

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za strojništvo



Metode modalne identifikacije struktur

Seminarska naloga - Nihanja struktur

Gašper Bizjan, 23202100

Nosilec predmeta: prof. dr. Miha Boltežar

Mentor: izr. prof. dr. Gregor Čepon

Ljubljana, April 2022

Ključne besede:	LabVIEW izračun cenilk FRF metoda polovične moči metoda prilagajanja kroga Ewins-Glessonova metoda Metoda končnih elementov
-----------------	--

Metode modalne identifikacije so eksperimentalni postopki za določanje modalnih karakteristik konstrukcij, kot so lastne frekvence, faktorji dušenja in modalne oblike. Formuliramo in izvedemo analizo z metodo polovične moči, metodo prilagajanja kroga in Ewins-Glessonovo metodo. Bistveno za modalno identifikacijo so kvalitetno določene in ocenjene frekvenčne prenosne funkcije. Na podlagi njihovih cenilk lahko izvedemo analizo. Eksperimentalne metode lahko ovrednotimo in dopolnimo z numeričnim pristopom metode končnih elementov. Z različnimi metodami pridobljene rezultate tudi primerjamo in ovrednotimo z MAC analizo.

Kazalo

Kazalo slik	vii
Seznam uporabljenih simbolov	ix
Seznam uporabljenih okrajšav	xi
1 Uvod	1
1.1 Ozadje problema	1
1.2 Definicija naloge	2
2 Teoretične osnove	3
2.1 Frekvenčna prenosna funkcija	3
2.1.1 Sistem z več prostostnimi stopnjami	4
2.1.2 Grafični prikaz in lastnosti FRF-ja	6
2.2 Cenilke frekvenčne prenosne funkcije	8
2.2.1 Autospektralna in križna spektralna funkcija	8
2.2.2 Vhodna-izhodna razmerja in identifikacija sistema	9
2.2.3 Koherenčna funkcija	9
2.3 Eksperimentalne metode modalne identifikacije	10
2.3.1 Klasifikacija metod modalne identifikacije	10
2.3.2 Metoda polovične moči	11
2.3.3 Metoda prilagajanja kroga	12
2.3.4 Ewins-Gleesonova metoda	14
2.3.5 Določanje modalnih oblik	15
2.4 Metoda končnih elementov	16
2.4.1 Gibalne enačbe končnega elementa	16
2.4.2 Analiza lastnih nihanj	18
2.4.3 Masna in togostna matrika končnih elementov	20

3 Metodologija raziskave	21
3.1 Eksperimentalna postavitev	21
3.1.1 Dimenzijske konstrukcije	22
3.1.2 LabView program	22
3.2 Izvajanje meritev	23
3.3 Analiza meritev	24
3.3.1 Uporaba okna za silo in pospešek	24
3.3.2 Izračun acelerance in prehod na receptanco	25
3.3.3 Izračun cencilk FRF in določanje koherence	26
3.4 Implementacija metode končnih elementov	28
3.4.1 Togost z identifikacijo lastnih frekvenc in MKE	28
4 Rezultati in diskusija	29
4.1 Eksperimentalna modalna identifikacija	29
4.1.1 Lastne frekvence	29
4.1.2 Faktorji dušenja	30
4.1.3 Modalne oblike	31
4.1.4 Rekonstrukcija FRF funkcije	32
4.1.5 Kriterij gotovosti modalnih oblik	33
4.2 Rezultati z metodo končnih elementov	34
5 Zaključki	35
Literatura	37

Kazalo slik

Slika 1.1:	Frekvenčne prenosne funkcije	1
Slika 2.1:	(a) Amplitudni in (b) fazni del Bodejevega diagrama [1].	7
Slika 2.2:	Nyquistov diagram [1].	7
Slika 2.3:	Grafična predstavitev iskanja vrednosti za MPM [4]	11
Slika 2.4:	Grafična predstavitev iskanja vrednosti za MPK.	13
Slika 2.5:	Heksaedrični KE v kartezijevem (levo) in naravnem (desno) KS [3].	20
Slika 3.1:	Merilna veriga z konstrukcijo.	21
Slika 3.2:	Dimenzijske konstrukcije.	22
Slika 3.3:	LabView merilna shema.	22
Slika 3.4:	Udarec kladiva v točki 10 v (a) časovni in (b) frekvenčni domeni.	23
Slika 3.5:	Vpliv okna na (a) silo in na (b) pospešek.	24
Slika 3.6:	(a) FRF brez okna in primerjava z LabView ter (b) FRF z oknom.	25
Slika 3.7:	Primerjava cenilk $H_1(\omega)$ in $H_2(\omega)$ v točki 10.	26
Slika 3.8:	Koherenca cenilk $H_1(\omega)$ in $H_2(\omega)$ v vseh točkah.	26
Slika 3.9:	Cenilke $H_2(\omega)$ v vseh točkah.	27
Slika 3.10:	Določanje okolic vrhov lastnih frekvenc.	27
Slika 3.11:	MKE model konstrukcije.	28
Slika 4.1:	Lastne frekvence vseh metod.	29
Slika 4.2:	Faktorji dušenja vseh metod.	30
Slika 4.3:	Modalne oblike vseh metod.	31
Slika 4.4:	Rekonstrukcija FRF-jev za točko 10.	32
Slika 4.5:	MAC analiza za vse metode.	33
Slika 4.6:	Prve štiri modalne oblike pridobljene z MKE.	34

Seznam uporabljenih simbolov

Oznaka	Enota	Pomen
E	MPa ali J	modul elastičnosti, tudi energija
V	m^3	volumen
F	N	sila
X	m	amplituda pomika
Q	m	vozliščni pomik
l	m	dolžina
m	kg	masa
t	s	čas
f	1/s	lastna frekvenca
α	$m\ s^{-2}/N$	receptanca
β	/	rešitev pogojne enačbe
ν	/	Poissonov količnik
μ	/	koeficient dušenja
η	/	koeficient histereznega dušenja
ρ	kg/m^3	gostota
δ	m	komponenta pomika
ω	rad/s	krožna frekvenca
Ω	rad/s	krožna frekvenca
σ	MPa	napetost
ϵ	/	specifična deformacija
$[M]$	/	masna matrika
$[K]$	/	togostna matrika
$[C]$	/	disipacijska matrika
$[A]$	/	dinamična matrika sistema

Indeksi

1	prva
2	druga
r	lastna vrednost
k	kinetična
p	potencialna
d	disipacijska
e	lokalno
o	začetna ali polarna

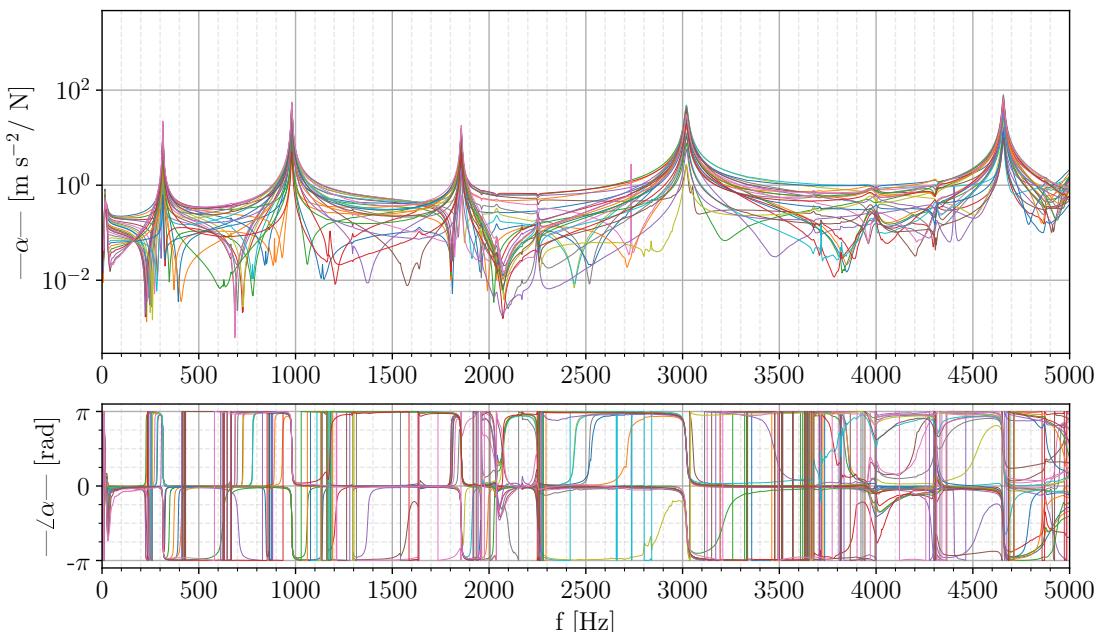
Seznam uporabljenih okrajšav

Okrajšava	Pomen
FPF	metoda polovične moči
MPM	metoda prilagajanja kroga
MPK	frekvenčna prenosna funkcija
EGM	Ewins-Glessonova metoda
MKE	metoda končnih elementov
KE	končni element

1 Uvod

1.1 Ozadje problema

V industrijskem okolju je mnogo virov neželenih mehanskih vibracij, ki hitro vodijo v prekomerno obrabo, poškodbe ali celo v kritično in nevarno odpoved materiala in strojnih delov. Dinamični učinki na sisteme postanejo dodatno nevarni kadar je prisotno vzbujanje v okolini lastnih frekvenc, saj že relativno majhen vnos energije povzroči velik odziv sistema. Namen metod modalne identifikacije (MMI), je identifikacija modalnih lastnosti konstrukcije na podlagi eksperimentalno pridobljenih meritev vibracij. Modalne lastnosti konstrukcije, ki jih lahko določimo so predvsem lastne frekvence in oblike ter dušenje. Ne glede na uporabljeni metodo pa pravilna modalna identifikacija zahteva, da spektralne značilnosti izmerjenega odziva odražajo lastnosti modalnih oblik in ne lastnosti vzbujanja.



Slika 1.1: Frekvenčne prenosne funkcije

1.2 Definicija naloge

Osrednja problematika seminarske naloge je uporabiti indirektne metode modalne identifikacije v frekvenčni domeni za določitev modalnih lastnosti dane konstrukcije.

V prvem delu predstavimo potrebne teoretične osnove za razumevanje metod modalne identifikacije. Uporabljene metode bomo umestili glede na njihovo klasifikacijo, omenili predpostavke in definirali njihove matematične modele ter algoritme za iskanje modalnih lastnosti.

Nato eksperimentalno pridobljene frekvenčne prenosne funkcije (*Frequency response function* - FRF) $H(\omega)$, oziroma v našem primeru pospešenost ali aceleranco $A(\omega)$, določimo na podlagi udarnega testa v različnih točkah, kjer z modalnim kladivom določimo vhodno udarno motnjo in na podlagi pospeškomera izhodni odziv. Aceleranco pretvorimo v mobilnost ali receptanco $\alpha(\omega)$. Sprva določimo cenilke FRF-ja $H_1(\omega)$ in $H_2(\omega)$, na podlagi katerih lahko izvedemo modalno identifikacijo z uporabo treh različnih metod:

- Metode polovične moči (MPM),
- metode prilagajanja kroga (MPK),
- Ewins-Gleesonove metode (EGM).

Na podlagi teh metod modalne identifikacije lahko določimo lastne frekvence ω_r , modalne oblike ter klasificiramo faktorje histereznega dušenja η_r . Dodatno eksperimentalne rezultate primerjamo z numerično metodo končnih elementov (MKE) in na podlagi tega določimo modul elastičnosti konstrukcije E .

Različno pridobljene modalne oblike primerjamo z *Modal Assurance Criterion*-om ali MAC kriterijem.

2 Teoretične osnove

Predstavimo potrebne teoretične osnove za razumevanje metod modalne identifikacije. Povzeto po [1] in [2]. Sprva definiramo frekvenčno prenosno funkcijo (FRF) in njene cenilke za MDOF sistem, na podlagi katerih lahko določimo koherenco meritev. Nato uporabljene metode umestimo v širšo družino. Cenilke uporabimo v treh uporabljenih metodah: Metodi polovične moči (MPM), metodi prilagajanja kroga (MPK) in v Ewins-Gleesonovi metodi (EGM). Definiramo matematično ozadje za metodami in njihove predpostavke. Ekperimentalno analizo numerično dopolnimo z metodo končnih elementov (MKE) [3].

2.1 Frekvenčna prenosna funkcija

Frekvenčna prenosna funkcija (*ang. Frequency response function - FRF*) $H(\omega)$ je kompleksna funkcija, ki povezuje izhodni odziv sistema z vhodno motnjo. V našem primeru udarimo po konstrukciji z udarnim kladivom in izmerimo njen strukturni odziv z pospeškomerom, ter ga normiramo s silo kladiva, dobimo FRF v obliki acelerance $H(\omega) = A(\omega)$. FRF-je lahko določimo tudi na podlagi pomicnosti ali mobilnosti

$$\begin{aligned}\alpha(\omega) &= \frac{\text{odmik}}{\text{vzbujevalna sila}} = \text{receptanca} \\ Y(\omega) &= \frac{\text{hitrost odziva}}{\text{vzbujevalna sila}} = \text{mobilnost} \\ A(\omega) &= \frac{\text{pospešek odziva}}{\text{vzbujevalna sila}} = \text{aceleranca}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Najpogosteje uporabimo pomicnost ali receptanco $\alpha(\omega)$, ki jo pridobimo iz zveze

$$A(\omega) = -\omega^2 \alpha(\omega).\tag{2.2}$$

Poglejmo si kako analitično definirati sistema z več prostostnimi stopnjami in nato grafično prikažimo njegovo FRF funkcijo [1].

2.1.1 Sistem z več prostostnimi stopnjami

Realne strukture so zvezni in nehomogeni elastični sistemi, ki imajo neskončno število prostostnih stopenj, ki jih lahko analiziramo kot MDOF sisteme z končnim številom prostostnih stopenj - dovolj, da še zagotovimo točnost modela.

Za N prostostnih stopenj definiramo N diferencialnih enačb pri čemer upoštevamo histerezno dušenje

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + i[D]\{x(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}, \quad (2.3)$$

pri čemer je $[M]$ masna matrika, $[D]$ disipativna matrika histereznega dušenja in $[K]$ togostna matrika sistema in $\{x(t)\}$ vektor pomika, $\{\ddot{x}(t)\}$ vektor pospeška in $f(t)$ sila vzbujanja v N -ti prostostni stopnji. Vpeljemo lahko idejo proporcionalnega dušenja, kjer je $[D] = \varepsilon[K] + \nu[M]$, kjer sta ε in ν konstanti. Zanemarimo $\{f(t)\}$ in predpostavimo obstoj rešitve

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}\} e^{i\lambda t}, \quad (2.4)$$

kjer je \bar{X} vektor amplitud odziva in jo vstavimo v enačbo (2.3) dobimo

$$[[K] - \lambda^2[M]] + i[\varepsilon[K] + \nu[M]] \{\bar{X}\} = \{0\}. \quad (2.5)$$

katere rešitev je N kompleksnih lastnih vrednosti λ_r^2 , ki nosijo informacije o lastnih frekvencah preko enačbe

$$\lambda_r^2 = \omega_r^2 (1 + i\eta_r), \quad (2.6)$$

pri čemer je $\omega_r = 2\pi f_r$ krožna lastna frekvenca, f_r lastna frekvenca in $\eta_r = \varepsilon + \nu/\omega_r^2$ faktor izgub. Lastne frekvence lahko dobimo za sistem v prostem nihanju.

