Logica

18 de febrero de 2019

Índice general

Parte I

Logicas clasicas

Capítulo 1

Logica proposicional

1.1. Sintaxis

1.1.1. Formulas sintacticamente correctas

Sea $\Sigma = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \bot, (,), p_0, p_1, \ldots\}$ llamaremos:

- $AT = \{p_0, p_1, \ldots\}$ el conjunto de variables proposicionales o proposiciones atomicas.
- $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \bot, \neg\}$ el conjunto de conectivos.
- $B = AT \cup \{\bot\}$ el conjunto de base inductiva.

Definimos $PROP$ (el conjunto de proposiciones) como el minimo conjunto tal que:

1. $B \subset PROP$.
2. Si $\phi, \psi \in PROP$ entonces $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi) \in PROP$.
3. Si $\phi \in PROP$ entonces $(\neg\phi) \in PROP$.

Esta definicion es equivalente a la gramatica libre de contexto $G = (N, T, P, S)$ donde $T = \{P,', \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \perp, (,)\}$, $N = \{S, A\}$ y P son las siguientes reglas de produccion:

- $S \rightsquigarrow PA$.
- $A \rightsquigarrow \lambda$.
- $A \rightsquigarrow A'$.
- $S \rightsquigarrow \perp$.
- $S \rightsquigarrow (S \vee S)$.
- $S \rightsquigarrow (S \wedge S)$.
- $S \rightsquigarrow (S \rightarrow S)$.
- $S \rightsquigarrow (\neg S)$.

1.1.2. Subformulas

Definimos la funcion $subf : PROP \rightarrow \mathcal{P}(PROP)$ que devuelve todas las subformulas de un elemento de $PROP$ de la siguiente forma:

- $subf(\perp) = \{\perp\}$.
- $subf(p_i) = \{p_i\}$.
- $subf(\neg\phi) = \{\neg\phi\} \cup subf(\phi)$.
- $subf(\phi_1 \Box \phi_2) = \{\phi_1 \Box \phi_2\} \cup subf(\phi_1) \cup subf(\phi_2)$, donde $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

1.1.3. Conectivos

Definimos la funcion $con : PROP \rightarrow \mathbb{N}$ que devuelve la cantidad de conectivos de un elemento de $PROP$ de la siguiente forma:

- $con(\perp) = 1$.
- $con(p_i) = 0$.
- $con(\neg\phi) = 1 + con(\phi)$.
- $con(\phi_1 \Box \phi_2) = 1 + con(\phi_1) + con(\phi_2)$, donde $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

1.1.4. Substitucion

Definimos $\phi\left[\psi/p_i\right]$ por induccion en ϕ:

- $\perp\left[\psi/p_i\right] = \perp$.
- $p_j\left[\psi/p_i\right] = \begin{cases} \psi & i = j \\ p_j & i \neq j \end{cases}$
- $(\phi_1 \Box \phi_2)\left[\psi/p_i\right] = \left(\phi_1\left[\psi/p_i\right] \Box \phi_2\left[\psi/p_i\right]\right)$.
- $(\neg\phi)\left[\psi/p_i\right] = \neg\left(\phi\left[\psi/p_i\right]\right)$.

1.1.5. Secuencia de formacion

Una secuencia de formacion $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ es una secuencia de formacion para ϕ_n si y solo si, $\forall i \leq n$ resulta que:

- $\phi_i \in B$ o bien,
- $\phi_i \equiv (\phi_k \Box \phi_j)$ para algunos $k, j < i$ (con $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$) o bien,
- $\phi_i \equiv (\neg\phi_j)$ para algun $j < i$.

1.1.6. Principio de induccion

Sea P una propiedad definida sobre $PROP$. Cuando:

- $P(\phi)$ es cierta para toda $\phi \in B$ y,
- si $P(\phi), P(\psi)$ son ciertas entonces $P(\phi \Box \psi)$ es cierta y,
- si $P(\phi)$ es cierta entonces $P(\neg\phi)$ es cierta,

resulta que P es valida para todo elemento de $PROP$.

1.1.7. Ejemplos

1.1.7.1. Secuencias de formacion

- $(\neg(p_1 \rightarrow p_2))$: $p_1, p_2, (p_1 \rightarrow p_2), (\neg(p_1 \rightarrow p_2))$.
- $(p_1 \vee ((\neg p_2) \rightarrow p_3))$: $p_1, p_2, p_3, (\neg p_2), ((\neg p_2) \rightarrow p_3), (p_1 \vee ((\neg p_2) \rightarrow p_3))$.
- $(((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3) \rightarrow p_4)$: $p_1, p_2, p_3, p_4, (p_1 \rightarrow p_2), ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3), (((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3) \rightarrow p_4$

1.1.7.2. Substituciones

- $$\begin{aligned}&(p_1 \wedge p_0) \to (p_0 \to p_3)\,[\neg p_0 \to p_3/p_0] = \\ &= (p_1 \wedge p_0)\,[\neg p_0 \to p_3/p_0] \to (p_0 \to p_3)\,[\neg p_0 \to p_3/p_0] = \\ &= (p_1\,[\neg p_0 \to p_3/p_0] \wedge p_0\,[\neg p_0 \to p_3/p_0]) \to (p_0\,[\neg p_0 \to p_3/p_0] \to p_3\,[\neg p_0 \to p_3/p_0 \\ &= (p_1 \wedge (\neg p_0 \to p_3)) \to ((\neg p_0 \to p_3) \to p_3)\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}&(p_3 \leftrightarrow p_0) \vee (p_2 \to \neg p_0)\,[\neg p_0 \to p_3/p_0] = \\ &= (p_3 \leftrightarrow p_0)\,[\neg p_0 \to p_3/p_0] \vee (p_2 \to \neg p_0)\,[\neg p_0 \to p_3/p_0] = \\ &= (p_3 \leftrightarrow (\neg p_0 \to p_3)) \vee (p_2 \to \neg p_0\,[\neg p_0 \to p_3/p_0]) = \\ &= (p_3 \leftrightarrow (\neg p_0 \to p_3)) \vee (p_2 \to \neg\,(\neg p_0 \to p_3))\end{aligned}$$

1.2. Semantica

1.2.1. Valores de verdad

El conjunto de valores de verdad tiene exactamente dos elementos: T y F. Asumiremos una relacion de orden $<$ sobre los valores de verdad tal que $F < T$.

1.2.2. Valuacion

Una valuacion o modelo proposicional es una funcion $v : AT \to \{T, F\}$. Es decir que una valuacion asigna un valor de verdad a cada proposicion atomica.

1.2.3. Definicion formal

Sea v una valuacion definmos la funcion $[\![\phi]\!]_v : PROP \to \{T, F\}$ por induccion en $PROP$:

- $[\![\bot]\!]_v = F$.
- $[\![p_i]\!]_v = v\,(p_i)$.
- $[\![\phi \wedge \psi]\!]_v = min\,\{[\![\phi]\!]_v\,, [\![\psi]\!]_v\}$.
- $[\![\phi \vee \psi]\!]_v = max\,\{[\![\phi]\!]_v\,, [\![\psi]\!]_v\}$.

- $[\![\phi \to \psi]\!]_v = \begin{cases} F & \iff [\![\phi]\!]_v = T \text{ y } [\![\psi]\!]_v = F \\ T & \iff [\![\phi]\!]_v \leq [\![\psi]\!]_v \end{cases}$

- $[\![\neg\phi]\!]_v = \begin{cases} F \iff & [\![\phi]\!]_v = T \\ T \iff & [\![\phi]\!]_v = F \end{cases}$

Extenderemos la definicion de $[\![\phi]\!]_v$ a conjuntos de la siguiente forma: $[\![\Gamma]\!]_v = T$ si y solo si para toda $\phi \in \Gamma$ resulta $[\![\phi]\!]_v = T$. Notese que con base en esta definicion resulta que $[\![\emptyset]\!]_v = T$ por vacuidad.

1.2.4. Funcion de verdad

Llamaremos funcion de verdad a una funcion de $\{T, F\}^n$ en $\{T, F\}$. Podemos entonces asociar funciones de verdad a cada uno de nuestros conectivos:

- $f_\neg : \{T, F\} \to \{T, F\}$ dada por:

p	$\neg p$
F	T
T	F

- $f_\wedge : \{T, F\}^2 \to \{T, F\}$ dada por:

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

- $f_\vee : \{T, F\}^2 \to \{T, F\}$ dada por:

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

- $f_\to : \{T, F\}^2 \to \{T, F\}$ dada por:

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

1.2.5. Definiciones

- Diremos que una formula $\phi \in PROP$ es una tautologia si y solo si para cualquier valuacion v resulta $[\![\phi]\!]_v = T$.
- Diremos que una formula $\phi \in PROP$ es una contradiccion si y solo si para cualquier valuacion v resulta $[\![\phi]\!]_v = F$.
- Diremos que una formula $\phi \in PROP$ es satisfactible si no es una contradiccion, es decir que existe una valuacion v tal que $[\![\phi]\!]_v = T$.

1.2.6. Conectivos adicionales

Definimos el operador $\leftrightarrow$ de la siguiente forma $(\phi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))$. Es decir $[\![(\phi \leftrightarrow \psi)]\!]_v = [\![((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))]\!]_v = min\left\{[\![(\phi \to \psi)]\!]_v, [\![(\psi \to \phi)]\!]_v\right\}$.

Definimos el operador $\downarrow (NOR)$ de la siguiente forma $(\phi \downarrow \psi) \equiv (\neg (\phi \vee \psi))$.
Es decir:

$$[\![(\phi \downarrow \psi)]\!]_v = \begin{cases} F & max\left\{[\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v\right\} = T \\ T & max\left\{[\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v\right\} = F \end{cases} = \begin{cases} F & \\ T & \iff [\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v = F \end{cases}$$

Teorema $[\![\phi \leftrightarrow \psi]\!]_v = T$ si y solo si $[\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$.

Demostracion

- $\boxed{\Rightarrow}$ Si $min\left\{[\![(\phi \to \psi)]\!]_v, [\![(\psi \to \phi)]\!]_v\right\} = T$ debera ser $[\![(\phi \to \psi)]\!]_v = T = [\![(\psi \to \phi)]\!]_v$ puesto que $min\left\{\alpha, \beta\right\} = T \iff \alpha = \beta = T$. Supongamos $[\![\phi]\!]_v \neq [\![\psi]\!]_v$ luego $[\![(\phi \to \psi)]\!]_v = F$ o bien $[\![(\psi \to \phi)]\!]_v = F$. Contradiccion. Por lo tanto $[\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$.
- $\boxed{\Leftarrow}$ Si $[\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$ entonces $min\left\{[\![(\phi \to \psi)]\!]_v, [\![(\psi \to \phi)]\!]_v\right\} = min\left\{T, T\right\} = T$ por por definicion de $\to$.

1.2.7. Consecuencia semantica

Definimos la relacion $\vDash \subseteq \mathcal{P}(PROP) \times PROP$ donde $\Gamma \vDash \phi$ si y solo si para cualquier valuacion v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = T$ resulta $[\![\phi]\!]_v = T$. Diremos en este caso que ϕ es una consecuencia semantica de Γ.

En otros terminos: una conclusion es una consecuencia semantica de las premisas cuando es imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusion falsa, o dicho mas precisamente, cuando toda valuacion que hace verdaderas a las premisas tambien hace verdadera a la conclusion.

Observacion Como consecuencia de esta definicion, decir que $\models \phi$ es lo mismo que decir $[\![\phi]\!]_v = T$ para cualquier valuacion v, es decir, que ϕ es una tautologia.

1.2.8. Teorema de substitucion

Enunciado Sean $\phi_1, \phi_2, \psi \in PROP$ y $p_i \in AT$; si $\models \phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ entonces $\models \psi\left[\phi_1/p_i\right] \leftrightarrow \psi\left[\phi_2/p_i\right]$.

Demostracion Lo demostraremos por induccion en ψ:

- Casos base:
  - Si $\psi \equiv \perp$ entonces $[\![\psi\left[\phi_1/p_i\right]]\!]_v = [\![\perp]\!]_v = [\![\psi\left[\phi_2/p_i\right]]\!]_v$.
  - Si $\psi \equiv p_j$ entonces
    - Si $j = i$ resulta $[\![\psi\left[\phi_1/p_i\right]]\!]_v = [\![\phi_1]\!]_v = [\![\phi_2]\!]_v = [\![\psi\left[\phi_2/p_i\right]]\!]_v$.
    - Si $j \neq i$ resulta $[\![\psi\left[\phi_1/p_i\right]]\!]_v = [\![\psi]\!]_v = [\![\psi\left[\phi_2/p_i\right]]\!]_v$.
- Casos inductivos: Supongamos que para ψ_1, ψ_2 resultan $\models \psi_1\left[\phi_1/p_i\right] \leftrightarrow \psi_1\left[\phi_2/p_i\right]$ y $\models \psi_2\left[\phi_1/p_i\right] \leftrightarrow \psi_2\left[\phi_2/p_i\right]$,
  - Si $\psi \equiv (\neg\psi_1)$ entonces

$$\begin{gathered}
[\![\psi\left[\phi_1/p_i\right]]\!]_v = [\![\neg\left(\psi_1\left[\phi_1/p_i\right]\right)]\!]_v = T \iff \\
[\![\left(\psi_1\left[\phi_1/p_i\right]\right)]\!]_v = F \iff [\![\left(\psi_1\left[\phi_2/p_i\right]\right)]\!]_v = F \iff \\
[\![\psi\left[\phi_2/p_i\right]]\!]_v = [\![\neg\left(\psi_1\left[\phi_2/p_i\right]\right)]\!]_v = T
\end{gathered}$$

  - Si $\psi \equiv (\psi_1 \Box \psi_2)$ entonces

$$\begin{gathered}
[\![\psi\left[\phi_1/p_i\right]]\!]_v = [\![\left(\psi_1\left[\phi_1/p_i\right] \Box \psi_2\left[\phi_1/p_i\right]\right)]\!]_v \iff \\
[\![\psi\left[\phi_2/p_i\right]]\!]_v = [\![\left(\psi_1\left[\phi_2/p_i\right] \Box \psi_2\left[\phi_2/p_i\right]\right)]\!]_v
\end{gathered}$$

1.2.9. Relacion de equivalencia

Definimos la relacion $\approx \subseteq PROP \times PROP$ donde $\phi \approx \psi$ si y solo si $\models (\phi \leftrightarrow \psi)$. Esta relacion de equivalencia, nos permite razonar algebraicamente sobre $PROP$.

1.2.10. Conjunto completo de conectivos

Un conjunto X de conectivos es completo si para cada formula ϕ existe ψ tal que:

1. ψ utiliza unicamente conectivos de X y ademas,
2. $\models \psi \leftrightarrow \phi$.

Ejemplo Veamos por ejemplo que $A = \{\vee, \neg\}$ es un conjunto de conectivos completos. Sea $\phi \in PROP$, definimos la transformacion $T_A : PROP \to PROP$ inductivamente:

- $T_A(\bot) = \bot$. (Corregir).
- $T_A(p_i) = p_i$.
- $T_A(\neg\phi) = \neg T_A(\phi)$.
- $T_A(\phi_1 \vee \phi_2) = T_A(\phi_1) \vee T_A(\phi_2)$.
- $T_A(\phi_1 \wedge \phi_2) = \neg(\neg T_A(\phi_1) \vee \neg T_A(\phi_2))$.
- $T_A(\phi_1 \to \phi_2) = \neg T_A(\phi_1) \vee T_A(\phi_2)$.

Demostracion

1. Para cada formula $\phi \in PROP$ existe $\psi \in PROP$ que utiliza unicamente conectivos de A.

   a) Casos base:

   - Si $\phi \equiv \bot$ entonces $T_A(\phi) = \bot$ utiliza solo conectivos de A.
   - Si $\phi \equiv p_i$ entonces $T_A(\phi) = p_i$ utiliza solo conectivos de A.

b) Casos inductivos: Supongamos que para ϕ_1, ϕ_2 sus tarnsformaciones $\psi_1 = T_A(\phi_1), \psi_2 = T_A(\phi_2)$ utilizan solo conectivos de A,

- Si $\phi \equiv \neg\phi_1$ entonces $T_A(\neg\phi_1) = \neg T_A(\phi_1) = \neg\psi_1$. Como $\neg \in A$ y ψ_1 utiliza solo conectivos de A, entonces $\neg\psi_1 = T_A(\phi)$ tambien.
- Si $\phi \equiv \phi_1 \vee \phi_2$ entonces $T_A(\phi_1 \vee \phi_2) = T_A(\phi_1) \vee T_A(\phi_2) = \psi_1 \vee \psi_2$. Como $\vee \in A$ y ψ_1, ψ_2 utilizan solo conectivos de A entonces $\psi_1 \vee \psi_2 = T_A(\phi)$ tambien.
- Si $\phi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2$ entonces $T_A(\phi_1 \wedge \phi_2) = \neg(\neg T_A(\phi_1) \vee \neg T_A(\phi_2)) = \neg(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$. Como $\vee, \neg \in A$ y ψ_1, ψ_2 utilizan solo conectivos de A entonces $\neg(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2) = T_A(\phi)$ tambien.
- Si $\phi \equiv \phi_1 \to \phi_2$ entonces $T_A(\phi_1 \to \phi_2) = \neg T_A(\phi_1) \vee T_A(\phi_2) = \neg\psi_1 \vee \psi_2$. Como $\vee, \neg \in A$ y ψ_1, ψ_2 utilizan solo conectivos de A entonces $\neg\psi_1 \vee \psi_2 = T_A(\phi)$ tambien.

