

# Complementos de Matematica II

17 de noviembre de 2019

# Índice general

<b>I</b>	<b>Teoría del orden y Grupos</b>	<b>4</b>
<b>1.</b>	<b>Relaciones</b>	<b>5</b>
1.1.	Definiciones . . . . .	5
1.1.1.	Relación . . . . .	5
1.1.2.	Relación funcional . . . . .	5
1.1.3.	Relación inversa . . . . .	5
1.1.4.	Union, intersección y diferencia . . . . .	6
1.1.5.	Composición . . . . .	6
1.1.6.	Restricción . . . . .	6
1.2.	Clasificación de relaciones . . . . .	6
1.2.1.	Propiedades . . . . .	6
1.2.2.	Relación de equivalencia . . . . .	7
1.3.	Teoremas . . . . .	8
1.3.1.	Invertibilidad de relaciones funcionales . . . . .	8
1.3.2.	Composición de funciones . . . . .	8
1.3.3.	Herencia de propiedades . . . . .	8
1.3.4.	Biyectividad entre relaciones de equivalencia y parti- ciones . . . . .	9
1.3.5.	Teorema de factorización . . . . .	9
<b>2.</b>	<b>Conjuntos ordenados</b>	<b>10</b>
2.1.	Preordenes . . . . .	10
2.1.1.	Definiciones . . . . .	10
2.1.2.	Orden inverso . . . . .	11
2.1.3.	Teorema de extremos en preordenes . . . . .	11
2.2.	Relaciones de orden . . . . .	11
2.2.1.	Definición . . . . .	11
2.2.2.	Ordenes naturales . . . . .	12

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
2.2.3. Cadenas y anticadenas . . . . .	12
2.2.4. Morfismos entre posets . . . . .	12
2.2.5. Conjuntos bien ordenados . . . . .	12
2.3. Teoremas . . . . .	13
2.3.1. Existencia de elementos particulares en posets finitos .	13
2.3.2. Teorema de isomorfismos . . . . .	13
2.3.3. Propiedades de ordenes totales . . . . .	13
2.3.4. Isomorfismo de ordenes totales . . . . .	13
2.3.5. Principio de buena ordenación . . . . .	14
2.3.6. Principio del buen orden . . . . .	14
<b>3. Retículos</b>	<b>15</b>
3.1. Definiciones . . . . .	15
3.1.1. Definición en teoría del orden . . . . .	15
3.1.2. Definición algebraica . . . . .	15
3.1.3. Teoremas . . . . .	16
3.1.3.1. Equivalencia de las definiciones . . . . .	16
3.1.3.2. Propiedades derivadas . . . . .	17
<b>4. Grupos</b>	<b>18</b>
<b>II Teoría de categorías</b>	<b>19</b>
<b>5. Introducción</b>	<b>20</b>
5.1. Definiciones . . . . .	20
5.1.1. Categoría . . . . .	20
5.1.2. Localidad . . . . .	21
5.1.3. Clasificación de morfismos . . . . .	21
5.1.4. Clasificación de objetos . . . . .	21
5.1.5. Productos . . . . .	22
5.1.6. Ecualizador . . . . .	22
5.2. Ejemplos . . . . .	23
5.2.1. Poset . . . . .	23
5.2.2. Monoide . . . . .	23
5.2.3. Categoría opuesta . . . . .	24
5.2.4. Categoría producto . . . . .	25
5.2.5. Categoría de morfismos . . . . .	25

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
5.3. Teoremas . . . . .	27
5.3.1. Unicidad de la identidad . . . . .	27
5.3.2. Principio de dualidad . . . . .	27
5.3.3. Propiedades de isomorfismo . . . . .	27
5.3.4. Unicidad de elementos iniciales y terminales . . . . .	27
5.3.5. Unicidad de productos y coproductos . . . . .	28
5.3.6. Propiedad de ecualizador . . . . .	28
<b>6. Limites y conos</b>	<b>29</b>
<b>7. Functores</b>	<b>30</b>
<b>8. Transformaciones natruales</b>	<b>31</b>
<b>9. Monadas</b>	<b>32</b>

# Parte I

## Teoría del orden y Grupos

# Capítulo 1

## Relaciones

### 1.1. Definiciones

#### 1.1.1. Relación

Una relación  $R$  entre un conjunto  $A$  y un conjunto  $B$  es un subconjunto del producto cartesiano  $A \times B$ . Para notar que un elemento  $a \in A$  se relaciona con otro elemento  $b \in B$  escribimos  $aRb$  o  $(a, b) \in R$ .

#### 1.1.2. Relación funcional

Diremos que una relación  $R \subseteq A \times B$  es una relación funcional si:

$$aRb \wedge aRc \Rightarrow b = c$$

Llamaremos dominio de la relación al conjunto  $\text{dom}(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B : aRb\}$ .