Za MDOF sistem z vzbujanjem upoštevamo $\{f(t)\} = \{F\} e^{i\omega t}$ in iz enačbe (2.3) dobimo

$$\{\bar{X}\} = [[K] - \omega^2[M] + i[D]]^{-1} \{F\} = [\alpha(\omega)]\{F\} \quad (2.7)$$

kjer je $[\alpha(\omega)]$ $N \times N$ receptančna matrika, ki nosi vse informacije o dinamiki sistema (odzivni model sistema). Vsak element $\alpha_{jk}(\omega)$ predstavlja posamezni FRF $H_{jk}(\omega)$, ki opisuje razmerje med odzivom na določeni koordinati j in eno silo, ki deluje na koordinati k .

Za histerezni model imamo za vsako kompleksno lastno vrednost λ_r lastni vektor $\{\Psi_r\}$, ki zadovolji enačbo

$$[[K] + i[D] - \lambda_r^2[M]] \{\Psi_r\} = \{0\}. \quad (2.8)$$

Lastni vektorji tvorijo linearno neodvisen niz baznih vektorjev N dimenzionalnega prostora.

$$\{\bar{X}\} = \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\Psi_r\} \quad (2.9)$$

pri čemer je γ_r še nedoločena konstanta. nastavek vstavimo v enačbo (2.8) in preoblikujemo v

$$\{\Psi_s\}^T [[K] + i[D]] \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\Psi_r\} - \omega^2 \{\Psi_s\}^T [M] \sum_{r=1}^N \gamma_r \{\Psi_r\} = \{\Psi_s\}^T \{F\}. \quad (2.10)$$

Upoštevamo ortogonalnost lastnih vektorjev

$$\gamma_r \{\Psi_r\}^T [[K] + i[D]] \{\Psi_r\} - \omega^2 \gamma_r \{\Psi_r\}^T [M] \{\Psi_r\} = \{\Psi_r\}^T \{F\} \quad (2.11)$$

in z upoštevanjem modalne mase m_r in modalne togosti k_r izpeljemo

$$\gamma_r = \frac{\{\Psi_r\}^T \{F\}}{k_r - \omega^2 m_r}. \quad (2.12)$$

Zgornjo enačbo vstavimo v definicijo baznega vektorja (2.9) in dobimo

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}\} e^{i\omega t} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi_r\}^T \{F\} \{\Psi_r\}}{k_r - \omega^2 m_r} e^{i\omega t} \quad (2.13)$$

ter posledično

$$\{\bar{X}\} = \sum_{r=1}^N \frac{\{\Psi_r\}^T \{F\} \{\Psi_r\}}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2)}. \quad (2.14)$$

Če nas zanima le en sam element receptančne matrike, na primer odziv na koordinati j zaradi vzbujanja ene same harmonične sile, ki deluje na koordinati k , to pomeni, da bo imel vektor $\{F\}$ samo en ne-ničelni element, lahko zlahka dobimo

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{\Psi_{jr} \Psi_{kr}}{m_r (\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2)}. \quad (2.15)$$

Zgornji element MDOF odziva zlahka interpretiramo kot superpozicijo N SDOF odzivov. Če upoštevamo masno normirane lastne vektorje $\{\Phi_r\} = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \cdot \{\Psi_r\}$ dobimo

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} \quad (2.16)$$

ali

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{{}^r A_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2}, \quad (2.17)$$

kjer je ${}_r A_{jk} = |{}_r A_{jk}| e^{i {}_r \varphi_{jk}}$ kompleksna modalna konstanta za katero velja

$$\begin{aligned} |{}_r A_{jk}| &= \left| \frac{\Psi_{jr} \Psi_{kr}}{m_r} \right| = |\phi_{jr} \phi_{kr}| \\ {}_r \varphi_{jk} &= \arg \left(\frac{\Psi_{jr} \Psi_{kr}}{m_r} \right) = \arg (\phi_{jr} \phi_{kr}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Omenimo še nekatere pomembne lastnosti $\alpha_{jk}(\omega)$. Receptančna matrika je simetrična, saj je $\alpha_{jk}(\omega) = \alpha_{kj}(\omega)$, kar je znano tudi kot Maxwellov recipročni teorem. Druga lastnost je skupina enačb modalne konsistentnosti

$$\begin{aligned} {}_r A_{jk} &= \phi_{jr} \phi_{kr} \\ {}_r A_{jj} &= \phi_{jr}^2 \quad \text{ali} \quad {}_r A_{kk} = \phi_{kr}^2, \end{aligned} \quad (2.19)$$

ki pravijo da če je znana vrstica ali stolpec receptančne matrike $[\alpha(\omega)]$, potem je znana celotna matrika.

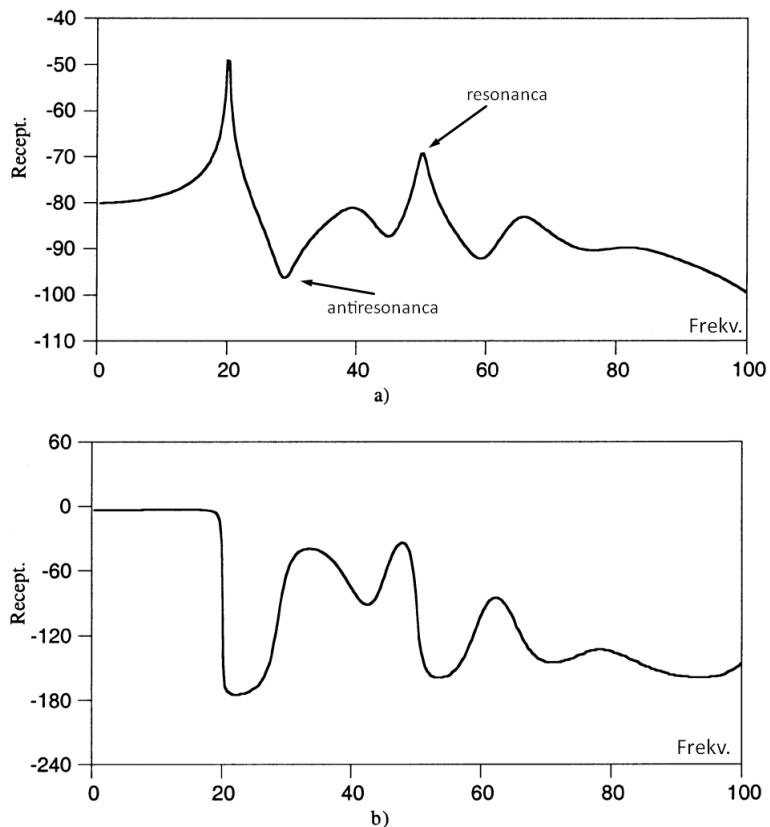
Poglejmo si sedaj kako intuitivno grafično prikažemo in interpretiramo FRF-je.

2.1.2 Grafični prikaz in lastnosti FRF-ja

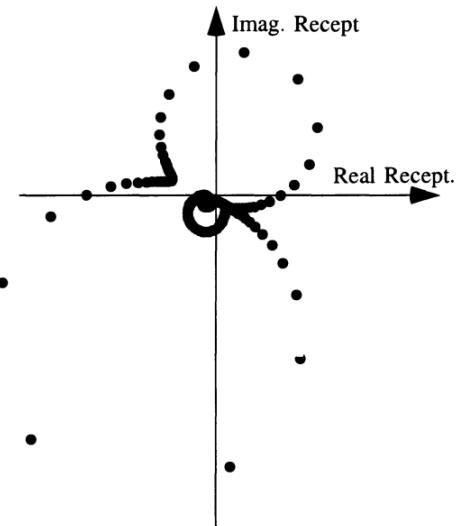
Videli smo, da je odzivni model MDOF sistema sestavljen iz niza različnih funkcij FRF in pokazali smo, da sistem z N stopnjami prostosti opisuje modalni model z N lastnimi frekvencami in modalnimi vektorji. Prav tako je bilo pokazano, da se lahko vsak FRF zapiše v obliki niza izrazov, od katerih vsak prispeva k skupnemu odzivu nihanja. Za primer vzemimo histerezno dušen sistem z pet prostostnimi stopnjami.

Najpogosteje FRF-je prikažemo v Bodejevem diagramu, ki ga vidimo na sliki 2.1. na x -osi leži frekvenca ω na y -osi pa v prvem primeru absolutna vrednost receptance $|\alpha_{jk}(\omega)|$ v logaritemski skali in v drugem primeru faza receptance $\text{ang}(\alpha_{jk})$. Lastne frekvence lahko določimo v petih resonančnih vrhovih magnitudnega diagrama. Te spremljajo najnižji vrhovi, kjer je antiresonanca oziroma najmanjši odziv. Fazni diagram pokaže spremembo faze pri prehodu skozi lastno frekvenco. Dušenje na graf vpliva tako, da so vrhovi magnitude manj osti, fazni grafi pa nimajo več prehoda med točno 0° in -180° .

Drug način prikaza je z tako imenovanim Nyquistovim diagramom 2.2, kjer je x -os realni del FRF-ja, y -os pa imaginarni del. Vidimo, da območje okoli vsake lastne frekvence izriše krog. Za enake frekvenčne korake so izrisane točke v lastni frekvenci najbolj narazen.



Slika 2.1: (a) Amplitudni in (b) fazni del Bodejevega diagrama [1].



Slika 2.2: Nyquistov diagram [1].

Za izvajanje modalne identifikacije ne uporabimo direktno eksperimentalno določenih FRF-jev $H(\omega)$ ampak njihove cenilne funkcije H_1 ali H_2 , ki upoštevajo možno prisotnost šuma na vhodu in izhodu.

2.2 Cenilke frekvenčne prenosne funkcije

Vsak realni signal je naključni ne-deterministični pojav. V sledečem poglavju opredelimo autospekter vhoda S_{xx} in izhoda S_{ff} , ter križni spekter vhoda in izhoda $S_x f$ ter S_{fx} . Določimo cenilke FRF-ja H_1 in H_2 ter definiramo koherenčno funkcijo $\gamma_{fx}(\omega)$.

2.2.1 Autospektralna in križna spektralna funkcija

Za naključni signal $x(t)$, ki je v obliki pulza $x_T(t) = x(t)$ za $|t| < T/2$ in $x_T(t) = 0$ povsod drugje, lahko zapišemo Fourierjevo transformacijo kot

$$x_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(\omega) e^{i2\pi f t} df. \quad (2.20)$$

Totalna energija signala je $\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt$ in se približuje z večjim T -jem neskončnosti. Upoštevamo povprečje $\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt$ in Parsevalov teorem

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 df. \quad (2.21)$$

Člen

$$\hat{S}_{xx}(\omega) = |X_T(\omega)|^2 / T \quad (2.22)$$

imenujemo enostavni spekter moči. Če enostavni spekter moči povprečimo

$$E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \right\} = E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} df \right\} \quad (2.23)$$

in določimo varianco

$$\sigma_x^2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} df \quad (2.24)$$

sledi autospekter, ki je definirana kot povprečje variance

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E |X_T(\omega)|^2}{T}. \quad (2.25)$$

Križni spekter z nekaj generalizacije definiramo podobno kot autospekter

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \hat{S}_{xy} \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \{ X_T^*(\omega) Y_T(\omega) \}}{T}, \quad (2.26)$$

kjer sta $X_T(\omega)$ in $Y_T(\omega)$ Fourierjevi transformaciji $x(t)$ in $y(t)$ za $|t| < T/2$.

2.2.2 Vhodna-izhodna razmerja in identifikacija sistema

Razvijmo enačbe za razmerje med ne-determinističnim vhodnim in izhodnim signalom za časovno invarianten linearen sistem. Izhajamo iz Duhamelovega integrala

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau, \quad (2.27)$$

ki je preko Fouriereve transformacije zapisan kot

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega). \quad (2.28)$$

Pokažemo lahko

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \text{ in} \\ S_{xy}(\omega) &= H(\omega)S_{xx}(\omega) \end{aligned} \quad (2.29)$$

na podlagi česar izpeljemo cenilke H_1 in H_2 kot

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} \\ H_2(\omega) &= \frac{S_{yy}(\omega)}{S_{yx}(\omega)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Cenilka H_1 je občutljiva na vhodni šum in FRF podcenjuje. H_2 je občutljiva na izhodni šum in FRF precenjuje.

2.2.3 Koherenčna funkcija

Koherenčna funkcija ali le koherenca med vhodnim signalom $x(t)$ in med izhodnim signalom $y(t)$ je definirana kot

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)} = \frac{H_1}{H_2} \quad (2.31)$$

in zanjo velja $0 \leq \gamma_{xy}^2(\omega) \leq 1$. Če preverimo koherenco SISO sistema je $\gamma_{xy}^2(\omega) = 1$ za vse frekvence ω . Takrat je izhod $y(t)$ linearno odvisen od vhoda $x(t)$. Bolj kot je sistem nelinearen (več kot je šuma, dodatni vhodi poleg $x(t)$) bolj koherenca pada proti nič.

2.3 Eksperimentalne metode modalne identifikacije

Osrednja problematika seminarske naloge je uporabiti metode modalne identifikacije v frekvenčni domeni za določitev modalnih lastnosti dane konstrukcije.

Uporabimo tri različne metode: metodo polovične moči (MPM), metodo prilagajanja kroga in Ewins-Gleesonove metodo (EGM). Metode uvrstimo v širšo družino preostalih metod ter definiramo matematično ozadje za metodami in njihove predpostavke.

Na podlagi teh metod modalne identifikacije lahko določimo lastne frekvence ω_r , modalne oblike ter klasificiramo faktorje histereznega dušenja η_r .

2.3.1 Klasifikacija metod modalne identifikacije

Metode modalne identifikacije se v grobem delijo na metode v časovni domeni in metode v frekvenčni domeni, kjer potrebujemo Fourierovo transformacijo.

Metode ločimo tudi na direktne in indirektne. Prve so numerično bolj zahtevne in temeljijo na prostorskem modelu (določimo lahko masno, togostno matriko in matriko dušenja). Druge kot rezultate nudijo lastne frekvence ω_r , faktorje dušenja η_r in modalne konstante A_r . Poleg direktne in indirektne je tudi obstajajo tudi specifične nastavljene sinusne metode.

Zadnja kategorija metod ločimo glede na število vhodov in izhodov. Metode, ki analizirajo en FRF hkrati, se imenujejo SISO (*single-input-single-output*). Kadar obdelujejo več FRF-jev pridobljenih v različnih točkah z vzbujanjem vedno na istem mestu se imenujejo SIMO (*single-input-multiple-output*). Končno obstajajo tudi metode MIMO (*multiple-input-multiple-output*), tj. upoštevajo FRF-je pridobljene z vzbujalkom na različnih lokacijah in so meritve tudi v različnih koordinatah.

