Enunciado Sea Γ un conjunto de formulas proposicionales. Demuestre que si el conjunto de valuaciones v tales que $[\![\Gamma]\!]_v = T$ es finito, entonces Γ es infinito.

Solucion Sea $V = \left\{v_i / [\![\Gamma]\!]_{v_i} = T\right\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ el conjunto de valuaciones de la hipotesis. Supongamos que Γ es finito y sean $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_m}$ (donde i_m es el mayor de los indices) las distintas variables proposicioneles que aparecen en cada formula de Γ.

$$\text{Definimos: } \tilde{v}\,(p_j) = \begin{cases} v_1\,(p_j) & p_j \in \{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_m}\} \\ !v_1\,(p_{i_m+1}) & j = i_m + 1 \\ !v_2\,(p_{i_m+2}) & j = i_m + 2 \\ \vdots & \vdots \\ !v_n\,(p_{i_m+n}) & j = i_m + n \end{cases}$$

Esta nueva valuacion satisface Γ pues es igual a $v_1 \in V$ en todas las variables proposicionales que intervienen, por lo que $\tilde{v} \in V$. Sin embargo no es ninguna de las valuaciones $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pues difiere de cada una de ellas en al menos un valor, luego $\tilde{v} \notin V$. Contradiccion. Por lo tanto Γ es infinito.

Enunciado Sea $\Gamma \subseteq PROP$. Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Γ es consistente,
2. No existe ϕ tal que $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$,
3. Existe al menos una formula ϕ tal que $\Gamma \nvdash \phi$.

Solucion

1. $\boxed{1 \Rightarrow 2}$: Supongamos que existe $\phi / \Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$ luego por introduccion de bottom $\Gamma \vdash \bot$, pero por hipotesis Γ es consistente. Contradiccion.
2. $\boxed{2 \Rightarrow 3}$: Supongamos lo contrario, es decir que para toda ϕ resulta $\Gamma \vdash \phi$. Luego tenemos $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$. Contradiccion.
3. $\boxed{3 \Rightarrow 1}$: Supongamos $\Gamma \vdash \bot$, luego por eliminacion de bottom $\Gamma \vdash \phi$ para cualquier ϕ, en particular para la de la hipotesis. Contradiccion.

Enunciado Sea $\mathcal{M}$ un modelo para una signatura $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$. Una formula $\phi \in FORM_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$ es realizable en $\mathcal{M}$ sii existe un contexto s donde $\mathcal{M}, s \vDash \phi$ ¿Es verdadera la siguiente afirmacion: Si ϕ es realizable en $\mathcal{M}$, entonces $\neg\phi$ no es realizable en $\mathcal{M}$? Justifique.

Solucion Falso. Sean $\phi \equiv x_1 \doteq x_2$, s tal que $s(x_1) = s(x_2)$ y s' tal que $s'(x_1) \neq s'(x_2)$. Veamos que se cumple la hipotesis, es decir que ϕ es realizable:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \vDash \phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \vDash \rangle \\
& [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \phi \rangle \\
& [\![x_1 \doteq x_2]\!]_{\mathcal{M},s} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } \doteq \rangle \\
& [\![x_1]\!]_{\mathcal{M},s} = [\![x_2]\!]_{\mathcal{M},s} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } TERM \rangle \\
& s(x_1) = s(x_2) \\
& \langle \text{lo cual vale por definicion de } s \rangle
\end{aligned}
$$

Ahora veamos que $\neg\phi$ tambien es realizable:

$$\begin{array}{ll}
 & \mathcal{M}, s' \models \neg\phi \\
\Longleftrightarrow & \langle \text{definicion de } \models \rangle \\
 & [\![\neg\phi]\!]_{\mathcal{M},s'} = T \\
\Longleftrightarrow & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } \neg \rangle \\
 & [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\Longleftrightarrow & \langle \text{definicion de } \phi \rangle \\
 & [\![x_1 \doteq x_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\Longleftrightarrow & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } \doteq \rangle \\
 & [\![x_1]\!]_{\mathcal{M},s'} \neq [\![x_2]\!]_{\mathcal{M},s'} \\
\Longleftrightarrow & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } TERM \rangle \\
 & s\text{'}\,(x_1) \neq s'\,(x_2) \\
 & \langle \text{lo cual vale por definicion de } s' \rangle
\end{array}$$

Enunciado Sea Γ un conjunto de formulas de la logica de predicados sobre una signatura $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$. Definimos los modelos de Γ de la siguiente forma:

$$Mod\,(\Gamma) = \{\mathcal{M}/\mathcal{M} \text{ es un modelo sobre } (\mathcal{F}, \mathcal{P}) \text{ y } \mathcal{M} \models \Gamma\}$$

Decimos que Γ es satisfactible sii $Mod\,(\Gamma) \neq \emptyset$.