Diremos que el conjunto  $\text{im}(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A : aRb\}$  es la imagen de  $R$ .

Cuando  $\text{dom}(R) = A$  diremos que  $R$  es una función.

#### 1.1.3. Relación inversa

Si  $R$  es una relación entre  $A$  y  $B$  se define la relación inversa  $R^{-1}$  entre  $B$  y  $A$  como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : aRb\}$$

### 1.1.4. Union, intersección y diferencia

Sean  $R$  y  $S$  relaciones entre  $A$  y  $B$  llamamos union de  $R$  y  $S$  a la relación  $R \cup S$ .

Analogamente podemos considerar las relaciones  $R \cap S$  y  $R - S$ .

### 1.1.5. Composición

Dada una relación  $R$  entre  $A$  y  $B$ , y otra relacion  $S$  entre  $B$  y  $C$ ; definimos la relación:

$$S \circ R = \{(a, b) \in A \times C \mid \exists b \in B : aRb \wedge bSc\}$$

### 1.1.6. Restricción

Sean  $R$  una relación de  $A$  en  $B$ ,  $A' \subseteq A$  y  $B' \subseteq B$ , llamaremos restricción de  $R$  a  $A' \times B'$  a la relación:

$$R|_{A' \times B'} = \{(a, b) \in A' \times B' : aRb\}$$

Si  $f : A \rightarrow B$  es una función entonces  $f|_{A'} = f|_{A' \times B}$ .

## 1.2. Clasificación de relaciones

### 1.2.1. Propiedades

Sea  $R$  una relación de  $A$  en  $A$ , diremos que  $R$  es:

**Reflexiva** si  $\forall a \in A : aRa$ .

**Simétrica** si  $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$ .

**Antisimétrica** si  $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$ .

**Transitiva** si  $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ .

**Total** si  $\forall a, b \in A : aRb \vee bRa$ .

### 1.2.2. Relación de equivalencia

Si  $R$  es una relación en  $A$  reflexiva, simétrica y transitiva diremos que  $R$  es una relación de equivalencia.

- Llamaremos clase de equivalencia de  $a \in A$  y lo notaremos  $\bar{a}$  al conjunto:

$$\bar{a} = \{b \in A : aRb\}$$

- A la siguiente partición de  $A$  la llamaremos conjunto cociente:

$$A/R = \{\bar{a} : a \in A\}$$

- La función  $\pi : A \rightarrow A/R$  definida por  $\pi(a) = \bar{a}$  es llamada proyección al cociente.
- Para cualquier función  $f : A \rightarrow B$  llamaremos nucleo de  $f$  a la siguiente relación de equivalencia:

$$\ker(f) = \{(a, a') : f(a) = f(a')\}$$

**Observación** Cuando definimos una función sobre el conjunto cociente de una relación de equivalencia, debemos prestar atención a la forma en la que lo hacemos. Consideremos a modo de ejemplo la siguiente función sobre el cociente de la relación de equivalencia modulo 5:

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ \bar{x} & \rightarrow & f(\bar{x}) = x \end{array}$$

Esta función no esta bien definida, o mas precisamente,  $f$  no es una función. En efecto  $f(\bar{0}) = 0$  y  $f(\bar{5}) = 5$  pero  $\bar{0} = \bar{5}$  por lo cual existe un elemento del dominio con dos imagenes diferentes.

Debemos entonces, cada vez que definimos una función sobre clases de equivalencia asegurarnos de que si  $x \sim y$  entonces  $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$ , de ser asi diremos que  $f$  tiene una buena definición.



## 1.3. Teoremas

### 1.3.1. Invertibilidad de relaciones funcionales

**Enunciado** Sea  $f$  una relación funcional de  $A$  en  $B$ , entonces  $f^{-1}$  es relación funcional si y solo si  $f$  es inyectiva.

**Demostración**

- $\Rightarrow$ : Sean  $a, a', b$  tales que  $f(a) = b$  y  $f(a') = b$  luego  $f^{-1}(b) = a$  y  $f^{-1}(b) = a'$  y como  $f^{-1}$  es funcional resulta  $a = a'$ .
- $\Leftarrow$ : Sean  $a, a', b$  tales que  $f^{-1}(b) = a$  y  $f^{-1}(b) = a'$  luego  $f(a) = b$  y  $f(a') = b$  y como  $f$  es inyectiva resulta  $a = a'$ .

### 1.3.2. Composición de funciones

**Enunciado** Si  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$  son funciones, entonces  $g \circ f$  es una función.