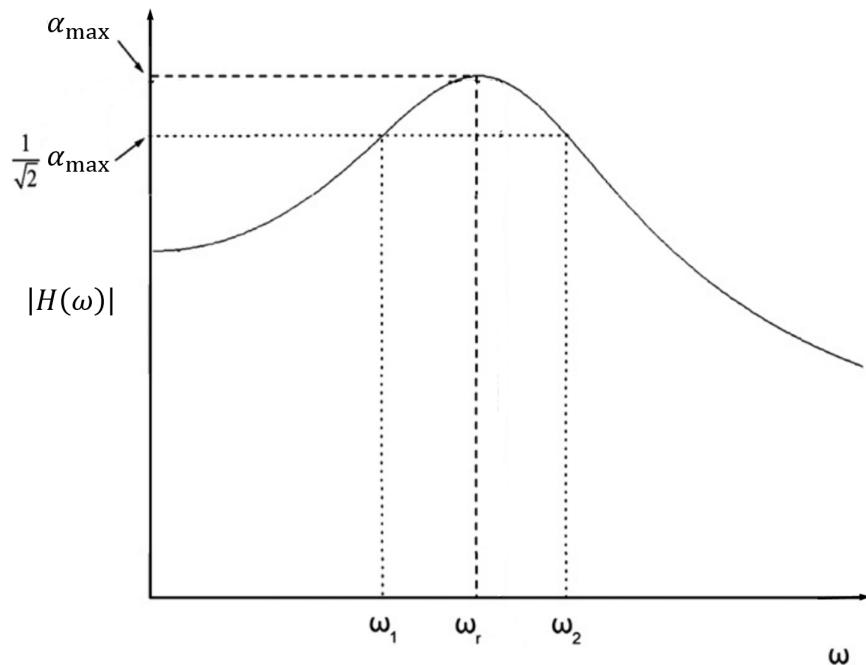
Metoda polovične moči (MPM), metoda prilagajanja kroga (MPK) in Ewins-Gleesonova metodi (EGM) so indirektne SISO metode modalne identifikacije v frekvenčni domeni. Konstrukcijo bomo obravnavali kot sistem z več prostostnimi stopnjami ali MDOF (*ang. multiple degree of freedom*) sistem. Vse metode lahko uporabimo za iskanje modalnih lastnosti takega sistema MDOF, saj obravnavamo več merilnih točk hkrati.

2.3.2 Metoda polovične moči

Metoda polovične moči (MPM) je najenostavnnejša izmed predstavljenimi metodami. Izhajamo iz receptance $\alpha_{jk}(\omega)$ izpeljane v enačbi 2.17.

Predpostavimo, da lahko MIMO sistem obravnavamo kot SISO sistem, saj lahko zaradi načela superpozicije vzbujanja obravnavamo ločeno. Tako imamo hkrati opravka z le eno lastno frekvenco in obliko.

Kot smo že omenili v poglavju 2.1.2, lahko iz magnitudnega dela Bodejeve predstavitve FRF-ja razberemo lokalne maksimume α_{\max} , ki se nahajajo pri lastnih frekvencah ω_r . Tu se pogoj o eni sami frekvenci odraža kot samo en vrh. V primeru, da so vrhovi preblizu skupaj in jih ne moremo ločiti, MPM ni ustrezna metoda. Nato poiščemo tako imenovane točke polovične moči, ki sovpadajo z lastnima frekvencama ω_1, ω_2 , $\omega_1 < \omega_2$, in se nahajajo pri vrednosti $\frac{\alpha_{\max}}{\sqrt{2}}$. Vse točke lahko vidimo na diagramu prikazanem na sliki 2.3.



Slika 2.3: Grafična predstavitev iskanja vrednosti za MPM [4]

Na podlagi točk lahko faktor histereznega dušenja ocenimo kot

$$\eta_r = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_1^2} \approx \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_r} \quad (2.32)$$

in modalno konstanto

$${}_r A_{jk} = \alpha_{\max} \eta_r \omega_r^2. \quad (2.33)$$

Na podlagi pridobljenih modalnih konstant, v poglavju 2.3.5 določimo še modalne oblike.

2.3.3 Metoda prilagajanja kroga

Metoda prilagajanja kroga (MPK) je druga predstavljena metoda. Ponovno izhajamo iz receptance $\alpha_{jk}(\omega)$ izpeljane v enačbi 2.17. To zapišemo v nekoliko drugačni obliki, ki od glavnega FRF-ja $H_{jk}(\omega) = \alpha_{jk}(\omega)$ loči ostanek $R_{jk}(\omega)$. Posledica so manjše modalne konstante, ki pa vseeno podajo enake normirane modalne vektorje.

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{^r A_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} + R_{jk}(\omega) \quad (2.34)$$

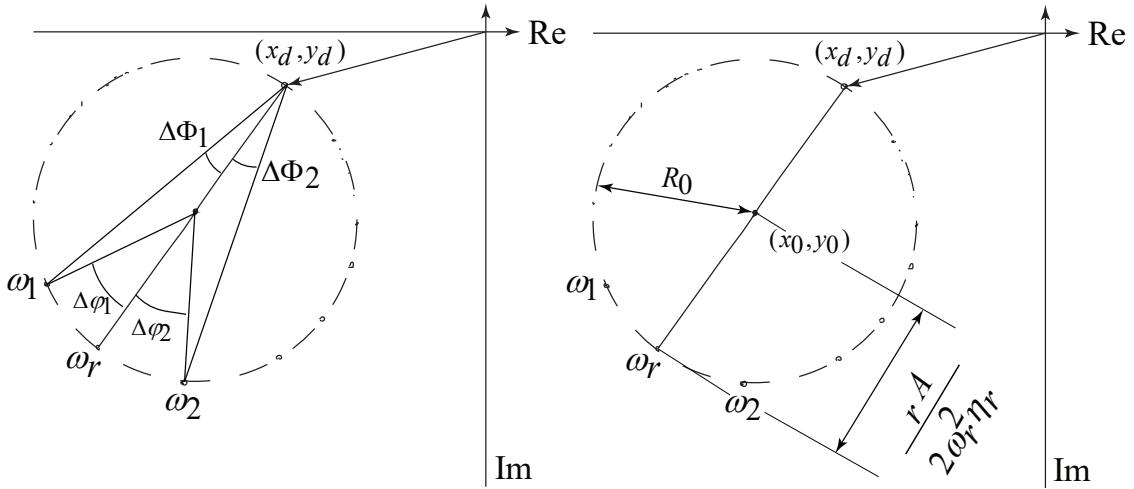
Ponovno predpostavimo, da lahko MIMO sistem obravnavamo kot SISO sistem zaradi načela superpozicije. V tej metodi izhajamo it geometrijskega pomena Nyquistovega diagrama predstavljenega v poglavju 2.1.2. Okoli posamezne lastne frekvence r se v kompleksni ravnini izriše posamezni krog, ki je viden na sliki 2.4.

Cilj je določiti parametre kroga za vsako lastno frekvenco. To dosežemo z minimizacijo funkcije, ki predstavlja razliko med točkami meritev in parameteriziranim krogom. Ta funkcija vodi v sistem enačb

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^l x_j^2 & \sum_{j=1}^l x_j y_j & -\sum_{j=1}^l x_j \\ \sum_{j=1}^l x_j y_j & \sum_{j=1}^l y_j^2 & -\sum_{j=1}^l y_j \\ -\sum_{j=1}^l x_j & -\sum_{j=1}^l y_j & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left(\sum_{j=1}^l x_j^3 + \sum_{j=1}^l x_j y_j^2\right) \\ -\left(\sum_{j=1}^l y_j^3 + \sum_{j=1}^l y_j x_j^2\right) \\ \sum_{j=1}^l x_j^2 + \sum_{j=1}^l y_j^2 \end{Bmatrix}$$

kjer $x = Re\{\alpha_{jk}\}$, $y = Im\{\alpha_{jk}\}$ in l število vseh obravnavanih točk v okolini ω_r . Parametre kroga $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R_0^2$ določimo po enačbah

$$\begin{aligned} a &= -2x_0 \\ b &= -2y_0 \\ c &= R_0^2 - x_0^2 - y_0^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$



Slika 2.4: Grafična predstavitev iskanja vrednosti za MPK.

Za vsak krog določimo lastne frekvence ω_r kot točko meritve, ki je najbolj oddaljena od ω_1 in ω_2 , saj v resonanci pride do največjega odziva in so posledično točke bolj narazen. Točke lahko določimo tako, da korakamo po točkam meritve v okolini resonance r in spremljamo rast kotov $\Delta\varphi_1 = 2\Delta\Phi_1$ in $\Delta\varphi_2 = 2\Delta\Phi_2$. Ko poznamo ω_r , lahko določimo realni in imaginarni del $\alpha_{jk}(\omega_r)$ oziroma x_r in y_r .

Faktor histereznega dušenja lahko določimo po enačbi

$$\eta_R = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_r^2} \cdot \frac{1}{\tan(\Delta\Phi_1) + \tan(\Delta\Phi_2)} . \quad (2.36)$$

Absolutno vrednost modalnih konstant določimo kot

$$|{}_r A_{jk}| = 2\omega_r^2 \eta_r R_0 \quad (2.37)$$

in fazni zamik po enačbi

$$\Phi_r = \arctan \left(\frac{x_0 - x_d}{y_0 - y_d} \right) . \quad (2.38)$$

Vrednost y_d in x_d določimo iz znanih točk (x_0, y_0) in (x_r, y_r) , saj je (x_0, y_0) polovična točka med (x_r, y_r) in (x_d, y_d)

$$\begin{aligned} x_d &= 2x_0 - x_r \\ y_d &= 2y_0 - y_r . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Kompleksno modalno konstanto ${}_r A_{jk}$ izračunamo kot

$${}_r A_{jk} = |{}_r A_{jk}| e^{i\Phi_r} \quad (2.40)$$

Na podlagi pridobljenih modalnih konstant, v poglavju 2.3.5 določimo še modalne oblike.

2.3.4 Ewins-Gleesonova metoda

Glavna razlika Ewins-Gleesonove metode (EGM) je v tem, da tu hkrati obravnavamo vse vrhove naenkrat. Torej pri tej metodi ne rabimo principa superpozicije, saj lahko direktno rešujemo FRF MIMO sistema. Glavna omejitev metode, pa je da pri reševanju zanemarimo dušenje. Fazni kot Φ_r je tako vedno 0° ali 180° .

Izhajamo iz enačbe receptance (2.34), kjer je ponovno prisoten ostanek $R_{jk}(\omega)$. Upoštevamo zanemaritev dušenja in dobimo receptanco

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{^rA_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2} + R_{jk}(\omega) \quad (2.41)$$

Za veljavno predpostavko o zanemariti dušenja, more biti dejansko dušenje sistema majhno. V tem primeru je enostavno določiti lastne frekvence ω_r iz amplitude magnitudnega dela Bodejevga diagrama (kot pri MPM). Tako so edine neznanne modalne konstante. Za MDOF sistem z N prostostnimi stopnjami lahko zapišemo ločena sistema za realni $\text{Re}\{\alpha_{jk}\}$ in imaginarni del receptance $\text{Im}\{\alpha_{jk}\}$. Prikažemo sistem za realni del.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_1^2} & \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_1^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_N^2 - \Omega_1^2} \\ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_2^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_2^2} & \cdots & \frac{1}{\omega_N^2 - \Omega_2^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega_N^2} & \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega_N^2} & \cdots & \frac{i}{\omega_N^2 - \Omega_N^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_1 A_{jk} \\ {}_2 A_{jk} \\ \vdots \\ {}_N A_{jk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Re}(\alpha_{jk}(\Omega_1)) \\ \text{Re}(\alpha_{jk}(\Omega_1)) \\ \vdots \\ \text{Re}(\alpha_{jk}(\Omega_N)) \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_N$ so poljubno izbrane frekvence, ki naj bi bile blizu ω_r . Izberemo $\Omega_r = 1,01 \omega_r$. Identični sistem tvorimo in rešimo še za imaginarni del ter modalne konstante nato ponovno sestavimo v kompleksne modalne konstante ${}_r A_{jk}$.

Na tem mestu v sistem vrnemo dušenje. Faktor dušenja lahko izračunamo v lastnih frekvencah $\omega_r = \Omega_r = \Omega$ z uporabo enačbe (2.34).

$$\eta_r = \frac{|{}_r A_{jk}|}{\omega_r^2 |\alpha_{jk}(\omega_r)|} \quad (2.43)$$

Na podlagi pridobljenih modalnih konstant, v poglavju 2.3.5 določimo še modalne oblike.

2.3.5 Določanje modalnih oblik

V treh podpoglavljih smo z vsako metodo že določili lastne frekvence ω_r , faktorje dušenja η_r in modalne konstante ${}_rA_{jk}$. Kot vidimo, dobimo za vsak ločen FRF $H_{jk}(\omega) = \alpha_{jk}(\omega)$, kjer sta j odzivna točka in k vzbujevalna točka modalne konstante pri r -ti lastni frekvenci, drugačne vrednosti konstante. Vredno je omeniti tudi, da so v samem izračunu ω_r in η_r prav tako odvisne od merilnih točk, vendar so v teoriji odvisne le od frekvence in vpliv pozicije zanemarimo.

Določimo sedaj na podlagi ${}_rA_{jk}$ lastne vektorje sistema $\{{}_r\varphi\} = \{{}_r\varphi_1, {}_r\varphi_2, {}_r\varphi_3, \dots\}$, kjer je ${}_r\varphi$ koordinata modalne oblike pri r -ti frekvenci.

Kompleksno modalno konstanto lahko preko koordinat modalnih oblik definiramo kot

$${}_rA_{jk} = {}_r\varphi_j \cdot {}_r\varphi_k, \quad (2.44)$$

kar nadalje definira vektor modalnih konstant pri r -ti lastni frekvenci

$${}_rA = \{{}_r\varphi_2 \cdot {}_r\varphi_1, {}_r\varphi_2 \cdot {}_r\varphi_2, {}_r\varphi_2 \cdot {}_r\varphi_3, \dots\}. \quad (2.45)$$

Velja, da je tako imenovana *Driving point* ali točka odziva $j = dp$. ves čas enaka. Tako je modalna koordinata odziva enostavno definirana kot

$${}_r\varphi_{dp.} = \sqrt{{}_rA_{dp.}}. \quad (2.46)$$

Torej lahko z znanimi kompleksnimi modalnimi konstantami ${}_rA_{jk}$ določimo končno enačbo vektorja modalne oblike pri r -ti lastni frekvenci

$$\{{}_r\varphi\} = \frac{[{}_rA]}{{}_r\varphi_{dp.}} \cdot \text{sign}(\text{imag}[{}_rA]) \quad (2.47)$$

2.4 Metoda končnih elementov

Iskanje modalnih lastnosti nekega sistema ni nujno omejeno le na eksperimentalni pristop. Sicer je ta edini, ki zagotovi realne rezultate, so numerični pristopi močno orodje. Za dobro poznane in ovrednotene metode, kot je tudi Metoda končnih elementov (MKE), lahko eksperimentalne rezultate s simulacijo tudi ovrednotimo. Osnovna ideja MKE je iskanje rešitev kompleksnega realnega problema z uporabo poenostavljenega modela, ki sestoji iz številnih delov, imenovanih končni elementi (KE). Neodvisno od geometrije in celo od vrste fizikalnega problema, ki ga želimo rešiti z MKE, so osnovni koraki formulacije vedno enaki. Preko njih bomo na osnovi pregleda literature [3] izpeljali enačbe MKE. **Korak 1:** Razdelitev fizikalnega modela v diskretne elemente (diskretizacija). **Korak 2:** Izbira aproksimacijskega modela. **Korak 3:** Izpeljava matrik končnega elementa. **Korak 4:** Sestavljanje matrik posameznega končnega elementa v sistemski matriki. **Korak 5:** Upoštevanje začetnih pogojev ter robnih in prehodnih pogojev. **Korak 6:** Reševanje sistema enačb.

