in nato opis najpomembnejših rezultatov oz. ugotovitev brez dodatnih pojasnjevanj. Obseg izvlečka naj ne presega 200 besed oz. 600 znakov vključno s presledki.]



Abstract

UDC [123.45:678.91:234.56(789.1)]

No.: [MAG II/99]

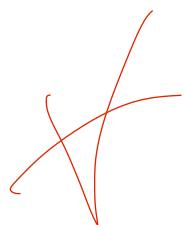
[Design for a template for final theses at the Faculty of Mechanical Engineering]

[Janez Novak]

Key words:

- [template]
- [final thesis]
- [instructions]
- [contents]
- [graduation]
- [regulations]

[Angleški prevod izvlečka...]



Kazalo

Kazalo slik	xv
Kazalo preglednic	xvii
Seznam uporabljenih simbolov	xix
Seznam uporabljenih okrajšav	xxiii
1 Uvod	1
1.1 Ozadje problema	1
1.2 Cilji naloge	2
2 Teoretične osnove	3
2.1 Osnove metamaterialov	3
2.2 Analitična izpeljava ROC	5
2.2.1 Izpeljava elementa s pozitivno togostjo	6
2.2.2 Izpeljava elementa z negativno togostjo	8
2.2.3 Statična analiza ROC	15
2.3 Dinamika MM vibroizolatorja	18
2.3.1 Dvomasni dušilec nihanj	18
2.3.2 Dinamika neskončne periodične verige	21
2.4 Frekvenčna prenosna funkcija	24
2.4.1 Sistem z več prostostnimi stopnjami	24
2.4.2 Grafični prikaz in lastnosti FRF-ja	26
2.4.3 Cenilke frekvenčne prenosne funkcije	27
2.5 Metoda končnih elementov	29
2.5.1 Gibalne enačbe končnega elementa	30
2.5.2 Statična analiza pri velikih pomikih	31
2.5.3 Analiza lastnih nihanj	32
2.5.4 Masna in togostna matrika končnih elementov	33
2.6 Termoaktivne lastnosti GPLA	34

3 Metodologija raziskave	35
3.1 Meritev materialnih lastnosti GPLA-ja	35
3.2 Zasnova in statična analiza ROC	39
3.2.1 Dimenzioniranje in zasnova ROC	39
3.2.2 Numerična analiza ROC z MKE	41
3.2.3 Eksperimentalna analiza ROC	42
3.3 Zasnova in dinamična analiza MM	44
3.3.1 Zasnova MM in njegove analitične disperzijske krivulje	44
3.3.2 Numerična analiza MM z direktno integracijo	46
3.3.3 Eksperimentalna analiza MM vibroizolatorja	48
4 Rezultati in diskusija	49
4.1 Materialne lastnosti GPLA	49
4.2 Rezultati statičnih analiz ROC	51
4.3 Dinamika adaptivnega MM vibroizolatorja	54
4.3.1 Izračun disperzijskih krivulj metamateriala	54
4.3.2 Numerična prenosnost pri sobni temperaturi	56
4.3.3 Numerična prenosnost pri segrevanju z Joulovim tokom	58
4.4 FRF po MKE in eksperimentu	61
5 Zaključki	63
Literatura	65
Priloga A	69

Kazalo slik

Slika 2.1:	Klasifikacija metamaterialov [2].	3
Slika 2.2:	(a) Vzmetni KNT mehanizem in (b) 3D tiskana KNT ROC.	5
Slika 2.3:	Diagram prostega telesa problema.	6
Slika 2.4:	Glavni in virtualni sistemi.	6
Slika 2.5:	Shema kosinusnega nosilca [19].	8
Slika 2.6:	(a) Monostabilna in (b) bistabilna konstrukcija iz nosilcev [19]. . .	13
Slika 2.7:	(a) $F-d$ graf pozitivnega in negativnega nosilca in (b) celotne ROC [19]	14
Slika 2.8:	(a) Shema ROC in (b) referenčni sistem z maso in vzmetjo.	15
Slika 2.9:	(a) Brezdimenzijska sila in (b) togost z variiranjem γ pri $\mu = \mu_{\text{ROC}}$. . .	17
Slika 2.10:	Nedušen sistem z DVB-jem [20]	18
Slika 2.11:	Dušen sistem z DVB-jem [20]	19
Slika 2.12:	enodimenzionalna metamaterialna veriga.	21
Slika 2.13:	enodimenzionalna metamaterialna veriga.	23
Slika 2.14:	(a) Amplitudni in (b) fazni del Bodejevega diagrama [24].	26
Slika 2.15:	Blokovni diagram Fouriereve transformacije.	28
Slika 2.16:	Heksaedrični KE v kartezijevem (levo) in naravnem (desno) KS [25].	33
Slika 3.1:	Geometrija vzorcev za določanje materialnih lastnosti [32].	35
Slika 3.2:	(a) Shema vezja meritve in (b) specifična upornost ϱ GPLA materiala [32].	36
Slika 3.3:	Prikaz (a) eksperimenta za meritev modula elastičnosti (b) GPLA vzorca in (c) njegovega MKE modela za analizo lastnih vrednosti.	38
Slika 3.4:	(a) Skica ROC-ja z dimenzijami tabele 3.1 in (b) <i>Solidworks</i> CAD model.	40
Slika 3.5:	(a) FDM 3D tiskalnik <i>Prusa i3 MK3S+</i> in (b) ROC.	40
Slika 3.6:	Mreža (a) polovice, (b) pozitivne polovice in (c) negativna polovica ROC.	41
Slika 3.7:	(a) Grafični prikaz statične analize in (b) končna deformacija ROC [mm].	41
Slika 3.8:	Eksperimentalna postavitev za določanje $F(X,T)$	43

Slika 3.9:	Shema eksperimenta za določanje $F(X,T)$.	43
Slika 3.10:	(a) Skica MM s tremi ROC in (b) pobližan ogled zaprte ROC v MM.	44
Slika 3.11:	Sestavnih delov MM znotraj <i>PrusaSlicer</i> .	45
Slika 3.12:	<i>Solidworks</i> CAD model odprtega MM.	45
Slika 3.13:	Enodimensionalna metamaterialna veriga z robnimi pogoji.	47
Slika 3.14:	Eksperimentalna postavitev za določanje dinamičnega odziva MM.	48
Slika 3.15:	Shema dinamičnega eksperimenta MM.	48
Slika 4.1:	(a) FPF vzorca $l = 60$ in 0° in (b) modul elastičnosti $E(T)$ GPLA [32].	50
Slika 4.2:	Analitične, numerične in eksperimentalne primerjave poteka F - X ROC-ja.	51
Slika 4.3:	Potek segrevanja ROC opazovan na termo-kameri. Zgoraj levo je primer ob času t_0 in spodaj desno primer za t_{\max} . Kot vidimo se močno segrejejo kosinusni nosilci z negativno togostjo.	52
Slika 4.4:	Analitične in numerične primerjave poteka F - X ROC-ja pri ΔT .	53
Slika 4.5:	Eksperimentalen potek F - X ROC-ja pri ΔT .	53
Slika 4.6:	Disperzijska krivulja $\mu(f)$.	55
Slika 4.7:	Prenosnost pomika $T(f)$ za št. ROC=3.	57
Slika 4.8:	Vpliv različnega števila ROC na prenosnost $T(f)$.	58
Slika 4.9:	Vpliv različne statične obremenitve na pasovno vrzel MM.	59
Slika 4.10:	Vpliv segrevanja negativnega nosilca na prenosnost $T(f, \text{temp.})$.	60
Slika 4.11:	MKE FRF $H(f)$ in eksperimentalni FRF $H_1(f)$ (zgoraj) in koherenca (spodaj) za metamaterial z enim ROC.	61
Slika 4.12:	MKE FRF $H(f)$ in eksperimentalni $H_1(f)$ (zgoraj) in koherenca (spodaj) za metamaterial s tremi ROC pri različnih deformacijah.	62

Kazalo preglednic

Preglednica 3.1: Vrednosti dimenzij pri različnih modelih ROC. 40

Seznam uporabljenih simbolov

Oznaka	Enota	Pomen
A	m^2	površina preseka
b	m	globina nosilca
c	$\text{N s}^2/\text{m}, \text{J/kg K}$	koeficient dušenja, specifična toplota
d, Δ	$\text{m}, /$	(brezdimenzijska) dolžina pomika kosinusnega nosilca
e	$/$	Eulerjevo število 2,71828...
E	Pa, J	modul elastičnosti ali energija
f	$/, \text{Hz}$	brezdimenzijska sila ali lastna frekvenca
F	N	sila
H	$/$	frekvenčna prenosna funkcija
h	$\text{m}, \text{W/mK}$	višina kosinusnega loka, toplotna prestopnost
i	$/$	imaginarno število $\sqrt{-1}$
I	m^4, A	vztrajnostni moment prereza, električni tok
k	N/mm	(nelinearna) togost
K	N/mm	linearna togost ROC
l, L	m	dolžina
\mathcal{L}	$/$	Lagrangian
m	kg	masa (resonatorja)
M	$\text{N m}, \text{kg}$	moment ali masa ROC
N	$/$	brezdimenzijska aksialna sila
P	N, W	sila ali moč
q, Q	$/, \text{m}$	(brezd.) relativna pr. stopnja ali vozliščni pomiki MKE
R	$\text{m}, /, \Omega$	radij nosilca, brezdimenzijska lateralna sila ali el. upornost
s, S	$\text{m}, /$	(brezdimenzijska) dolžina aksialnega nosilca
t	m, s	globina nosilca, čas
T	$^\circ\text{C}, /$	temperatura ali prenosna funkcija
u, U	$/, \text{J}, \text{m}, \text{V}$	(normalizirana) energija, pr. stopnja ali el. napetost
v, V	$/, \text{m}, \text{m}^3$	(brezdimenzijska) pr. stopnja resonatorja, volumen
w, W	$/$	(brezdimenzijski) pomik (kosinusnega nosilca)
\bar{w}, \bar{W}	$\text{m}, /$	(normirana) prva deformacijska oblika kosinusnega nosilca
x, X	$/, \text{m}$	(brezdimenzijska) prostostna stopnja
$[A]$	$/$	dinamska matrika sistema
$[B]$	$/$	matrika odvodov oblikovnih funkcij
$[C]$	$\text{N s}^2/\text{m}$	disipacijska matrika
$[D]$	$/$	materialna matrika ali matrika histereznega dušenja
$[I]$	$/$	identiteta
$[J]$	$/$	Jakobijeva matrika
$[K]$	$\text{Pa m}^2/\text{m}$	togostna matrika
$[M]$	kg	masna matrika
$[N]$	$/$	aproksimacijske funkcije

$[T]$	/	transformacijska matrika
α	/	brezdimenzijska togost ali receptanca
β	/	brezdimenzijska masa
γ	/	razmerje dolžin
δ	/	koeficient brezdimenzijske sile tretje potence
δF	N	virtualna sila
δM	N m	virtualni moment
δW	J	virtualno delo
ϵ	/	brezd. red ampl. gibanja ali togostna konst. dušenja
ε	/	specifična deformacija
ζ	/	razmernik dušenja
η	/	koeficient brezdimenzijske sile pete potence
θ	rad	kot horizontalne vzmeti
κ	1/rad	krožna frekvenca resonatorja
\varkappa	/	razmerje krožnih frekvenc
λ	/	lastne vrednosti
μ	/	razmerje togosti ali disperzijska krivulja
ν		Poissonov količnik ali masna konstanta histereznega dušenja
π	/	konstanta 3,1416...
ρ	kg/m ²	gostota
ϱ	Ω mm ² /m	specifična električna upornost
σ	Pa	napetost
τ	/	brezdimenzijski čas
ϕ	rad, F	prostostna stopnja kota
$\overline{\phi}$	F	površinske sile
$\overline{\Phi}$	F	volumske sile
ω	1/rad	krožna frekvenca ROC-ja
Ω	/	razmerje frekvence z lastno frekvenco ROC

Indeksi

0	začetno stanje, lastna frekvenca
I,1	1. polje 1. glavnega sistema
II,1	2. polje 1. glavnega sistema
I,2	1. polje 2. glavnega sistema
II,2	2. polje 2. glavnega sistema
A	točka A
b	upogibno
B	točka B
c	koncentrirano
d	disperzijsko
f	aktuacijsko
g	steklenje
h	horizontalno
k	kinetično, končno
KNT	kvazi ničelna togost
MNT	mehanizem negativne togosti
n	negativna
n1	negativna togost prvega območja
nn2	negativna togost drugega območja
nn3	negativna togost tretjega območja
N	notranje
opt	optimalno
p	pozitivno, potencialno, konstanten tlak
ROC	reprezentativna osnovna celica
r	r-ta lastna frekvenca/vrednost
s, S	tlačno, površinsko
sd	standardna deviacija
sp	spodnja
sr	srednja
t	celotno
v	vertikalno, volumsko
Z	zunanje
zg	zgornja
∞	neskončno oddaljeno

Seznam uporabljenih okrajšav

Okrajšava	Pomen
3D	tridimenzionalno
DVB	dinamični vibracijski blažilec
FPF	frekvenčna prenosna funkcija
GPLA	polilaktična kislina z aditivom grafitnega prahu (ang. <i>Graphite Polylactic Acid</i>)
KE	končni element
KNT	kvazi ničelna togost
KS	koordinatni sistem
MKE	metoda končnih elementov
MM	metamateriali
MNT	mehanizem negativne togosti
NT	negativna togost
PLA	polilaktična kislina (ang. <i>Polylactic acid</i>)
PT	pozitivna togost
PZF	pasovno zavrnitveni filter
ROC	reprezentativna osnovna celica
VSND	visoka statična in nizka dinamična



1 Uvod

1.1 Ozadje problema

Prisotnost nenadzorovanih vibracij v inženirskih aplikacijah hitro vodi v prekomerno obrabo, poškodbe ali celo v kritično in nevarno odpoved materiala ter strojnih delov. Z implementacijo vibroizolacije lahko omogočimo zaščito opazovanega sistema pred zunanjim povzročiteljem dinamičnih sil.

V praksi je največkrat uporabljena linearna vibroizolacija, ki je učinkoviti le, če je njena lastna frekvenca precej nižja od frekvence vzbujanja. Za odpravo te pomanjkljivosti je bila zasnovana nelinearna vibroizolacija z visoko statično in nizko dinamično (VSND) togostjo, ki izolira vibracije v nizkofrekvenčnem območju. Pri tem visoka statična togost pomeni veliko nosilnost, medtem ko nizka dinamična togost pomeni povečano območje izolacije pri nizkih frekvencah. Skoraj ničelna dinamična togost v delovni točki, ki je značilna za nelinearno vibroizolacijo, se imenuje kvazi ničelna togost (KNT), nelinearni izolatorji z značilnostmi KNT pa se v nadaljevanju imenujejo kvazi ničelni togostni izolatorji ali KNT izolatorji.

Metamateriali (MM) so v zadnjih dveh desetletjih deležni vse večjega raziskovalnega zanimanja, saj imajo zanimive optične, elektromagnetne, akustične in mehanske lastnosti. Znani tudi pod imenom metastrukturi, izražajo posebne fizikalne lastnosti, ki jih v naravi ne najdemo. Gre za serijo ponavljajočih se in geometrijsko skrbno načrtovanih podstruktur. Podobni so celičnim strukturam, njihove posebne fizikalne lastnosti, ki jih v naravi ne najdemo, pa je mogoče preučevati iz osnovne reprezentativne celice (ROC). Vibroizolativni MM sestoji iz periodično razporejenih lokalnih resonatorjev, ki absorbirajo vibracijsko energijo v določenem frekvenčnem območju.

Zaradi prostorske razporeditve osnovne celice se je aditivna tehnologija izkazala kot odlični proces za izdelavo metastruktur. Geometrijsko kompleksne podstrukture lahko skoraj poljubno postavimo v prostoru in jih na makronivoju formuliramo v MM poljubne oblike.

Rešitev s pasivno vibroizolacijo ima prednost enostavnosti rešitve, brez kompleksnih mehanizmov, ki bi potrebovali zunanje napajanje ali krmiljenje. Negativna posledica je nezmožnost prilaganja na spremembe delovnih pogojev stroja ali okolice. Rešitev predstavlja semi-pasivna vibroizolacija, ki omogoča regulacijo in prilaganje na spremembe.

1.2 Cilji naloge

Osrednja problematika naloge je raziskava dinamike 3D tiskanih termoaktivnih metamaterialnih KNT vibroizolatorjev za uporabo v nizkofrekvenčnem področju.

V prvem delu naloge predstavimo MM in nato potrebne teoretične osnove za formulacijo ROC, ki izkazuje VSND togost ali KNT. Bistveno vlogo za doseganje KNT lastnosti nelinearnih vibroizolatorjev igrajo elementi z negativno togostjo (NT), saj nevtralizirajo pozitivno togost (PT) struktur. Pri naši izvedbi MM lahko NT lastnost dosežemo z vključitvijo bistabilne strukture, ki ob preskoku iz enega v drugo stabilno stanje nasprotuje PT strukture. Sledi dinamična obravnava MM kot neskončne periodične strukture sestavljene iz zaporedno vezanih ROC. Analitično lahko določimo frekvenčno pasovno vrzel, v kateri je odziv sistema manjši. To prikažemo v obliki disperzijskih krivulj.

Analitični popisi realnih struktur imajo svoje omejitve, saj je natančen popis geometrije nemogoč. S tem razlogom bomo problem statike ROC rešili z metodo končnih elementov (MKE) in se tako prepričali, da je analitični model dovolj natančen za zasnovno končne 3D tiskane ROC. Numerično določimo tudi prenosnost MM, ki nam pokaže, kako ta duši vibracije v območju pasovne vrzeli.

Za izvajanje zgoraj omenjenih analiz, potrebujemo materialne lastnosti MM in njegove ROC. Opišemo delovanje filimenta iz polilaktične kisline (PLA - *Polylactic acid*) z aditivom grafitnega prahu - torej GPLA (*Graphite Polylactic acid*), kar omogoča prevajanje elektrike skozi MM. Z uporovnim segrevanjem materiala preko Joulovega toka bomo dosegli njegovo mehčanje in zmanjšanje togosti, ki je bistvena lastnost pri obravnavi nihanja. Tako dosežemo adaptivni metamaterial, ki ima v primerjavi z pasivnimi vibroizolatorji prilagodljivo in posledično širše uporabno frekvenčno območje. Na GPLA vzorcih izmerimo potrebne materialne lastnosti za konkretno določitev parametrov ROC.

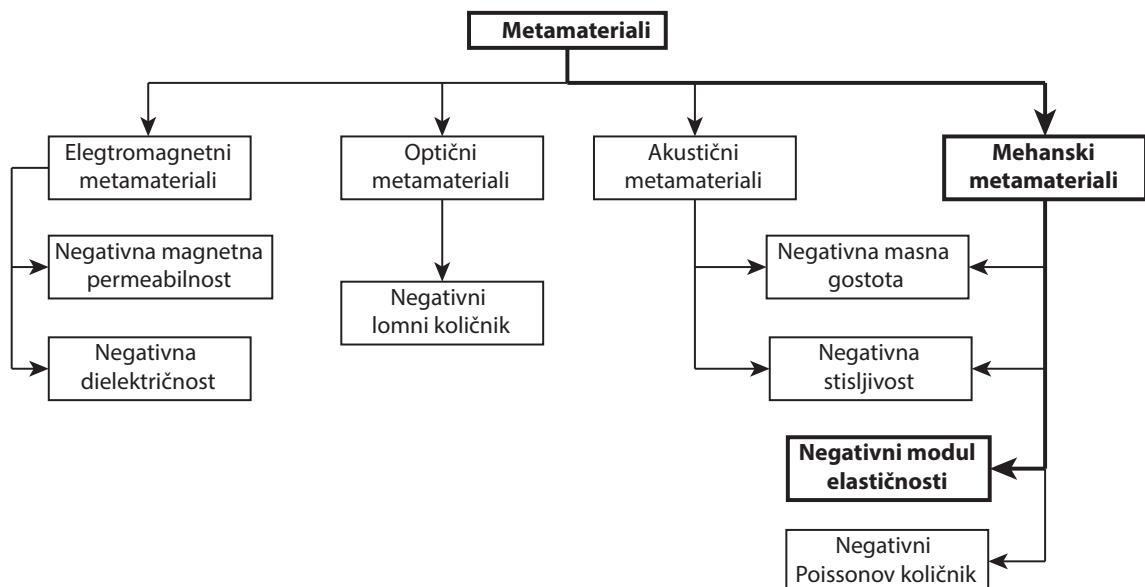
Zadnji korak je končno 3D tiskanje ROC in MM ter eksperimentalna meritev njihovih lastnosti. Tukaj bomo z spremenjanjem delovnih pogojev toka in posledično temperature, žeeli adaptivno krmiliti togost ROC. Pri metamaterialu bomo vpliv segrevanja videli preko premikanja njegove pasovne vrzeli.



2 Teoretične osnove

2.1 Osnove metamaterialov

Metamateriali (MM) so umetno strukturirani kompoziti, ki so zgrajeni iz periodično razporejenih gradnikov, ki ne le da izboljšujejo lastnosti osnovnega materiala, temveč dajejo tudi različne funkcionalnosti [1], kot so negativni lomni količnik, negativna masna gostota, negativno Poissonovo razmerje, negativna dielektričnost, negativna permeabilnost, negativna stisljivost, negativni koeficienta topotnega raztezka in tako dalej [2]. Lastnosti metamaterialov so spremenjene tako, da presegajo lastnosti, ki jih najdemo v naravi. Tam najdemo celične strukture, kot so votlosti v pluti ali kosteh, vendar tu ne gre za periodične strukture, vendar le naključno razporejene nehomogenosti materiala. Pravi MM imajo periodično razporejene reprezentativne osnovne celice (ROC) [3]. Prvi MM so bili uvedeni na elektromagnetnem področju, pozneje pa je bil koncept metamaterialov razširjen tudi na optiko, akustiko in navsezadnje tudi na mehaniku trdnih teles kot vibroizolator z negativno togostjo [2]. Klasifikacijo MM lahko vidimo na sliki 2.1.



Slika 2.1: Klasifikacija metamaterialov [2].

Mehanski in akustični metamateriali med drugim vključujejo celične metamateriale [4], pomožne metamateriale z negativnim Poissonovim količnikom [5], pentamode metamateriale z znatno večjim stisljivostnim modulom kot strižnim modulom [6], metamaterialne strukture na osnovi origamija [7] in materiale z lastnostjo pasovne vrzeli [8]. Te vsi so obetavni za nadzor vibracij in zvoka. V našem primeru uporabimo koncept metamateriala z lastnostjo pasovne vrzeli.

Mehanske metamateriale za vibroizolacijo lahko razvijemo tako, da v glavni strukturi naredimo nekaj mehanskih podenot ali reprezentativnih osnovnih celic (ROC), tako da lahko mehanski valovi, ki se prenašajo v gradnikih, resonirajo s podenotami strukture. MM tako izraža lastnosti pasovno zavrnitvenega filtra (PZF), kar pomeni, da v določenem frekvenčnem območju MM ne dopušča, ali vsaj bistveno zmanjša širjenje valovanja [9]. Naš cilj je torej razviti nov model MM za izboljšanje položaja in pasovne širine zavrnitvenega pasu. Obstajata dva pristopa za preučevanje značilnosti zapornih pasov: Braggovo sisanje (*ang. Bragg scattering*) in princip lokalnih resonanc [10].

Kadar je širjenje valovanja odvisno le od periodične razporeditve in velikosti ROC v mediju, se te imenujejo fononski kristali [11]. Pri fononskih kristalih je ena od najpomembnejših značilnosti učinek Braggovega sisanja, ki jih povzroči destruktivna interferenca prihajajočih in odbitih valov. Učinek Braggovega sisanja je omejen z velikostjo konstante mreže podstruktur [12]. Na splošno so mere ROC v MM običajno manjše od valovne dolžine lastnosti, na katero vplivajo. Za dušenje visokih frekvenc posledično potrebujemo majhne, za nizkofrekvenčne PZF pa bi potrebovali zelo velike ROC, kar je iz vidika izdelave metamateriala nepraktično.

Rešitev omejitve velikosti je učinek lokalne resonance [13]. Ta povzroči nizkofrekvenčno pasovno vrzel z mrežno konstanto, ki je za več redov manjša od valovne dolžine razširjajočih se valov. Fenomen pasovne vrzeli in pasovne širine, ki nastane zaradi lokalne resonance, je odvisen od geometrijskih parametrov in materialnih lastnosti resonatorjev; ni odvisen od periodičnosti in razporeditve ROC [14]. Običajno to pomeni, da je vsaka ROC sistem masa-vzmet, katere lastna frekvenca $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ je odvisna od togosti k njene interne vzmeti in mase m (poglavlje 2.3.1). Za nizkofrekvenčno izolacijo vibracij mora biti masa zelo velika bodisi togost majhna. Resonator je omejen z veliko maso ali majhno togostjo. Da bi premagali to omejitev lahko v ROC z obstoječo pozitivno togostjo (PT) dodamo negativno togost (NT) in tako linearno togost spremenimo v nelinearno. Tako dosežemo kvazi ničelno togost (KNT), kar omogoča PZF zelo nizkih frekvenc [15–17].

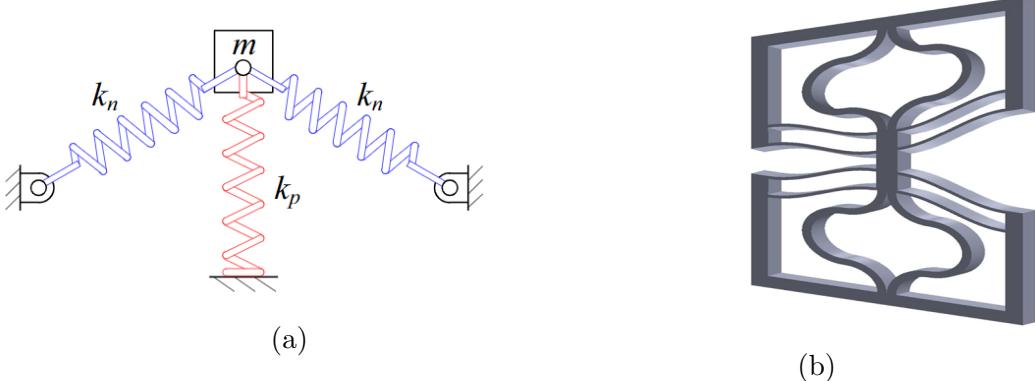
V sledečem poglavju 2.2 matematično zasnujemo ROC s KNT preko enačb strukturne statike in stabilnosti.

2.2 Analitična izpeljava ROC

V sledečem poglavju zasnujemo reprezentativno osnovno celico z visoko statično in nizko dinamično togostjo, ki ima lastnost kvazi ničelne togosti [15–17]. Za primer sistema z eno prostostno stopnjo, sposobnost pasivnega dušenja pri nizkih frekvencah zavisi od sposobnosti zagotoviti majhno togost ali veliko maso sistema. Ker je masa najpogosteje nespremenljiva, želimo čim manjšo togost, kar pa pomeni nesposobnost prenašanja večjih statičnih obremenitev. Torej želimo vibroizolacijo, kjer prvotno statično obremenitev prevzame visoka togost, dinamične obremenitve pa se srečajo z nizko togostjo rezonatorja. VSND togost dosežemo z nelinearno vzmetjo s KNT, ki jo dobimo tako, da pozitivni togosti nasprotujemo z negativno togostjo.

Najbolj tipični KNT vibroizolator [18] je sestavljen iz treh vzmeti - iz vertikalne vzmeti, ki nosi statične obremenitve na tlak in zagotavlja pozitivno togost k_p ter dveh paralelno vezanih horizontalnih vzmeti. Te nudijo negativno togost k_n , ki iznosi pozitivno togost navpične vzmeti (slika 2.2a).

Za našo aplikacijo metamateriala narejenega z aditivno tehnologijo, kjer je ROC zvezna struktura, moramo vzmeti nadomestiti s strukturam, ki so prijazne metodi izdelave. Pozitivno togost lahko tvorimo z navpičnimi ukrivljenimi nosilci in negativno togost z ukrivljenimi horizontalnimi nosilci, kjer imamo ob obremenitvi preskok sistema. Nosilci so zaprti znotraj bolj togega okvirja (slika 2.2b).



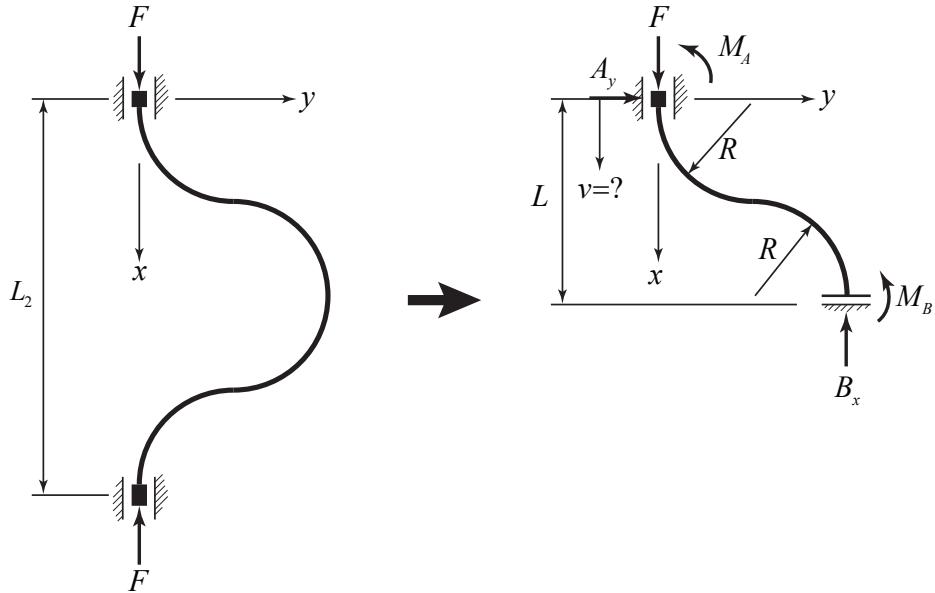
Slika 2.2: (a) Vzmetni KNT mehanizem in (b) 3D tiskana KNT ROC.

