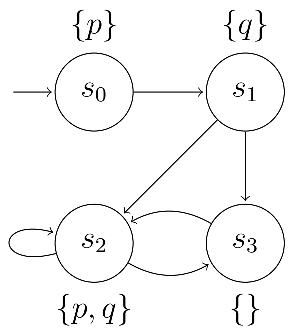
1. Sea $\mathcal{M}$ el siguiente sistema de transiciones:



Demuestre:

a) $\mathcal{M}, s_0 \vDash p$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}, s_0 \vDash p \\ \iff & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } AT \rangle \\ & p \in L(s_0) \\ & \langle \text{lo cual vale} \rangle \end{aligned}$$

b) $\mathcal{M}, s_0 \nvDash q$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}, s_0 \nvDash q \\ \iff & \langle \text{definicion de } \nvDash \text{ para } AT \rangle \\ & q \notin L(s_0) \\ & \langle \text{lo cual vale} \rangle \end{aligned}$$

c) $\mathcal{M}, s_1 \vDash \exists \bigcirc p$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}, s_1 \vDash \exists \bigcirc p \\ \iff & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \exists \bigcirc \rangle \\ & \text{para algun } s_1' \text{ tal que } s_1 \to s_1' \text{ se cumple } \mathcal{M}, s_1' \vDash p \end{aligned}$$

En particular para $s_1' := s_2$ se cumple $s_1 \to s_2$ y $\mathcal{M}, s_2 \vDash p \iff p \in L(s_2)$ lo cual vale.

d) $\mathcal{M}, s_1 \not\models \forall\bigcirc p$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s_1 \not\models \forall\bigcirc p \\
\iff & \langle \text{definicion de } \not\models \text{ para } \forall\bigcirc \rangle \\
& \text{no ocurre que para todo } s_1' \text{ tal que } s_1 \to s_1' \text{ se cumple } \mathcal{M}, s_1' \models p \\
\iff & \langle \text{intercambio de cuantificadores} \rangle \\
& \text{para algun } s_1' \text{ tal que } s_1 \to s_1' \text{ se cumple } \mathcal{M}, s_1' \not\models p
\end{aligned}$$

En particular para $s_1' := s_3$ se cumple $s_1 \to s_3$ y $\mathcal{M}, s_3 \not\models p \iff p \notin L(s_3)$ lo cual vale.

e) $\mathcal{M}, s_3 \models \forall\bigcirc p \wedge \forall\bigcirc q$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s_3 \models \forall\bigcirc p \wedge \forall\bigcirc q \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \forall\bigcirc \rangle \\
& \underbrace{\mathcal{M}, s_3 \models \forall\bigcirc p}_{(1)} \text{ y } \underbrace{\mathcal{M}, s_3 \models \forall\bigcirc q}_{(2)}
\end{aligned}$$

Veamos que vale (1):

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s_3 \models \forall\bigcirc p \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \forall\bigcirc \rangle \\
& \text{para todo } s_3' \text{ tal que } s_3 \to s_3' \text{ se cumple } \mathcal{M}, s_3' \models p \\
\iff & \langle \text{unico caso: } s_3 \to s_2 \rangle \\
& \mathcal{M}, s_2 \models p \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } AT \rangle \\
& p \in L(s_2) \\
& \langle \text{lo cual vale} \rangle
\end{aligned}$$

Analogamente vale (2).

f) $\mathcal{M}, s_0 \vDash \forall [\top \cup (p \wedge q)]$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}, s_0 \vDash \forall [\top \cup (p \wedge q)] \\ \Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \forall\cup \rangle \\ & \underbrace{\text{para cada traza } s_0 = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \text{ existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \vDash p \wedge q}_{(1)} \\ & \text{y } \underbrace{\mathcal{M}, s'_i \vDash \top \text{ para todo } i < j}_{(2)} \end{aligned}$$

Sea $s_0 = s'_0 \to s'_1 \to \ldots$ luego,

$$\left.\begin{array}{c} s'_0 = s_0 \\ s'_0 \to s'_1 \end{array}\right\} \Rightarrow s'_1 = s_1 \text{ (por definicion de } \mathcal{M}\text{).}$$

$$\left.\begin{array}{c} s'_1 = s_1 \\ s'_1 \to s'_2 \end{array}\right\} \Rightarrow s'_2 = s_2 \text{ o } s'_2 = s_3 \text{ (por definicion de } \mathcal{M}\text{).}$$

Analisis por casos:

- $s'_2 = s_2$:

  $$\left.\begin{array}{c} p \in L(s_2) \Rightarrow \mathcal{M}, s_2 \vDash p \\ q \in L(s_2) \Rightarrow \mathcal{M}, s_2 \vDash q \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\mathcal{M}, s_2 \vDash p \wedge q}_{(*)}$$

  Luego con $j = 2$ resulta $\mathcal{M}, s'_2 \vDash p \wedge q$.

