Eliminacion Gaussiana. Factorizacion LU. Primera parte.

1. Resuelva los siguientes sistemas utilizando eliminacion gaussiana e identifique las matrices de eliminacion y/o permutacion utilizadas en cada caso:

   a) $\begin{cases} x_2 + 4x_3 & = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 & = 6 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 & = -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 & = -8 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 & = 7 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 & = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 & = 2 \\ x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$

   Soluciones

   a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 7 \end{bmatrix}$, $P_{12}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \end{bmatrix}$, $E_{31}(-3)\, P_{12}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 22 \end{bmatrix}$,
   $E_{32}(2)\, E_{31}(-3)\, P_{12}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$. Luego $x_3 = \frac{1}{15}$,
   $x_2 = -5 - \frac{4}{15} = -\frac{79}{15}$ y $x_1 = -2 + \frac{5}{15} + 3\frac{79}{15} = \frac{212}{15}$.

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -7 & 7 \\ -4 & 6 & -1 \end{bmatrix}$, $E_{21}(-3)\, A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ -4 & 6 & -1 \end{bmatrix}$, $E_{31}(4)\, E_{21}(-3)\, A =$
   $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}$, $E_{32}(3)\, E_{31}(4)\, E_{21}(-3)\, A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   Luego $x_3 = \frac{3}{20}$, $x_2 = \frac{1}{2}\left(4 - 7\frac{3}{20}\right) = \frac{59}{40}$ y $x_1 = -4 + 3\frac{59}{40} = \frac{17}{40}$.

   c) COMPLETAR.

2. Encuentre la operacion elemental de fila que transforma a la primer matriz en la segunda de cada item siguiente. Ademas determine cual es la operacion elemental de fila que transforma a la segunta en la primera.

   a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}.$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

   Soluciones

   a) P_{12} y P_{12}.
   b) $E_{22}\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $E_{22}(-2)$.
   c) $E_{31}(-4)$ y $E_{31}(4)$.
   d) $E_{32}(3)$ y $E_{32}(-3)$.

3. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) La primera fila de AB es una combinacion lineal de todas las filas de B. ¿Cuales son los escalares de esta combinacion y cual es la primera fila de AB? ¿Cual es la segunda fila?

   b) La primera columna de AB es una combinacion lineal de todas las columnas de A. ¿Cuales son los escalares de esta combinacion y cual es la primera columna de AB? ¿Cual es la segunda columna?

   Soluciones

   a) COMPLETAR.

   b) La primer columna de AB es una combinacion de las columnas de A con los escalares de la primer columna de B, es decir: $(AB)_1 = 1\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $(AB)_2 = 1\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

4. Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justificar y mostrar un contraejemplo en el caso de que sea falso.

   a) Si la primera y la tercera columna de B son iguales, tambien lo son la primera y la tercera columna de AB.

   b) Si la primera y la tercera fila de B son iguales, tambien lo son la primera y la tercera fila de AB.

   c) Si la primera y la tercera fila de A son iguales, tambien lo son la primera y la tercera fila de AB.

   d) $(AB)^2 = A^2B^2$.

Soluciones

a) Verdadero pues $(AB)_1 = AB_1 = AB_3 = (AB)_3$.

b) Falso. Por ejemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 10 & 10 & 10 \\ 16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$.

c) COMPLETAR.

d) Falso. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, luego $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pero $A^2B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Encontrar ejemplos de matrices de orden 2 por 2 tales que:

   a) $A^2 = -I$, donde A tenga solo entradas reales.

   b) $B^2 = 0$, aunque $B \neq 0$.

   c) $CD = -DC$, dejando de lado el caso $CD = 0$.

   d) $EF = 0$, aunque ninguna de las entradas de E o de F sea 0.

   Soluciones

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

   b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

   c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

   d) $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $F = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

6. La matriz de rotacion del plano $x - y$ por un angulo θ es:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

   Recordando algunas identidades trigonometricas, verifique que $A(\theta_1)\,A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2)$. ¿Que matriz es $A(\theta)\,A(-\theta)$?

   Solucion COMPLETAR.

