Trabajo Práctico Nro 2

Simulación

Integrantes:

- Gastón Montes - 89397
- Alcalá Santiago - 95172
- Mauro Di Pietro - 93965
- Lucas Risaro - 94335

Repositorio: https://bit.ly/3ettoJu

Índice

Ejercicio 1

Enunciado

Utilizando Matlab, Octave o Python simule el siguiente sistema.
Un instituto de investigación debe decidir la inversión a realizar en equipos de diagnóstico de una nueva enfermedad.
Se debe decidir la compra de equipos entre las opciones brindadas por 2 proveedores:

1) El proveedor 1 plantea utilizar 2 unidades de diagnóstico en paralelo.
   Con probabilidad $p = 0.6$ las muestras serán diagnosticados por la unidad 1 y con probabilidad $q = 1 - p$ son diagnosticados por la unidad 2.
   El tiempo que demora cada unidad en resolver una solicitud sigue una distribución exponencial con medias, $\mu 1 = 0,7$ hrs y $\mu 2 = 1$ hr respectivamente.

2) El proveedor 2 considera utilizar 1 unidad.
   En este caso la demora en resolver una solicitud sigue una distribución exponencial con $\mu = 0,8$ horas
   Se estima que el tiempo que transcurre entre la llegada de cada muestra se puede modelar según una distribución exponencial con media $\mu = 4$ horas.

Simular para cada opción 100.000 solicitudes procesadas, determinando:

A. El tiempo medio de espera entre que la solicitud llega y puede ser procesada.
B. La fracción de las solicitudes que no esperaron para ser procesadas.
C. La opción 1 es más costosa que la segunda opción y el instituto sólo acepta realizar la inversión si el tiempo medio que demora en resolver cada diagnóstico (tiempo en fila + tiempo de procesamiento) es como mínimo 50% menor que la opción 2. ¿Qué solución le recomienda?

Resolución

A.
- Tiempo medio de espera para 2 unidades de diagnóstico: 0.6368 hs.
- Tiempo medio de espera para 1 unidad de diagnóstico: 0.6113 hs.

B.
- Fracción de solicitudes que no esperaron para ser procesadas para 2 unidades de diagnóstico: 0.2348.
- Fracción de solicitudes que no esperaron para ser procesadas para 1 unidad de diagnóstico: 0.2380.

C.
- Tiempo medio de resolución para 2 unidades de diagnóstico: 1.4635 hs.
- Tiempo medio de resolución para 1 unidad de diagnóstico: 1.4125 hs.

- La opción de 1 unidad de diagnóstico es 3.61 % menor que la opción de 2 unidades de diagnóstico. Por lo tanto recomiendo la opción de 2 unidad de diagnóstico.

Ejercicio 2

Enunciado

Un servidor recibe solicitudes las cuales son procesadas de una por vez en el orden de llegada (política FIFO).

Se determinó que en 10 milisegundos existe una probabilidad **p =1/40** que llegue una nueva solicitud y una probabilidad **q = 1/30** que una solicitud termine de ser procesada y deje el sistema. Se desea estudiar la cantidad de solicitudes en el servidor considerando tanto las que están en cola esperando ser procesadas como la solicitud que está siendo procesada.

A. Determine la matriz de transición de estados explicando cómo se obtiene la misma.
B. Utilizando Matlab, Octave o Python simule la evolución del sistema a lo largo de 1.000 segundos suponiendo que el servidor comienza sin estar procesando solicitudes.
C. Realice un gráfico mostrando la cantidad de solicitudes en el servidor en cada instante de tiempo.
D. Realice un histograma mostrando cuantas veces el sistema estuvo en cada estado.
E. Determine el % de tiempo que el servidor se encuentra sin procesar solicitudes.

Introducción Teórica

FIFO

First in, first out (FIFO) es un concepto utilizado en estructuras de datos, conserva una analogía con las personas que esperan en una cola y van siendo atendidas en el orden en que llegaron, es decir, que "la primera persona que entra es la primera persona que sale".

Proceso de Markov

Un proceso aleatorio $X(t)$ es un proceso de Markov si el futuro del proceso dado el presente es independiente del pasado, es decir, el futuro está condicionado solamente al presente:

$$P[X(t_{k+1}) = x_{k+1}/X(t_k) = x_k, ..., X(t_1) = x_1] = P[X(t_{k+1}) = x_{k+1}/X(t_k) = x_k]$$

Cadenas de Markov

Es un tipo particular de un proceso de Markov en el cual la probabilidad de que ocurra un evento depende solamente del evento inmediatamente anterior.
Esta memoria "a 1 solo paso" es la propiedad Markoviana y se puede escribir como:
$P(x_{n+1} = j/x_n = i_n \cap x_{n-1} = i_{n-1} \cap ... \cap x_0 = i_0) = P(x_{n+1} = j/x_n = i)$, o sea, solo nos interesa el paso inmediato anterior.
Una cadena de Markov cumple las siguientes propiedades:

1. $X(t_k)$ toma valores naturales.
2. La probabilidad conjunta de un conjunto de variables aleatorias en distintos instantes de tiempo se obtiene como el producto de la probabilidad inicial ($P[X(t_1) = x_1]$) y las probabilidades de las transiciones subsiguientes:
$$P[X(t_{k+1}) = x_{k+1},\ X(t_k) = x_k, ..., X(t_1) = x_1] =$$
$$= P[X(t_{k+1}) = x_{k+1}/X(t_k) = x_k] * P[X(t_k) = x_k/X(t_{k-1}) = x_{k-1}] * ... * P[X(t_1) = x_1] =$$
$$= \left\{ \prod_{j=1}^{K} P[X(t_{j+1}) = x_{j+1}/X(t_j) = x_j] \right\} P[X(t_1) = x_1]$$

Tiempo discreto

Propiedad de Markov

Si restringimos al caso en donde el tiempo es discreto y comienza en $t = 0$. Entonces simplificamos $X(t_{k+1})$ lo representamos como X_{k+1} , entonces la probabilidad conjunta queda como: $P[X_n = i_n, ..., X_0 = i_0] = P[X_n = i_n/X_{n-1} = i_{n-1}] * ... * P[X_1 = i_1/X_0 = i_0] * P[X_0 = i_0]$, donde i_0 representa el estado en el instante 0.