- $s'_2 = s_3$:

  $$\left.\begin{array}{c} s'_2 = s_3 \\ s'_2 \to s'_3 \end{array}\right\} \Rightarrow s'_3 = s_2 \text{ (por definicion de } \mathcal{M}\text{).}$$

  Por $(*)$ tenemos $\mathcal{M}, s_2 \vDash p \wedge q$ luego con $j = 3$ resulta $\mathcal{M}, s'_3 \vDash p \wedge q$.

Por lo tanto para toda traza $s_0 = s'_0 \to s'_1 \to \ldots$ existe $j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \vDash p \wedge q$, es decir, vale (1); y como (2) vale trivialmente podemos concluir lo propuesto.

g) $\mathcal{M}, s_0 \vDash \exists\,[(p \vee q) \cup (\neg p \wedge \neg q)]$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s_0 \vDash \exists\,[(p \vee q) \cup (\neg p \wedge \neg q)] \\
\iff & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \exists\cup \rangle \\
& \underbrace{\text{para alguna traza } s_0 = s'_0 \to s'_1 \to \dots \text{ existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \vDash \neg p \wedge \neg q}_{(1)} \text{ y} \\
& \underbrace{\mathcal{M}, s'_i \vDash (p \vee q) \text{ para todo } i < j}_{(2)}
\end{aligned}$$

En particular para la traza $s'_0 = s_0 \to s'_1 = s_1 \to s'_2 = s_3 \to \dots$ y $j = 2$ resulta $\mathcal{M}, s'_2 \vDash \neg p \wedge \neg q \iff \mathcal{M}, s'_2 \vDash \neg p$ y $\mathcal{M}, s'_2 \vDash \neg q$ lo cual vale pues $p \notin L(s_3)$ y $q \notin L(s_3)$ por lo que vale (1).
Ademas para $i = 1$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s'_1 \vDash (p \vee q) \\
\iff & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \vee \rangle \\
& \mathcal{M}, s'_1 \vDash p \text{ o } \mathcal{M}, s'_1 \vDash q \\
\iff & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \vee \rangle \\
& p \in L(s_1) \text{ o } q \in L(s_1) \\
& \langle \text{lo cual vale pues } q \in L(s_1) \rangle
\end{aligned}$$

y analogamente para $i = 0$, por lo que tambien vale (2).

h) $\mathcal{M}, s_0 \nvDash \exists\,[p \cup (\neg p \wedge \neg q)]$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s_0 \vDash \exists\,[p \cup (\neg p \wedge \neg q)] \\
\iff & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \exists\cup \rangle \\
& \underbrace{\text{para alguna traza } s_0 = s'_0 \to s'_1 \to \dots\ \exists j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \vDash \neg p \wedge \neg q}_{(1)} \text{ y} \\
& \underbrace{\mathcal{M}, s'_i \vDash p \text{ para todo } i < j}_{(2)}
\end{aligned}$$

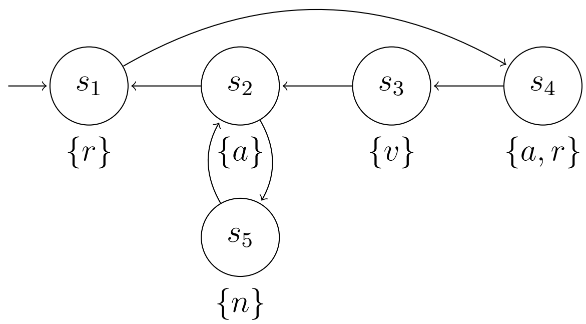
Lo cual no vale pues: toda traza comienza por $s'_0 = s_0 \to s'_1 = s_1 \to \dots$ y si vale (2) debera ser $j = 0$ (en cualquier otro caso resultaria $\mathcal{M}, s'_1 \nvDash p$) pero entonces no vale (1) pues $\mathcal{M}, s'_0 \nvDash \neg p \wedge \neg q$.