V sledečem poglavju analitično z enačbami statike, trdnosti in stabilnosti zasnujemo KNT ROC. Sprva izpeljemo enačbe za navpične nosilce za pozitivno togost k_p in nato enačbe za poševne nosilce z negativno togostjo k_n . Z glavnim pogojem KNT povežemo vse nosilce skupaj v ROC s KNT:

$$\frac{1}{2}(2k_p + k_n) = 0. \quad (2.1)$$

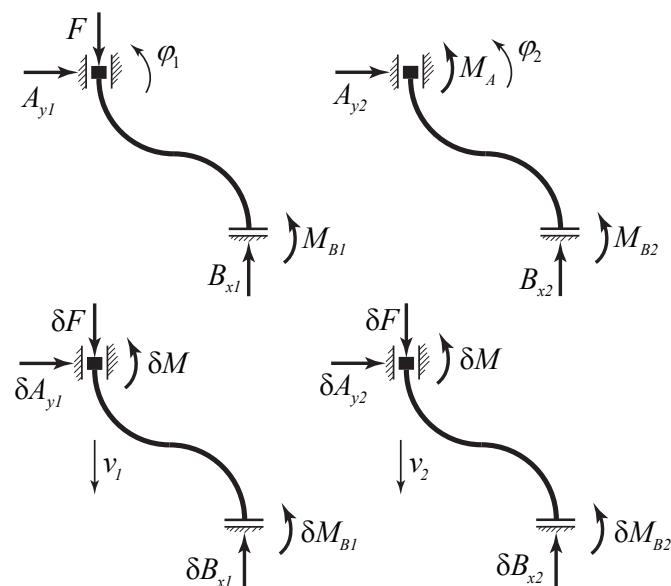
2.2.1 Izpeljava elementa s pozitivno togostjo

Pozitivni element je sestavljen iz simetričnih ukrivljenih nosilcev z togostjo k_p in ga obravnavamo kot en sam Eulerjev-Bernoullijev nosilec, pri čemer upoštevamo le notranji moment (slika 2.3). Zaradi simetrije obravnavamo le polovico enega od nosilcev in ga predstavimo v diagramu prostega telesa.



Slika 2.3: Diagram prostega telesa problema.

Osnovni sistem je statično nedoločen in ga razdelimo na dva določena glavna sistema, kjer je prvemu sistemu odvzeta momenta reakcija, ki se pojavi v drugem sistemu kot obremenitev (slika 2.4).



Slika 2.4: Glavni in virtualni sistemi.

Za izračun pomika togosti k_p uporabimo virtualno delo, ki je aplikacija principa najmanjše akcije - virtualno delo, ki ga opravi virtualna obremenitev, bo vedno minimalen. Vsakemu od glavnih sistemov (ločeno) pripisemo virtualne obremenitve δF in δM . Glavna sistema imata dve polji I in II, ki jih modeliramo kot četrtino krožnice $\varphi \in [0, \varphi/2]$. Glavni sistem 1 z obremenitvijo F in glavni sistem 2 z obremenitvijo M_A imata notranje momente definirane kot:

$$\begin{aligned} M_{I,1}(\varphi) &= -FR(1 - \cos \varphi) \\ M_{II,1}(\varphi) &= -FR(1 + \sin \varphi) \\ M_{I,2}(\varphi) &= -M_A \\ M_{II,2}(\varphi) &= -M_A, \end{aligned} \quad (2.2)$$

kjer je R polmer loka nosilca.

Virtualni moment δM povzroča rotacijo v točki A in je uporabljen za izračun neznane reakcijske sile M_A . Notranje obremenitve virtualnih sistemov so:

$$\delta M_{I,1} = \delta M_{II,1} = \delta M_{I,2} = \delta M_{II,2} = -\delta M. \quad (2.3)$$

Virtualno delo notranjih obremenitev δW_N in zunanjih obremenitev δW_Z , zaradi N sil in K momentov, je po principu virtualnih sil in momentov definirano kot:

$$\delta W_N = \int_s \frac{M \delta M}{EI} ds = \int_\varphi \frac{M \delta M}{EI} R d\varphi, \quad (2.4)$$

$$\delta W_Z = \sum_{i=1}^N \delta F_i \delta v_i + \sum_{j=1}^K \delta M_j \delta \varphi_j, \quad (2.5)$$

pri čemer je E modul elastičnosti in $I = I_1 = b t_1^3 / 12$ vztrajnostni moment prereza. b je globina in t_1 širina nosilca. Velja:

$$\delta W_N = \delta W_Z. \quad (2.6)$$

Za prvi sistem lahko izračunamo in nato iz enakosti v enačbi (2.6) dobimo φ_1 :

$$W_{N,1} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_{I,1} \delta M_{I,1}}{EI} R ds + \int_0^{\pi/2} \frac{M_{II,1} \delta M_{II,1}}{EI} R d\varphi = \pi \frac{FR^2 \delta M}{EI}, \quad (2.7)$$

$$W_{Z,1} = \delta M \varphi_1, \quad (2.8)$$

$$\varphi_1 = \pi \frac{FR^2}{EI}. \quad (2.9)$$

Podobno uporabimo notranje reakcije drugega glavnega in virtualnega sistema za:

$$\varphi_2 = \pi \frac{M_A}{EI}. \quad (2.10)$$

Dejanska rotacija je zaradi toge podpore omejena in velja pogoj $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$, kar pomeni, da je momentna reakcija v podpori enaka:

$$M_A = -FR. \quad (2.11)$$

Ker nas zanima togost $k_p = \Delta F / \Delta v$, potrebujemo skrček nosilca v navpični smeri v , ki je posledica delovanja virtualne sile δF v točki A. Notranje obremenitve so:

$$\begin{aligned}\delta M_{I,1}(\varphi) &= \delta M_{I,2}(\varphi) = -\delta F(1 - \cos \varphi), \\ \delta M_{II,1}(\varphi) &= \delta M_{II,2}(\varphi) = -\delta F(1 + \sin \varphi).\end{aligned}\quad (2.12)$$

Podobno kot smo že prej, uporabimo notranje reakcije prvega in drugega glavnega ter virtualnega sistema in nato preko virtualnega dela dobimo:

$$v_1 = \frac{3\pi}{2} \frac{FR^3}{EI} \text{ in} \quad (2.13)$$

$$v_2 = \pi \frac{M_A R^2}{EI} = -\pi \frac{FR^3}{EI}. \quad (2.14)$$

Navpični pomik elementa s pozitivno togostjo v_p povzroči dejanska sila F . Upoštevamo simetrijo, superpozicijo in dolžino celotnega nosilca, ki je $l_1 = 4R$. Vidimo, da je:

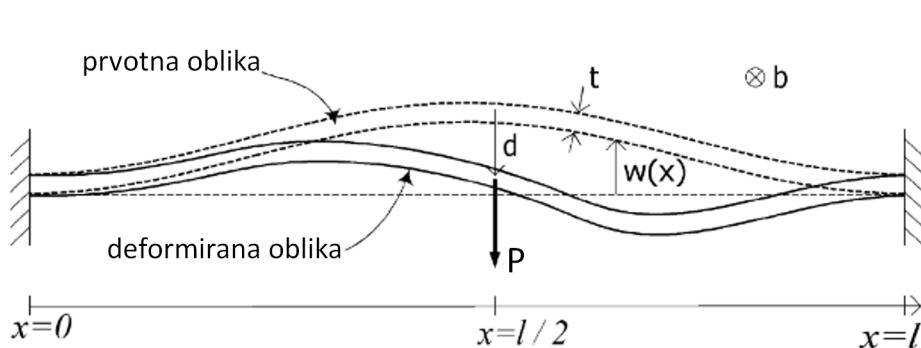
$$v_p = 2(v_1 + v_2) = \frac{\pi}{2^6} \frac{Fl_1^3}{EI_1}. \quad (2.15)$$

končno togost pozitivnega elementa izračunamo kot:

$$k_p = \frac{\Delta F}{\Delta v_p} = \frac{F - 0}{v_p - 0} = \frac{2^6 EI_1}{\pi l_1^3} \approx 20,372 \frac{EI_1}{l_1^3}. \quad (2.16)$$

2.2.2 Izpeljava elementa z negativno togostjo

Element z negativno togostjo ROC sestoji iz štirih togo vpetih kosinusnih lokov dolžine l_2 , globine b , debeline t_2 , razdaljo od poravnane lege do srednje linije loka h in modul elastičnosti E . Izpeljimo nadomestno togost iz sledeče bistabilnostne analize [19] spodnjega elementa (slika 2.5).



Slika 2.5: Shema kosinusnega nosilca [19].

Izhajamo iz enačbe Euler-Bernulijevega nosilca obremenjenega z aksialno silo P :

$$EI_2 \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

kjer je $w = w(x)$ prečni pomik nosilca. Togo vpet nosilec ima robne pogoje:

$$w(0) = w(l_2) = 0, \quad \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=l_2} = 0.$$

Vpeljemo definicijo normirane aksialne sile, ki je enaka:

$$N^2 = \frac{P l_2^2}{EI_2}. \quad (2.19)$$

Reševanje diferencialne enačbe vodi v pogojno enačbo:

$$\sin\left(\frac{N}{2}\right) \left[\tan\left(\frac{N}{2}\right) - \frac{N}{2} \right] = 0 \quad (2.20)$$

in dve vrsti rešitev, kjer je prva:

$$\left. \begin{aligned} w_j(x) &= C \left[1 - \cos\left(N_j \frac{x}{l_2}\right) \right] \\ N_j &= (j+1)\pi \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 3, 5 \dots \quad (2.21)$$

in druga:

$$\left. \begin{aligned} w_j(x) &= C \left[1 - 2 \frac{x}{l_2} - \cos\left(N_j \frac{x}{l_2}\right) + \frac{2 \sin\left(N_j \frac{x}{l_2}\right)}{N_j} \right] \\ N_j &= 2,86\pi; 4,92\pi \dots \end{aligned} \right\} \quad j = 2, 4, 6 \dots \quad (2.22)$$

Zgornja analiza podaja matematično osnovo stabilnostne analize uklona nosilca. Namesto prednapetega nosilca, lahko izhajamo iz nosilca, katerega izhodišče je hkrati prva deformacijska oblika z enačbo:

$$\bar{w}(x) = \frac{h}{2} \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{x}{l_2}\right) \right]. \quad (2.23)$$

Ob obremenitvi nosilca z lateralno silo F pri $x = l_2/2$, se središče nosilca ob predpostavki majhnih pomikov poda za d in dolžina nosilca postane s :

$$d = \bar{w}\left(\frac{l_2}{2}\right) - w\left(\frac{l_2}{2}\right), \quad (2.24)$$

$$s = \int_0^{l_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} dx \approx \int_0^{l_2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right] dx. \quad (2.25)$$

Spremembra s povzroči nastanek aksialne sile:

$$P = E b t \left(1 - \frac{s}{s_0} \right), \quad (2.26)$$

kjer je $s_0 = l_2$ začetna dolžina nosilca.

Med deformacijo je prisotna upogibna energija u_b , tlačna energija u_s in energija aktuacije u_f . Variacija energij je:

$$\partial u_b = \partial \left[\frac{EI}{2} \int_0^{l_2} \left(\frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} - \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \right], \quad (2.27)$$

$$\partial u_s = -P \partial s, \quad (2.28)$$

$$\partial u_f = -F \partial d. \quad (2.29)$$

Problem rešujemo s superpozicijo deformacijskih oblik. Deformacijske oblike po enačbah (2.21) in (2.22) so ortogonalne in jih lahko uporabimo tudi kot osnovo za izračun pomika w prvotno deformiranega nosilca, saj so robni pogoji enaki. Sprva normiramo parameter:

$$X = \frac{x}{l_2}, \quad W(X) = \frac{Xl_2}{h}. \quad (2.30)$$

Torej je superpozicija oblike nosilca:

$$W(X) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j W_j(X). \quad (2.31)$$

in obe rešitvi:

$$\left. \begin{aligned} W_j(X) &= 1 - \cos(N_j X) \\ N_j &= (j+1)\pi \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 3, 5 \dots \quad (2.32)$$

$$\left. \begin{aligned} W_j(x) &= 1 - 2X - \cos(N_j X) + \frac{2 \sin(N_j X)}{N_j} \\ N_j &= 2,86\pi; 1,92\pi \dots \end{aligned} \right\} \quad j = 2, 4, 6 \dots \quad (2.33)$$

Prvotna normirana oblika nosilca je:

$$\bar{W}(X) = \frac{1}{2} W_0(X). \quad (2.34)$$

Normiramo tudi preostale parametre:

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{Fl_2^3}{EI_2 h}, & \Delta &= \frac{d}{h}, & S &= \frac{sl_2}{h^2}, & Q &= \frac{h}{t_2} \\ U_b &= \frac{u_b l_2^3}{EI_2 h^2}, & U_s &= \frac{u_s l_2^3}{E_j I_2 h^2}, & U_f &= \frac{u_f l_2^3}{EI_2 h^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

pri čemer gre za brezdimenzijsko lateralno silo R , pomika nosilca Δ , dolžino nosilca S , razmerje višine in debeline ter upogibno U_b , tlačno U_s in aktuacijsko U_f energijo.

S superpozicijo in normiranjem lahko relacije (2.24) do (2.27) izrazimo kot:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 1 - 2 \sum_{j=1,5,9\dots} A_j, \\
 S &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^2 N_j^2}{4}, \\
 \frac{N^2}{12Q^2} &= (S)_{W=\bar{W}} - S = \frac{N_1^2}{16} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^2 N_j^2}{4}, \\
 \partial U_b &= \partial \left[\frac{\left(\frac{1}{2} - A_1\right)^2 N_1^4}{4} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{A_j^2 N_j^4}{4} \right], \\
 \partial U_s &= -N^2 \partial S = -N^2 \partial \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^2 N_j^2}{4} \right) \text{ in} \\
 \partial U_f &= -R \partial \Delta = 2R \sum_{j=1,5,9\dots} A_j.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Variacija celotne energije U_t je vsota posameznih energij:

$$\begin{aligned}
 \partial U_t &= \left(\frac{N_1^4 - N^2 N_1^2}{2} A_1 - \frac{N_1^4}{4} + 2F \right) \partial A_1 \\
 &\quad + \sum_{j=2,3,4,6,7\dots} \left(\frac{N_j^4 - N^2 N_j^2}{4} \right) \partial A_j^2 \\
 &\quad + \sum_{j=5,9,13\dots} \left(\frac{N_j^4 - N^2 N_j^2}{2} A_j + 2F \right) \partial A_j,
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

in mora biti minimizirana:

$$\partial U_t \geq 0. \tag{2.38}$$

Koeficienti ∂A_j , $j = 1, 5, 9, 13, \dots$ morajo biti nič, kar nam podaja:

$$A_1 = -\frac{1}{2} \frac{N_1^2}{N^2 - N_1^2} + \frac{4R}{N_1^2 (N^2 - N_1^2)}, \tag{2.39}$$

$$A_j = \frac{4F}{N_j^2 (N^2 - N_j^2)}, \quad j = 5, 9, 13 \dots \tag{2.40}$$

Enačbo (2.38) morajo izpolnjevati tudi koeficienti ∂A_j^2 , $j = 2, 3, 4, 6, 7, \dots$, ki imajo glede na pogoje vrednosti:

$$A_j \begin{cases} = 0, & N^2 < N_j^2 \\ \text{mora biti omejen} & N^2 > N_j^2 \\ \text{poljubna vrednost dokler je } j = 2, 3, 4, 6, 7, \dots & N^2 = N_j^2 \end{cases} \tag{2.41}$$

Iz praktičnih razlogov je mogoče mehansko omejiti le drugo deformacijsko obliko, ne da bi to vplivalo na prvo, zato drugi pogoj (2.41) narekuje, da lahko dobi j vrednost 2, kadar druga oblika ni omejena, ali 3, kadar je druga oblika omejena.

Enačba (2.41) omogoča tri vrste rešitev. Prva je:

$$\begin{cases} R = R_1 \\ N^2 < \begin{cases} N_1^2, & \text{z omejeno drugo deformacijsko obliko} \\ N_2^2, & \text{z neomejeno drugo deformacijsko obliko} \end{cases} \\ A_j = 0, \quad j \neq 1, 5, 9, 13 \dots \end{cases} \quad (2.42)$$

druga:

$$\begin{cases} R = R_2 \\ N^2 = N_2^2 \\ A_j = 0, \quad j \neq 1, 2, 5, 9, 13 \dots \end{cases} \quad (2.43)$$

in tretja:

$$\begin{cases} R = R_3 \\ N^2 = N_3^2 \\ A_j = 0, \quad j \neq 1, 3, 5, 9, 13 \dots \end{cases} \quad (2.44)$$

Z do sedaj izpeljanimi enačbami lahko definiramo relacijo med normirano obremenitvijo R in pomikom Δ kosinusnega nosilca. Če zanemarimo višje rede j -ja, lahko dobimo analitične rešitve. Torej pri $A_j = 0$ in $j = 5, 9, 13, \dots$ dobimo:

$$R_1 = \frac{3\pi^4 Q^2}{2} \Delta \left(\Delta - \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{3Q^2}} \right) \left(\Delta - \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{3Q^2}} \right) \quad (2.45)$$

$$R_2 = \frac{N_1^2 (N_2^2 - N_1^2)}{8} \left(\frac{N_2^2}{N_2^2 - N_1^2} - \Delta \right) = 4,18\pi^4 - 2,18\pi^4 \Delta \quad (2.46)$$

$$R_3 = \frac{N_1^2 (N_3^2 - N_1^2)}{8} \left(\frac{N_3^2}{N_3^2 - N_1^2} - \Delta \right) = 8\pi^4 - 6\pi^4 \Delta \quad (2.47)$$

R_2 obstaja, če imamo omejeno drugo obliko in če je $Q > 2N_2/\sqrt{3}N_1 = 1,67$.

R_3 obstaja, če imamo omejeno drugo obliko in če je $Q > 2N_3/\sqrt{3}N_1 = 2,31$.

Z omejeno drugo deformacijsko obliko in dovolj velikim $Q > 2,31$ lahko vse tri rešitve R lineariziramo. Če R_1 , R_2 , R_3 in Δ ponovno dimenzioniramo po enačbah (2.35), lahko za $Q \approx 6$ dobimo vrednosti spodaj:

$$\begin{aligned} F_{\text{zg}} &\approx 8\pi^4 \frac{EI_2 h}{l_2^3}, \quad F_{\text{sp}} \approx -4\pi^4 \frac{EI_2 h}{l_2^3}, \quad d_{\text{sr}} = 1,33h \\ d_{\text{zg}} &\approx \frac{8t_2}{3Q}, \quad d_{\text{sp}} \approx 2h - \frac{8t_2}{3Q}, \quad d_k \approx 2h - \frac{4t_2}{3Q}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Analitična rešitev je le aproksimacija, saj smo zanemarili višje člene enačbe (2.40). Z upoštevanjem višjih redov enačbe, bi dobili boljšo aproksimacijo togosti. Dodatno upoštevamo še dva člena:

$$\sum_{j=1,5,9,13\dots} \frac{4(N^2 - N_1^2)^2}{N_j^2 (N^2 - N_j^2)^2} F_1^2 - N_1^2 F_1 + \frac{N^2 (N^2 - N_1^2)^2}{12Q^2} - \frac{N_1^2 N^2 (N^2 - 2N_1^2)}{16} = 0, \quad (2.49)$$

kar vodi v parametre *F-d* krivulje za $Q \approx 6$, ki so grafično prikazani na sliki 2.7a :

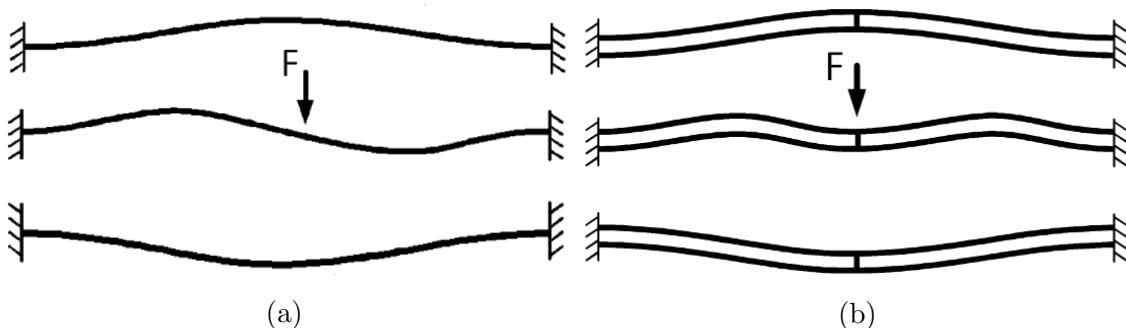
$$\begin{aligned} F_{\text{zg}} &\approx 740 \frac{EI_2 h}{l_2^3}, & F_{\text{sp}} &\approx -370 \frac{EI_2 h}{l_2^3}, & d_{\text{sr}} &= 1,33h \\ d_{\text{zg}} &\approx 0,16h, & d_{\text{sp}} &\approx 1,92h, & d_k &\approx 1,99h. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Strukturalna energija v ukrivljenem nosilcu med deformacijo vsebuje upogibno in tlačno energijo. Z vidika energije se upogibna energija v nosilcu monotono povečuje, kadar koli se nosilec premika navzdol; medtem ko se tlačna energija poveča do maksimuma pred preskokom na drugo stran. Če je nosilec zasnovan tako, da je zmanjšanje tlačne energije po prečkanju sredinske črte hitrejše od povečanja energije upogibanja, nastane negativna sila, kar kaže na bistabilnost.

Na podlagi zgoraj zapisanega, je kosinusni nosilec bistabilen, če sta izpolnjena pogoja:

1. Q (razmerje med višino vrha nosilca in njegovo debelino) mora biti dovolj velik,
2. druga deformacijska oblika mora biti omejena.

Pogoje lahko izpolnimo tako, da uporabimo strukturo z dvojnim kosinusnim nosilcem, ki ima med obema nosilcema togo povezavo. Središčna povezava prenaša rotacijo enega od središč nosilcev na osno gibanje drugega nosilca. Ker sta nosilca toga v aksialni smeri, se lahko rotacijsko gibanje obeh nosilcev močno zmanjša. Monostabilni mehanizem z enim nosilcem prikazan na sliki 2.6a, medtem ko je bistabilni dvojni ukrivljeni nosilci so prikazani na sliki 2.6b.



Slika 2.6: (a) Monostabilna in (b) bistabilna konstrukcija iz nosilcev [19].

Krivulja F - d dvojnega ukrivljenega nosilca bi bila videti tako, kot je prikazano na sliki 2.7a, pri čemer so vrednosti pomikov enake, vrednosti sile pa podvojene glede na vrednosti v enačbah (2.50):

$$\begin{aligned} F_{\text{zg}} &\approx 1480 \frac{EI_2 h}{l_2^3}, & F_{\text{sp}} &\approx -740 \frac{EI_2 h}{l_2^3}, & d_{\text{sr}} &= 1,33h \\ d_{\text{zg}} &\approx 0,16h, & d_{\text{sp}} &\approx 1,92h, & d_k &\approx 1,99h. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Z F - d diagrama 2.7a so iz naklona premic razvidna tri področja linearne togosti:

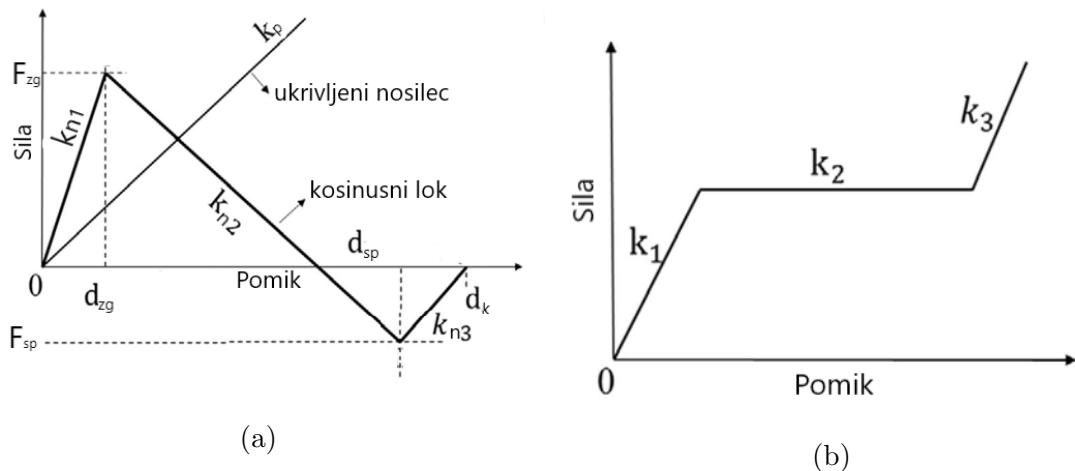
$$\begin{aligned} k_{n1} &= \frac{F_{\text{zg}} - 0}{d_{\text{zg}} - 0}, \\ k_{n2} &= \frac{F_{\text{sp}} - F_{\text{zg}}}{d_{\text{sp}} - d_{\text{zg}}}, \\ k_{n3} &= \frac{0 - F_{\text{sp}}}{d_k - d_{\text{sp}}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Prva nadomestna togost je k_{n1} , druga je iskana negativna togost k_{n2} , saj dosežemo negativne sile, in tretja je k_{n3} .

Izpeljane togosti so:

$$k_{n1} = 9250 \frac{EI_2}{l_2^3}, \quad k_{n2} = -1253,18 \frac{EI_2}{l_2^3} \text{ in } k_{n3} = 10571,42 \frac{EI_2}{l_2^3}. \quad (2.53)$$

V F - d diagram vrišemo tudi v poglavju 2.2.1 izpeljano togost k_p . V sledečem poglavju združimo elemente pozitivne in negativne togosti in tvorimo KNT ROC.



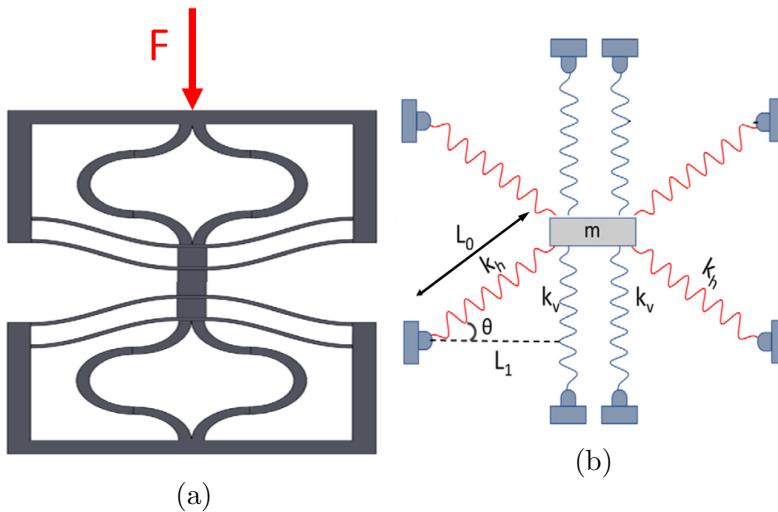
Slika 2.7: (a) F - d graf pozitivnega in negativnega nosilca in (b) celotne ROC [19].

2.2.3 Statična analiza ROC

Ker imamo z bistabilnim kosinusnim nosilcem negativne togosti (poglavlje 2.2.2) paralelno povezana dva nosilca pozitivne togosti (2.2.1), ter nato ta sistem zaporedno povezan z enakim sistemom, lahko posamezne nadomestne togosti seštejemo v:

$$k_1 = \frac{1}{2}(k_{n1} + 2k_p), \quad k_2 = \frac{1}{2}(k_{n2} + 2k_p) \text{ in } k_3 = \frac{1}{2}(k_{n3} + 2k_p). \quad (2.54)$$

Na tem mestu lahko upoštevamo prej zastavljeni pogoj za KNT (2.1) in za $k_2 = 0$ določimo to območje kot območje ničelne togosti. Torej ob stiskanju ROC v vertikalni smeri (slika 2.8a) na začetku potrebujemo vedno večjo silo F . Na neki točki ob pravilno dimenzioniranih nosilcih, za nadaljnjo pomikanje, sila ostaja enaka. To je zaradi negativne togosti k_{n2} , ki deluje z nasprotajočo silo. Ko nekaj časa pomikamo ROC, ponovno preidemo v območje pozitivne togosti in potrebna sila se spet poveča. V vmesnem področju imamo prisotno KNT. Na sliki 2.8b vidimo sistem vzmeti z maso, ki jo uporabimo kot referenco za izpeljavo povezave med razmerjem togosti μ in geometrijskega parametra γ , ki ju uporabimo za dimenzioniranje nosilcev [15].



Slika 2.8: (a) Shema ROC in (b) referenčni sistem z maso in vzmetjo.

Navpični nosilci k_v za pozitivno togost imajo enako togost kot vertikalne vzmeti:

$$k_v = k_p. \quad (2.55)$$

Bistabilna kosinusna nosilca sta z horizontalno vzmetjo togosti k_h povezana preko:

$$k_h \sin \theta = k_{n2}, \quad (2.56)$$

kjer predpostavimo, da je vertikalna komponenta ekvivalentne togosti horizontalne vzmeti enaka k_{n2} . Ko ROC doživi vertikalni pomik d iz statične ravnovesne lege, vsaka polovica doživi pomik $X = d/2$ in je sila kosinusnega nosilca:

$$F_h = k_h \left(L_0 - \sqrt{L_1^2 + X^2} \right). \quad (2.57)$$

Tukaj je L_0 prvotna razdalja od roba nosilca do njegove sredine in L_1 horizontalna razdalja od roba do sredine. Vertikalna komponenta kosinusnega sile nosilca F_{MNT} , ki služi kot mehanizem negativne togosti (MNT), je:

$$F_{\text{MNT}} = -F_h \sin \theta = -F_h \frac{X}{\sqrt{L_1^2 + X^2}}, \quad (2.58)$$

s kotom med kosinusnim nosilcem in horizontalno ravnino θ .

