



Trabajo práctico 1: Especificación y WP

19 de abril de 2024

Algoritmos y Estructuras de Datos

Grupo indeterminado

| Integrante | LU | Correo electrónico |
|------------------|---------|----------------------------|
| Labastié, Gaspar | 660/23 | gaspilabastie@gmail.com |
| Rugo, Julian | 1414/23 | julianrugo22@gmail.com |
| Torres, Emiliano | 80/23 | emilianomtorres1@gmail.com |
| Vanotti, Franco | 464/23 | fvanotti15@gmail.com |



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (+54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

0. Aclaraciones generales

- Los índices de las listas recursos, cooperan, trayectorias, apuestas, pagos, eventos representa el identificador de los individuos.
- recursos: $\text{seq}\langle\mathbb{R}\rangle$ es la lista con el recurso de cada individuo.
- cooperan: $\text{seq}\langle\text{Bool}\rangle$ es la lista que indica T rue si el individuo en dicha posición coopera.
- trayectorias: $\text{seq}\langle\text{seq}\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$ indica para cada individuo, en cada paso de tiempos, cuántos recursos (\mathbb{R}) cuenta.
- eventos: $\text{seq}\langle\text{seq}\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$ indica para cada individuo, en cada paso temporal, qué evento le ha tocado.
- apuestas: $\text{seq}\langle\text{seq}\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$ indica para cada individuo, para cada evento posible (numerados desde 0), cuánto apostará.
- pagos: $\text{seq}\langle\text{seq}\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$ indica para cada individuo, para cada evento, cuánto se pagará. Notar que a diferencia del ejemplo, estamos resolviendo un caso más general donde el pago de cada evento puede diferir por individuo.
- Las personas que no *cooperan* no aportan nada al fondo monetario común.
- Los *recursos* iniciales son positivos.
- Todos los *pagos* son positivos.
- Las *apuestas* de los individuos representan la proporción de los recursos que los individuos invierten a cada una de los eventos posibles. Notar nuevamente que a diferencia del ejemplo, en este caso más general, podríamos tener apuestas distintas para cada evento por cada individuo.
- Cada individuo apuesta siempre el mismo porcentaje por cada evento posible (es decir, el mismo número en cada paso temporal). Por ejemplo, si tenemos dos eventos; cara y ceca y apuesta 0, 4 por cara y 0,6 por seca, en cada paso temporal apostará esas proporciones.
- Se considera al número 0 como parte de \mathbb{N} .

1. Especificación

1. **redistribucionDeLosFrutos**: Calcula los recursos que obtiene cada uno de los individuos luego de que se redistribuyen los recursos del fondo monetario común en partes iguales. El fondo monetario común se compone de la suma de *recursos* iniciales aportados por todas las personas que *cooperan*. La salida es la lista de recursos que tendrá cada jugador.

```
proc redistribucionDeLosFrutos (in recursos : seq⟨ℝ⟩, in cooperan : seq⟨Bool⟩) : seq⟨ℝ⟩
  requiere { |recursos| > 0 ∧ |recursos| = |cooperan| ∧
    (∀i : ℤ) (0 ≤ i < |recursos| →L recursos[i] > 0) }
  asegura { |res| = |recursos| ∧L nuevosRecursosCooperan(recursos, cooperan, res) ∧
    nuevosRecursosNoCooperan(recursos, cooperan, res) }

pred nuevosRecursosCooperan (recursos : seq⟨ℝ⟩, cooperan : seq⟨Bool⟩, res : seq⟨ℝ⟩) {
  (∀i : ℤ) (0 ≤ i < |recursos| ∧L cooperan[i] = true →L res[i] = distribuciónFondoComún(recursos, cooperan))
}

pred nuevosRecursosNoCooperan (recursos : seq⟨ℝ⟩, cooperan : seq⟨Bool⟩, res : seq⟨ℝ⟩) {
  (∀i : ℤ) (0 ≤ i < |recursos| ∧L cooperan[i] = false →L res[i] = distribuciónFondoComún(recursos, cooperan) +
    recursos[i])
}

aux distribuciónFondoComún (recursos : seq⟨ℝ⟩, cooperan : seq⟨Bool⟩) : ℝ =
  (∑i=0|recursos|-1) (if cooperan[i] = true then  $\frac{\text{recursos}[i]}{|\text{recursos}|}$  else 0 fi);
```