2. Considere los operadores derivados $\forall\Box$ y $\exists\Diamond$. De forma similar a como se hizo en clase de teoria, defina una semantica para estos operadores en terminos de trazas del sistema de transicion.

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \vDash \forall\Box\phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \forall\Box \rangle \\
& \mathcal{M}, s \vDash \neg\exists\Diamond\neg\phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \neg \rangle \\
& \mathcal{M}, s \nvDash \exists\Diamond\neg\phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \exists\Diamond \rangle \\
& \text{no ocurre que } \mathcal{M}, s \vDash \exists\,[\top \cup \neg\phi] \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \exists\cup \rangle \\
& \text{no ocurre que para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \dots \text{ existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que:} \\
& \mathcal{M}, s'_j \vDash \neg\phi \text{ y } \mathcal{M}, s'_i \vDash \top \text{ para todo } i < j \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \mathcal{M}, s \vDash \top \text{ para todo } s \rangle \\
& \text{no ocurre que para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \dots \text{ existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \vDash \neg\phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \neg \rangle \\
& \text{no ocurre que para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \dots \text{ existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \nvDash \phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{intercambio de cuantificadores} \rangle \\
& \text{para toda traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \dots \text{ no existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \nvDash \phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{intercambio de cuantificadores} \rangle \\
& \text{para toda traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \dots \text{ resulta } \mathcal{M}, s'_j \vDash \phi \text{ para todo } j \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \vDash \exists\Diamond\phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \exists\Diamond \rangle \\
& \mathcal{M}, s \vDash \exists\,[\top \cup \phi] \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \exists\cup \rangle \\
& \text{para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \dots \text{ existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que:} \\
& \mathcal{M}, s'_j \vDash \phi \text{ y } \mathcal{M}, s'_i \vDash \top \text{ para todo } i < j \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \mathcal{M}, s \vDash \top \text{ para todo } s \rangle \\
& \text{para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \dots \text{ existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que: } \mathcal{M}, s'_j \vDash \phi
\end{aligned}
$$

3. Consideremos el sistema de transiciones para un semaforo visto en clase de teoria:



Determine el conjunto de estados que satisface cada formula:

a) $r \to \forall\bigcirc v$: $\{s_2, s_3, s_4, s_5\}$.

b) $a \to \forall\bigcirc\forall\bigcirc a$: $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$.

c) $\exists\Box\neg v$: $\{s_2, s_5\}$.

d) $\forall\Diamond v$: $\{s_1, s_3, s_4\}$.

e) $\forall\Diamond a$: $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$.

f) $\forall\Box a$: $\{\}$.

g) $\forall\Box\forall\Diamond a$: $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$.

h) $\forall\,[n \cup \neg n]$: $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$.

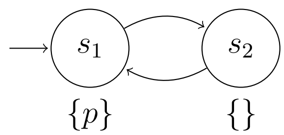
i) $\forall\,[\neg n \cup n]$: $\{s_5\}$.

j) $\exists\,[n \cup r]$: $\{s_1, s_4\}$.

k) $r \to \forall\Diamond v$: $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$.

4. ¿Cuales de las siguientes afirmaciones son validas?

   a) $\models \phi \rightarrow \forall\Box\phi$: Falso. Basta considerar $s = s_1$ y $\phi \equiv p$ en el siguiente sistema de transiciones:



   Luego:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s_1 \not\models p \rightarrow \forall\Box p \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \rightarrow \rangle \\
& \mathcal{M}, s_1 \not\models \neg p \vee \forall\Box p \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \not\models \text{ para } \vee \rangle \\
& \mathcal{M}, s_1 \not\models \neg p \text{ o } \mathcal{M}, s_1 \not\models \forall\Box p \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \not\models \rangle \\
& \text{no ocurre } \mathcal{M}, s_1 \models \neg p \text{ o } \mathcal{M}, s_1 \not\models \forall\Box\phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \neg \rangle \\
& \text{no ocurre } \mathcal{M}, s_1 \not\models p \text{ o } \mathcal{M}, s_1 \not\models \forall\Box\phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \not\models \text{ para } AT \rangle \\
& \text{no ocurre } p \notin L(s_1) \text{ o } \mathcal{M}, s_1 \not\models \forall\Box\phi \\
& \langle \text{lo cual vale pues } p \in L(s_1) \rangle
\end{aligned}
$$

   b) Si $\models \phi$ entonces $\models \forall\Box\phi$: Verdadero. En efecto, sea $\mathcal{M}$ un sistema y s un estado:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \models \forall\Box\phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \forall\Box \rangle \\
& \text{para toda traza } s = s'_0 \rightarrow s'_1 \rightarrow \dots \ \text{ resulta } \mathcal{M}, s'_j \models \phi \text{ para todo } j \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