**Demostración** Dado  $a \in A$  sabemos que existe un único  $b \in B$  tal que  $f(a) = b$  pues  $f$  es una función.

Por la misma razón, para dicho elemento  $b$  existe un único elemento  $c \in C$  tal que  $g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a) = c$ .

Hemos visto que dado  $a \in A$  existe un único elemento  $c \in C$  tal que  $g \circ f(a) = c$ , es decir  $g \circ f$  es una función.

### 1.3.3. Herencia de propiedades

**Enunciado** Sean  $R$  una relación de  $A$  en  $B$ ,  $A' \subseteq A$  y  $B' \subseteq B$ , entonces si  $R$  es reflexiva también lo será  $R|_{A' \times B'}$ . También ocurre lo mismo si  $R$  es simétrica, antisimétrica o transitiva.

**Demostración** EJERCICIO.

### 1.3.4. Biyectividad entre relaciones de equivalencia y particiones

**Enunciado** Si  $R$  es una relación de equivalencia en  $A$  entonces  $A/R$  es una partición de  $A$  y además, dada una partición  $P \subseteq \mathcal{P}(A)$  la relación definida por  $a \sim b \iff \exists X \in P : a, b \in X$  es una relación de equivalencia.

**Demostración** EJERCICIO.

### 1.3.5. Teorema de factorización

**Enunciado** Si  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $A$  y  $f : A \rightarrow B$  es una función tal que  $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$ , entonces existe una única función  $\tilde{f} : A/\sim \rightarrow B$  tal que  $f = \tilde{f} \circ \pi$ .

**Demostración** EJERCICIO. Definir  $f(\bar{a}) = f(a)$  y probar que esta definición no depende del representante elegido.

# Capítulo 2

## Conjuntos ordenados

### 2.1. Preordenes

#### 2.1.1. Definiciones

Una relación  $\preceq$  en  $A$  es un preorden si es reflexiva y transitiva.

Diremos que un elemento  $a$  es

**maximal** si  $\forall x : a \preceq x \Rightarrow x \preceq a$ .

**minimal** si  $\forall x : x \preceq a \Rightarrow a \preceq x$ .

**máximo** si  $\forall x : x \preceq a$ .

**mínimo** si  $\forall x : a \preceq x$ .

**cota superior** de  $B \subseteq A$  si  $\forall b \in B : b \preceq a$ .

**cota inferior** de  $B \subseteq A$  si  $\forall b \in B : a \preceq b$ .

**supremo** de  $B \subseteq A$  si  $a \in \min \{c \in A : c \text{ es cota superior de } B\}$ .

**ínfimo** de  $B \subseteq A$  si  $a \in \max \{c \in A : c \text{ es cota superior de } B\}$ .

### 2.1.2. Orden inverso

Si  $(A, \preceq)$  es un conjunto preordenado, el orden inverso  $\succeq$  se define como  $a \succeq b \iff b \preceq a$ , resultando este un preorden donde todas las definiciones se dualizan:

- $a$  es elemento maximal en  $(A, \preceq) \iff a$  es elemento minimal en  $(A, \succeq)$ .
- $a$  es cota superior en  $(A, \preceq) \iff a$  es cota inferior en  $(A, \succeq)$ .
- $a$  es supremo en  $(A, \preceq) \iff a$  es ínfimo en  $(A, \succeq)$ .

### 2.1.3. Teorema de extremos en preordenes

**Enunciado** Sea  $\preceq$  un preorden sobre un conjunto  $A$ , luego las siguientes proposiciones son validas:

- Si  $M \in A$  es un elemento máximo, entonces también es maximal.
- Si  $m \in A$  es un elemento mínimo, entonces también es minimal.

**Demostración** EJERCICIO.

## 2.2. Relaciones de orden

### 2.2.1. Definición

Una relación  $\leq$  en un conjunto  $A$  es un orden parcial (o simplemente orden) si es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Se dice que  $(A, \leq)$  es un conjunto parcialmente ordenado (poset).

**Observación** La noción de orden parcial es mucho más intuitiva que la noción de preorden, de hecho es un caso particular que no admite ciclos.

Vale la pena notar tambien que en un poset si existen máximos o mínimos son únicos.

### 2.2.2. Ordenes naturales

Dados dos posets  $(A, \leq_A)$  y  $(B, \leq_B)$  hay dos formas de definir un orden parcial en el producto cartesiano  $A \times B$ :

**Orden producto**  $(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq_A a' \wedge b \leq_B b'$

**Orden lexicográfico**  $(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq_A a' \vee (a = a' \wedge b \leq b')$

### 2.2.3. Cadenas y anticadenas

Sea  $(A, \leq)$  un poset y  $X \subseteq A$  un subconjunto, diremos que:

- $(X, \leq)$  es una cadena si el orden es total.
- $(X, \leq)$  es una anticadena si:  $\forall x, y \in X : x \leq y \Rightarrow x = y$

### 2.2.4. Morfismos entre posets

Los morfismos de posets son las funciones que «respetan» la estructura, es decir, el orden.