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

1. Si $Mod\,(\Gamma \cap \Delta) = \emptyset$, entonces Γ es no satisfactible y Δ es no satisfactible.

2. Si $Mod\,(\Gamma \cup \Delta) = \emptyset$, entonces Γ es no satisfactible y Δ es no satisfactible.

3. Si $Mod\,(\Gamma) \neq \emptyset$, entonces $Mod\,(\neg\Gamma) = \emptyset$ donde $\neg\Gamma = \{\neg\phi/\phi \in \Gamma\}$.

Solucion

1. Verdadero. Sea $\phi \in \Gamma \cap \Delta$. Por hipotesis ϕ no es satisfactible y como $\phi \in \Gamma$ y $\phi \in \Delta$ (por definicion de $\cap$) resulta Γ no es satisfactible y Δ tampoco.

2. Falso. Sean $\Gamma = \emptyset$ y $\Delta = \{\perp\}$, luego resultara $\Gamma \cup \Delta = \{\perp\}$ que es trivialmente insatisfactible por lo que $Mod(\Gamma \cup \Delta) = \emptyset$. Sin embargo no es cierto que Γ sea no satisfactible y Δ tambien pues Γ es satisfactible por vacuidad.

3. Falso. En efecto $\Gamma = \emptyset = \neg\emptyset$ y resulta entonces $Mod(\Gamma) \neq \emptyset$ y $Mod(\neg\Gamma) \neq \emptyset$.

Enunciado Demuestre el teorema de compacidad: Para todo conjunto de sentencias Γ, si todos los subconjuntos finitos de Γ son satisfactibles, entonces Γ es satisfactible.

Solucion Supongamos que Γ no es satisfactible, luego $\Gamma \vDash \perp$ y por correctitud resulta $\Gamma \vdash \perp$. La prueba de $\Gamma \vdash \perp$ es un arbol finito y en particular tiene un conjunto finito de premisas, al que llamaremos Δ.

Tenemos que $\Delta \subseteq \Gamma$ es finito y ademas inconsistente, pero por hipotesis todos los subconjuntos finitos de Γ son satisfactibles. Contradiccion. Luego Γ es satisfactible.

Enunciado Sin entrar en los detalles de la prueba, demuestre que el teorema de alcanzabilidad en grafos no es expresable en logica de predicados.

Solucion COMPLETAR.

Enunciado Demuestre el teorema de Löwenhein-Skolem: Si ψ es una sentencia de la logica de predicados tal que para cada numero natural n existe un modelo de ψ con al menos n elementos, entonces ψ tiene un modelo con infinitos elementos.

Solucion Definamos las formulas $\phi_n \equiv \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg (x_i = x_j) \right)$, es decir, ϕ_n expresa que «existen al menos n elementos». Definimos ademas $\Gamma = \{\psi\} \cup \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$.

1. $\boxed{\phi_n \text{ es satisfactible para todo } n}$: En efecto, bastara considerar un universo con al menos n elementos.

2. $\boxed{\phi_k \vDash \phi_n \text{ para todo } k \ge n}$: De hecho si existen al menos k elementos, tambien existe una menor cantidad de elementos.

3. $\boxed{\Gamma \text{ es satisfactible}}$: Para probar esto nos valdremos del teorema de compacidad, es decir, consideraremos un subconjunto finito cualquiera y mostraremos que es satisfactible.

   Sea $\Delta \subseteq \Gamma$ y consideremos un numero k suficientemente grande como para que toda $\phi_n \in \Delta$ valga en caso de que tambien valga ϕ_k (por el punto anterior).

   Sea $\mathcal{M}_k$ el modelo con al menos k elementos que garantiza la hipotesis, luego ϕ_k resulta satisfactible por lo que tambien lo resultara cualquier $\phi_n \in \Delta$. Ademas si $\psi \in \Delta$ por hipotesis tambien tenemos $\mathcal{M}_k \vDash \psi$. Es decir que todas las formulas de Δ son satisfactibles.