2. **trayectoriaDeLosFrutosIndividualesALargoPlazo**: Actualiza (In/Out) la lista de *trayectorias* de los los recursos de cada uno de los individuos. Inicialmente, cada una de las trayectorias (listas de recursos) contiene un único elemento que representa los recursos iniciales del individuo. El procedimiento agrega a las *trayectorias* los recursos que los individuos van obteniendo a medida que se van produciendo los resultados de los *eventos* en función de la lista de *pagos* que le ofrece la naturaleza (o casa de apuestas) a cada uno de los individuos, las *apuestas* (o inversiones) que realizan los individuos en cada paso temporal, y la lista de individuos que *cooperan* aportando al fondo monetario común.

```

proc trayectoriaDeLosFrutosIndividualesALargoPlazo (inout trayectorias: seq⟨seq⟨R⟩⟩, in cooperan : seq⟨Bool⟩,
in apuestas: seq⟨seq⟨R⟩⟩, in pagos: seq⟨seq⟨R⟩⟩, in eventos: seq⟨seq⟨N⟩⟩)

  requiere { |trayectorias| = |cooperan| = |apuestas| = |pagos| = |eventos| ∧
  trayectorias = Trayectorias0 ∧L
  (∀i : Z)(0 ≤ i < |trayectorias| →L (|trayectorias[i]| = 1 ∧ trayectorias[i][0] > 0)) ∧ |pagos| > 0 ∧
  (∀k, l : Z)(0 ≤ k, l < |apuestas| →L |apuestas[k]| = |apuestas[l]|) ∧
  (∀i : Z)((0 ≤ i < |apuestas| →L sumarApuestasIndividuo(apuestas[i]) = 1) ∧L
  (∀j : Z)(0 ≤ j < |pagos[i]| →L 0 ≤ apuestas[i][j] ≤ 1)) ∧
  (∀k, l : Z)(0 ≤ k, l < |pagos| →L |pagos[k]| = |pagos[l]|) ∧
  (∀i : Z)(0 ≤ i < |pagos| →L (∀j : Z)(0 ≤ j < |pagos[i]| →L 0 < pagos[i][j])) ∧
  (∀i : Z)(0 ≤ i < |pagos| →L (∀j : Z)(0 ≤ j < |apuestas| →L |pagos[i]| = |apuestas[j]|)) ∧
  (∀i : Z)(0 ≤ i < |eventos| →L |eventos[i]| > 0) ∧
  (∀i : Z)(0 ≤ i < |eventos| →L |eventos[0]| = |eventos[i]|) ∧
  (∀i : Z)(0 ≤ i < |eventos| →L (∀j : Z)(0 ≤ j < |eventos[i]| →L 0 ≤ eventos[i][j] < |pagos[i]|)) }

  asegura { |trayectorias| = |eventos| ∧L (∀i : Z)(0 ≤ i < |trayectorias| →L trayectorias[i][0] = Trayectorias0[i][0]) ∧

  (∀i : Z)(0 ≤ i < |trayectorias| →L |trayectorias[i]| = |eventos[i]| + 1) ∧
  (∀i : Z)(0 ≤ i < |trayectorias| →L (∀j : Z)(0 < j < |trayectorias[i]| →L
  (trayectoriasCooperan(trayectorias, cooperan, apuestas, pagos, eventos) ∧
  trayectoriasNoCooperan(trayectorias, cooperan, apuestas, pagos, eventos)))) }

pred trayectoriasCooperan (trayectorias : seq⟨seq⟨R⟩⟩, cooperan : seq⟨Bool⟩, apuestas : seq⟨seq⟨R⟩⟩, pagos : seq⟨seq⟨R⟩⟩,
eventos : seq⟨seq⟨Z⟩⟩) {
  cooperan[i] = true →L trayectorias[i][j] = distribuciónFondoComúnTrayectoria(trayectorias, cooperan, apuestas,
pagos, eventos, j)
}

pred trayectoriasNoCooperan (trayectorias : seq⟨seq⟨R⟩⟩, cooperan : seq⟨Bool⟩, apuestas : seq⟨seq⟨R⟩⟩, pagos :
seq⟨seq⟨R⟩⟩, eventos : seq⟨seq⟨Z⟩⟩) {
  cooperan[i] = false →L trayectorias[i][j] = distribuciónFondoComúnTrayectoria(trayectorias, cooperan, apuestas,
pagos, eventos, j) + trayectoria[i][j - 1] * gananciaIndividuo(apuestas[i], pagos[i],
eventos[i][j - 1])
}

aux sumarApuestasIndividuo (apuestasIndividuo : seq⟨R⟩) : R =
(∑n=0|apuestasIndividuo|-1)(apuestasIndividuo[n]);

aux gananciaIndividuo (apuestaIndividuo: seq⟨R⟩, pagosIndividuo: seq⟨R⟩, resultadoEventoIndividuo: R) : R =
apuestaIndividuo[resultadoEventoIndividuo] * pagosIndividuo[resultadoEventoIndividuo];

aux distribuciónFondoComúnTrayectoria (trayectorias: seq⟨seq⟨R⟩⟩, cooperan : seq⟨Bool⟩, apuestas: seq⟨seq⟨R⟩⟩,
pagos: seq⟨seq⟨R⟩⟩, eventos: seq⟨seq⟨N⟩⟩, j : Z) : R =
(∑i=0j-1)(if cooperan[i]=true then trayectorias[i][j-1]*gananciaIndividuo(apuestas[i],pagos[i],eventos[i][j-1]) else 0 fi) ;
|trayectorias|

