Funtores

1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Probar que $P_1 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $P_1(C,D) = C$ y $P_2 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ tal que $P_2(C,D) = D$ definen functores.

   Solución Completamos las definiciones: $P_1(f,g) = f$ y $P_2(f,g) = g$.

   - Sea $(C,D) \in ob\,\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ sabemos que $id_{(C,D)} = (id_C, id_D)$, luego:
     - $P_1\left(id_{(C,D)}\right) = id_C = id_{P_1(C,D)}$.
     - $P_2\left(id_{(C,D)}\right) = id_D = id_{P_2(C,D)}$.
   - Sean $(f,g) : (C_1, C_2) \to (D_1, D_2)$ y $(p,q) : (C_2, C_3) \to (D_2, D_3)$, luego:
     - $P_1((p,q) \circ (f,g)) = P_1(p \circ f, q \circ g) = p \circ f = P_1(p,q) \circ P_1(f,g)$.
     - $P_2((p,q) \circ (f,g)) = P_2(p \circ f, q \circ g) = q \circ g = P_2(p,q) \circ P_2(f,g)$.

2. Dado un conjunto X, definimos el conjunto $List(X)$ de la listas finitas de elementos de X. Probar que $List : Set \to Set$ es un funtor. Considerando ahora $List'(X)$ como un monoide, probar que $List' : Set \to Mon$ es un funtor. Determinar si $List'$ preserva productos. *Ayuda*: pensar en cual monoide es isomorfo a $List'(X)$ cuando X es un conjunto con un solo elemento.

   Solución

   - Definimos $List(f : A \to B) = f' : \langle A \rangle \to \langle B \rangle$ tal que $f' \langle\rangle_A = \langle\rangle_B$ y $f' \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle f(a_1), \ldots, f(a_n) \rangle$.
     - Sea $X \in ob\,Set$, luego:
       - $List(id_X) \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle id_X(a_1), \ldots, id_X(a_n) \rangle = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.
       - $id_{List(X)} \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = id_{\langle X \rangle} \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.
       - $List(id_X) \langle\rangle_X = \langle\rangle_X = id_{\langle X \rangle} \langle\rangle_X$.

       Podemos ver entonces que $List(id_X) = id_{List(X)}$.

- Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$, luego:
  - $List\,(g \circ f)\,\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle g \circ f\,(a_1)\,, \ldots, g \circ f\,(a_n)\rangle$.
  - $(List\,(g) \circ List\,(f))\,\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = g'\,(f'\,\langle a_1, \ldots, a_n\rangle) = g'\,\langle f\,(a_1)\,, \ldots, f\,(a_n)\rangle = \langle g \circ f\,(a_1)\,, \ldots, g \circ f\,(a_n)\rangle$.

  Podemos ver entonces que $List\,(g \circ f) = List\,(g) \circ List\,(f)$.

- Definimos $List'\,(X) = (\langle X\rangle\,, \langle\rangle_X\,, {+\!+}_X)$. Veamos que $List'\,(f : A \to B)$ es un morfismo de monoide:
  - $List'\,(f)\,\langle\rangle_A = \langle\rangle_B$.
  - $List'\,(f)\,\langle a_1, \ldots, a_n\rangle {+\!+}_A\,\langle a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}\rangle = List'\,(f)\,\langle a_1, \ldots, a_{n+m}\rangle = \langle f\,(a_1)\,, \ldots, f\,(a_{n+m})\rangle$.
  - $List'\,(f)\,\langle a_1, \ldots, a_n\rangle + +_B List'\,(f)\,\langle a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}\rangle =$
    $= \langle f\,(a_1)\,, \ldots, f\,(a_n)\rangle {+\!+}_B\,\langle f\,(a_{n+1})\,, \ldots, f\,(a_{n+m})\rangle = \langle f\,(a_1)\,, \ldots, f\,(a_{n+m})\rangle$

3. Se ha visto que puede considerarse a un monoide como una categoría con un único objeto, ¿Qué es un funtor entre dos categorías de este tipo? ¿Y entre categorías formadas a partir de conjuntos ordenados?