   En resumen hemos visto que cualquier subconjunto finito de Γ es satisfactible, luego por el teorema de compacidad Γ tambien lo es, por lo que existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \vDash \Gamma$.

4. $\boxed{\text{Existe un modelo infinito para } \psi}$: Veamos que el modelo $\mathcal{M}$ que nos garantiza el punto anterior es infinito. Supongamos que no lo sea y sea $c = \# |\mathcal{M}|$. Como $\phi_{c+1} \in \Gamma$ y $\mathcal{M} \vDash \Gamma$ entonces existen al menos $c+1$ elementos en el modelo, pero solo existen c elementos. Contradiccion. Luego el modelo es infinito.

Enunciado Recordemos que $\forall \Diamond \phi \equiv \forall [\top \boldsymbol{U} \phi]$, y $\exists \Box \phi \equiv \neg \forall \Diamond \neg \phi$. Derive la definicion semantica de $\exists \Box \phi$. Es decir, calcule cuando un estado de un sistema de transiciones $\mathcal{M}$ satisface $\mathcal{M}, s \vDash \exists \Box \phi$.

Solucion

$$
\begin{array}{ll}
& \mathcal{M}, s \models \exists\Box\phi \\
\iff & \langle \text{definicion de } \exists\Box \rangle \\
& \mathcal{M}, s \models \neg\forall\Diamond\neg\phi \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \neg \rangle \\
& \mathcal{M}, s \not\models \forall\Diamond\neg\phi \\
\iff & \langle \text{definicion de } \forall\Diamond \rangle \\
& \text{no ocurre que } \mathcal{M}, s \models \forall\,[\top \boldsymbol{U} \neg\phi] \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \forall\cup \rangle \\
& \text{no ocurre que para toda traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \quad \text{existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que:} \\
& \mathcal{M}, s'_j \models \neg\phi \text{ y } \mathcal{M}, s'_i \models \top \text{ para todo } i < j \\
\iff & \langle \mathcal{M}, s \models \top \text{ para todo } s \rangle \\
& \text{no ocurre que para toda traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \quad \text{existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \models \neg\phi \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \neg \rangle \\
& \text{no ocurre que para toda traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \quad \text{existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \not\models \phi \\
\iff & \langle \text{intercambio de cuantificadores} \rangle \\
& \text{para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \quad \text{no existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \not\models \phi \\
\iff & \langle \text{intercambio de cuantificadores} \rangle \\
& \text{para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \quad \text{resulta } \mathcal{M}, s'_j \models \phi \text{ para todo } j \in \mathbb{N}
\end{array}
$$

Enunciado Sea $\Gamma \subseteq PROP$. Demuestre que si existe una valuacion v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = T$, entonces Γ es consistente.

Solucion Sea $v / [\![\Gamma]\!]_v = T$. Supongamos que Γ es inconsistente, es decir $\Gamma \vdash \bot$, luego por correctitud $\Gamma \models \bot$. Esto significa que para toda valuacion b tal que $[\![\Gamma]\!]_b = T$ tambien resultara $[\![\bot]\!]_b = T$. Como consecuencia de esto, para la valuacion de la hipotesis resultara $[\![\bot]\!]_v = T$. Absurdo. Por lo tanto Γ es consistente.

Enunciado Demuestre que todo conjunto consistente esta contenido en un conjunto consistente maximal.

Solucion Notemos primero que $PROP$ es numerable, luego podemos listar a todos sus elementos como $\phi_0, \phi_1, \ldots$ Ahora definimos: $\Gamma_0 = \Gamma$,

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \nvdash \bot \\ \Gamma_n & \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \bot \end{cases}$$

y sea $\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$.

1. $\boxed{\Gamma \subseteq \Gamma^*}$ pues $\Gamma^* = \Gamma_0 \cup \ldots$ y $\Gamma_0 = \Gamma$.

2. $\boxed{\Gamma_i \text{ es consistente para todo } i}$ pues $\Gamma_0 = \Gamma$ es consistente por hipotesis (caso base) y si Γ_n es consistente (hipotesis inductiva) entonces Γ_{n+1} tambien lo es pues por definicion de Γ_i:

   a) Si $\Gamma \cup \{\phi_n\} \vdash \bot$ entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ (consistente por H.I.).

   b) Si $\Gamma \cup \{\phi_n\} \nvdash \bot$ (es consistente) entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n\}$.