Definirajmo sedaj gibalne enačbe končnega elementa za reševanje problema lastnih nihanj in jih kasneje aplicirajmo na oba uporabljeni tipa končnih elementov.

2.4.1 Gibalne enačbe končnega elementa

Pomike po območju končnega elementa \vec{U} , aproksimiramo preko diskretnih vrednosti pomikov vozlišč \vec{Q}^e in matrike oblikovnih oziroma aproksimacijskih funkcij $[N]$.

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = [N(x, y, z)] \vec{Q}^e(t) \quad (2.48)$$

Za KE lahko izrazimo specifične deformacije

$$\vec{\varepsilon} = [B] \vec{Q}^e \quad (2.49)$$

in napetosti

$$\vec{\sigma} = [D] \vec{\varepsilon} = [D][B] \vec{Q}^e, \quad (2.50)$$

kjer je $[B]$ matrika odvodov oblikovnih funkcij in $[D]$ materialna matrika, v kateri se nahaja modul elastičnosti.

Z odvajanjem enačbe (2.48) po času definiramo polje pomikov, kjer je $\dot{\vec{Q}}^e$ diskretna vrednost vozliščnih hitrosti.

$$\dot{\vec{U}}(x, y, z, t) = [N(x, y, z)] \dot{\vec{Q}}^e(t) \quad (2.51)$$

Gibalne enačbe izpeljemo preko Lagrangeve formulacije

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} \right\} - \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} \right\} + \left\{ \frac{\partial E_d}{\partial Q} \right\} = \{0\}, \quad (2.52)$$

kjer je Lagrangian \mathcal{L} definiran z razliko kinetične E_k in potencialne E_p energije.

$$\mathcal{L} = E_k - E_p \quad (2.53)$$

Za vsak element lahko kinetično in potencialno energijo zapišemo kot

$$E_k^e = \frac{1}{2} \iiint_{V^e} \rho \dot{\vec{U}}^T \dot{\vec{U}} dV \quad (2.54)$$

$$E_p^e = \frac{1}{2} \iiint_{V^e} \vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma} dV - \iint_{S^e} \vec{U}^T \vec{\Phi} dS - \iiint_{V^e} \vec{U}^T \vec{\phi} dV. \quad (2.55)$$

E_d je disipacijska energija. Za vsak element je

$$E_d^e = \frac{1}{2} \iiint_{V^e} \mu \vec{U}^T \dot{\vec{U}} dV. \quad (2.56)$$

Pri tem je ρ gostota in μ koeficient dušenja. $\vec{\Phi}$ je vektor sil na zunanjih površinah in $\vec{\phi}$ vektor sil kot posledica volumskih (termalnih deformacij, gravitacije) obremenitev elementa.

Upoštevamo definicije pomika, deformacije in napetosti v enačbah od (2.48) do (2.50) in seštejemo energije po posameznih elementih.

$$E_k = \sum_{e=1}^E E_k^e = \frac{1}{2} \vec{Q}^T \left[\sum_{e=1}^E \iiint_{V^e} \rho [N]^T [N] dV \right] \dot{\vec{Q}} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} E_p = \sum_{e=1}^E E_p^e &= \frac{1}{2} \vec{Q}^T \left[\sum_{e=1}^E \iiint_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \right] \vec{Q} \\ &\quad - \vec{Q}^T \left(\sum_{e=1}^E \iint_{S^e} [N]^T \vec{\Phi}(t) dS^e + \iiint_{V^e} [N]^T \vec{\phi}(t) dV \right) - \vec{Q}^T \vec{F}_c(t) \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$E_d = \sum_{e=1}^E E_d^e = \frac{1}{2} \vec{Q}^T \left[\sum_{e=1}^E \iiint_{V^{(e)}} \mu [N]^T [N] dV \right] \dot{\vec{Q}} \quad (2.59)$$

Pri tem so \vec{Q} globalni vektor vozliščnih pomikov, $\dot{\vec{Q}}$ globalni vektor vozliščnih hitrosti in \vec{F}_c vektor koncentriranih vozliščnih sil.

Iz zgornjih izrazov lahko razberemo masno $[M^e]$, togostno $[K^e]$ in disipacijsko $[C^e]$ matriko posameznega elementa:

$$[M^e] = \iiint_{V^e} \rho [N]^T [N] dV \quad (2.60)$$

$$[K^e] = \iiint_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \quad (2.61)$$

$$[C^e] = \iiint_{V^e} \mu [N]^T [N] dV \quad (2.62)$$

in vektor ekvivalentnih vozliščnih sil zaradi površinskih učinkov \vec{F}_S^e ter zaradi volumskih učinkov \vec{F}_V^e :

$$\vec{F}_S^e = \iint_{S^e} [N]^T \vec{\Phi} \cdot dS \quad (2.63)$$

$$\vec{F}_V^e = \iint_{V^e} [N]^T \vec{\phi} \cdot dV \quad (2.64)$$

Če lokalne matrike razsirimo na vse prostostne stopnje in jih seštejemo dobimo masno $[M]$, togostno $[K]$ in disipacijsko $[C]$ matriko celotnega sistema. Seštevek vseh ekvivalentnih vozliščnih vrednosti sil po vseh elementih F_S^e in F_V^e in dodatni prispevek vseh koncentriranih vozliščnih vrednosti nam vrne globalni vektor vozliščnih sil $\vec{F}(t)$.

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^T [M] \dot{\vec{Q}} \quad (2.65)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^T [K] \vec{Q} - \vec{Q}^T \vec{F} \quad (2.66)$$

$$E_d = \frac{1}{2} \dot{\vec{Q}}^T [C] \dot{\vec{Q}} \quad (2.67)$$

zgornje tri enačbe vstavimo v enačbo (2.52) in dobimo globalni sistem gibalnih enačb pridobljen z metodo končnih elementov, pri čemer je \vec{Q} vektor globalnih vozliščnih pospeškov.

$$[M] \ddot{\vec{Q}}(t) + [C] \dot{\vec{Q}}(t) + [K] \vec{Q}(t) = \vec{F}(t) \quad (2.68)$$

V nadaljnji obravnavi lahko zanemarimo dušenje.

$$[M] \ddot{\vec{Q}}(t) + [K] \vec{Q}(t) = \vec{F}(t) \quad (2.69)$$

2.4.2 Analiza lastnih nihanj

Poljubnemu sistemu v začetku opazovanja lahko dodelimo neke začetne pogoje, nato pa mu prepustimo, da prosto niha. Začetni pogoji so definirani z začetnimi pomiki od ravnovesne lege, hitrostmi in pospeški koordinat vozlišč. V sistem jih lahko vnesemo na različne načine - potreben je vnos energije ali delovanje sile preko impulznega stavka. Po vnosu začetnih pogojev struktura ni pod vplivom nobene zunanje sile in pravimo, da je sistem v stanju proste vibracije [5].

Matematični izhodišče pri iskanju lastnih frekvenc (lastnih vrednosti) in pripadajočih lastnih oblik predstavlja enačba (2.69), pri čemer je $\vec{F} = 0$.

$$[M] \ddot{\vec{Q}} + [K] \vec{Q} = \vec{0} \quad (2.70)$$

Gre za sistem n homogenih gibalnih enačb, kjer je n število prostostnih stopenj. Za nedušene in harmonične proste vibracije iščemo rešitev kot n harmonskih funkcij.

$$Q_i = \bar{Q}_i \sin(\omega t - \varphi), \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.71)$$

V vektorski notaciji.

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 \sin(\omega t - \varphi), \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.72)$$

Kjer so iskane neznane vrednosti amplitude \vec{Q} in lastne frekvence ω . Sistem ima n lastnih frekvenc ter enako število lastnih oblik. Pri nihanjih z lastnimi oblikami se vsak del sistema giblje harmonično ob hkratnem prehodu preko ravnovesnih leg. Za dosego takega gibanja moramo zagotoviti začetne pogoje, ki ustrezajo lastnim oblikam. Pri poljubnem začetnem pogoju je odziv sistema pri vsaki koordinati dan z vsoto nihanj z lastnimi oblikami.

Nastavek (2.72) uporabimo v enačbi (2.70).

$$\begin{aligned} -\omega^2[M]\vec{Q} \sin(\omega t - \varphi) + [K]\vec{Q} \sin(\omega t - \varphi) &= \vec{0} \quad / \text{ predp. } \sin(\omega t - \varphi) \neq 0 \\ -\omega^2[M]\vec{Q} + [K]\vec{Q} &= \vec{0} \\ ([K] - \omega^2[M])\vec{Q} &= \vec{0} \quad / \text{ pomnožimo z } [M^{-1}] \\ ([K][M^{-1}] - \omega^2[I])\vec{Q} &= \vec{0} \\ ([A] - \lambda[I])\vec{Q} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Kjer je matrika $[A] = [K][M^{-1}]$ imenovana dinamska matrika sistema. $\lambda = \omega^2$ je parameter, ki vodi do lastnih vrednosti sistema. Netrivialna rešitev zahteva vsaj eno neničelno amplitudo v vektorju \vec{Q} , torej iščemo neničelnost determinante ali karakteristično enačbo sistema.

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0 \quad (2.74)$$

Razvoj determinante pripelje do polinoma n -te stopnje:

$$\lambda^n + X_1\lambda^{n-1} + \dots + X_n = 0, \quad (2.75)$$

Iz katerega izrazimo n lastnih vrednosti sistema. Lastne vrednosti uredimo po velikosti λ_i , $i = 1, \dots, n$, tako da najmanjše število pomeni prva lastna vrednost in hkrati prva lastna frekvenco f_o .

$$f_{oi} = \frac{\omega_{oi}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{2\pi}; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.76)$$

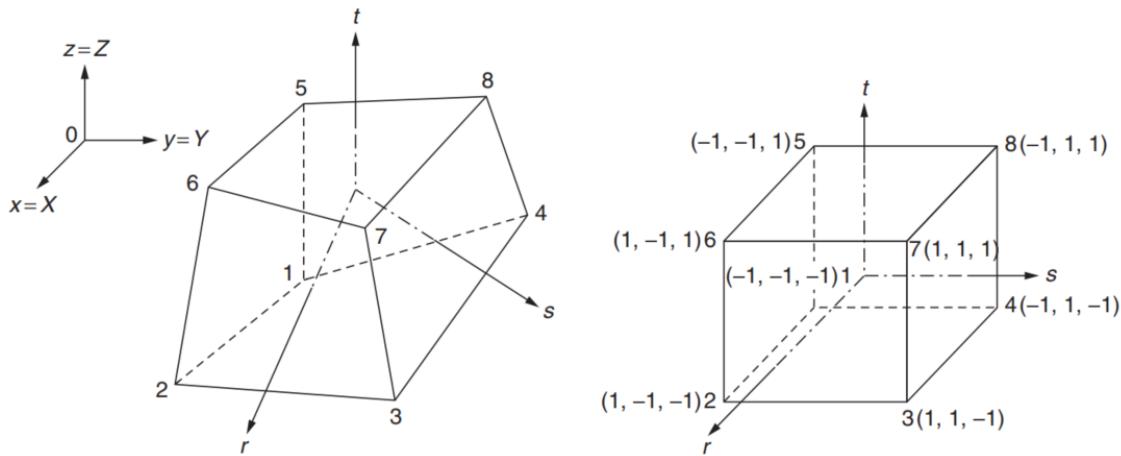
Z vstavljanjem izračunanih lastnih vrednosti λ_i v enačbo (3.1) izračunamo pripadajoče lastne vektorje \vec{Q}_i . Lastni vektorji ne predstavljajo dejanske amplitude, temveč medsebojno relativne vrednosti. Če te relativne vrednosti normiramo in formuliramo v vektor \vec{Q} , ta predstavlja modalno obliko pripadajoče lastne frekvence.

V sistemu z velikim številom matrik (v resnici že pri 3×3 matriki) postane postopek iskanja lastnih vrednosti analitično težko rešljiv. Lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje iščemo numerično. Numerične metoda hkrati vrnejo sezname lastnih vrednosti λ ter seznam desnih normiranih lastnih vektorjev \vec{Q} .

2.4.3 Masna in togostna matrika končnih elementov

V izpeljavi dinamičnih enačb po metodi končnih elementov vidimo, da potrebujemo določiti masno in togostno matriko končnega elementa. Natančno upoštevamo geometrijo konstrukcije, Zato izpeljemo matrike heksaedričnega volumskega KE.

Heksaedrični končni element tvori osem vozlišč $i = 1-8$, katerega vsako ima tri prostostne stopnje u_i, v_i, w_i . Izpeljavo izvedemo za izoparametrični KE, tako da je element v naravnem koordinatnem sistemu (KS) r, s, t vedno kocka (slika 2.5). Preko Jakobijeve matrike $[J]$ lahko izpeljavo v naravnem transformiramo v kartezijev KS.



Slika 2.5: Heksaedrični KE v kartezijevem (levo) in naravnem (desno) KS [3].

Enačbi za masno matriko pridobljeno z (2.60) in togostno matriko z (2.61) se v primeru izoparametričnega heksaedričnega KE glasita

$$[M^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho ([J]^{-1}[N])^T ([J]^{-1}[N]) \det[J] dr ds dt \quad (2.77)$$

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([J]^{-1}[B])^T [D] ([J]^{-1}[B]) \det[J] dr ds dt \quad (2.78)$$

kjer je matrika oblikovnih funkcij v naravnem KS

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & \dots & N_8 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

$$N_i(r, s, t) = \frac{1}{8} (1 + m_i) (1 + ss_i) (1 + tt_i); \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (2.80)$$

in matrika odvodov oblikovnih funkcij, ki je dimenzije 6×24 .

$$[B] = [[B_1] [B_2] \dots [B_8]] \quad (2.81)$$

Jakbijeva matrika je definirana kot

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} x_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} y_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} z_i \right) \\ \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial s} x_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial s} z_i \right) \\ \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial t} x_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial t} y_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial t} z_i \right) \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

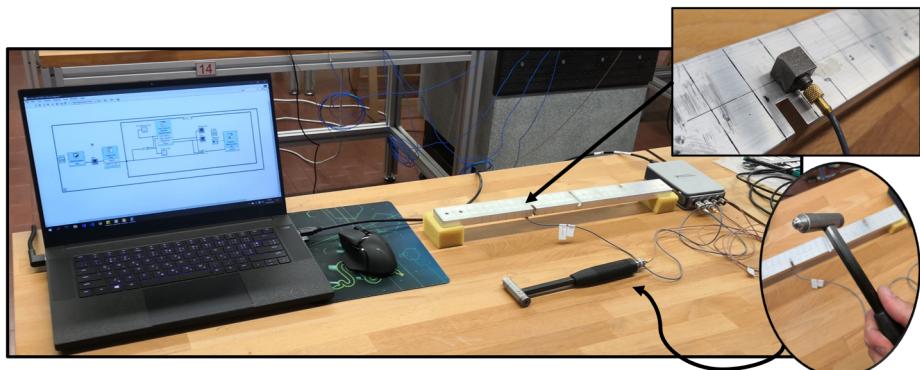
Podobno kot v primeru linijskega KE, je tudi tu v materialni matriki $[D]$ iskani E .