Probabilidad marginal

Se define la probabilidad marginal como $p_j(t) = P[X_t = j],\ j = 1,\ 2, ..., n$, donde j es el estado de la variable aleatoria.

Probabilidades de transiciones

Es la probabilidad condicional de que $X_{n+1} = J$ siendo el presente $X_n = i$, en otras palabras, es la probabilidad de que en el futuro tengamos j sabiendo que en el presente tenemos i:
$P[X_{n+1} = j/X_n = i] = p_{ij}$

Matriz de transiciones

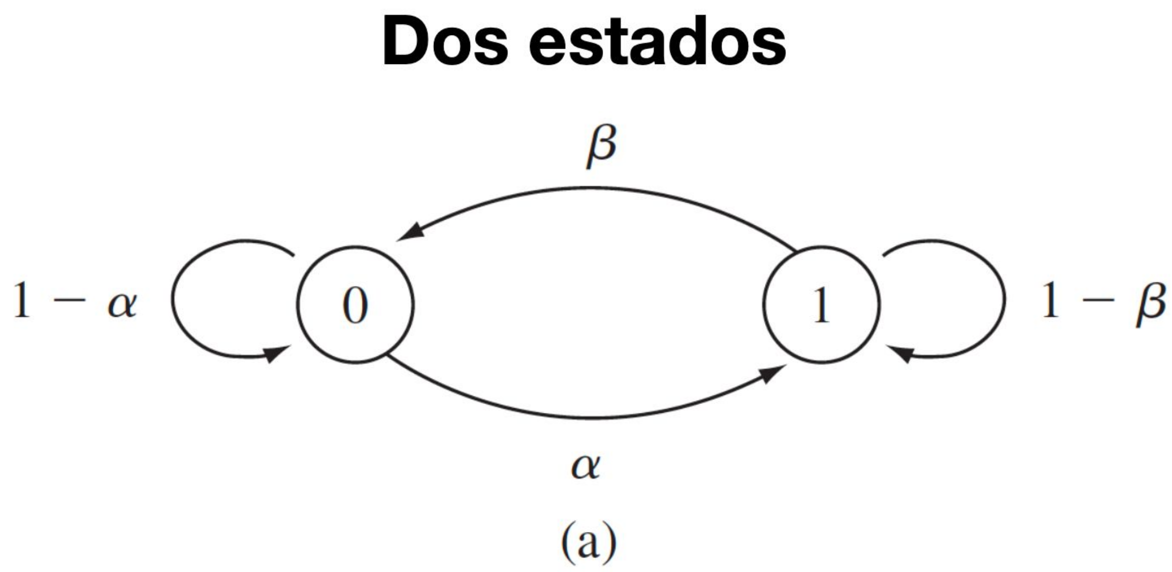
Representa todas las transiciones $i \rightarrow j$ que componen a la cadena de Markov:
$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0j} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i0} & p_{i1} & \dots & p_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P[X_{n+1} = 0/X_n = 0] & P[X_{n+1} = 1/X_n = 0] & \dots & P[X_{n+1} = j/X_n = 0] \\ P[X_{n+1} = 0/X_n = 1] & P[X_{n+1} = 1/X_n = 1] & \dots & P[X_{n+1} = j/X_n = 1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P[X_{n+1} = 0/X_n = i] & P[X_{n+1} = 1/X_n = i] & \dots & P[X_{n+1} = j/X_n = i] \end{bmatrix}$$
Se debe notar que la sumatoria de los valores de cada fila de esta matriz suman 1:

$\sum_j P[X_{n+1} = j/X_n = i] = \sum_j p_{ij} = 1$.

En otras palabras: dado un estado i se suman las probabilidades de todos los estados futuros posibles j y esto tiene que dar 1.
Por lo tanto, se puede redefinir la probabilidad conjunta como
$P[X_n = i_n, ..., X_0 = i_0] = p_{i_{n-1}i_n} * ... * p_{i_0 i_1} * p_{i_0}$.

Representación con grafos

Las cadenas de Markov se pueden interpretar a través de grafos: asociamos los nodos del grafo a los estados de la cadena de Markov; y asociamos al peso de las aristas del grafo que va del nodo que representa al estado i al nodo que representa al estado j la probabilidad de transición del estado i al estado j , o sea $p_{ij} = P[X_{n+1} = j/X_n = i]$.
Ejemplo de un grafo con dos estados:



La matriz de transiciones asociada a este grafo es:

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

Si sumamos las filas de la matriz obtenemos: $1 - \alpha + \alpha = \beta + 1 - \beta = 1$.

Probabilidades de transiciones en n pasos

La matriz de transición indica cómo son las probabilidades de transición en solo 1 paso.
Se puede definir la probabilidad de pasar del estado i al estado j en n pasos como $p_{ij}(n) = P[X_{n+k} = j/X_k = i],\ n \geq i,j \geq 0$.
La matriz de transición para n pasos no es más que la matriz de transición para 1 paso P elevada a la n: $P(n) = P^n$ en donde cada p_{ij} de esta matriz es la probabilidad de pasar del estado i al estado j en n pasos.
También se puede definir la probabilidad de que luego de n pasos el sistema se encuentre en el estado j como: $p_j(n) = \sum_i P[X_n = j/X_0 = i] * P[X_o = i] = \sum_i p_{ij}(n) * p_i(0)$. Es decir, es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado j luego de n iteraciones sin importar cuál fue el estado inicial.