2. Para cada formula $\phi \in PROP$ resulta $\vDash \phi \leftrightarrow T_A(\phi)$.

a) Casos base: Sea $\phi \in PROP$ tal que $\psi = T_A(\phi)$,

- Si $\phi = \bot$ entonces $[\![\psi]\!]_v = [\![T_A(\phi)]\!]_v = [\![\bot]\!]_v = [\![\phi]\!]_v$ y como $[\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$ resulta $[\![\phi \leftrightarrow \psi]\!]_v = T$ por lo que $\vDash \phi \leftrightarrow \psi$.
- Si $\phi = p_i$ entonces $[\![\psi]\!]_v = [\![T_A(\phi)]\!]_v = [\![p_i]\!]_v = [\![\phi]\!]_v$ y como $[\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$ resulta $[\![\phi \leftrightarrow \psi]\!]_v = T$ por lo que $\vDash \phi \leftrightarrow \psi$.

b) Casos inductivos: Supongamos que para $\phi_1, \phi_2 / \psi_1 = T_A(\phi_1), \psi_2 = T_A(\phi_2)$ resultan $\vDash \phi_1 \leftrightarrow \psi_1$ y $\vDash \phi_2 \leftrightarrow \psi_2$,

- Si $\phi = \neg\phi_1$ entonces $\boxed{\begin{array}{c} [\![\phi]\!]_v = T \iff [\![\neg\phi_1]\!]_v = T \iff [\![\phi_1]\!]_v = F \iff \\ [\![\psi_1]\!]_v = F \iff [\![\neg\psi_1]\!]_v = T \iff [\![T_A(\phi)]\!]_v = T \end{array}}$
- Si $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ entonces $\boxed{\begin{array}{c} [\![\phi]\!]_v = [\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]_v = max\{[\![\phi_1]\!]_v, [\![\phi_2]\!]_v\} = \\ max\{[\![\psi_1]\!]_v, [\![\psi_2]\!]_v\} = [\![\psi_1 \vee \psi_2]\!]_v = [\![T_A(\phi)]\!]_v \end{array}}$
- Si $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ entonces $\boxed{\begin{array}{c} [\![\phi]\!]_v = [\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_v = T \iff min\{[\![\phi_1]\!]_v, [\![\phi_2]\!]_v\} = T \\ \iff min\{[\![\psi_1]\!]_v, [\![\psi_2]\!]_v\} = T \iff [\![\psi_1]\!]_v = [\![\psi_2]\!]_v = T \\ [\![\neg\psi_1]\!]_v = [\![\neg\psi_2]\!]_v = F \iff max\{[\![\neg\psi_1]\!]_v, [\![\neg\psi_2]\!]_v\} = F \\ \iff [\![(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)]\!]_v = F \iff \\ \iff T = [\![\neg(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)]\!]_v = [\![T_A(\phi)]\!]_v \end{array}}$

- Si $\phi = \phi_1 \to \phi_2$ entonces $\boxed{\begin{array}{c} [\![\phi]\!]_v = [\![\phi_1 \to \phi_2]\!]_v = F \iff \\ [\![\phi_1]\!]_v = T \text{ y } [\![\phi_2]\!]_v = F \iff [\![\psi_1]\!]_v = T \text{ y } [\![\psi_2]\!]_v = F \\ \iff [\![\neg\psi_1]\!]_v = F \text{ y } [\![\psi_2]\!]_v = F \iff \\ \iff max\left\{[\![\neg\psi_1]\!]_v, [\![\psi_2]\!]_v\right\} = F \iff \\ \iff [\![\neg\psi_1 \vee \psi_2]\!]_v = [\![T_A(\phi)]\!]_v = F \end{array}}$

Mas interesante aun, el conjunto $B = \{\downarrow\}$ tambien es un conjunto completo de conectivos. En efecto como $[\![\neg\phi]\!]_v = [\![\phi \downarrow \phi]\!]_v$ y $[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]_v = [\![(\phi_1 \downarrow \phi_2) \downarrow (\phi_1 \downarrow \phi_2)]\!]_v$; por lo visto anteriormente podemos concluir lo propuesto.

1.2.11. Ejemplos

1.2.11.1. Razonamiento semantico

- $p \vDash p \vee q$:
  - Sea v una valuacion tal que $[\![p]\!]_v = T$.
  - Luego $[\![p \vee q]\!]_v = max\left\{[\![p]\!]_v, [\![q]\!]_v\right\} = max\left\{T, [\![q]\!]_v\right\} = T$.
- Si $\underbrace{p \vDash q}_{(1)}$ y $\underbrace{q \vDash r}_{(2)}$ entonces $p \vDash r$:
  - Sea v una valuacion tal que $[\![p]\!]_v = T$.
  - Por (1) sabemos que $[\![q]\!]_v = T$.
  - A partir de aqui por (2) resulta $[\![r]\!]_v = T$.
- Si $\vDash p \to q$ entonces $p \vDash q$:
  - Sea v una valuacion tal que $[\![p]\!]_v = T$.
  - Por hipotesis $[\![p \to q]\!]_v = T$ y por definicion de $\to$ sabemos que $[\![p]\!]_v \leq [\![q]\!]_v$, es decir, $T \leq [\![q]\!]_v$. Por lo tanto $[\![q]\!]_v = T$.
- $\neg(p \wedge q) \vDash \neg p \vee \neg q$:
  - Sea v una valuacion tal que $[\![\neg(p \wedge q)]\!]_v = T$.
  - $[\![\neg(p \wedge q)]\!]_v = T \iff [\![(p \wedge q)]\!]_v = F$, es decir, $min\left\{[\![p]\!]_v, [\![q]\!]_v\right\} = F$. Esto nos permite deducir que $[\![p]\!]_v = F$ o $[\![q]\!]_v = F$.
  - Supongamos sin perder generalidad que $[\![p]\!]_v = F$, luego $[\![\neg p]\!]_v = T$ y en consecuencia $[\![\neg p \vee \neg q]\!]_v = max\left\{T, [\![\neg q]\!]_v\right\} = T$.

- $\neg p \vee \neg q \vDash \neg (p \wedge q)$:
  - Sea v una valuacion tal que $[\![\neg p \vee \neg q]\!]_v = T$.
  - Por definicion $[\![\neg p \vee \neg q]\!]_v = max \{[\![\neg p]\!]_v, [\![\neg q]\!]_v\}$ luego $[\![\neg p]\!]_v = T$ o $[\![\neg q]\!]_v = T$, es decir, $[\![p]\!]_v = F$ o $[\![q]\!]_v = F$.
  - Supongamos sin perder generalidad que $[\![p]\!]_v = F$ luego resultara $[\![(p \wedge q)]\!]_v = min \{F, [\![q]\!]_v\} = F \iff [\![\neg (p \wedge q)]\!]_v = T$.
- Si $\vDash \phi \to \psi$ entonces $\vDash (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \phi$:
  - Por hipotesis $[\![\phi \to \psi]\!]_v = T$, por lo que $[\![\phi]\!]_v \leq [\![\psi]\!]_v$.
  - $[\![(\phi \wedge \psi)]\!]_v = min \{[\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v\}$ y por el punto anterior resulta $[\![(\phi \wedge \psi)]\!]_v = [\![\phi]\!]_v$, luego $[\![(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \phi]\!]_v = T$.

1.2.11.2. Satisfactibilidad

- ϕ es satisfactible si y solo si $\neg\phi$ no es una tautologia:
  - $\boxed{\Rightarrow}$ Como ϕ es satisfactible existe $v/ \, [\![\phi]\!]_v = T$, luego $[\![\neg\phi]\!]_v = F$.
  - $\boxed{\Leftarrow}$ Como $\neg\phi$ no es tautologia existe $v/ \, [\![\neg\phi]\!]_v = F$, luego $[\![\phi]\!]_v = T$.
- $\phi \to \bot$ es una tautologia si y solo si ϕ es contradictoria:
  - $\boxed{\Rightarrow}$ Como $\phi \to \bot$ es una tautologia, para toda v resulta $[\![\phi \to \bot]\!]_v = T$ y por definicion esto pasa si y solo si $[\![\phi]\!]_v \leq [\![\bot]\!]_v = F$, por lo que ha de ser $[\![\phi]\!]_v = F$.
  - $\boxed{\Leftarrow}$ Como ϕ es una contradiccion sabemos que $[\![\phi]\!]_v = F$, y como $F = [\![\phi]\!]_v \leq [\![\bot]\!]_v = F$ sera $[\![\phi \to \bot]\!]_v = T$.
- Sea $\Gamma \in PROP$, luego resulta $\Gamma \vDash \phi$ si y solo si $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfactible.
  - $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ fuera satisfactible, luego existe una valuacion v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = T$ y $[\![\neg\phi]\!]_v = T \iff [\![\phi]\!]_v = F$; pero como $\Gamma \vDash \phi$ sabemos que para toda $v/ \, [\![\Gamma]\!]_v = T$ tambien resultara $[\![\phi]\!]_v = T$. Contradiccion.
  - $\boxed{\Leftarrow}$ Como $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfactible sabemos que para toda valuacion $[\![\neg\phi]\!]_v = F \iff [\![\phi]\!]_v = T$. Sea v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = T$, por lo visto anteriormente concluimos $\Gamma \vDash \phi$.

1.3. Deduccion natural y calculo de secuentes

1.3.1. Definiciones

- Un secuente es una expresion de la forma $\Gamma \vdash \phi$ donde ϕ es una proposicion (que llamaremos conclusion) y Γ es un conjunto de proposiciones (que llamaremos premisas).
- Diremos que una formula ϕ es un teorema si $\vdash \phi$.

1.3.2. Regla trivial

- Deduccion natural:

$$\frac{\phi}{\phi}\, t$$

- Regla de secuente: El secuente $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \phi$ es valido.

1.3.3. Reglas para la conjuncion

1.3.3.1. Introduccion de la conjuncion

- Deduccion natural:

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\, i_{\wedge}$$

- Regla de secuente: Si $\Gamma_1 \vdash \phi$ y $\Gamma_2 \vdash \psi$ son secuentes validos, entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \phi \wedge \psi$ tambien.

1.3.3.2. Eliminacion de la conjuncion 1

- Deduccion natural:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\, e_{\wedge 1}$$

- Regla de secuente: Si $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$ es un secuente valido, entonces $\Gamma \vdash \phi$ tambien.

1.3.3.3. Eliminacion de la conjuncion 2

- Deduccion natural:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\,e_{\wedge 2}$$

- Regla de secuente: Si $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$ es un secuente valido, entonces $\Gamma \vdash \psi$ tambien.

1.3.4. Reglas para la implicacion

1.3.4.1. Eliminacion de la implicacion (modus ponens)

- Deduccion natural:

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\,e_{\to}$$

- Regla de secuente: Si $\Gamma_1 \vdash \phi$ y $\Gamma_2 \vdash \phi \to \psi$ son secuentes validos, entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi$ tambien.

1.3.4.2. Introduccion de la implicacion

- Deduccion natural:

$$\begin{array}{c} [\phi]^{(1)} \\ \vdots \\ \dfrac{\psi}{\phi \to \psi}\,i_{\to(1)} \end{array}$$

- Regla de secuente: Si $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ es un secuente valido, entonces $\Gamma \vdash \phi \to \psi$ tambien.

1.3.5. Reglas para la disyuncion

1.3.5.1. Introduccion de la disyuncion 1

- Deduccion natural:

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\, i_{\vee 1}$$

- Regla de secuente: Si $\Gamma \vdash \phi$ es un secuente valido, entonces $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$ tambien.

1.3.5.2. Introduccion de la disyuncion 2

- Deduccion natural:

$$\frac{\psi}{\phi \vee \psi}\, i_{\vee 2}$$

- Regla de secuente: Si $\Gamma \vdash \psi$ es un secuente valido, entonces $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$ tambien.

1.3.5.3. Eliminacion de la disyuncion

- Deduccion natural:

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\phi]^{(1)} \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi]^{(2)} \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\, e_{\vee(1)(2)}$$

- Regla de secuente: Si $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$, $\Gamma' \cup \{\phi\} \vdash \chi$ y $\Gamma'' \cup \{\psi\} \vdash \chi$ son secuentes validos; entonces $\Gamma \cup \Gamma' \cup \Gamma'' \vdash \chi$ tambien.

1.3.6. Reglas para bottom

1.3.6.1. Eliminacion de bottom

- Deduccion natural:

$$\frac{\bot}{\phi}\, e_{\bot}$$

- Regla de secuente: Si $\Gamma \vdash \bot$ es un secuente valido, entonces tambien lo es $\Gamma \vdash \phi$ (para cualquier ϕ).

1.3.6.2. Introduccion de bottom

- Deduccion natural:

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\, i_{\bot}$$

- Regla de secuente: Si $\Gamma_1 \vdash \phi$ y $\Gamma_2 \vdash \neg\phi$ son secuentes validos, entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \bot$ tambien.

1.3.7. Reglas para la negacion

1.3.7.1. Introduccion de la negacion

- Deduccion natural:

$$\begin{array}{c} [\phi]^{(1)} \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{\neg\phi}\, i_{\neg(1)} \end{array}$$

- Regla de secuente: Si $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot$ es un secuente valido, entonces $\Gamma \vdash \neg\phi$ tambien.

1.3.7.2. Eliminacion de la doble negacion

- Deduccion natural:

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\, e_{\neg\neg}$$

- Regla de secuente: Si $\Gamma \vdash \neg\neg\phi$ es un secuente valido, entonces $\Gamma \vdash \phi$ tambien.

1.3.8. Reglas derivadas

1.3.8.1. Modus Tollens

- Regla:

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\,MT$$

- Arbol de derivacion:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^{(1)} \qquad \phi \to \psi}{\psi}\,e_{\to} \qquad \neg\psi}{\perp}\,i_{\perp}}{\neg\phi}\,i_{\neg(1)}$$

- Prueba lineal:

1.	$\phi \to \psi$	Premisa
2.	$\neg\psi$	Premisa
3.	ϕ	Hipotesis
4.	ψ	$e_{\to}(1), (3)$
5.	$\perp$	$i_{\perp}(4), (2)$
6.	$\neg\phi$	$i_{\neg}(3-5)$

1.3.8.2. Reduccion al Absurdo

- Regla:

$$\begin{array}{c}[\neg\phi]^{(1)}\\ \vdots \\ \dfrac{\perp}{\phi}\,RAA^{(1)}\end{array}$$

- Arbol de derivacion:

$$\begin{array}{c}[\neg\phi]^{(1)}\\ \vdots \\ \dfrac{\dfrac{\perp}{\neg\neg\phi}\,i_{\neg(1)}}{\phi}\,e_{\neg\neg}\end{array}$$

- Prueba lineal:

1.	$\neg\phi \to \perp$	Premisa
2.	$\neg\phi$	Hipotesis
3.	$\perp$	$e_{\to}(1), (2)$
4.	$\neg\neg\phi$	$i_{\neg}(2-3)$
5.	ϕ	$e_{\neg\neg}(4)$

1.3.8.3. Tercero excluido

- Regla:

$$\dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\, {\scriptstyle TND}$$

- Arbol de derivacion:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^{(2)}}{\phi \vee \neg\phi}\, i_{\vee 1} \qquad [\phi]^{(2)}}{\bot}\, i_{\bot}}{\neg\phi}\, i_{\neg(2)}}{\phi \vee \neg\phi}\, i_{\vee 2} \qquad [\neg(\phi \vee \neg\phi)]^{(1)}}{\bot}\, i_{\bot}}{\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)}\, i_{\neg(1)}}{\phi \vee \neg\phi}\, e_{\neg\neg}$$

- Prueba lineal:

1.	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	Hipotesis
2.	ϕ	Hipotesis
3.	$\phi \vee \neg\phi$	$i_{\vee 1}(2)$
4.	$\bot$	$i_{\bot}(3)(1)$
5.	$\neg\phi$	$i_{\neg}(2-4)$
6.	$\phi \vee \neg\phi$	$i_{\vee 2}(5)$
7.	$\bot$	$i_{\bot}(6)(1)$
8.	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$i_{\neg}(1-7)$
9.	$\phi \vee \neg\phi$	$e_{\neg\neg}(8)$

1.3.9. Definicion inductiva

Recopilando todas las reglas de secuentes, definiremos S (el conjunto de todos los secuentes validos para $\Delta \subseteq PROP$) como el minimo conjunto tal que:

- Casos base: $\Delta \vdash \phi \in S$ para cada $\phi \in \Delta$ (regla trivial).
- Casos inductivos:

  1. Si $\Gamma_1 \vdash \phi_1 \in S$ y $\Gamma_2 \vdash \phi_2 \in S$ entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \in S$ ($i_{\wedge}$).
  2. Si $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi \in S$ entonces $\Gamma \vdash \phi \in S$ ($e_{\wedge 1}$).
  3. Si $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi \in S$ entonces $\Gamma \vdash \psi \in S$ ($e_{\wedge 2}$).
  4. Si $\Gamma_1 \vdash \phi \in S$ y $\Gamma_2 \vdash \phi \to \psi \in S$ entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi \in S$ ($e_{\to}$).
  5. Si $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi \in S$ entonces $\Gamma \vdash \phi \to \psi \in S$ ($i_{\to}$).
  6. Si $\Gamma \vdash \phi \in S$ entonces $\Gamma \vdash \phi \vee \psi \in S$ ($i_{\vee 1}$).

7. Si $\Gamma \vdash \psi \in S$ entonces $\Gamma \vdash \phi \vee \psi \in S$ ($i_{\vee 2}$).
8. Si $\Gamma_1 \vdash \phi \vee \psi, \Gamma_2 \cup \{\phi\} \vdash \chi, \Gamma_3 \cup \{\psi\} \vdash \chi \in S$ entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash \chi \in S$ ($e_{\vee}$).
9. Si $\Gamma \vdash \bot \in S$ entonces $\Gamma \vdash \phi \in S$ ($e_{\bot}$).
10. Si $\Gamma_1 \vdash \phi \in S$ y $\Gamma_2 \vdash \neg\phi \in S$ entonces $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \bot \in S$ ($i_{\bot}$).
11. Si $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot \in S$ entonces $\Gamma \vdash \neg\phi \in S$ ($i_{\neg}$).
12. Si $\Gamma \vdash \neg\neg\phi \in S$ entonces $\Gamma \vdash \phi \in S$ ($e_{\neg\neg}$).

