1. Vector aleatorio

1. La distribución de probabilidad conjunta del vector (X, Y) está dada por $p(x, y) = \frac{x+y}{30}$ con $x = 0, 1, 2, 3$ e $y = 0, 1, 2$.

   a) Determine:

      1) $P(X \leq 2, Y = 1)$.
      2) $P(X > 2, Y \leq 1)$.
      3) $P(X - Y > 0)$.
      4) $P(X + Y = 4)$.

   b) Obtenga las distribuciones marginales de X e Y respectivamente.

   c) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

   d) Calcule el coeficiente de correlación entre X e Y.

   e) Obtenga las distribuciones condicionales.

Soluciones

a)

1) $P(X \leq 2, Y = 1) = p(0,1) + p(1,1) + p(2,1) = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{3}{30} = \frac{6}{30}$.
2) $P(X > 2, Y \leq 1) = p(3,0) + p(3,1) = \frac{3}{30} + \frac{4}{30} = \frac{7}{30}$.
3) $P(X - Y > 0) = p(1,0) + p(2,0) + p(2,1) + p(3,0) + p(3,1) + p(3,2) =$
   $= \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{3}{30} + \frac{3}{30} + \frac{4}{30} + \frac{5}{30} = \frac{18}{30}$.
4) $P(X + Y = 4) = p(2,2) + p(3,1) = \frac{4}{30} + \frac{4}{30} = \frac{8}{30}$.

b)

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$
1	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$
2	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{9}{30}$
3	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{12}{30}$
$p_Y(y)$	$\frac{6}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{14}{30}$	1

c) Falso pues $p(0,0) = 0 \neq \frac{18}{30} = \frac{3}{30}\frac{6}{30} = p_X(0)\, p_Y(0)$.

d)

- $E(X) = 0 \cdot \frac{3}{30} + 1 \cdot \frac{6}{30} + 2 \cdot \frac{9}{30} + 3 \cdot \frac{12}{30} = \frac{6}{30} + \frac{18}{30} + \frac{36}{30} = \frac{60}{30} = 2.$
- $E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{30} + 1^2 \cdot \frac{6}{30} + 2^2 \cdot \frac{9}{30} + 3^2 \cdot \frac{12}{30} = \frac{6}{30} + \frac{36}{30} + \frac{108}{30} = \frac{150}{30} = 5.$
- $E(Y) = 0 \cdot \frac{6}{30} + 1 \cdot \frac{10}{30} + 2 \cdot \frac{14}{30} = \frac{10}{30} + \frac{28}{30} = \frac{38}{30}.$
- $E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{6}{30} + 1^2 \cdot \frac{10}{30} + 2^2 \cdot \frac{14}{30} = \frac{10}{30} + \frac{56}{30} = \frac{66}{30}.$
- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 5 - 4 = 1.$
- $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{66}{30} - \frac{1444}{900} = \frac{536}{900}.$
- $E(XY) = COMPLETAR.$
- $COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = COMPLETAR.$
- $\rho_{XY} = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = COMPLETAR.$

e) COMPLETAR.

2. El ejemplo siguiente ilustra que $\rho = 0$ no implica independencia. Suponiendo que una variable aleatoria bidimensional (X, Y) tiene una distribución conjunta dada por

Y/X	-1	0	1
-1	d	c	d
0	c	0	c
1	d	c	d

donde $c > 0$, $d > 0$, $4c + 4d = 1$, demuestre que:

a) $\rho = 0$.

b) X e Y no son independientes.

Soluciones

a)

- $E(X) = -1 \cdot (2d + c) + 0 + (2d + c) = 0 = E(Y).$
- $E(XY) = 1 \cdot d + 0 - d + 0 + 0 + 0 - d + d = 0.$
- $\rho_{XY} = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = 0.$

b) Supongamos que son independientes. Luego:

- $P(0,0) = 0 = P_X(0)\,P_Y(0) = 4c \iff c = 0.$
- $P(1,1) = d = P_X(1)\,P_Y(1) = 4d \iff d = 0.$
- Luego XY no es una distribución de probabilidad. Absurdo.