```

3. **trayectoriaExtrañaEscalera** Esta función devuelve *True* e sii en la trayectoria de un individuo existe un único punto mayor a sus vecinos (llamado máximo local). Un elemento es máximo local si es mayor estricto que sus vecinos inmediatos.

```

proc trayectoriaExtrañaEscalera (in trayectoria: seq⟨ℝ⟩) : Bool
  requiere { |trayectoria| > 0 ∧ (∀i : ℤ) (0 ≤ i < |trayectoria| →L trayectoria[i] ≥ 0) }
  asegura { res = true ↔
    (∃m : ℤ)((∀i : ℤ)((0 ≤ i, m < |trayectoria| ∧ i ≠ m) →L trayectoria[m] > trayectoria[i]) ∧L
    (∀n : ℤ)(0 ≤ n ≤ m →L trayectoria[n] > trayectoria[n - 1]) ∧
    (∀n : ℤ)(m ≤ n < |trayectoria| - 1 →L trayectoria[n] > trayectoria[n + 1])) }

```

4. **individuoDecideSiCooperarONo** Un *individuo* actualiza su comportamiento cooperativo / no-cooperativo (*cooperan[individuo]*) en función de los recursos iniciales, de quienes *cooperan*, de los *pagos* que se le ofrecen a cada individuo, de las inversiones o *apuestas* de cada individuo, y del resultado los *eventos* que recibe cada individuo, eligiendo el comportamiento que maximiza sus recursos individuales luego de que ocurren todos los eventos.

```

proc individuoDecideSiCooperarONo (in individuo:ℕ, in recursos: seq⟨ℝ⟩, inout cooperan: seq⟨Bool⟩, in apuestas:
seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, in pagos: seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, in eventos: seq⟨seq⟨ℕ⟩⟩)
  requiere { |recursos| > 0 ∧ |recursos| = |cooperan| = |apuestas| = |pagos| = |eventos| ∧
    cooperan = Cooperan0 ∧
    0 ≤ individuo < |recursos| ∧L
    (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |recursos| →L recursos[i] > 0) ∧
    (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |eventos| →L |eventos[i]| > 0) ∧
    (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |eventos| →L |eventos[i]| = |eventos[0]|) ∧
    (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |eventos| →L (∀j : ℤ)(0 ≤ j < |eventos[i]| →L 0 ≤ eventos[i][j] < |pagos[i]|)) ∧
    (∀k, l : ℤ)(0 ≤ k, l < |apuestas| →L |apuestas[k]| = |apuestas[l]|) ∧
    (∀i : ℤ)((0 ≤ i < |apuestas| →L sumarApuestasIndividuo(apuestas[i]) = 1) ∧L
    (∀j : ℤ)(0 ≤ j < |apuestas[i]| →L 0 ≤ apuestas[i][j] ≤ 1)) ∧
    (∀k, l : ℤ)(0 ≤ k, l < |pagos| →L |pagos[k]| = |pagos[l]|) ∧
    (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |pagos| →L (∀j : ℤ)(0 ≤ j < |pagos[i]| →L 0 < pagos[i][j])) ∧
    (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |pagos| →L (∀j : ℤ)(0 ≤ j < |apuestas| →L |pagos[i]| = |apuestas[j]|)) }
  asegura { |cooperan| = |Cooperan0| ∧L (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |Cooperan0| ∧ i ≠ individuo →L cooperan[i] =
    Cooperan0[i]) ∧
    (∃cooperanAlt : seq⟨Bool⟩)(|cooperanAlt| = |Cooperan0| ∧L