1.3.10. Ejemplos

1.3.10.1. Pruebas lineales

- $(p \wedge q) \wedge s, s \wedge t \vdash q \wedge s$:

1.	$(p \wedge q) \wedge s$	Premisa
2.	$s \wedge t$	Premisa
3.	$p \wedge q$	$e_{\wedge 1}(1)$
4.	q	$e_{\wedge 2}(3)$
5.	s	$e_{\wedge 1}(2)$
6.	$q \wedge s$	$i_{\wedge}(4)(5)$

- $p \vdash q \to p \wedge q$:

1.	p	Premisa
2.	q	Hipotesis
3.	$p \wedge q$	$i_{\wedge}(1)(2)$
4.	$q \to p \wedge q$	$i_{\to}(2-3)$

- $p \vdash (p \to q) \to p$:

1.	p	Premisa
2.	$p \to q$	Hipotesis
3.	p	Trivial (1)
4.	$(p \to q) \to p$	$i_{\to}(2-3)$

- $p \to q \vdash p \vee r \to q \vee r$:

1.	$p \to q$	Premisa
2.	$p \vee r$	Hipotesis
3.	p	Hipotesis
4.	q	$e_{\to}(1)(3)$
5.	$q \vee r$	$i_{\vee 1}(4)$
6.	r	Hipotesis
7.	$q \vee r$	$i_{\vee 2}(3)$
8.	$q \vee r$	$e_{\vee}(2)(3-5)(6-7)$
9.	$p \vee r \to q \vee r$	$i_{\to}(2-8)$

- $p \vdash p \wedge p$:

1.	p	Premisa
2.	q	Premisa
3.	$p \wedge p$	$i_\wedge(1)(2)$

- $p, q, r \vdash (p \wedge q) \wedge r$:

1.	p	Premisa
2.	q	Premisa
3.	r	Premisa
4.	$p \wedge q$	$i_\wedge(1)(2)$
5.	$(p \wedge q) \wedge r$	$i_\wedge(4)(3)$

- $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$:

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	Premisa
2.	$s \wedge t$	Premisa
3.	$p \wedge q$	$e_{\wedge 1}(1)$
4.	q	$e_{\wedge 2}(3)$
5.	s	$e_{\wedge 1}(2)$
6.	$q \wedge s$	$i_\wedge(4)(5)$

- $p \wedge q \vdash q \wedge p$:

1.	$p \wedge q$	Premisa
2.	p	$e_{\wedge 1}(1)$
3.	q	$e_{\wedge 2}(1)$
4.	$q \wedge p$	$i_\wedge(3)(2)$

- $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$:

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	Premisa
2.	$p \wedge q$	$e_{\wedge 1}(1)$
3.	p	$e_{\wedge 1}(2)$
4.	q	$e_{\wedge 2}(2)$
5.	r	$e_{\wedge 2}(1)$
6.	$q \wedge r$	$i_\wedge(4)(5)$
7.	$p \wedge (q \wedge r)$	$i_\wedge(3)(6)$

- $\neg\neg p \wedge (p \vee q) \vdash p \wedge \neg\neg(p \vee q)$:

1.	$\neg\neg p \wedge (p \vee q)$	Premisa
2.	$\neg\neg p$	$e_{\wedge 1}(1)$
3.	p	$e_{\neg\neg}(2)$
4.	$p \vee q$	$e_{\wedge 2}(1)$
5.	$\neg(p \vee q)$	Hipotesis
6.	$\perp$	$i_\perp(4)(5)$
7.	$\neg\neg(p \vee q)$	$i_\neg(5-6)$
8.	$p \wedge \neg\neg(p \vee q)$	$i_\wedge(3)(7)$

- $p \vdash \neg\neg p$:

1.	p	Premisa
2.	$\neg p$	Hipotesis
3.	$\perp$	$i_\perp(1)(2)$
4.	$\neg\neg p$	$i_\neg(2-3)$

- $\neg\neg p \vdash p$:

1.	$\neg\neg p$	Premisa
2.	p	$e_{\neg\neg}(1)$

- $\vdash \neg (p \wedge \neg p)$:

1.	$p \wedge \neg p$	Hipotesis
2.	p	$e_{\wedge 1}(1)$
3.	$\neg p$	$e_{\wedge 2}(1)$
4.	$\perp$	$i_{\perp}(2)(3)$
5.	$\neg(p \wedge \neg p)$	$i_{\neg}(1-4)$

- $p \rightarrow (p \rightarrow q)\,, p \vdash q$:

1.	$p \rightarrow (p \rightarrow q)$	Premisa
2.	p	Premisa
3.	$p \rightarrow q$	$e_{\rightarrow}(2)(1)$
4.	q	$e_{\rightarrow}(2)(3)$

- $q \rightarrow (p \rightarrow r)\,, \neg r, q \vdash \neg p$:

1.	$q \rightarrow (p \rightarrow r)$	Premisa
2.	$\neg r$	Premisa
3.	q	Premisa
4.	$p \rightarrow r$	$e_{\rightarrow}(3)(1)$
5.	p	Hipotesis
6.	r	$e_{\rightarrow}(5)(4)$
7.	$\perp$	$i_{\perp}(6)(2)$
8.	$\neg p$	$i_{\neg}(5-7)$

- $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$:

1.	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	Premisa
2.	$p \rightarrow r$	$e_{\wedge 1}(1)$
3.	$p \wedge q$	Hipotesis
4.	p	$e_{\wedge 1}(3)$
5.	r	$e_{\rightarrow}(4)(2)$
6.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$i_{\rightarrow}(3-5)$

- $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$:

1.	$p \wedge q$	Hipotesis
2.	p	$e_{\wedge 1}(1)$
3.	$(p \wedge q) \rightarrow p$	$i_{\rightarrow}(1-2)$

- $q \rightarrow r \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$:

1.	$q \rightarrow r$	Premisa
2.	$p \rightarrow q$	Hipotesis
3.	p	Hipotesis
4.	q	$e_{\rightarrow}(3)(2)$
5.	r	$e_{\rightarrow}(4)(1)$
6.	$p \rightarrow r$	$i_{\rightarrow}(3-5)$
7.	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$i_{\rightarrow}(2-6)$

- $(p \to q) \wedge (r \to s) \vdash p \vee r \to q \vee s$:

1.	$(p \to q) \wedge (r \to s)$	Premisa
2.	$p \to q$	$e_{\wedge 1}(1)$
3.	$r \to s$	$e_{\wedge 2}(1)$
4.	$p \vee r$	Hipotesis
5.	p	Hipotesis
6.	q	$e_{\to}(5)(2)$
7.	$q \vee s$	$i_{\vee 1}(6)$
8.	r	Hipotesis
9.	s	$e_{\to}(8)(3)$
10.	$q \vee s$	$i_{\vee 2}(9)$
11.	$q \vee s$	$e_{\vee}(4)(5-7)(8-11)$
12.	$p \vee r \to q \vee s$	$i_{\to}(4-11)$

- $\vdash p \to (\neg p \to q)$:

1.	p	Hipotesis
2.	$\neg p$	Hipotesis
3.	$\perp$	$i_{\perp}(1)(2)$
4.	q	$e_{\perp}(3)$
5.	$\neg p \to q$	$i_{\to}(2-4)$
6.	$p \to (\neg p \to q)$	$i_{\to}(1-5)$

- $\neg p, p \vee q \vdash q$:

1.	$\neg p$	Premisa
2.	$p \vee q$	Premisa
3.	p	Hipotesis
4.	$\perp$	$i_{\perp}(3)(1)$
5.	q	$e_{\perp}(4)$
6.	q	Hipotesis
7.	q	Trivial (6)
8.	q	$e_{\vee}(2)(3-5)(6-7)$

- $\neg p \to p \vdash p$:

1.	$\neg p \to p$	Premisa
2.	$p \vee \neg p$	TND
3.	p	Hipotesis
4.	p	Trivial (3)
5.	$\neg p$	Hipotesis
6.	p	$e_{\to}(5)(1)$
7.	p	$e_{\vee}(2)(3-4)(5-6)$

- $p \wedge \neg p \vdash \neg(r \to q) \wedge r \to q$:

1.	$p \wedge \neg p$	Premisa
2.	p	$e_{\wedge 1}(1)$
3.	$\neg p$	$e_{\wedge 2}(1)$
4.	$\perp$	$i_{\perp}(2)(3)$
5.	$\neg(r \to q) \wedge r \to q$	$e_{\perp}(4)$

- $p \vee q, \neg q \vee r \vdash p \vee r$:

1.	$p \vee q$	Premisa
2.	$\neg q \vee r$	Premisa
3.	q	Hipotesis
4.	$\neg q$	Hipotesis
5.	$\perp$	$i_{\perp}(3)(4)$
6.	r	$e_{\perp}(5)$
7.	r	Hipotesis
8.	r	Trivial
9.	r	$e_{\vee}(2)(4-6)(7-8)$
10.	$q \to r$	$i_{\to}(3-9)$
11.	p	Hipotesis
12.	$p \vee r$	$i_{\vee 1}(11)$
13.	q	Hipotesis
14.	r	$e_{\to}(13)(10)$
15.	$p \vee r$	$i_{\vee 2}(14)$
16.	$p \vee r$	$e_{\vee}(1)(11-12)(13-15)$

1.3.10.2. Arboles de derivacion

- $(p \land q) \land s, s \land t \vdash q \land s$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p \land q) \land s}{p \land q}\,e_{\land_1}}{q}\,e_{\land_2} \qquad \dfrac{s \land t}{s}\,e_{\land_1}}{q \land s}\,i_{\land}$$

- $p \vdash q \to p \land q$:

$$\dfrac{\dfrac{p \qquad [q]^{(1)}}{p \land q}}{q \to p \land q}\,i_{\to^{(1)}}$$

1.3.10.3. Traduccion del lenguaje natural

- «Si hubo niebla, saldra el sol. Si hizo frio y hubo viento norte, no estara soleado. Como hubo niebla y frio, no hubo viento norte».

  Sean:

  - n: «hubo niebla».
  - f: «hizo frio».
  - s: «salio el sol».
  - v: «hubo viento norte»

  En logica proposicional sera: $n \to s, (f \land v) \to \neg s, n \land f \vdash \neg v$.

- «Si estoy cansado, no voy a nadar. Si no estoy cansado, ire a tu casa. Si voy a nadar, no ire a tu casa. Entonces, no voy a nadar».

  Sean:

  - c: «estoy cansado».
  - i: «ire a tu casa».
  - n: «voy a nadar».

  En logica proposicional sera: $c \to \neg n, \neg c \to i, n \to \neg i \vdash \neg n$.

1.4. Propiedades

1.4.1. Definiciones

- Diremos que un conjunto $\Gamma \subseteq PROP$ es inconsistente si $\Gamma \vdash \perp$.
- Diremos que un conjunto $\Gamma \subseteq PROP$ es consistente maximal si es consistente y $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente para toda $\phi \notin \Gamma$.
- Diremos que un modelo logico es correcto si para todo $\Gamma \subseteq PROP$, $\Gamma \vdash \phi$ permite concluir $\Gamma \vDash \phi$.
- Diremos que un modelo logico es completo si para todo $\Gamma \subseteq PROP$ es completo si $\Gamma \vDash \phi$ permite concluir $\Gamma \vdash \phi$.

1.4.2. Teorema de correctitud

Enunciado El modelo logico definido anteriormente es correcto, es decir que: si $\Gamma \subseteq PROP$ y $\phi \in PROP$ entonces $\Gamma \vdash \phi$ permite concluir $\Gamma \vDash \phi$.

Demostracion Lo haremos por induccion en la derivacion de $\Gamma \vdash \phi$:

- Caso base: Si $\Gamma \vdash \phi$ se construyo utilizando la regla trivial entonces $\phi \in \Gamma$. Debemos probar que $\Gamma \vDash \phi$.
  Sea v una valuacion tal que $[\![\Gamma]\!]_v = T$ como $\phi \in \Gamma$ resulta $[\![\phi]\!]_v = T$.
- Casos inductivos:
  1. Si $\Gamma \vdash \phi$ se derivo usando $i_\wedge$ como ultima regla sabemos que:
     - $\phi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2$
     - $\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.
     - $\Gamma_1 \vdash \phi_1$.
     - $\Gamma_2 \vdash \phi_2$.

     Supongamos que:

     a) $\Gamma_1 \vDash \phi_1$.

     b) $\Gamma_2 \vDash \phi_2$.

     Veamos que $\Gamma \vDash \phi$, es decir, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vDash \phi_1 \wedge \phi_2$.
     Sea v una valuacion tal que $[\![\Gamma]\!]_v = T$ resultara entonces $[\![\Gamma_1]\!]_v = T = [\![\Gamma_2]\!]_v$.
     Por *(a)* tenemos $[\![\phi_1]\!]_v = T$ y por *(b)* $[\![\phi_2]\!]_v = T$. Finalmente: $[\![\phi]\!]_v = [\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_v = min\{[\![\phi_1]\!]_v, [\![\phi_2]\!]_v\} = T$.

2. Si $\Gamma \vdash \phi$ se derivo usando $e_{\wedge 1}$ como ultima regla sabemos que:
   - $\phi \equiv \phi_1$
   - $\Gamma \equiv \Gamma_1$.
   - $\Gamma_1 \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$.

   Supongamos que:

   a) $\Gamma_1 \models \phi_1 \wedge \phi_2$.

   Veamos que $\Gamma \models \phi$, es decir, $\Gamma_1 \models \phi_1$.
   Sea v una valuacion tal que $[\![\Gamma]\!]_v = T$ resultara entonces $[\![\Gamma_1]\!]_v = T$.
   Por *(a)* tenemos $min\{[\![\phi_1]\!]_v, [\![\phi_2]\!]_v\} = T$ y en consecuencia $[\![\phi_1]\!]_v = T$.
3. Analogo.
4. COMPLETAR.
5. COMPLETAR.
6. COMPLETAR.
7. COMPLETAR.
8. Si $\Gamma \vdash \phi$ se derivo usando $e_{\vee}$ como ultima regla sabemos que:
   - $\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.
   - $\Gamma_1 \cup \{\psi_1\} \vdash \phi$.
   - $\Gamma_2 \cup \{\psi_2\} \vdash \phi$.
   - $\Gamma_3 \vdash \psi_1 \vee \psi_2$.

   Supongamos que:

   a) $\Gamma_1 \cup \{\psi_1\} \models \phi$.
   b) $\Gamma_2 \cup \{\psi_2\} \models \phi$.
   c) $\Gamma_3 \models \psi_1 \vee \psi_2$.

   Veamos que $\Gamma \models \phi$, es decir, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \models \phi$.
   Sea v una valuacion tal que $[\![\Gamma]\!]_v = T$. En particular tambien sera $[\![\Gamma_1]\!]_v = [\![\Gamma_2]\!]_v = [\![\Gamma_3]\!]_v = T$ y por *(c)* resulta:

   $$[\![\psi_1 \vee \psi_2]\!]_v = T \iff max\{[\![\psi_1]\!]_v, [\![\psi_2]\!]_v\} = T$$

Consideremos dos casos:

- Si $[\![\psi_1]\!]_v = T$ entonces $[\![\Gamma_1 \cup \{\psi_1\}]\!]_v = T$ y por *(a)* resulta $[\![\phi]\!]_v = T$.
- Si $[\![\psi_2]\!]_v = T$ entonces $[\![\Gamma_2 \cup \{\psi_2\}]\!]_v = T$ y por *(b)* resulta $[\![\phi]\!]_v = T$.

Como hemos considerado todos los casos, podemos concluir que $[\![\phi]\!]_v = T$.

9. COMPLETAR.
10. Si $\Gamma \vdash \phi$ se derivo utilizando $i_\perp$ como ultima regla sabemos que:
    - $\Gamma \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.
    - $\phi \equiv \perp$.
    - $\Gamma_1 \vdash \psi$.
    - $\Gamma_2 \vdash \neg\psi$.

    Supongamos que:

    a) $\Gamma_1 \models \psi$.

    b) $\Gamma_2 \models \neg\psi$.

    Veamos que $\Gamma \models \phi$, es decir, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \perp$.
    Supongamos existe una valuacion v tal que $[\![\Gamma_1 \cup \Gamma_2]\!]_v = T$. Por *(a)* resulta $[\![\psi]\!]_v = T$ y por *(b)* $[\![\neg\psi]\!]_v = T \iff [\![\psi]\!]_v = F$. Contradiccion.

    Por lo tanto no existe tal valuacion, luego $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \perp$.
11. COMPLETAR.
12. COMPLETAR.

Con todo lo anterior hemos demostrado que todo teorema es una taugologia, es decir $\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \Gamma \models \phi$ o su contrarreciproco $\Gamma \not\models \phi \Rightarrow \Gamma \nvdash \phi$.

1.4.3. Formulaciones equivalentes (Lema 1)

Enunciado Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Γ es consistente.
2. No existe $\phi/\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$.
3. Existe $\phi/\Gamma \nvdash \phi$.

y sus negaciones:

1. Γ es inconsistente.
2. Existe $\phi/\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$
3. Para todo ϕ resulta $\Gamma \vdash \phi$.

Demostracion

- $\boxed{1 \Rightarrow 2}$: Supongamos que existe $\phi/\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$ luego por introduccion de bottom $\Gamma \vdash \bot$, pero por hipotesis Γ es consistente. Contradiccion.
- $\boxed{2 \Rightarrow 3}$: Supongamos lo contrario, es decir que para toda ϕ resulta $\Gamma \vdash \phi$. Luego tenemos $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$. Contradiccion.
- $\boxed{3 \Rightarrow 1}$: Supongamos $\Gamma \vdash \bot$, luego por eliminacion de bottom $\Gamma \vdash \phi$ para cualquier ϕ, en particular para la de la hipotesis. Contradiccion.

1.4.4. Condicion suficiente de consistencia (Lema 2)

Enunciado Sea $\Gamma \subseteq PROP$, si Γ es satisfactible entonces tambien es consistente. Es decir: si existe una valuacion v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = T$ entonces $\Gamma \nvdash \bot$.

Demostracion Sea $v/\, [\![\Gamma]\!]_v = T$. Supongamos que Γ es inconsistente, es decir $\Gamma \vdash \bot$, luego por correctitud $\Gamma \vDash \bot$. Esto significa que para toda valuacion b tal que $[\![\Gamma]\!]_b = T$ tambien resultara $[\![\bot]\!]_b = T$. Como consecuencia de esto, para la valuacion de la hipotesis resultara $[\![\bot]\!]_v = T$. Absurdo. Por lo tanto Γ es consistente.

1.4.5. Propiedades de la inconsistencia (Lema 3)

Enunciado Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\phi \in PROP$ luego:

1. Si $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente entonces $\Gamma \vdash \phi$.
2. Si $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente entonces $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Demostracion

$$1. \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \qquad [\neg\phi]^{(1)}}{\bot}\,\text{Hip}}{\phi}\,\text{RAA}^{(1)}$$

$$2. \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \qquad [\phi]^{(1)}}{\bot}\,\text{Hip}}{\neg\phi}\,i_{\neg}$$

1.4.6. Lema de Lindenbaum (Lema 4)

Enunciado Todo conjunto consistente Γ esta contenido en un conjunto consistente maximal.