Za ROC je relacija sila-pomik:

$$F_v = k_v X \quad (2.59)$$

in relacija za MNT, pridobljena z združitvijo enačb (2.57) in (2.58), je:

$$F_{\text{MNT}}(X) = -\frac{1}{2}k_h \left(\frac{L_0}{\sqrt{L_1^2 + X^2}} - 1 \right) X. \quad (2.60)$$

Za zasnovano ROC je odvisnost sile od pomika:

$$\begin{aligned} F_{\text{ROC}}(X) &= F_v + F_{\text{MNT}}(X) \\ F_{\text{ROC}}(X) &= k_v X - \frac{1}{2}k_h \left(\frac{L_0}{\sqrt{L_1^2 + X^2}} - 1 \right) X. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Zgornjo enačbo lahko zapišemo v brezdimenzijski obliki z vpeljavo:

$$f_{\text{ROC}}(x) = \frac{F_{\text{ROC}}(X)}{k_v L_0}, \quad \mu = \frac{k_h}{k_v}, \quad \gamma = \frac{L_1}{L_0}, \quad x = \frac{X}{L_0}. \quad (2.62)$$

Tako lahko zapišemo brezdimenzijsko enačbo ROC na sliki 2.8a, ki je:

$$f_{\text{ROC}}(x) = x - \frac{1}{2}\mu \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + x^2}} - 1 \right) x. \quad (2.63)$$

Brezdimenzijsko odvisnost togosti in pomika dobimo z odvajanjem $f_{\text{ROC}}(x)$:

$$k_{\text{ROC}}(x) = 1 + \frac{1}{2}\mu - \frac{\mu\gamma^2}{2(\gamma^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (2.64)$$

Togost je najmanjša v ravnovesni legi $x = 0$. Za pridobitev karakteristike KNT izpeljemo za $k_{\text{KNT}} = k_{\text{ROC}}(x = 0) = 0$ pogojno razmerje μ_{KNT} in γ_{KNT} :

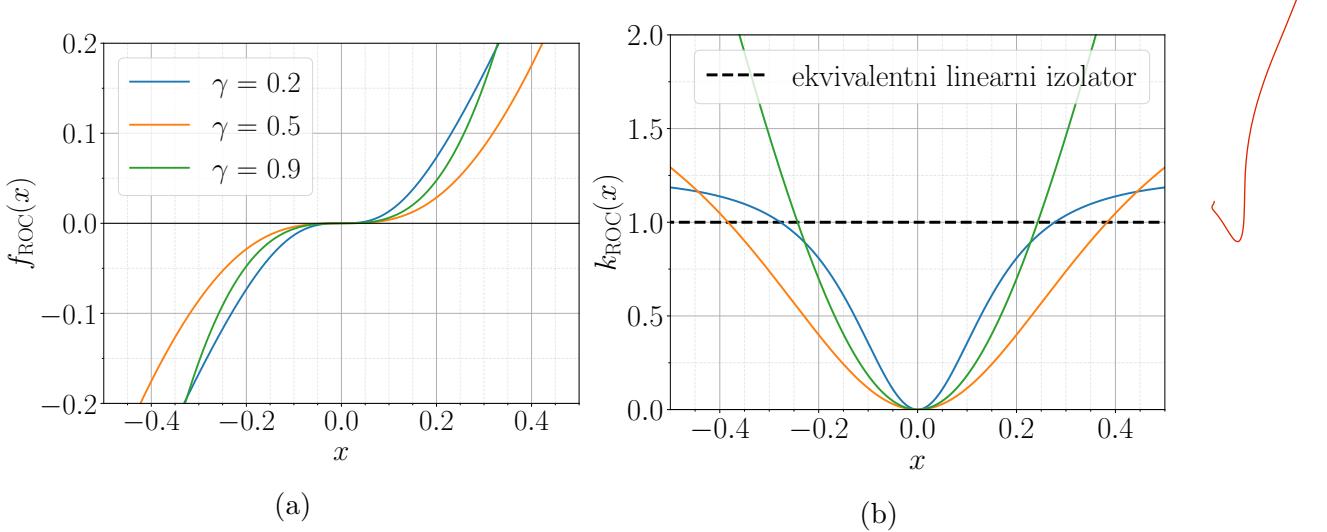
$$k_{\text{ROC}}(0) = 1 + \frac{1}{2}\mu \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) = 0, \quad (2.65)$$

$$\mu_{\text{KNT}} = \frac{2\gamma}{1 - \gamma}, \quad (2.66)$$

$$\gamma_{\text{KNT}} = \frac{\mu}{\mu + 2}. \quad (2.67)$$

Jasno je, da je togost v statičnem ravnovesju negativna in nestabilna, če je vrednost $\mu > \mu_{\text{KNT}}$ ali $\gamma < \gamma_{\text{KNT}}$. Za namene stabilne izolacije je bolje doseči pozitivno togost v ravnovesnem položaju z izbiro parametrov na podlagi pogojev $\mu < \mu_{\text{KNT}}$ ali $\gamma > \gamma_{\text{KNT}}$.

Brezdimenzijska sila kot funkcija brezdimenzijskega pomika v enačbi (2.63), je prikazana na sliki 2.9a za različne vrednosti γ pri $\mu = \mu_{\text{KNT}}$. Območje KNT je opazno, ko vrednost f_{ROC} ostane enaka nič pri spremenljajočem x . Območje KNT se povečuje s γ . Prav tako prikažemo brezdimenzijsko karakteristiko togosti in pomika $k_{\text{ROC}}(x)$, ki je prikazana na sliki 2.9b. S slike vidimo, da je v položaju statičnega ravnovesja $x = 0$ negativna togost, ki jo dobimo s kosinusnimi nosilci, popolnoma uravnovežena s pozitivno togostjo, tako da je kombinirana togost enaka nič.



Slika 2.9: (a) Brezdimenzijska sila in (b) togost z variiranjem γ pri $\mu = \mu_{\text{ROC}}$.

Iz krivulje togosti in pomika, prikazane na sliki 2.9b, je razvidno, da je za določeno območje pomika, v odvisnosti od γ , vrednost togosti KNT izolatorja manjša od vrednosti ekvivalentnega linearnega izolatorja. Območje pomikov, ki izpolnjuje nižjo vrednost togosti KNT izolatorja, je pomemben pokazatelj območja dovoljenih pomikov in ga lahko izračunamo tako, da nastavimo togost KNT izolatorja za manjšo od togosti ekvivalentnega linearnega izolatorja $k_{\text{ROC}}(x) < 1$. V definiciji za $k_{\text{ROC}}(x)$ upoštevamo $\mu = \mu_{\text{KNT}} = 2\gamma/1 - \gamma$ in dobimo:

$$|x| < \gamma^{2/3} \sqrt{1 - \gamma^{2/3}}, \quad (2.68)$$

$$L_{\text{sd}} = 2x = 2\gamma^{2/3} \sqrt{1 - \gamma^{2/3}}, \quad (2.69)$$

kjer je L_{sd} dolžina pomika z nizko togostjo. Največjo vrednost L_{sd} lahko dobimo z odvajanjem zgornje enačbe glede na γ in izenačitvijo z ničlo. Rešitev kaže, da je L_{sd} največja pri $\gamma = 0,5443$:

$$L_{\text{sd}}(\gamma = 0,5443) = 0,7698. \quad (2.70)$$

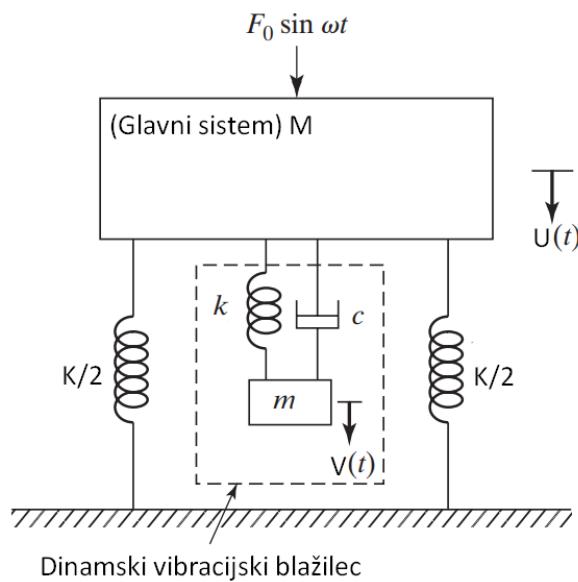
Če L_{sd} ponovno dimenzioniramo, dobimo velikost pomika s KNT lastnostmi.

2.3 Dinamika MM vibroizolatorja

Vibroizolacijo tvorimo z lastnostjo metamateriala (MM) kot pasovno zavrnitvenega filtra (PZF). Uporabimo učinek lokalne resonance, ki na nivoju posamezne celice deluje kot dvomasni vibracijski blažilec, predstavljen v 2.3.1. Idejo enodimenzionalnega blažilca lahko razširimo na več prostostnih stopenj tako, da ima vsaka ROC v MM svoj blažilec. Z analitično izpeljavo v 2.3.2 dosežemo pasivno vibroizolacijo v nizkih frekvencah z dušenjem mehanskega vala v enodimenzionalni verigi ROC-jev.

2.3.1 Dvomasni dušilec nihanj

Dinamični vibracijski blažilec (DVB) uporabimo za zmanjšanje neželenih vibracij stroja na katerem ga uporabimo [20]. DVB na sliki 2.10 sestoji iz mase m , ki je preko togosti k in dušenja c povezana na glavni objekt mase M in togosti K , katerega odzive želimo zmanjšati. Skupaj ju obravnavamo kot dinamični sistem z dvema prostostnima stopnjama. Pri tem je U translatorna prostostna stopnja glavnega sistema in V translatorna prostostna stopnja rezonatorja.



Slika 2.10: Nedušen sistem z DVB-jem [20] .

Izhodišče obravnavane sta gibalni enačbi sistema za maso M in m , pri čemer na prvo maso vpliva harmonično delajoča obremenitev z amplitudo F_0 in krožno frekvenco ω :

$$\begin{aligned} M\ddot{U} + Ku + c(\dot{U} - \dot{V}) + k(U - V) &= F_0 \sin \omega t, \\ m\ddot{V} + c(\dot{V} - \dot{U}) + k(V - U) &= 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Predpostavimo harmonski odziv:

$$\begin{aligned} U &= U_0 \sin \omega t, \\ V &= V_0 \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.72)$$

in za sistem enačb izpeljemo izraze amplitud mas m in M :

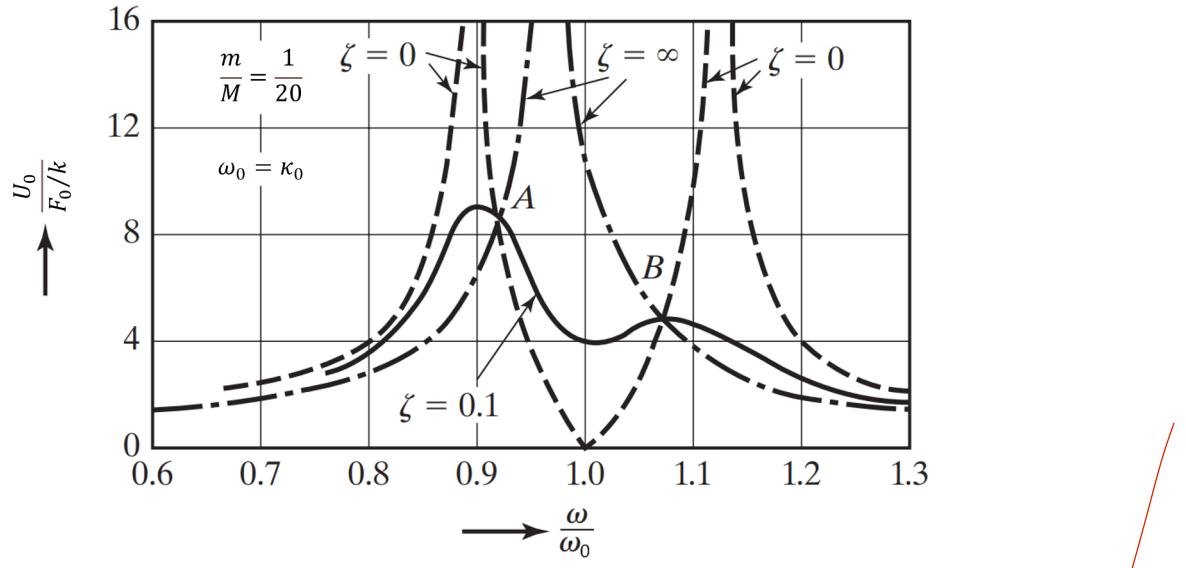
$$U_0 = \frac{F_0 (k - m \omega^2 + i c \omega)}{[(K - M \omega^2) (k - m \omega^2) - m k \omega^2] + i \omega c (K - M \omega^2 - m \omega^2)}, \quad (2.73)$$

$$V_0 = \frac{U_0 (k + i \omega c)}{(k - m \omega^2 + i \omega c)}. \quad (2.74)$$

Bistvo problema je zmanjšanje amplitude U_0 , ki predstavlja velikost odziva glavnega sistema. Definiramo razmerje mas $\beta = m/M$, krožne lastne frekvence glavnega sistema $\omega_0^2 = K/M$, krožne lastne frekvence rezonatorja $\kappa_0^2 = k/m$, njuno razmerje $\varkappa = \omega_0/\kappa_0$, razmerje vzbujevalne krožne frekvence in lastne frekvence glavnega sistema $\Omega = \omega/\omega_0$ in razmernik dušenja $\zeta = c/(2m\omega_0)$. Amplitude U_0 in V_0 , lahko izrazimo s spodnjimi enačbami in za $m/M = 1/20$ in nekaj različnih vrednosti ζ prikažemo odziv glavnega sistema z DVB-jem na sliki 2.11. Torej:

$$\frac{U_0}{F_0/K} = \left[\frac{(2\zeta\Omega)^2 + (\Omega^2 - \varkappa^2)^2}{(2\zeta\Omega)^2 (\Omega^2 - 1 + \beta\Omega^2)^2 + \{\beta\varkappa^2\Omega^2 - (\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - \varkappa^2)\}^2} \right]^{1/2}, \quad (2.75)$$

$$\frac{V_0}{F_0/K} = \left[\frac{(2\zeta\Omega)^2 + \varkappa^4}{(2\zeta\Omega)^2 (\Omega^2 - 1 + \beta\Omega^2)^2 + \{\beta\varkappa^2\Omega^2 - (\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - \varkappa^2)\}^2} \right]^{1/2}. \quad (2.76)$$



Slika 2.11: Dušen sistem z DVB-jem [20].

Za primer dušenja $c = \zeta = 0$ lahko vidimo, da je:

$$(k - m\omega^2)F_0 = 0, \\ \omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (2.77)$$

Če smo torej prvotni sistem vzbujali s krožno frekvenco blizu prve lastne frekvence:

$$\omega^2 \simeq \omega_0^2 = \frac{K}{M}, \quad (2.78)$$

sledi iz zgornjih enačb pogoj za dimenzioniranje DVB-ja pri zanemarljivem dušenju:

$$\omega^2 = \frac{K}{M} = \frac{k}{m}, \quad (2.79)$$

pri čemer je amplituda odziva z dodanim DVB-jem, kjer še vedno obratujemo pri originalnih pogojih z frekvenco ω_0 , tako nič. Z drugimi besedami je ustrezno dimenzioniran DVB tak, ki ima razmerje med svojo togostjo in maso enako kot je razmerje med togostjo in maso glavnega sistema.

Iz slike 2.11 je razvidno, da v točki A in B vse krivulje sovpadajo neodvisno od dušenja. S prisotnostjo dušenja pogoj (2.79) postane:

$$\Omega = \frac{1}{1 + \beta}. \quad (2.80)$$

Dobimo še dodatni pogoj za najboljše razmerje dušenja:

$$\zeta_{opt}^2 = \frac{3\beta}{8(1 + \beta)^3}. \quad (2.81)$$

V tem poglavju smo torej ugotovili, da lahko zmanjšamo odziv glavnega sistema z ustreznim dimenzioniranjem dinamičnega vibracijskega blažilca. Vidimo tudi, da ima DVB veliko pomanjkljivost. Majhen odziv sistema povzroči le v ozkem območju okoli prvotne lastne frekvence ω_0 .

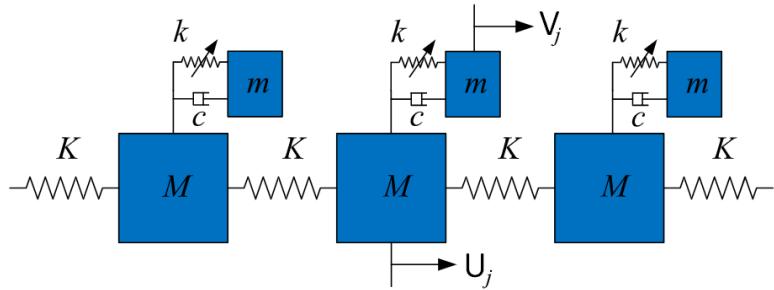
V primeru, da se vzbujevalna frekvenca ali lastnosti sistema glede na prvotno dimenzioniranje spremenijo, DVB ne bo več tako učinkovit, v okolici izven območja dušenja lahko pride celo do povečanja amplitud. Z ustreznim krmiljenjem mase m ali togosti k lahko povečamo uporabno območje DVB-ja. V našem primeru, kjer segrevamo GPLA in tako vplivamo na modul elastičnosti, lahko spremojamo togost resonatorja ROC-ja.

Velja tudi, da je lastna krožna frekvenca resonatorja $\kappa_0 = \sqrt{k/m}$ odvisna od togosti resonatorja k . za dušenje nizkih frekvenc bi potrebovali zelo majhno togost k , ki jo pri MM uresničimo z nelinearnostjo.

V sledečem poglavju 2.3.2 apliciramo teorijo 1D DVB na prej dimenzionirani ROC in tvorimo metamaterialno verigo z lastnostjo PZF.

2.3.2 Dinamika neskončne periodične verige

Enodimensionalni kvazi-ničelnii togostni metamaterial (1D KNT MM) lahko predstavimo kot model verige j -tih mas-togosti-dušilcev, ki je prikazan na sliki 2.12. V MM verigi, se v okvirju mase M nahaja resonator mase m . Vsak okvir ima prostostno stopnjo U_j in vsak resonator V_j . Resonatorji so v okvirje vpeti preko vzmeti z nelinearno karakteristično togostjo $k = k_{\text{ROC}}$, ki v ROC povzroča silo F_{ROC} in ima koeficient dušenja c . Posamezne osnovne celice so med seboj povezane v verigo preko vzmeti, ki jo tvorita dva elementna pozitivne togosti $K = 2k_p$ [17, 21].



Slika 2.12: enodimensionalna metamaterialna veriga.

Ko je število ROC neskončno, ali zadosti veliko, se tvori periodičnost verige, kjer ima vsaka celica periodične robne pogoje. Z j -to ROC lahko zapišemo gibalne enačbe:

$$M\ddot{U}_j + 2KU_j - KU_{j-1} - KU_{j+1} + c(\dot{U}_j - \dot{V}_j) + F_{\text{ROC}}(U_j - V_j) = 0 \quad (2.82)$$

$$m\ddot{V}_j + c(\dot{V}_j - \dot{U}_j) + F_{\text{ROC}}(V_j - U_j) = 0. \quad (2.83)$$

Za analizo pretvorimo enačbi v brezdimenzijsko obliko z vpeljavo:

$$\begin{aligned} \tau &= \omega_0 t, \quad u_j = \frac{U_j}{L_0}, \quad v_j = \frac{V_j}{L_0}, \quad q_j = v_j - u_j, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{k m}} \\ \alpha &= \frac{k}{K}, \quad \beta = \frac{m}{M}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}, \quad \kappa_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{\kappa_0}{\omega_0}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Razen τ , ki predstavlja brezdimenzijski čas, smo spremenljivke že definirali v poglavju 2.3.1. Vpeljemo tudi brezdimenzijsko silo $f_{\text{ROC}} = F_{\text{ROC}}/(k_v L_0)$ iz poglavja 2.2.3. Nadaljnji časovni odvodi diferencialnih enačb (2.82) in (2.83) so tako po brezdimenzijskem času:

$$u''_j + 2u_j - u_{j-1} - u_{j+1} - 2\zeta\beta\varkappa q'_j - \alpha f_{\text{ROC}}(q_j) = 0, \quad (2.85)$$

$$q''_j + 2\zeta\varkappa q'_j + \varkappa^2 f_{\text{ROC}}(q_j) + u''_j = 0. \quad (2.86)$$

Za nadaljnjo analizo brezdimenzijsko silo $f_{\text{ROC}}(q_j)$ v enačbi (2.63) v okolici ravnovesne legi $q_j = 0$ s pomočjo Taylorjeve aproksimacije razvijemo v:

$$f_{\text{ROC}}(q_j) = \frac{1}{2} \left(2 + \mu - \frac{\mu}{\gamma} \right) q_j + \frac{\mu}{4\gamma^3} q_j^3 - \frac{3\mu}{16\gamma^5} q_j^5 + \frac{5\mu}{32\gamma^7} q_j^7 + \dots \quad (2.87)$$

Z upoštevanjem ponovne izpeljave enačb (2.66), (2.67) za konstantno togost (namesto posplošenega pogoja KNT) $k_{\text{ROC}}(0) = v$ ter z aproksimacijo petega reda, dobimo:

$$\begin{aligned} f_{\text{ROC}}(q_j) &\approx vq_j + \frac{1-v}{2\gamma^2(1-\gamma)}q_j^3 - \frac{3(1-v)}{8\gamma^4(1-\gamma)}q_j^5, \\ f_{\text{ROC}}(q_j) &\approx vq_j + \delta q_j^3 + \eta q_j^5. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Analitična rešitev nelinearnega sistema enačb (2.85) in (2.86) ni znana. Aproksimativno rešitev je mogoče dobiti z uporabo metode harmonskega ravnotežja [22, 23]. Predpostavimo periodični odziv pomika $q_j(\tau)$ v obliki kompleksne Fouriereve vrste:

$$q_{k,j}(\tau) = \sum_k \epsilon^{(k-1)/2} A_{k,j} e^{ik\Omega\tau} + \epsilon^{(k-1)/2} \bar{A}_{k,j} e^{-ik\Omega\tau}, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \quad (2.89)$$

kjer je ϵ brezdimenzijski parameter, ki kaže na red amplitude gibanja in $\Omega = \omega/\omega_0$ normirana lastna krožna frekvenca. Višje rede zanemarimo in za $k = 1$ dobimo:

$$q_j(\tau) = A_j e^{i\Omega\tau} + \bar{A}_j e^{-i\Omega\tau}. \quad (2.90)$$

Nastavek vstavimo v enačbo (2.86) in dvojno integriramo glede na τ , kjer dobimo izraz odziva j -te mase, ter pri tem zanemarimo člene višjega reda $\mathcal{O}(A_j e^{3i\Omega\tau})$:

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{A_j}{\Omega^2} [A_j \bar{A}_j (v + 3\delta + 10A_j \bar{A}_j \eta) \varkappa^2 + 2i\varepsilon \varkappa \Omega - \Omega^2] e^{i\Omega\tau} + \dots \\ &\dots + \frac{\bar{A}_j}{\Omega^2} [A_j \bar{A}_j (v + 3\delta + 10A_j \bar{A}_j \eta) \varkappa^2 + 2i\varepsilon \varkappa \Omega - \Omega^2] e^{-i\Omega\tau} + \mathcal{O}(A_j e^{3i\Omega\tau}). \end{aligned} \quad (2.91)$$

Nastavek (2.90) in zgornjo enačbo (2.91) vstavimo v (2.85) in nastavimo koeficiente pred $e^{\pm i\Omega\tau}$ na nič. Dobimo amplitudno-frekvenčni enačbi:

$$\begin{aligned} A_{j-1} + A_{j+1} - A_j (2 + (v + A_j \bar{A}_j (3\delta + 10A_j \bar{A}_j \eta)) (\alpha + \varkappa^2)) - \dots \\ \dots + \frac{\varkappa^2}{\Omega^2} (3A_{j-1}^2 \bar{A}_{j-1} \delta - 6A_j^2 \bar{A}_j \delta + 10A_{j-1}^3 \bar{A}_{j-1}^2 \eta) - \dots \\ \dots - \frac{\varkappa^2}{\Omega^2} (20A_j^3 \bar{A}_j \eta + A_{j-1} v - 2A_j v) + \dots \\ \dots + \frac{\varkappa^2}{\Omega^2} (A_{j+1} (A_{j+1} \bar{A}_{j+1} (3\delta + 10A_{j+1} \bar{A}_{j+1} \eta) + v)) - \dots \\ \dots - \frac{2i(A_{j-1} - 2A_j + A_{j+1}) \varepsilon \varkappa}{\Omega} - 2iA_j(1 + \beta) \varepsilon \varkappa \Omega + A_j \Omega^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{j-1} + \bar{A}_{j+1} - \bar{A}_j (2 + (v + A_j \bar{A}_j (3\delta + 10A_j \bar{A}_j \eta)) (\alpha + \varkappa^2)) - \dots \\ \dots + \frac{\varkappa^2}{\Omega^2} (3A_{j-1} \bar{A}_{j-1}^2 \delta - 6A_j \bar{A}_j^2 \delta + 10A_{j-1}^2 \bar{A}_{j-1}^3 \eta) - \dots \\ \dots - \frac{\varkappa^2}{\Omega^2} (20A_j^2 \bar{A}_j^3 \eta + A_{j+1} \bar{A}_{j+1}^2 (3\delta + 10A_{j+1} \bar{A}_{j+1} \eta)) + \dots \\ \dots + \frac{\varkappa^2}{\Omega^2} ((\bar{A}_{j-1} - 2\bar{A}_j + \bar{A}_{j+1}) v) - \dots \\ \dots - \frac{2i(A_{j-1} - 2A_j + A_{j+1}) \varepsilon \varkappa}{\Omega} - 2iA_j(1 + \beta) \varepsilon \varkappa \Omega + A_j \Omega^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.93)$$

V zgornje enačbe lahko vstavimo specifične vrednosti amplitud mase j kot tudi sosednjih mas $j+1$ in $j-1$, dobimo sistem enačb za amplitudo odziva pritrjenega oscilatorja. Sistem je nelinearen in ima posledično lahko več rešitev. Amplitudo vala, ki potuje po MM verigi dobimo tako, da vstavimo amplitudo pritrjenega oscilatorja v enačbo (2.91). Val, ki potuje po MM verigi preko pomikov u_j lahko določimo tudi tako, da definiramo faktor širjenja valovanja μ_u , ki predstavlja valovno število k_u pomnoženo z razdaljo med masami ROC-jev L_u . Pomika sosednjih mas, lahko definiramo kot:

$$u_{j\pm 1} = B_j e^{\pm i\mu_u} e^{i\Omega\tau} + \bar{B}_j e^{\pm i\mu_u} e^{-i\Omega\tau}, \quad (2.94)$$

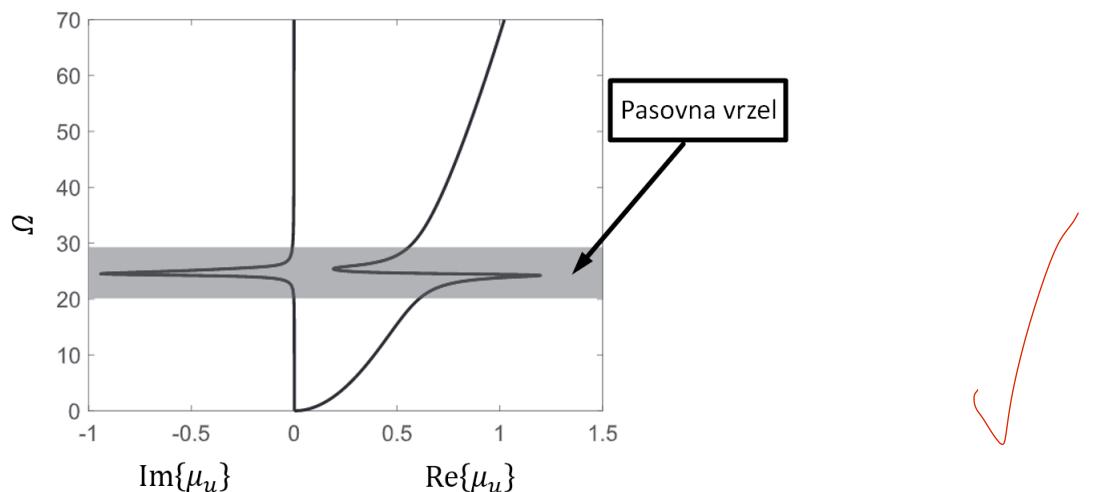
pri čemer so B_j in \bar{B}_j koeficienti pred $e^{\pm i\Omega\tau}$ enačbe (2.91). Zgornjo enačbo, kot tudi enačbo (2.90) vstavimo v enačbo (2.85), enačimo koeficiente pred $e^{\pm i\Omega\tau}$ z nič in rešimo za μ_u , ter tako dobimo enačbo disperzijskih krivulj:

$$\cos \mu_u = \frac{2\kappa^2(A_j \bar{A}_j(3\delta + 10A_j \bar{A}_j \eta) + v) + 4i\zeta\kappa\Omega + \dots}{\dots - (2 + (\alpha + \kappa^2)(A_j \bar{A}_j(3\delta + 10A_j \bar{A}_j \eta) + v))\Omega^2 - 2i(1 + \beta)\zeta\kappa\Omega^3 + \Omega^4} \\ \frac{2\kappa^2(A_j \bar{A}_j(3\delta + 10A_j \bar{A}_j \eta) + v) + 4i\zeta\kappa\Omega - 2\Omega^2}{2\kappa^2(A_j \bar{A}_j(3\delta + 10A_j \bar{A}_j \eta) + v) + 4i\zeta\kappa\Omega - 2\Omega^2} \quad (2.95)$$

Disperzijske krivulje so grafično prikazane na sliki 2.13, kjer so prikazane realne in imaginarni komponente rešitve. Končno lahko zapišemo razmerje med pomikoma u_j in u_{j+1} kot:

$$u_{j+1} = e^{\text{Im}\{\mu\}} u_j e^{-i\text{Re}\{\mu\}}. \quad (2.96)$$

Do dušenja mehanskih valov v verigi pride v tako imenovani pasovni vrzeli, kjer je $e^{\text{Im}\{\mu\}}$ manj kot 1. Valovi pri drugih frekvencah izven pasovne vrzeli, potujejo brez izgube energije. Dodatno velja, da je fazni zamik $\text{Re}\{\mu\}$ potupočega vala odvisen od μ . Znotraj pasovne vrzeli, je dušenje največje pri minimumu $e^{\text{Im}\{\mu\}}$, torej pri $\Omega = \kappa$. Z drugimi besedami, je frekvenca vzbujanja enaka lastni frekvenci resonatorjev $\Omega = \kappa_0$.