   Sea $j \in \mathbb{N}$ luego por hipotesis resulta $\mathcal{M}, s'_j \models \phi$ por lo que vale lo propuesto.

c) $\models \exists\Box\phi \to \forall\Diamond\phi$: Verdadero. En efecto, sea $\mathcal{M}$ un sistema y s un estado:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \models \exists\Box\phi \to \forall\Diamond\phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \to \rangle \\
& \mathcal{M}, s \models \neg\exists\Box\phi \vee \forall\Diamond\phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \vee \rangle \\
& \underbrace{\mathcal{M}, s \models \neg\exists\Box\phi}_{(1)} \text{ o } \underbrace{\mathcal{M}, s \models \forall\Diamond\phi}_{(2)}
\end{aligned}
$$

Consideremos dos casos: Si vale (1) tambien vale lo anterior. En caso contrario tambien ya que,

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \not\models \neg\exists\Box\phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \neg \rangle \\
& \mathcal{M}, s \models \exists\Box\phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \exists\Box \rangle \\
& \underbrace{\text{para alguna traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ resulta } \mathcal{M}, s'_j \models \phi}_{(3)}
\end{aligned}
$$

por lo que vale (2) pues,

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \models \forall\Diamond\phi \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \forall\Diamond \rangle \\
& \text{para toda traza } s = s''_0 = s'_0 \to s''_1 \to \ldots \text{ existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que } \mathcal{M}, s''_j \models \phi \\
& \langle \text{lo cual vale tomando } j = 0 \text{ por } (3) \rangle
\end{aligned}
$$

d) $\models \forall[\bot \cup \phi] \to \phi$: Verdadero. En efecto, sea $\mathcal{M}$ un sistema y s un estado:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \models \forall[\bot \cup \phi] \to \phi \\
\iff & \langle \text{definicion de } \to \rangle \\
& \mathcal{M}, s \models \neg\forall[\bot \cup \phi] \vee \phi \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \vee \rangle \\
& \mathcal{M}, s \models \neg\forall[\bot \cup \phi] \text{ o } \mathcal{M}, s \models \phi \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \neg \rangle \\
& \underbrace{\mathcal{M}, s \not\models \forall[\bot \cup \phi]}_{(1)} \text{ o } \underbrace{\mathcal{M}, s \models \phi}_{(2)}
\end{aligned}$$

Consideremos dos casos: Si vale (1) tambien vale lo anterior. En caso contrario tambien ya que,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \models \forall[\bot \cup \phi] \\
\iff & \langle \text{definicion de } \models \text{ para } \forall\cup \rangle \\
& \underbrace{\text{para cada traza } s = s'_0 \to s'_1 \to \ldots \text{ existe } j \in \mathbb{N} : \mathcal{M}, s'_j \models \phi}_{(3)} \\
& \text{y } \underbrace{\mathcal{M}, s'_i \models \bot \text{ para todo } i < j}_{(4)}
\end{aligned}$$

y como vale (4) necesariamente sera $j = 0$ (en cualquier otro caso $\mathcal{M}, s_i \not\models \bot$), concluyendo que vale (2).

5. Sean $\phi, \psi \in CTL$. Decimos que ϕ es equivalente a ψ ($\phi \equiv \psi$) si y solo si para todo sistema de transiciones $\mathcal{M}$ vale $\mathcal{M} \vDash \phi \iff \mathcal{M} \vDash \psi$. Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta:

   a) $\forall \bigcirc \phi \equiv \neg \exists \bigcirc \neg \phi$: Verdadero. En efecto, sean $\mathcal{M}$ y s cualesquiera:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{M}, s \vDash \forall \bigcirc \phi \\
\iff & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \forall \bigcirc \rangle \\
& \text{para todo } s'/s \to s' \text{ vale } \mathcal{M}, s' \vDash \phi \\
\iff & \langle \text{intercambio de cuantificadores} \rangle \\
& \text{no ocurre que para algun } s'/s \to s' \text{ vale } \mathcal{M}, s' \nvDash \phi \\
\iff & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \neg \rangle \\
& \text{no ocurre que para algun } s'/s \to s' \text{ vale } \mathcal{M}, s' \vDash \neg \phi \\
\iff & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \exists \bigcirc \rangle \\
& \text{no ocurre } \mathcal{M}, s \vDash \exists \bigcirc \neg \phi \\
\iff & \langle \text{definicion de } \nvDash \rangle \\
& \mathcal{M}, s \nvDash \exists \bigcirc \neg \phi \\
\iff & \langle \text{definicion de } \vDash \text{ para } \neg \rangle \\
& \mathcal{M}, s \vDash \neg \exists \bigcirc \neg \phi
\end{aligned}
$$