Demostracion Notemos primero que $PROP$ es numerable, luego podemos listar a todos sus elementos como $\phi_0, \phi_1, \ldots$ Ahora definimos: $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \nvdash \bot \\ \Gamma_n & \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \bot \end{cases}$ y sea $\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$.

1. $\boxed{\Gamma \subseteq \Gamma^*}$ pues $\Gamma^* = \Gamma_0 \cup \ldots$ y $\Gamma_0 = \Gamma$.
2. $\boxed{\Gamma_i \text{ es consistente para todo } i}$ pues $\Gamma_0 = \Gamma$ es consistente por hipotesis (caso base) y si Γ_n es consistente (hipotesis inductiva) entonces Γ_{n+1} tambien lo es pues por definicion de Γ_i:
   a) Si $\Gamma \cup \{\phi_n\} \vdash \bot$ entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ (consistente por H.I.).
   b) Si $\Gamma \cup \{\phi_n\} \nvdash \bot$ (es consistente) entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n\}$.

3. $\boxed{\Gamma^* \text{ es consistente}}$. En efecto supongamos lo contrario, es decir $\Gamma^* \vdash \bot$, luego existe ψ tal que $\Gamma^* \vdash \psi$ y $\Gamma^* \vdash \neg\psi$. En ambas derivaciones hay un numero finito de premisas $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Gamma^*$. Consideremos un subindice j tal que todas estas premisas esten en $\Gamma_j \subseteq \Gamma^*$, luego $\Gamma_j \vdash \psi$ y $\Gamma_j \vdash \neg\psi$ (Γ_j es inconsistente) pero esto contradice el punto 2.

4. $\boxed{\Gamma^* \text{ es maximal}}$. Sea Δ consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$, veremos que $\Gamma^* = \Delta$ (es decir, $\Delta \subseteq \Gamma^*$). Para cualquier elemento $\phi_m \in \Delta$, como Δ es consistente y $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$ entonces $\Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ es consistente; y por definicion $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ de donde $\phi_m \in \Gamma_{m+1} \subseteq \Gamma^*$ por lo que $\phi_m \in \Gamma^*$.

1.4.7. Clausura bajo derivacion (Lema 5)

Enunciado Si Γ es consistente maximal entonces para cualquier formula ϕ, si $\Gamma \vdash \phi$ entonces $\phi \in \Gamma$.

Demostracion Sea Γ consistente maximal tal que $\Gamma \vdash \phi$ y supongamos que $\phi \notin \Gamma$. Por ser Γ consistente maximal resultara $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot$ y por propiedades de la inconsistencia $\Gamma \vdash \neg\phi$. Como tenemos $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$, por introduccion de botom tambien tenemos $\Gamma \vdash \bot$. Contradiccion. Luego $\phi \in \Gamma$.

1.4.8. Propiedades de la consistencia maximal (Lema 6)

Enunciado Si Γ es consistente maximal entonces:

1. Para toda ϕ resultara: $\phi \in \Gamma$ o bien $\neg\phi \in \Gamma$, pero no ambas.

2. Para todas ϕ, ψ resultara: $\phi \wedge \psi \in \Gamma$ si y solo si $\phi \in \Gamma$ y $\psi \in \Gamma$.

3. Para todas ϕ, ψ resultara: $\phi \vee \psi \in \Gamma$ si y solo si $\phi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$.

4. Para todas ϕ, ψ resultara: $\phi \to \psi \in \Gamma$ si y solo si $\neg\phi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$.

Demostracion

1. Sea $\Gamma' = \Gamma \cup \{\phi\}$.
   - Si Γ' es consistente entonces $\Gamma' = \Gamma$ pues Γ es consistente maximal, por lo que $\phi \in \Gamma$.
   - Si Γ' es inconsistente entonces por propiedades de la inconsistencia resulta $\Gamma \vdash \neg\phi$ y como Γ es cerrado bajo derivacion concluimos $\neg\phi \in \Gamma$.
2.
   - $\boxed{\Leftarrow}$: Trivial por introduccion de $\wedge$ y clausura bajo derivacion.
   - $\boxed{\Rightarrow}$: Trivial por eliminacion de $\wedge$ y clausura bajo derivacion.
3.
   - $\boxed{\Leftarrow}$: Trivial por introduccion de $\vee$ y clausura bajo derivacion.
   - $\boxed{\Rightarrow}$: Supongamos lo contrario, es decir $\phi \notin \Gamma$ y $\psi \notin \Gamma$. Luego por el apartado (1) resultan $\neg\phi \in \Gamma$ y $\neg\psi \in \Gamma$ y como Γ es cerrado bajo derivacion tenemos $\Gamma \vdash \neg\phi$ y $\Gamma \vdash \neg\psi$. Entonces:

$$\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \dfrac{[\phi]^{(1)} \qquad \neg\phi}{\bot}\, i_\bot \qquad \dfrac{[\psi]^{(2)} \qquad \neg\psi}{\bot}\, i_\bot}{\bot}\, e_{\vee(1)(2)}$$

     es decir, Γ es inconsistente. Contradiccion. Luego $\phi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$.
4.
   - $\boxed{\Leftarrow}$: Tenemos dos casos,
     - $\neg\phi \in \Gamma$

1.	$\neg\phi$	Premisa
2.	ϕ	Hipotesis
3.	$\bot$	$i_\bot(2)(1)$
4.	ψ	$e_\bot(3)$
5.	$\phi \to \psi$	$i_\to(2-4)$

- $\psi \in \Gamma$

1.	ψ	Premisa
2.	ϕ	Hipotesis
3.	ψ	Trivial
4.	$\phi \to \psi$	$i_{\to}(2-3)$

- $\boxed{\Rightarrow}$: Por el apartado (1) sabemos que $\psi \in \Gamma$ o $\neg\psi \in \Gamma$. Luego lo propuesto resulta valido en el primer caso por la regla trivial y en el segundo por modus tolens.

1.4.9. Condicion necesaria de consistencia (Lema 7)

Enunciado Si $\Gamma \subseteq PROP$ es consistente entonces es satisfactible, es decir: existe una valuacion v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = T$.

Demostracion Como Γ es consistente, por el lema de Lindenbaum, esta contenido en otro conjunto Γ^* consistente maximal.

Sea $v/v(p_i) = \begin{cases} T & p_i \in \Gamma^* \\ F & p_i \notin \Gamma^* \end{cases}$ veremos que para cualquier formula ψ resultara $\psi \in \Gamma^* \iff [\![\psi]\!]_v = T$ por induccion en ψ:

- Si $\psi \equiv p_i$ luego $[\![p_i]\!]_v = T$ sii $p_i \in \Gamma^*$.
- Si $\psi \equiv \neg\phi$ luego $[\![\neg\phi]\!]_v = T$ sii $[\![\phi]\!]_v = F$ sii (H.I.) $\phi \notin \Gamma^*$ sii (propiedad de la consistencia maximal) $\neg\phi \in \Gamma^*$.
- Si $\psi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$ luego $[\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!]_v = T$ sii $[\![\psi_1]\!]_v = T$ y $[\![\psi_2]\!]_v = T$ sii (H.I.) $\psi_1 \in \Gamma^*$ y $\psi_2 \in \Gamma^*$ sii (propiedad de la consistencia maximal) $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Gamma^*$.
- COMPLETAR.
- Si $\psi \equiv \psi_1 \to \psi_2$ luego $[\![\psi_1 \to \psi_2]\!]_v = F$ sii $[\![\psi_1]\!]_v = T$ y $[\![\psi_2]\!]_v = F$ sii (H.I.) $\psi_1 \in \Gamma^*$ y $\psi_2 \notin \Gamma^*$ sii (propiedad de la consistencia maximal) $\neg\psi_1 \notin \Gamma^*$ y $\psi_2 \notin \Gamma^*$ (propiedad de la consistencia maximal) $\psi_1 \to \psi_2 \notin \Gamma^*$.

Como toda formula $\psi \in \Gamma$ tambien estara en Γ^*, por lo visto anteriormente resultara $[\![\psi]\!]_v = T$ y en consecuencia $[\![\Gamma]\!]_v = T$.

1.4.10. Teorema de completitud

Enunciado Si $\Gamma \vDash \phi$ entonces $\Gamma \vdash \phi$.

Demostracion Demostraremos el contrarreciproco, es decir, si $\Gamma \nvdash \phi$ entonces $\Gamma \nvDash \phi$.

Como $\Gamma \nvdash \phi$ entonces por el contrarreciproco propiedades de la inconsistencia, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente y por condicion necesaria de consistencia tambien es satisfactible, es decir $\exists v / \llbracket \Gamma \cup \{\neg\phi\} \rrbracket_v = T$. Ahora por definicion de semantica tenemos $\llbracket \Gamma \rrbracket_v = T$ y $\llbracket \neg\phi \rrbracket_v = T \iff \llbracket \phi \rrbracket_v = F$ por lo que $\Gamma \nvDash \phi$.

1.4.11. Ejemplos

COMPLETAR.

Capítulo 2

Logica de primer orden

2.1. Sintaxis

2.1.1. Lenguaje de terminos

Sea $\Sigma = \mathcal{F} \cup \mathcal{P} \cup Var \cup C \cup \{(,)\}$ donde:

- $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es un conjunto de simbolos de funcion.
- $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ es un conjunto de simbolos de predicado.
- $Var = \{x_0, x_1, \ldots\}$ es un conjunto de variables.
- $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \perp, \neg, \forall, \exists\}$ es un conjunto de conectivos.
- $A = \{(,)\}$ es un conjunto de simbolos auxiliares.
- $B = \{f_i \in \mathcal{F} / ar\,(f_i) = 0\} \cup Var$ es el conjunto de base inductiva.

Definimos el conjunto de terminos $TERM$ como el minimo conjunto tal que:

- $B \subset PROP$.
- Si $ar\,(f_i) = n > 0$ y $t_1, t_2, \ldots, t_n \in TERM$ entonces $f_i\,(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in TERM$.

Diremos ademas que:

- f_i es una constante si tiene aridad 0.
- P_i es una proposicion si tiene aridad 0.
- El par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ es una signatura.

2.1.2. Lenguaje de formulas

Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ una signatura, el conjunto de las formulas $FROM_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$ se define inductivamente como el minimo conjunto tal que:

- Base:
  - La proposiciones (predicados de aridad 0) pertenecen a $FROM_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$.
  - $\perp \in FROM_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$.
  - Si $ar(P_i) = n > 0$ y $t_1, t_2, \ldots, t_n \in TERM$ entonces $P_i(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in FROM_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$.
- Induccion:
  - Si $\phi \in FROM_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$ entonces $(\neg\phi) \in FROM_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$.
  - Si $\phi, \psi \in FROM_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$ entonces $(\phi\Box\psi) \in FROM_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$.
  - Si $x_i \in Var$ y $\phi \in FROM_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$ entonces $(\forall x_i\phi)$ y $(\exists x_i\phi) \in FROM_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$.

2.1.3. Convenciones sintacticas

- De ser posible omitiremos los parentesis externos en $(\forall x_i\phi)$ y $(\exists x_i\phi)$.
- Convenimos el siguiente orden de precedencia de los conectivos: $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.
- Agregamos $a, b, c, d, \ldots$ al conjunto de constantes y $\ldots, w, x, y, z$ al conjunto de variables.

2.1.4. Variables libres y ligadas

Definimos la funcion $FV_T : TERM \rightarrow \mathcal{P}(Var)$ que calcula el conjunto de variables libres de un termino como:

$$FV_T(t) = \begin{cases} \emptyset & t \in \mathcal{F} \\ \{t\} & t \in Var \\ FV_T(t_1) \cup \ldots \cup FV_T(t_n) & t = f_i(t_1, t_2, \ldots, t_n) \end{cases}$$

Definimos el conjunto de variables libres de una formula ϕ mediante la funcion $FV : FORM \to \mathcal{P}(Var)$:

$$FV(\phi) = \begin{cases} \emptyset & \phi \equiv \bot \\ \emptyset & \phi \in \mathcal{P} \\ FV_T(t_1) \cup \ldots \cup FV_T(t_n) & \phi \equiv P_i(t_1, \ldots, t_n) \\ FV(\psi) & \phi \equiv \neg\psi \\ FV(\psi_1) \cup FV(\psi_2) & \phi \equiv \psi_1 \Box \psi_2 \\ FV(\psi) - \{x_i\} & \phi \equiv \forall x_i \psi \\ FV(\psi) - \{x_i\} & \phi \equiv \exists x_i \psi \end{cases}$$

Analogamente el conjunto de variables ligadas de una formula ϕ queda definido por la funcion $BV : FORM \to \mathcal{P}(Var)$:

$$BV(\phi) = \begin{cases} \emptyset & \phi \equiv \bot \\ \emptyset & \phi \in \mathcal{P} \\ \emptyset & \phi \equiv P_i(t_1, \ldots, t_n) \\ BV(\psi) & \phi \equiv \neg\psi \\ BV(\psi_1) \cup BV(\psi_2) & \phi \equiv \psi_1 \Box \psi_2 \\ BV(\psi) \cup \{x_i\} & \phi \equiv \forall x_i \psi \\ BV(\psi) \cup \{x_i\} & \phi \equiv \exists x_i \psi \end{cases}$$

Observacion Notese que una variable puede estar al mismo tiempo ligada y libre en la misma formula.

2.1.5. Definiciones

- Un termino t (una formula ϕ) se dice cerrado (cerrada) si no tiene variables libres. Notese que esto *NO* es equivalente a decir que todas sus variables esten ligadas.
- A una formula cerrada la llamaremos tambien sentencia.
- $SENT_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$ es el conjunto de sentencias sobre una signatura.
- $TERM_{\mathcal{F}}^{C}$ es el conjunto de terminos cerrados.

2.1.6. Substitucion

Sean s, t terminos y $x_i \in Var$, definimos la substitutcion (para terminos) de x_i por t en s por recursion en s:

- Si $s = x_j \in Var$ entonces $x_j[t/x_i] = \begin{cases} x_j & i \neq j \\ t & i = j \end{cases}$
- $s = c \in \mathcal{F}$ entonces $c[t/x_i] = c$
- $s = f_i(t_1, \ldots, t_n)$ entonces $f_i(t_1, \ldots, t_n)[t/x_i] = f_i(t_1[t/x_i], \ldots, t_n[t/x_i])$

Sea $t \in TERM$ y $\phi \in FORM$ definimos $\phi[t/x_i]$ por recursion en ϕ:

- Si $\phi \equiv \bot$ entonces $\bot[t/x_i] = \bot$
- Si $\phi \equiv P_i$ (donde $ar(P_i) = 0$) entonces $P_i[t/x_i] = P_i$
- Si $\phi \equiv P_i(t_1, \ldots, t_n)$ entonces $P_i(t_1, \ldots, t_n)[t/x_i] = P_i(t_1[t/x_i], \ldots, t_n[t/x_i])$
- Si $\phi \neg\psi \equiv$ entonces $\neg\psi[t/x_i] = \neg(\psi[t/x_i])$
- Si $\phi\psi_1 \Box \psi_2 \equiv$ entonces $\psi_1 \Box \psi_2[t/x_i] = \psi_1[t/x_i] \Box \psi_2[t/x_i]$
- Si $\phi \equiv (\forall x_j \psi)$ entonces $(\forall x_j \psi)[t/x_i] = \begin{cases} (\forall x_j \psi) & i = j \\ (\forall x_j \psi[t/x_i]) & i \neq j \end{cases}$
- Si $\phi \equiv (\exists x_j \psi)$ entonces $(\exists x_j \psi)[t/x_i] = \begin{cases} (\exists x_j \psi) & i = j \\ (\exists x_j \psi[t/x_i]) & i \neq j \end{cases}$

2.1.7. Termino libre para una variable en una formula

Diremos que un termino t esta libre para una variable x en una formula ϕ si y solo si:

- ϕ es atomica (no contiene conectivos).
- $\phi \equiv \phi_1 \Box \phi_2$ y t esta libre para x en ϕ_1 y ϕ_2.
- $\phi \equiv \neg\phi_1$ y t esta libre para x en ϕ_1.

- $\phi \equiv \forall y \phi_1$ y si $x \neq y$ se cumple:
  - t esta libre para x en ϕ_1 y
  - $y \notin FV_T(t)$
- $\phi \equiv \exists y \phi_1$ y si $x \neq y$ se cumple:
  - t esta libre para x en ϕ_1 y
  - $y \notin FV_T(t)$

2.1.8. Ejemplos

2.1.8.1. Traduccion del lenguaje natural

Sean $\mathcal{F} = \{Juan, Lisa, Carlos, Monica\}$ simbolos de funcion de aridad 0 y $\mathcal{P} = \{P, M, H, E, Mj, V\}$ donde $P(x,y), M(x,y), H(x,y), E(x,y)$ significan respectivamente que x es padre/madre/hermano/esposo de y; y $Mj(x), V(x)$ significan que x es mujer/varon, respectivamente.

- Todas las personas tienen madre: $\forall x (\exists y (M(y,x)))$.
- Todas las personas tienen madre y padre: $\forall x (\exists y (M(y,x)) \wedge \exists z (P(z,x)))$.
- Quien tiene una madre, tiene un padre: $\forall x (\exists y (M(y,x) \rightarrow (\exists z P(z,x))))$.
- Juan es abuelo: $\exists x (P(Juan, x) \wedge \exists y (P(x,y)))$.