Slika 2.13: enodimensionalna metamaterialna veriga.

2.4 Frekvenčna prenosna funkcija

Definiramo frekvenčno prenosno funkcijo (FPF) in njene cenilke H_1 in H_2 , na podlagi katerih lahko določimo vibroizolativne sposobnosti MM ter koherenco meritev kasnejših poglavij. FPF je kompleksna funkcija, ki povezuje izhodni odziv sistema z vhodno motnjo. Kasneje definiramo tudi prenosnost $T(\omega)$, ki spada v družino FPF. Poglejmo si kako analitično definirati sistema z več prostostnimi stopnjami in nato grafično prikažimo njegovo FRF funkcijo [24].

2.4.1 Sistem z več prostostnimi stopnjami

Realne strukture so zvezni in nehomogeni elastični sistemi, ki imajo neskončno število prostostnih stopenj, ki jih lahko analiziramo kot sisteme s končnim številom prostostnih stopenj. Za N prostostnih stopenj definiramo N diferencialnih enačb pri čemer upoštevamo histerezno dušenje:

$$\xrightarrow{\text{VDPD}} \ddot{\{x\}}(t) + C \{x(t)\} + [M]\{x(t)\} + i[D]\{x(t)\} = \{f(t)\}, \quad (2.97)$$

pri čemer je $[M]$ masna matrika, $[D]$ disipativna matrika histereznega dušenja in $[K]$ togostna matrika sistema in $\{x(t)\}$ vektor pomika, $\{\ddot{x}(t)\}$ vektor pospeška in $f(t)$ sila vzbujanja v N -ti prostostni stopnji. Vpeljemo lahko idejo proporcionalnega dušenja, kjer je $[D] = \varepsilon[K] + \nu[M]$, kjer sta ε in ν konstanti. Zanemarimo $\{f(t)\}$ in predpostavimo obstoj rešitve:

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}\} e^{i\lambda t}, \quad (2.98)$$

kjer je $\{\bar{X}\}$ vektor amplitud odziva in jo vstavimo v enačbo (2.97). Dobimo:

$$[[K] - \lambda^2[M]] + i[\varepsilon[K] + \nu[M]] \{\bar{X}\} = \{0\}. \quad (2.99)$$

katere rešitev je N kompleksnih lastnih vrednosti λ_r^2 , ki nosijo informacije o r -ti lastni frekvenci, pri čemer je $\omega_r = 2\pi f_r$ krožna lastna frekvenca, f_r lastna frekvenca in $\eta_r = \varepsilon + \nu/\omega_r^2$ faktor izgub:

$$\lambda_r^2 = \omega_r^2 (1 + i\eta_r). \quad (2.100)$$

Lastne frekvence lahko dobimo za sistem v prostem nihanju. Za sistem več prostostnih stopenj z vzbujanjem upoštevamo $\{f(t)\} = \{F\} e^{i\omega t}$ in iz enačbe (2.97) dobimo:

$$\{\bar{X}\} = [[K] - \omega^2[M] + i[D]]^{-1} \{F\} = [\alpha(\omega)] \{F\}, \quad (2.101)$$

kjer je $[\alpha(\omega)]$ $N \times N$ receptančna matrika, ki nosi vse informacije o dinamiki sistema (odzivni model sistema). Vsak element $\alpha_{jk}(\omega)$ predstavlja posamezni FRF $H_{jk}(\omega)$, ki opisuje razmerje med odzivom na določeni koordinati j in eno silo, ki deluje na koordinati k . Za histerezni model imamo za vsako kompleksno lastno vrednost λ_r lastni vektor $\{\Psi_r\}$, ki zadovolji enačbo:

$$[[K] + i[D] - \lambda_r^2[M]] \{\Psi_r\} = \{0\}. \quad (2.102)$$

Lastni vektorji tvorijo linearne neodvisne bazne vektorje N -dimenzionalnega prostora:

$$\{\bar{X}\} = \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\Psi_r\}, \quad (2.103)$$

pri čemer je γ_r še nedoločena konstanta. Vstavimo v enačbo (2.102), upoštevamo ortogonalnost lastnih vektorjev in z upoštevanjem modalne mase m_r in modalne togosti k_r izpeljemo:

$$\gamma_r = \frac{\{\Psi_r\}^T \{F\}}{K_r - \omega^2 n_r}. \quad (2.104)$$

Zgornjo enačbo vstavimo v definicijo baznega vektorja (2.103) in dobimo:

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}\} e^{i\omega t} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi_r\}^T \{F\} \{\Psi_r\}}{k_r - \omega^2 m_r} e^{i\omega t} \quad (2.105)$$

ter posledično:

$$\{\bar{X}\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi_r\}^T \{F\} \{\Psi_r\}}{M_r (\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2)}. \quad (2.106)$$

Če nas zanima le en sam element receptančne matrike, na primer odziv na koordinati j zaradi vzbujanja ene same harmonične sile, ki deluje na koordinati k , to pomeni, da bo imel vektor $\{F\}$ samo en ne-ničelni element, lahko zlahka dobimo:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_{jr} \Psi_{kr}}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2)}. \quad (2.107)$$

Zgornji element odziva z več prostostnimi stopnjami zlahka interpretiramo kot superpozicijo N odzivov ene prostostne stopnje. Če upoštevamo masno normirane lastne vektorje $\{\Phi_r\} = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \cdot \{\psi_r\}$, dobimo:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r A_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2}, \quad (2.108)$$

kjer je ${}_r A_{jk} = |{}_r A_{jk}| e^{i {}_r \varphi_{jk}}$ kompleksna modalna konstanta za katero velja:

$$|{}_r A_{jk}| = \left| \frac{\Psi_{jr} \Psi_{kr}}{M_r} \right| = |\phi_{jr} \phi_{kr}| \quad (2.109)$$

$${}_r \varphi_{jk} = \arg \left(\frac{\Psi_{jr} \Psi_{kr}}{M_r} \right) = \arg (\phi_{jr} \phi_{kr}). \quad (2.110)$$

Omenimo še nekatere pomembne lastnosti $\alpha_{jk}(\omega)$. Receptančna matrika je simetrična, saj je $\alpha_{jk}(\omega) = \alpha_{kj}(\omega)$, kar je znano tudi kot Maxwellov recipročni teorem. Druga lastnost je skupina enačb modalne konsistentnosti:

$$\begin{aligned} {}_r A_{jk} &= \phi_{jr} \phi_{kr} \\ {}_r A_{jj} &= \phi_{jr}^2 \quad \text{ali} \quad {}_r A_{kk} = \phi_{kr}^2, \end{aligned} \quad (2.111)$$

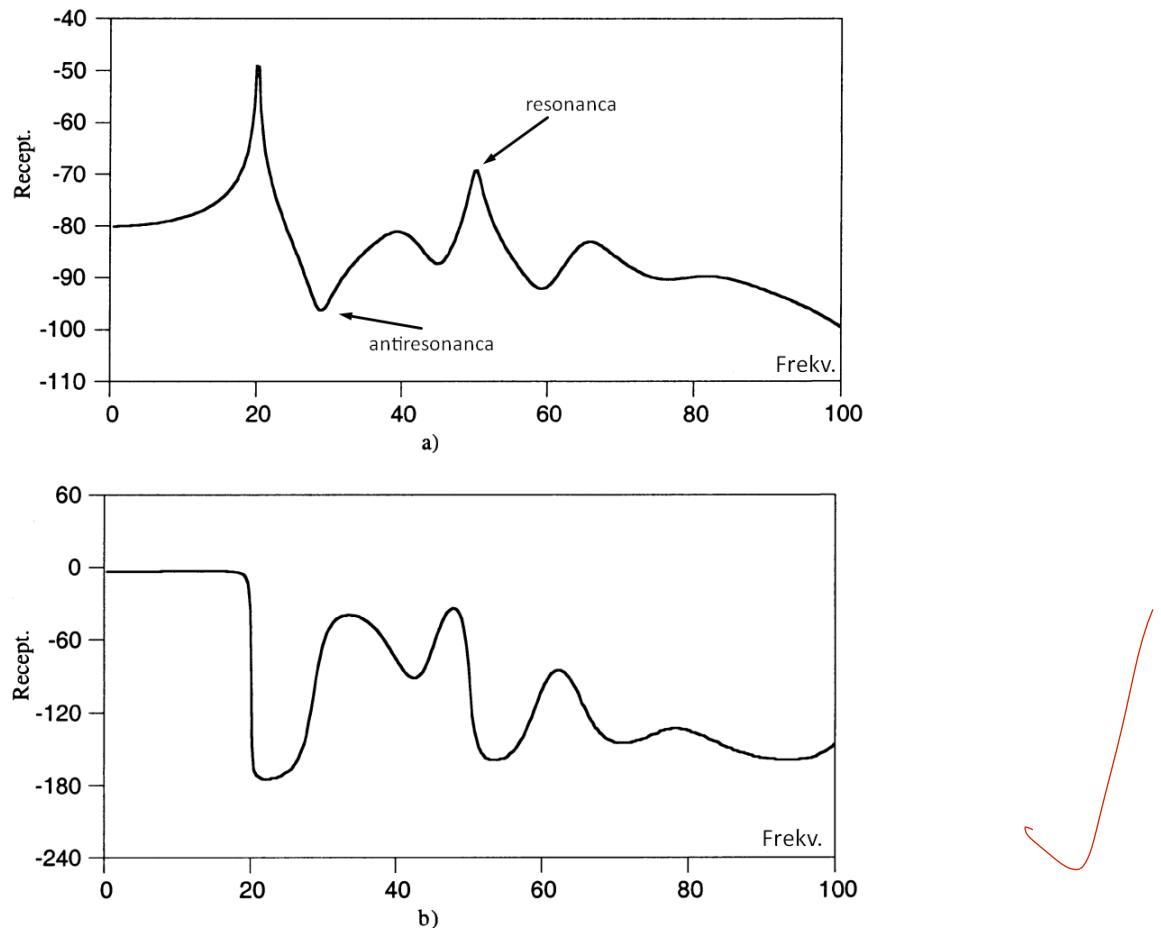
ki pravijo da če je znana vrstica ali stolpec receptančne matrike $[\alpha(\omega)]$, potem je znana celotna matrika. Poglejmo si sedaj kako intuitivno grafično prikažemo in interpretiramo FRF-je.

2.4.2 Grafični prikaz in lastnosti FRF-ja

Videli smo, da je odzivni model sistema več prostostnih stopenj sestavljen iz niza različnih funkcij FRF in pokazali smo, da sistem z N stopnjami prostosti opisuje modalni model z N lastnimi frekvencami in modalnimi vektorji. Prav tako je bilo pokazano, da se lahko vsak FRF zapiše v obliki niza izrazov, od katerih vsak prispeva k skupnemu odzivu nihanja. Za primer vzemimo histerezno dušen sistem s pet prostostnimi stopnjami.

Najpogosteje FRF-je prikažemo v Bodejevem diagramu, ki ga vidimo na sliki 2.14. na x -osi leži frekvenca ω na y -osi pa v prvem primeru absolutna vrednost receptance $|\alpha_{jk}(\omega)|$ v logaritemski skali in v drugem primeru faza receptance $\text{ang}(\alpha_{jk})$. Lastne frekvence lahko določimo v petih resonančnih vrhovih magnitudnega diagraoma. Te spremljajo najnižji vrhovi, kjer je antiresonanca ozziroma najmanjši odziv. Fazni diagram pokaže spremembo faze pri prehodu skozi lastno frekvenco. Dušenje na graf vpliva tako, da so vrhovi magnitude manj osti, fazni grafi pa nimajo več prehoda med točno 0° in -180° .

Za izvajanje modalne identifikacije ne uporabimo direktno eksperimentalno določenih FRF-jev $H(\omega)$ ampak njihove cenične funkcije H_1 ali H_2 , ki upoštevajo možno prisotnost šuma na vhodu in izhodu.



Slika 2.14: (a) Amplitudni in (b) fazni del Bodejevega diagrama [24].

2.4.3 Cenilke frekvenčne prenosne funkcije

Iz izmerjenega pospeška $a_N(t)$, ki predstavlja izhodno meritev $y(t)$, in pospeška $a_1(t)$, ki je vhodna meritev $x(t)$, lahko določimo cenilke FRF-ja H_1 in H_2 ter definiramo koherenčno funkcijo $\gamma_{fx}(\omega)$ [24]. Vsak realni signal je naključni nedeterministični pojav in ga obravnavamo probabilistično. Opredelimo autospekter vhoda S_{xx} in izhoda S_{yy} , ter križni spekter vhoda in izhoda S_{xy} ter S_{yx} .

Za naključni vhodni signal $x(t)$, lahko zapišemo Fourierjevo transformacijo kot:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad (2.112)$$

Totalna energija signala je $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$ in se približuje z neskončno dolgim časom opazovanja pojava T neskončnosti. Upoštevamo povprečje $\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$ in Parsevalov teorem:

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 df. \quad (2.113)$$

Člen:

$$\hat{S}_{xx}(\omega) = |X_T(\omega)|^2 / T \quad (2.114)$$

imenujemo enostavni spekter moči. Če enostavni spekter moči povprečimo:

$$E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \right\} = E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} df \right\} \quad (2.115)$$

in določimo varianco:

$$\sigma_x^2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(\omega)|^2}{T} df \quad (2.116)$$

sledi autospekter, ki je definiran kot povprečje variance:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E |X(\omega)|^2}{T}. \quad (2.117)$$

Križni spekter z nekaj generalizacijo definiramo podobno kot autospekter:

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \hat{S}_{xy} \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \{ X^*(\omega) Y(\omega) \}}{T}, \quad (2.118)$$

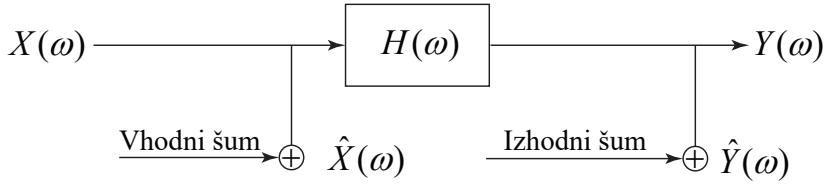
kjer sta $X(\omega)$ in $Y(\omega)$ Fourierjevi transformaciji $x(t)$ in $y(t)$ za $|t| < T/2$.

Razvijmo enačbe za razmerje med ne-determinističnim vhodnim in izhodnim signalom za časovno invarianten linearen sistem. Izhajamo iz Duhamelovega integrala:

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau, \quad (2.119)$$

ki je preko Fouriereve transformacije (slika 2.15) zapisan kot:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega). \quad (2.120)$$



Slika 2.15: Blokovni diagram Fouriereve transformacije.

Pokažemo lahko:

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \text{ in} \\ S_{xy}(\omega) &= H(\omega)S_{xx}(\omega) \end{aligned} \quad (2.121)$$

na podlagi česar izpeljemo cenilke H_1 in H_2 kot:

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} \\ H_2(\omega) &= \frac{S_{yy}(\omega)}{S_{yx}(\omega)}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Cenilka H_1 je občutljiva na vhodni šum in FRF podcenjuje. H_2 je občutljiva na izhodni šum in FRF precenjuje.

Koherenčna funkcija ali le koherenca med vhodnim signalom $x(t)$ in med izhodnim signalom $y(t)$ je definirana kot:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)} = \frac{H_1}{H_2} \quad (2.123)$$

in zanjo velja $0 \leq \gamma_{xy}^2(\omega) \leq 1$. Če preverimo koherenco sistema je $\gamma_{xy}^2(\omega) = 1$ za vse frekvence ω . Takrat je izhod $y(t)$ linearno odvisen od vhoda $x(t)$.

Bolj kot je sistem nelinearen (več kot je šuma, dodatni vhodi poleg $x(t)$) bolj koherenca pada proti nič. Grafični prikazi cenilke H_1 in koherenčne so v poglavju 4.3.

2.5 Metoda končnih elementov

Ker ima realni metamaterial v resnici končno število reprezentativnih celic in ker so te za analitično reševanje preveč kompleksne, bomo njegovo dinamiko rešili z uporabo metode končnih elementov (MKE). V poglavju 3.1 uporabimo MKE v povezavi z eksperimentalnimi meritvami tudi za določitev modula elastičnosti E osnovnega materiala.

MKE je iskanje rešitev kompleksnega realnega problema z uporabo poenostavljenega modela, ki sestoji iz številnih delov, imenovanih končni elementi (KE). Torej zvezno območje diskretiziramo v podobmočja, zato je MKE po naravi aproksimativna metoda in je uporabna takrat, kadar analitična rešitev ni mogoča. Metoda je tudi numerična, saj se končna oblika algebrajskih enačb izrazi v sistemskih matrikah, kar zelo efektivno omogoča računalniško reševanje sistemov velikega števila KE.

Neodvisno od geometrije in celo od vrste fizikalnega problema, ki ga želimo rešiti z MKE, so osnovni koraki formulacije vedno enaki. Preko njih bomo na osnovi pregleda literature [25] izpeljali enačbe MKE in reševali dinamsko analizo lastnih nihanj DVA-ja.

Korak 1: Razdelitev fizikalnega modela v diskrete elemente (diskretizacija).

Na tem mestu izberemo tip, število in velikost KE. Problem bomo reševali z splošnimi volumskimi heksaedričnimi KE.

Korak 2: Izbira aproksimacijskega modela.

Izberemo obliko poljubne aproksimacijske funkcije, ki določa aproksimacijo primarne spremenljivke. Najpogosteje gre za polinomske funkcije.

Korak 3: Izpeljava matrik končnega elementa.

Za KE v svojem lokalnem koordinatnem sistemu (KS) diferencialno enačbo fizikalnega problema zapišemo kot integralno variacijsko formulacijo. Uporabimo prej izbrano interpolacijsko funkcijo in dobimo značilne matrike sistema v lokalnem KS. Sledi transformacija koordinat v globalne matrike.

Korak 4: Sestavljanje matrik posameznega končnega elementa v sistemsko matriko. Matrike posameznih elementov razširimo na vse prostostne stopnje in jih seštejemo.

Korak 5: Upoštevanje začetnih pogojev ter robnih in prehodnih pogojev.

Korak 6: Reševanje sistema enačb.

Definirajmo sedaj gibalne enačbe končnega elementa za reševanje problema lastnih nihanj in jih kasneje aplicirajmo na oba uporabljeni tipa končnih elementov.

2.5.1 Gibalne enačbe končnega elementa

Pomike po območju končnega elementa \vec{U} , aproksimiramo preko diskretnih vrednosti pomikov vozlišč \vec{Q}^e in matrike oblikovnih oziroma aproksimacijskih funkcij $[N]$:

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = [N(x, y, z)]\vec{Q}^e(t). \quad (2.124)$$

Za KE lahko izrazimo specifične deformacije $\vec{\epsilon}$ in napetosti $\vec{\sigma}$:

$$\vec{\epsilon} = [B]\vec{Q}^e, \quad (2.125)$$

$$\vec{\sigma} = [D]\vec{\epsilon} = [D][B]\vec{Q}^e, \quad (2.126)$$

kjer je $[B]$ matrika odvodov oblikovnih funkcij in $[D]$ materialna matrika, v kateri se nahaja modul elastičnosti. Z odvajanjem enačbe (2.124) po času definiramo polje pomikov, kjer je $\dot{\vec{Q}}^e$ diskretna vrednost vozliščnih hitrosti:

$$\dot{\vec{U}}(x, y, z, t) = [N(x, y, z)]\dot{\vec{Q}}^e(t). \quad (2.127)$$

Gibalne enačbe izpeljemo preko Lagrangeve formulacije:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right\} - \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} \right\} + \left\{ \frac{\partial E_d}{\partial Q} \right\} = \{0\}, \quad (2.128)$$

kjer je Lagrangian \mathcal{L} definiran z razliko kinetične E_k in potencialne E_p energije. Za vsak element lahko kinetično, potencialno in disipacijsko energijo zapišemo kot E_d :

$$E_k^e = \frac{1}{2} \iiint_{V^e} \rho \dot{\vec{U}}^T \dot{\vec{U}} dV, \quad (2.129)$$

$$E_p^e = \frac{1}{2} \iiint_{V^e} \vec{\epsilon}^T \vec{\sigma} dV - \iint_{S^e} \vec{U}^T \vec{\Phi} dS - \iiint_{V^e} \vec{U}^T \vec{\phi} dV, \quad (2.130)$$

$$E_d^e = \frac{1}{2} \iiint_{V^e} c \vec{U}^T \dot{\vec{U}} dV. \quad (2.131)$$

Pri tem je ρ gostota in c koeficient dušenja. $\vec{\Phi}$ je vektor sil na zunanjih površinah in $\vec{\phi}$ vektor sil kot posledica volumskih obremenitev elementa. Seštejemo energije po posameznih elementih:

$$E_k = \sum_{e=1}^E E_k^e = \frac{1}{2} \vec{Q}^T \left[\sum_{e=1}^E \iiint_{V^e} \rho [N]^T [N] dV \right] \dot{\vec{Q}}, \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} E_p = \sum_{e=1}^E E_p^e &= \frac{1}{2} \vec{Q}^T \left[\sum_{e=1}^E \iiint_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \right] \vec{Q} \\ &\quad - \vec{Q}^T \left(\sum_{e=1}^E \iint_{S^e} [N]^T \vec{\Phi}(t) dS^e + \iiint_{V^e} [N]^T \vec{\phi}(t) dV \right) - \vec{Q}^T \vec{F}_c(t), \end{aligned} \quad (2.133)$$

$$E_d = \sum_{e=1}^E E_d^e = \frac{1}{2} \vec{Q}^T \left[\sum_{e=1}^E \iiint_{V^{(e)}} c [N]^T [N] dV \right] \dot{\vec{Q}}. \quad (2.134)$$

Pri tem so \vec{Q} globalni vektor vozliščnih pomikov, $\dot{\vec{Q}}$ hitrosti in \vec{F}_c vektor koncentriranih vozliščnih sil. Iz zgornjih izrazov lahko razberemo masno $[M^e]$, togostno $[K^e]$ in disipacijsko $[C^e]$ matriko posameznega elementa in vektor ekvivalentnih vozliščnih sil zaradi površinskih učinkov \vec{F}_S^e ter zaradi volumskih učinkov \vec{F}_V^e :

$$[M^e] = \iiint_{V^e} \rho [N]^T [N] dV, \quad (2.135)$$

$$[K^e] = \iiint_{V^e} [B]^T [D] [B] dV, \quad (2.136)$$

$$[C^e] = \iiint_{V^e} c [N]^T [N] dV, \quad (2.137)$$

$$\vec{F}_S^e = \iint_{S^e} [N]^T \vec{\Phi} \cdot dS, \quad (2.138)$$

$$\vec{F}_V^e = \iint_{V^e} [N]^T \vec{\phi} \cdot dV. \quad (2.139)$$

Če lokalne matrike razširimo na vse prostostne stopnje in jih seštejemo dobimo masno $[M]$, togostno $[K]$ in disipacijsko $[C]$ matriko celotnega sistema. Seštevek vseh ekvivalentnih vozliščnih vrednosti sil po vseh elementih F_S^e in F_V^e in dodatni prispevek vseh koncentriranih vozliščnih vrednosti nam vrne globalni vektor vozliščnih sil $\vec{F}(t)$. Definicijo masne, togostne in disipacijske matrike upoštevamo pri energijskih izrazih, ki jih vstavimo v enačbo (2.128) in dobimo globalni sistem gibalnih enačb pridobljen z metodo končnih elementov, pri čemer je $\ddot{\vec{Q}}$ vektor globalnih vozliščnih pospeškov:

$$[M] \ddot{\vec{Q}}(t) + [C] \dot{\vec{Q}}(t) + [K] \vec{Q}(t) = \vec{F}(t). \quad (2.140)$$

V nadaljnji obravnavi lahko zanemarimo dušenje:

$$[M] \ddot{\vec{Q}}(t) + [K] \vec{Q}(t) = \vec{F}(t). \quad (2.141)$$

2.5.2 Statična analiza pri velikih pomikih

Če želimo ovrednotiti nelinearne učinke KNT vzmeti poglavja 2.2 z uporabo MKE, moramo razumeti, da obstajajo tri vrste nelinearnosti, ki jih moramo upoštevati. Materialne nelinearnosti so potrebne za napovedovanje plastičnih deformacij. Kontaktne nelinearnosti so potrebne za napovedovanje spremembe stanja in drsnega trenja med sestavnimi deli. Tretja možnost, geometrijska nelinearnost, vključuje spremembe geometrije, ki vodijo v povečanje togosti [26].

V enačbi (2.125) smo specifične deformacije definirali kot linearne funkcije diskretnih vrednosti pomikov vozlišč \vec{Q}^e . Pri velikih pomikih ne moramo predpostaviti linearne odvisnosti deformacije. Postopamo tako, da je togost $[K]$ enačbe (2.141) funkcija pomika, zanemarimo pa tudi $[M]$:

$$[K(\vec{Q})] \vec{Q} = \vec{F}. \quad (2.142)$$

Ker je numerično reševanje nelinearnega problema kompleksno, postopamo tako, da rešujemo iterativno in ob vsakem časovnem koraku primerjamo linearno togost $[K]$ pridobljeno iz statičnega ravnovesja sil enačbe (2.141) in posodobimo geometrijo.

2.5.3 Analiza lastnih nihanj

Poljubnemu sistemu lahko v začetku opazovanja dodelimo neke začetne pogoje, nato pa mu prepustimo, da prosto niha. Po vnosu začetnih pogojev struktura ni pod vplivom nobene zunanje sile in pravimo, da je sistem v stanju proste vibracije [27]. Matematični izhodišče pri iskanju lastnih frekvenc (lastnih vrednosti) in pripadajočih lastnih oblik predstavlja enačba (2.141), pri čemer je $\vec{F} = 0$:

$$[M]\ddot{\vec{Q}} + [K]\vec{Q} = \vec{0}. \quad (2.143)$$

Gre za sistem n homogenih gibalnih enačb, kjer je n število prostostnih stopenj. Za nedušene in harmonične proste vibracije iščemo rešitev kot n harmonskih funkcij zapisanih v vektorski notaciji kot:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 e^{i\omega t}, \quad (2.144)$$

kjer so iskane neznane vrednosti amplitude \vec{Q}_0 in lastne frekvence ω . Sistem ima n lastnih frekvenc ter enako število lastnih oblik. Nastavek (2.144) uporabimo v enačbi (2.143):

$$\begin{aligned} -\omega^2[M]\ddot{\vec{Q}}_0 e^{i\omega t} + [K]\vec{Q}_0 e^{i\omega t} &= \vec{0} \quad / \text{predp. } e^{i\omega t} \neq 0, \\ ([K] - \omega^2[M])\vec{Q}_0 &= \vec{0} \quad / \text{z leve pomnožimo z } [M^{-1}], \\ ([A] - \lambda[I])\vec{Q}_0 &= \vec{0}, \end{aligned} \quad (2.145)$$

kjer je matrika $[A] = [M^{-1}][K]$ imenovana dinamska matrika sistema. $\lambda = \omega^2$ je parameter, ki vodi do lastnih vrednosti sistema. Netrivialna rešitev zahteva vsaj eno neničelno amplitudo v vektorju \vec{Q}_0 , torej iščemo neničelnost determinante ali karakteristično enačbo sistema:

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0, \quad (2.146)$$

Razvoj determinante pripelje do polinoma n -te stopnje:

$$\lambda^n + X_1\lambda^{n-1} + \dots + X_n = 0, \quad (2.147)$$

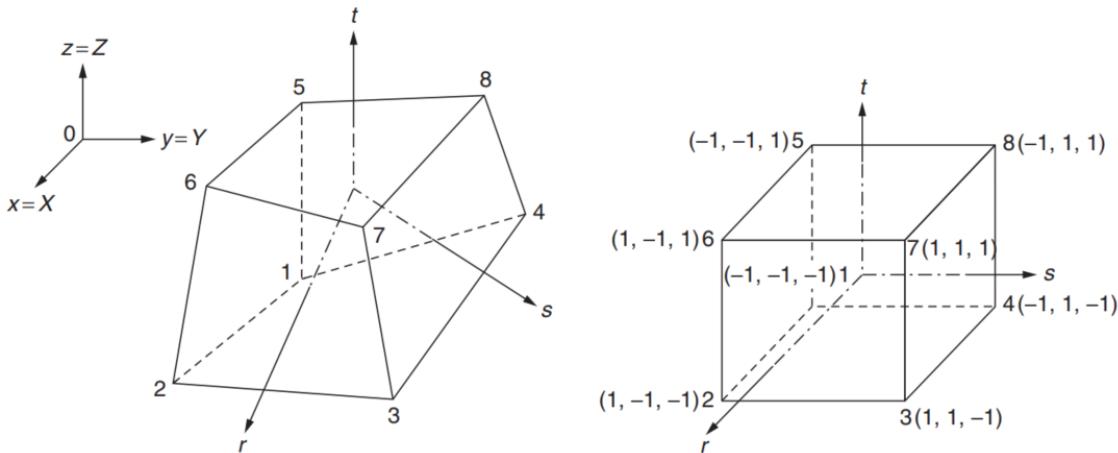
iz katerega izrazimo n lastnih vrednosti sistema. Lastne vrednosti uredimo po velikosti λ_i , $i = 1, \dots, n$, tako da najmanjše število pomeni prva lastna vrednost in hkrati prva lastna frekvenco f_0 :

$$f_{0,i} = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{2\pi}; \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.148)$$

Z vstavljanjem izračunanih lastnih vrednosti λ_i v enačbo (2.145) izračunamo pripadajoče lastne vektorje \vec{Q}_i . Lastni vektorji ne predstavljajo dejanske amplitude, temveč medsebojno relativne vrednosti. Če te relativne vrednosti normiramo in formuliramo v vektor \vec{Q} , ta predstavlja modalno obliko pripadajoče lastne frekvence. V sistemu z velikim številom matrik (v resnici že pri 3×3 matriki) postane postopek iskanja lastnih vrednosti analitično težko rešljiv. Lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje iščemo numerično. Numerične metoda hkrati vrnejo sezname lastnih vrednosti λ ter seznam desnih normiranih lastnih vektorjev \vec{Q} .