    (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |cooperanAlt| ∧ i ≠ individuo →L cooperanAlt[i] = Cooperan0[i]) ∧ (cooperanAlt[individuo] =
    Cooperan0[individuo])) ∧
    (∃trayectoria : seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩)(|trayectoria| = |eventos| ∧L primeroTieneARecursos(recursos, trayectoria) ∧
    moduloEventosMasUno(eventos, trayectoria) ∧ elementosDeT(apuestas, pagos, eventos, Cooperan0, trayectoria) ∧
    (∃trayectoriaAlt : seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩)(|trayectoriaAlt| = |eventos| ∧L primeroTieneARecursos(recursos, trayectoriaAlt) ∧
    moduloEventosMasUno(eventos, trayectoriaAlt) ∧ elementosDeT(apuestas, pagos, eventos, cooperanAlt, trayectoriaAlt) ∧
    cooperan[individuo] = mejorEleccion(trayectoria, trayectoriaAlt, Individuo)))) }

pred primeroTieneARecursos (recursos:seq⟨ℝ⟩, trayectoria:seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩) {
  (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |trayectoria| →L trayectoria[i][0] = recursos[i])
}

pred moduloEventosMasUno (eventos:seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, trayectoria:seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩) {
  (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |trayectoria| →L |trayectoria[i]| = |eventos| + 1)
}

pred elementosDeT (apuestas:seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, pagos:seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, eventos:seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, cooperan:seq⟨Bool⟩, trayectoria:seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩) {
  (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |trayectoria| →L (∀j : ℤ)(0 ≤ j < ||trayectoria[i]|| →L trayectoriasCooperan(trayectorias, cooperan, ap
    trayectoriasNoCooperan(trayectorias, cooperan, apuestas, pagos, eventos)))
}

aux mejorEleccion (trayectoria:seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, trayectoriaAlt:seq⟨seq⟨ℝ⟩⟩, Individuo) : Bool = (if trayectoria[individuo][|trayect
  1| ≥ trayectoriaAlt[individuo][|trayectoriaAlt[Individuo]| - 1] then Cooperan0[individuo] else CooperanAlt[individuo]) ;

```

5. **individuoActualizaApuesta** Un *individuo* actualiza su apuesta (*apuestas[individuo]*) en función de los *recursos* iniciales, de la lista de individuos que *cooperan*, de los *pagos* que se le ofrecen a cada individuo, de las inversiones o *apuestas* de cada individuo y del resultado los eventos que recibe cada individuo, eligiendo la apuesta que maximiza sus recursos individuales luego de que ocurren todos los eventos.

```

proc individuoActualizaApuesta (in individuo:N, in recursos: seq(R), in cooperan: seq(Bool), inout apuestas: seq(seq(R)),
in pagos: seq(seq(R)), in eventos: seq(seq(N)))