7.

   a) Sean A y B dos matrices triangulares inferiores. Muestre que el producto AB es una matriz triangular inferior, y que si A es invertible, A^{-1} tambien es triangular inferior.

   b) Sean A y B dos matrices triangulares superiores. Muestre que el producto AB es una matriz triangular superior, y que si A es invertible, A^{-1} tambien es triangular superior.

   c) Sean A y B dos matrices triangulares diagonales. Muestre que el producto AB es una matriz diagonal, y que si A es invertible, A^{-1} tambien es diagonal.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) Podemos escribir a AB como $\left[(AB)^t\right]^t = [B^tA^t]^t$. Como B y A son triangulares inferiores entonces por el resultado anterior B^tA^t es triangular inferior luego $[B^tA^t]^t = AB$ es triangular superior.

c) Resulta evidente de considerar los resultados anteriores teniendo en cuenta que una matriz diagonal es triangular superior e inferior.

8. ¿Que le sucede a una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ si la premultiplicamos por $E_{31}(4)$ o $E_{23}(5)$? ¿Que sucede si la postmultiplicamos por dichas matrices?

Solucion

Si premultiplicamos por $E_{ij}(\alpha)$, a la fila i de A se le suman α veces la fila j. Si postmultiplicamos por $E_{ij}(\alpha)$, a la columna j de A se le suman α veces la columna i.

9. Exhiba la matriz M de orden 3×3 que produce los siguientes pasos de eliminacion:

a) M suma 5 veces la fila 1 a la fila 2.

b) M suma -7 veces la fila 2 a la fila 3.

c) M intercambia las filas 1 y 2 y luego la 2 y 3.

Soluciones

a) $M = E_{21}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $M = E_{32}(-7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $M = P_{23}P_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

10.

a) Determina las matrices E_{21}, E_{31} y E_{32} que llevan a la matriz A a su forma triangular U, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Calcula la matriz $E = E_{32}E_{31}E_{21}$ que realiza todos los pasos de la eliminacion: $EA = U$.

Soluciones

a) $E_{21}(-4)$, $E_{31}(2)$ y $E_{32}(-2)$.

b) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 10 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

11. Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Factorizar A en LU y escribir el sistema triangular superior $Ux = c$ que se obtiene despues de la eliminacion gaussiana.

Solucion $E_{31}(-3)A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $c = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, luego el sistema es: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 & = 2 \\ 5x_2 + 7x_3 & = 2 \\ -x_3 & = -1 \end{cases}$.

12. Encontrar la matriz inversa del producto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solucion $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$.

13. Sea el sistema de ecuaciones $Ax = b$ dado por:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 2x_4 & = 6 \\ 0x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 & = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 7x_4 & = 8 \\ 0x_1 + 0x_2 + 6x_3 + 5x_4 & = -4 \end{cases}$$

a) Factorizar A en LU y resolver el sistema anterior.

b) Resolver el sistema $Ax = b'$ con $b' = (6, 2, 10, 2)$.

c) Resolver el sistema $Ax = b''$ con $b'' = (5, 0, 2, 0)$.

Soluciones

a) $E_{31}(-1)\,A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, $E_{32}(-1)\,E_{31}(-1)\,A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$,

$E_{43}(-1)\,E_{32}(-1)\,E_{31}(-1)\,A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$Ax = L\underbrace{Ux}_{c} = b$. $\begin{cases} Lc &= b \\ Ux &= c \end{cases}$. Luego $c_1 = 6$, $c_2 = 4$, $c_3 = 8 - 4 - 6 = -2$, $c_4 = -4 + 2 = -2$ y $x_4 = -2$, $x_3 = \frac{1}{6}\left[-2 - 4(-2)\right] = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}(4 + 2 - 3) = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}(6 + 4 - 4) = 3$.

b) $c_1 = 6$, $c_2 = 2$, $c_3 = 10 - 6 - 2 = 2$, $c_4 = 2 - 2 = 0$ y $x_4 = 0$, $x_3 = \frac{1}{6}(2 - 0) = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}\left(2 - 0 - 3\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $x_1 = \frac{1}{2}\left(6 - 0 - \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{3}$.

c) COMPLETAR.

Eliminacion Gaussiana. Factorizacion LU. Segunda parte.

1. Encontrar los factores L, D y U de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolver el sistema $Ax = b$, donde $b = (6, 0, -6)$.

Solucion

COMPLETAR.

2. Probar que AA^t y A^tA son siempre simetricas. Mostrar mediante un ejemplo que pueden no ser iguales. Mostrar que tambien $A + A^t$ es simetrica si A es cuadrada. ¿Que sucede con $A - A^t$?