3. Se debe seleccionar un comité de tres personas elegidas al azar de un grupo constituido por cuatro docentes y cinco estudiantes. Sea X_1: «número de docentes en el comité» y X_2: «número de estudiantes en el comité».

   a) Determine la distribución de probabilidad conjunta de X_1 y X_2.

   b) Determine las distribuciones marginales de X_1 y X_2.

   c) ¿Son X_1 y X_2 independientes?

   d) Calcule $P(X_1 = 1 | X_2 \geq 1)$.

Soluciones

- $X_1 \sim H(9,4,3)$. $X_2 \sim H(9,5,3)$. $X_1 + X_2 = 3$.

a)

$X_2 \backslash X_1$	0	1	2	3	p_{X_2}
0	0	0	0	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{21}$
1	0	0	$\frac{5}{14}$	0	$\frac{5}{14}$
2	0	$\frac{10}{21}$	0	0	$\frac{10}{21}$
3	$\frac{5}{42}$	0	0	0	$\frac{5}{42}$
p_{X_1}	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$	1

b)

	0	1	2	3
$p_{X_1}(x)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$
$p_{X_2}(x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$

c) No son independientes pues $P_{X_1X_2}(0,0) = 0 \neq P_{X_1}(0) \cdot P_{X_2}(0)$.

d) $P(X_1 = 1 | X_2 \geq 1) = \frac{P(X_1=1 \cap X_2 \geq 1)}{P(X_2 \geq 1)} = \frac{p_{X_1X_2}(1,1)+p_{X_1X_2}(1,2)+p_{X_1X_2}(1,3)}{p_{X_2}(1)+p_{X_2}(2)+p_{X_2}(3)} = \frac{1}{2}$.

4. Sea f la función densidad de probabilidad conjunta del vector aleatorio (X,Y), dada por:

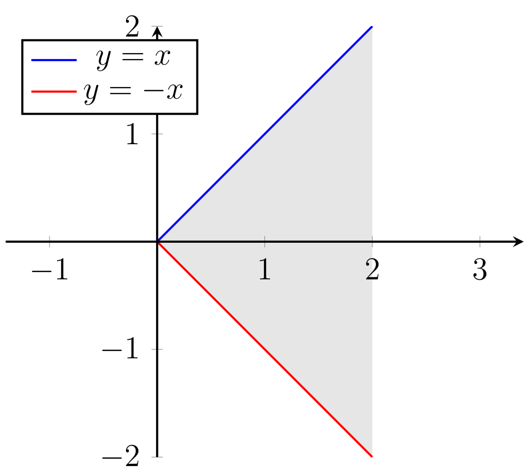
$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} kx\left(x-y\right) & 0<x<2, -x<y<x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

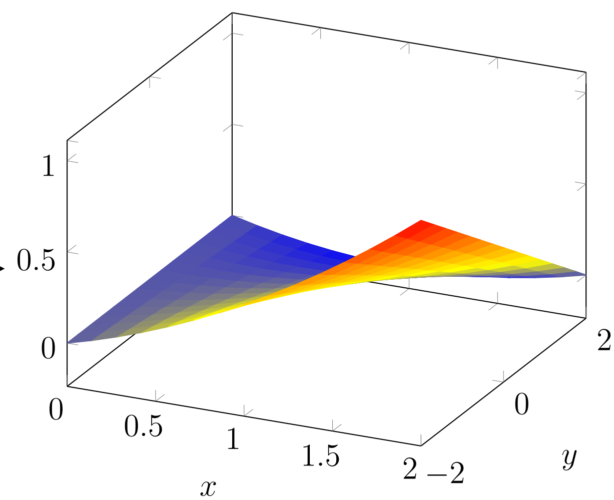
a) Determine el valor de k.

b) Obtenga las distribuciones marginales de Xe Y respectivamente.

c) Calcule el coeficiente de correlación entre X e Y.