Comportamiento asintótico

Es el comportamiento de una cadena de Markov en el infinito.
Para analizar este comportamiento lo que se debe hacer es buscar los autovalores y autovectores de la matriz de transición P.
Está demostrado que toda matriz de transición P de una cadena de Markov tiene como uno de sus autovalores el autovalor $\lambda = 1$ asociado al autovector $v = [1,\ 1,\ \ldots,\ 1]$.
Sea $E = [v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n]$ la matriz ortonormal cuyas columnas están conformadas por los autovectores de la matriz de transición P y Λ la matriz diagonal con los autovalores ordenados de forma descendente entonces podemos escribir a la matriz P como $P = E\Lambda E^{-1} \Rightarrow P^n = E\Lambda^n E^{-1}$.
Si analizamos $\lim_{n\to\infty} P^n$ entonces en las columnas de esta matriz tendremos el mismo valor para todas las filas, este valor es la probabilidad de estar en ese estado sin importar el estado desde el cual se inició el proceso y se llama probabilidad asintótica del estado j.
Si los restantes $K-1$ autovalores de P cumplen que $|\lambda_k| < 1$ entonces independientemente de la condición inicial la cadena de Markov converge al vector de probabilidades asintóticas $\pi = [\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_K\ ]$.

Estado estacionario o de equilibrio

Sabiendo que la cadena de Markov converge y para obtener el vector de probabilidades asintóticas π en el infinito se plantea la condición de equilibrio de la cadena de Markov: $\pi = \pi * P$. Como π es un vector de probabilidades de cada estado en el infinito, entonces $\sum_{k=0}^{K} \pi_k = 1$.
Utilizando estas dos condiciones se pueden obtener los valores de las probabilidades asintóticas de cada estado de la cadena de Markov en el infinito.

Estados del proceso

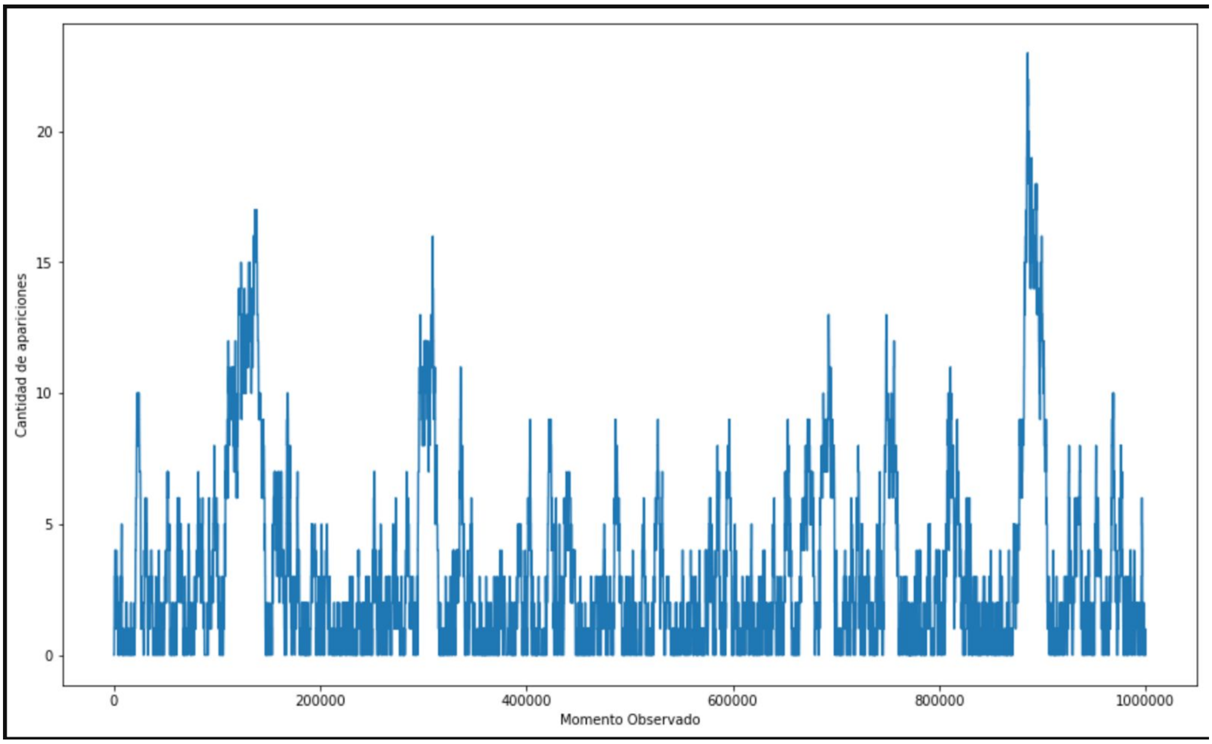
Un estado es **recurrente** si el proceso retorna a este estado con probabilidad 1. Un estado recurrente se repite ∞ veces: $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$.
Un estado es **transitorio** si el proceso retorna a este estado con probabilidad menor a 1. Un estado transitorio se repite un número finito de veces: $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty$.
Un estado es **absorbente** si el proceso entra en ese estado y existe la probabilidad igual a 0 de salir de él.
Un esta j es **accesible** desde el estado i si $p_{ij}(n) > 0$ para algún n.
Los estados $i\ y\ j$ están **conectados** si ambos son accesibles el uno con el otro.
Una **clase** es un conjunto de estados conectados entre sí.
Una cadena de Markov es **irreducible** cuando todos los estados forman una única clase.