2.1.8.2. Substituciones

- $(\forall x P(x))[g(x)/x] = (\forall x P(x))$.
- $(\forall z P(x))[h(y)/x] = (\forall z P(x)[h(y)/x]) = (\forall z P(x[h(y)/x])) = (\forall z P(h(y)))$.
- $(\forall z P(x))[f(y,z)/x] = (\forall z P(x)[f(y,z)/x]) = (\forall z P(x[f(y,z)/x])) = (\forall z P(f(y,z)))$.
- $$\begin{aligned}(B(x,y) \rightarrow \exists x C(x))[s(y)/x] &= (B(x,y)[s(y)/x] \rightarrow (\exists x C(x))[s(y)/x]) = \\ &= (B(x[s(y)/x], y[s(y)/x]) \rightarrow (\exists x C(x))) = \\ &= (B(s(y), y) \rightarrow \exists x C(x))\end{aligned}$$

2.1.8.3. Termino libre para una variable en una formula

- x esta libre para la variable x en $(x = x)$, pues $(x = x)$ es atomica.
- y esta libre para la variable x en $(x = x)$, pues $(x = x)$ es atomica.
- $x + y$ esta libre para la variable y en $(z = c)$, pues $(z = c)$ es atomica.
- $c + y$ esta libre para la variable y en $\exists x\,(y = x)$, pues $x \neq y$, $c + y$ esta libre para y en $(y = x)$ y:

$$x \notin FV_T\,(c + y) = FV_T\,(c) \cup FV_T\,(y) = \emptyset \cup \{y\} = \{y\}$$

- $x + w$ no esta libre para la variable z en $\forall w\,(x + z = c)$, pues:

$$w \in FV_T\,(x + w) = FV_T\,(x) \cup FV_T\,(w) = \{x\} \cup \{w\} = \{x, w\}$$

- $x + y$ no esta libre para la variable z en $\forall w\,(x + z = c) \wedge \exists y\,(z = x)$ pues no lo esta en $\exists y\,(z = x)$. En efecto:

$$y \in FV_T\,(x + y) = FV_T\,(x) \cup FV_T\,(y) = \{x\} \cup \{y\} = \{x, y\}$$

- $x + y$ no esta libre para la variable z en $\forall u\,(u = u) \to \forall z\,(z = y)$ pues deberia estarlo en $\forall z\,(z = y)$ y la variable cuantificada coincide con z.

2.2. Semantica

2.2.1. Modelo

Dada una signatura $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, un modelo $\mathcal{M}$ para dicha signatura consiste en:

- Un conjunto no vacio que llamaremos universo y notaremos como $|\mathcal{M}|$.
- Para cada constante $c \in \mathcal{F}$, un elemento $c_{\mathcal{M}} \in |\mathcal{M}|$.
- Para cada simbolo de funcion $f \in \mathcal{F}$ (con aridad $n > 0$), una funcion $f_{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}|^n \to |\mathcal{M}|$.
- Para cada simbolo de predicado $P \in \mathcal{P}$ de aridad $n > 0$, un conjunto $P_{\mathcal{M}} \subseteq |\mathcal{M}|^n$ (es decir, una relacion n-aria).

- Para cada simbolo de predicado $P \in \mathcal{P}$ de aridad 0, un conjunto $P_{\mathcal{M}} \subseteq \{\emptyset\}$.

Ademas dado que la igualdad es necesaria en todas las signaturas, la agregaremos implicitamente como un predicado de aridad 2. Por lo tanto extendemos la definicion de $FORM$ con la siguiente regla: si $t, t' \in TERM$ entonces $t \doteq t' \in FORM$.

Tambien debemos entonces, definir la correspondiente relacion binaria para cualquier modelo $\mathcal{M}$. Definimos entonces: $\doteq_{\mathcal{M}} = \{(a, b) \in |\mathcal{M}| : a = b\}$.

2.2.2. Definicion

Dada una formula $\phi \in FORM_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$ junto con un modelo $\mathcal{M}$ para dicha signatura y una funcion $s : Var \to |\mathcal{M}|$ que llamaremos entorno, definiremos la semantica de ϕ en $\mathcal{M}, s$.

2.2.2.1. Semantica para terminos

$$[\![t]\!]_{\mathcal{M},s} = \begin{cases} s(x_i) & t = x_i \in Var \\ c_{\mathcal{M}} & t = c \in \mathcal{F} \\ f_{\mathcal{M}}\left([\![t_1]\!]_{\mathcal{M},s}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},s}\right) & t = [\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_{\mathcal{M},s} \end{cases}$$

2.2.2.2. Semantica para formulas

- $[\![\bot]\!]_{\mathcal{M},s} = F$
- $[\![P()]\!]_{\mathcal{M},s} = \begin{cases} T & P_{\mathcal{M},s} = \{\emptyset\} \\ F & P_{\mathcal{M},s} = \emptyset \end{cases}$
- $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]_{\mathcal{M},s} = \begin{cases} T & \left([\![t_1]\!]_{\mathcal{M},s}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},s}\right) \in P_{\mathcal{M}} \\ F & \left([\![t_1]\!]_{\mathcal{M},s}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},s}\right) \notin P_{\mathcal{M}} \end{cases}$
- $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s} = min\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s}\right\}$
- $[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s} = max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s}\right\}$

- $[\![\neg\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = \begin{cases} T & [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = F \\ F & [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T \end{cases}$
- $[\![\phi_1 \rightarrow \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s} = \begin{cases} T & [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s} \leq [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s} \\ F & [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s} = T \text{ y } [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s} = F \end{cases}$
- $[\![\forall x_i \phi]\!]_{\mathcal{M},s} = min\left\{[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[x_i \mapsto e]} : e \in |\mathcal{M}|\right\}$
- $[\![\exists x_i \phi]\!]_{\mathcal{M},s} = max\left\{[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[x_i \mapsto e]} : e \in |\mathcal{M}|\right\}$

donde $s\,[x_i \mapsto e]$ es un nuevo entorno que coincide con s en todas las variables savo en x_i donde vale $e \in |\mathcal{M}|$.

Definiciones alternativas

- $[\![\forall x \phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$ si y solo si para cada $e \in |\mathcal{M}|$ resulta $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[x \mapsto e]} = T$.
- $[\![\exists x \phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$ si y solo si para algun $e \in |\mathcal{M}|$ resulta $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[x \mapsto e]} = T$.

Observacion Notese que con base en estas definiciones, la semantica para la igualdad resultara $[\![t_1 \doteq t_2]\!]_{\mathcal{M},s} = T \iff [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},s} = [\![t_2]\!]_{\mathcal{M},s}$.

2.2.3. Teorema

Enunciado Sean s, s' dos entornos que coinciden en todas las variables libres de ϕ, entonces $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s'}$.

Demostracion COMPLETAR.

2.2.4. Corolario

Enunciado Sea $\mathcal{M}$ un modelo, si ϕ es una sentencia (no tiene variables libres) entonces:

- Para cualquier entorno s resulta $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$ o bien
- Para cualquier entorno s resulta $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = F$.

Es decir, la semantica de una sentencia no depende de los entornos, solamente del modelo.

Demostracion COMPLETAR.

2.2.5. Validez y realizabilidad

Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ una signatura, $\phi \in FORM_{(\mathcal{F},\mathcal{P})}$ y $\mathcal{M}$ un modelo para dicha signatura, diremos que $\mathcal{M}$ es un modelo para ϕ (o que ϕ es valida en $\mathcal{M}$) y lo notaremos $\mathcal{M} \vDash \phi$ si y solo si para cualquier entorno s resulta $\llbracket\phi\rrbracket_{\mathcal{M},s} = T$.

Extenderemos esta definicion para conjuntos $\Gamma \subseteq FORM$ como $\mathcal{M} \vDash \Gamma$ si y solo si $\mathcal{M}$ es un modelo de cada $\phi \in \Gamma$.

Analogamente diremos que ϕ es realizable en $\mathcal{M}$ si y solo si para algun entorno s resulta $\llbracket\phi\rrbracket_{\mathcal{M},s} = T$.

2.2.6. Consecuencia semantica

Sea $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq FORM$, diremos que ϕ es consecuencia semantica de Γ y lo notaremos $\Gamma \vDash \phi$ si y solo si para todo modelo $\mathcal{M}$ y cualquier entorno s ocurre que: si $\llbracket\Gamma\rrbracket_{\mathcal{M},s} = T$ entonces $\llbracket\phi\rrbracket_{\mathcal{M},s} = T$.

2.2.7. Ejemplos

2.2.7.1. Razonamiento semantico

Sean $|\mathcal{M}| = \{a, b, c\}$, $R_{\mathcal{M}} = \{(b,c), (b,b), (b,a)\}$ y $\phi \equiv \forall x \exists y\, (\phi_1 \wedge \phi_2)$ donde $\phi_1 \equiv \neg\, (x \doteq y)$ y $\phi_2 \equiv R\,(x,y) \to R\,(y,x)$.

$\llbracket\phi\rrbracket_{\mathcal{M},s} = T$ si y solo si para cada $e \in |\mathcal{M}|$ resulta $\llbracket\exists y\, (\phi_1 \wedge \phi_2)\rrbracket_{\mathcal{M},s[x\mapsto e]} = T$. En particular para $e = b$: $\llbracket\exists y\, (\phi_1 \wedge \phi_2)\rrbracket_{\mathcal{M},s[x\mapsto b]} = T$ si y solo si para algun $h \in |\mathcal{M}|$ resulta $\llbracket\phi_1 \wedge \phi_2\rrbracket_{\mathcal{M},s[x\mapsto b][y\mapsto h]} = T$.

Sea $s' = s\,[x \mapsto b]\,[y \mapsto h]$, consideremos los tres casos para h:

Caso $h = a$**:** $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = min \left\{ [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'}\,, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} \right\}$. Luego:

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \phi_2 \rangle \\
& [\![R\,(x,y) \to R\,(y,x)]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } \to \rangle \\
& [\![R\,(x,y)]\!]_{\mathcal{M},s'} = T \text{ y } [\![R\,(y,x)]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para predicados} \rangle \\
& \left([\![x]\!]_{\mathcal{M},s'}\,, [\![y]\!]_{\mathcal{M},s'} \right) \in R_{\mathcal{M}} \text{ y } \left([\![y]\!]_{\mathcal{M},s'}\,, [\![x]\!]_{\mathcal{M},s'} \right) \notin R_{\mathcal{M}} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para terminos} \rangle \\
& (s'\,(x)\,, s'\,(y)) \in R_{\mathcal{M}} \text{ y } (s'\,(y)\,, s'\,(x)) \notin R_{\mathcal{M}} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } s' \rangle \\
& (b,a) \in R_{\mathcal{M}} \text{ y } (a,b) \notin R_{\mathcal{M}} \\
& \langle \text{lo cual vale} \rangle
\end{aligned}
$$

Por lo tanto: $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = min \left\{ [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'}\,, F \right\} = F$.

Caso $h = c$**:** Analogo.

Caso $h = b$**:** $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = min\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'}\right\}$. Luego:

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\iff & \langle \text{definicion de } \phi_1 \rangle \\
& [\![\neg (x \doteq y)]\!]_{\mathcal{M},s'} = F \\
\iff & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } \neg \rangle \\
& [\![x \doteq y]\!]_{\mathcal{M},s'} = T \\
\iff & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } \doteq \rangle \\
& [\![x]\!]_{\mathcal{M},s'} = [\![y]\!]_{\mathcal{M},s'} \\
\iff & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para terminos} \rangle \\
& s'(x) = s'(y) \\
\iff & \langle \text{definicion de } s' \rangle \\
& b = b \\
& \langle \text{lo cual vale} \rangle
\end{aligned}
$$

Por lo tanto: $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = min\left\{F, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'}\right\} = F$.

Concluision Hemos visto que para ningun $h \in |\mathcal{M}|$ resulta $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'} = T$ por lo que $[\![\exists y (\phi_1 \wedge \phi_2)]\!]_{\mathcal{M},s[x \mapsto b]} = F$. Como dijimos que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$ si y solo si para cada $e \in |\mathcal{M}|$ resulta $[\![\exists y (\phi_1 \wedge \phi_2)]\!]_{\mathcal{M},s[x \mapsto e]} = T$ y vimos que para $e = b$ no resultaba, podemos concluir que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = F$.

2.2.7.2. Validez de modelos

Sea $\phi \equiv \forall x (\phi_1 \vee \phi_2)$ donde $\phi_1 \equiv P(g(x), y)$ y $\phi_2 \equiv Q(x)$, definimos:

- el modelo $\mathcal{M}$ donde:
  - $|\mathcal{M}| = \{1, 2\}$.
  - $g_{\mathcal{M}}(\alpha) = 1$.
  - $Q_{\mathcal{M}} = \{2\}$.
  - $P_{\mathcal{M}} = \{(1, 1)\}$.
- el entorno s tal que $s(x) = s(y) = 1$.
- el entorno s' tal que $s'(x) = s'(y) = 2$.
- el modelo $\mathcal{M}'$ identico $\mathcal{M}$ salvo por $Q_{\mathcal{M}'} = \{1, 2\}$.

Veamos que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$:

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T \\
\iff & \langle \text{definicion de } \phi \rangle \\
& [\![\forall x\,(\phi_1 \vee \phi_2)]\!]_{\mathcal{M},s} = T \\
\iff & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } \forall \rangle \\
& min\left\{[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto e]} : e \in |\mathcal{M}|\right\} = T \\
\iff & \langle \text{definicion por extension} \rangle \\
& min\left\{[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto 1]:=s_1}, [\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto 2]:=s_2}\right\} = T \\
\iff & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } \vee \rangle \\
& \underbrace{min\left\{max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s_1}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s_1}\right\}, max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s_2}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s_2}\right\}\right\} = T}_{*}
\end{aligned}
$$

como

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s_1} = T \\
\iff & \langle \text{definicion de } \phi_1 \rangle \\
& [\![P\,(g\,(x)\,, y)]\!]_{\mathcal{M},s_1} = T \\
\iff & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para predicados} \rangle \\
& \left([\![g\,(x)]\!]_{\mathcal{M},s_1}, [\![y]\!]_{\mathcal{M},s_1}\right) \in P_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para terminos} \rangle \\
& \left(g_{\mathcal{M}}\left([\![x]\!]_{\mathcal{M},s_1}\right), s_1\,(y)\right) \in P_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para terminos} \rangle \\
& (g_{\mathcal{M}}\,(s_1\,(x))\,, s_1\,(y)) \in P_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definicion de } s_1 \rangle \\
& (g_{\mathcal{M}}\,(1)\,, 1) \in P_{\mathcal{M}} \\
\iff & \langle \text{definicion de } g_{\mathcal{M}} \rangle \\
& (1, 1) \in P_{\mathcal{M}} \\
& \langle \text{lo cual vale} \rangle
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s_2} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \phi_2 \rangle \\
& [\![Q\,(x)]\!]_{\mathcal{M},s_2} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para predicados} \rangle \\
& [\![x]\!]_{\mathcal{M},s_2} \in Q_{\mathcal{M}} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para terminos} \rangle \\
& s_2\,(x) \in Q_{\mathcal{M}} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } s_2 \rangle \\
& 2 \in Q_{\mathcal{M}} \\
& \langle \text{lo cual vale} \rangle
\end{aligned}
$$

volviendo a $*$

$$
\begin{aligned}
& min\left\{max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s_1}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s_1}\right\}, max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s_2}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s_2}\right\}\right\} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{lo visto anteriormente} \rangle \\
& min\left\{max\left\{T, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s_1}\right\}, max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s_2}, T\right\}\right\} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } max \rangle \\
& min\,\{T, T\} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } min \rangle \\
& T = T \\
& \langle \text{lo cual vale} \rangle
\end{aligned}
$$

es decir $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$.

Veamos que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s'} = F$:

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = min\left\{max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'_1}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'_1}\right\}, max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'_2}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'_2}\right\}\right\} **$$

como

$$\begin{aligned}
& [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'_1} = F \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \phi_2 \rangle \\
& [\![Q(x)]\!]_{\mathcal{M},s'_1} = F \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para predicados} \rangle \\
& [\![x]\!]_{\mathcal{M},s'_1} \notin Q_{\mathcal{M}} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para terminos} \rangle \\
& s'_1(x) \notin Q_{\mathcal{M}} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } s'_1 \rangle \\
& 1 \notin Q_{\mathcal{M}} \\
& \langle \text{lo cual vale} \rangle
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'_1} = F \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{analogamente al ejemplo anterior} \rangle \\
& (g_{\mathcal{M}}(s'_1(x)), s'_1(y)) \notin P_{\mathcal{M}} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } s'_1 \rangle \\
& (g_{\mathcal{M}}(1), 2) \notin P_{\mathcal{M}} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } g_{\mathcal{M}} \rangle \\
& (1,2) \notin P_{\mathcal{M}} \\
& \langle \text{lo cual vale} \rangle
\end{aligned}$$

volviendo a $**$

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s} = min\left\{max\{F,F\}, max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},s'_2}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M},s'_2}\right\}\right\} = F$$

es decir $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s'} = F$.

Veamos que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}',t} = T$ independientemente del entorno:

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}',t} = min\left\{max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M}',t_1}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M}',t_1}\right\}, max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M}',t_2}, [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M}',t_2}\right\}\right\}***$$

como

$$\begin{aligned}
& [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M}',t_1} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \phi_2 \rangle \\
& [\![Q\,(x)]\!]_{\mathcal{M}',t_1} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para predicados} \rangle \\
& [\![x]\!]_{\mathcal{M}',t_1} \in Q_{\mathcal{M}'} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para terminos} \rangle \\
& t_1\,(x) \in Q_{\mathcal{M}'} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } t_1 \rangle \\
& 1 \in Q_{\mathcal{M}} \\
& \langle \text{lo cual vale} \rangle
\end{aligned}$$

y analogamente $[\![\phi_2]\!]_{\mathcal{M}',t_2} = T$ volviendo a $***$

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}',t} = min\left\{max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M}',t_1}, T\right\}, max\left\{[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M}',t_2}, T\right\}\right\} = T$$

es decir $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}',t} = T$ por lo que $\mathcal{M}'$ es un modelo para ϕ ($\mathcal{M}' \vDash \phi$).

2.2.7.3. Consecuencia semantica

Sean $\mathcal{F} = \left\{\dot{s}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{0}\right\}$ y $\mathcal{P} = \{\}$. Llamaremos $\Gamma = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6\}$ al conjunto que incluye las siguientes formulas:

- $\phi_1 \equiv \forall x \left(\neg \left(\dot{s}\,(x) \doteq \dot{0}\right)\right)$.
- $\phi_2 \equiv \forall x \forall y \left(\left(\dot{s}\,(x) \doteq \dot{s}\,(y)\right) \rightarrow x \doteq y\right)$.
- $\phi_3 \equiv \forall x \left(x \dot{+} \dot{0} \doteq x\right)$.
- $\phi_4 \equiv \forall x \forall y \left(\left(x \dot{+} \dot{s}\,(y)\right) \doteq \dot{s}\left(x \dot{+} y\right)\right)$.
- $\phi_5 \equiv \forall x \left(x \dot{\times} \dot{0} \doteq \dot{0}\right)$.
- $\phi_5 \equiv \forall x \forall y \left(\left(x \dot{\times} \dot{s}\,(y)\right) \doteq \left(\left(x \dot{\times} y\right) \dot{+} x\right)\right)$.