Soluciones



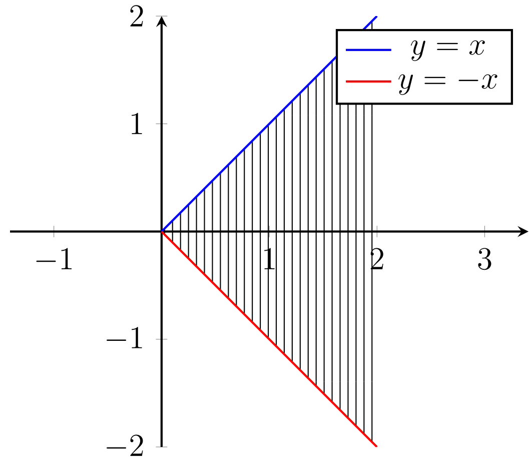


a) $\displaystyle\int_0^2\int_{-x}^{x} kx\left(x-y\right)\,dy\,dx = k\int_0^2 x\int_{-x}^{x}\left(x-y\right)\,dy\,dx = k\int_0^2 x\left(\int_{-x}^{x} x\,dy-\int_{-x}^{x} y\,dy\right)\,dx =$

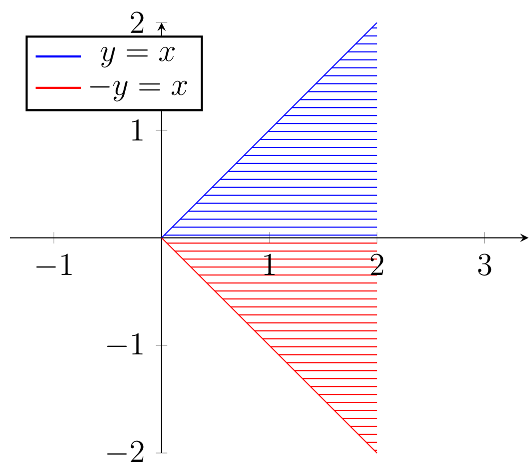
$\displaystyle = k\int_0^2 x\left(x\cdot y\Big|_{-x}^{x}-\frac{y^2}{2}\Big|_{-x}^{x}\right)\,dx = k\int_0^2 x\left(2x^2-0\right)\,dx = k\int_0^2 x2x^2\,dx =$

$\displaystyle = k\int_0^2 2x^3 = 2k\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 2k4 = 1 \iff k=\frac{1}{8}.$

$b)$



- $f_X(x) = \begin{cases} \int\limits_{-x}^{x} \frac{1}{8} x(x-y)\, dy & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4}x^3 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$



- $-2 < y < 0 \iff -y < x < 2.$
- $0 < y < 2 \iff y < x < 2.$

- $f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-y}^{2} \frac{1}{8} x\,(x-y)\; dx & -2 < y < 0 \\ \displaystyle\int_{y}^{2} \tfrac{1}{8} x\,(x-y)\; dx & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \frac{5y^3-12y+16}{48} & -2 < y < 0 \\ \frac{y^3-12y+16}{48} & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

c) COMPLETAR.

5. Sea f la función densidad de probabilidad conjunta del vector aleatorio (X,Y), dada por:

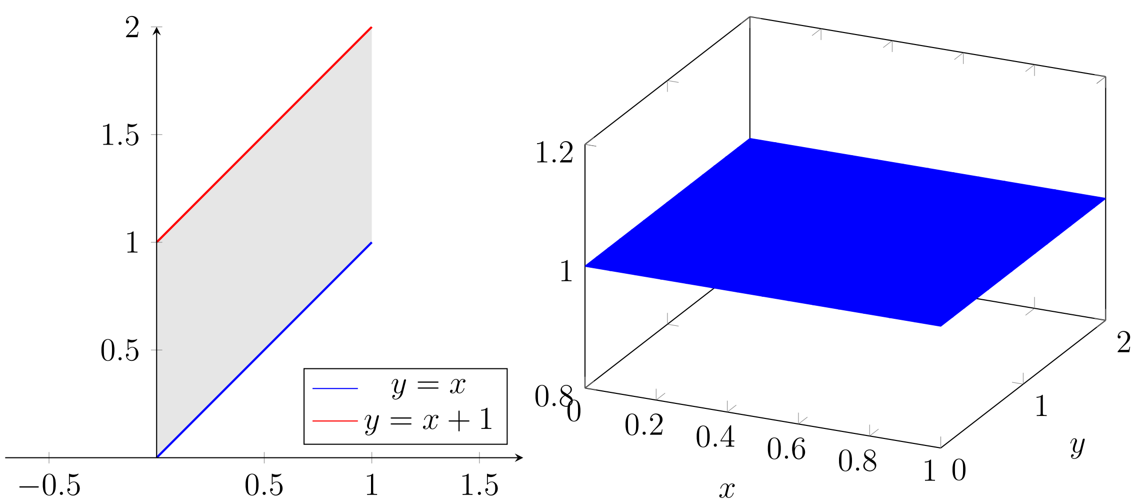
$$f(x,y) = \begin{cases} k & 0 < x < 1, x < y < x+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de k.