Resolución

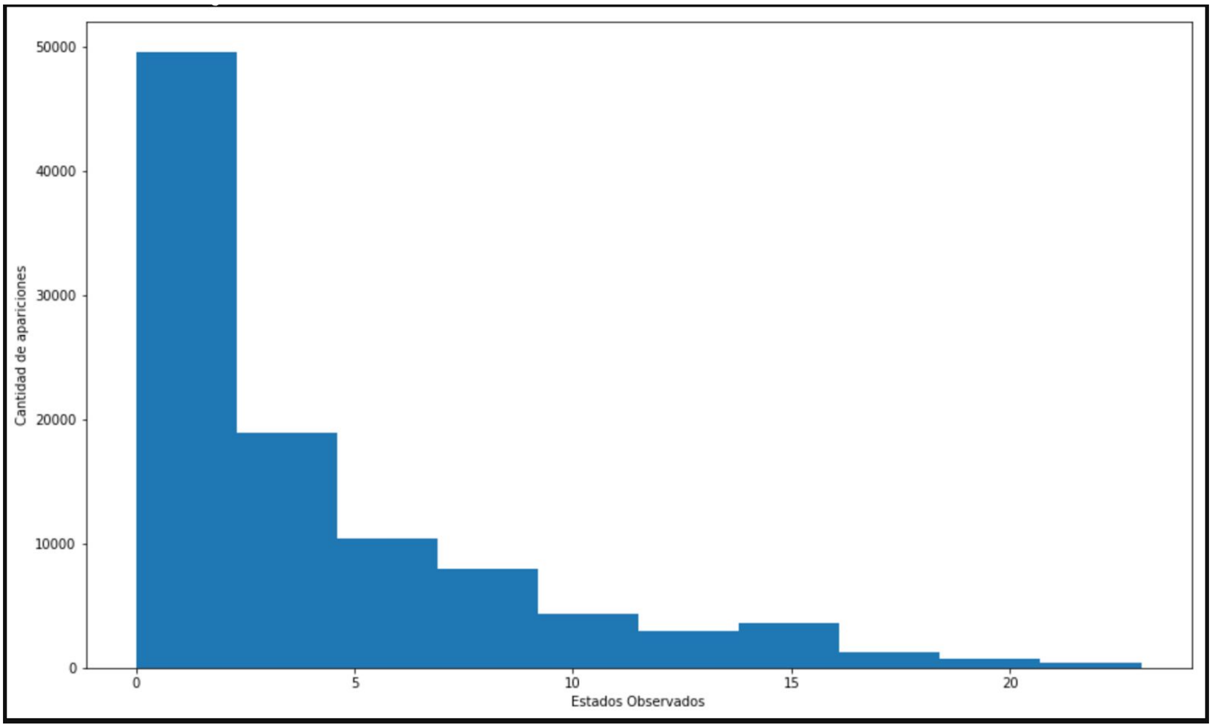
A. $$M = \begin{pmatrix} 1-(p*(1-q)) & p*(1-q) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q*(1-p) & 1-(q*(1-p))-(p*(1-q)) & p*(1-q) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q*(1-p) & 1-(q*(1-p))-(p*(1-q)) & p*(1-q) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

B. Se realizó la simulación (ver en Notebook).

C. Realice un gráfico mostrando la cantidad de solicitudes en el servidor en cada instante de tiempo.



D. Realice un histograma mostrando cuantas veces el sistema estuvo en cada estado.



E. d. Determine el % de tiempo que el servidor se encuentra sin procesar solicitudes
Siguiendo los valores de la simulación, el resultado fue cerca del 24%

Ejercicio 3

Enunciado

Se desea modelar la evolución del valor de dos acciones, en función de los datos del relevamiento de precios adjuntos utilizando cadenas de Markov.
Se pide:

A. Determinar los estados del sistema
B. Calcular la matriz de transición de estados.
C. Calcular la fracción de tiempo que el sistema se encuentra en cada uno de los estados.
D. Simule, para cada acción, una evolución posible a lo largo de un año.
E. ¿Qué acción recomendaría comprar?

Introducción teórica

Resolución

A. Planteamos dos tipos de transiciones segun el estado, baja o sube su cotización. Por una cuestión de cantidad, decidimos que el mantener precio sea absorbido por sube.

   Entonces como nomenclatura tenemos: 0 (baja) y 1 (sube)

   La matriz queda de la siguiente manera:

   P(0/0) P(1/0)
   P(0/1) P(1/1)

B. La matriz de cambios de estado es la siguiente:

   Para armar la matriz calculamos tomando de a pares del listado, cuantas veces hay dos bajas o subidas seguidas y tambien cuantas bajadas con posterior subida habia y viceversa.
   Para calcular las probabilidades individuales usamos el método de #CasosFavorables/#CasosTotales.
   Como ejemplos se puede plantear que en el caso del archivo A, sabemos que los movimientos fueron los siguientes:

   - #SubeYSube(11) = 195
   - #SubeYBaja(10) = 246
   - #BajaYSube(01) = 246
   - #BajaYBaja(00) = 171

   Entonces para plantear cual es la probabilidad de pasar del estado 0 al estado 0, es decir, bajar dos veces seguidas, planteamos la siguiente operación:

   $$P(00) = \#BajaYBaja \ / (\#BajaYBaja + \#BajaYSube)$$

   Teniendo eso en cuenta la matriz de cambio de estados para la acción A quedo de la siguiente manera:

0.41007194 0.58992806
0.55782313 0.44217687

Y para la la acción B:

0.33029613 0.66970387
0.70167064 0.29832936

C. Para calcular esto, lo que debemos hacer es plantear la ecuación de equilibrio del sistema:

$\pi \,.\, M = \pi$

El resultado de la misma para el caso de la acción A y B son los siguientes:

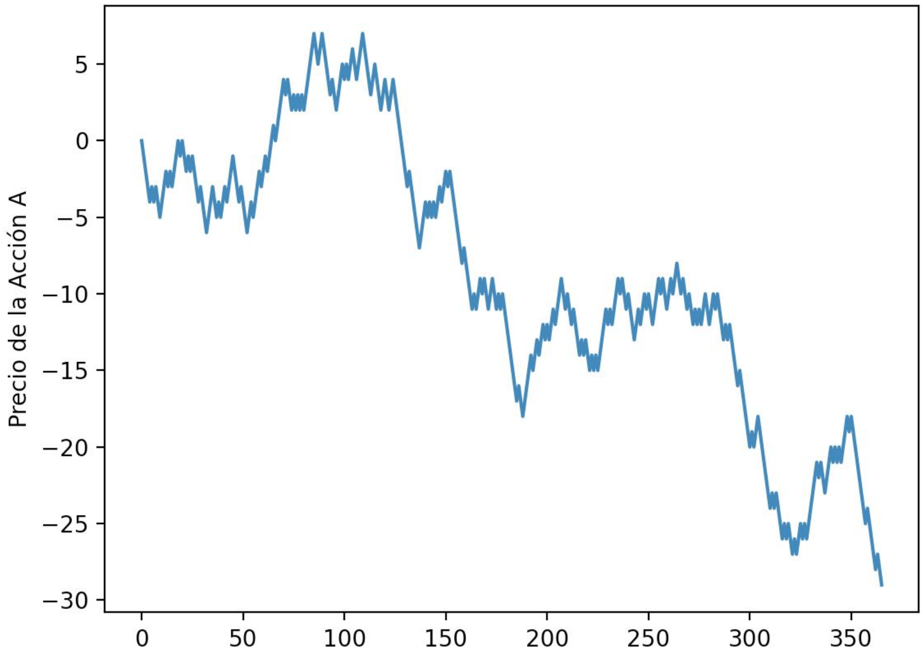
Caso A) $\pi_0 = 0.486 \,; \pi_1 = 0.514$

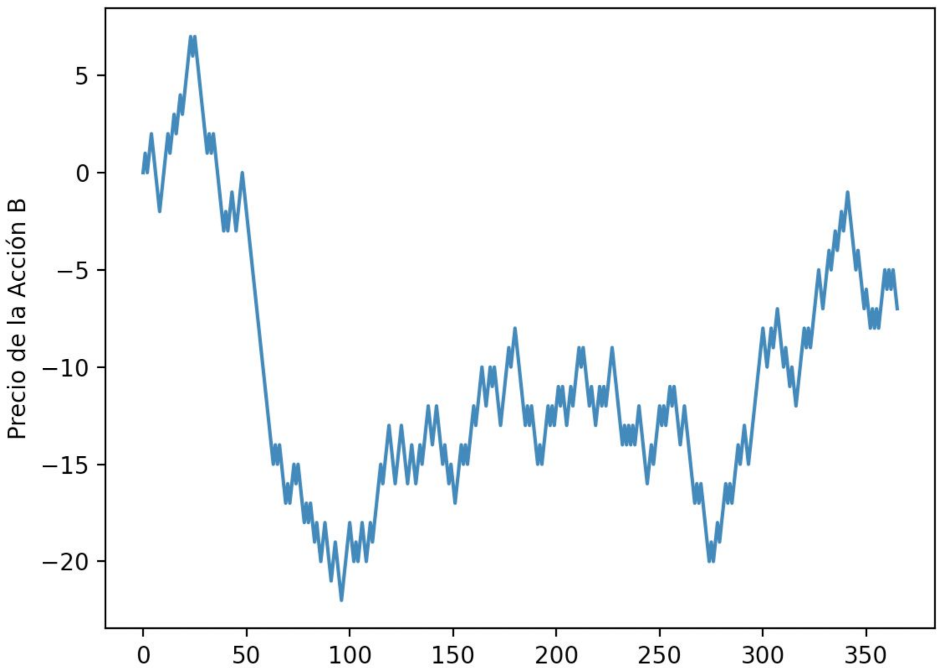
Caso B) $\pi_0 = 0.512 \,; \pi_1 = 0.488$

Esto nos significa que en el caso A, la acción pasa más tiempo subiendo que bajando su cotización, y en el segundo caso todo lo contrario.

D.

Realizamos una simulación con las probabilidades de subir o bajar según lo calculado previamente. Analizando los valores de π0 y π1, podemos saber la probabilidad de subida y bajada del valor de la acción cada día.
Luego con la ayuda de una uniforme entre 0 y 1, podemos tomar la decisión de cómo se va a comportar el valor.





E. A priori creemos que la acción que deberíamos comprar es la primera porque es la que más tiempo pasa en general en alza de las dos, pero este análisis no es suficiente ya que no realizamos nada referido al porcentaje de subida o de bajada en

los diferentes momentos.
Simplemente capturamos es de subidas y bajadas, deberiamos tambien ver de cuanto son esos movimientos para poder dar esta respuesta correctamente.

