1.

a) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$ definida por $T(u,v) = (v,u)$ para $u, v \in \mathbb{K}$. Calcular los autovalores y los autovectores asociados a T.

b) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^3)$ definida por $T(u,v,w) = (2v, 0, 5w)$ para $u, v, w \in \mathbb{K}$. Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para T.

c) Para $n \in \mathbb{N}$ sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ definida por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \ldots + x_n, \ldots, x_1 + \ldots + x_n)$$

Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para T.

Soluciones

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. $B = A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$. $|B| = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \iff \lambda = 1 \vee \lambda = -1$.

- $\lambda = 1$: $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. $Bx = 0 \iff x \in \langle \{(1,1)\} \rangle$.
- $\lambda = -1$: $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. $Bx = 0 \iff x \in \langle \{(1,-1)\} \rangle$.

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. $B = A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$. $|B| = (2-\lambda)(-\lambda)(5-\lambda) = 0 \iff \lambda = 2 \vee \lambda = 0 \vee \lambda = 5$.

- $\lambda = 2$: $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. $Bx = 0 \iff x \in \langle \{(1,0,0)\} \rangle$.
- $\lambda = 0$: $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. $Bx = 0 \iff x \in \langle \{(0,1,0)\} \rangle$.
- $\lambda = 5$: $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $Bx = 0 \iff x \in \langle \{(0,0,1)\} \rangle$.

c) COMPLETAR.

2. Encontrar los autovalores y autovectores asociados para los operadores lineales sobre $\mathbb{K}^2$ dados por las siguientes matrices

   a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

   b) $B = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

   c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Soluciones

   a) $H = A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}$. $|H| = (3-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \iff \lambda = 3 \vee \lambda = -1$.
      - $\lambda = 3$: $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$. $Hx = 0 \iff x \in \langle\{(1,2)\}\rangle$.
      - $\lambda = -1$: $H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$. $Hx = 0 \iff x \in \langle\{(0,1)\}\rangle$.

   b) $H = B - \lambda I = \begin{bmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 4 & -2-\lambda \end{bmatrix}$. $|H| = (-20 - 10\lambda + 2\lambda + \lambda^2) + 36 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0 \iff \lambda = 4$.
      - $\lambda = 4$: $H = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$. $Hx = 0 \iff x \in \langle\{(3/2,1)\}\rangle$.

   c) $H = C - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$. $|H| = (1-\lambda) = 0 \iff \lambda = 1$.
      - $\lambda = 1$: $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $Hx = 0 \iff x \in \langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle$.

   d) $H = D - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$. $|H| = \lambda^2 = 0 \iff \lambda = 0$.
      - $\lambda = 0$: $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $Hx = 0 \iff x \in \langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle$.

3. Encontrar el autoespacio correspondiente de cada autovalor

   a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 10$

   b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 3$

   Soluciones

   a) $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$. $Hx = 0 \iff x \in \langle\{(-1/3, 1)\}\rangle$.

   b) $B - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. $Hx = 0 \iff x \in \langle\{(-3, 0, 1), (-2, 1, 0)\}\rangle$.

4. Para cada matriz dada, encontrar los autovalores para el operador T sobre $\mathbb{K}^n$ sin realizar calculos. Describir los autovectores $v \in \mathbb{K}^n$ asociados a cada autovalor λ analizando las soluciones de la ecuacion matricial $(A - \lambda I)\, v = 0$.

   a) $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

   b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

   Soluciones

   a) $\lambda_1 = -\frac{1}{3}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{1}{2}$. $v_1 = (x_1, x_2, 0, 0)\,, v_2 = (0, 0, x_3, 0)\,, v_3 = (0, 0, 0, x_4)$.

   b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 2$. $v_1 = (x_1, 0, 0, 0)\,, v_2 = (-6x_2, x_2, 0, 0)\,, v_3 = (11x_3, -6x_3, x_3, 0)\,, v_4 = \left(53x_4, \frac{28}{3}x_4, 2x_4, x_4\right)$.

5. Sea V un espacio vectorial de dimension finita sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Un espacio vectorial $\mathcal{U}$ se dice invariante bajo T si $T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$. Supongamos que $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ son dos subespacios invariantes bajo T. Probar que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ tambien es invariante bajo T.

   Solucion Sea $v \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \Rightarrow v \in \mathcal{U}_1 \wedge v \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow T(v) \in \mathcal{U}_1 \wedge T(v) \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow T(v) \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

6. Sea V un espacio de dimension finita sober $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(V)$ inversible y $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$. Probar que λ es autovalor de A si y solo si λ^{-1} es autovalor de T^{-1}.