3 Metodologija raziskave

V sledečem delu predstavimo konstrukcijo in postavitev ter izvedbo eksperimenta. Sledi analiza meritev: predstavitev filtrirnega okna signalov, izračun cenilk in koherence ter uporaba cenilk za modalno identifikacijo z metodo polovične moči (MPM), metodo prilagajanja kroga (MPK) in Ewins-Gleesonovo metodo (EGM). Modalno analizo konstrukcije izvedemo tudi z MKE in na podlagi nje dobimo modul elastičnosti materiala E . Vse rezultate primerjamo z rekonstrukcijo signalov in z MAC kriterijem v poglavju 4.

3.1 Eksperimentalna postavitev

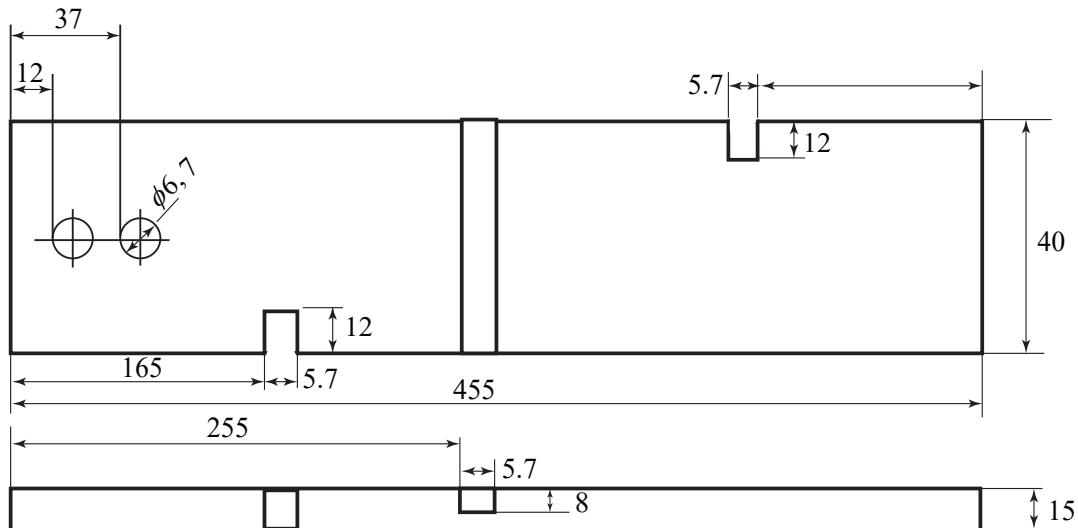
Konstrukcija na sliki 3.2, ki spominja na nosilec, je položena na mehko penasto podlago. Glede na podlago lahko predpostavimo proste robne pogoje in nizko dušenje; torej je uporaba naših metod smiselna. Na konstrukciji so že v naprej bile določene meritne točke, označene z številkami od 0 do 26. Na spodnjo stran konstrukcije v točki 7 (*driving point*) z voskom pritrdimo pospeškomer T333B30 SN 53359 z občutljivostjo 102,7 mV/g. Konstrukcijo vzbujamo s udarnim kladivom z občutljivostjo 2,273 mV/N in s kovinsko glavo, ki omogoča najvišje delovne frekvence. Pospeškomer kot tudi kladivo sta povezana na meritno kartico NI 9234, ki ima sposobnost branja vzorcev z frekvenco 51200 Hz. Merilna kartica je povezana na računalnik na katerem je nameščen program *LabView*. Celotno postavitev vidimo na sliki 3.1.



Slika 3.1: Merilna veriga z konstrukcijo.

3.1.1 Dimenzijs konstrukcije

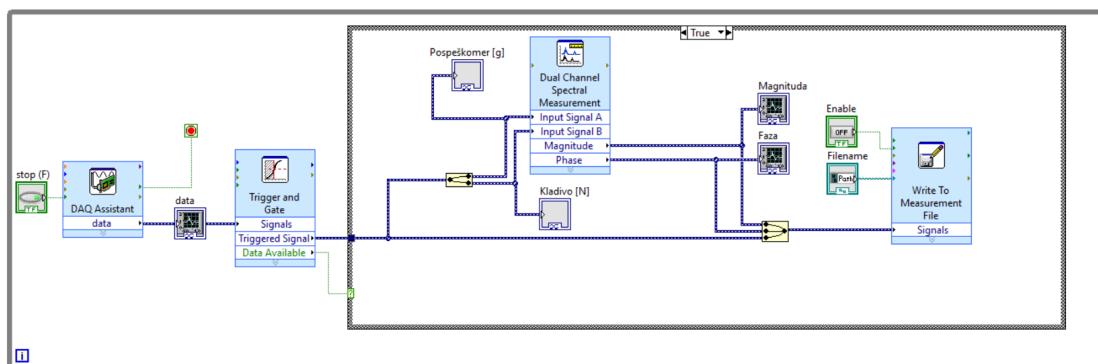
Pomerimo in prikažimo dimenzijs nosilca.



Slika 3.2: Dimenzijs konstrukcije.

3.1.2 LabView program

Vse informacije iz merilne kartice so obdelane v programu *LabView*. Glavno okno merilne sheme je vidno na sliki 3.3. Uporabimo *Trigger in Gate*, ki omogoča zapisovanje podatkov šele ob udarcu kladiva. V datoteko zabeležimo časovni signal pospeškomera in kladiva na podlagi katerih v analizi tvorimo FRF. Zabeležimo tudi znotraj programa tvorjen FRF in ga v analizi primerjamo z našim.

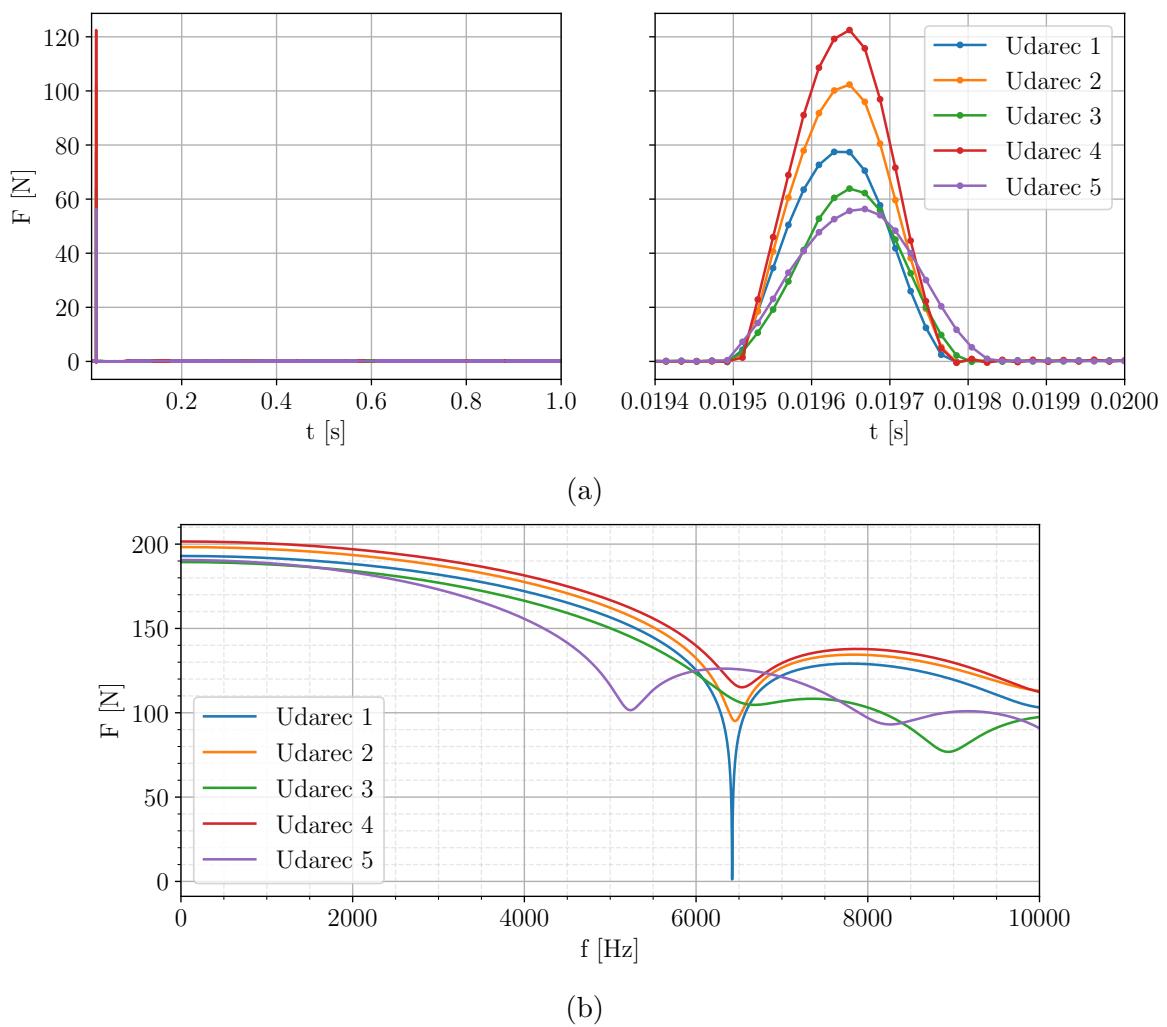


Slika 3.3: LabView merilna shema.

3.2 Izvajanje meritev

Kot smo opredelili v teoriji, je cilj eksperimentalne meritve pridobitev FRF-jev H_{jk} MDOF sistema. Uporabimo udarni test, pri katerem je pospeškomer ves čas v odzivni točki $j = 7$. S udarnim kladivom udarjamo v merilnih točkah od $k = 0$ do $k = 26$. V vsaki točki izvedemo več testov in obdržimo pet najboljših meritev, ki jih kasneje povprečimo.

Za dobro meritev smatramo predvsem tisto, pri kateri ni dvojnih udarcev, kot je vidno na sliki 3.4a, saj dodajo dodatno vzbujanje. Pomembno je tudi, da udarci niso premočni ali prešibki. Močni udarci lahko poškodujejo kladivo, šibki udarci pa predstavljajo premajhno koherenco med vhodom in izhodom. To vidimo kot zašumljen FRF pri višjih frekvencah. Dobri udarci omogočajo modalno identifikacijo do 5000 Hz kot je vidno na sliki 3.4b.



Slika 3.4: Udarec kladiva v točki 10 v (a) časovni in (b) frekvenčni domeni.

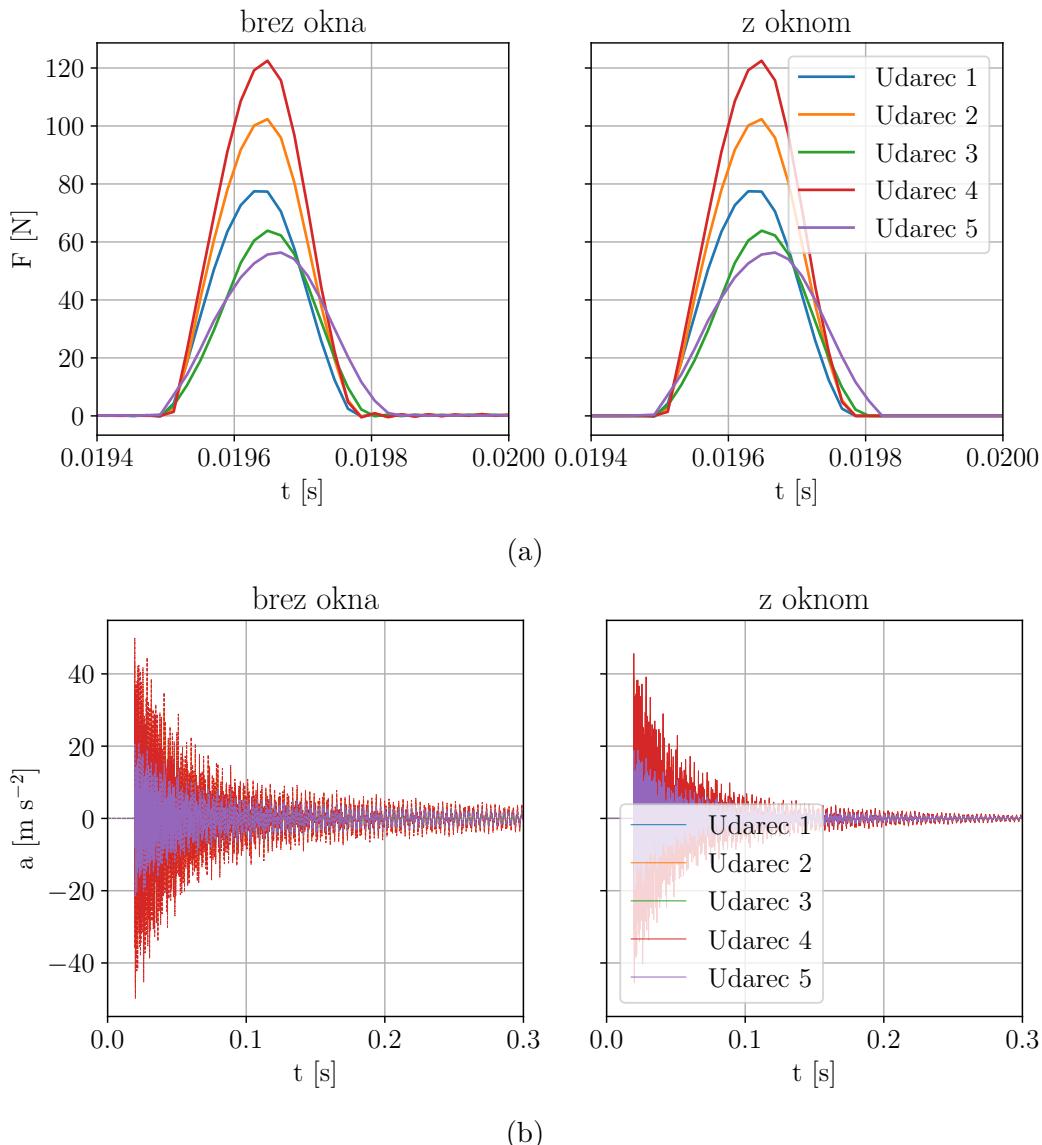
3.3 Analiza meritev

Celotna analiza izmerjenih podatkov je bila opravljena v *Jupyter notebook*-u (priloga).

