Práctica 5: Espacios vectoriales con producto interno. Ortogonalidad.

1. *a*) Verificar que para $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}\bar{b}_{ij},$$

   es un producto interno (conocido como producto de Frobenius).

   b) Probar que para $B^* = \bar{B}^t$, se tiene que $\langle A, B\rangle = tr(AB^*) = tr(B^*A)$.

   c) Probar que $\langle AB, C\rangle = \langle B, A^*C$.

2. Verificar que $f \times g = \int_1^e \log(x)f(x)g(x)dx$ es un producto interno en $C([1,e])$, espacio de las funciones a valores reales continuas en el intervalo $[1,e]$.

3. Dados $u, v \in V$ espacio vectorial con producto interno, probar que $u = v$ si y sólo si $\langle u, w\rangle = v \times w$ para todo $w \in V$.

4. Demostrar.
   i) Un vector $v \in W^\perp$ si y solo si v es ortogonal a todo vector en un conjunto que genere a W.
   ii) $W^\perp$ es un subespacio vectorial de V.

5. Sea $W \underset{s.e.}{\subset} V$, V *e.v.* con producto interno. Probar que $(W^\perp)^\perp = W$.

6. Sea $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el producto interno definido en el ejercicio (1).

   a) Hallar una base ortogonal para $\mathbb{R}^{n\times n}$ para dicho producto interno.

   b) Hallar $W^\perp$, si $W = gen\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   c) Ídem *b*) para $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

7. Sea $C([1,e])$, con el producto interno definido en el ejercicio (2).

   a) Calcular $\|f\|$ para $f(x) = \sqrt{2}$.

   b) Hallar un polinomio de grado una que sea ortogonal a $g(x) = 1$.

8. Sea $v = \begin{bmatrix} a\\ b\end{bmatrix}$. Describir el conjunto H de vectores $\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}$ que son ortogonales a v.

9. Sea $W =< \{v_1, \cdots, v_p\} >$. Mostrar que si x es ortogonal a todo v_j, para $1 \leqslant j \leqslant p$, luego x es ortogonal a todo vector en W.

10. Mostrar que si $x \in W \cup W^\perp$, entonces $x = 0$.

11. En cada caso, mostrar que $\{u_1, u_2\}$ o $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortogonal para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ respectivamente, y luego expresar a x como combinación lineal de la base correspondiente.
    a) $u_1 = \begin{bmatrix} 2\\ -3\end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 6\\ 4\end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 9\\ -7\end{bmatrix}$.
    b) $u_1 = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1\\ 4\\ 1\end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 2\\ 1\\ -2\end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 8\\ -4\\ -3\end{bmatrix}$.

12. Suponer que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por n vectores ortogonales distintos de cero. Explicar por qué $W = \mathbb{R}^n$.

13. Una matriz cuadrada A $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ es una matriz ortogonal si $A^{-1} = A^t$.
    Demostrar

    a) Sean U, V matrices ortogonales. Explicar por qué UV es una matriz ortogonal.

b) Tanto el conjunto de los vectores columna de una matriz ortogonal, como el conjunto de vectores filas son conjuntos ortonormales.

c) El determinante de una matriz ortogonal es 1 o -1.

d) Sea U una matriz ortogonal entonces para $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale: *i*) $\|Ux\| = \|x\|$, *ii*) $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ (con el producto interno canónico).

14. Sea $\{u_1, u_2\}$ un conjunto ortogonal de vectores distintos de cero, y c_1, c_2 escalares no nulos. Mostrar que $\{c_1u_1, c_2u_2\}$ también es ortogonal.

15. Verificar la ley del paralelogramo para los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$:
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

16. Dado $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$, sea $L =< \{u\} >$. Para $y \in \mathbb{R}^n$, *la reflexión de* y *en* L se define como
$$refl_L y = 2proy_L y - y.$$
a) Graficar en $\mathbb{R}^2$ para observar que la $refl_L y$ es la suma de $\hat{y} = proy_L y$ con $\hat{y} - y$.
b) Mostrar que la aplicación que $y \mapsto refl_L y$ es una transformación lineal.

17. Sean
$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Escribir x como suma de dos vectores, uno en $< \{u_1, u_2, u_3\} >$ y el otro en $< \{u_4\} >$.

18. Sea W el subespacio generado por $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
a) Si $y = [3, 1, 5, 1]^T$, escribirlo como la suma de un vector en W y uno en $W^{\perp}$.
b) Si $y = [3, -1, 1, 13]^T$, encontrar el punto más cercano a y en W.
c) Si $y = [2, 4, 0, 1]^T$, encontrar la mejor aproximación a y mediante vectores de la forma $c_1v_1 + c_2v_2$. Hallar la distancia de y a W.

19. Sean $y = [4, 8, 1]^t$, $u_1 = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^T$, $u_2 = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]^T$ y $W =< \{u_1, u_2\} >$.
a) Sea $U = [u_1 u_2]$. Calcular U^tU y UU^t.
b) Calcular $proy_W y$ y $(UU^t)y$.

20. Sea A una matriz $m \times n$. Demostrar que todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede escribirse en la forma $x = p + u$, donde p está en $Fil(A)$ y $u \in nul(A)$. Mostrar que si la ecuación $Ax = b$ es consistente, entonces hay una única p en $Fil(A)$ tal que $Ap = b$.

21. Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con una base ortogonal $\{w_1, \cdots, w_p\}$ y sea $\{v_1, \cdots, v_q\}$ una base ortogonal de $W^{\perp}$.
a) Explicar por qué $\{w_1, \cdots, w_p, v_1, \cdots, v_q\}$ es un conjunto ortogonal.
b) Explicar por qué el conjunto definido en el ítem anterior genera $\mathbb{R}^n$.
c) Demostrar que $\dim W + \dim W^{\perp} = n$.

22. Siendo $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$, utilizar el proceso de Gram-Schimdt para producir una base ortogonal de $< \{u, v\} >$.

23. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Encontrar una base ortogonal para el espacio columnas de A.