Sea  $f : (A, \leq) \rightarrow (B, \leq)$  diremos que  $f$  es un:

**morfismo** entre  $A$  y  $B$  si  $f$  es creciente, es decir:  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ .

**isomorfismo** entre  $A$  y  $B$  si  $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ .

**antiisomorfismo** entre  $A$  y  $B$  si  $x \leq y \iff f(y) \leq f(x)$ .

**Observación** La existencia de una función biyectiva y monótona no implica que los ordenes sean isomorfos, como demuestra el siguiente ejemplo:

$$id : (\mathbb{N}, |) \rightarrow (\mathbb{N}, \leq)$$

Dicha funcion es biyectiva y es morfismo de orden, sin embargo  $id^{-1}$  no lo es pues  $2 \leq 3$  pero  $2 \nmid 3$ .

### 2.2.5. Conjuntos bien ordenados

Un orden total  $(A, \leq)$  se dice conjunto bien ordenado si:

$$\forall B \subseteq A / B \neq \emptyset : B \text{ tiene elemento mínimo}$$

## 2.3. Teoremas

### 2.3.1. Existencia de elementos particulares en posets finitos

**Enunciado** En un poset finito siempre existen elementos maximales/minimales.

**Demostración** EJERCICIO.

### 2.3.2. Teorema de isomorfismos

**Enunciado**  $f$  es un isomorfismo (respectivamente antiisomorfismo) de orden si y solo si  $f$  y  $f^{-1}$  son crecientes (respectivamente decrecientes).

**Demostración** EJERCICIO.

### 2.3.3. Propiedades de ordenes totales

**Enunciado** Sea  $(A, \leq)$  un conjunto totalmente ordenado y  $a \in A$ , entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1.  $a$  es maximal (minimal).
2.  $a$  es cota superior (inferior).
3.  $a$  es supremo (ínfimo).
4.  $a$  es máximo (mínimo).

**Demostración** EJERCICIO.

### 2.3.4. Isomorfismo de ordenes totales

**Enunciado** Si  $(A, \leq_A)$  es un conjunto totalmente ordenado,  $(B, \leq_B)$  es un poset y  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva y creciente (respectivamente decreciente), entonces  $f$  es un isomorfismo (respectivamente antiisomorfismo) de orden. En particular  $(B, \leq_B)$  es totalmente ordenado.

**Demostración** COMPLETAR.

### 2.3.5. Principio de buena ordenación

**Enunciado** Todo conjunto admite un buen orden.

**Demostración** EJERCICIO.

### 2.3.6. Principio del buen orden

**Enunciado** Todo subconjunto de  $\mathbb{N}$  es bien ordenado.

**Demostración** EJERCICIO.

# Capítulo 3

## Retículos

### 3.1. Definiciones

#### 3.1.1. Definición en teoría del orden

Un poset  $(L, \leq)$  se dice un retículo si:

$$\forall a, b \in L \exists x, y \in L / x = \sup \{a, b\} \wedge y = \inf \{a, b\}$$

#### Observaciones

- No necesariamente existen  $\max \{a, b\}$  y  $\min \{a, b\}$ .
- Tomar supremo/ínfimo define dos operaciones en  $L$ :  $a \vee b := \sup \{a, b\}$  y  $a \wedge b := \inf \{a, b\}$ .

#### 3.1.2. Definición algebraica

Un retículo  $(L, \vee, \wedge)$  consiste de un conjunto no vacío  $L$  junto con dos operaciones  $\wedge, \vee$  que satisfacen:

$$\textbf{Asociatividad} \quad \forall x, y, z \in L \begin{cases} x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \end{cases}$$

$$\textbf{Conmutatividad} \quad \forall x, y \in L \begin{cases} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{cases}$$



$$\text{Absorción } \forall x, y \in L \begin{cases} x \vee (x \wedge y) = x \\ x \wedge (x \vee y) = x \end{cases}$$

### 3.1.3. Teoremas

#### 3.1.3.1. Equivalencia de las definiciones

**Enunciado** Si  $(L, \vee, \wedge)$  es un retículo como en la definición algebraica, entonces

$$x \leq y \iff x \vee y = y$$

definie un orden parcial  $(L, \leq)$  tal que  $x \vee y = \sup \{x, y\}$  y  $x \wedge y = \inf \{x, y\}$ .

#### Demostración

■  $\Rightarrow$ :

- Veamos que  $\leq$  así definido es un orden parcial.