Ejercicio 4

Enunciado

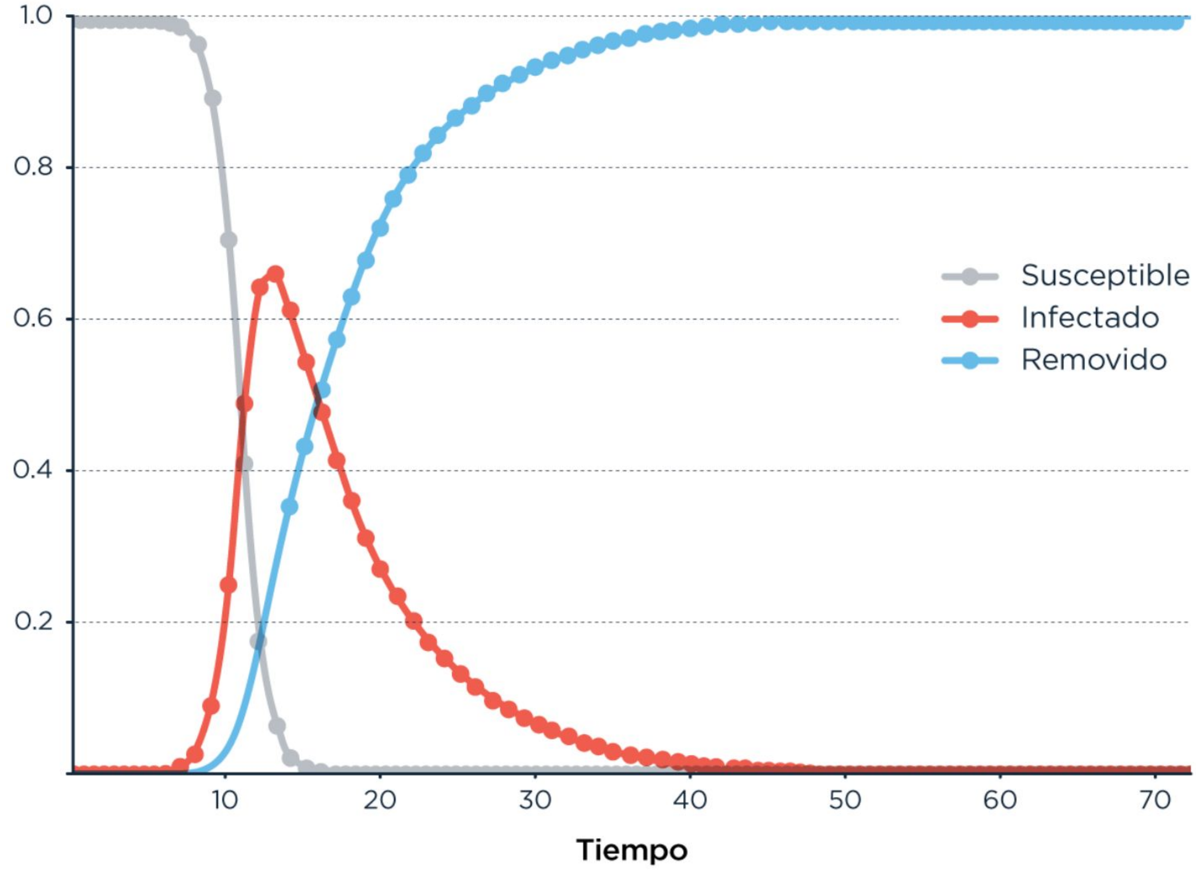
Se desea simular la evolución de una epidemia utilizando el modelo S.I.R.
Se conoce que inicialmente el 3% de la población se encuentra infectada, toda la población es susceptible de contagiarse, la tasa de transmisión $\beta=0,27$, y la tasa de recuperación $\gamma = 0,043$.
Se pide:

- Implementar el modelo SIR correspondiente.
- Graficar las curvas de porcentajes de personas sanas, infectadas y recuperadas, de forma que se vea la evolución de la epidemia.
- Sabiendo que el sistema de salud puede asistir cómo máximo sólo al 30% de la población a la vez, determine la duración total de la epidemia si se quiere que el pico máximo de infectados no supere las capacidades de asistencia médica. ¿Qué parámetros modifica? ¿Por qué?

Introducción Teórica

Modelo SIR

El modelo SIR es un modelo de epidemiología simple y capaz de captar varias de las características típicas de los brotes epidémicos.
Este modelo plantea 3 tipos de estados: S de población susceptible; I de población infectada; y R de población Removido (O recuperado, pero queda mejor removido ya que puede ser población que se recuperó o se murió). Cabe aclarar que la población se mantiene siempre constante, es decir, cada individuo siempre está en alguno de los tres estados.
Los individuos pueden pasar de susceptible a infectados y de infectados a removidos pero no al revés, o sea, existe unidireccionalidad de los pasos. Esto implica que una persona que se infecta tiene dos opciones: se cura, genera anticuerpos y no es susceptible a nuevos contagios; o simplemente muere a causa del virus.
El paso de susceptible a infectado depende de varios factores: el número de contacto que cada persona tiene con otra; el estado y la proporción de personas en cada fase del virus; y la probabilidad de que la interacción con otro individuo derive en un contagio.
El paso de infectado a removido depende directamente del tiempo de duración de la infección.
Las curvas de los modelos SIR son en general como el siguiente gráfico:



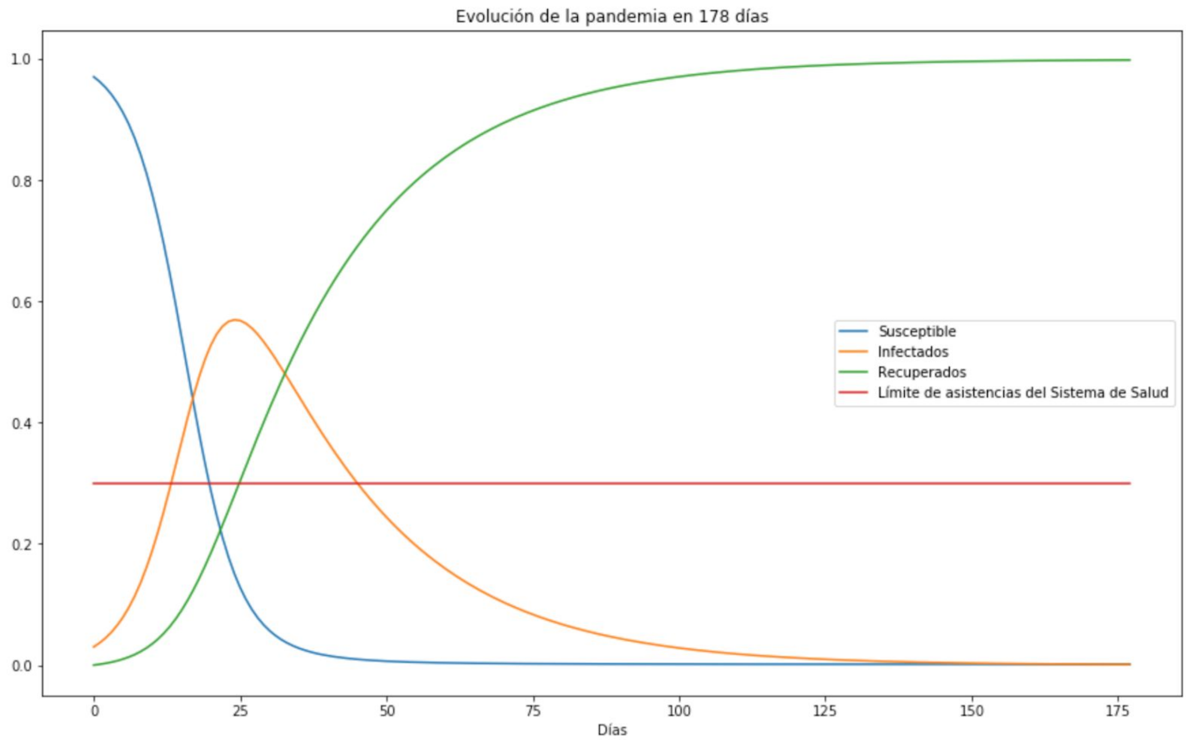
Este gráfico supone que no existe vacuna para el virus ya que la totalidad de la población es susceptible a contraerlo.
La curva de infectados comienza como exponencial al principio y luego decae pareciendose mas a una normal que una exponencial.
R_0 es un valor que da un número informativo de a cuantas personas transmite la enfermedad una persona infectada. Es el valor por el cual se toman las decisiones durante una pandemia para poder controlarlo. Si R_0 está por encima de 1 entonces la enfermedad se está propagando, si esta en 1 la enfermedad está latente pero sin expandirse ni contraerse, si es menor a 1 entonces la enfermedad se está contrayendo. Para evitar un R_0 elevado se toman medidas para disminuir los contactos entre individuos de la población.
En este modelo, se toma que toda la población es susceptible a contagios, sin embargo, en las situaciones reales esto no es verdad: para algunas infecciones existen vacunas las cuales reducen el número de individuos susceptibles a contraer la enfermedad.
Este modelo es un modelo muy simple y no es aplicable a situaciones reales ya que ignora varios factores como la distribución geográfica, la variación de la población, etc. A fines prácticos vamos a considerar que no existen muertes en el modelo y que R son todos los recuperados que no pueden volver a contraer el virus.
En cuanto a las ecuaciones diferenciales que definen este sistema dinámico de tiempo continuo:

- Población susceptible (S): $\frac{dS}{dt} = -\beta SI$. Es decir, los susceptibles disminuyen en el tiempo con una tasa β que es la tasa de contagio.

- Población infectada (I): $\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$. La población de infectados aumenta a una tasa β , es decir, se contagian día a día más personas a dicha tasa, pero a su vez disminuye con una tasa γ que es la tasa de recuperación de cada individuo.
- Población recuperada (R): $\frac{dR}{dt} = \gamma I$. Los recuperados aumentan a una tasa γ , siendo $\frac{1}{\gamma}$ la duración promedio de la enfermedad sobre cada individuo.

Resolución

Se llevó a cabo la resolución considerando que el total de la población es susceptible a contraer el virus y que la población se mantiene constante: no hay muertes por el virus y/o se cuentan dentro de la población de recuperados/removidos.
Inicialmente hay un 3% de infectados ($I = 0.03$), un 97% de población susceptible ($S = 0.97$) y ninguna persona recuperada ($R = 0$).
Como indica el enunciado $\beta = 0,27\ y\ \gamma = 0,043$ mientras que el sistema de salud solo puede asistir al 30% de la población como máximo.
A fines prácticos se considera finalizada la pandemia cuando el porcentaje de infectados es menor que 0.1% ($i < 0.1\%$).
En esta condiciones, la pandemia terminó al cabo de 178 días de su comienzo y se obtuvo como resultante el siguiente gráfico:



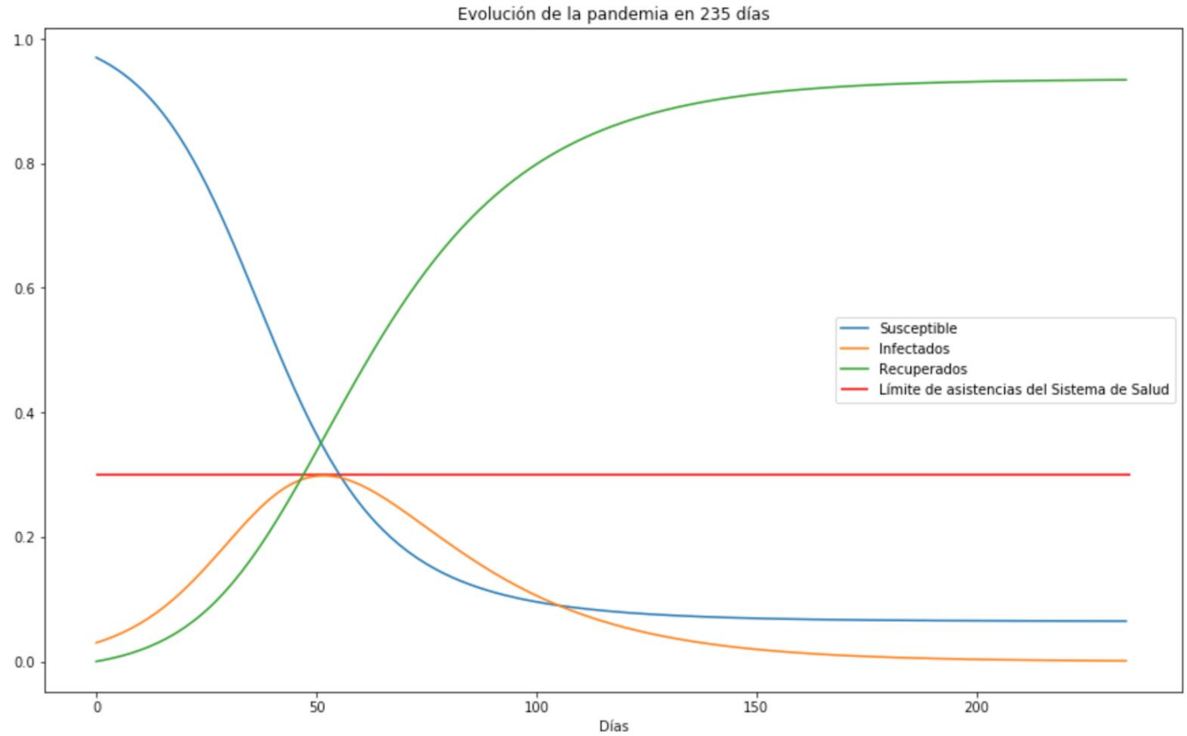
Como podemos ver, la cantidad de infectados supera al límite de la población que el sistema de salud puede asistir ($max(I) \approx 56,9\% > 30\%$).
Para disminuir este pico de población contagiada podemos modificar los parámetros del problema.
La variable γ es una variable que no se puede modificar fácilmente, ya que su valor está asociado a la duración promedio de la enfermedad sobre cada individuo de la población.