3. $\boxed{\Gamma^* \text{ es consistente}}$. En efecto supongamos lo contrario, es decir $\Gamma^* \vdash \bot$, luego existe ψ tal que $\Gamma^* \vdash \psi$ y $\Gamma^* \vdash \neg\psi$. En ambas derivaciones hay un numero finito de premisas $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Gamma^*$. Consideremos un subindice j tal que todas estas premisas esten en $\Gamma_j \subseteq \Gamma^*$, luego $\Gamma_j \vdash \psi$ y $\Gamma_j \vdash \neg\psi$ (Γ_j es inconsistente) pero esto contradice el punto anterior.

4. $\boxed{\Gamma^* \text{ es maximal}}$. Sea Δ consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$, veremos que $\Gamma^* = \Delta$ (es decir, $\Delta \subseteq \Gamma^*$). Para cualquier elemento $\phi_m \in \Delta$, como Δ es consistente y $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$ entonces $\Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ es consistente; y por definicion $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ de donde $\phi_m \in \Gamma_{m+1} \subseteq \Gamma^*$ por lo que $\phi_m \in \Gamma^*$.

Enunciado

1. Defina recursivamente el conjunto de variables libres de una formula ϕ.

2. Describa el problema de captura de variables libres.

3. ¿Como se evita la captura de variables libres? Defina el concepto de termino libre para una variable en una formula.

Solucion

1. Definimos la funcion $FV_T : TERM \to \mathcal{P}(Var)$ que calcula el conjunto de variables libres de un termino como:

$$FV_T(t) = \begin{cases} \emptyset & t \in \mathcal{F} \\ \{t\} & t \in Var \\ FV_T(t_1) \cup \ldots \cup FV_T(t_n) & t = f_i(t_1, t_2, \ldots, t_n) \end{cases}$$

   Definimos el conjunto de variables libres de una formula ϕ mediante la funcion $FV : FORM \to \mathcal{P}(Var)$:

$$FV(\phi) = \begin{cases} \emptyset & \phi \equiv \bot \\ \emptyset & \phi \in \mathcal{P} \\ FV_T(t_1) \cup \ldots \cup FV_T(t_n) & \phi \equiv P_i(t_1, \ldots, t_n) \\ FV(\psi) & \phi \equiv \neg\psi \\ FV(\psi_1) \cup FV(\psi_2) & \phi \equiv \psi_1 \Box \psi_2 \\ FV(\psi) - \{x_i\} & \phi \equiv \forall x_i \psi \\ FV(\psi) - \{x_i\} & \phi \equiv \exists x_i \psi \end{cases}$$

2. El problema de captura de variables significa que cuando realizamos una substitucion en una formula con cuantificador, si la variable que estamos introduciendo es la misma que la cuantificada, esta quedara "capturada" por el cuantificador, alterando de esta manera el significado semantico de la forumula.

3. Para evitar la captura debemos debemos restringir las substituciones de manera adecuada. Para ello definimos el concepto de termino libre para una variable en una formula: Diremos que un termino t esta libre para una variable x en una formula ϕ si y solo si:
   - ϕ es atomica (no contiene conectivos).
   - $\phi \equiv \phi_1 \Box \phi_2$ y t esta libre para x en ϕ_1 y ϕ_2.
   - $\phi \equiv \neg \phi_1$ y t esta libre para x en ϕ_1.
   - $\phi \equiv \forall y \phi_1$ y si $x \neq y$ se cumple:
     - t esta libre para x en ϕ_1 y
     - $y \notin FV_T(t)$
   - $\phi \equiv \exists y \phi_1$ y si $x \neq y$ se cumple:
     - t esta libre para x en ϕ_1 y
     - $y \notin FV_T(t)$

Enunciado Defina el concepto de modelo o interpretacion para una signatura $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Solucion Dada una signatura $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, un modelo $\mathcal{M}$ para dicha signatura consiste en:

- Un conjunto no vacio que llamaremos universo y notaremos como $|\mathcal{M}|$.
- Para cada constante $c \in \mathcal{F}$, un elemento $c_{\mathcal{M}} \in |\mathcal{M}|$.
- Para cada simbolo de funcion $f \in \mathcal{F}$ (con aridad $n > 0$), una funcion $f_{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}|^n \to |\mathcal{M}|$.
- Para cada simbolo de predicado $P \in \mathcal{P}$ de aridad $n > 0$, un conjunto $P_{\mathcal{M}} \subseteq |\mathcal{M}|^n$ (es decir, una relacion n-aria).
- Para cada simbolo de predicado $P \in \mathcal{P}$ de aridad 0, un conjunto $P_{\mathcal{M}} \subseteq \{\emptyset\}$.