   b) $\forall \Diamond \phi \equiv \neg \exists \Box \neg \phi$: Verdadero.

   c) $\forall [\phi \cup \psi] \equiv \psi \vee (\phi \wedge \forall \bigcirc \forall [\phi \cup \psi])$:

   d) $\forall \Diamond \phi \vee \forall \Diamond \psi \equiv \forall \Diamond (\phi \vee \psi)$: Verdadero.

   e) $\forall \Box (\phi \wedge \psi) \equiv \forall \Box \phi \wedge \forall \Box \psi$: Verdadero.

   f) $\exists \Diamond (\phi \wedge \psi) \equiv \exists \Diamond \phi \wedge \exists \Diamond \psi$: Falso.

6. Walter desconfia de la siguiente equivalencia usada en el paso 1 del algoritmo de verificacion para CTL:

$$\forall [\phi \cup \psi] \equiv \neg (\exists [\neg \psi \cup (\neg \phi \wedge \neg \psi)] \vee \exists \Box \neg \psi)$$

   Ademas, Paula observa que la longitud de la nueva formula es mucho mayor que la anterior, pudiendo esto derivar en un mayor tiempo de ejecucion para el programa.

Es por esto que ambos deciden calcular directamente el conjunto $Sat\left(\forall\left[\psi_1 \cup \psi_2\right]\right)$ siguiendo una idea similar a la vista en clase para los operadores $\forall\Diamond$ y $\exists\cup$. Ayudelos a hacerlo.

$$Sat\left(\forall\left[\psi_1 \cup \psi_2\right]\right) = forall - until\left(Sat\left(\psi_1\right), Sat\left(\psi_2\right)\right)$$

donde $forall - until$ es el siguiente procedimiento:

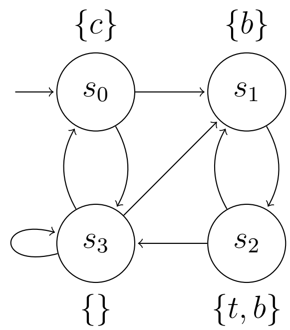
$forall - until\,(X, Y)\,\{$
$\quad while\,(Y \neq Y \cup (X \cap pre_{\forall}(Y)))\,\{$
$\quad\quad Y \leftarrow Y \cup (X \cap pre_{\forall}(Y))\,;$
$\quad \}$
$\quad return\ Y;$
$\}$

7. Las funciones $inev$ y $ex - until$ vistas en clase pueden reescribirse de la siguiente forma:

$inev\,(Y)\,\{$
$\quad n \leftarrow 0;$
$\quad Y_n \leftarrow Y;$
$\quad repeat\{$
$\quad\quad n \leftarrow n + 1;$
$\quad\quad Y_n \leftarrow Y_{n-1} \cup pre_{\forall}(Y_{n-1})\,;$
$\quad \}\ until\,(Y_n = Y_{n-1})\,;$
$\quad return\ Y_n;$
$\}$

$ex - until\,(X, Y)\,\{$
$\quad n \leftarrow 0;$
$\quad Y_n \leftarrow Y;$
$\quad repeat\{$
$\quad\quad n \leftarrow n + 1;$
$\quad\quad Y_n \leftarrow Y_{n-1} \cup (X \cap pre_{\exists}(Y_{n-1}))\,;$
$\quad \}\ until\,(Y_n = Y_{n-1})\,;$
$\quad return\ Y_n;$
$\}$

Considere el sistema de transiciones $\mathcal{M}$ que se muestra en la figura.



a) Sea $\phi \equiv \exists \left[\neg c \cup (b \wedge \neg t)\right]$. Calcule $Sat\,(\phi)$ y decida si vale $\mathcal{M} \vDash \phi$.