Sea $\phi \equiv \neg\left(\dot{0} \doteq \dot{s}\left(\dot{s}\left(\dot{0}\right)\right)\right)$ veremos que ϕ es consecuencia semantica de Γ ($\Gamma \vDash \phi$), es decir, que sin importar el modelo y entorno que consideremos resultara que si $[\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M},t} = T$ entonces $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},t} = T$.

Demostracion Sean $\mathcal{M}$ y t tales que $[\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M},t} = T$. En particular $[\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},t} = T$, luego:

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{M},t} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \phi_1 \rangle \\
& \left[\!\left[\forall x \left(\neg\left(\dot{s}\,(x) \doteq \dot{0}\right)\right)\right]\!\right]_{\mathcal{M},t} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } \forall \rangle \\
& \text{para cada } e \in |\mathcal{M}|\,, \left[\!\left[\neg\left(\dot{s}\,(x) \doteq \dot{0}\right)\right]\!\right]_{\mathcal{M},t[x\mapsto e]} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } \neg \rangle \\
& \text{para cada } e \in |\mathcal{M}|\,, \left[\!\left[\left(\dot{s}\,(x) \doteq \dot{0}\right)\right]\!\right]_{\mathcal{M},t[x\mapsto e]} = F \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } \doteq \rangle \\
& \text{para cada } e \in |\mathcal{M}|\,, [\![(\dot{s}\,(x))]\!]_{\mathcal{M},t[x\mapsto e]} \neq [\![\dot{0}]\!]_{\mathcal{M},t[x\mapsto e]} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para terminos} \rangle \\
& \underbrace{\text{para cada } e \in |\mathcal{M}|\,, \dot{s}_{\mathcal{M}}\,(e) \neq \dot{0}_{\mathcal{M}}}_{*}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},t} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \phi \rangle \\
& \left[\!\left[\neg\left(\dot{0} \doteq \dot{s}\left(\dot{s}\left(\dot{0}\right)\right)\right)\right]\!\right]_{\mathcal{M},t} = T \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } \neg \rangle \\
& \left[\!\left[\left(\dot{0} \doteq \dot{s}\left(\dot{s}\left(\dot{0}\right)\right)\right)\right]\!\right]_{\mathcal{M},t} = F \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para } \doteq \rangle \\
& [\![\dot{0}]\!]_{\mathcal{M},t} \neq \left[\!\left[\dot{s}\left(\dot{s}\left(\dot{0}\right)\right)\right]\!\right]_{\mathcal{M},t} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } [\![]\!] \text{ para terminos} \rangle \\
& \dot{0}_{\mathcal{M}} \neq \dot{s}_{\mathcal{M}}\left(\left[\!\left[\dot{s}\left(\dot{0}\right)\right]\!\right]_{\mathcal{M},t}\right) \\
& \left\langle \text{lo cual vale tomando } e = \left[\!\left[\dot{s}\left(\dot{0}\right)\right]\!\right]_{\mathcal{M},t} \text{ en } * \right\rangle
\end{aligned}
$$

Conclusion Hemos visto que dado un modelo y un entorno, si $[\![\Gamma]\!]_{\mathcal{M},t} = T$ tambien resulta $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},t} = T$. Por lo tanto $\Gamma \vDash \phi$ (ϕ es consecuencia semantica de Γ).

2.2.7.4. Propiedades de los cuantificadores

- $\exists x \forall y \phi \vDash \forall y \exists x \phi$: Sean $\mathcal{M}, s$ tales que $[\![\exists x \forall y \phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$. Resultara entonces:

$$[\![\exists x \forall y \phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$$
$$\iff$$
$$\text{para algun } c \in |\mathcal{M}|\,, [\![\forall y \phi]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto c]} = T$$
$$\iff$$
$$\text{para algun } c \in |\mathcal{M}|\,,\ \text{y para cualquier } d \in |\mathcal{M}|\,, [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto c][y\mapsto d]} = T$$

Ahora:

$$[\![\forall y \exists x \phi]\!]_{\mathcal{M},s} = T$$
$$\iff$$
$$\text{para cualquier } a \in |\mathcal{M}|\,, [\![\exists x \phi]\!]_{\mathcal{M},s[y\mapsto c]} = T$$
$$\iff$$
$$\text{para cualquier } a \in |\mathcal{M}|\,,\ \text{y para algun } b \in |\mathcal{M}|\,, [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[y\mapsto a][x\mapsto b]} = T$$

Sea entonces $a \in |\mathcal{M}|$, queremos verificar que para algun $b \in |\mathcal{M}|\,, [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[y\mapsto a][x\mapsto b]} = T$. Tomando $d = a$ resultara por hipotesis que para $b := c$, $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto c][y\mapsto d]} = T$, es decir: $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[x\mapsto b][y\mapsto a]} = T \iff [\![\phi]\!]_{\mathcal{M},s[y\mapsto a][x\mapsto b]} = T$.

2.3. Deduccion natural y calculo de secuentes

2.3.1. Reglas para la igualdad

2.3.1.1. Introduccion de la igualdad

- Deduccion natural:

$$\frac{}{t = t}\ i_{=}$$

- Regla de secuente: Para cualesquiera $t, t' \in TERM$; $\Gamma, \Delta \subseteq FORM$ y $\psi \in FORM$

2.3.1.2. Eliminacion de la igualdad (Regla de Leibniz)

- Deduccion natural:

$$\frac{t = t' \qquad \phi[t/x]}{\phi[t'/x]}\, e_{=}$$

(Si t y t' estan libres para x en ϕ)

- Regla de secuente: Si $\Gamma \vdash t = t'$ y $\Delta \vdash \phi\,[t/x]$ son secuentes validos, entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash \phi\,[t'/x]$ tambien; para cualesquiera $t, t' \in TERM$; $\Gamma, \Delta \subseteq FORM$ y $\phi \in FORM$ (siempre que x este libre para t y t' en ϕ).

2.3.2. Reglas para la cuantificacion universal

2.3.2.1. Eliminacion de la cuantificacion universal

- Deduccion natural:

$$\frac{\forall x \phi}{\phi[t/x]}\, e_{\forall}$$

(Si t esta libre para x en ϕ)

- Regla de secuente: Si $\Gamma \vdash \forall x \phi$ es un secuente valido entonces $\Gamma \vdash \phi\,[t/x]$ tambien; para cualquier $t \in TERM$ (siempre que t este libre para x en ϕ).

2.3.2.2. Introduccion de la cuantificacion universal

- Deduccion natural:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ \phi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x \phi}\, i_{\forall}$$

(Donde x_0 no aparece libre fuera de la caja)

- Regla de secuente: Si $\Gamma \vdash \phi\,[x_0/x]$ es un secuente valido y x_0 no aparece libre en Γ entonces $\Gamma \vdash \forall x \phi$ tambien es un secuente valido.

2.3.3. Reglas para la cuantificacion existencial

2.3.3.1. Introduccion de la cuantificacion existencial

- Deduccion natural:

$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x\phi}\, i_\exists$$

(Si t esta libre para x en ϕ)

- Regla de secuente: Si $\Gamma \vdash \phi\,[t/x]$ es un secuente valido entonces $\Gamma \vdash \exists x\phi$ tambien; (siempre que t este libre para x en ϕ).

2.3.3.2. Eliminacion de la cuantificacion existencial

- Deduccion natural:

$$\frac{\exists x\phi \qquad \boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \Big[\phi\,[x_0/x]\Big]^{(1)} \\ \vdots \\ \psi \end{array}}}{\psi}\; e_\exists^{(1)}$$

(Donde x_0 no aparece libre fuera de la caja)

- Regla de secuente: Si $\Gamma \vdash \exists x\phi$ y $\Delta \cup \{\phi\,[x_0/x] \vdash \psi\}$ son secuentes validos donde x_0 no esta libre en $\Gamma \cup \Delta$ entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$ tambien lo es.

2.3.4. Ejemplos

2.3.4.1. Propiedades de la igualdad

- $\vdash x = x$ (reflexividad):

$$1. \quad x = x \quad i_=$$

- $x = y \vdash y = x$ (simetria):

1.	$x = y$	Premisa
2.	$x = x$	$i_=$
3.	$y = x$	$e_=(1)(2)[\phi \equiv z = x]$(reemplazando z)

- $x = y, y = z \vdash x = z$ (transitividad):

1.	$x = y$	Premisa
2.	$y = z$	Premisa
3.	$y = x$	Simetria (1)
4.	$x = z$	$e_=(3)(2)[\phi \equiv w = z]$(reemplazando w)

2.3.4.2. Propiedades de los cuantificadores

- $\forall x\phi \vdash \exists x\phi$:

1.	$\forall x\phi$	Premisa
2.	$\phi[x_0/x]$	$e_\forall(1)$
3.	$\exists x\phi$	$i_\exists(2)$

- $\neg\forall x\phi \vdash \exists x\neg\phi$:

1.	$\neg\forall x\phi$	Premisa
2.	$\neg\exists x\neg\phi$	Hipotesis
3.	x_0	No esta libre afuera
4.	$(\neg\phi)[x_0/x]$	Hipotesis
5.	$\exists x\neg\phi$	$i_\exists(4)$
6.	$\perp$	$i_\perp(5)(2)$
7.	$\phi[x_0/x]$	$RAA(4-6)$
8.	$\forall x\phi$	$i_\forall(3-7)$
9.	$\perp$	$i_\perp(8)(1)$
10.	$\exists x\neg\phi$	$RAA(2-9)$

- $\exists x \neg\phi \vdash \neg\forall x\phi$:

1.	$\exists x \neg\phi$	Premisa
2.	$\forall x\phi$	Hipotesis
3.	x_0	No esta libre afuera
4.	$(\neg\phi)[x_0/x]$	Hipotesis
5.	$\phi[x_0/x]$	$e_\forall(2)$
6.	$\bot$	$i_\bot(5)(4)$
7.		
8.	$\bot$	$e_\exists(1)(2-6)$
9.	$\neg\forall x\phi$	$i_\neg(2-8)$

- $\neg\exists x\phi \vdash \forall x \neg\phi$:

1.	$\neg\exists x\phi$	Premisa
2.	x_0	No esta libre afuera
3.	$\phi[x_0/x]$	Hipotesis
4.	$\exists x\phi$	$i_\exists(3)$
5.	$\bot$	$i_\bot(4)(1)$
6.	$\neg\phi[x_0/x]$	$i_\neg(3-5)$
7.	$(\neg\phi)[x_0/x]$	Trivial (6)
8.	$\forall x\neg\phi$	$RAA(3-7)$

- $\forall x \neg\phi \vdash \neg\exists x\phi$:

1.	$\forall x \neg\phi$	Premisa
2.	$\exists x\phi$	Hipotesis
3.	x_0	No esta libre afuera
4.	$\phi[x_0/x]$	Hipotesis
5.	$(\neg\phi)[x_0/x]$	$e_\forall(1)$
6.	$\neg\phi[x_0/x]$	Trivial(5)
7.	$\perp$	$i_\perp(4)(6)$
8.		
9.	$\perp$	$e_\exists(2)(3-7)$
10.	$\neg\exists x\phi$	$i_\neg(2-9)$

- $\forall x P\,(x) \vdash \forall u P\,(u)$:

1.	$\forall x P(x)$	Premisa
2.	u_0	No esta libre afuera
3.	$P(x)[u_0/x]$	$e_\forall(1)$
4.	$P(u_0)$	Trivial (3)
5.	$P(u_0)[u_0/u]$	Trivial (4)
6.	$\forall u P(u)$	$i_\forall(2-5)$

- $\exists x P(x) \vdash \exists u P(u)$:

1.	$\exists x P(x)$	Premisa
2.	u_0	No esta libre afuera
3.	$P(x)[u_0/x]$	Hipotesis
4.	$P(u_0)$	Trivial (3)
5.	$P(u_0)[u_0/u]$	Trivial (4)
6.	$\exists u P(u)$	$i_{\exists}(5)$
7.		
8.	$\exists u P(u)$	$e_{\exists}(1)(2-6)$

- $\forall x \forall y \phi \vdash \forall y \forall x \phi$:

1.	$\forall x \forall y \phi$	Premisa
2.	x_0	No esta libre afuera
3.	$(\forall y \phi)[x_0/x]$	$e_{\forall}(1)$
4.	$\forall y \phi[x_0/x]$	Trivial (3)
5.	y_0	No esta libre afuera
6.	$\phi[x_0/x][y_0/y]$	$e_{\forall}(4)$
7.	$\phi[y_0/y][x_0/x]$	Trivial (6)
8.	$\forall x(\phi[y_0/y])$	$i_{\forall}(5-7)$
9.	$\forall x \phi[y_0/y]$	Trivial (8)
10.	$\forall y \forall x \phi$	$i_{\forall}(2-9)$

2.3.4.3. Manejo de la igualdad

- $x = y \vdash (z + x) = (z + y)$:

1.	$x = y$	Premisa
2.	$(z + x) = (z + x)$	$i_{=}$
3.	$(z + x) = (z + y)$	$e_{=}(1)(2)[\phi \equiv (z + x) = (z + w)]$(reemplazando w)

- $(x = 0) \vee ((x + x) > 0) \vdash (y = (x + x)) \to ((y > 0) \vee (y = (0 + x)))$:

1.	$(x = 0) \vee ((x + x) > 0)$	Premisa
2.	$y = (x + x)$	Hipotesis
3.	$x = 0$	Hipotesis
4.	$y = (0 + x)$	$e_{=}(3)(2)[\phi \equiv y = z + x]$
5.	$((y > 0) \vee (y = (0 + x))$	$i_{\vee 2}(4)$
6.	$x + x > 0$	Hipotesis
7.	$(x + x) = y$	Simetria (2)
8.	$y > 0$	$e_{=}(7)(6)[\phi \equiv z > 0]$
9.	$((y > 0) \vee (y = (0 + x))$	$i_{\vee 1}(8)$
10.	$((y > 0) \vee (y = (0 + x))$	$e_{\vee}(1)(3-5)(6-9)$
11.	$(y = (x + x) \to ((y > 0) \vee (y = (0 + x)))$	$i_{\to}(2-10)$

2.3.4.4. Manejo del cuantificador universal

- $P(b) \vdash \forall x\,(x = b \to P(x))$:

1.	$P(b)$	Premisa
2.	x_0	No esta libre afuera
3.	$x_0 = b$	Hipotesis
4.	$b = x_0$	Simertria (3)
5.	$P(x_0)$	$e_{=}(4)(1)[\phi \equiv P(x)]$
6.	$x_0 = b \to P(x_0)$	$i_{\to}(3-5)$
7.	$\forall x(x = b \to P(x))$	$i_{\forall}(2-6)$

- $P(b), \forall x \forall y (P(x) \land P(y) \to x = y) \vdash \forall x (P(x) \leftrightarrow x = b)$:

1.	$P(b)$	Premisa
2.	$\forall x \forall y (P(x) \land P(y) \to x = y)$	Premisa
3.	x_0	No esta libre afuera
4.	$P(x_0)$	Hipotesis
5.	$\forall y (P(x_0) \land P(y) \to x_0 = y)$	$e_\forall(2)$
6.	$P(x_0) \land P(b) \to x_0 = b$	$e_\forall(5)$
7.	$P(x_0) \land P(b)$	$i_\land(4)(1)$
8.	$x_0 = b$	$e_\to(7)(6)$
9.	$P(x_0) \to x_0 = b$	$i_\to(4-8)$
10.	$x_0 = b$	Hipotesis
11.	$b = x_0$	Simertria (10)
12.	$P(x_0)$	$e_=(11)(1)[\phi \equiv P(x)]$
13.	$x_0 = b \to P(x_0)$	$i_\to(10-12)$
14.	$P(x_0) \leftrightarrow x_0 = b$	$i_\leftrightarrow(9)(13)$
15.	$\forall x (P(x) \leftrightarrow x = b)$	$i_\forall(3-14)$

- $\forall x\,(P\,(x) \leftrightarrow x = b) \vdash P\,(b) \wedge \forall x \forall y\,(P\,(x) \wedge P\,(y) \rightarrow x = y)$:

1.	$\forall x(P(x) \leftrightarrow x = b)$	Premisa
2.	$P(b) \leftrightarrow b = b$	$e_\forall(1)$
3.	$b = b$	$i_=$
4.	$P(b)$	$e_\leftrightarrow(3)(2)$
5.	$\exists x P(x)$	$i_\exists(4)$
6.	x_0	No esta libre afuera
7.	$P(x_0)$	Hipotesis
8.	$P(x_0)$	Trivial
9.	$P(x_0)$	$e_\exists(5)(6-8)$
10.	y_0	No esta libre afuera
11.	$P(y_0) \leftrightarrow y_0 = b$	$e_\forall(1)$
12.	$P(x_0) \wedge P(y_0)$	Hipotesis
13.	$P(y_0)$	$e_{\wedge 2}(13)$
14.	$y_0 = b$	$e_\leftrightarrow(13)(11)$
15.	$b = y_0$	Simetria(14)
16.	$P(x_0) \leftrightarrow x_0 = b$	$e_\forall(1)$
17.	$P(x_0) \leftrightarrow x_0 = y_0$	$e_=(15)(16)$
18.	$x_0 = y_0$	$e_\leftrightarrow(9)(17)$
19.	$P(x_0) \wedge P(y_0) \rightarrow x_0 = y_0$	$i_\rightarrow(12-18)$
20.	$\forall y(P(x_0) \wedge P(y) \rightarrow x_0 = y)$	$i_\forall(10-19)$
21.	$\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$	$i_\forall(6-20)$
22.	$P(b) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$	$i_\wedge(4)(21)$

- $\vdash \forall x \forall y \forall z \neg (x = y) \to \neg (x = z) \vee \neg (y = z)$:

1.	x_0	No esta libre afuera
2.	y_0	No esta libre afuera
3.	z_0	No esta libre afuera
4.	$\neg(x_0 = y_0)$	Hipotesis
5.	$(x_0 = z_0) \vee \neg(x_0 = z_0)$	TND
6.	$x_0 = z_0$	Hipotesis
7.	$\neg(z_0 = y_0)$	$e_{=}(6)(4)[\phi \equiv \neg(w = y_0)]$
8.	$y_0 = z_0$	Hipotesis
9.	$z_0 = y_0$	Simetria (8)
10.	$\perp$	$i_{\perp}(9)(7)$
11.	$\neg(y_0 = z_0)$	$i_{\neg}(8)$
12.	$\neg(x_0 = z_0) \vee \neg(y_0 = z_0)$	$i_{\vee 2}(11)$
13.	$\neg(x_0 = z_0)$	Hipotesis
14.	$\neg(x_0 = z_0) \vee \neg(y_0 = z_0)$	$i_{\vee 1}(13)$
15.	$\neg(x_0 = z_0) \vee \neg(y_0 = z_0)$	$e_{\vee}(5)(6-12)(13-14)$
16.	$\neg(x_0 = y_0) \to \neg(x_0 = z_0) \vee \neg(y_0 = z_0)$	$i_{\to}(4-15)$
17.	$\forall z \neg(x_0 = y_0) \to \neg(x_0 = z) \vee \neg(y_0 = z)$	$i_{\forall}(3-16)$
18.	$\forall y \forall z \neg(x_0 = y) \to \neg(x_0 = z) \vee \neg(y = z)$	$i_{\forall}(2-17)$
19.	$\forall x \forall y \forall z \neg(x = y) \to \neg(x = z) \vee \neg(y = z)$	$i_{\forall}(1-18)$

- $\vdash \forall x\,(P\,(x) \to Q\,(x,x)) \to \forall x \exists y\,(Q\,(x,y) \vee \neg P\,(y))$:

1.	$\forall x(P(x) \to Q(x,x))$	Hipotesis
2.	x_0	No esta libre afuera
3.	$P(x_0) \to Q(x_0,x_0)$	$e_\forall(1)$
4.	$P(x_0) \vee \neg P(x_0)$	TND
5.	$P(x_0)$	Hipotesis
6.	$Q(x_0,x_0)$	$e_\to(5)(3)$
7.	$Q(x_0,x_0) \vee \neg P(x_0)$	$i_{\vee 1}(6)$
8.	$\neg P(x_0)$	Hipotesis
9.	$Q(x_0,x_0) \vee \neg P(x_0)$	$i_{\vee 2}(8)$
10.	$Q(x_0,x_0) \vee \neg P(x_0)$	$e_\vee(4)(5-7)(8-9)$
11.	$\exists y Q(x_0,y) \vee \neg P(y)$	$i_\exists(10)$
12.	$\forall x \exists y Q(x,y) \vee \neg P(y)$	$i_\forall(2-11)$
13.	$\forall x(P(x) \to Q(x,x)) \to \forall x \exists y(Q(x,y) \vee \neg P(y))$	$i_\to(1-12)$

2.3.4.5. Manejo del cuantificador existencial

- $\exists x \exists y \left(H\left(x,y\right) \vee H\left(y,x\right)\right), \neg \exists H\left(x,x\right) \vdash \exists x \exists y \neg \left(x = y\right)$:

1.	$\exists x \exists y (H(x,y) \vee H(y,x))$	Premisa
2.	$\neg \exists x H(x,x)$	Premisa
3.	$\forall x \neg H(x,x)$	Propiedad (2)
4.	x_0	No esta libre afuera
5.	$\exists y (H(x_0,y) \vee H(y,x_0))$	Hipotesis
6.	y_0	No esta libre afuera
7.	$H(x_0,y_0) \vee H(y_0,x_0)$	Hipotesis
8.	$\neg H(x_0,x_0)$	$e_\forall(3)$
9.	$x_0 = y_0$	Hipotesis
10.	$y_0 = x_0$	Simetria (9)
11.	$H(x_0,x_0) \vee H(x_0,x_0)$	$e_=(10)(7)$
12.	$H(x_0,x_0)$	Idempotencia (11)
13.	$\perp$	$i_\perp(12)(8)$
14.	$\neg(x_0 = y_0)$	$i_\neg(9-13)$
15.	$\exists y \neg(x_0 = y)$	$i_\exists(14)$
16.		
17.	$\exists y \neg(x_0 = y)$	$e_\exists(5)(6-15)$
18.	$\exists x \exists y \neg(x = y)$	$i_\exists(17)$
19.		
20.	$\exists x \exists y \neg(x = y)$	$e_\exists(1)(4-18)$

- $\exists x\left(S \to Q\left(x\right)\right) \vdash S \to \exists x Q\left(x\right)$:

1.	$\exists x(S \to Q(x))$	Premisa
2.	S	Hipotesis
3.	x_0	No esta libre afuera
4.	$S \to Q(x_0)$	Hipotesis
5.	$Q(x_0)$	$e_{\to}(2)(4)$
6.		
7.	$Q(x_0)$	$e_{\exists}(1)(3-5)$
8.	$\exists x Q(x)$	$i_{\exists}(7)$
9.	$S \to \exists x Q(x)$	$i_{\to}(2-8)$

- $\exists x\left(\neg P\left(x\right) \vee Q\left(x\right)\right) \vdash \exists x\left(\neg\left(P\left(x\right) \wedge \neg Q\left(x\right)\right)\right)$:

1.	$\exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$	Premisa
2.	x_0	No esta libre afuera
3.	$\neg P(x_0) \vee Q(x_0)$	Hipotesis
4.	$P(x_0) \wedge \neg Q(x_0)$	Hipotesis
5.	$P(x_0)$	$e_{\wedge 1}(4)$
6.	$\neg Q(x_0)$	$e_{\wedge 2}(4)$
7.	$\neg P(x_0)$	Hipotesis
8.	$\perp$	$i_{\perp}(5)(7)$
9.	$Q(x_0)$	Hipotesis
10.	$\perp$	$i_{\perp}(9)(6)$
11.	$\perp$	$e_{\vee}(3)(7-8)(9-10)$
12.	$\neg(P(x_0) \wedge \neg Q(x_0))$	$i_{\neg}(4-11)$
13.		
14.	$\exists x(\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)))$	$e_{\exists}(1)(2-12)$

2.3.4.6. Otros ejemplos

- $\vdash \neg\exists\forall y\,(P\,(y,x) \leftrightarrow \neg P\,(y,y))$:

1.	$\exists x\forall y(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y))$	Hipotesis
2.	x_0	No esta libre afuera
3.	$\forall y(P(y,x_0) \leftrightarrow \neg P(y,y))$	Hipotesis
4.	$P(x_0,x_0) \leftrightarrow \neg P(x_0,x_0)$	$e_\forall(3)$
5.	$P(x_0,x_0) \vee \neg P(x_0,x_0)$	TND
6.	$P(x_0,x_0)$	Hipotesis
7.	$\neg P(x_0,x_0)$	$e_\leftrightarrow(6)(4)$
8.	$\perp$	$i_\perp(6)(7)$
9.	$\neg P(x_0,x_0)$	Hipotesis
10.	$P(x_0,x_0)$	$e_\leftrightarrow(9)(4)$
11.	$\perp$	$i_\perp(10)(9)$
12.	$\perp$	$e_\vee(5)(6-8)(9-11)$
13.		
14.	$\perp$	$e_\exists(1)(2-12)$
15.	$\neg\exists x\forall y(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y))$	$i_\neg(1-14)$

En los siguientes ejemplos, asumiremos que $x \notin FV(\psi)$:

- $\exists x (\phi \to \psi) \vdash \forall x \phi \to \psi$:

1.	$\exists x(\phi \to \psi)$	Premisa
2.	$\forall x \phi$	Hipotesis
3.	x_0	No esta libre afuera
4.	$(\phi \to \psi)[x_0/x]$	Hipotesis
5.	$\phi[x_0/x] \to \psi[x_0/x]$	Trivial (4)
6.	$\phi[x_0/x] \to \psi$	Trivial (5)($x \notin FV(\psi)$)
7.	$\phi[x_0/x]$	$e_\forall(2)$
8.	ψ	$e_\to(7)(6)$
9.		
10.	ψ	$e_\exists(1)(3-8)$
11.	$\forall x \phi \to \psi$	$i_\to(2-10)$

- $\forall x\phi \to \psi \vdash \exists x\,(\phi \to \psi)$:

1.	$\forall x\phi \to \psi$	Premisa
2.	$\forall x\phi \vee \neg(\forall x\phi)$	TND
3.	$\forall x\phi$	Hipotesis
4.	$\phi[t/x]$	Hipotesis
5.	ψ	$e_{\to}(3)(1)$
6.	$\phi[t/x] \to \psi$	$i_{\to}(4-5)$
7.	$\phi[t/x] \to \psi[t/x]$	Trivial $(6)(x \notin FV(\psi))$
8.	$(\phi \to \psi)[t/x]$	Trivial (7)
9.	$\exists x(\phi \to \psi)$	$i_{\exists}(8)$
10.	$\neg(\forall x\phi)$	Hipotesis
11.	$\exists x\neg\phi$	Propiedad (10)
12.	x_0	No esta libre afuera
13.	$(\neg\phi)[x_0/x]$	Hipotesis
14.	$\neg\phi[x_0/x]$	Trivial (13)
15.	$\phi[x_0/x]$	Hipotesis
16.	$\perp$	$i_{\perp}(15)(14)$
17.	ψ	$e_{\perp}(16)$
18.	$\phi[x_0/x] \to \psi$	$i_{\to}(15-17)$
19.	$\phi[x_0/x] \to \psi[x_0/x]$	Trivial $(18)(x \notin FV(\psi))$
20.	$(\phi \to \psi)[x_0/x]$	Trivial (19)
21.	$\exists x(\phi \to \psi)$	$i_{\exists}(20)$
22.		
23.	$\exists x(\phi \to \psi)$	$e_{\exists}(11)(12-21)$
24.	$\exists x(\phi \to \psi)$	$e_{\vee}(2)(3-9)(10-23)$

- $(\forall x\phi) \vee \psi \vdash \forall x\,(\phi \vee \psi)$:

1.	$(\forall x\phi) \vee \psi$	Premisa
2.	$\forall x\phi$	Hipotesis
3.	x_0	No esta libre afuera
4.	$\phi[x_0/x]$	$e_\forall(2)$
5.	$\phi[x_0/x] \vee \psi[x_0/x]$	$i_{\vee 1}(4)$
6.	$(\phi \vee \psi)[x_0/x]$	Trivial (5)
7.	$\forall x(\phi \vee \psi)$	$i_\forall(3-6)$
8.	ψ	Hipotesis
9.	x_1	No esta libre afuera
10.	$\psi[x_1/x]$	Trivial (8)$(x \notin FV)$
11.	$\phi[x_1/x] \vee [x_1/x]\psi$	$i_{\vee 2}(10)$
12.	$(\phi \vee \psi)[x_1/x]$	Trivial (11)
13.	$\forall x(\phi \vee \psi)$	$i_\forall(9-12)$
14.	$\forall x(\phi \vee \psi)$	$e \vee (1)(2-7)(8-13)$

2.4. Propiedades

2.4.1. Correctitud y completitud

Enunciado La logica de predicados es correcta y completa.

Demostracion Consultar bibliografia.

2.4.2. Compacidad

Enunciado Sea Γ un conjunto de sentencias (no tiene variables libres), si todos los subconjuntos finitos de Γ son satisfactibles, entonces Γ tambien lo es.

Demostracion Supongamos que Γ no es satisfactible, luego $\Gamma \models \bot$ y por correctitud resulta $\Gamma \vdash \bot$. La prueba de $\Gamma \vdash \bot$ es un arbol finito y en particular tiene un conjunto finito de premisas, al que llamaremos Δ.

Tenemos que $\Delta \subseteq \Gamma$ es finito y ademas inconsistente, pero por hipotesis todos los subconjuntos finitos de Γ son satisfactibles. Contradiccion. Luego Γ es satisfactible.

2.4.3. Teorema de Löwenheim-Skolem

Enunciado Sea ψ una sentencia para la cual existen modelos con universo de cualquier tamaño finito, entonces ψ tambien tiene un modelo con universo infinito.

Demostracion Definamos las formulas $\phi_n \equiv \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg (x_i = x_j) \right)$, es decir, ϕ_n expresa que «existen al menos n elementos». Definimos ademas $\Gamma = \{\psi\} \cup \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$.

1. $\boxed{\phi_n \text{ es satisfactible para todo } n}$: En efecto, bastara considerar un universo con al menos n elementos.

2. $\boxed{\phi_k \vDash \phi_n \text{ para todo } k \geq n}$: De hecho si existen al menos k elementos, tambien existe una menor cantidad de elementos.

3. $\boxed{\Gamma \text{ es satisfactible}}$: Para probar esto nos valdremos del teorema de compacidad, es decir, consideraremos un subconjunto finito cualquiera y mostraremos que es satisfactible.

   Sea $\Delta \subseteq \Gamma$ y consideremos un numero k suficientemente grande como para que toda $\phi_n \in \Delta$ valga en caso de que tambien valga ϕ_k (por el punto anterior).

   Sea $\mathcal{M}_k$ el modelo con al menos k elementos que garantiza la hipotesis, luego ϕ_k resulta satisfactible por lo que tambien lo resultara cualquier $\phi_n \in \Delta$. Ademas si $\psi \in \Delta$ por hipotesis tambien tenemos $\mathcal{M}_k \vDash \psi$. Es decir que todas las formulas de Δ son satisfactibles.

   En resumen hemos visto que cualquier subconjunto finito de Γ es satisfactible, luego por el teorema de compacidad Γ tambien lo es, por lo que existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \vDash \Gamma$.

4. $\boxed{\text{Existe un modelo infinito para } \psi}$: Veamos que el modelo $\mathcal{M}$ que nos garantiza el punto anterior es infinito. Supongamos que no lo sea y sea $c = \#\,|\mathcal{M}|$. Como $\phi_{c+1} \in \Gamma$ y $\mathcal{M} \vDash \Gamma$ entonces existen al menos $c+1$ elementos en el modelo, pero solo existen c elementos. Contradiccion. Luego el modelo es infinito.

Observacion Este teorema implica que la logica de predicados no tiene suficiente poder expresivo como para expresar ciertas cosas. COMPLETAR.

2.4.4. Indecidibilidad

Veremos a continuacion que la logica de predicados no es decidible, es decir, no existe algoritmo que puede determinar si una formula *cualquiera* es valida o no.

Para ello asumiremos que el problema de correspondencia de Post (que se detallara a continuacion) es indecidible, expresaremos este problema en logica de predicados y mostraremos que determinar si una instancia del problema tiene solucion es equivalente a determinar la validez de su correspondiente formula asociada.

Por lo tanto como asumimos que no existe un algoritmo que resuelva el problema de Post para cualquier instancia del problema, equivalentemente no existira algoritmo que permita determinar la validez de sus formulas asociadas.

2.4.4.1. El problema de correspondencia de Post

Enunciado Dado un conjunto finito de pares ordenados $C = \{(s_i, t_i)\,/ i \in \{1, \ldots, k\}\}$ con s_i, t_i palabras binarias: ¿Existe una secuencia de indices $j_1, \ldots, j_n$ tales que la palabra $s_{j_1} \ldots s_{j_n}$ sea igual a la palabra $t_{j_1} \ldots, t_n$?

Por ejemplo, para el conjunto $C = \left\{ \left(\underbrace{1}_{s_1}, \overbrace{101}^{t_1} \right), \left(\underbrace{10}_{s_2}, \overbrace{00}^{t_2} \right), \left(\underbrace{011}_{s_3}, \overbrace{11}^{t_3} \right) \right\}$ la secuencia de indices $(1,3,2,3)$ representa una solucion al problema pues la palabra $s_1s_3s_2s_3 = 101110011$ es igual a la palabra $t_1t_3t_2t_3 = 101110011$.

Reduccion a logica de predicados Sean $\mathcal{F} = \{e, f_0, f_1\}$ y $\mathcal{P} = \{P\}$ donde e es una constante, f_0, f_1 son simbolos de funcion unarios y P es un predicado binario.

Pensaremos a $\mathcal{F}$ como una representacion de las palabras binarias. Por ejemplo la palabra «110» sera representada por el termino $f_1(f_1(f_0(e)))$. Por simplicidad notaremos al termino $f_{b_n}\left(f_{b_{n-1}}(\ldots f_{b_2}(f_{b_1}(e)))\right)$ como $f_{b_n b_{n-1} \ldots b_1}(e)$.

Nuestro predicado P representara la idea de una posible solucion construible, es decir, $P(s,t)$ vale si y solo si existen indices $j_1, \ldots, j_n$ tales que $s = s_{j_1} \ldots s_{j_n}$ y $t = t_{j_1} \ldots t_{j_n}$. En nuestro ejemplo, $P(1,1)$ no es verdadero pues no es posible construir la palabra $t = 1$ pero $P(11, 101101)$ si es verdadero pues podemos construir $s = 11$ y $t = 101101$ con los indices $(1,1)$.

Dada una instancia C del problema definimos:

- $\phi_1 \equiv \bigwedge_{m=1}^{k} P(f_{s_m}(e), f_{t_m}(e))$: Esta formula representa que son posibles soluciones las palabras s y t formadas con uno solo de cada indice disponible.

- $\phi_2 \equiv \forall v \forall w \left\{ P(v,w) \to \left[\bigwedge_{m=1}^{k} P(f_{s_m}(v), f_{t_m}(w)) \right] \right\}$: Esta formula nos indica que si tenemos un posible intento de solucion, podemos construir otros agregando un indice mas.

- $\phi_3 \equiv \exists z P(z,z)$: Aqui queremos expresar que existe una solucion efectiva al problema.

- $\phi_c \equiv \phi_1 \wedge \phi_2 \to \phi_3$: Finalmente expresamos la idea de que entre todas las posibles soluciones, existe una solucion efectiva.

En nuestro ejemplo:

- $\boxed{\phi_1 \equiv P(f_1(e), f_{101}(e)) \wedge P(f_{10}(e), f_{00}(e)) \wedge P(f_{011}(e), f_{11}(e))}$: Es decir que son posibles intentos de solucion las palabras «1 y 101», «10 y 00» y «011 y 11».

- $\boxed{\phi_2 \equiv \begin{array}{r} \forall v \forall w \{P(v,w) \to [P(f_1(v), f_{101}(w)) \wedge \\ P(f_{10}(v), f_{00}(w)) \wedge \\ P(f_{011}(v), f_{11}(w))\ ]\} \end{array}}$: Es decir que si las palabras v y w son posibles soluciones, tambien pueden serlo «$1v$ y $101w$», «$10v$ y $00w$» y «$011v$ y $11w$».