Enunciado Defina el concepto de entorno s y explique por que es necesaria su introduccion.

Solucion Llamamos entorno a una funcion $s : Var \to |\mathcal{M}|$. Su introduccion es necesaria pues de lo contrario no existiria ninguna interpretacion para las variables libres por lo que existirian formulas sin significado semantico.

Enunciado Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ una signatura. Determine en cada caso si es posible encontrar formulas y modelos que satisfagan cada una de las siguientes restricciones:

1. $\phi, \psi, \mathcal{M}$ tales que $\vdash \phi \to \psi, \mathcal{M} \vDash \phi$ y $\mathcal{M} \nvDash \psi$.
2. $\phi, \mathcal{M}, \mathcal{M}'$ tales que $|\mathcal{M}| \subseteq |\mathcal{M}'|, \mathcal{M}' \vDash \phi$ y $\mathcal{M} \nvDash \phi$.
3. $\mathcal{M}, \phi$ tales que $\mathcal{M} \nvDash \phi$ y $\mathcal{M} \nvDash \neg\phi$.

Solucion

1. Falso. Por correctitud $\vdash \phi \to \psi$ implica $\models \phi \to \psi$ sii $\phi \models \psi$. Sea $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \phi$ luego necesariamente resultara $\mathcal{M} \models \psi$.

2. Verdadero. Sean $\phi \equiv \exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 \doteq x_2)$, $|\mathcal{M}| = \{1\} \subset \{1, 2\} = |\mathcal{M}'|$. Tenemos:

$$
\begin{aligned}
& [\![\exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 \doteq x_2)]\!]_{\mathcal{M},s} = F \\
\iff & \langle \text{unico caso} \rangle \\
& [\![\exists x_2 \neg (x_1 \doteq x_2)]\!]_{\mathcal{M},s[x_1 \mapsto 1]} = F \\
\iff & \langle \text{unico caso} \rangle \\
& [\![\neg (x_1 \doteq x_2)]\!]_{\mathcal{M},s[x_1 \mapsto 1][x_2 \mapsto 1]} = F \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \neg \rangle \\
& [\![(x_1 \doteq x_2)]\!]_{\mathcal{M},s[x_1 \mapsto 1][x_2 \mapsto 1]} = T \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \doteq \rangle \\
& [\![x_1]\!]_{\mathcal{M},s[x_1 \mapsto 1][x_2 \mapsto 1]} = [\![x_2]\!]_{\mathcal{M},s[x_1 \mapsto 1][x_2 \mapsto 1]} \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para terminos} \rangle \\
& s\,[x_1 \mapsto 1]\,[x_2 \mapsto 1]\,(x_1) = s\,[x_1 \mapsto 1]\,[x_2 \mapsto 1]\,(x_2) \\
\iff & \langle \text{definicion de } s\,[x_1 \mapsto 1]\,[x_2 \mapsto 1] \rangle \\
& 1 = 1 \\
& \langle \text{lo cual vale} \rangle
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
& [\![\exists x_1 \exists x_2 \neg (x_1 \doteq x_2)]\!]_{\mathcal{M}',s} = T \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \exists \rangle \\
& \text{para algun } a \in |\mathcal{M}'| \text{ resulta } [\![\exists x_2 \neg (x_1 \doteq x_2)]\!]_{\mathcal{M}',s[x_1 \mapsto a]} = T \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \exists \rangle \\
& \text{para algun } a \in |\mathcal{M}'|, \text{ para algun } b \in |\mathcal{M}'| \text{ resulta } [\![\neg (x_1 \doteq x_2)]\!]_{\mathcal{M}',s' := s[x_1 \mapsto a][x_2 \mapsto b]} = T \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \neg \rangle \\
& \text{para algun } a \in |\mathcal{M}'|, \text{ para algun } b \in |\mathcal{M}'| \text{ resulta } [\![x_1 \doteq x_2]\!]_{\mathcal{M}',s'} = F \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \doteq \rangle \\
& \text{para algun } a \in |\mathcal{M}'|, \text{ para algun } b \in |\mathcal{M}'| \text{ resulta } [\![x_1]\!]_{\mathcal{M}',s'} \neq [\![x_2]\!]_{\mathcal{M}',s'} \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para terminos} \rangle \\
& \text{para algun } a \in |\mathcal{M}'|, \text{ para algun } b \in |\mathcal{M}'| \text{ resulta } s'(x_1) \neq s'(x_2) \\
\iff & \langle \text{definicion de } s' \rangle \\
& \text{para algun } a \in |\mathcal{M}'|, \text{ para algun } b \in |\mathcal{M}'| \text{ resulta } a \neq b \\
& \langle \text{lo cual vale para } a = 1 \text{ y } b = 2 \rangle
\end{aligned}
$$