- Reflexividad: Por absorción  $x \wedge (x \vee x) = x$  por lo que  $x \vee x = x \vee (x \wedge (x \vee x))$  y nuevamente por absorción:

$$\boxed{x \vee x} = x \vee (x \wedge (x \vee x)) = \boxed{x} \iff x \leq x$$

- Antisimetría: Supongamos  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , luego  $x \leq y \iff x \vee y = y$  e  $y \leq x \iff y \vee x = x$  y por conmutatividad  $x = y$ .
- Transitividad: Supongamos que  $x \leq y$  e  $y \leq z$ , luego  $x \leq y \iff x \vee y = y$  e  $y \leq z \iff y \vee z = z$ . Calculemos  $x \vee z$ :

$$x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$$

Como  $x \vee z = z$  entonces  $x \leq z$ .

- Finalmente veamos que  $x \vee y = \sup \{x, y\}$  y  $x \wedge y = \inf \{x, y\}$ .
  - Por definición  $x \leq x \vee y \iff x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$  lo cual vale por idempotencia, luego sabemos que  $x \vee y$  es cota superior de  $\{x, y\}$ .
  - Sea  $z$  otra cota superior del mismo conjunto, entonces  $x \leq z \iff x \vee z = z$  e  $y \leq z \iff y \vee z = z$ , luego

$$\boxed{(x \vee y) \vee z} = x \vee (y \vee z) = x \vee z = \boxed{z} \Rightarrow x \vee y \leq z$$

por lo que  $x \vee y$  es la mínima cota superior, es decir  $x \vee y = \sup \{x, y\}$ .

- Analogamente para  $x \wedge y = \inf \{x, y\}$ .
- $\boxed{\Leftarrow}$ : Veamos que si definimos  $x \vee y = \sup \{x, y\}$  y  $x \wedge y = \inf \{x, y\}$ , entonces se verifica la definición algebraica de  $(L, \wedge, \vee)$ .
  - Asociatividad: COMPLETAR.
  - Conmutatividad:  $x \vee y = \sup \{x, y\} = \sup \{y, x\} = y \vee x$ . Analogamente para  $x \wedge y$ .
  - Absorción: COMPLETAR.

### 3.1.3.2. Propiedades derivadas

**Enunciado** Sea  $(L, \wedge, \vee)$  un retículo y  $x, y, z, w \in L$ , entonces:

1.  $x \leq x \vee y$
2.  $x \wedge y \leq x$
3.  $x \leq y \iff x \vee y = y \iff x \wedge y = x$
4. IDEMPOTENCIA:  $x \vee x = x = x \wedge x$
5. COMPATIBILIDAD:  $x \leq z \wedge y \leq z \Rightarrow \begin{cases} x \vee y \leq z \vee w \\ x \wedge y \leq z \wedge w \end{cases}$

### Demostración

1. COMPLETAR.
2. COMPLETAR.
3. COMPLETAR.
4. Vease reflexividad en equivalencia de las definiciones.
5. COMPLETAR.

# Capítulo 4

## Grupos

# Parte II

## Teoría de categorías

# Capítulo 5

## Introducción

### 5.1. Definiciones

#### 5.1.1. Categoría

Una categoría  $\mathcal{C}$  es:

- Una clase de objetos:  $ob\mathcal{C}$ .
- Una clase de morfismos entre objetos:  $mor\mathcal{C}$ . Llamaremos  $Hom(A, B)$  a todos los morfismos entre los objetos  $A$  y  $B$ .
- Para cada  $A, B, C \in ob\mathcal{C}$  un operador binario

$$\circ : Hom(B, C) \times Hom(A, B) \rightarrow Hom(A, C)$$

llamado composición tal que:

- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  (siempre que tengan sentido).
- Dado un objeto  $A$  existe un morfismo  $id_A \in Hom(A, A)$  para el cual si  $B$  es otro objeto se cumplen:
  - $\forall f \in Hom(A, B) : f \circ id_A = f$ .
  - $\forall f \in Hom(B, A) : id_A \circ f = f$ .

### 5.1.2. Localidad

Decimos que una categoría  $\mathcal{C}$  es una categoría:

**Pequeña** si  $ob\mathcal{C}$  y  $mor\mathcal{C}$  son conjuntos.

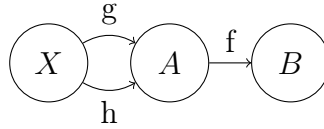
**Localmente pequeña** si  $Hom(A, B)$  es un conjunto para cualquier  $A, B \in ob\mathcal{C}$ .