b) Obtenga las distribuciones marginales de X e Y respectivamente.

c) Calcule el coeficiente de correlación entre X e Y.

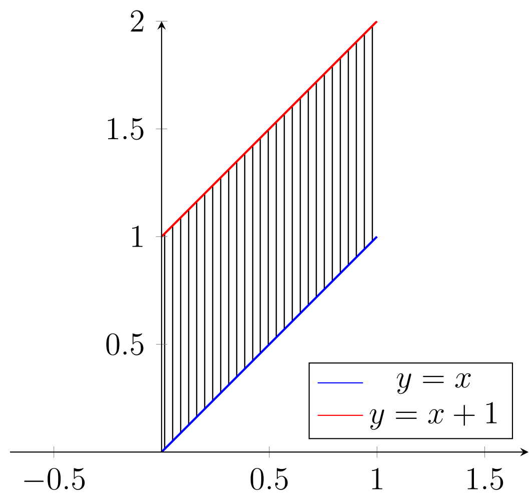
Soluciones



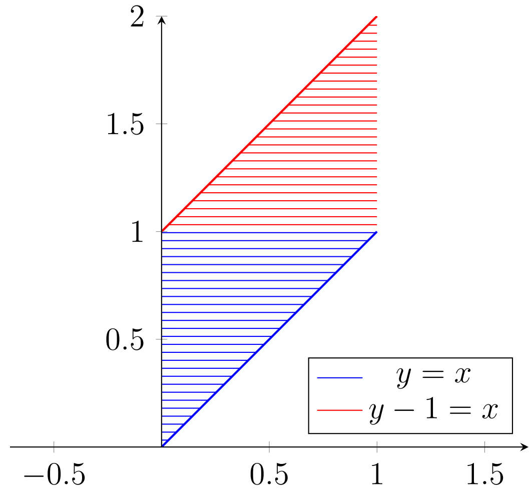
a)

- $\int\limits_{0}^{1} k\,dx = k.$
- $\int\limits_{x}^{x+1} k\,dy = k.$
- $\int\limits_{x}^{x+1}\int\limits_{0}^{1} k\,dx\,dy = k = 1.$

b)



- $f_X\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x, y\right)\,dy = \int\limits_{x}^{x+1} k\,dy = 1 \Rightarrow f_X\left(x\right) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$



- $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx = \begin{cases} \int\limits_0^y dx = \boxed{y} & 0 < y < 1 \\ \int\limits_{y-1}^1 dx = \boxed{2-y} & 1 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

c)

- $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int\limits_0^1 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$
- $E(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy = \int_0^1 y \cdot y\, dy + \int_1^2 y\,(2-y)\, dy = \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 + \left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^2 = 1.$
- $E(XY) = \int\limits_0^1 \int\limits_x^{x+1} x \cdot y \cdot 1\, dy\, dx = \int\limits_0^1 x \int\limits_x^{x+1} y\, dy\, dx = \int\limits_0^1 x \frac{2x+1}{2}\, dx = \frac{7}{12}.$
- $COV(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = \frac{7}{12} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$
- $E(X^2) = \int\limits_0^1 x^2 1\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

- $E\left(Y^2\right) = \int\limits_0^1 y^3\, dy + \int\limits_1^2 y^2\left(2-y\right)\, dy = \frac{7}{6}$.
- $V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left[E\left(X\right)^2\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.
- $V\left(Y\right) = E\left(Y^2\right) - \left[E\left(Y\right)^2\right] = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$.
- $\rho_{XY} = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{1/12}{\sqrt{\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071$.