COMPLETAR

1.	$\phi_1 \wedge \phi_2$	Hipotesis
2.	ϕ_1	$e_{\wedge 1}(1)$
3.	ϕ_2	$e_{\wedge 2}(1)$
4.	$P(f_{011}(e), f_{11}(e))$	$e_{\wedge}(2)$
5.	$\forall w\{P(f_{011}(e), w) \to [P(f_1(f_{011}(e)), f_{101}(w)) \wedge \ldots]\}$	$e_{\forall}(3)[v = f_{011}(e)]$
6.	$P(f_{011}(e), f_{11}(e)) \to [P(f_1(f_{011}(e)), f_{101}(f_{11}(e))) \wedge \ldots]$	$e_{\forall}(4)[w = f_{11}(e)]$
7.	$P(f_{011}(e), f_{11}(e)) \to [P(f_{1011}(e), f_{10111}(e)) \wedge \ldots]$	Trivial (6)
8.	$P(f_{1011}(e), f_{10111}(e)) \wedge P(f_{10011}(e), f_{0011}(e)) \wedge \ldots$	$e_{\to}(4)(7)$
9.	$P(f_{10011}(e), f_{0011}(e))$	$e_{\wedge}(8)$
10.	$\forall w\{P(f_{10011}(e), w) \to [P(f_1(f_{10011}(e)), f_{101}(w)) \wedge \ldots]\}$	$e_{\forall}(3)[v = f_{10011}(e)]$
11.	$P(f_{10011}(e), f_{0011}(e)) \to [P(f_1(f_{10011}(e)), f_{101}(f_{0011}(e))) \wedge \ldots]$	$e_{\forall}(10)[w = f_{0011}(e)]$
12.	$P(f_{10011}(e), f_{0011}(e)) \to [P(f_{110011}(e), f_{1010011}(e)) \wedge \ldots]$	Trivial (11)
13.	$P(f_{110011}(e), f_{1010011}(e)) \wedge P(f_{1010011}(e), f_{000011}(e)) \wedge \ldots$	$e_{\to}(9)(12)$
14.	$P(f_{01110011}(e), f_{110011}(e))$	$e_{\wedge}(13)$
15.	$COMPLETAR$	$e_{\forall}(3)[v = f_{01110011}(e)]$
16.	$COMPLETAR$	$e_{\forall}(15)[w = f_{110011}(e)]$
17.	$COMPLETAR$	$e_{\to}(14)(16)$
18.	$P(f_{101110011}(e), f_{101110011}(e))$	$e_{\wedge}(17)$
19.	$\exists z P(z, z)$	$i_{\exists}(18)$
20.	$\phi_1 \wedge \phi_2 \to \phi_3$	$i \to (1-19)$

Equivalencia de los problemas Veremos que una instancia C del problema de Post tiene solucion si y solo si ϕ_c es valida.

- $\boxed{\Leftarrow}$: Por hipotesis ϕ_c es valida, es decir que para cualquier modelo resulta $\mathcal{M} \vDash \phi_c$. En particular para el siguiente modelo:

  - $|\mathcal{M}|$ es el conjunto de cadenas binarias con λ representando la cadena vacia.
  - $f_0^{\mathcal{M}}(s) = 0s$, $f_1^{\mathcal{M}}(s) = 1s$, $e^{\mathcal{M}} = \lambda$.
  - $P^{\mathcal{M}} = \{(s,t) : \exists i_1, \ldots, i_m \text{ con } s = s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_m} \text{ y } t = t_{i_1}t_{i_2}\ldots t_{i_m}\}$

  1. Veamos que $\mathcal{M} \vDash \phi_1 \equiv \bigwedge_{m=1}^{k} P(f_{s_m}(e), f_{t_m}(e))$: Debemos ver que para cada $m \in \{1, \ldots, k\}$ se cumple $\mathcal{M} \vDash P(f_{s_m}(e), f_{t_m}(e))$ es decir, $\left((f_{s_m}(e))^{\mathcal{M}}, (f_{t_i}(e))^{\mathcal{M}}\right) \in P^{\mathcal{M}}$ lo cual vale por definicion de $P^{\mathcal{M}}$ pues $(s_m, t_m) \in P^{\mathcal{M}}$.
  2. Tambien $\mathcal{M} \vDash \phi_2 \equiv \forall v \forall w \left\{ P(v,w) \to \left[\bigwedge_{m=1}^{k} P(f_{s_m}(v), f_{t_m}(w)) \right] \right\}$: Si consideramos $(s,t) \in P^{\mathcal{M}}$ es facil ver que $(s_m s, t_m t) \in P^{\mathcal{M}}$.
  3. Tenemos hasta aqui $\mathcal{M} \vDash \phi_1 \wedge \phi_2$ y $\mathcal{M} \vDash \phi_1 \wedge \phi_2 \to \phi_3$ por lo que $\mathcal{M} \vDash \phi_3$.

  Es decir que existe una palabra binaria r tal que $(r,r) \in P^{\mathcal{M}}$ y por definicion de solucion al problema de Post, C tiene solucion.

- $\boxed{\Rightarrow}$: Por hipotesis C tiene solucion es decir, existen indices $j_1, \ldots, j_n$ tales que $s = s_{j_1} \ldots s_{j_n} = t = t_{j_1} \ldots t_{j_n}$. Debemos ver que ϕ_c es valida. Por induccion en n puede verse que si existen indices $j_1, \ldots, j_n$ tales que $s = s_{j_1} \ldots s_{j_n}$ y $t = t_{j_1} \ldots t_{j_n}$ entonces $\phi_1, \phi_2 \vdash P(I(s), I(t))$ donde I es una funcion que dada una palabra devuelve su expresion como termino.

  En particular, como C tiene solucion, resulta $\phi_1, \phi_2 \vdash P(I(r), I(r))$ para alguna palabra r.

  Resta ver que $\vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \to \exists z P(z,z)$. COMPLETAR.

Conclusion De todo lo anterior concluimos que la logica de predicados no es decidible pues si lo fuera, el problema de Post tambien lo seria y sabemos que no es asi.

Capítulo 3

Logica de segundo orden

Parte II

Logicas no clasicas

Capítulo 4

Logica CTL

4.1. Sintaxis

4.1.1. Formulas sintacticamente correctas

Sea $\Sigma = \{\wedge, \perp, \neg, \forall\bigcirc, \exists\bigcirc, \forall\boldsymbol{U}, \exists\boldsymbol{U}, (,), p_0, p_1, \ldots\}$ llamaremos:

- $AT = \{p_0, p_1, \ldots\}$ el conjunto de variables proposicionales o proposiciones atomicas.
- $C = \{\wedge, \perp, \neg, \forall\bigcirc, \exists\bigcirc, \forall\boldsymbol{U}, \exists\boldsymbol{U}\}$ el conjunto de conectivos.
- $B = AT \cup \{\perp\}$ el conjunto de base inductiva.

Definimos CTL como el minimo conjunto tal que:

1. $B \subset CTL$.
2. Si $\phi \in CTL$ entonces $(\neg\phi) \in CTL$.
3. Si $\phi, \psi \in CTL$ entonces $(\phi \wedge \psi) \in CTL$.
4. Si $\phi \in CTL$ entonces $\forall\bigcirc\phi, \exists\bigcirc\phi \in CTL$.
5. Si $\phi, \psi \in CTL$ entonces $\forall\left[\phi\boldsymbol{U}\psi\right], \exists\left[\phi\boldsymbol{U}\psi\right] \in CTL$.

Convenimos ademan en el siguiente orden de precedencia de los operadores: $\neg, \forall\bigcirc, \exists\bigcirc, \wedge, \forall\boldsymbol{U}, \exists\boldsymbol{U}$ y definimos $\top, \vee$ y $\rightarrow$ usando sus equivalencias proposicionales con $\neg$ y $\wedge$.

4.1.2. Operadores derivados

Extendemos la definicion del lenguaje utilizando los siguientes operadores:

- $\forall\Diamond\phi \equiv \forall\left[\top \boldsymbol{U} \phi\right]$ (ϕ es inevitable).
- $\exists\Diamond\phi \equiv \exists\left[\top \boldsymbol{U} \phi\right]$ (ϕ es posible).
- $\forall\Box\phi \equiv \neg\exists\Diamond\neg\phi \equiv \neg\exists\left[\top \boldsymbol{U} \neg\phi\right]$ (ϕ es invariante).
- $\exists\Box\phi \equiv \neg\forall\Diamond\neg\phi \equiv \neg\forall\left[\top \boldsymbol{U} \neg\phi\right]$ (ϕ es invariante para alguna traza).

4.2. Semantica

4.2.1. Sistema de transiciones

Un sistema de transiciones $\mathcal{M}$ es una tupla $(S, \rightsquigarrow, I, L)$ donde:

- S es un conjunto de estados iniciales.
- $I \subseteq S$ es el conjunto de estados iniciales.
- $\rightsquigarrow \subseteq S \times S$ es una relacion de transicion entre estados.
- $L : S \to \mathcal{P}\left(AT\right)$ es una funcion de etiquetado.

Asumiremos que $\rightsquigarrow$ es no bloqueante, es decir, que desde cualquier estado es posible llegar a otro.

Ademas, llamaremos traza a una secuencia *infinita* de estados $s_1, s_2, \ldots$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$ resulta $s_i \rightsquigarrow s_{i+1}$.

4.2.2. Definicion

4.2.2.1. Semantica del lenguaje

Definimos la relacion $\vDash$ por induccion en ϕ:

- $\mathcal{M}, s \vDash p_i$ si y solo si $p_i \in L\left(s\right)$.
- $\mathcal{M}, s \nvDash \bot$.
- $\mathcal{M}, s \vDash \neg\phi$ si y solo si $\mathcal{M}, s \nvDash \phi$.
- $\mathcal{M}, s \vDash \phi \wedge \psi$ si y solo si $\mathcal{M}, s \vDash \phi$ y $\mathcal{M}, s \vDash \psi$.

- $\mathcal{M}, s \models \forall\bigcirc\phi$ si y solo si para todo $s'/s \rightsquigarrow s'$ se cumple $\mathcal{M}, s' \models \phi$.
- $\mathcal{M}, s \models \exists\bigcirc\phi$ si y solo si para algun $s'/s \rightsquigarrow s'$ se cumple $\mathcal{M}, s' \models \phi$.
- $\mathcal{M}, s \models \forall\,[\phi \boldsymbol{U} \psi]$ si y solo si para cada traza $s = s_0 \rightsquigarrow s_1 \rightsquigarrow \ldots$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que:
    - $\mathcal{M}, s_j \models \psi$ y
    - $\mathcal{M}, s_i \models \phi$ para todo $i < j$.
- $\mathcal{M}, s \models \exists\,[\phi \boldsymbol{U} \psi]$ si y solo si para alguna traza $s = s_0 \rightsquigarrow s_1 \rightsquigarrow \ldots$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que:
    - $\mathcal{M}, s_j \models \psi$ y
    - $\mathcal{M}, s_i \models \phi$ para todo $i < j$.

Diremos que $\mathcal{M} \models \phi$ si y solo si para todo estado inicial $s \in I$ resulta $\mathcal{M}, s \models \phi$.

Ademas, una formula ϕ es valida ($\models \phi$) si y solo si $\mathcal{M}, s \models \phi$ para todo $\mathcal{M}$ y s.

4.2.2.2. Semantica de los operadores derivados

Extendemos la semantica para los operadores derivados:

- $\mathcal{M}, s \models \forall\Diamond\phi$ si y solo si para cada traza $s = s_0 \rightsquigarrow s_1 \rightsquigarrow \ldots$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}, s_j \models \phi$.
- $\mathcal{M}, s \models \exists\Diamond\phi$ si y solo si para alguna traza $s = s_0 \rightsquigarrow s_1 \rightsquigarrow \ldots$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}, s_j \models \phi$.
- $\mathcal{M}, s \models \forall\Box\phi$ si y solo si para toda traza $s = s_0 \rightsquigarrow s_1 \rightsquigarrow \ldots$ vale $\mathcal{M}, s_j \models \phi$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
- $\mathcal{M}, s \models \exists\Box\phi$ si y solo si para alguna traza $s = s_0 \rightsquigarrow s_1 \rightsquigarrow \ldots$ vale $\mathcal{M}, s_j \models \phi$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

4.2.2.3. Formulas equivalentes

Diremos que ϕ es equivalente a ψ ($\phi \equiv \psi$) si y solo si para todo sistema de transiciones $\mathcal{M}$ vale $\mathcal{M} \models \phi \iff \mathcal{M} \models \psi$.

4.2.3. Ejemplos

4.2.3.1. Semantica

COMPLETAR.

4.2.3.2. Satisfactibilidad

COMPLETAR.

4.3. Verificacion de modelos

4.3.1. Transformacion de formulas

Definiremos una funcion T que transforma una forumula ϕ en otra equivalente pero que solo utiliza los conectivos temporales: $\exists\bigcirc, \exists\boldsymbol{U}$ y $\forall\Diamond$.

- $T(p_i) = p_i$.
- $T(\bot) = \bot$.
- $T(\phi \wedge \psi) = T(\phi) \wedge T(\psi)$.
- $T(\neg\phi) = \neg T(\phi)$.
- $T(\exists\bigcirc\phi) = \exists\bigcirc T(\phi)$.
- $T(\exists[\phi\boldsymbol{U}\psi]) = \exists[T(\phi)\,\boldsymbol{U}T(\psi)]$.
- $T(\forall\Diamond\phi) = \forall\Diamond T(\phi)$.
- $T(\forall\bigcirc\phi) = T(\neg\exists\bigcirc\neg\phi) = \neg\exists\bigcirc\neg T(\phi)$.
- $T(\forall[\phi\boldsymbol{U}\psi]) = \neg(\exists[\neg\psi\boldsymbol{U}(\neg\phi \wedge \neg\psi)] \wedge \neg T(\neg\forall\Diamond\psi)) = \ldots$

4.3.2. Funciones auxiliares

Para trabajar con los operadores temporales, definimos las siguientes funciones sobre conjuntos:

- $pre_{\exists}(Y) = \{s \in S : \text{ existe } s' \text{ tal que } s \rightsquigarrow s' \text{ y } s' \in Y\}$.
- $pre_{\forall}(Y) = \{s \in S : \text{ para todo } s' \text{ tal que } s \rightsquigarrow s' \text{ se cumple que } s' \in Y\}$.

Es decir: un estado esta en $pre_{\exists}$ si y solo si tiene algun sucesor en Y; y un estado esta en $pre_{\forall}$ si y solo si todos sus sucesores estan en Y.

4.3.3. Estados satisfacientes

Finalmente definimos una funcion que calcula el conjunto de estados $Sat(\psi) = \{s \in S/\mathcal{M}, s \vDash \psi\}$:

- $Sat(\bot) = \emptyset$.
- $Sat(p_i) = \{s \in S : p_i \in L(s)\}$.
- $Sat(\neg\psi_1) = S - Sat(\psi_1)$.
- $Sat(\psi_1 \wedge \psi_2) = Sat(\psi_1) \cap Sat(\psi_2)$.
- $Sat(\exists\bigcirc\psi) = pre_{\exists}(Sat(\psi))$.
- $Sat(\forall\Diamond\psi) = inev(Sat(\psi))$.
- $Sat(\exists[\psi_1 \boldsymbol{U} \psi_2]) = exuntil(Sat(\psi_1), Sat(\psi_2))$.

donde *inev* y *exuntil* son los siguientes procedimientos:

$$
\begin{array}{l}
inev(Y)\,\{ \\
\qquad\qquad while\,(Y \neq Y \cup pre_{\forall}(Y))\,\{ \\
\qquad\qquad\qquad Y \leftarrow Y \cup pre_{\forall}(Y)\,; \\
\qquad\qquad \} \\
\qquad\qquad return\ Y; \\
\}
\end{array}
$$

$exuntil\,(X,Y)\,\{$
$\quad while\,(Y \neq Y \cup (X \cap pre_{\exists}\,(Y)))\,\{$
$\quad\quad Y \leftarrow Y \cup (X \cap pre_{\exists}\,(Y))\,;$
$\quad \}$
$\quad return\ Y;$
$\}$

o en forma equivalente:

$inev\,(Y)\,\{$
$\quad n \leftarrow 0;$
$\quad Y_n \leftarrow Y;$
$\quad repeat\{$
$\quad\quad n \leftarrow n+1;$
$\quad\quad Y_n \leftarrow Y_{n-1} \cup pre_{\forall}\,(Y_{n-1})\,;$
$\quad \}\ until\,(Y_n = Y_{n-1})\,;$
$\quad return\ Y_n;$
$\}$
$exuntil\,(X,Y)\,\{$
$\quad n \leftarrow 0;$
$\quad Y_n \leftarrow Y;$
$\quad repeat\{$
$\quad\quad n \leftarrow n+1;$
$\quad\quad Y_n \leftarrow Y_{n-1} \cup (X \cap pre_{\exists}\,(Y_{n-1}))\,;$
$\quad \}\ until\,(Y_n = Y_{n-1})\,;$
$\quad return\ Y_n;$
$\}$

4.3.4. Operadores adicionales

Extendemos la definicion de Sat para aceptar $\rightarrow, \forall\bigcirc$ y $\forall\boldsymbol{U}$:

- $Sat\,(\forall\bigcirc\phi) = pre_{\forall}\,(Sat\,(\phi))$.
- $Sat\,(\phi \rightarrow \psi) = Sat\,(\neg\phi) \cup Sat\,(\psi) = (S - Sat\,(\phi)) \cup Sat\,(\psi)$.
- $Sat\,(\forall\,[\phi\boldsymbol{U}\psi]) = foralluntill\,(Sat\,(\phi)\,, Sat\,(\psi))$.

donde $foralluntil$ es el siguiente procedimiento:

$$
\begin{array}{l}
forall until\,(X, Y)\,\{ \\
\qquad while\,(Y \neq Y \cup (X \cap pre_{\forall}\,(Y)))\,\{ \\
\qquad\qquad Y \leftarrow Y \cup (X \cap pre_{\forall}\,(Y))\,; \\
\qquad \} \\
\qquad return\; Y; \\
\}
\end{array}
$$

Capítulo 5

Logica de Hoare

Bibliografía

[1] Dante Zanarini. *Catedra de Logica.*

[2] Jean H. Gallier. *Logic For Computer Science.*

[3] Dirk van Dalen - *Logic and Structure.*

[4] Michael Huth & Mark Ryan - *Logic in Computer Science.*

[5] Mordechai Ben-Ari - *Mathematical Logic for Computer Science.*

[6] Raymond Smullyan - *What is the name of this book.*