3. Falso. Sean $\mathcal{M}$ y ϕ tales que $\mathcal{M} \not\models \phi \iff [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = F$ luego $\mathcal{M} \not\models \neg\phi \iff [\![\neg\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = F \iff [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$ lo cual no vale.

Enunciado Se desea agregar los operadores $\exists!$ y $\forall!$ a la lista de operadores de CTL. El significado de $!\phi$ sera "ϕ vale ahora y luego no vale mas". Entonces:

- $\exists!\phi$: "ϕ vale ahora y hay un camino donde no vuelve a valer".
- $\forall!\phi$: "ϕ vale ahora y no existe un camino donde no vuelva a valer".

Se pide:

1. Dar definiciones de $\exists!$ y $\forall!$ basandose en los operadores ya definidos.
2. Elegir uno de ellos y derivar su semantica.

Solucion

1.
   - $\exists !\phi \equiv \phi \wedge \exists \bigcirc \exists \square \neg \phi$.
   - $\forall !\phi \equiv \phi \wedge \forall \bigcirc \forall \square \neg \phi$.
2. COMPLETAR.

Enunciado Considere la siguiente instancia del problema de Post:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 100 \\
t_1 &= 1 \\
s_2 &= 0 \\
t_2 &= 000
\end{aligned}
$$

1. Defina las formulas ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 asociadas a esta instancia.
2. Demuestre que el problema tiene solucion utilizando derivacion en logica de predicados.

Enunciado

1.
   - $\phi_1 \equiv P\left(f_{100}\left(e\right), f_1\left(e\right)\right) \wedge P\left(f_0\left(e\right), f_{000}\left(e\right)\right)$.
   - $\phi_2 \equiv \forall v \forall w \left\{P\left(v, w\right) \rightarrow \left[P\left(f_{100}\left(v\right), f_1\left(w\right)\right) \wedge P\left(f_0\left(v\right), f_{000}\left(w\right)\right)\right]\right\}$
   - $\phi_3 \equiv \exists z P\left(z, z\right)$

2.

1.	$\phi_1 \wedge \phi_2$	Hipotesis
2.	$\phi_1 \equiv P(f_{100}(e), f_1(e)) \wedge P(f_0(e), f_{000}(e))$	$e_{\wedge 1}(1)$
3.	$\phi_2 \equiv \forall v \forall w \{P(v, w) \to [P(f_{100}(v), f_1(w)) \wedge P(f_0(v), f_{000}(w))]\}$	$e_{\wedge 2}(1)$
4.	$P(f_0(e), f_{000}(e))$	$e_{\wedge 2}(2)$
5.	$\forall w \{P(f_0(e), w) \to [P(f_{100}(f_0(e)), f_1(w)) \wedge P(f_0(f_0(e)), f_{000}(w))]\}$	$e_{\forall}(3)$
6.	$\forall w \{P(f_0(e), w) \to [P(f_{1000}(e), f_1(w)) \wedge P(f_{00}(e), f_{000}(w))]\}$	Trivial (5)
7.	$P(f_0(e), f_{000}(e)) \to [P(f_{1000}(e), f_1(f_{000}(e))) \wedge P(f_{00}(e), f_{000}(f_{000}(e)))]$	$e_{\forall}(6)$
8.	$P(f_{1000}(e), f_1(f_{000}(e))) \wedge P(f_{00}(e), f_{000}(f_{000}(e)))$	$e_{\to}(7)$
9.	$P(f_{1000}(e), f_{1000}(e))$	$e_{\wedge 1}(8)$
10.	$\phi_3 \equiv \exists z P(z, z)$	$i_{\exists}(9)$
11.	$\phi_1 \wedge \phi_2 \to \phi_3$	$i_{\to}(1-10)$