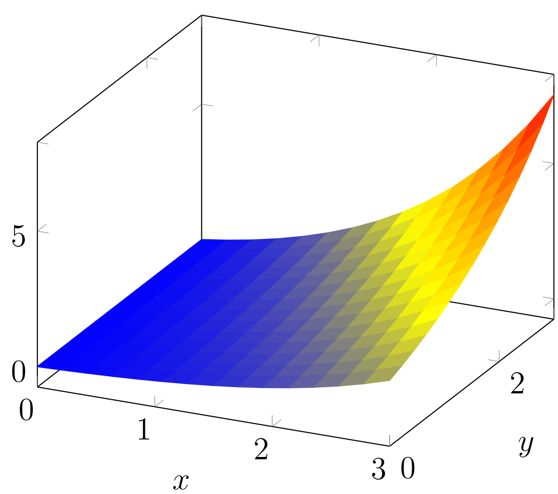
6. Un sistema electrónico opera con dos tipos de componentes. Sean T_1 y T_2 las variables aleatorias tiempo de duración (en horas) de las componentes de tipo 1 y 2 respectivamente. La función densidad de probabilidad conjunta del vector (T_1, T_2) es:

$$f\left(t_1, t_2\right) = \begin{cases} \frac{t_1}{8} e^{-\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} & 0 < t_1, 0 < t_2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Determine $P\left(T_1 \geq 1, T_2 \geq 2\right)$.

   b) Calcule la probabilidad de que una componente de tipo 2 tenga una duración mayor que 2 horas.

Soluciones



a)

- $P\left(T_1 \geq 1, T_2 \geq 2\right) = \int\limits_1^\infty \int\limits_2^\infty \frac{t_1}{8} e^{-\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}\, dt_2\, dt_1 = \int\limits_1^\infty \int\limits_2^\infty \frac{t_1}{8} e^{-\frac{t_1}{2}} e^{-\frac{t_2}{2}}\, dt_2\, dt_1 =$
  $= \frac{1}{8} \int\limits_1^\infty t_1 e^{-\frac{t_1}{2}}\, dt_1 \int\limits_2^\infty e^{-\frac{t_2}{2}}\, dt_2 = \frac{1}{8} \int\limits_1^\infty t_1 e^{-\frac{t_1}{2}} 2e^{-1}\, dt_1 = \int\limits_1^\infty \frac{t_1 e^{-\frac{t_1}{2}-1}}{4}\, dt_1 = \frac{3\sqrt{e}}{2}.$

b)

- $f_{T_2}\left(t_2\right) = \int\limits_{-\infty}^\infty f\left(t_1, t_2\right)\, dt_1 = \int\limits_0^\infty \frac{1}{8} t_1 e^{-\frac{t_1+t_2}{2}}\, dt_1 = \frac{1}{8} \int\limits_0^\infty t_1 e^{-\frac{t_1}{2}} e^{-\frac{t_2}{2}}\, dt_1 =$
  $= \frac{1}{8} e^{-\frac{t_2}{2}} \int\limits_0^\infty t_1 e^{-\frac{t_1}{2}}\, dt_1 = \frac{1}{2} e^{-\frac{t_2}{2}}.$
- $P\left(T_2 \geq 2\right) = \int\limits_2^\infty f_{T_2}\left(t_2\right)\, dt_2 = \int\limits_2^\infty \frac{e^{-\frac{t_2}{2}}}{2}\, dt_2 = e^{-1}.$

7. Los tiempos en horas T_A y T_B que dos estudiantes A y B demoran en resolver un problema son variables aleatorias independientes con distribución exponencial y esperanza 0,5hs. Calcule la probabilidad de que el estudiante A demore a lo sumo una hora y el estudiante B demore como máximo 45 minutos.