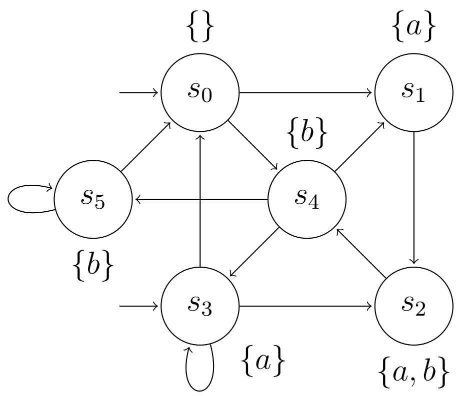
- $X = Sat\,(\neg c) = S - Sat\,(c) = S - \{s_0\} = \{s_1, s_2, s_3\}$.
- $Y_0 = Sat\,(b \wedge \neg t) = Sat\,(b) \cap Sat\,(\neg t) = \{s_1, s_2\} \cap (S - Sat\,(t)) =$
  $= \{s_1, s_2\} \cap (S - \{s_2\}) = \{s_1\}$.
- $Y_1 = Y_0 \cup pre_{\exists}\,(Y_0) \cap X = \{s_1\} \cup \{s_0, s_3, s_2\} \cap \{s_1, s_2, s_3\} =$
  $= \{s_1\} \cup \{s_2, s_3\} = \{s_1, s_2, s_3\}$.
- $Y_2 = Y_1 \cup pre_{\exists}\,(Y_1) \cap X = \{s_1, s_2, s_3\} \cup S \cap \{s_1, s_2, s_3\} = Y_1$.

Por lo tanto $\{s_0\} \nsubseteq Sat\,(\phi) = \{s_1, s_2, s_3\} \Rightarrow \mathcal{M} \nvDash \phi$.

b) ¿Es cierto que $\mathcal{M}, s_0 \vDash \forall\Box\,(\neg c \rightarrow \forall\bigcirc b)$? No.

8. Considere el sistema de transiciones $\mathcal{M}$ que se muestra en la figura y las siguientes formulas:

- $\phi_1 \equiv \exists\Box\forall\Diamond\neg b$.
- $\phi_2 \equiv \exists\left[\exists\bigcirc a \cup \neg a\right]$.
- $\phi_3 \equiv \forall\bigcirc\,(\exists\Box\neg a \vee \exists\Box b)$.



Calcule $Sat\,(\phi_i)$ y decida si vale $\mathcal{M} \vDash \phi_i$ $(1 \leq i \leq 3)$.

- $$\begin{aligned} Sat\,(\phi_1) =& Sat\,(\neg\forall\Diamond\neg\forall\Diamond\neg b) = S - Sat\,(\forall\Diamond\neg\forall\Diamond\neg b) = S - inev\,(Sat\,(\neg\forall\Diamond\neg b)) = \\ =& S - inev\,(S - Sat\,(\forall\Diamond\neg b)) = S - inev\,(S - inv\,(Sat\,(\neg b))) = \\ =& S - inev\,(S - inv\,(\{s_0, s_1, s_3\})) = S - inev\,(S - \{s_0, s_1, s_3\}) = \\ =& S - inev\,(\{s_2, s_4, s_5\}) = S - (\{s_2, s_4, s_5\} \cup \{s_1\} \cup \{s_0\}) = \{s_3\} \end{aligned}$$

9. En clase de teoria vimos que:

   - $Sat\,(\neg\phi) = S - Sat\,(\phi)$.
   - $Sat\,(\phi \wedge \psi) = Sat\,(\phi) \cap Sat\,(\psi)$.

   Derive una expresion para $Sat\,(\phi \to \psi)$ en funcion de $Sat\,(\phi)$ y $Sat\,(\psi)$.

$$\begin{aligned} Sat\,(\phi \to \psi) =& Sat\,(\neg\phi \vee \psi) = Sat\,(\neg\phi \vee \psi) = Sat\,(\neg\,(\phi \wedge \neg\psi)) = \\ =& S - Sat\,(\phi \wedge \neg\psi) = S - (Sat\,(\phi) \cap Sat\,(\neg\psi)) = \\ =& S - (Sat\,(\phi) \cap (S - Sat\,(\psi))) \end{aligned}$$

o en forma mas sencilla

$$Sat\,(\phi \to \psi) = Sat\,(\neg\phi \vee \psi) = Sat\,(\neg\phi) \cup Sat\,(\psi) = (S - Sat\,(\phi)) \cup Sat\,(\psi)$$