Solucion

- Sea $B = AA^t$, luego $B_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a^t_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a^t_{kj}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}a^t_{ki} = b_{ji}$. Analogamente para $C = A^tA$. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $A^tA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $AA^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- Sea $D = A + A^t$, luego $d_{ij} = a_{ij} + a^t_{ij} = a^t_{ij} + a_{ij} = a_{ji} + a^t_{ji} = d_{ji}$.
- COMPLETAR.

3. Mostrar que los pivotes de A son tambien los pivotes de A^t.

Solucion

Sea $A = LDU$ luego $A^t = U^t D^t L^t = U^t D L^t$. Notar que U^t es triangular inferior y L^t es triangular superior.

4.

a) Hallar la factorizacion LDU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

b) Aprovechando lo hecho en el item anterior, resolver el sistema $A^t x = (2, 5, 5)$.

Soluciones

a) $E_{31}(-3)\,A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U',\ D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) COMPLETAR.

5. Recordemos que la matriz $E_{ij}(a)$ (con $i > j$) esta definida por:

$$E_{ij}(a) = (m_{kl}) \text{ donde } m_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ a & k = i \wedge l = j \\ 0 & \end{cases}$$

a) Probar que $[E_{ij}(a)]_l$ (que es la columna l de $E_{ij}(a)$) verifica:

$$[E_{ij}(a)]_l = \begin{cases} e_l & l \neq j \\ e_j + a e_i & l = j \end{cases}$$

b) Dado $r \in \mathbb{N}$, probar que $[E_{ij}(a)]^r = E_{ij}(ra)$.

c) Determinar la matriz $[E_{ij}(a)]^{-1}$.

d) Determinar la matriz $E_{ij}(a).\ E_{i'j'}(b)$, donde $i' > j'$, $i < i'$ y $j < j'$.

Soluciones

COMPLETAR.

6. Resolver mediante intercambio de filas cuando sea necesario:

$$\begin{cases} u+4v+2w & =-2 \\ -2u-8v+3w & =32 \\ v+w & =1 \end{cases}$$

Solucion

$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $E_{21}(2)A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P_{23}E_{21}(2)A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}=$ $E_{31}(2)P_{23}A=U,\ L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sea $\tilde{A}=P_{23}A$, luego $\tilde{A}=LU$.

COMPLETAR.

7. Encontrar la factorizacion $PA=LDU$ de las matrices

   a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

   b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Soluciones

COMPLETAR.

8. ¿Cuales son los valores de a y b que conducen a intercambio de filas y cuales son los que hacen la matriz singular?

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 3 \end{bmatrix}$$

Solucion

- $E_{21}(-a)\,A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 8-2a & 3-2a \\ 0 & b & 3 \end{bmatrix}$, luego si $8-2a=0 \iff 4=a$ necesitaremos intercambio de filas (siempre que $b \neq 0$).
- COMPLETAR.

9. Demostrar los siguientes enunciados:

   a) Si $E_{ij}(-a)$ sustrae de una ecuacion un multiplo de otra, entonces $[E_{ij}(-a)]^{-1}$ lo suma nuevamente.

   b) Si P_{ij} intercambia dos filas, entonces P_{ij}^{-1} las vuelve a intercambiar, es decir $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

   c) Si D es una matriz diagonal, conentradas en la diagonal $d_1, \ldots, d_n$ no nulas, entonces D^{-1} es tambien diagonal con entradas en la diagonal $\frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_n}$.

   Soluciones

   COMPLETAR.

10. Una matriz es de permutacion si es cuadrada, con entradas 0 o 1 y con un solo 1 en cada fila y en cada columna. Probar que si P es una matriz de permutacion, entonces $P^t = P^{-1}$. Comparar con el ejercicio 22b.

    Solucion

    COMPLETAR.

11. Encontrar, cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 1, utilizando el metodo de Gauss-Jordan.

Soluciones

a) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 22 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{30} \end{array}\right] \rightarrow$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{15} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{30} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{15} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{30} \end{array}\right] \rightarrow$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{28}{15} & -\frac{7}{10} & \frac{17}{30} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{15} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{30} \end{array}\right].$

b) COMPLETAR.

c) COMPLETAR.