**Grande** si no es una categoría pequeña.

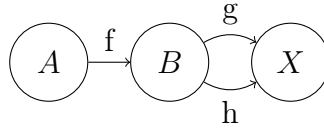
### 5.1.3. Clasificación de morfismos

Decimos que  $f \in Hom(A, B)$  es un

**monomorfismo** si  $\forall X \in ob\mathcal{C} \forall g, h \in Hom(X, A) : f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ .



**epimorfismo** si  $\forall X \in ob\mathcal{C} \forall g, h \in Hom(B, X) : g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ .



**isomorfismo** si  $\exists f^{-1} \in Hom(B, A) : f \circ f^{-1} = id_B \wedge f^{-1} \circ f = id_A$ .

### 5.1.4. Clasificación de objetos

Un objeto  $0 \in ob\mathcal{C}$  se dice *inicial* si  $\forall A \in ob\mathcal{C} \exists ! f : 0 \rightarrow A$ .

Un objeto  $1 \in ob\mathcal{C}$  se dice *terminal* si  $\forall A \in ob\mathcal{C} \exists ! f : A \rightarrow 1$ .

### 5.1.5. Productos

El *producto* de dos objetos  $A$  y  $B$  es una terna  $(A \times B, \pi_A : A \times B \rightarrow A, \pi_B : A \times B \rightarrow B)$  que cumple la siguiente propiedad universal:

$$\forall C \in \text{ob } \mathcal{C} \forall f : C \rightarrow A, g : C \rightarrow B \exists ! \langle f, g \rangle : C \rightarrow A \times B / \pi_A \circ \langle f, g \rangle = f \wedge \pi_B \circ \langle f, g \rangle = g$$

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \swarrow f & \downarrow \langle f, g \rangle & \searrow g & \\ A & \xleftarrow{\pi_A} & A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B \end{array}$$

El *coproducto* de dos objetos  $A$  y  $B$  es una terna  $(A + B, \iota_A : A \rightarrow A + B, \iota_B : B \rightarrow A + B)$  que cumple la siguiente propiedad universal:

$$\forall C \in \text{ob } \mathcal{C} \forall f : A \rightarrow C, g : B \rightarrow C \exists ! [f, g] : A + B \rightarrow C / [f, g] \circ \iota_A = f \wedge [f, g] \circ \iota_B = g$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\iota_A} & A + B & \xleftarrow{\iota_B} & B \\ & \searrow f & \downarrow [f, g] & \swarrow g & \\ & & C & & \end{array}$$

### 5.1.6. Ecualizador

El *ecualizador* de dos morfismos  $f, g : A \rightarrow B$  es un morfismo  $e : X \rightarrow A$  que verifica  $f \circ e = g \circ e$  y tal que para todo morfismo  $e' : X' \rightarrow A$  para el cual  $f \circ e' = g \circ e'$ , existe un único  $k : X' \rightarrow X$  cumpliendo  $e \circ k = e'$ .

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{e} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\ \uparrow \exists ! k & \nearrow e' & & & \\ X' & & & & \end{array}$$

## 5.2. Ejemplos

### 5.2.1. Poset

Dado un poset  $(P, \leq)$  definimos la categoría  $\mathcal{P}$  donde:

- $ob \mathcal{P} = P$ .
- $mor \mathcal{P} = \leq$ .
- $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$ .

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición:* La composición esta bien definida pues si  $(b, c)$  y  $(a, b)$  son morfismos, por transitividad también lo será su composición  $(a, c)$ .
- *Morfismo identidad:* Para cada objeto  $a$  por reflexividad  $(a, a) \in \leq$  por lo que  $(a, a) \in mor \mathcal{P}$ ; a este morfismo lo llamaremos  $id_a$  resultando
  - $(a, b) \circ id_a = (a, b) \circ (a, a) = (a, b)$ .
  - $id_a \circ (b, a) = (a, a) \circ (b, a) = (b, a)$ .
- *Asociatividad:* Sean  $(a, b)$ ,  $(b, c)$  y  $(c, d)$  morfismos, por transitividad también son morfismos  $\boxed{(a, c)}$ ,  $\boxed{(b, d)}$  y  $(a, d)$  luego
  - $((c, d) \circ (b, c)) \circ (a, b) = \boxed{(b, d)} \circ (a, b) = (a, d)$ .
  - $(c, d) \circ ((b, c) \circ (a, b)) = (c, d) \circ \boxed{(a, c)} = (a, d)$ .

### 5.2.2. Monoide

Dado un monoide  $(M, +)$  definimos la categoría  $\mathcal{M}$  donde:

- $ob \mathcal{M} = \{*\}$ .
- $mor \mathcal{M} = M$ .
- $x \circ y = x + y$ .