3.3.1 Uporaba okna za silo in pospešek

Prvi korak je implementacija okna za silo in za izmerjeni pospešek. Na silo smo implementirali enostavni korak, ki odstrani vse motnje zunaj glavnega impulza, vidno na sliki 3.5a.

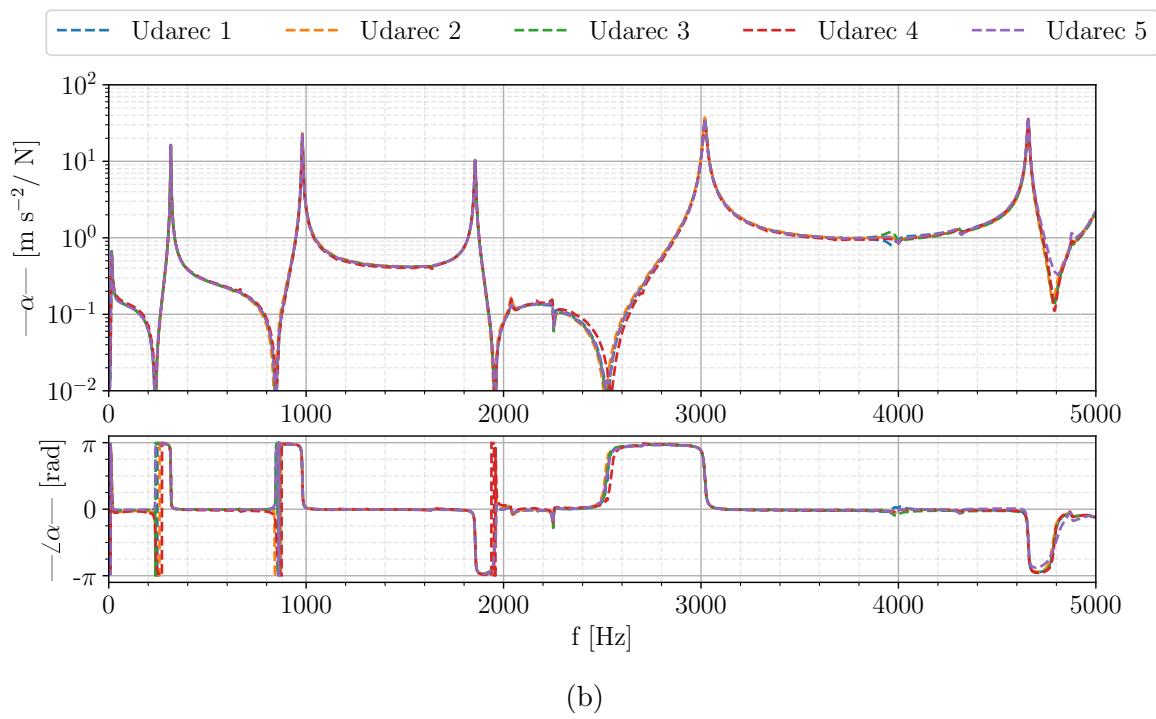
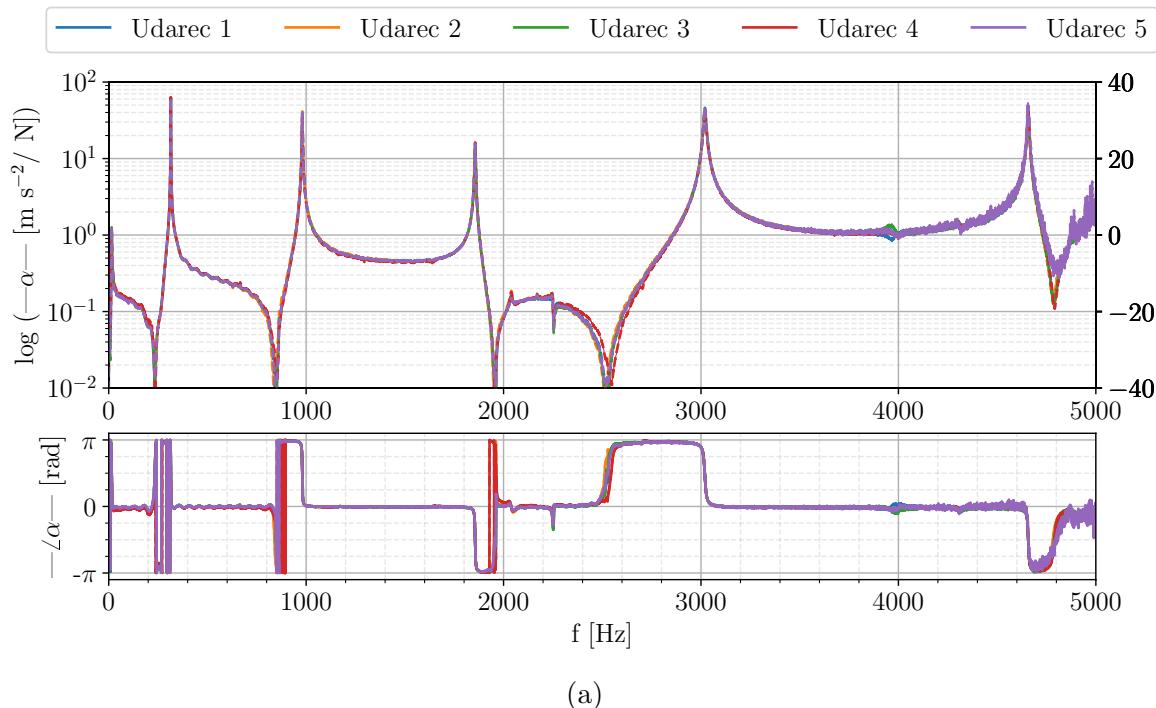
Pri uporabi filtra na izhodnem signalu pospeškomera je bolj kompleksno. Uporabimo eksponentno okno vidno na sliki 3.5b vendar se moramo zavedati, da z uporabo tega okna v sistem vnesemo umetno dušenje (napake v amplitudi), čeprav je SNR boljši.



Slika 3.5: Vpliv okna na (a) silo in na (b) pospešek.

3.3.2 Izračun acelerance in prehod na receptanco

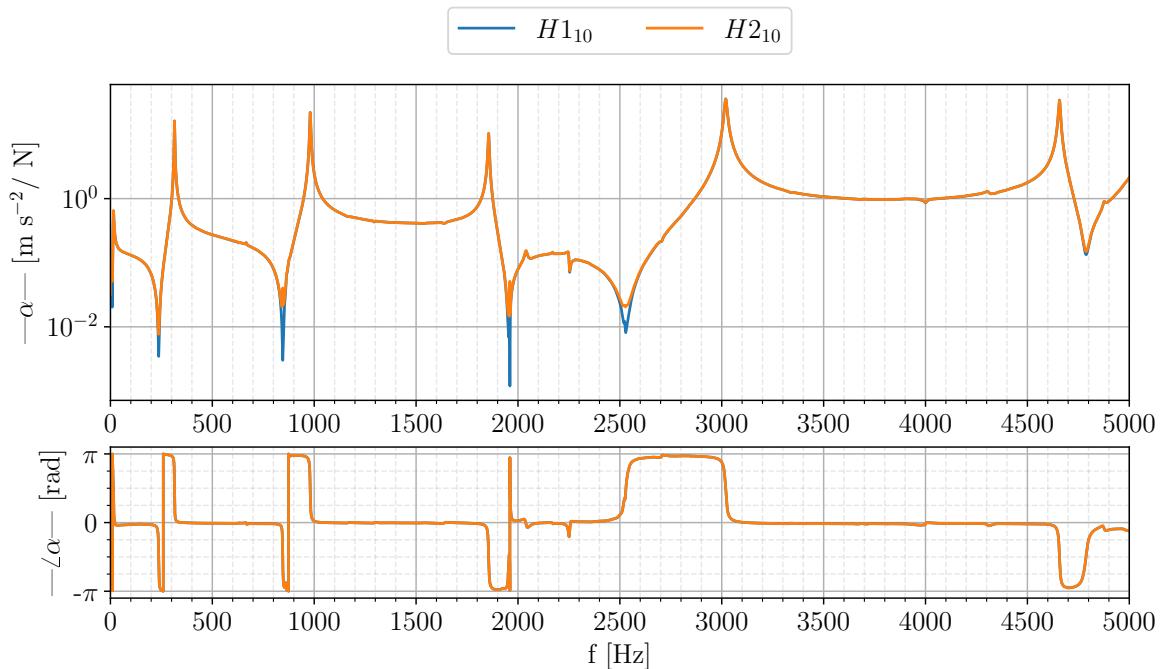
Določimo FRF na podlagi vhodne sile in izhodnega pospeška. Z uporabo Fourierove dekompozicije signala pretvorimo v frekvenčno domeno. Aceleranco določimo kot $A(\omega) = a(m\ s^{-2})/F(N)$. Z uporabo enačbe (2.2) preidemo iz acelerance v receptanco. Na sliki 3.6a vidimo FRF brez filtriranja (primerjamo ga z LabView FRF-jem) in na 3.6b z uporabo okna. To je primer za udarce v točki v točki 10.



Slika 3.6: (a) FRF brez okna in primerjava z LabView ter (b) FRF z oknom.

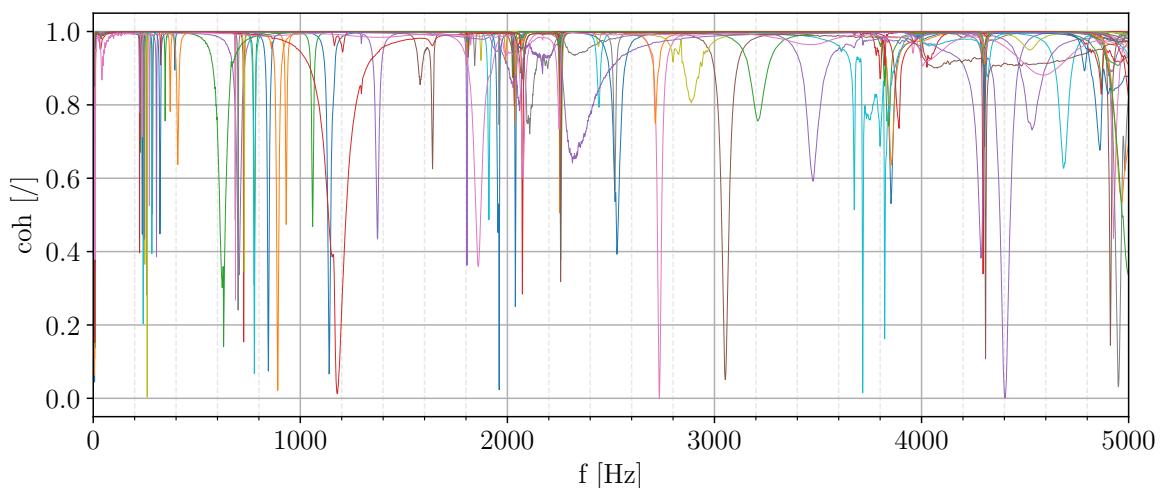
3.3.3 Izračun cenilk FRF in določanje koherence

Uporabimo teorijo poglavja 2.2 in za vsako točko povprečimo povprečimo skozi vse ponovitve, ter določimo cenilke H_1 in H_2 . Obe cenilki primerjamo v grafu 3.7.



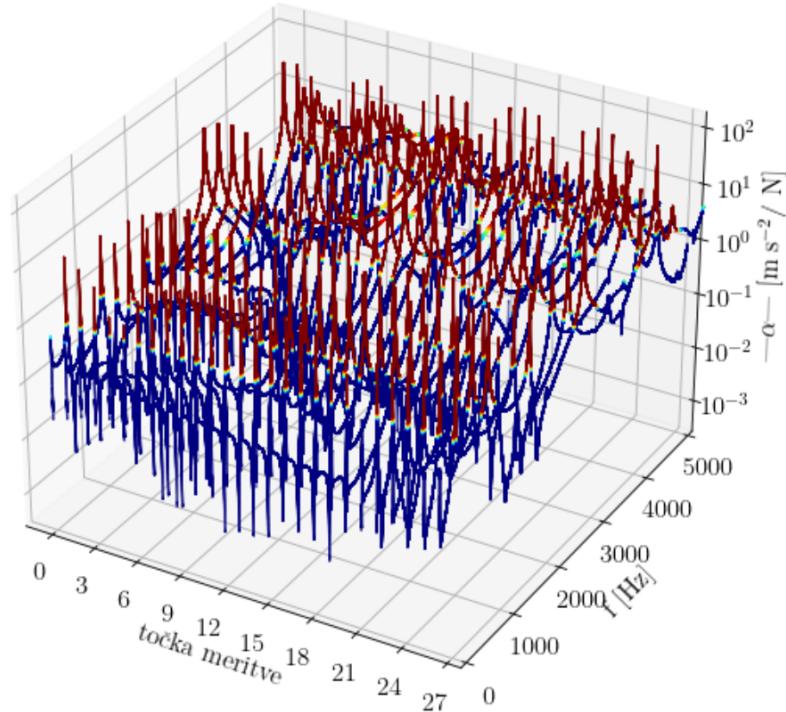
Slika 3.7: Primerjava cenilk $H_1(\omega)$ in $H_2(\omega)$ v točki 10.

Izračunamo in prikažemo v grafu 3.8 koherenco meritev definirano v enačbi (2.31) $\gamma_{xy}(\omega)^2 = H_1/H_2$. Kakor vidimo, je koherenca vsake točke podobna. Značilnost je padec proti 0 na mestu lastnih frekvenc.



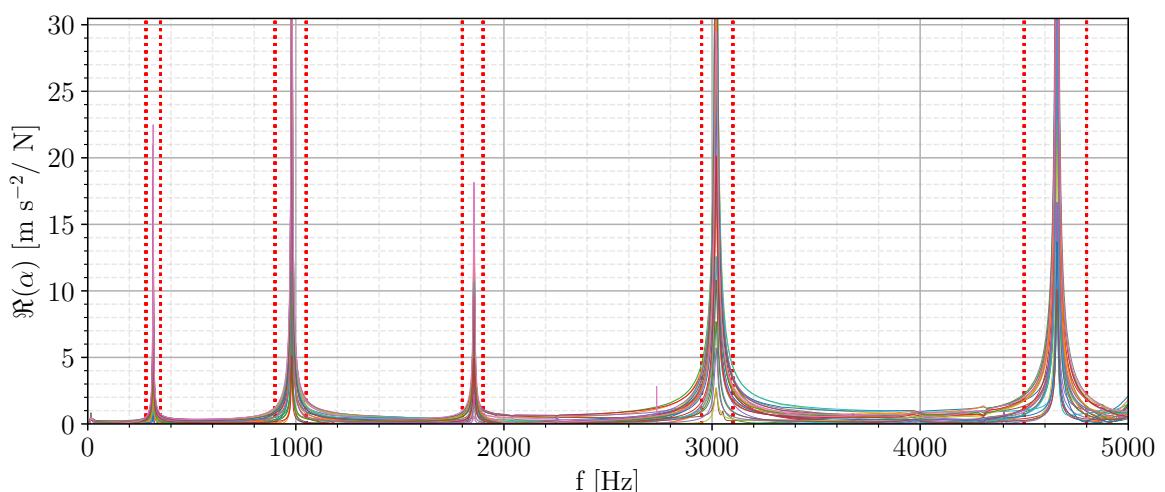
Slika 3.8: Koherenca cenilk $H_1(\omega)$ in $H_2(\omega)$ v vseh točkah.