2.5.4 Masna in togostna matrika končnih elementov

V izpeljavi dinamičnih enačb po metodi končnih elementov vidimo, da potrebujemo določiti masno in togostno matriko končnega elementa. Natančno geometrijo meta-materiala popišemo z heksaedričnimi volumskimi KE. Te tvori osem vozlišč $i = 1-8$, katerega vsako ima tri prostostne stopnje u_i, v_i, w_i . Izpeljavo izvedemo za izoparametrični KE, tako da je element v naravnem koordinatnem sistemu (KS) r, s, t vedno kocka (slika 2.16). Preko Jakobijeve matrike $[J]$ lahko izpeljavo v naravnem transformiramo v kartezijev KS. Velja, da lahko zaradi fizike ponekod problem obravnavamo poenostavljeni. Takrat lahko KE poenostavimo na dvodimenzionalne.



Slika 2.16: Heksaedrični KE v kartezijevem (levo) in naravnem (desno) KS [25].

Enačbi za masno matriko pridobljeno z (2.135) in togostno matriko z (2.136) se v primeru izoparametričnega heksaedričnega KE glasita:

$$[M^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho ([J]^{-1}[N])^T ([J]^{-1}[N]) \det[J] dr ds dt, \quad (2.149)$$

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([J]^{-1}[B])^T [D] ([J]^{-1}[B]) \det[J] dr ds dt, \quad (2.150)$$

kjer je matrika oblikovnih funkcij v naravnem KS:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & \dots & N_8 \end{bmatrix}, \quad (2.151)$$

$$N_i(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + m_i) (1 + ss_i) (1 + tt_i); \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (2.152)$$

in matrika odvodov oblikovnih funkcij, ki je dimenzije 6×24 :

$$[B] = [[B_1] [B_2] \dots [B_8]]. \quad (2.153)$$

Jakbijeva matrika je definirana kot:

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} x_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial t} z_i \right) \\ \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial s} x_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial t} y_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} z_i \right) \\ \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial t} x_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} y_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial s} z_i \right) \end{bmatrix}. \quad (2.154)$$

2.6 Termoaktivne lastnosti PLA

Polilaktična kislina ali PLA (*Polylactic acid*) je termoplastični poliester in je eden najbolj pogosto uporabljenih filamentov FFF (*fused filament fabrication*) 3D tiskalnikov. Prednost te bioplastike je relativno dobra reciklabilitnost [28].

Bistvena lastnost polimernega materiala je steklasti prehod iz trdnega v tekoče pri temperaturi steklenja T_g . Pri sobni temperaturi je PLA trd in krhek, z višanjem temperature preide v steklasto stanje (od $0,8 T_g$ do T_g) in nato v gumielastično področje (od T_g do $1,4 T_g$), kjer se material z višanjem temperature mehča a plastično ne deformira. Pri ponovnem ohlajevanju se material povrne v prvotno stanje. Pri segrevanju nad $1,4 T_g$ material preide v plastično in nato talilno področje [29].

Mehčanje materiala z višanjem temperature se izraža kot padanje modula elastičnosti E ozziroma togosti materiala, ki je temeljna karakteristika pri obravnavi dinamskih sistemov. Naš cilj je ugotoviti povezavo med modulom elastičnosti in temperaturo ter preko nje krmili togost metamateriala. To dosežemo v poglavju 3.1.

Sprva torej potrebujemo mehanizem preko katerega bomo material lahko segrevali. Osnovnemu PLA-ju lahko z različnimi aditivi spremenimo lastnosti.

V naši aplikaciji je bistvenega pomena dodatek grafitnega prahu, ki tvori GPLA (ang. *Graphite Polylactic acid*). Električna prevodnost grafita znatno zniža specifično upornost ϱ GPLA-ja. Električni tok I pri napetosti U , ki teče skozi dušilec z uporom:

$$R = \varrho l/A, \quad (2.155)$$

kjer je A površina prečnega preseka in l dolžina DVB-ja, povzroča segrevanje zaradi Joulove moči $P = I^2 R$. Upoštevamo konvekcijo in zapišemo energijski zakon [30]:

$$m c_p \frac{dT(t)}{dt} = I^2 R - h_s A_s (T(t) - T_\infty), \quad (2.156)$$

kjer je $m = \rho Al$ masa dušilca z gostoto ρ , $c_p = 1600 \text{ J/kgK}$ specifična toplota materiala [31] in A_s celotna površina v kontaktu z zrakom s koeficientom toplotne prestopnosti h_s . $T = T(t)$ je temperatura DVB-ja ob času t in T_∞ temperatura okolice, pri čemer je $T(t=0) = T_\infty$. Rešimo diferencialno enačbo:

$$T(t) = T_\infty + \frac{AU^2 \left(1 - e^{-\frac{A_s h_s}{Ac_p l \rho} \cdot t}\right)}{A_s h l \varrho}. \quad (2.157)$$

Pokazali smo, da lahko z električnim tokom GPLA segrejemo. Z zgornjo enačbo analitično aproksimiramo potrebno električno napetost $U = \Delta V$, da v času t dosežemo potrebno temperaturo.

Kasneje v eksperimentalnem delu povežemo temperaturo z modulom elastičnosti, kar pomeni, da lahko preko električne napetosti, ki jo je dokaj enostavno nadzirati, krmilimo togost metamateriala.

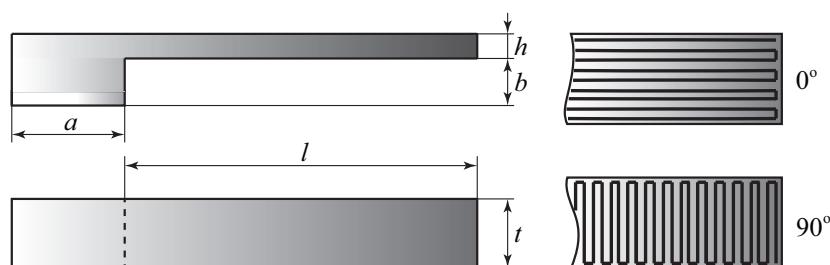
3 Metodologija raziskave

Znotraj tega poglavja, sprva določimo materialne lastnosti GPLA, ki bodo nato uporabljene za zasnovno konkretno ROC, ki smo jo analitično definirali v poglavju 2.2. Zasnovano ROC numerično analiziramo z MKE modelom znotraj okolja *ANSYS Mechanical*. S potrjeno skladnostjo med analitičnim in MKE modelom, uporabimo 3D tiskanje za izdelavo ROC. To tudi eksperimentalno vrednotimo in ji določimo razmerje med silo in pomikom pri različnih temperaturah $F(X, T)$. Z končano statično analizo ROC lahko zasnujemo in analiziramo MM. Analitično določimo disperzijske krivulje μ_u ter numerično in eksperimentalno določimo prenosnost pomikov T_u .

3.1 Meritev materialnih lastnosti GPLA-ja

Preden se lotimo izdelave in analize metamateriala, moramo raziskati materialne lastnosti, ki so potrebne za njegovo dimenzioniranje in krmiljenje temperature z enačbo (2.157). Na podlagi meritev in analize vzorcev določimo gostoto ρ , specifično električno upornost ϱ in modul elastičnosti E GPLA-ja v odvisnosti od temperature. Eksperimente smo opravili v sklopu [32].

Materialne lastnosti FFF (*Fused filament fabrication*) 3D tiskanih struktur so močno odvisne od parametrov izdelave. Vzorce (slika 3.1) smo modelirali v *SolidWorks* CAD programu. Tiskamo z debelino sloja 0,2 mm v smeri vzporedno dolžini (0°) ali v smeri pravokotno na dolžino nosilcev (90°) s 100% polnitzijo. Dimenzijs $a = 10$ mm, $b = 5$ mm, $h = 2$ mm in $t = 8$ mm so konstantne, variiramo le dolžino l , ki je prvič 30 mm in drugič 60 mm. S kombinacijo smeri tiska in dolžin analiziramo štiri vzorce. Uporabimo filament proizvajalca *ProtoPlant* na FFF 3D printerju *Ultimaker 3*.



Slika 3.1: Geometrija vzorcev za določanje materialnih lastnosti [32].

Gostota GPLA plastike $\rho = m/V$ je bila določena na podlagi pomerjene mase m in na podlagi dimenzijskih vzorcev izračunanega volumna V . Za maso je bila uporabljena tehnicka *EMB 200-3* proizvajalca *KERN*.

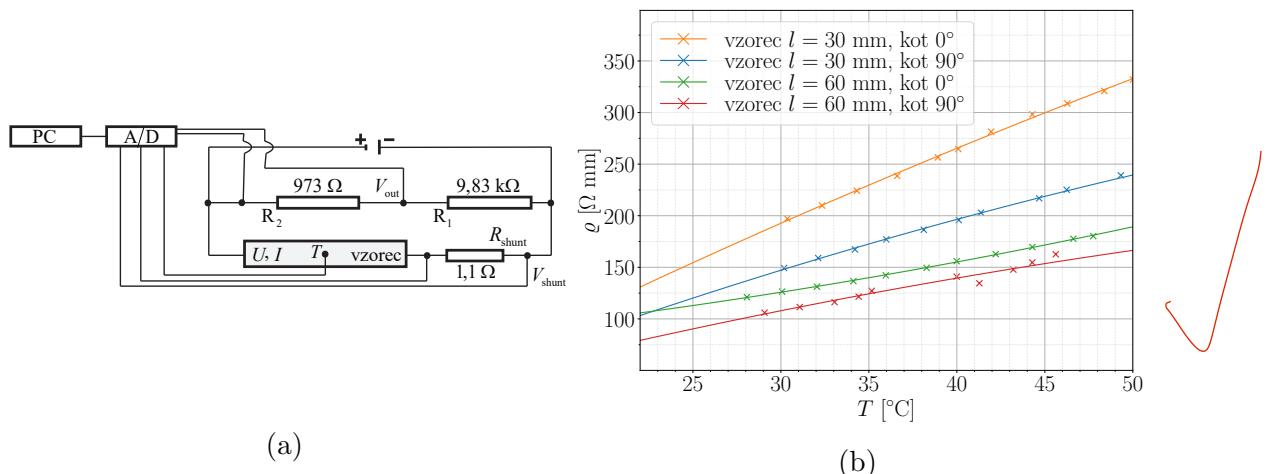
Volumen prvega modela znaša $V_1 = 34708 \text{ mm}^3$ in masa $m_1 = 39,53 \text{ g}$. Za drugi model je volumen $V_2 = 35586 \text{ mm}^3$ in masa $m_2 = 36,33 \text{ g}$. Rezultate materialnih meritev gostote ρ najdemo v poglavju 4.1.

Vzorce opremimo tako, da omogočimo prevajanje toka in meritev temperature. Na mestu kontakta jih prebarvamo s srebrno prevodno barvo in prelepimo s tanko bakreno žico. Na sredini namestimo termočlen tipa K, ki je sposoben merit temperature od 0 do 100 °C. Vzorec je del električnega merilnega vezja in deluje kot upor (slika 3.2a). Padec napetosti U merimo preko delilnika napetosti U_{out} . Tok I lahko določimo z uporabo upora znane in dovolj majhne vrednosti, na katerem izmerimo napetost U_{shunt} . Meritev na delilniku in referenčnem uporu (*ang. shunt*) pretvorimo v napetost in tok na vzorcu prek izrazov:

$$U = \frac{U_{out}}{0,09007} - U_{shunt}, \quad (3.1)$$

$$I = \frac{U_{shunt}}{1,1 \Omega}. \quad (3.2)$$

Temperaturo merimo na merilni kartici *NI 9211*, tok in napetost pa na *NI 9215*. Priključeni sta na računalnik, na katerem meritve analiziramo s programom *LabView*. Specifično električno upornost ϱ določimo z Ohmovim zakonom $R = U/I$ in enačbo (2.155) ter jo prikažemo v spodnjem grafu 3.2b. Vidimo, da s temperaturo upornost narašča.



Slika 3.2: (a) Shema vezja meritve in (b) specifična upornost ϱ GPLA materiala [32].

Določimo modul elastičnosti GPLA-ja ter njegovo odvisnost od temperature. Predstavimo metodo določanja modula elastičnosti materiala prek identifikacije lastne frekvence in geometrije strukture [33], [34], ki jo analiziramo z MKE. Predpostavimo Hookov zakon, oziroma z drugimi besedami linearno teorijo elastičnosti, in frekvenčno neodvisnost materiala. Obravnavano geometrijo strukture rešujemo z analizo lastnih frekvenc po MKE. Izhajamo iz enačbe 2.145, kjer matrike $[A] = [M^{-1}][K]$ vsebujejo modul elastičnosti E , Poissonov količnik ν in gostoto ρ :

$$[K] = E [K_0], \quad (3.3)$$

$$[M] = \rho [M_0]. \quad (3.4)$$

$[K_0]$ predstavlja togostno matriko neodvisno od modula elastičnosti E in $[M_0]$ masno matriko neodvisno od gostote ρ . $[K_0]$ ni povsem odvisna le od geometrije strukture, saj je še vedno odvisna od Poissonovega količnika ν . Vendar če se omejimo na strukture, ki jih lahko obravnavamo kot Euler-Bernoullijev nosilec [35], je ν zanemarljiv in $[K_0]$ materialno neodvisna matrika. Sistem enačb (2.145), kjer je $\lambda = \omega^2$:

$$\begin{aligned} ([A] - \omega^2 [I]) \vec{Q} &= \vec{0}, \\ ([K][M^{-1}] - \omega^2 [I]) \vec{Q} &= \vec{0}, \\ ([K] - \omega^2 [M]) \vec{Q} &= \vec{0}, \\ (E [K_0] - \omega^2 \rho [M_0]) \vec{Q} &= \vec{0}, \\ \left([A_0] - \omega^2 \frac{\rho}{E} [I] \right) \vec{Q} &= \vec{0}, \end{aligned}$$

preoblikujemo v nov problem lastnih vrednosti z $\lambda = \omega^2 \rho / E$:

$$([A_0] - \lambda [I]) \vec{Q} = \vec{0}, \quad (3.5)$$

Kjer je $[A_0]$ materialno neodvisna dinamska matrika. Materialno neodvisni lastni problem uporabimo za izračun i -te lastne vrednosti po MKE, ki jo povežemo z eksperimentalno izmerjeno i -to lastno frekvenco $f_{0,i}$, kot je definirana v enačbi (2.148). Tako je:

$$\lambda_i = 4\pi^2 \frac{\rho}{E} f_{0,i}^2. \quad (3.6)$$

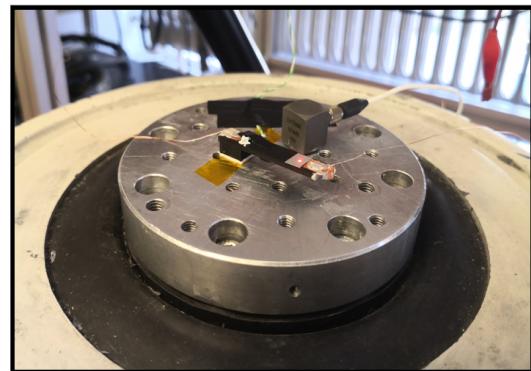
Za določanje efektivnega modula elastičnosti E v nadaljevanju potrebujemo gostoto ρ , pomerjeno prvo lastno frekvenco $f_{0,1}$ ter po MKE izračunano prvo lastno vrednost λ_1 . Na podlagi enačbe (3.6) lahko določimo modul elastičnosti E kot:

$$E = 4\pi^2 \frac{\rho f_{0,1}^2}{\lambda_1}. \quad (3.7)$$

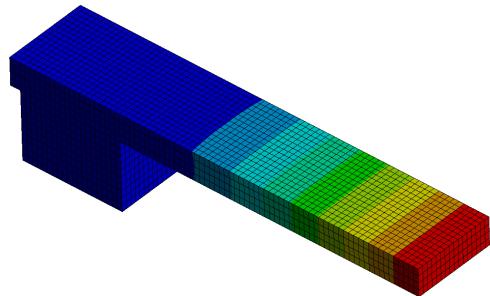
V naslednjem koraku vzorce na mestu izoliranih (belih PLA) površin s sekundnim lepilom pritrdimo na ploščo stresalnika *LDS V555* (slika 3.3b). Nanjo smo namestili referenčni pospeškomer proizvajalca *PCB Piezotronics*, ki je povezan na tretjo merilno kartico *NI 9234*, na kateri je tudi laserski merilnik hitrosti *Polytec PDV 100* (slika 3.3a). Sedaj izvedemo modalno analizo testiranih vzorcev z MKE v programu *ANSYS Mechanical* [36]. Poissonov količnik je privzet iz literature in znaša $\nu = 0,39$ [37]. Za vsak vzorec določimo matriki $[K_0]$, $[M_0]$ ter rešimo problem lastnega nihanja po enačbi (3.6) in izračunamo prvo lastno vrednost λ_1 (slika 3.3c).



(a)



(b)



(c)

Slika 3.3: Prikaz (a) eksperimenta za meritev modula elastičnosti (b) GPLA vzorca in (c) njegovega MKE modela za analizo lastnih vrednosti.

Vzorce smo vzbujali z belim šumom s konstantno amplitudo pospeška na frekvenčnem razponu od 40 do 1000 Hz. S pomerjenimi signali pospeška in hitrosti smo določili amplitudni del frekvenčne prenosne funkcije FPF vsakega vzorca pri različnih temperaturah in prvo lastno frekvenco $f_{0,1}$ (slika 4.1a).

Z uporabo enačbe (3.7) določimo ekvivalentni modul elastičnosti GPLA materiala $E = E(T)$ in ga predstavimo v poglavju rezultatov 4.1, oziroma v grafu 4.1b. Določili bomo temperaturo steklenja v primeru printanja pri orientaciji 0°. Pri tej temperaturi postane struktura stalno deformirana zaradi pričetka taljenja in se z ohlajanjem ne povrne v prvotno stanje.

Tako smo določili gostoto ρ in modul elastičnosti E , ki sta potrebni za modeliranje ROC ter MM, kar je naslednji korak raziskave. Te rezultate najdemo v poglavju 4.1.

3.2 Zasnova in statična analiza ROC

Z definiranimi pogoji dimenzioniranja v poglavju 2.2 in z znanimi materialnimi lastnostmi modula elastičnosti E in gostote ρ pridobljenimi v poglavju 2.6, lahko zasnujemo in z MKE (poglavlje 2.5) ter eksperimentalno ovrednotimo dejanski primer reprezentativne osnovne celice (ROC), ki izkazuje kvazi ničelno togost (KNT). Sprva ovrednotimo togost in nato znano ROC vpeljemo v poglavje 2.3 ter jo tvorimo v metamaterialno (MM) verigo, ki izkazuje lastnost pasovno zavrnitvenega filtra (PZF). Analitično verigo neskončnih členov aproksimiramo z zaporedjem končnih ROC-jev in dinamični sistem rešimo numerično.



3.2.1 Dimenzioniranje in zasnova ROC

Proces izdelave ROC je iterativen in zajema analitično dimenzioniranje, numerično validiranje in nato še končno prilagajanje oblike glede na rezultate statičnega eksperimenta. V analitičnem dimenzioniraju uporabimo končno enačbo (2.16) pozitivne togosti poglavja 2.2.1 in enačbe (2.53) negativnih togosti ter ob združitvenih pogojih (2.54) za KNT dobimo dimenzijske enačbe, ki omogočajo ustrezeno nelinearno togost. Modula elastičnosti pozitivnega dela E_p in negativnega dela E_n ROC sta v osnovi dimenzionirana pri sobni temperaturi. Vrednost lahko razberemo iz grafa 4.1b in je $E(22^\circ\text{C}) = 2400 \text{ MPa}$, pri čemer upoštevamo, da je ROC tiskan pri kotu 0° . Kasneje s segrevanjem modul elastičnosti manjšamo. Te rezultate vidimo v poglavju 4.2.

Odločimo se za pravokotni prerez ROC-ja, kar vodi v vztrajnostni moment ploskve:

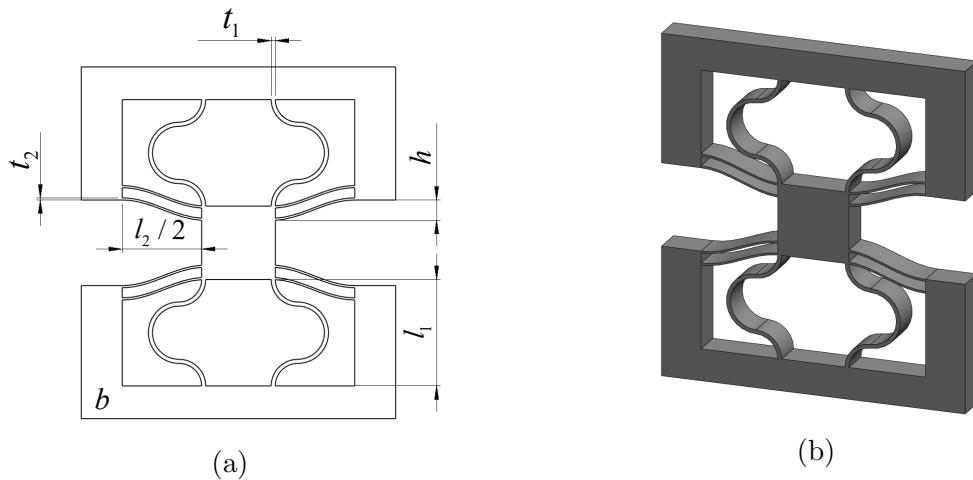
$$I_1 = \frac{b t_1^3}{l_1}, \quad I_2 = \frac{b t_2^3}{l_2}. \quad (3.8)$$

Tekom iteriranja smo ugotovili, da dobimo boljšo vedenje negativnega nosilca, če upoštevamo višino negativnega nosilca h neodvisno od $Q = h/t_2$. Torej namesto $h = Q t_2$ je sedaj $h = 10 t_2$. Razlog zavisi od nelinearnosti materiala PLA, ki je ne upoštevamo. Ta spremembra ne vpliva na izpeljavo negativne togosti (2.53) in dobro popravi vedenje končne 3D tiskane ROC. Poleg ustreznih togosti, potrebujemo v ROC integrirati tudi resonančno maso m , ki kasneje zagotovi znano razmerje β med lastno maso in maso celotne celice M . Pomembno je tudi izpostaviti, da smo omejeni na minimalno dimenzijo šobe 3D tiskalnika, kar znaša 0,25 mm.

Analitično izračunane vrednosti mer ROC (slika 3.4a) najdemo v tabeli 3.1. Kot je vidno v tabeli dimenzijskih mer, smo vrednosti za posamezen model morali nekoliko spremeniti. Skozi iteracije, smo zaradi težav z numerično stabilnostjo morali prilagoditi dimenzije CAD modela za MKE simulacije. Pri pripravi CAD modela za 3D tisk, preko programa *PrusaSlicer*-ja (generira G-kodo za 3D tiskalnik), smo morali prilagoditi najmanjšo dimenzijo t_2 . Le tako je v programu zaznalo eno samo linijo pri tisku. V tabeli so tudi vidne z kljunastim merilom pomerjene dimenzije končne ROC.

CAD (*Computer Aided Design*) model, ki je viden na sliki 3.4b, smo izdelali v programu *Solidworks* in ga uporabili v Ansys analizi, kot tudi za 3D tiskanje ROC (slika 3.5a). Končen ROC uporabljen v statičnih meritvah je viden na sliki 3.5b. Kot vidimo, so največja odstopanja v debelini posamezne stene pri tisku. To je verjetno tudi eden od razlogov za potrebo povečanja višine h .

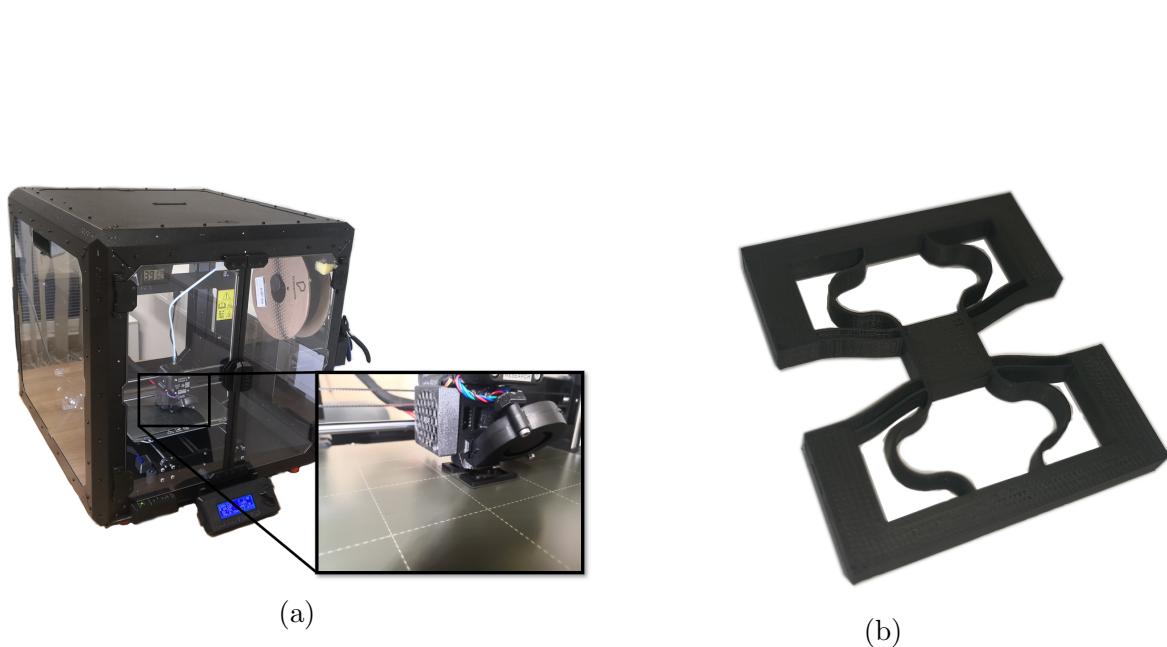




Slika 3.4: (a) Skica ROC-ja z dimenzijskimi razmerji tabele 3.1 in (b) *Solidworks* CAD model.

Preglednica 3.1: Vrednosti dimenzij pri različnih modelih ROC.

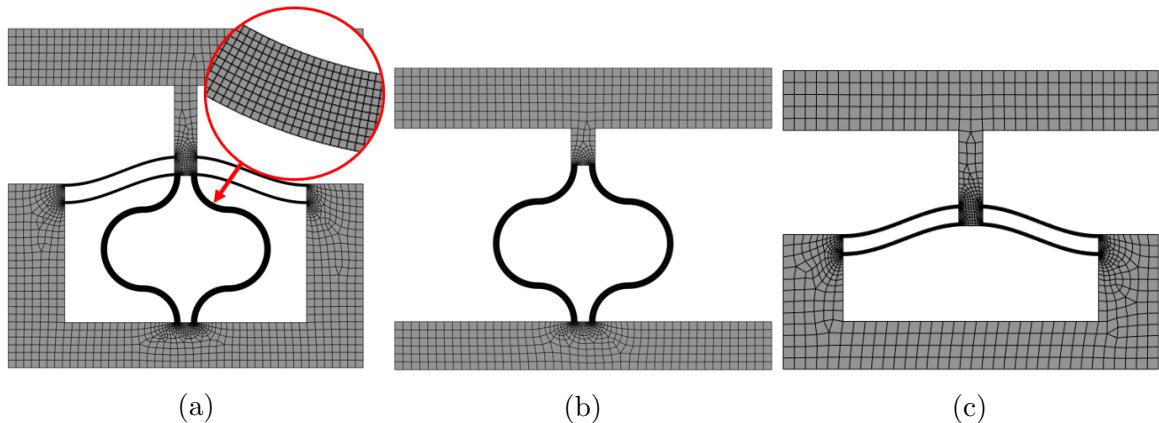
	Analitika	Solidworks	Ansys MKE	3D tiskanje
E [MPa]	2400	2400	2400	/
t_1 [mm]	0,50	0,50	0,52	$0,48 \pm 0,02$
t_2 [mm]	0,25	0,26	0,22	$0,30 \pm 0,02$
l_1 [mm]	13,00	13,00	13,00	$12,99 \pm 0,01$
l_2 [mm]	20,34	20,34	20,34	$20,33 \pm 0,01$
h [mm]	2,50	2,50	2,50	$2,51 \pm 0,01$
b [mm]	4,00	4,00	4,00	$4,08 \pm 0,03$



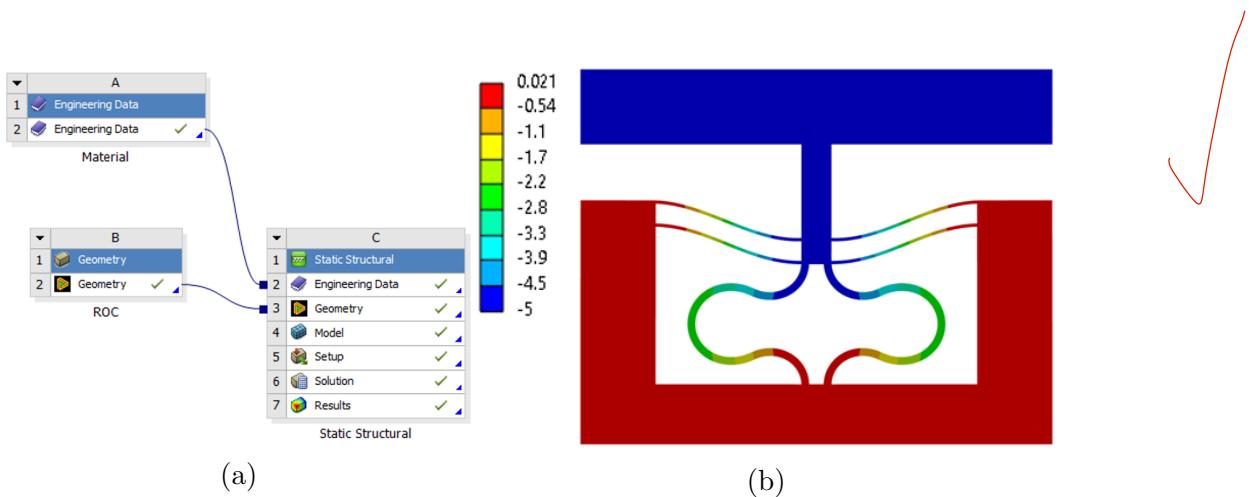
Slika 3.5: (a) FDM 3D tiskalnik *Prusa i3 MK3S+* in (b) ROC.