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:



- *Buena definición:* Por clausura de monoides, si  $x$  e  $y$  son morfismos, también lo será su composición  $x + y$ .
- *Morfismo identidad:* Para el único objeto  $*$  existe el morfismo  $0 = id_*$  de manera tal que
  - $x \circ id_* = x + 0 = x$ .
  - $id_* \circ y = 0 + y = y$ .
- *Asociatividad:* Para tres morfismos  $x, y, z$  (elementos de  $M$ ) por clausura de monoide también son morfismos  $\boxed{x + y}$  y  $\boxed{y + z}$ , luego

$$(x \circ y) \circ z = \left( \boxed{x + y} \right) + z = x + \left( \boxed{y + z} \right) = x \circ (y \circ z)$$

### 5.2.3. Categoría opuesta

Dada una categoría  $\mathcal{C}$  definimos la categoría opuesta  $\mathcal{C}^{op}$  donde:

- $ob \mathcal{C}^{op} = ob \mathcal{C}$ .
- $mor \mathcal{C}^{op} = \{f_{op} : X \rightarrow Y / f : Y \rightarrow X \in mor \mathcal{C}\}$ .
- $g_{op} \circ_{op} f_{op} = (f \circ g)_{op}$

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición:* Dadas  $f_{op} : A \rightarrow B$  y  $g_{op} : B \rightarrow C$  por definición existen en  $\mathcal{C}$  los morfismos  $f : B \rightarrow A$  y  $g : C \rightarrow B$  luego es valida la composición  $f \circ g$  y por definición  $(f \circ g)_{op}$  es un morfismo de  $\mathcal{C}^{op}$ .
- *Morfismo identidad:* Para cada objeto  $X$  sabemos que existe  $id_X$ , luego  $id_{X_{op}}$  es un morfismo de la categoría opuesta para el cual
  - $f_{op} \circ_{op} id_{X_{op}} = (id_X \circ f)_{op} = f_{op}$ .
  - $id_{X_{op}} \circ_{op} h_{op} = (h \circ id_X)_{op} = h_{op}$ .
- *Asociatividad:* Sean  $f_{op} : A \rightarrow B$ ,  $g_{op} : B \rightarrow C$  y  $h_{op} : C \rightarrow D$ , luego
  - $(h_{op} \circ_{op} g_{op}) \circ_{op} f_{op} = (g \circ h)_{op} \circ_{op} f_{op} = f \circ (g \circ h)$ .
  - $h_{op} \circ_{op} (g_{op} \circ_{op} f_{op}) = h_{op} \circ_{op} (f \circ g)_{op} = (f \circ g) \circ h$ .

### 5.2.4. Categoría producto

Dadas dos categorías  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  definimos la categoría producto  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  donde:

- $ob \mathcal{C} \times \mathcal{D} = ob \mathcal{C} \times ob \mathcal{D}$ .
- $Hom((C, D), (C', D')) = Hom(C, C') \times Hom(D, D')$ .
- $(p, q) \circ_{\times} (f, g) = (p \circ f, q \circ g)$ .

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Morfismo identidad:* Para cada objeto  $(C, D) \in ob \mathcal{C} \times \mathcal{D}$  existen los objetos  $C \in ob \mathcal{C}$  y  $D \in ob \mathcal{D}$  y también los morfismos  $id_C$  e  $id_D$ , por lo que también existe el morfismo  $(id_C, id_D)$  para el cual
  - $(f, g) \circ_{\times} (id_C, id_D) = (f \circ id_C, g \circ id_D) = (f, g)$ .
  - $(id_C, id_D) \circ_{\times} (f, g) = (id_C \circ f, id_D \circ g) = (f, g)$ .
- *Asociatividad:* Sean  $(f, g) : (C_1, C_2) \rightarrow (D_1, D_2)$ ,  $(p, q) : (C_2, C_3) \rightarrow (D_2, D_3)$  y  $(r, s) : (C_3, C_4) \rightarrow (D_3, D_4)$ , luego
  - $((r, s) \circ_{\times} (p, q)) \circ_{\times} (f, g) = (r \circ p, s \circ q) \circ_{\times} (f, g) = (r \circ p \circ f, s \circ q \circ g)$ .
  - $(r, s) \circ_{\times} ((p, q) \circ_{\times} (f, g)) = (r, s) \circ_{\times} (p \circ f, q \circ g) = (r \circ p \circ f, s \circ q \circ g)$ .