Na tej točki se odločimo za nadaljnjo analizo z cenilko $H_2(\omega)$. V grafu na uvodni strani 1.1 smo izrisali $H_2(\omega)$ cenilke v vseh točkah. Tukaj izrišemo isto cenilko v 3D pogledu na sliki 3.9. Kakor vidimo, lastne frekvence sovpadajo v vseh točkah.



Slika 3.9: Cenilke $H_2(\omega)$ v vseh točkah.

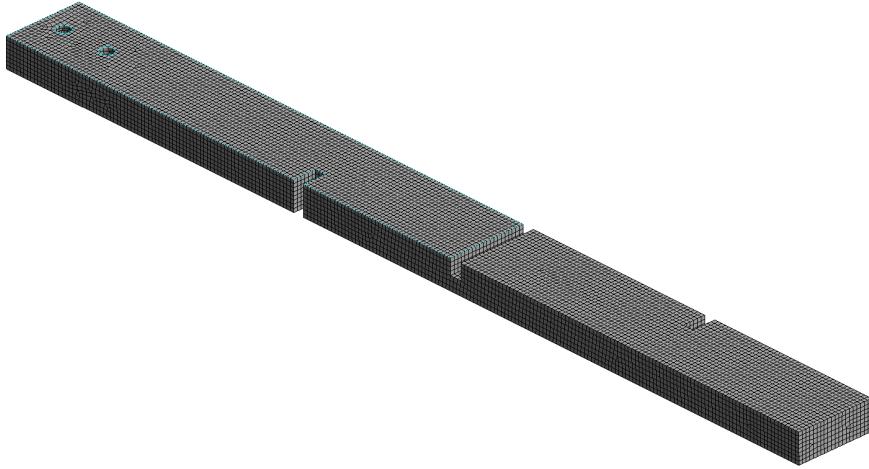
Na podlagi cenilke $H_2(\omega)$ grafično določimo okolico vseh lastnih frekvenc. Kakor vidimo na sliki 3.10, lahko na podlagi teh cenilk H_2 in frekvenčnih območij poiščemo z našimi metodami modalne identifikacije modalne parametre sistema, kot smo definirali v poglavju 2.3. Rezultate predstavimo v poglavju 4.



Slika 3.10: Določanje okolic vrhov lastnih frekvenc.

3.4 Implementacija metode končnih elementov

Metodo končnih elementov (MKE) definirano v poglavju 2.4 apliciramo z uporabo programskega paketa *Ansys*. V prvem koraku definiramo materialne lastnosti. Za prvotno togost predpostavimo za material aluminij $E = 71000$ MPa. Maso smo pomerili kot 733 g in iz pomerjenih dimenzij določimo gostoto $\rho = 2770$ kg/m³. Nato definiramo geometrijo in mrežimo z heksaedričnimi KE. Izvedli smo konvergenčno analizo in na koncu imeli mrežo z 157470 vozlišči in 35871 KE vidno na sliki 3.11. Za model izvedemo modalno analizo in rezultate predstavimo v poglavju 4.



Slika 3.11: MKE model konstrukcije.

3.4.1 Togost z identifikacijo lastnih frekvenc in MKE

V sledečem poglavju predstavimo metodo določanja modula elastičnosti materiala prek prve lastne frekvence in MKE geometrije strukture [6], [7]. Predpostavimo Hookov zakon in frekvenčno neodvisnost materiala.

$$([K] - \omega^2[M])\{x\} = \{0\}, \quad (3.1)$$

kjer je $[K]$ togostna matrika, $[M]$ masna matrika, $\{x\}$ lastni vektor in $\omega = 2\pi f$ lastna frekvenca. Matrike vsebujejo modul elastičnosti E , Poissonov količnik ν in gostoto ρ . Zaradi vitkosti geometrije ν v MKE modelu nima bistvenega vpliva in ga zanemarimo. Vpeljemo lahko materialno neodvisne matrike $[K_0]$ in $[M_0]$ ter sistem enačb (3.1) preoblikujemo v problem lastnih vrednosti λ

$$\begin{aligned} & (E[K_0] - \omega^2\rho[M_0])\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ & \left(\mathbf{M}_0^{-1}[K_0] - \omega^2\frac{\rho}{E}[I]\right)\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ & (\mathbf{M}_0^{-1}[K_0] - \lambda[I])\mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Na podlagi enačbe (3.2) lahko določimo modul elastičnosti E kot

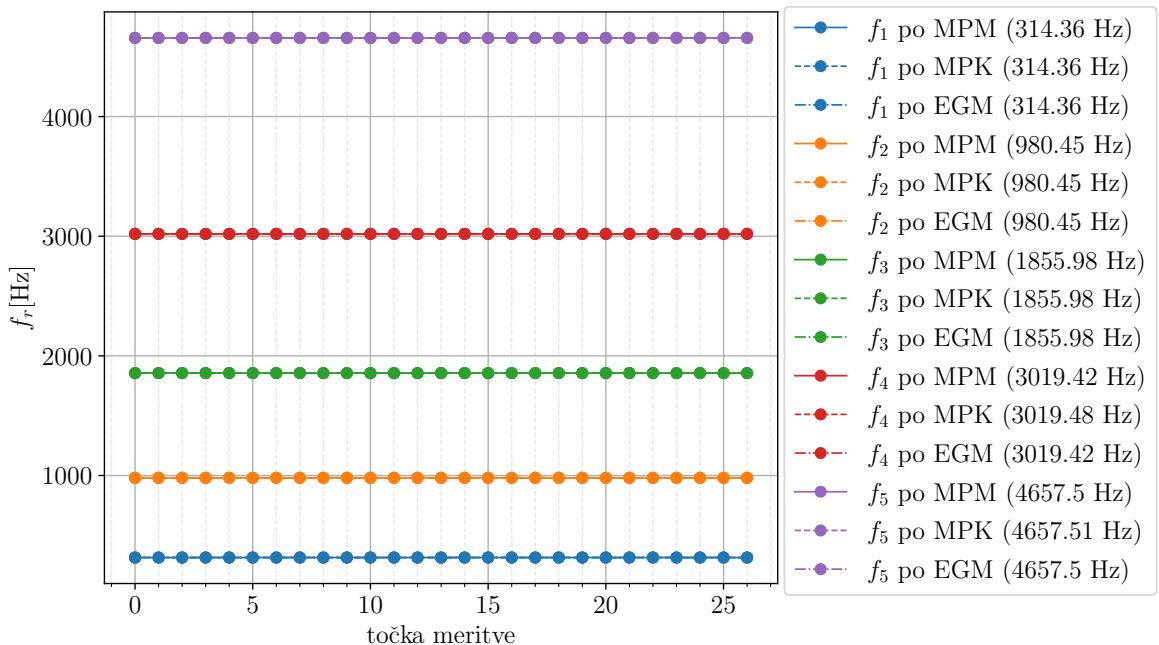
$$E = 4\pi^2 \frac{\rho f_{0,1}^2}{\lambda_1}. \quad (3.3)$$

4 Rezultati in diskusija

V zadnjem poglavju predstavimo in analiziramo vse rezultate posameznih metod ter jih medsebojno primerjamo. Prikažemo lastne frekvenc $\omega_r = 2\pi f_r$, faktorje dušenja η_r in modalne oblike. Na podlagi modalnih konstant izvedemo rekonstrukcijo signalov in jih primerjamo z dejansko cenilno funkcijo $H_2(\omega)$. Vse tri metode primerjamo z integrirano in preverjeno metodo znotraj *pyEMA* preko MAC kriterija. Na koncu še prikažemo lastne vektorje in modalne oblike pridobljene z MKE analizo in določimo dejanski modul elastičnosti E konstrukcije.

4.1 Eksperimentalna modalna identifikacija

4.1.1 Lastne frekvence

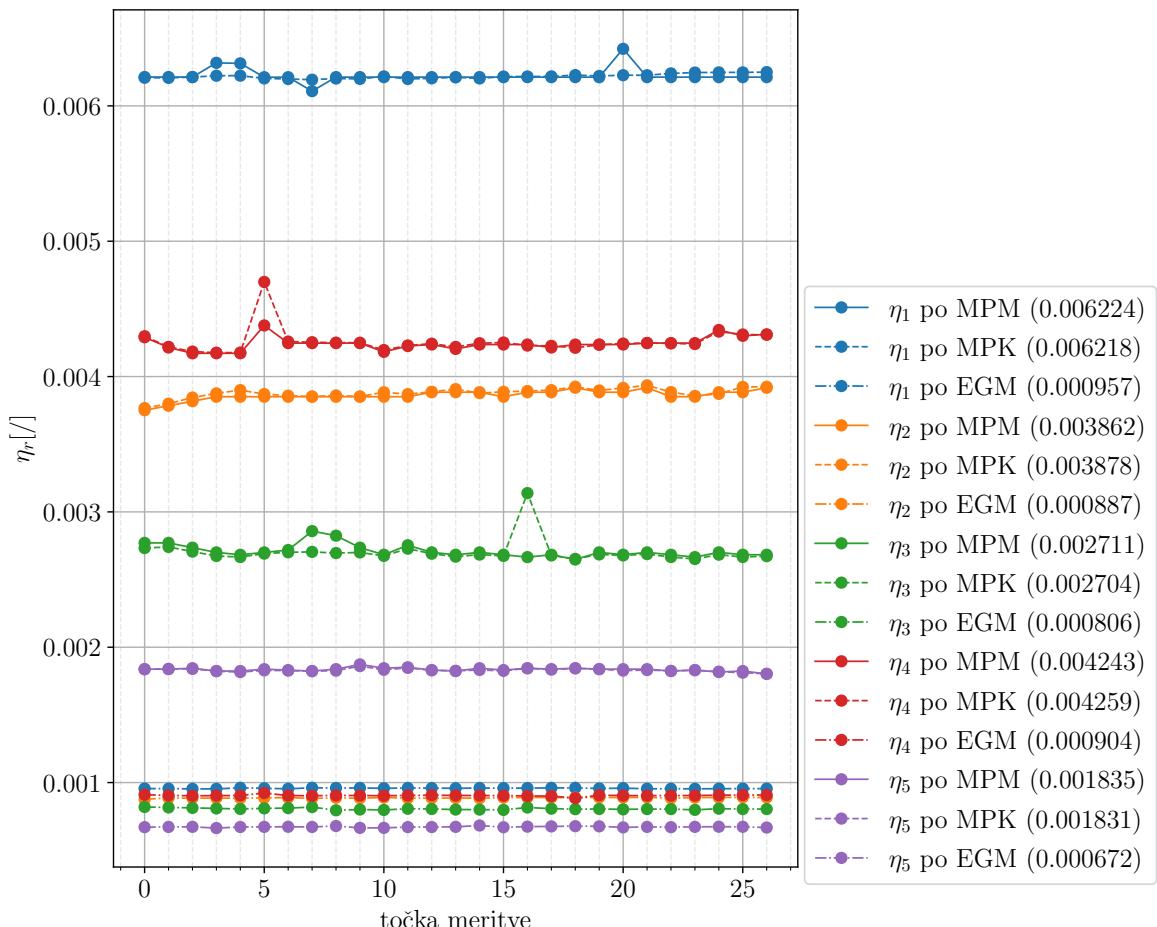


Slika 4.1: Lastne frekvence vseh metod.

Kakor vidimo na sliki 4.1, so lastne frekvence z vsemi metodami in v vseh točkah enake. Omenimo, da je metoda določanja lastne frekvence pri MPM in EGM enaka.

4.1.2 Faktorji dušenja

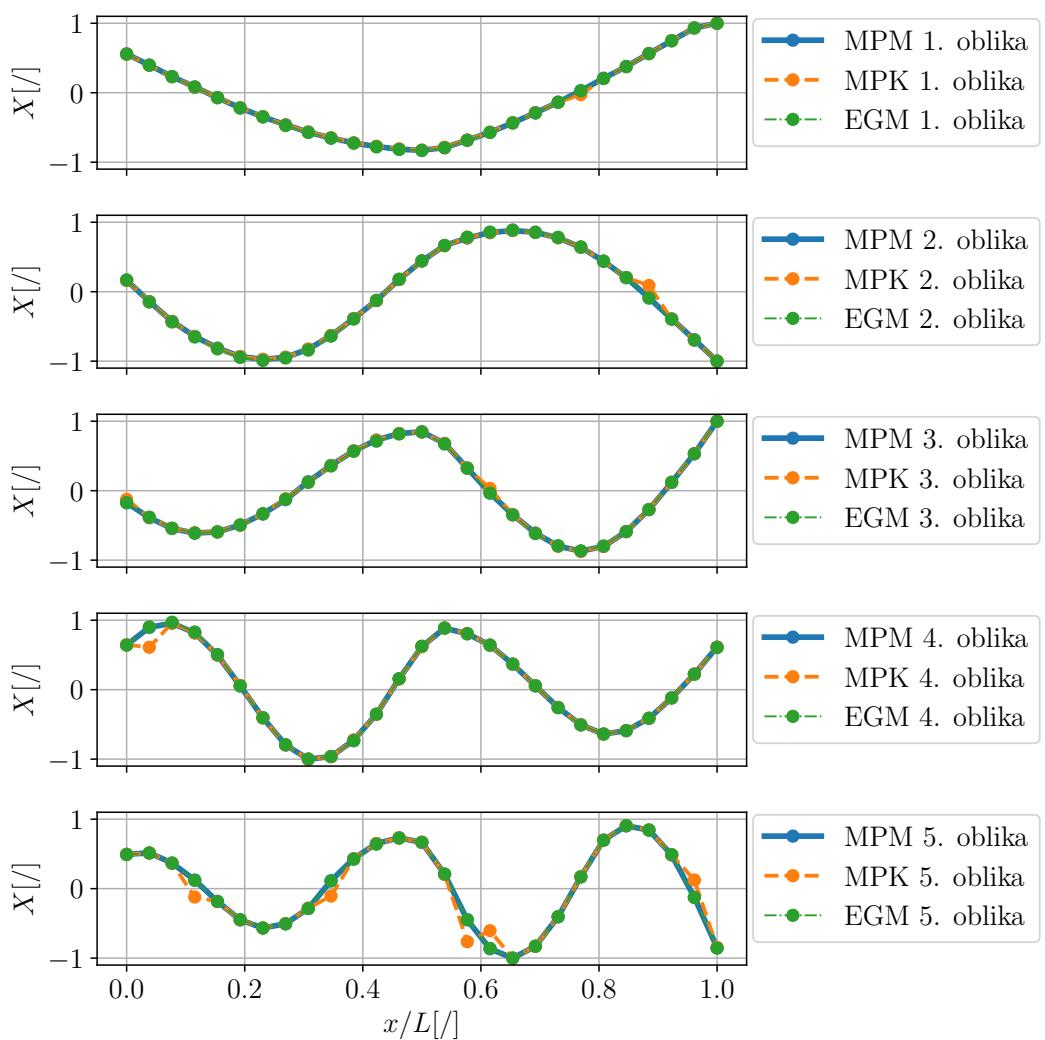
Faktorji dušenja η_r na v diagramu 4.2 že kažejo večje razlike med metodami. MPM in MPK podata podobne rezultate dušenja, medtem ko EGM kaže nižje faktorje dušenja. Razlog leži v dejstvu, da smo zaradi predpostavke te metode dušenje zanemarili. Lahko rečemo, da je faktor dušenja po MPM in MPK bolj zanesljiv in so faktorji, v odvisnosti od lastne frekvence, $\eta_1 = 0,00622$, $\eta_2 = 0,00388$, $\eta_3 = 0,00270$, $\eta_4 = 0,00424$ in $\eta_5 = 0,00184$. Kakor vidimo dušenje z višjo frekvenco pada.