Solución

- $T_A \sim Ex\left(2\right)$. $T_B \sim Ex\left(2\right)$.
- $P\left(T_A \leq 1, T_B \leq \frac{45}{60}\right) = F_{T_A}\left(1\right) F_{T_B}\left(\frac{45}{60}\right) = \left(1 - e^{-2}\right)\left(1 - e^{-2\cdot\frac{45}{60}}\right) \approx 0,67.$

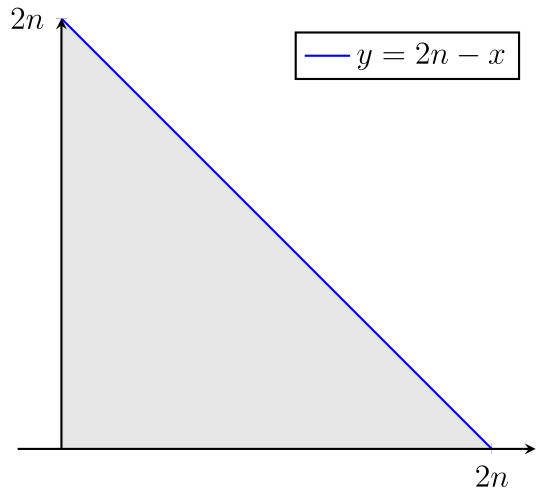
8. Se escoge al azar un punto de coordenadas reales en el triángulo limitado por $y = 0$, $x = 0$, $y = 2n - x$.

   a) Determine la distribución conjunta de las coordenadas (X, Y).

   b) Determine las distribuciones marginales de X e Y.

   c) Determine la distribución condicional de X dado Y.

Soluciones



a)

- $f_{X_y}(x,y) = \begin{cases} k & 0 < x < 2n - x; 0 < y < 2n - x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
- $\iint\limits_{R_{XY}} f(x,y)\, dx\, dy = \int\limits_0^{2n} \int\limits_0^{2n-x} k\, dy\, dx = k \int\limits_0^{2n} \int\limits_0^{2n-x} dy\, dx =$
  $= k \int\limits_0^{2n} (2n - x)\, dx = k2n^2 = 1 \iff k = \frac{1}{2n^2}.$

b)

- $f_X(x) = \int\limits_0^{2n-x} f(x,y)\, dy = \int\limits_0^{2n-x} \frac{1}{2n^2}\, dy = \frac{2n-x}{2n^2}.$
- $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2n-x}{2n^2} & 0 < x < 2n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$

- $f_Y(y) = \int\limits_0^{2n-y} \frac{1}{2n^2}\, dx = \frac{2n-y}{2n^2}$.
- $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2n-y}{2n^2} & 0 < y < 2n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

c)

- $f_{X/Y=y} = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{2n-y}{2n^2}} = \frac{1}{2n-y}$ COMPLETAR.

9. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias cuya distribución conjunta es uniforme en el triángulo de vértices $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

   a) Encuentre la densidad marginal de X_1 y la densidad marginal de X_2.
   b) Halle $COV(X_1, X_2)$.

   Solución

   a) COMPLETAR.
   b) COMPLETAR.

2. Suma de variables aleatorias

10. Un aparato de televisión puede tener dos tipos de roturas: debido a falla de transistores o debido a la falla de condensadores. Ambas fuentes de rotura son independientes. El número de roturas debido a falla de transistores durante los dos primeros años de utilización del aparato es una v. a. que sigue una ley de Poisson con promedio 1. El número de roturas debido a la falla de condensadores, durante el mismo período, sigue una ley de Poisson con promedio 2. Calcule la probabilidad de que en el primer año de utilización del aparato, éste tenga exactamente 2 roturas.

Solución

- T_t: «Numero de roturas por falla de transistores durante los t primeros años».
  - $E(T_t) = 1 = \lambda_T \cdot 2 \Rightarrow \lambda_T = \frac{1}{2} \Rightarrow T_t \sim Po\left(\frac{1}{2}t\right)$.
- C_t: «Numero de roturas por falla de condensadores durante los t primeros años».
  - $E(C_t) = 2 = \lambda_C \cdot 2 \Rightarrow \lambda_C = 1 \Rightarrow C_t \sim Po(t)$.
- X_t: «Numero de roturas durante los t primeros años».
  - $X_t = T_t + C_t$.
- Como T_t y C_t son independientes, por propiedad reproductiva de la distribución de Poisson, resulta $X_t \sim Po\left(\frac{1}{2}t + t\right) = Po\left(\frac{3}{2}t\right)$.
  - $P(X_1 = 2) = \frac{e^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2!} \approx 0,056$.