### 5.2.5. Categoría de morfismos

Dada una categoría  $\mathcal{C}$  definimos la categoría de sus morfismos  $\mathcal{C}^{\rightarrow}$  donde:

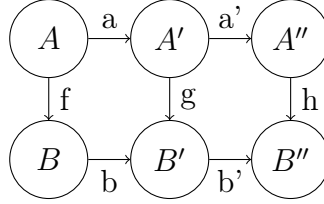
- $ob \mathcal{C}^{\rightarrow} = mor \mathcal{C}$ .
- $Hom(f : A \rightarrow B, g : A' \rightarrow B') = \{(a, b) \in Hom(A, A') \times Hom(B, B') : g \circ a = b \circ f\}$ .
- $(a', b') \circ (a, b) = (a' \circ a, b' \circ b)$ .

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición:* Sean
  - $(a : A \rightarrow A', b : B \rightarrow B')$  morfismo entre  $f : A \rightarrow B$  y  $g : A' \rightarrow B'$
  - $(a' : A' \rightarrow A'', b' : B' \rightarrow B'')$  morfismo entre  $g$  y  $h : A'' \rightarrow B''$

sabemos por definición que

- $g \circ a = b \circ f$
- $h \circ a' = b' \circ g$



luego para la composición  $(a' \circ a, b' \circ b)$  resulta

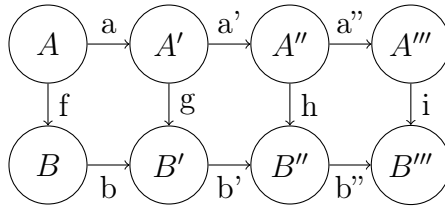
$$h \circ (a' \circ a) = (h \circ a') \circ a = (b' \circ g) \circ a = b' \circ (g \circ a) = b' \circ (b \circ f) = (b' \circ b) \circ f$$

es decir que también es un morfismo de la categoría.

- *Morfismo identidad:* Para cada objeto  $f : A \rightarrow B$  definimos  $id_f = (id_A, id_B)$ . Observemos que  $id_f$  es un morfismo de  $C^\rightarrow$  pues  $id_B \circ f = f = f \circ id_A$ , luego

- $(a, b) \circ id_f = (a \circ id_A, b \circ id_B) = (a, b)$
- $id_f \circ (a, b) = (id_A \circ a, id_B \circ b) = (a, b)$

- *Asociatividad:* Sean morfismos y objetos como en el siguiente diagrama



luego

$$\begin{aligned} ((a'', b'') \circ (a', b')) \circ (a, b) &= (a'' \circ a', b'' \circ b') \circ (a, b) = (a'' \circ a' \circ a, b'' \circ b' \circ b) = \\ &= (a'', b') \circ (a' \circ a, b' \circ b) = (a'', b') \circ ((a', b') \circ (a, b)) \end{aligned}$$

## 5.3. Teoremas

### 5.3.1. Unicidad de la identidad

**Enunciado** El morfismo identidad  $id_X : X \rightarrow X$  es único.

**Demostración** Sean  $id_X$  y  $id'_X$  dos morfismos identidad en  $X$ . Sabemos que para cualquier morfismo  $f : Y \rightarrow X$  resulta  $id_X \circ f = f$ , en particular esto también es cierto para  $id'_X$  por lo que  $id_X \circ id'_X = id'_X$ . Análogamente  $id_X \circ id'_X = id_X$ . En definitiva tenemos  $id'_X = id_X \circ id'_X = id_X$ .

### 5.3.2. Principio de dualidad

**Enunciado** Si un teorema vale en una categoría  $\mathcal{C}$ , entonces el coteorema (invirtiendo el sentido de los morfismos) vale en la categoría  $\mathcal{C}^{op}$ .

#### Observaciones

- Las definiciones de monomorfismo y epimorfismos son definiciones duales, es decir que  $f$  es monomorfismo en la categoría  $\mathcal{C}$  si y solo si  $f$  es epimorfismo en la categoría  $\mathcal{C}^{op}$ .
- Las definiciones de objeto inicial y objeto terminal son definiciones duales.
- Los productos en una categoría son coproductos en la categoría opuesta.

### 5.3.3. Propiedades de isomorfismo

**Enunciado** Si  $f$  es un isomorfismo, también es monomorfismo y epimorfismo.

**Demostración** COMPLETAR.

### 5.3.4. Unicidad de elementos iniciales y terminales

**Enunciado** Los objetos iniciales y terminales son únicos salvo isomorfismo.

**Demostración** COMPLETAR.

### 5.3.5. Unicidad de productos y coproductos

**Enunciado** Los productos y coproductos son únicos salvo isomorfismo.

**Demostración** COMPLETAR.

### 5.3.6. Propiedad de ecualizador

**Enunciado** Si  $e$  es un ecualizador, entonces es monomorfismo.

**Demostración** COMPLETAR.

## Capítulo 6

### Limites y conos

# Capítulo 7

## Functores

## Capítulo 8

### Transformaciones naturales



## Capítulo 9

### Monadas