```

```

    requiere { |recursos| > 0 ∧ |recursos| = |cooperan| = |apuestas| = |pagos| = |eventos|
    (∀i : Z)(0 ≤ i < |recursos| →L recursos[i] > 0)
    apuesta = Apuesta0
    (∀i, j : Z)(0 ≤ i, j < |apuestas| →L |apuestas[i]| = |apuestas[j]|)
    (∀i : Z)(0 ≤ i < |apuestas| →L sumarApuestasIndividuo(apuesta[i] = 1))
    (∀i, j : Z)(0 ≤ i < |apuestas| →L 0 ≤ apuestas[i][j] ≤ 1)
    (∀i, j : Z)(0 ≤ i < |pagos| ∧ 0 ≤ j < |pagos[i]| →L pagos[i][j] > 0)
    (∀i, j : Z)(0 ≤ i, j < |eventos| →L |eventos[i]| = |eventos[j]|)
    (∀i, j : Z)(0 ≤ i < |eventos| ∧ 0 ≤ j < |eventos[i]| →L 0 ≤ eventos[i][j] ≤ |pagos[i]|)

    asegura { (∃m : seq<seq<R>>)(esApuestaVariante(m, individuo) ∧L (∃trayectoriam : seq<seq<R>>)
    (esTrayectoria(trayectoriam, recursos, eventos, pagos, cooperan, m)) ∧L
    (∀A : seq<seq<R>>)(esApuestaVariante(A, individuo) →L
    (∀trayectoria : seq<seq<R>>)(esTrayectoria(trayectoria, recursos, eventos, pagos, cooperan, A) →L
    textittrayectoriam[textitindividuo][|trayectoriam[individuo]|-1] ≥ trayectoria[individuo][|trayectoria[individuo]|-
    1]))}

```

```

pred esApuestaVariante (A : seq(seq(R)), individuo : N) {
    |A| = |Apuesta0| ∧ (∀i : Z)(0 ≤ i < |Apuesta0| ∧ i ≠ individuo →L A[i] = Apuesta0[i]) ∧
    |A[individuo]| = |Apuesta0[0]| ∧ sumarApuestasIndividuo(A[individuo]) = 1 ∧
    (∀j : Z)(0 ≤ j < |A[individuo]| →L 0 ≤ A[individuo][j] ≤ 1)
}

pred esTrayectoria (trayectoria : seq(seq(R)), recursos : seq(R), eventos : seq(seq(Z)), pagos : seq(seq(R)), cooperan
: seq(Bool), apuestas : seq(seq(R))) {
    primeroTieneARecursos(recursos, trayectoria) ∧ moduloEventosMasUno(eventos, trayectoria) ∧ elementosDeT(apuestas
}

```

2. Demostraciones de correctitud

Demostrar que la siguiente especificación es correcta respecto de su implementación. La función **frutoDelTrabajoPuramenteIndividual** calcula, para el ejemplo de apuestas al juego de cara o sello, cuánto se ganaría si se juega completamente solo. Se contempla que el evento *True* es cuando sale cara

```

proc frutoDelTrabajoPuramenteIndividual (in recursos:seq(R), in apuesta:(s: R, c:R), in pago:(s: R, c:R), in eventos:seq(Bool),
out res: R)

```

```

    requiere { apuestac + apuestas = 1 ∧ pagoc > 0 ∧ pagos > 0 ∧ apuestac > 0 ∧ apuestas > 0 ∧ recurso > 0 }
    asegura { res = recurso(apuestacpagoc) # apariciones(eventos, T)(apuestaspagos) # apariciones(eventos, F) }

```

Donde $\#apariciones(eventos, T)$ es el auxiliar utilizado en la teórica, y $\#(eventos, T)$ es su abreviación.

```

    res = recursos
    i = 0
    While(i < |eventos|) do
    if eventos[i] then
    res = (res * apuestac) * pagoc
    else
    res = (res * apuestas) * pagos
    endif
    i = i + 1
    endwhile

```

Para probar la correctitud de este código usamos el teorema del invariante y la función variante. Entonces hay que probar:

1.
$$P_c$$
2.
$$I \wedge BSI3.I \wedge B \rightarrow_{Q_c} 4. I \wedge B \wedge v_0 = fv \ S \ fv \ v_0 \ 5. I \wedge fv \leq 0 \rightarrow B$$