11. Ciertos elementos de un circuito eléctrico se protegen contra el exceso de voltaje por medio de dos relevadores R_1 y R_2 que se ajustan para ser descargados en períodos X_1 y X_2 respectivamente, después que comienza el exceso de voltaje. Estos períodos de descarga varían debido a pequeños factores incontrolables, por lo que se puede suponer que X_1 y X_2 son v. a. normales independientes con tiempos medios de descarga $\mu_1 = 1s$ y μ_2, y varianzas $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \frac{1}{10}s^2$. Determine μ_2 de manera tal que la probabilidad de que R_2 sea descargada antes que R_1 sea a lo sumo 0,001.

Solución

- $X_1 \sim N\left(1, \frac{1}{10}\right)$. $X_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{1}{10}\right)$. $X_2 - X_1 \sim N\left(1 + \mu_2, \sqrt{\frac{2}{10}}\right)$.
- $P(X_2 \leq X_1) = P(X_2 - X_1 \leq 0)$.
  - $Z = \frac{X_2 - X_1 - 1 - \mu_2}{\sqrt{\frac{2}{10}}}$. $X_2 - X_1 \leq 0 \iff Z \leq \frac{-1-\mu_2}{\sqrt{\frac{2}{10}}}$.
  - $P\left(Z \leq \frac{-1-\mu_2}{\sqrt{\frac{2}{10}}}\right) \leq 0,001 \iff \frac{-1-\mu_2}{\sqrt{\frac{2}{10}}} \lesssim -3,11 \iff$
    $\iff -\mu_2 \lesssim -3,11\sqrt{\frac{2}{10}} + 1 \iff \mu_2 \gtrsim 3,11\sqrt{\frac{2}{10}} - 1$.

12. Sean $X_1, \ldots, X_n$; n variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en el intervalo $(0,1)$. Encuentre la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria $Z = X_1 + \ldots + X_{60}$.

    Solución

    - $X_i \sim U[0,1]$. $f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < x_i < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.
    - $E(X_i) = \frac{1}{2}$. $V(X_i) = \frac{1}{12}$.
    - $Z = \sum_{i=1}^{60} X_i$.
    - Como X_i son independientes y n es grande, por el teorema central del limite resulta $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$.
    - $\mu = \sum_{i=1}^{60} E(X_i) = \frac{60}{2} = 30$.
    - $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{60} V(X_i) = \frac{60}{12} = 5$.
    - $\therefore Z \sim N(30,5)$. $f_Z(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{5}} e^{-\left(\frac{z-30}{\sqrt{5}}\right)^2}$. $R_Z = \{z \in \mathbb{R} / 0 \leq z \leq 60\}$.

13. El espesor de una lámina metálica (en mm) es una v. a. $X_i \sim N(0,5; 0,05^2)$. El espesor de una lámina de papel aislante es también una v. a. $Y_i \sim N(0,5; 0,02^2)$. Obtenga la distribución del núcleo de un transformador que consta de 50 capas de láminas metálicas y 49 láminas de papel aislante.

    Solución COMPLETAR.

14. Un ensamble eléctrico consta de 20 bloques de tipo A y 30 bloques de tipo B conectados en serie. Los ensambles se colocan en recipientes cuya longitud (en cm) varía aleatoriamente con distribución normal, media 65 y desviación estándar 0,5. Se conoce además que la longitud (en cm) de un bloque de tipo A varía aleatoriamente con media 1,95 y desvío estándar 0,01 y la longitud (en cm) de un bloque de tipo B varía

aleatoriamente con media 0,83 y desviación estándar 0,02 cm. Calcule la probabilidad de que un ensamble entre en un recipiente, cuando ambos son elegidos al azar.

Solución COMPLETAR.

15. Un sistema está formado por 100 componentes que funcionan independientemente. La probabilidad de que cualquier componente falle durante el período de operación es igual a 0,10. Para que funcione el sistema completo, deben funcionar al menos 85 componentes. Calcule la probabilidad de que el sistema funcione.

    Solución COMPLETAR.

16. El consumo de combustible en litros de un ómnibus que realiza el trayecto Rosario-Santa Fe es una variable aleatoria normalmente distribuida con media 20 litros y desviación estándar 2 litros. Calcule la probabilidad de que 640 litros resulten insuficientes para realizar 30 viajes.