3.2.2 Numerična analiza ROC z MKE

Za MKE analizo smo uporabili ANSYS *Mechanical*. Za izvajanje statične nelinearne analize uporabimo paket, ki je namenjen analizi mehanskih struktur (slika 3.7a). Za uporabljenim paketom stoji Ansysov skriptni jezik APDL (*ang. Ansys Parametric Design Language*). Jezik nudi parameterizacijo, izvajanje logičnih funkcij in drugih kompleksnih matematičnih operacij, kar vodi v efektivni komercialni program za reševanje po MKE [36]. Predpostavili smo struktturni model stene in uporabili CAD model, ki je prilagojen MKE analizi. Struktura je spodaj fiksno vpeta, zgoraj pa je vnesen pomik. Predpostavimo lahko simetrijo, zato obravnavamo le polovico ROC-ja. Ker gre za zaporedno vezano vzmet, imamo zaradi simetrije enako silo kot pri celotni ROC, vendar upoštevamo le pol pomika. Polovični ROC na sliki 3.6a smo pomrežili z 13206 elementi preko 15007 vozlišč z tipom elementa SHELL181. Vpeljali smo materialni model GPLA-ja glede na meritve prikazane v grafu 4.1b. Poleg celotnega modela smo obravnavali tudi ROC, ki ima ločen pozitivni (9178 elementov in 10121 vozlišč, slika 3.6b) in negativni (5043 elementov in 5979 vozlišč, slika 3.6c) nosilec. Na sliki 3.7b lahko z MKE analizo vidimo obliko deformirane ROC. Rezultate $F(X)$ pri različnih temperaturah lahko vidimo v poglavju 4.2.



Slika 3.6: Mreža (a) polovice, (b) pozitivne polovice in (c) negativna polovica ROC.



Slika 3.7: (a) Grafični prikaz statične analize in (b) končna deformacija ROC [mm].

3.2.3 Eksperimentalna analiza ROC

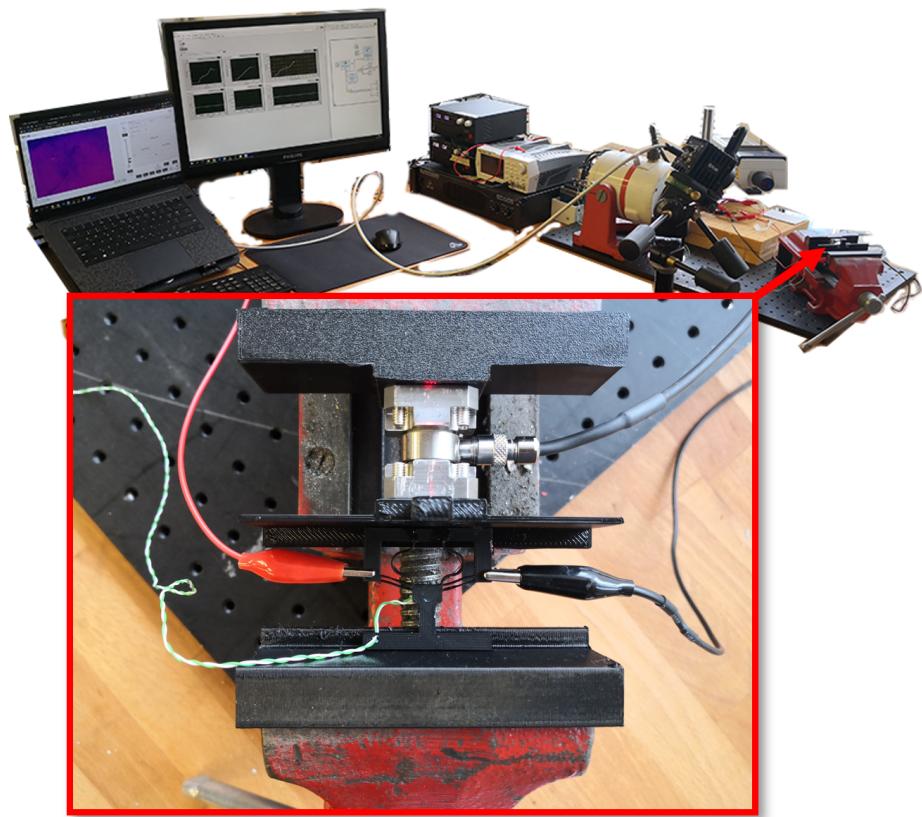
Na sliki 2.2b je viden postopek tiskanja ROC. Pri tem je temperatura ekstruderja za vsak vzorec znašala 200°C , temperatura mize 60°C , hitrost tiskanja 30 mm/s , višina sloja $0,15 \text{ mm}$ pri 100% polnjenju. Končnemu 3D tiskanemu ROC lahko eksperimentalno ovrednotimo njeni nelinearni togosti in ji določimo silo v odvisnosti od pomika $F(X)$ pri različnih temperaturah. Eksperimentalna postavitev je vidna na sliki 3.8 in shematično prikazana na shemi 3.9.

ROC vpnemo v primež, ki z zapiranjem dovoljuje nadziran in natančen pomik testiranega vzorca. Pomik X merimo z laserjem *Polytec VGO-200-P* z nastavljenim občutljivostjo 5 mm/V . Za vpetje in zaščito ROC smo iz PLA natisnili nosilne elemente. Med eno od čeljusti primeža in testiranim vzorcem se nahaja piezoelektrični silomer *KISTLER 9317B* z občutljivostjo $11,34 \text{ pC/N}$, ki dovolj dolgo zadrži naboj za meritev statične sile F . Naboj silomera ojačamo z nabojskim ojačevalnikom *KISTLER 5073A4* na $5,01 \text{ V/N}$. Napajamo ga z napajalnikom *Voltcraft DPPS-32-15*. Tako laser kot tudi silomer sta priključena na merilno kartico *NI 9234*. Z obračanjem ročaja primeža tega zapiramo in tako nadzirano stiskamo ROC in pri tem opazujemo pomik in silo.

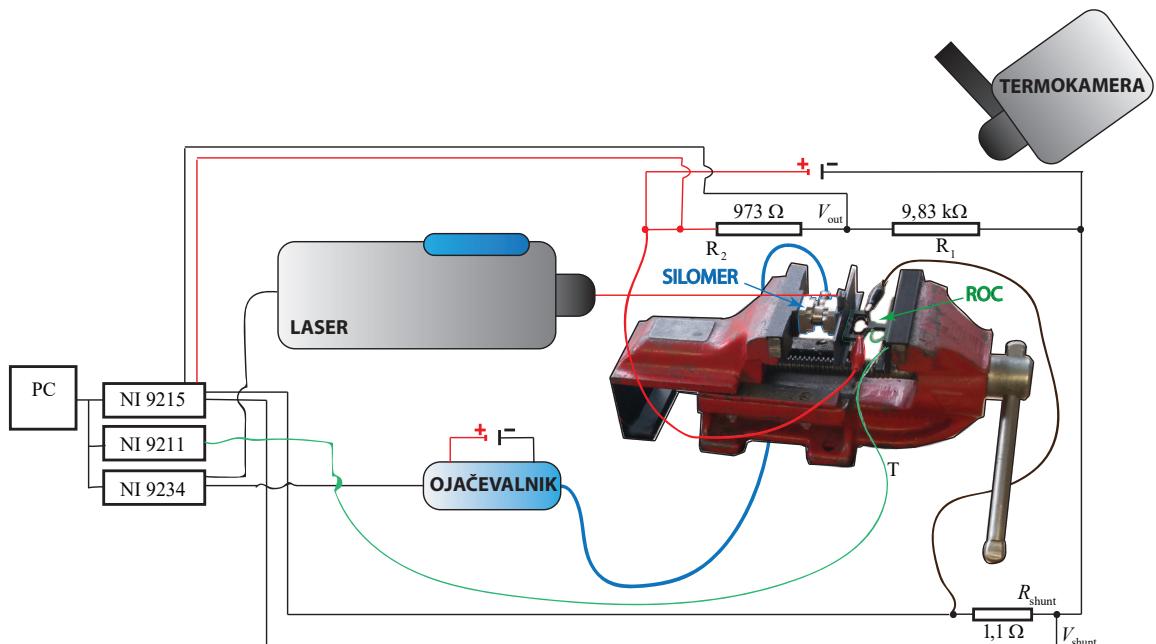
Z enakim vezjem, ki smo ga uporabili za eksperimentalno določanje $E_{text{ext}GPLA}(T)$ v poglavju 3.1, tudi segrevamo in merimo temperaturo ROC. Pozitivni in negativni del priklopimo tako, da tok teče skozi negativne nosilce. Segrevamo z Joulovim efektom preko še enega napajalnika *Voltcraft*. Napetost U in tok I merimo na kartici *NI 9215* in na kartici *NI 9211* preko termočlena tipa K temperaturo. Spreminjanje temperature opazujemo tudi preko termo-kamere *FLIR A50*. Meritve $F(X)$ v odvisnosti od temperature T izvedemo v programu *LabView*. Postopamo tako, da vzorec segrejemo na določeno temperaturo preko električnega toka in nato izvedemo stiskanje z primežom. Za vsako temperaturo uporabimo novi vzorec.

Rezultate statične analize v obliki primerjave $F(X)$ celotne, ločene pozitivne ter ločene negativne ROC vidimo v rezultatih poglavja 4.2 na grafu 4.2. Tam primerjamo tudi z analitičnimi in numeričnimi rezultati MKE.

Analiziramo tudi teoretično obnašanje ROC pri spremembji temperature zaradi segrevanja z Joulovim tokom na grafu 4.4 in na grafu 4.5 opazujemo eksperiment $F(X)$ pri segrevanju.



Slika 3.8: Eksperimentalna postavitev za določanje $F(X,T)$.



Slika 3.9: Shema eksperimenta za določanje $F(X,T)$.

3.3 Zasnova in dinamična analiza MM

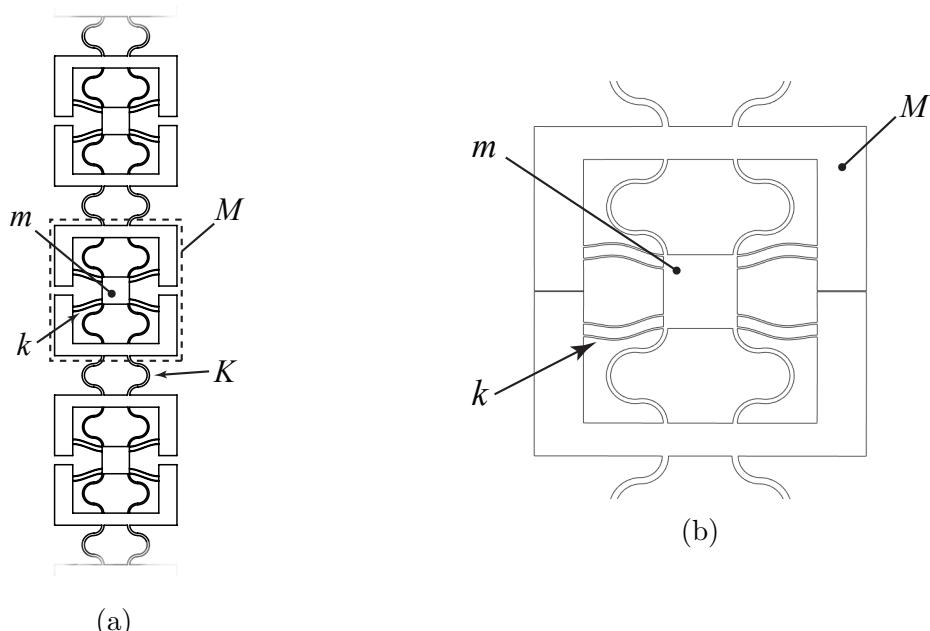
S poznano karakteristiko ene same ROC, lahko zasnujemo in obravnavamo dinamiko MM. V prvem podoglavlju dimenzioniramo dodatne elemente, ki tvorijo MM. Ker disperzijska krivulja enačbe (2.95) opisuje le idealni MM z neskončnim številom osnovnih celic, lahko dinamični problem obravnavamo kot verigo ROC-jev in ga rešimo z numerično formulacijo in integriranjem sistema enačb. Sledi tudi 3D tiskanje, izdelava in eksperimentalno vrednotenje končnega MM pri različnem številu ROC.

3.3.1 Zasnova MM in njegove analitične disperzijske krivulje

V prvem koraku moramo zasnovati MM, viden na sliki 3.10a. Posamezna ROC v MM predstavlja glavno maso M , znotraj katere je resonančna masa m , ki je na glavno maso povezana preko nosilca z nelinearno togostjo k . ROC so v verigi povezane s togostjo K . Togost K je tvorjena z obliko dveh pozitivnih nosilcev, le da so ti nekoliko večji ($t_3 = 0,75$ mm, $l_3 = 13$ mm in $b = 4$ mm).

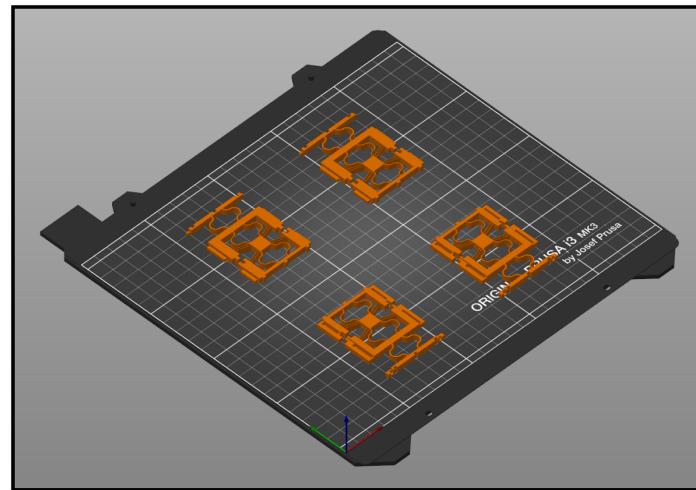
Sistem prikazan na sliki 2.12, ki je uporabljen v analitični izpeljavi disperzijske krivulje, dosežemo tako, da dve polovici ROC zapremo v eno, kot je to vidno na sliki 3.10b. Tako tudi dosežemo željeno prednapetje in KNT pogoj k . Na podlagi poteka sile v grafu 4.2, je deformacija, potreba za željeno prednapetje, 4,4 mm.

Na podlagi 3D modela in eksperimentalno določene gostote ρ_{GPLA} (poglavlje 4.1), lahko določimo maso ROC $M = 1,72$ g in maso rezonatorja $m = 0,44$ g, ki jih uporabimo za analitični izračun disperzijskih krivulj in numerično obravnavo prenosnosti.

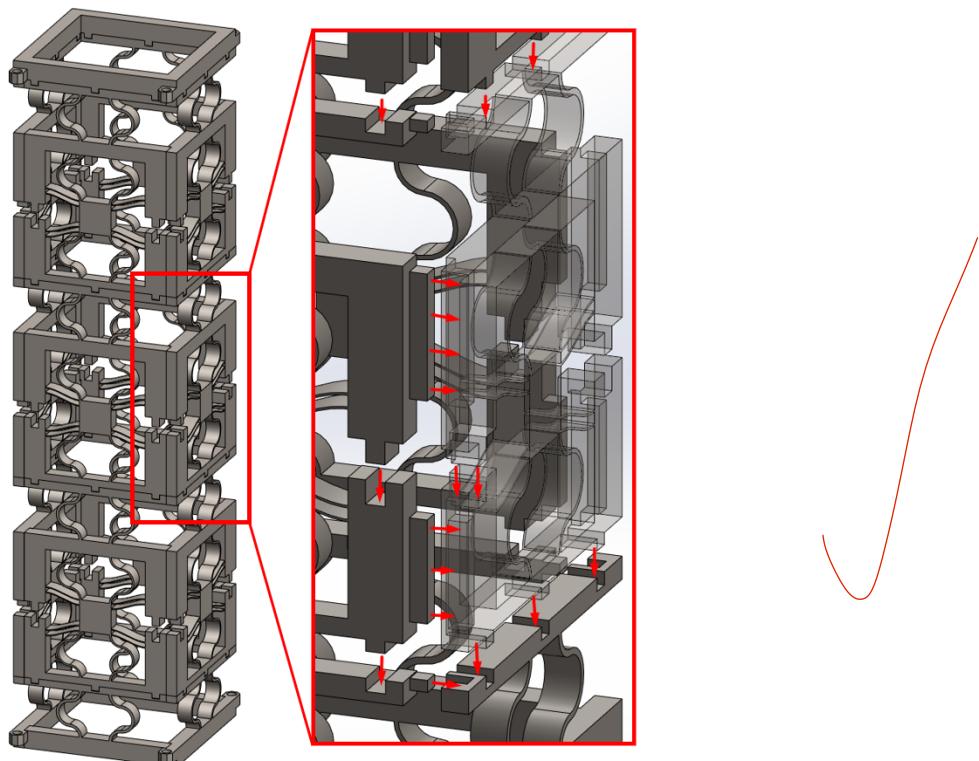


Slika 3.10: (a) Skica MM s tremi ROC in (b) pobližan ogled zaprte ROC v MM.

Pri samem eksperimentu (opisan v 3.3.3) testiramo MM z različnim številom ROC. Ker bi 3D tiskanje različno dolgih verig vodilo v potrato materiala, zasnujemo MM, kjer lahko modularno dodajamo ROC v vedno daljše verige. Zagotoviti moramo tudi, da je naša veriga bolj stabilna. Končni MM tvorimo z vzporedno združitvijo štirih verig, kjer posamezna predstavlja njegovo steno. Tiskane dele MM (slika 3.11), združimo preko tesnih ujemov brez uporabe lepila. Na začetku in koncu vsake verige se nahaja nastavek, ki omogoča pritrdiritev eksperimentalne opreme (slika 3.12).



Slika 3.11: Sestavnih delov MM znotraj *PrusaSlicer*.



Slika 3.12: *Solidworks* CAD model odprtega MM.

3.3.2 Numerična analiza MM z direktno integracijo

Iz zasnovane ROC tvorimo enodimenzionalno verigo n ROC-jev oziroma naš meta-material (MM), ki je viden na sliki 3.13. Prva vzmet s togostjo K je fiksno pritrjena na podlago, zadnja vzmet in tako tudi zadnja masa M je prosta. Prvi ROC v verigi je harmonično vzbujen pri različnih frekvencah f .

Izpeljemo gibalno enačbo sistema:

$$[M]\ddot{\vec{X}}(t) + [C]\dot{\vec{X}}(t) + [K]\vec{X}(t) = \vec{F}(t), \quad (3.9)$$

kjer je $\vec{X} = [U_1 \ Q_1 \ U_2 \ Q_2 \ \cdots \ U_n \ Q_n]^T$ vektor pomikov U_j primarnih mas in relativnih pomikov Q_j med primarno in resonančno maso za $j = 1, \dots, n$. Masne $[M]$, dušilne $[C]$ in togostne $[K]$ matrike so podane kot:

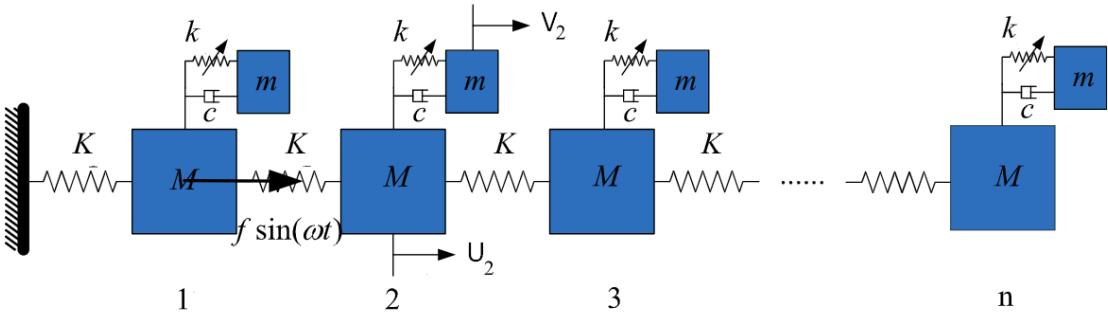
$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m & m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & m & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m & m \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & -c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$[K(Q_j)] = \begin{bmatrix} 2K & -k & -K & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & 2K & -k & -K & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -K & 0 & 2K & -k & -K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -K & 0 & 2K & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

in je $k = F'_{\text{ROC}}(Q_j)$ nelinearna togost, definirana preko sile pomika enačbe (2.61).

Vektor sile je podan kot $\vec{F} = [f \sin(2\pi ft) \ 0 \ \cdots \ 0]^T$.



Slika 3.13: Enodimensionalna metamaterialna veriga z robnimi pogoji.

Problem lahko rešimo direktno z numeričnim reševanjem diferencialne enačbe pri začetnih pogojih $\vec{X} = \dot{\vec{X}} = \vec{0}$ z uporabo implicitne Runge-Kutta sheme ali indirektno z linearizacijo.

Efektivnost vibroizolacije MM si pogledamo preko prenosljivosti $T(\omega)$, ki je v osnovi definirana kot razmerje med pomikom zadnje glavne mase U_n in prve mase U_1 :

$$T(\omega) = \frac{U_n(\omega)}{U_1(\omega)}. \quad (3.13)$$

Pri direktni metodi časovno integriramo pri različnih frekvencah f , in v frekvenčni domeni preko Fouriereve transformacije pogledamo prenosljivost $T_{R\text{-}K}$.

Indirektno lahko homogeni del gibalne enačbe (3.9) rešimo brez integriranja z linearizacijo togosti [20]. Če predpostavimo, da imamo dovolj majhne pomike, lahko iz enačbe (2.88) vzamemo le linearni del v in za $k \approx v$ določimo prenosnost T_{lin} z uporabo inverza:

$$-\vec{X} = \{[K] + i\omega[D] - \omega^2[M]\}^{-1} \vec{F} \quad (3.14)$$

$$-\vec{X} = [H(\omega)] \vec{F}, \quad (3.15)$$

kjer je $[H(\omega)]$ $2n \times 2n$ simetrična matrika frekvenčnih prenosnih funkcij (FPF).

T_{lin} je definirana kot:

$$T_{lin} = \frac{H_{1,1}(\omega)}{H_{1,2n-1}(\omega)}, \quad (3.16)$$

pri čemer je $H_{1,1}(\omega)$ FPF vhoda oziroma U_1 in $H_{1,2n-1}(\omega)$ FPF izhoda oziroma U_n .

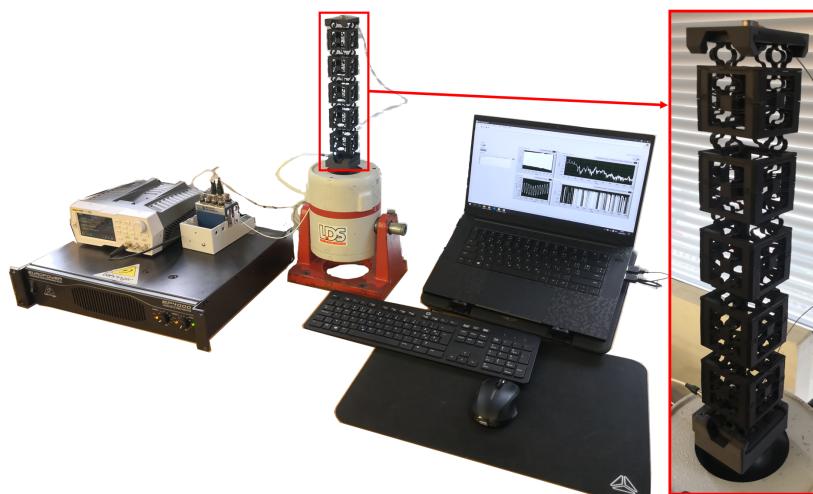
Rezultati direktne integracije z implicitno Runge-Kutta metodo analiziramo in primerjamo z preostalimi metodami za MM z različnim številom ROC-jev pri različnih stopnjah statične predobremenitve in pri različnih temperaturah. Ogledali si bomo vpliv teh lastnosti na sposobnost dušenja in tudi lastne oblike MM v območju njegove PZF v rezultatih 4.3.

3.3.3 Eksperimentalna analiza MM vibroizolatorja

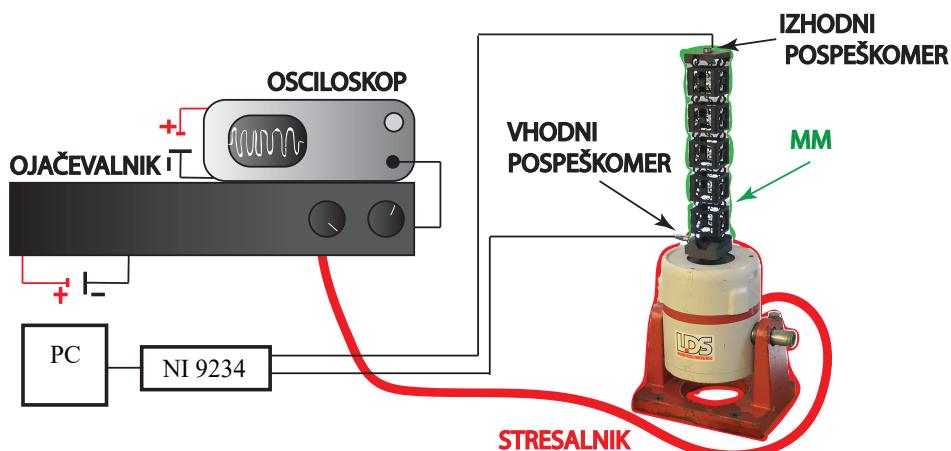
Tiskanje MM poteka pri enakih pogojih kot 3D tiskanje ROC. Ko natisnemo posamezen del MM, jih zaradi izdelanih zatičnih oblik vidnih na sliki 3.12, sestavimo brez lepila. Eksperiment je viden na sliki 3.14 in shema na 3.15.

MM je vpet v stresalnik *V55*, ki generira pospešek $a(t)$. Stresalnik krmilimo z *RIGOL DG822* osciloskopom, pri čemer uporabljam sinusozični signal med 50 Hz in 2000 Hz. Moč signalov ojačamo na ojačevalniku *EP4000*. Vhodni pospešek merimo s pospeškomerom *PCB SN 51638* z občutljivostjo 100,0 mV/g. Tudi na drugi strani merimo izhodni pospešek s pospeškomerom *DJB A/127/V* z občutljivostjo 98,24 mV/g. Iz pomerjenih signalov lahko določimo FPF po teoriji poglavja 2.4. Za vpetje MM smo iz PLA natisnili nosilne elemente, ki omogočajo privijačenje MM na stresalnik s sedmimi M4 x 12 vijaki.

V sklopu magistrske naloge MM ne segrevamo in termoaktivnega krmiljenja ne izvajamo eksperimentalno. Vpliv Joulovega efekta smo eksperimentalno zajeli pri posamezni ROC in teoretično pri z numeričnimi metodami.



Slika 3.14: Eksperimentalna postavitev za določanje dinamičnega odziva MM.



Slika 3.15: Shema dinamičnega eksperimenta MM.

4 Rezultati in diskusija

V tem poglavju so predstavljeni rezultati in ugotovitve analitičnih, numeričnih ter eksperimentalnih analiz. V prvem delu prikažemo materialne lastnosti GPLA. Nato se osredotočimo na ugotovitve, ki smo jih izluščili iz posameznega gradnika MM. ROC obravnavamo v ločenih delih in primerjamo med seboj vse tri analize. Poglejamo si tudi obnašanje ROC zaradi segrevanja in posledičnega mehčanja GPLA. Vse ugotovitve nato razširimo in obravnavamo celoten MM, ki predstavlja drugi in končni del rezultatov. Analitično izračunamo dejansko disperzijsko krivuljo MM. Ogledamo si sposobnost vibroizolacije MM preko prenosnosti in vpliv večanja števila celic in temperature na pasovno vrzel.

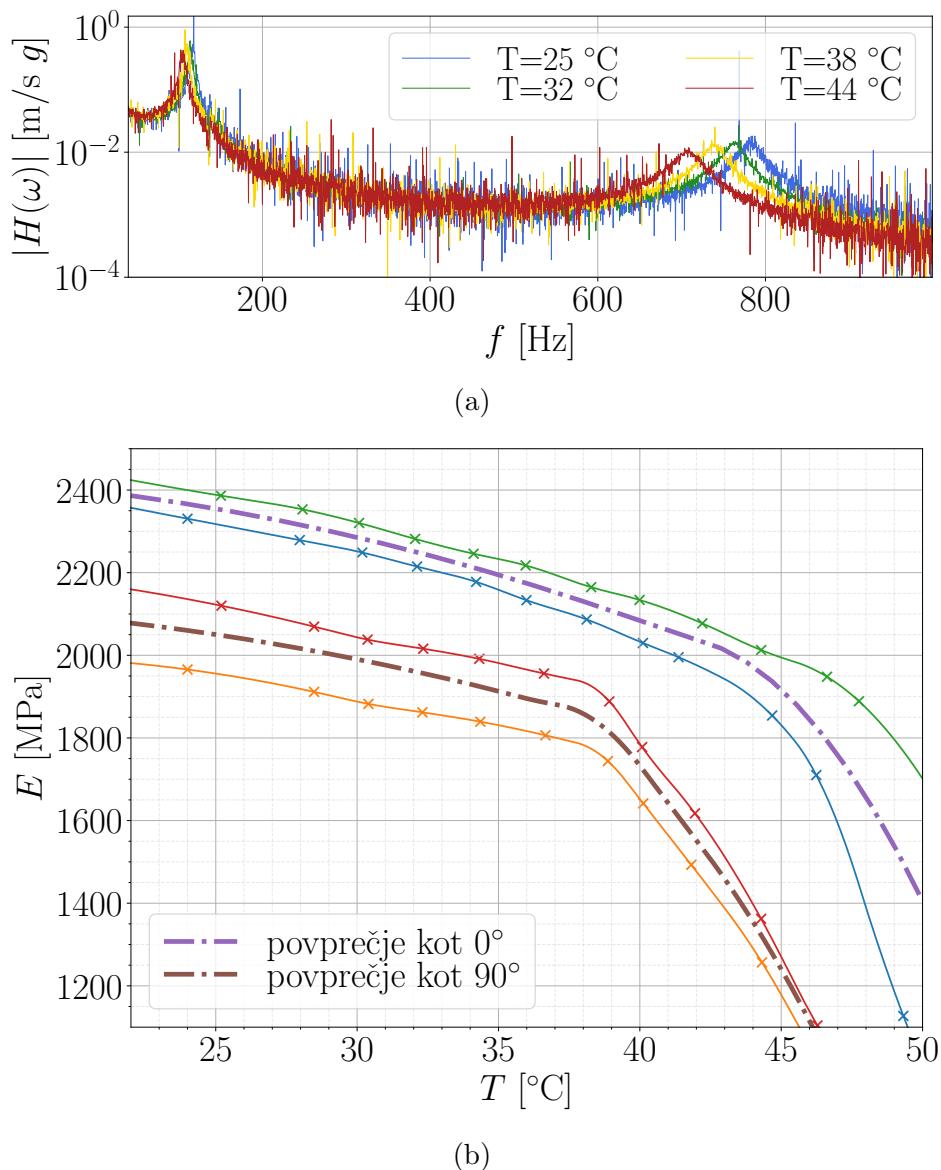
4.1 Materialne lastnosti GPLA

V metodologiji smo analizirali gostoto dveh vzorcev na podlagi njunih mas in volumnov. Gostota prvega je tako $\rho_1 = 1107 \text{ kg/m}^3$ in drugega $\rho_2 = 1105 \text{ kg/m}^3$. Povprečna gostota vseh GPLA vzorcev pri 26°C je $\rho_{\text{GPLA}} = 1106 \text{ kg/m}^3$.