Slika 4.2: Faktorji dušenja vseh metod.

4.1.3 Modalne oblike

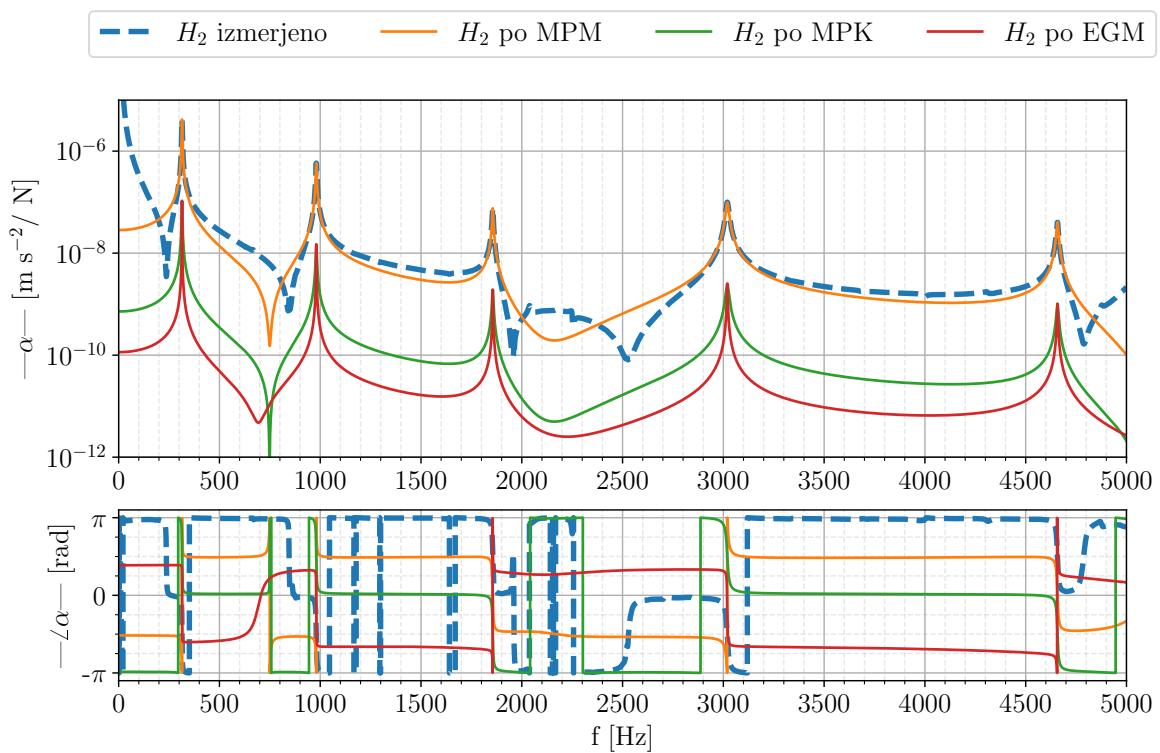
Prikažemo normirane modalne vektorje vseh metod v grafu 4.3. Takoj vidimo, da lastne oblike prikazujejo zelo značilne oblike nihanja nosilca. Nekoliko večji relativni odmiki so opazni na levi strani. To je po vsej verjetnosti posledica zarez, ki doprinesejo k manjši togosti. Z testiranjem smo ugotovili, da je najbolj stabilna metoda MPM, saj prikaže lepe modalne oblike tudi pri višjih frekvencah. Sledi ji EGM, ki je za dovolj veliko zgostitev točk (*zero-padding*) tudi natančen. Najmanj stabilna metoda je MPK.



Slika 4.3: Modalne oblike vseh metod.

4.1.4 Rekonstrukcija FRF funkcije

cenilno funkcijo H_2 za receptanco $\alpha_{jk}(\omega)$ lahko iz izračunanih modalnih konstant ponovno sestavimo s superpozicijo. Na sliki 4.4 lahko rekonstrukcijo prikažemo za točko 10. Kakor vidimo, je za MPM zelo dobro prikrivanje s prvotno cenilno funkcijo. MPK in RGM sta po obliku prava, vendar nižja od H_2 . Razlog leži v ostanku $R_{jk}(\omega)$, ki pri rekonstrukciji ni prisoten. MPM ne tvori ostanka.



Slika 4.4: Rekonstrukcija FRF-jev za točko 10.

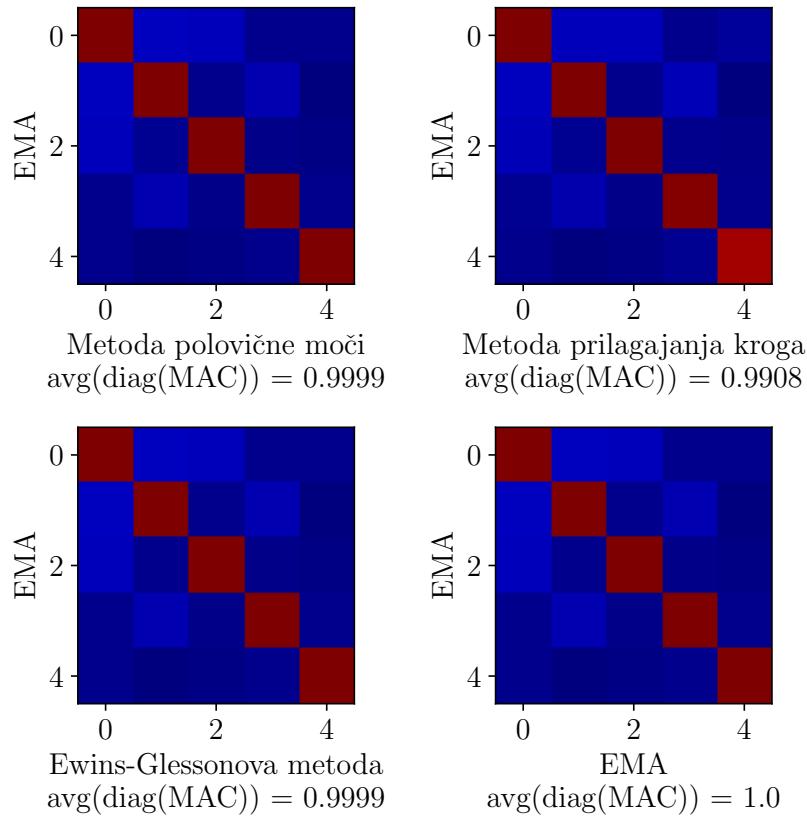
4.1.5 Kriterij gotovosti modalnih oblik

Kot konsistenten in objektiven način ocene modalnih oblik vpeljemo kriterij gotovosti modalne oblike (ang. *MAC - Modal Assurance Criterion*) [8]. MAC je definiran kot normirana skalarna konstanta, ki enolično popiše konsistentnost med modalnim vektorjem in referenčnim modalnim vektorjem kot

$$\text{MAC}_{cdr} = \frac{\left| \{\Phi_{dr}\}^H \{\Phi_{cr}\} \right|^2}{\{\Phi_{dr}\}^H \{\Phi_{dr}\} \{\Phi_{cr}\}^H \{\Phi_{cr}\}} \quad (4.1)$$

kjer je $\{\Phi_{dr}\}$ modalni vektor reference d in modalne oblike r , $\{\Phi_{cr}\}$ modalni vektor reference c in modalne oblike r in $\{\Phi\}^H$ kompleksno konjugirano transponiran vektor (tudi hermitsko transponiran in hermitsko konjugiran vektor).

Izvedemo MAC analizo za vse tri metode in jih primerjamo z overjeno metodo znotraj paketa *pyEMA*. Izračunane MAC vrednosti prikažemo kot korelacijski graf med modalnimi vektorji na sliki 4.5. Iz slike je razvidno, da je pri isti modalni obliki dobro sovpadanje, saj je MAC blizu 1.



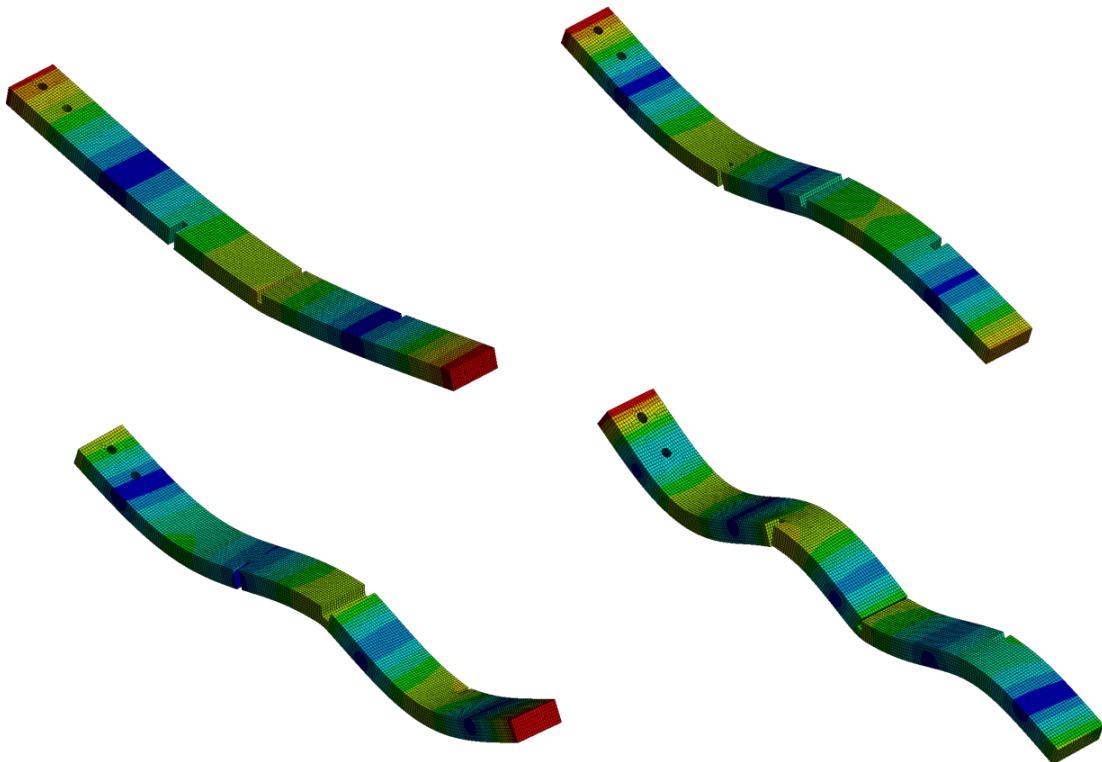
Slika 4.5: MAC analiza za vse metode.

4.2 Rezultati z metodo končnih elementov

Rešitev MKE nam je podala sledeče lastne frekvence $f_1 = 301,50$ Hz, $f_2 = 963,11$ Hz, $f_3 = 1807,90$ Hz, $f_4 = 2951,10$ Hz in $f_5 = 4547,10$ Hz. Torej MKE podaja nekoliko nižje lastne frekvence kot eksperimentalna analiza. Razlog je lahko seveda zanemaritev dušenja, vendar pa kakor smo videli je faktor dušenja relativno majhen. Večji razlog za napako so nepravi materialni parametri. Po karakteristični enačbi (3.2) lahko modul elastičnosti določimo kot

$$E = 4\pi^2 \frac{\rho f_{0,1}^2}{\lambda_1} = E_0 \frac{314,34^2}{301,50^2} = 77185 \text{ MPa}. \quad (4.2)$$

Vidimo, da je dejanski modul elastičnosti materiala višji od začetno predpostavljenega. Prikažemo lahko tudi modalne oblike pridobljene z MKE na sliki 4.6.



Slika 4.6: Prve štiri modalne oblike pridobljene z MKE.

5 Zaključki

V seminarski nalogi smo obravnavali podano konstrukcijo z tremi metodami eksperimentalne modalne identifikacije: Metodo polovične moči, metodo prilagajanja kroga in Ewins-Gleesonove metode ter z metodo končnih elementov. Korake in ugotovitve lahko strnemo v naslednje točke:

1. Definirali smo potrebno teorijo za razumevanje prenosnih funkcij, njihovih cenilk in koherenčne funkcije.
2. Obravnavali smo vse tri metode in jih matematično definirali in opredelili njihove predpostavke.
3. Izvedli smo udarni test na konstrukciji in tako pridobili prenosne funkcije.
4. Iz cenilke H_2 in z metodami modalne identifikacije smo določili lastne frekvence, oblike in faktorje dušenja sistema.
5. Z MKE smo numerično določili lastne frekvence in oblike sistema, ter dobili boljo vrednost togosti materiala.

Torej smo realno konstrukcijo prosto vpetega nosilca dinamično ovrednotili in ji pripisali modalne karakteristike.

Predlogi za nadaljnje delo

V naslednjih korakih bi lahko izdelane metode testirali na bolj kompleksnih strukturah. V metodo končnih elementov bi lahko tudi vpeljali dušenje in tako dobili bolj natančne numerične rezultate.

Literatura

- [1] J. M. M. M. . N. M. M. Maia: *Modal Analysis and Testing*. NATO Science Series, Springer, 1999.
- [2] M. B. in Gregor Čepon: *Zapiski predavanj vaj pri Nihanju struktur*.
- [3] S. Rao: *The finite element method in engineering*. Butterworth-Heinemann, Oxford Elsevier, 2010.
- [4] G. A. Papagiannopoulos, G. D. Hatzigeorgiou: *On the use of the half-power bandwidth method to estimate damping in building structures*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering (2011).
- [5] M. Boltežar: *Nihanja sistemov z več prostostnimi stopnjami*. V: *Mehanska nihanja 1. del*. Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2010, str. 165–177.
- [6] R. Pintelon, P. Guillaume, K. D. Belder, Y. Rolain: *Measurement of young's modulus via modal analysis experiments: a system identification approach*. 13th IFAC Symposium on System Identification (2003) str. 375–380.
- [7] T. Košir, J. SLavič: *Karakterizacija mehanskih lastnosti FFF 3D natisnjениh struktur*. Slovensko društvo za mehaniko srečanje Kuhljevi dnevi (2021).
- [8] R. Allemang: *The modal assurance criterion - Twenty years of use and abuse*. Sound & Vibration (2003) str. 14–23.