    Solución

    - X_i: «Consumo de combustible en el i-esimo trayecto».
    - $X_i \sim N\left(20l, 4l^2\right)$. $i = 1, \ldots, 30$. $\mu_{X_i} = 20$. ${\sigma^2}_{X_i} = 4$.
    - Considerando que el consumo en cada trayecto es independiente del consumo en los demas trayectos, por propiedad reproductiva de distribuciones normales tenemos lo siguiente:
        - Y: «Consumo total en 30 trayectos».
        - $\mu = \sum_{i=1}^{30} \mu_{X_i} = 30 \cdot 20 = 600l$.
        - $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{30} {\sigma^2}_{X_i} = 30 \cdot 4 = 120l^2$.
        - $Y = \sum_{i=1}^{30} X_i$. $Y \sim N\left(600l, 120l^2\right)$.
    - $P\left(Y > 640\right) = 1 - P\left(Y < 640\right) = 1 - P\left(Z < 3,65\right)$.

17. Un sistema está formado por n componentes, cada una con una probabilidad de que funcione de 0,9 El sistema funcionará si funcionan correctamente al menos el 82 % de las componentes. Determine n de modo que el sistema tenga una probabilidad de funcionar de al menos 0,95.

    Solución COMPLETAR.

18. Treinta instrumentos electrónicos $d_1, \ldots, d_{30}$ se usan para un control automático de la siguiente manera: cuando falla d_1 comienza a actuar d_2, cuando falla d_2 empieza d_3, y así sucesivamente. El tiempo para que falle d_i $(1 = 1, \ldots, 30)$ es una v. a. que se distribuye según una ley exponencial con parámetro $\alpha = 0,1$ (hora^{-1}). Si se quiere obtener la distribución de T, el tiempo total de la operación de los 30 instrumentos, ¿se podría recurrir al Teorema central del límite?

    Solución COMPLETAR.

19. Una empresa dedicada a la venta de repuestos sabe que la demanda diaria varía aleatoriamente con la siguiente distribución de probabilidad:

D	0	1	2
$P(D = d)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

    Desde el momento en que se hace el pedido hasta que el mismo ingresa al stock transcurren 90 días. Determine cuántas unidades deben tenerse en existencia en momento de hacer el pedido si se quiere que la probabilidad de que la demanda durante los 90 días supere la existencia sea 0,05.

    Solución COMPLETAR.

20. La demanda diaria de agua potable por habitante en una población de 10000 habitantes es una v. a. X con $E(X) = 0,4m^3$ y $\sigma(X) = 0,09m^3$. La disponibilidad de agua (en m^3) para el consumo almacenado diariamente en una represa es una v. a. $Y \sim N(4500; 450^2)$. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera no sea satisfecha la demanda?

Solución

- D: «Demanda diaria del articulo».

D	$p(d)$
0	$0,25$
1	$0,5$
2	$0,25$

- D_i: «Demanda en el día i del articulo».
- $D_T = \sum_{i=1}^{90} D_i$.
- Suponemos que las demandas en un día son independientes de las demandas en el resto de los días.
- Por el teorema central del limite, $D_T \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- $E(D_i) = 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 = 1$.
- $E(D_i^2) = 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,25 = 1,5$.
- $V(D_i) = 1,5 - 1 = 0,5$.
- $\mu = \sum_{i=1}^{90} E(D_i) = 90$.
- $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{90} V(D_i) = 45$.
- Por lo tanto aproximamos la distribución D_T por una distribución $N(90, 45)$.
- k: stock al hacer el pedido.
- $P(D_T > k) = 0,05 \Rightarrow P(D_T < k) = 1 - 0,05 = 0,95$.
- $Z = \frac{D_T - 90}{\sqrt{45}}$. $P(D_T < k) = P(Z < z_1) = 0,95 \Rightarrow z_1 \approx 1,645$.
- $z_1 = \frac{k-90}{\sqrt{45}} = 1,645 \Rightarrow k \approx 101$.
- $\therefore$ El stock ? al hacer el pedido es de 101 artículos.