Z uporabo enačbe (3.7) določimo ekvivalentni modul elastičnosti GPLA materiala $E = E(T)$ in ga predstavimo v spodnjem grafu 4.1b ter določimo temperaturo steklenja $T_g = 45^\circ\text{C}$ v primeru printanja pri orientaciji 0° . Pri tej temperaturi postane struktura stalno deformirana zaradi pričetka taljenja in se z ohlajanjem ne povrne v prvotno stanje.

Izmerjen modul elastičnosti je $E_{\text{GPLA}}(22^\circ\text{C}) = 2400 \text{ MPa}$ in $E_{\text{GPLA}}(42^\circ\text{C}) = 2000 \text{ MPa}$ pri orientaciji 0° in $E_{\text{GPLA}}(22^\circ\text{C}) = 2100 \text{ MPa}$ ter $E_{\text{GPLA}}(35^\circ\text{C}) = 1900 \text{ MPa}$ pri orientaciji 90° .

V nadaljevanju bomo metamaterial zasnovali pri kotu printanja 0° in upoštevali lineariziran potez modula elastičnosti v odvisnosti od temperature med $T = 22^\circ\text{C}$ in $T = 42^\circ\text{C}$.



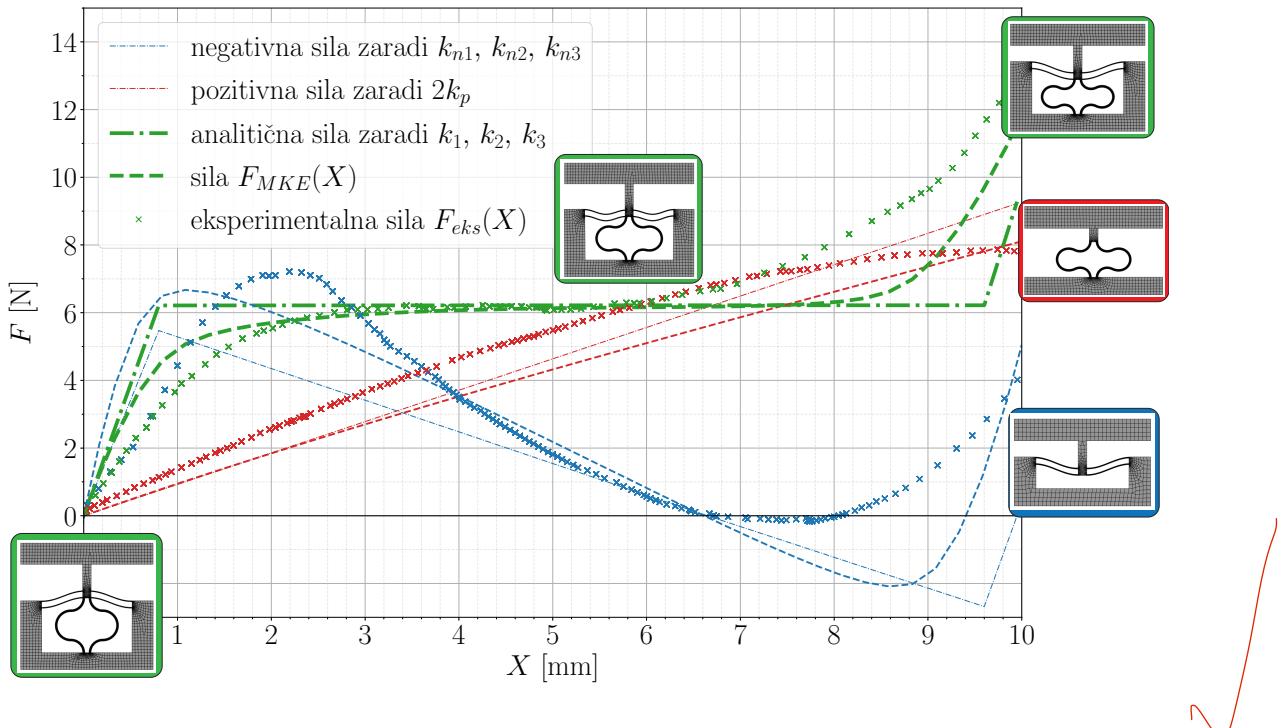
Slika 4.1: (a) FPF vzorca $l = 60$ in 0° in (b) modul elastičnosti $E(T)$ GPLA [32].

4.2 Rezultati statičnih analiz ROC

V prvem delu analiziramo ugotovitve, ki smo jih izluščili iz posameznega ROC. Dimenzionirano osnovno celico lahko vrednotimo z grafom sile-pomika $F-X$.

ROC obravnavamo v ločenih delih in primerjamo med seboj vse tri analize na grafu 4.2, kot tudi pripadajoče modele. Zelena predstavlja celotni ROC, rdeča predstavlja pozitivni del ROC, modra pa negativni. Vsaka barva ima analitični, MKE in eksperimentalni rezultat. Opazimo lahko, da se števec negativnega in pozitivnega nosilca predstavlja celotni ROC. Analitični rezultat po enačbah poglavja 2.2 je najbolj osnoven z linearnim potekom treh togosti (začetno pozitivno območje, osrednje območje z KNT in končno pozitivno območje). Tukaj nimamo nobenih nelinearnosti v samem območju. To se spremeni že v numerični analizi z MKE. Čeprav imamo predpostavljen idealen elastični material, je zaradi povečanja togosti zaradi spremembe geometrije, tudi potek sile v pozitivnem (rdečem) rezultatu nelinearen. Največjo nelinearnost imamo pri eksperimentu. Tukaj je poleg velikih sprememb geometrije prisotna nelinearnost zaradi plastičnih deformacij materiala, lezenja, odstopanja od idealne oblike, itd. Omenimo, da pri eksperimentu doseži negativno silo ni bilo mogoče, zato je posledično najmanjša sila $F_{eks} = 0$.

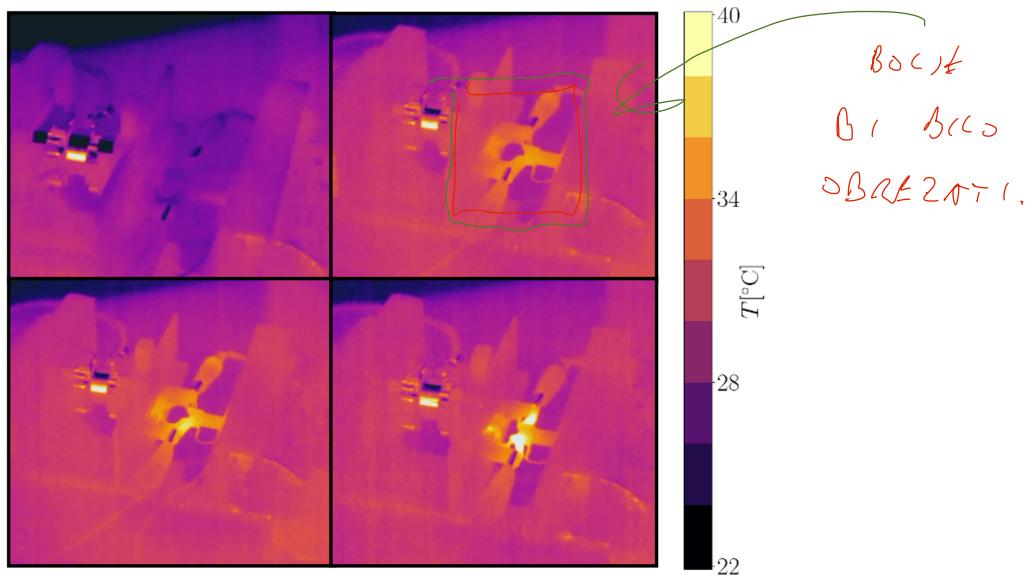
Kljub vsemu pa lahko opazimo, da končni eksperiment sovpada analitičnim kot tudi numeričnim ugotovitvam. Dokazali smo, da so vse izpeljave za določanje geometrije ROC v poglavju 2.2 dobre.



Slika 4.2: Analitične, numerične in eksperimentalne primerjave poteka $F-X$ ROC-ja.

V nadaljevanju si ogledamo spremembo togosti zaradi segrevanja z Joulovim tokom. Uporabimo termo-kamero in analiziramo toplotno polje znotraj ROC. V idealnem primeru, enakomerno segrevamo le negativne nosilce ROC, pozitivni deli pa ostanejo pri sobni temperaturi. Tako zmanjšujemo negativno komponento ROC, kar vodi v povečanje togosti v območju KNT. Če bi segrevali pozitivni del, bi dobili negativno togost, kar vodi v nestabilnosti strukture. Z povečanjem togosti lahko poleg nizkofrekvenčnih območij dušimo tudi višja.

Kot vidimo na sliki 4.3 se s časom segreva celotna ROC, vendar pa je glavni del omejen na željeno območje.



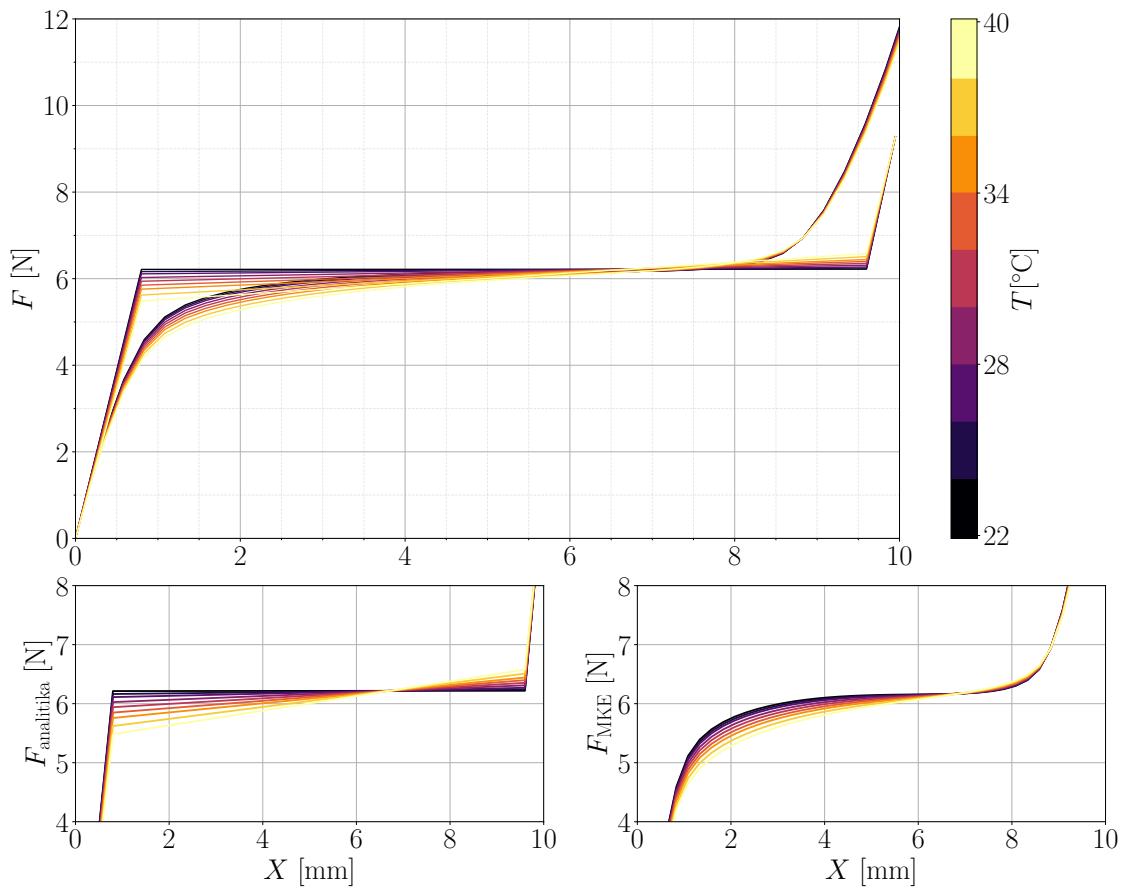
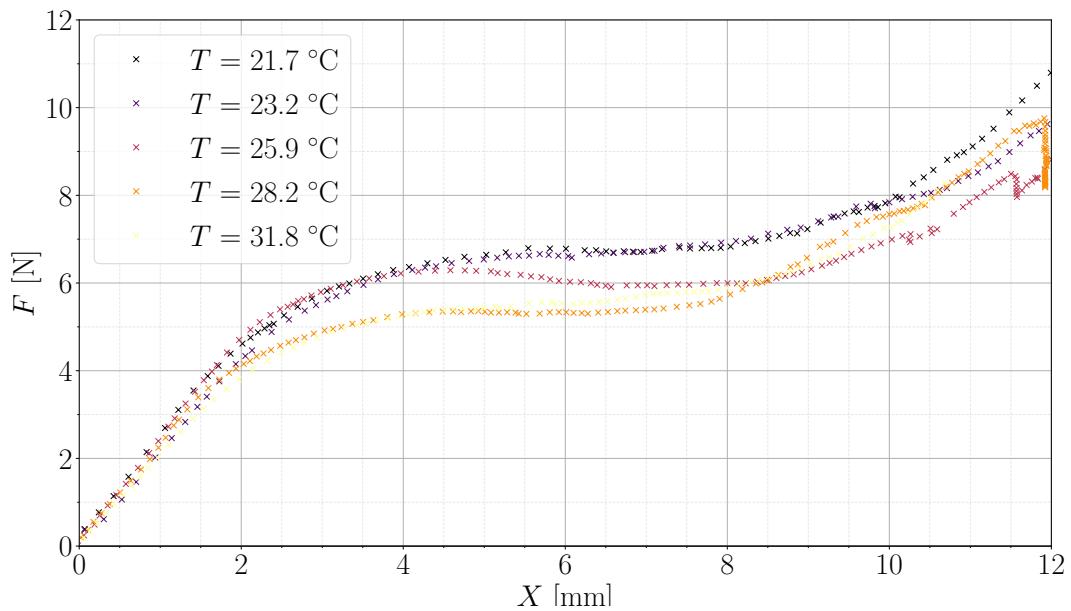
Slika 4.3: Potek segrevanja ROC opazovan na termo-kameri.

Zgoraj levo je primer ob času t_0 in spodaj desno primer za t_{\max} .

Kot vidimo se močno segrejejo kosinusni nosilci z negativno togostjo.

Oglejmo si sedaj $F(X)$ pri različnih temperaturah. Na sliki 4.4 vidimo primerjavo analitičnega in numeričnega obnašanja ob segrevanju negativnega nosilca ROC. Segrevanje vpliva na togost, saj se spremeni modul elastičnosti E_{GPLA} na grafu 4.1b. Vidimo, da se nosilnost ne spremeni bistveno, spremeni se le togost in sicer z večanjem temperature (in manjšanjem togosti materiala) povečujemo togost ROC v območju prvotne KNT.

Na grafu 4.5 vidimo končni $F(X)$ eksperimenta pri različnih temperaturah T . Vidimo lahko padec togosti kot pri teoriji, čeprav je prisoten precejšnji raztres.

Slika 4.4: Analitične in numerične primerjave poteka F - X ROC-ja pri ΔT .Slika 4.5: Eksperimentalen potek F - X ROC-ja pri ΔT .

4.3 Dinamika adaptivnega MM vibroizolatorja

V sledečem poglavju prikažemo sposobnost vibroizolacije metamateriala (MM) kot adaptivnega PZF. Uporabimo analitično enačbo disperzijskih krivulj (2.95) in dokažemo obstoj pasovne vrzeli v našem MM. Prikažemo rezultate numeričnih analiz poglavja 3.3.2) in eksperimentalne analize poglavja (3.3.3). Ocenimo vpliv različnega števila ROC, različnega nivoja statične predobremenitve in različne temperature na velikost ter pozicijo frekvenčnih pasovnih vrzeli.

4.3.1 Izračun disperzijskih krivulj metamateriala

V naslednjem koraku grafično prikažemo enačbo disperzijske krivulje (2.95) za konkretni primer metamateriala n -tih ROC-jev zasnovanih v prejšnjem poglavju.

Preko znane geometrije in znane gostote ρ_{GPLA} lahko določimo maso ROC-ja kot $M = 1,72$ g in maso resonatorja $m = 0,44$ g. Tako lahko določimo vse brezdimenzijske vrednosti na podlagi poglavja 2.3. Določimo amplitudi $A_j \overline{A_j} = 0,01$ ter izračunamo brezdimenzijsko maso $\beta = m/M = 0,26$.

Togost $K = 2 \cdot 20,372 E_p I_3 / l_3^3$ je podana preko dveh pozitivnih nosilcev definiranih v 3.3.1. Za različne temperature lahko iz ~~grafa~~ 4.4 odtičamo nelinearne togosti k in tako izračunamo serijo temperaturno odvisnih razmerij togosti α . Za prikazan primer je dušenje $\zeta = 0,01$.

SLIKE ← vtora SLIKA ?

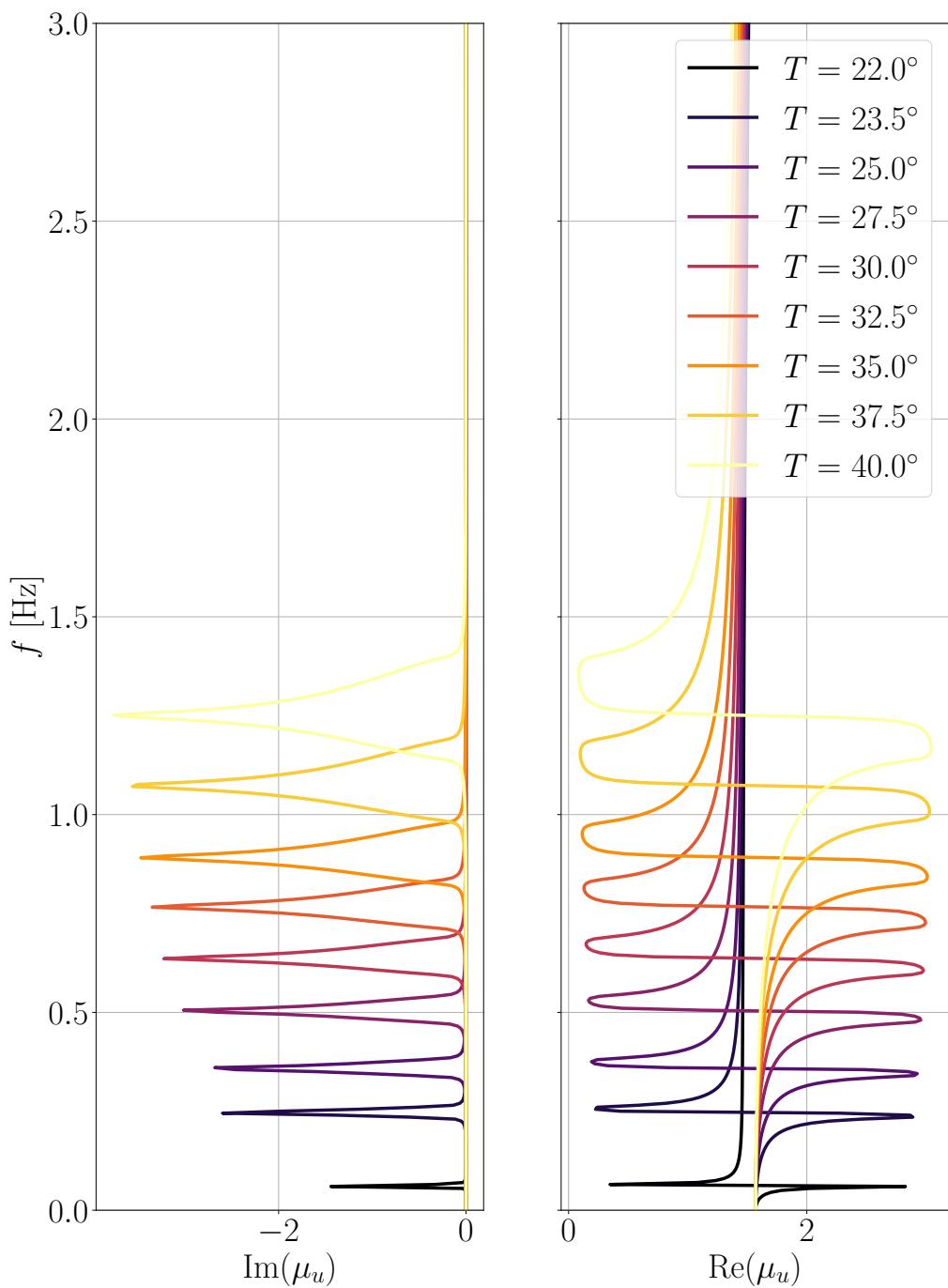
→ na podlagi aproksimacije po taylorjevi vrsti (2.88), lahko za primer $\gamma = 0,5$ in $\mu = 2$ (KNT pogoj je izpolnjen), določimo v , δ in η , ki so prav tako odvisni od togosti k .

→ V grafu 4.6 prikažemo disperzijske krivulje za različne vrednosti brezdimenzijske togosti α . Na podlagi rezultatov statične analize v grafu. . . ?

Tam kjer je $\text{Im}(\mu_u) < 0$ je prenosnost vibracij zmanjšana in je prisotna pasovna vrzel. Vidimo, da je pasovna vrzel za nizko togost k pri zelo nizkih frekvencah. Delovanje metamateriala je odvisno predvsem od dušilnega razmerja ζ , masnega razmerja β in razmerja togosti ter predvsem nelinearne togosti α .

S slike lahko vidimo, da se pri segrevanju togost k povečuje in se posledično pasovna vrzel pomika proti višjim frekvencam.

DODATI: tabelo parametrov, graf $f_{textTaylor}(q_j)$, več grafov disperzijskih: vpliv različnih amplitud - posledica nelinearnosti funkcije k , primerjava različnega dušenja.

Slika 4.6: Disperzijska krivulja $\mu(f)$.

4.3.2 Numerična prenosnost pri sobni temperaturi

V prvi fazi želimo pokazati obstoj pasovne vrzeli in pomen vibroizolativnega MM kot PZF. Numerično analizirajmo MM, po metodah predstavljenih v (3.3.2). Poglejmo si absolutno vrednost kompleksne prenosnosti $|T(\omega)|$, kar pomeni, da opazujemo razmerje amplitud pomika na izhodu U in vhodu (referenci U_0). Vrednost predstavimo na decibelni (dB) skali amplitude:

$$T_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left(\frac{U}{U_0} \right). \quad (4.1)$$

Torej je iz vidika vibroizolacije zaželena $T < 1$ dB. Pri $T > 1$ dB je prenos sile povečan in pri $T = 1$ dB govorimo o nihanju idealno togega telesa.

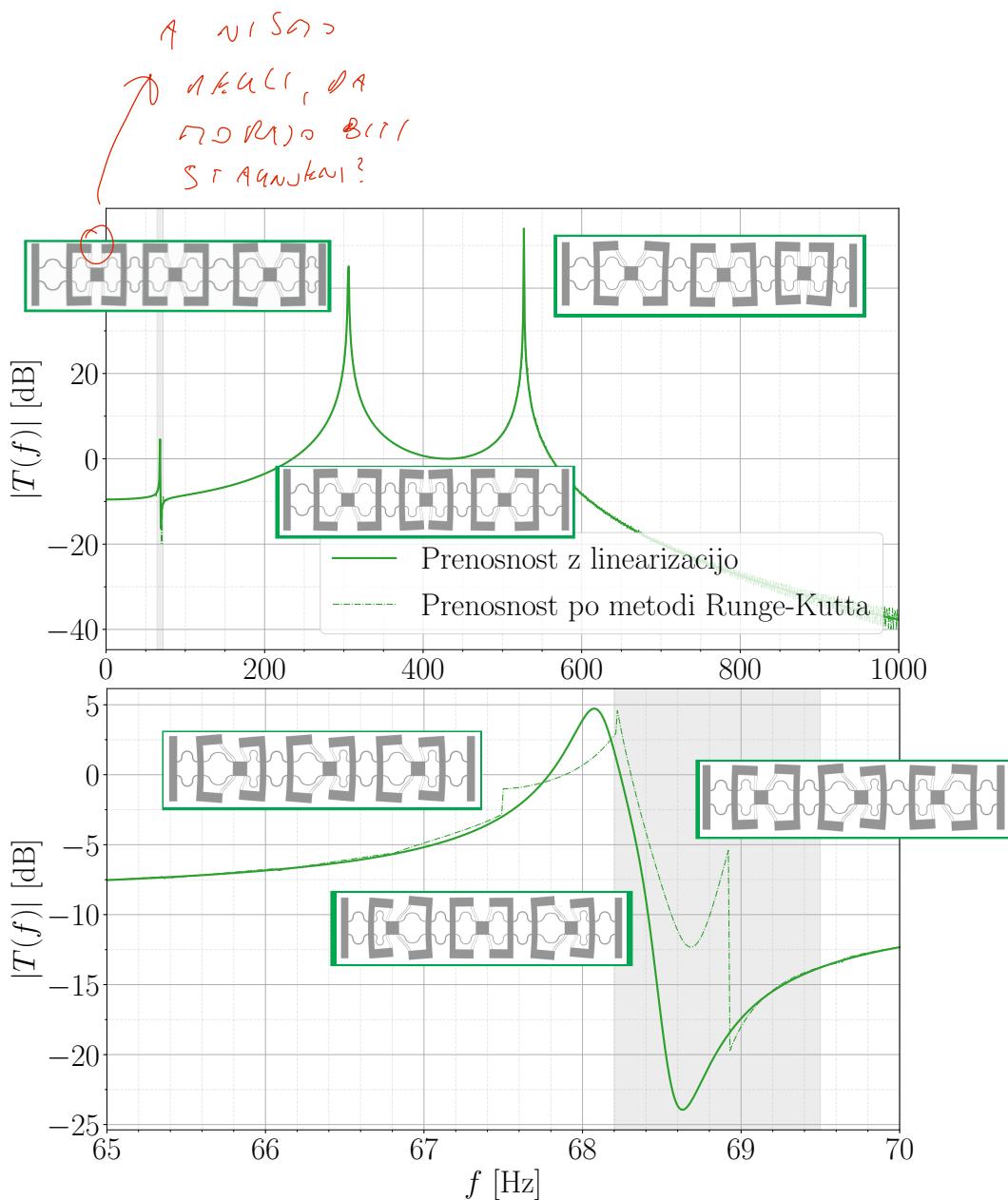
Poglejmo si najprej primer MM s tremi ROC (4.7), ki smo ga simulirali med 0 Hz in 1000 Hz. V konkretnem primeru smo posamezno ROC deformirali za 5 mm in jo prednapeli na 6 N in tako dosegli sredino območja KNT. V prvi fazi lahko sistemu (3.14) določimo lastne frekvence, ki so 67,7 Hz, 68,3 Hz, 68,4 Hz, 235,181 Hz, 430,8 Hz in 562,1 Hz. Tri najnižje lastne frekvence sovpadajo z tremi resonatorji mase m znotraj glavnih teles mase M . Te imajo preostale tri lastne frekvence. Območje kjer MM deluje kot PZF in je prisotna pasovna vrzel, je območje, kjer imajo resonatorji svojo lastno frekvenco. Na sliki spodaj, lahko vidimo pozicijo PZF, kot tudi grafični prikaz nihanj v posamezni resonanci (slike vzete iz MKE analize).

Vendar pa zgornji primer ne pokaže bistvena prednost MM v primerjavi z navadnimi materiali za dušenje dinamičnih sil. Kot vemo, so lastne frekvence v osnovi odvisne od oblike strukture. ~~(O)~~ lastnost metamateriala je, da ne glede na obliko, pozicija pasovne vrzeli ostaja nespremenjena, saj je MM struktura neodvisno od končne oblike, zasnovana iz posameznih reprezentativnih osnovnih celic.

Tako lahko v sledečem grafu 4.8 prikažemo vpliv števila ROC na prenosnost $T(f)$. Uporabimo obe numerični metodi (polna črta predstavlja linearizacijo in črtkana metodo RK). Kot vidimo, se z v osnovi število in pozicije lastnih frekvence spreminjajo (število resonanc sovpada s številom lastnih frekvenc). Toda relativno se pozicija pasovne vrzeli ne spreminja in je ves čas med približno 68 Hz in 78 Hz. Vsako dodatno ROC in posledično resonator, ki vnesemo v MM, pasovno vrzel razširi in poglobi. Razsiri jo zaradi dodatne lastne frekvence novega resonatorja, ki leži blizu vseh prejšnjih in poglobi kot posledica dodatne energije, ki se prenese iz glavnih mas M na novi resonator mase m .

Do sedaj ves čas obravnavali ROC v prednapetju in območju KNT. Za primer MM s tremi ROC, si oglejmo postopek prednapenjanja iz začetne deformacije ROC 0 mm na končno, ki je v sredini območja KNT pri 4,9 mm. Na spodnjem grafu 4.9, lahko vidimo, kako togost $k(X)$, ki predstavlja odvod funkcije F_{ROC} , z obremenjevanjem pada. Togost k je direktno povezana s togostjo resonatorja ROC. Torej z naknadnim obremenjevanjem in stiskanjem MM nižamo frekvenčno območje pasovne vrzeli. Kot vidimo iz grafov togosti, so te simetrični. Z naknadnim obremenjevanjem preko KNT pogoja (minimuma), se togost ponovno povečuje in pasovna vrzel se ponovno prične vračati v območje višjih frekvenc.