Se pueden tomar medidas para modificar los valores de la variable β, como por ejemplo reducir el número de contactos entre los individuos de la población mediante una cuarentena, y para modificar la cantidad de población susceptible a contraer la enfermedad, como por ejemplo implementar una campaña de vacunación gratuita.
Entonces, se puede disminuir este pico de infectados de varias formas:

1. Tomando medidas para reducir el valor de β.
2. Tomando medidas para reducir la cantidad de población susceptible a contraer la enfermedad.

Tomando medidas para reducir el valor de β

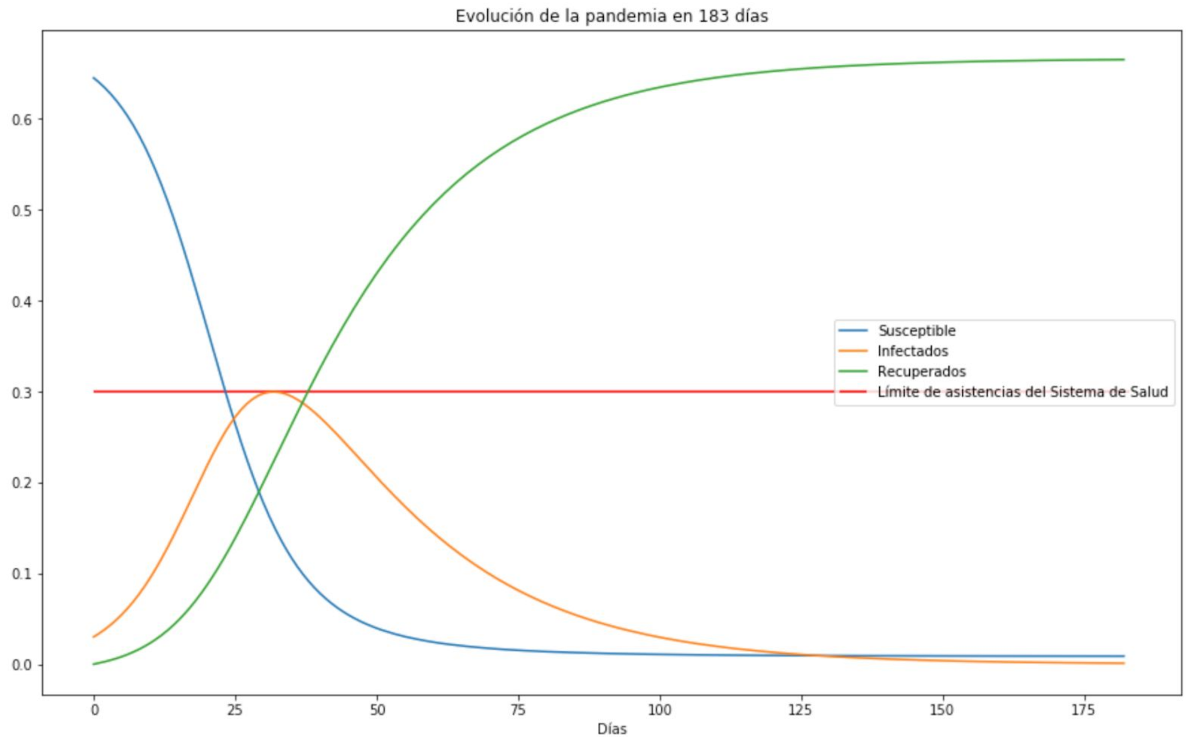
Para reducir el valor de β se puede implementar una cuarentena en donde se reduce el número de contactos existente entre los individuos de la población.
Se realiza una nueva simulación con un valor de β diferente:



Modificando el valor de β a 0.123 se nota que el pico máximo de infectados (29.8% aproximadamente) no supera la capacidad máxima del sistema de salud.
Si bien este nuevo valor de β aplanó la curva de infectados de modo tal que no supere la capacidad máxima del sistema de salud, también hizo que la duración de la pandemia pase de 178 días a 235.
Por otro lado, hubo alrededor de un 6% de la población que no contrajo la enfermedad.

Tomando medidas para reducir la cantidad de población susceptible a contraer la enfermedad.

Para este caso vamos a suponer que existe una vacuna que causa inmunidad en los individuos para que estos se vuelvan inmunes al virus y se implementa un calendarios de vacunación sobre la población logrando que una gran parte sea inmune a contraer el virus y así se logra que no se colapse el sistema de salud.
Si consideramos que el 54.5% de la población se encuentra vacunada y es inmune a contraer el virus, entonces el pico máximo de infectados rondará el 29.9% de la población logrando que no se sature el sistema de salud:



Si bien no se satura el sistema de salud, podemos notar que la duración de la pandemia en este caso es de 6 días más que la pandemia con los parámetros originales.
También se puede ver, que hubo casi un 1% de la población que no contrajo la enfermedad.