   Solucion Sea $x \in V / T(x) = \lambda x \iff Ax = \lambda x \iff A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x \iff x = A^{-1}\lambda x \iff \lambda^{-1}x = A^{-1}x$.

7. Sea V un espacio de dimension finita sober $\mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ matriz inversible y $\lambda \in \mathbb{K}$. Probar que λ es autovalor de A si y solo si λ es autovalor de A^t.

   Solucion Notemos que $(A - \lambda I)^t = A^t - \lambda I$ luego como $|X| = |X|^t$ resulta:

   $$|A - \lambda I| = \left|(A - \lambda I)^t\right| = \left|A^t - \lambda I\right|$$

8. Sea V un espacio de dimension finita sober $\mathbb{K}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ con la propiedad de que todo $v \in V - \{0\}$ es un autovector asociado al mismo autovalor para T. Probar que T debe ser igual a un escalar por la identidad en V.

   Solucion COMPLETAR.

9.
   a) Considerar una matriz $n \times n$ con la propiedad de que todas las sumas de sus filas son iguales a un mismo numero β. Mostrar que β es un autovalor de A.

   b) Considerar una matriz $n \times n$ con la propiedad de que todas las sumas de sus columnas son iguales a un mismo numero β. Mostrar que β es un autovalor de A.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) Trivial, por el ejercicio 7.

10. Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encontrar h tal que el autoespacio correspondiente a $\lambda = 5$ sea bidimensional.

Solucion $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Luego para $h = 6$ resultara

$$(A - \lambda I)\, x = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir, si y solo si $x \in \langle\{(1,0,0,0)\,, (0,3,1,0)\}\rangle$.

11. En cada uno de los siguientes items, sea $A = PDP^{-1}$ y calcule A^4.

a) $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Soluciones

a) $A^4 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PDIDIDIDP^{-1} = PD^4P^{-1}$.
Luego: $A^4 = P \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 32 & 3 \\ 64 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ -6 & 19 \end{bmatrix}$.

b) $A^4 = P \begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 3a^4 & b^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 3a^4 - 3b^4 & b^4 \end{bmatrix}$.

c) COMPLETAR.

12. Diagonalizar las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

c) $C = \begin{bmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Soluciones

a) $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (x-5)(x+2)$.

- $\lambda = 5$: $(A - \lambda I)x = 0 \iff \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} x = 0 \iff \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \iff x \in \langle\{(1,1)\}\rangle$.
- $\lambda = -2$: $(A - \lambda I)x = 0 \iff \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} x = 0 \iff x \in \left\langle\left\{\left(-\frac{3}{4}, 1\right)\right\}\right\rangle$.

Luego $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} P^{-1}$.

b) $|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(5-\lambda)^2$.

- $\lambda = 5$: $(B - \lambda I)x = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \iff x \in \langle\{(-2,0,1),(0,1,0)\}\rangle$.
- $\lambda = 4$: $(B - \lambda I)x = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0 \iff x \in \left\langle\left\{\left(-\frac{1}{2},1,0\right)\right\}\right\rangle$.

Luego $B = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} P^{-1}$.

c) COMPLETAR.

d) $|E - \lambda I| = (4-\lambda)^2 (2-\lambda)^2$.

- $\lambda = 4$: $(E - \lambda I)x = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x = 0 \iff x \in \langle\{(2,0,0,1),(0,1,0,0)\}\rangle$.
- $\lambda = 2$: $(E - \lambda I)x = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \iff x \in \langle\{(0,0,0,1),(0,0,1,0)\}\rangle$.

Luego $E = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}$.

13. Sea A una matriz 3×3 con dos autovalores. Cada autoespacio es unidimensional. Determinar si A es diagonalizable justificando la respuesta.

Solucion COMPLETAR.

14. Demostrar que si A es tanto diagonalizable como invertible, tambien lo es A^{-1}.

Solucion $A = PDP^{-1} \iff AA^{-1} = PDP^{-1}A^{-1} \iff P^{-1} = DP^{-1}A^{-1} \iff D^{-1}P^{-1} = P^{-1}A^{-1} \iff PD^{-1}P^{-1} = A^{-1}$.

15.

   a) Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea inversible pero no diagonalizable.

   b) Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea diagonalizable pero no inversible.

Soluciones

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

16. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 6 & 12 & 11 & 2 & -4 \\ 9 & 20 & 10 & 10 & -6 \\ 15 & 28 & 14 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Diagonalizarla, encontrar sus autovalores y determinar las bases para los autoespacios correspondientes.