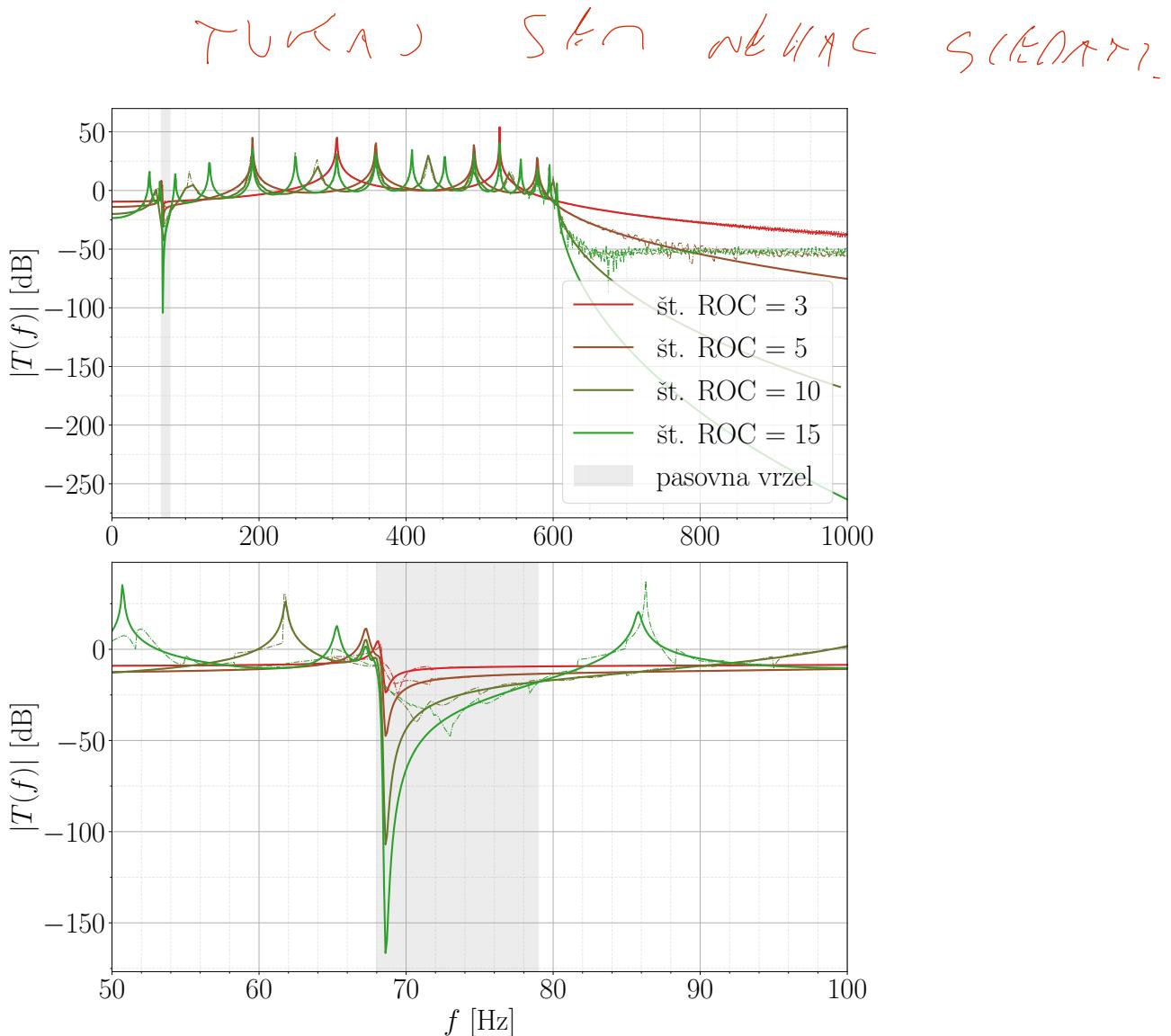
Naš metamaterial uspešno izkazuje lastnosti visoke statične in nizke dinamične (VSND) togosti, kot posledica nelinearnosti resonančne vzmeti.



Slika 4.7: Prenosnost pomika $T(f)$ za št. ROC=3.

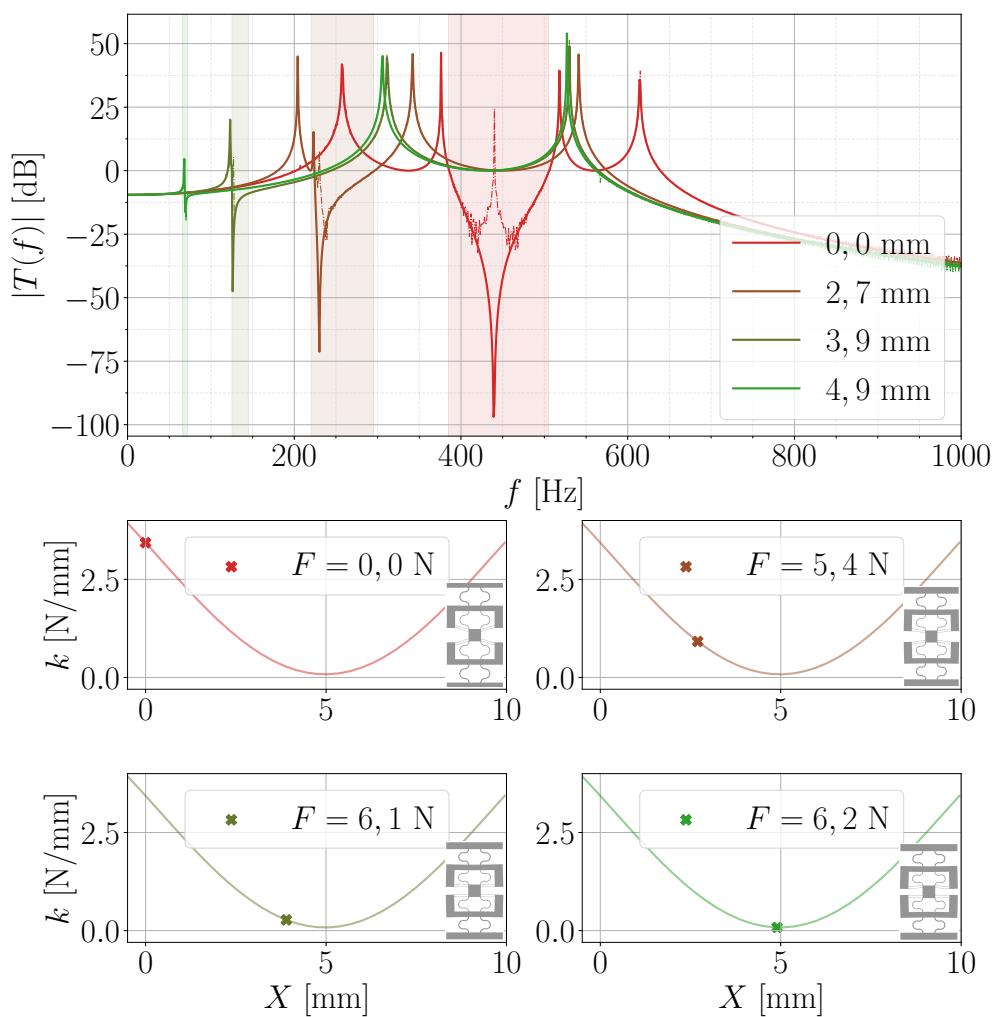
4.3.3 Numerična prenosnost pri segrevanju z Joulovim tokom

Zaradi občutljivosti modula elastičnosti E_{GPLA} na temperaturo, je dejanska prenosnost funkcija temperature $T = T(f, \text{temp.})$. Oglejmo si za primer MM s tremi ROC vpliv segrevanja vzmeti vsakega od rezonatorja na prenosnost (4.10). V osnovi vzamemo MM, ki je obremenjen tako, da je na sredini območja KNT. Kot vemo, smo na slikah 4.4 in 4.5 pokazali kako se togost ROC spreminja pri segrevanju z Joulovim tokom. Te spremembe lahko upoštevamo z spremjanjem togosti negativnega nosilca E_n , ki vodi v spremembo funkcije Taylorjeve aproksimacije sile $F_{\text{ROC}}(X)$. Kot že vemo, se z večanjem temperature modul elastičnosti E_{GPLA} mehča in togost materiala pada. Vendar ker segrevamo negativni nosilec ROC, se manjša le njegova togost in tako le negativna komponenta skupne sile F_{ROC} . Posledično se skupna togost pri večji temperaturi večja. Posledično se z večanjem temperature pasovna vrzel pomika proti višjim frekvencam. Tako lahko na pozicijo pasovne vrzeli MM vplivamo ne le z prednapetjem, vendar tudi s temperaturo. Zamislimo si lahko, da je zaradi

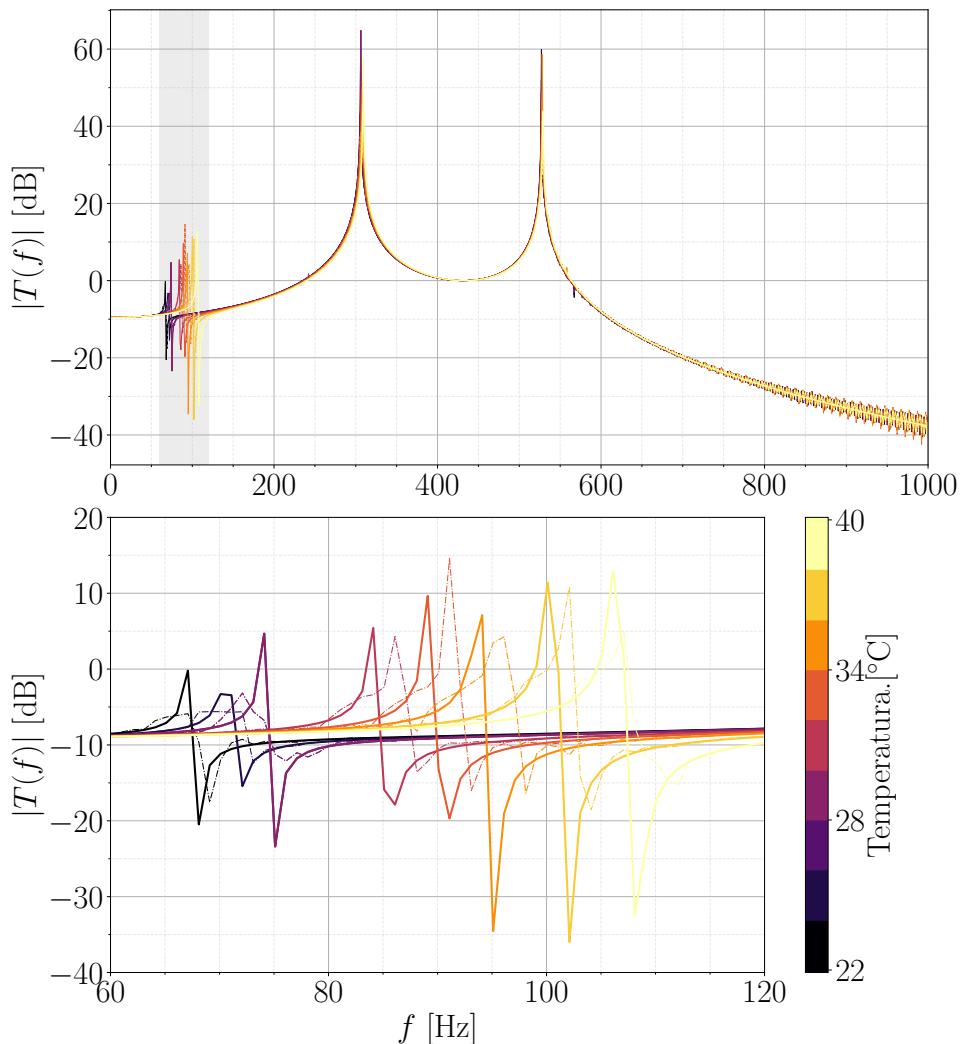


Slika 4.8: Vpliv različnega števila ROC na prenosnost $T(f)$.

majhnih sprememb sistema ali okolice, sposobnost adaptivnega prilaganja MM koristna lastnost iz vidika vibroizolacije in dušenja.



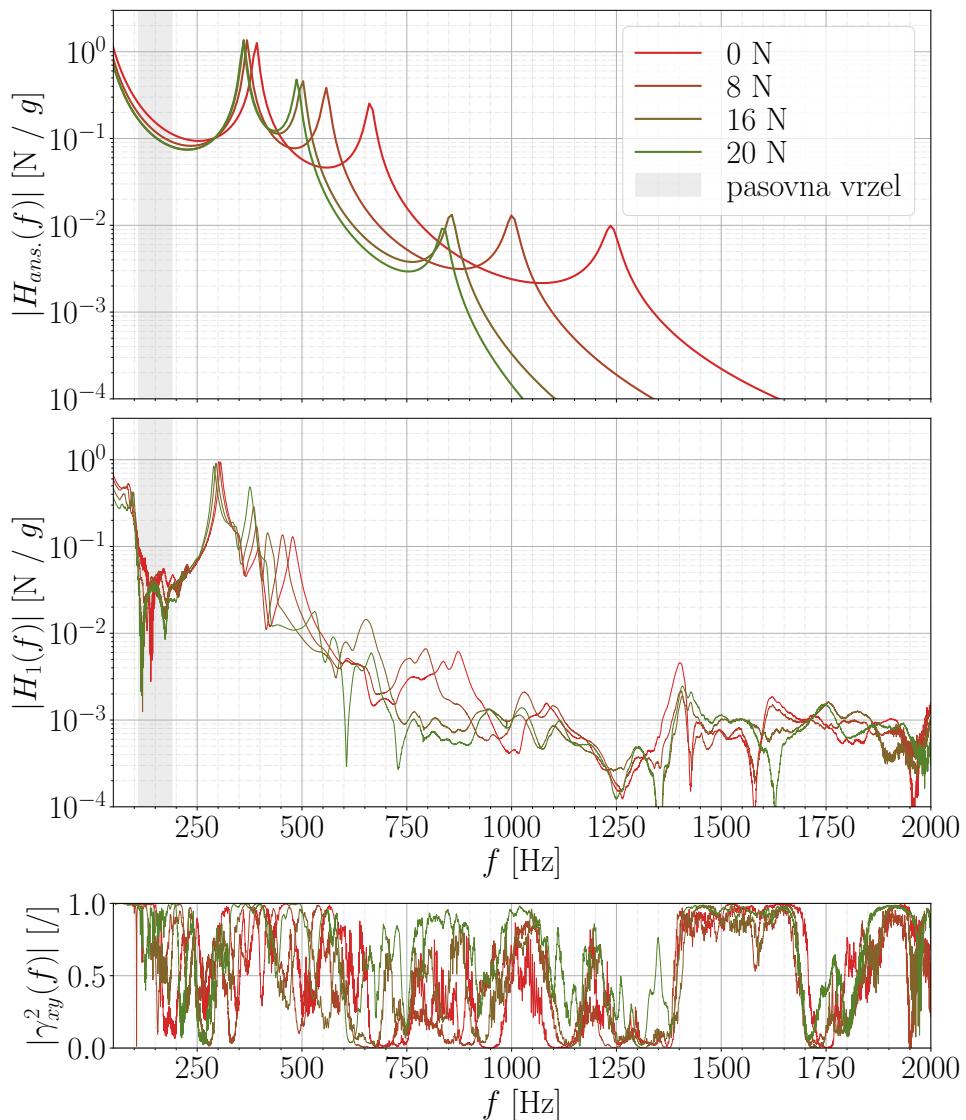
Slika 4.9: Vpliv različne statične obremenitve na pasovno vrzel MM.



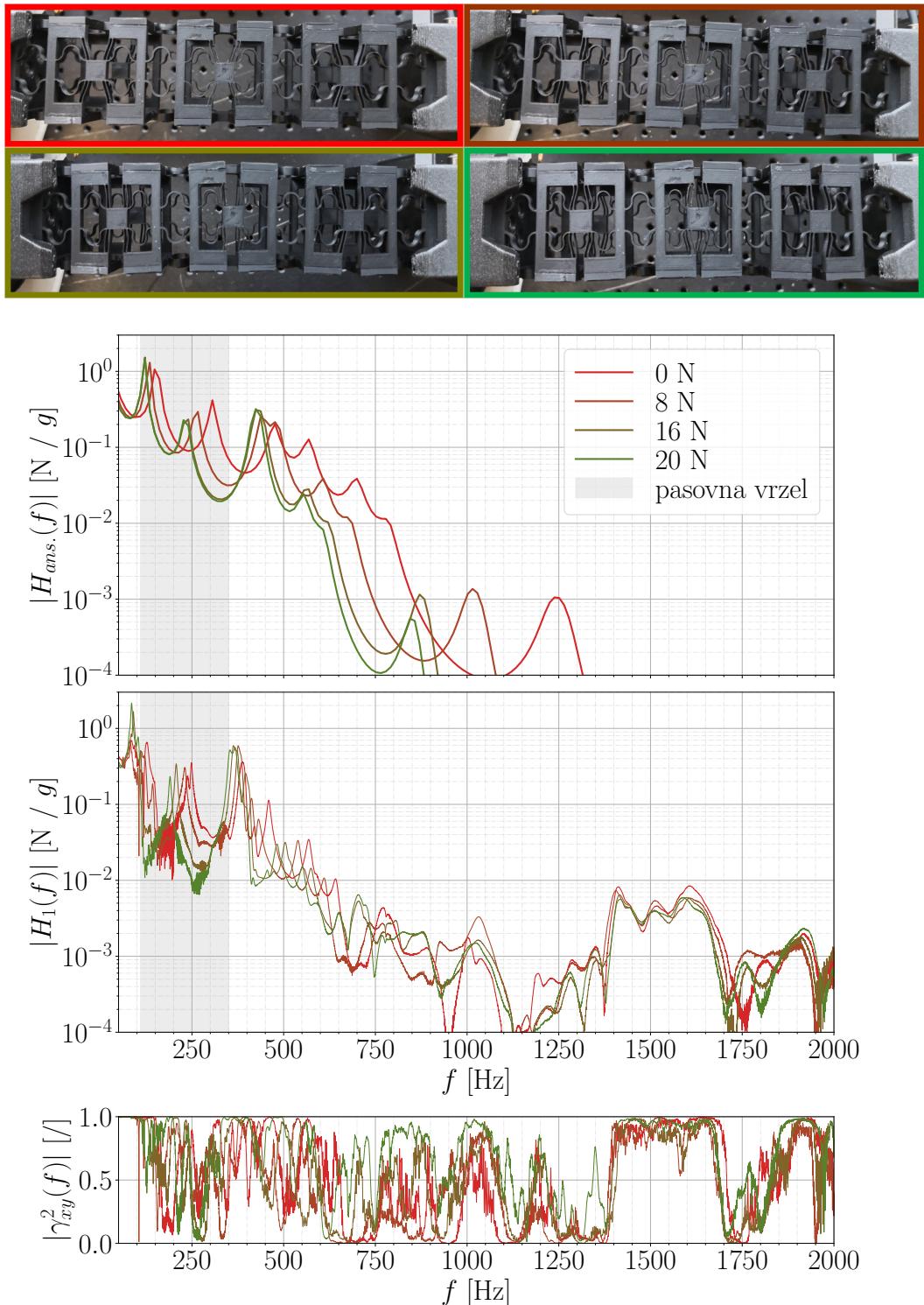
Slika 4.10: Vpliv segrevanja negativnega nosilca na prenosnost $T(f, \text{temp.})$.

4.4 FRF po MKE in eksperimentu

Eksperimentalno je zelo težko določiti prenosnost pomikov, zato predstavimo frekvenčno prenosno funkcijo $H = F/g$ iz meritve predstavljene v poglavju 3.3.3. Na sliki 4.11 imamo MM z eno samo ROC in na 4.12 s tremi ROC. Čeprav pri $H(f)$ na MKE analizi pasovna vrzel ni vidna in pri eksperimentu ni tako očitna, lahko sklepamo, da se ta nahaja med 100 in 150 Hz za en ROC in med 100 in 300 Hz za MM s tremi ROC. Ob dodatnem predobremenjevanju, se pri numerični analizi pasovna vrzel pomika proti nižjim frekvencam in ob večjem številu ROC se pas vrzeli razširi. Enak učinek lahko vidimo pri eksperimentu z MM z enim oziroma trem ROC. Kakor tudi vidimo, ima koherenca značilni padec proti 0 na mestu lastnih frekvenc.



Slika 4.11: MKE FRF $H(f)$ in eksperimentalni FRF $H_1(f)$ (zgoraj) in koherenca (spodaj) za metamaterial z enim ROC.



Slika 4.12: MKE FRF $H(f)$ in eksperimentalni $H_1(f)$ (zgoraj) in koherenca (spodaj) za metamaterial s tremi ROC pri različnih deformacijah.

5 Zaključki

V zaključnem delu smo preučevali potencialno uporabo 3D natisnjene termoaktivne metamateriala, ki izkazuje nizkofrekvenčne pasovne vrzeli, za namen vibroizolacije v strukturni dinamiki. Metamaterial, ki frekvenčno ni odvisen od svoje oblike in je odvisen le od reprezentativne osnovne celice, je načrtno zasnovan z misljivo krmiljenja preko predobremenitve in segrevanja z Joulovim tokom.

1. Predstavili smo osnovno klasifikacijo metamaterialov in delovanje metamateriala kot vibroabsorberja, ki izraža lastnost pasovno zavrnitvenega filtra.
2. Uporabili smo analitični pristop za zasnovno osnovne celice metamateriala, ki izraža visoko statično in nizko dinamično nelinearno togost, ter tudi kvazičelno togost. Teoretično smo napovedali pasovne vrzeli v metamaterialu preko izpeljave disperzijskih krivulj metamateriala.
3. Z numeričnimi metodami smo analizirali enodimensionalno verigo osnovnih celic, ki skupaj tvorijo metamaterial. V numerični analizi smo našli izrazite pasovne vrzeli, ki metamaterialu dajejo lastnost pasovno zavrnitvenega filtra.
4. Eksperimentalno smo določili modul elastičnosti E in gostoto ρ GPLA-ja s katerima lahko tudi zasnujemo dejanski metamaterial.
5. Opazili smo spremembe pozicije in širine pasovnih vrzeli v odvisnosti od predobremenitve in načrtnega segrevanja prevodnega filamenta z Joulovim tokom.
6. Numerične ugotovitve se dobro pokrivajo z eksperimentalnim delom, v katerem smo natisnili metamateriale različnih dolžin in jih uporabili kot pasovni zavrnitveni filter.

Predlogi za nadaljnje delo

V okviru magistrske naloge je koncept 3D natisnjene termoaktivne metamateriala bil analitično in numerično dobro obravnavan. Tudi iz vidika eksperimentiranja, je posamezna celica bila dobro testirana tako z obremenjevanjem kot segrevanjem. Vendar težko enako rečemo za končni metamaterial, ki bi potreboval dodatno testiranje. V nalogi smo pasovne vrzeli metamateriala eksperimentalno krmili le z obremenjevanjem toda ne s segrevanjem. Kasneje, bi z enodimensionalne verige lahko prešli na tridimensionalno strukturo, v kateri se prednost 3D tiskanja še posebej izraža. S prostorsko strukturo, bi bilo mogoče metamaterial uporabiti v dejanski aplikaciji vibroizolacije.

Literatura

- [1] A. Srivastava, “Elastic metamaterials and dynamic homogenization: a review,” *Int. J. Smart Nano Mater.*, let. 6, št. 1, str. 41–60, Jan. 2015.
- [2] S. Dalela, P. S. Balaji in D. P. Jena, “A review on application of mechanical metamaterials for vibration control,” *Mech. Adv. Mater. Struct.*, let. 29, št. 22, str. 3237–3262, Aug. 2022.
- [3] J. C. Ji, Q. Luo in K. Ye, “Vibration control based metamaterials and origami structures: A state-of-the-art review,” *Mech. Syst. Signal Process.*, let. 161, št. 107945, str. 107945, Dec. 2021.
- [4] B. Gramüller, J. Boblenz in C. Hühne, “Pacs—realization of an adaptive concept using pressure actuated cellular structures,” *Smart materials and structures*, let. 23, št. 11, str. 115006, 2014.
- [5] K. K. Saxena, R. Das in E. P. Calius, “Three decades of auxetics research- materials with negative poisson’s ratio: a review,” *Advanced Engineering Materials*, let. 18, št. 11, str. 1847–1870, 2016.
- [6] A. Martin, M. Kadic, R. Schittny, T. Bückmann in M. Wegener, “Phonon band structures of three-dimensional pentamode metamaterials,” *Physical Review B*, let. 86, št. 15, str. 155116, 2012.
- [7] S. Li, H. Fang, S. Sadeghi, P. Bhovad in K.-W. Wang, “Architected origami materials: How folding creates sophisticated mechanical properties,” *Advanced materials*, let. 31, št. 5, str. 1805282, 2019.
- [8] G. Huang in C. Sun, “Band gaps in a multiresonator acoustic metamaterial,” *Journal of Vibration and Acoustics*, let. 132, št. 3, 2010.
- [9] H. Huang, C. Sun in G. Huang, “On the negative effective mass density in acoustic metamaterials,” *International Journal of Engineering Science*, let. 47, št. 4, str. 610–617, 2009.
- [10] A. Søe-Knudsen, R. Darula in S. Sorokin, “Theoretical and experimental analysis of the stop-band behavior of elastic springs with periodically discontinuous of curvature,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, let. 132, št. 3, str. 1378–1383, 2012.

- [11] M.-H. Lu, L. Feng in Y.-F. Chen, “Phononic crystals and acoustic metamaterials,” *Materials today*, let. 12, št. 12, str. 34–42, 2009.
- [12] J. Zhou, K. Wang, D. Xu in H. Ouyang, “Multi-low-frequency flexural wave attenuation in euler–bernoulli beams using local resonators containing negative-stiffness mechanisms,” *Physics Letters A*, let. 381, št. 37, str. 3141–3148, 2017.
- [13] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Zhu, Z. Yang, C. T. Chan in P. Sheng, “Locally resonant sonic materials,” *science*, let. 289, št. 5485, str. 1734–1736, 2000.
- [14] C. Sugino, Y. Xia, S. Leadenham, M. Ruzzene in A. Erturk, “A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures,” *Journal of Sound and Vibration*, let. 406, str. 104–123, 2017.
- [15] S. Dalela, P. Balaji in D. Jena, “Design of a metastructure for vibration isolation with quasi-zero-stiffness characteristics using bistable curved beam,” *Nonlinear Dynamics*, let. 108, št. 3, str. 1931–1971, 2022.
- [16] H. Fan, L. Yang, Y. Tian in Z. Wang, “Design of metastructures with quasi-zero dynamic stiffness for vibration isolation,” *Composite Structures*, let. 243, str. 112244, 2020.
- [17] C. Cai, J. Zhou, L. Wu, K. Wang, D. Xu in H. Ouyang, “Design and numerical validation of quasi-zero-stiffness metamaterials for very low-frequency band gaps,” *Composite structures*, let. 236, str. 111862, 2020.
- [18] C.-C. Lan, S.-A. Yang in Y.-S. Wu, “Design and experiment of a compact quasi-zero-stiffness isolator capable of a wide range of loads,” *Journal of Sound and Vibration*, let. 333, št. 20, str. 4843–4858, 2014.
- [19] J. Qiu, J. H. Lang in A. H. Slocum, “A curved-beam bistable mechanism,” *Journal of microelectromechanical systems*, let. 13, št. 2, str. 137–146, 2004.
- [20] S. Rao, *Mechanical vibrations*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2007.
- [21] B. S. Lazarov in J. S. Jensen, “Low-frequency band gaps in chains with attached non-linear oscillators,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, let. 42, št. 10, str. 1186–1193, 2007.
- [22] A. C. Huang, “A harmonic balance method for pdes,” Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States); Sandia …, Tech. Rep., 2016.
- [23] J. J. Thomsen, J. J. Thomsen in J. Thomsen, *Vibrations and stability*. Springer, 2003, let. 2.
- [24] J. M. M. . N. M. M. Maia, *Modal Analysis and Testing*. Springer: NATO Science Series, 1999.
- [25] S. Rao, *The finite element method in engineering*. Oxford Elsevier: Butterworth-Heinemann, 2010.
- [26] M. Crisfield, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons, 2000, let. 1.

-
- [27] M. Boltežar, *Nihanja sistemov z več prostostnimi stopnjami*. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 2010, str. 165–177.
 - [28] *Polylactic acid*, V Wikipediji. Dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Polylactic_acid, ogled: 30. 05. 2021.
 - [29] *Glass transition*, V Wikipediji. Dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Glass_transition, ogled: 30. 05. 2021.
 - [30] M. Al-Rubaiai, T. Pinto, C. Qian in X. Tan, “Soft actuators with stiffness and shape modulation using 3d-printed conductive pla,” *SoRo Soft Robotics*, let. 0, str. 1–15, 2018.
 - [31] O. Zmeskal, L. Marackova, T. Lapickova, P. Mencik in R. Prikryl, “Thermal properties of samples prepared from polyactic acid by 3d printing,” *AIP Conference Proceedings*, let. 2305, str. 020 022–1–7, 2020.
 - [32] G. Bizjan, “Dinamika 3d natisnjene termoaktivnih blažilcev,” *Študentska tehnika konferenca ŠTeKam 2021*, 2021.
 - [33] R. Pintelon, P. Guillaume, K. D. Belder in Y. Rolain, “Measurement of young’s modulus via modal analysis experiments: a system identification approach,” *13th IFAC Symposium on System Identification*, str. 375–380, 2003.
 - [34] T. Košir in J. SLavič, “Karakterizacija mehanskih lastnosti fff 3d natisnjene struktur,” *Slovensko društvo za mehaniko srečanje Kuhljevi dnevi*, 2021.
 - [35] S. Rao, *Vibrations of Continuous Systems*. Hoboken, NJ: Pearson Education, Inc, 2017.
 - [36] M. Thompson, *ANSYS Mechanical APDL for Finite Element Analysis*. San Diego: Elsevier Science, 2017.
 - [37] R. Ferreira, I. Amatte, T. A. Dutra, in D. Burger, “Experimental characterization and micrography of 3d printed pla and pla reinforced with short carbon fibers,” *Composites Part B: Engineering*, let. 05, str. 124, 2017.

Priloga A