   Solución

   - Sean $(A, e_A, \oplus_A)$ y $(B, e_B, \oplus_B)$ dos monoides; $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las respectivas categorías asociadas y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor. Sabemos que $F\,(*_A) = *_B$ y que:
     - $F\,(id_{*_A}) = id_{F(A)}$, es decir $F\,(e_A) = e_B$.
     - $F\,(a \circ a') = F\,(a) \circ F\,(a')$, es decir $F\,(a \oplus_A a') = F\,(a) \oplus_B F\,(a')$.

     Vemos entonces que F es un morfismo de monoides.

   - Sean $(P, \leq_P)$ y $(Q, \leq_Q)$ dos posets; $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ las respectivas categorías asociadas y $F : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ un functor. Sabemos que:
     - $F\,(id_x) = id_{F(x)}$, es decir $F\,(x, x) = (F\,(x)\,, F\,(x))$; lo que significa que si $x \leq_P x$ entonces $F\,(x) \leq_Q F\,(x)$.
     - $F\,((y, z) \circ (x, y)) = F\,(y, z) \circ F\,(x, y)$, lo que significa que si $x \leq_P z$ entonces $F\,(x) \leq_Q F\,(z)$.

     Vemos entonces que F es un morfismo de posets.

4. Dados dos funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, definir un funtor que componga ambos. ¿Es posible definir una categoría cuyos objetos sean las categorías y sus flechas sean los funtores entre estas?

   Solución Definimos $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ donde $G \circ F\,(C) = G\,(F\,(C))$ y $G \circ F\,(f) = G\,(F\,(f))$. Veamos que efectivamente se trata de un functor:

   - Sea $C \in ob\,\mathcal{C}$ tal que $F\,(C) = D$ y $G\,(D) = E$, luego:

     $$G \circ F\,(id_C) = G\,(F\,(id_C)) = G\left(id_{F(C)}\right) = G\,(id_D) = id_{G(D)} = id_E = id_{G\circ F(C)}$$

   - Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ morfismos de $\mathcal{C}$ tales que $F\,(f) = f' : X' \to Y'$ y $F\,(g) = g' : Y' \to Z'$, luego:

     $$G \circ F\,(g \circ f) = G\,(F\,(g) \circ F\,(f)) = G\,(g' \circ f') =$$

     $$= G\,(g') \circ G\,(f') = (G \circ F)\,(g) \circ (G \circ F)\,(f)$$

5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos, coproductos y exponenciales; y $A \in ob\,\mathcal{C}$. Probar que las siguientes aplicaciones pueden extenderse con estructura funtorial:

   a) $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tal que $\Delta\,(B) = (B, B)$.

   b) $- \times A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $(- \times A)\,(B) = B \times A$.

   c) $-^A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\left(-^A\right)(B) = B^A$.

   d) $-^A \times A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\left(-^A \times A\right)(B) = B^A \times A$.

   e) $\Pi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\Pi\,(B, C) = B \times C$.

   f) $\Sigma : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\Sigma\,(B, C) = B + C$.

   g) $A^- : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $(A^-)\,(B) = A^B$ y es contravariante en los morfismos.

   h) $A^{A^-} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\left(A^{A^-}\right)(B) = A^{A^B}$.

Soluciones

a) Definimos $\Delta(f) = (f, f)$. Veamos que Δ es un functor:

- $\Delta(id_X) = (id_X, id_X) = id_{(X,X)} = id_{\Delta(X)}$.
- Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ luego $\Delta(g \circ f) = (g \circ f, g \circ f) = (g, g) \circ (f, f) = \Delta(g) \circ \Delta(f)$.

b) Definimos $(- \times A)(f : X \to Y) = f \times id_A : X \times A \to Y \times A$. Veamos que $- \times A$ es un functor:

- $(- \times A)(id_X) = id_X \times id_A = id_{X \times A} = id_{(-\times A)(X)}$.
- Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ luego $(- \times A)(g \circ f) = (g \circ f) \times id_A = (g \times id_A) \circ (f \times id_A) = (- \times A)(g) \circ (- \times A)(f)$.

c) COMPLETAR.

d) Sabemos que el morfismo $\left(-^A \times A\right)(f : X \to Y)$ debe tener tipo $X^A \times A \to Y^A \times A$, proponemos entonces $\left(-^A \times A\right)(f) = \overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & X^A \arrow[d, dashed] & X^A \times A \arrow[ll, bend right, "\varepsilon_{AX}"'] \arrow[d, "\overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A"] \\
Y & Y^A & Y^A \times A \arrow[ll, bend left, "\varepsilon_{AY}"]
\end{tikzcd}$$

- $\left(-^A \times A\right)(id_X) = \overline{id_X \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A =$
  $= \overline{\varepsilon_{AX}} \times id_A = id_{X^A} \times id_A = id_{X^A \times A} = id_{(-^A \times A)(X)}$.
- Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ luego:

$$\left(-^A \times A\right)(g \circ f) = \overline{(g \circ f) \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A =$$

$$= \overline{\varepsilon_{AZ} \circ (\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \times id_A) \circ \left(\overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A\right)} \times id_A =$$

$$= \overline{\varepsilon_{AZ} \circ \left(\left(\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \circ \overline{f \circ \varepsilon_{AX}}\right) \times id_A\right)} \times id_A =$$

$$= \left(\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \circ \overline{f \circ \varepsilon_{AX}}\right) \times id_A = \left(\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \circ \overline{f \circ \varepsilon_{AX}}\right) \times (id_A \circ id_A) =$$

$$= (\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \times id_A) \circ \left(\overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A\right) = \left(-^A \times A\right)(g) \circ \left(-^A \times A\right)(f)$$

e) COMPLETAR.

f) COMPLETAR.

g) COMPLETAR.

h) COMPLETAR.

6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña, para cada objeto X de $\mathcal{C}$ definimos $HOM(X,-) : \mathcal{C} \to Set$ donde $HOM(X,-)(Y) = Hom(X,Y)$ y $HOM(X,-)(f) = Hom(X,f) = \lambda g.f \circ g$. Probar que $HOM(X,-)$ es efectivamente un funtor para cada X. Definir análogamente un funtor $HOM'(-,X)$.

   Solución COMPLETAR.

7. Si $f : A \to B$ en Set, entonces definimos $f^{-1}(X) = \{a \in A : f(a) \in X\}$ donde $X \subseteq B$. Probar que $I : Set \to Set$ es un funtor contravariante, llevando: $I(A) = \mathcal{P}(A)$ y $I(f) = f^{-1}$.

   Solución COMPLETAR.

8. Dado un semigurpo $(S,\cdot)$, podemos construir un monoide $(S',\cdot')$ donde $S' = S \uplus \{e\}$, $(0,x) \cdot' (0,y) = (0, x \cdot y)$ y $(1,e) \cdot' x = x = x \cdot' (1,e)$. Utilizando esta construcción, definir un funtor $F : Sem \to Mon$ y probar que es un monomorfismo en Cat.

   Solución COMPLETAR.

9. Probar o refutar: sea C una categoría con productos, y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un functor, entonces siempre existe un único morfismo $F(A \times B) \to FA \times FB$.

   Solución COMPLETAR.

10. Sea $U : Mon \to Set$ el functor que olvida la estructura de monoide. Definimos además $U^2 : Mon \to Set$ que en objetos actúa llevando $(X,\otimes,e) \mapsto X \times X$. Probar que a U^2 se lo puede denotar de estructura functorial.

Solución COMPLETAR.

Transformaciones naturales

11. Dada dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, probar que todo funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es naturalmente isomorfo a si mismo, es decir, existe un isomorfismo natural $id_F : F \dot{\longrightarrow} F$.

   Solución Sea $X \in ob\,\mathcal{C}$, definimos $id_{F_X} = id_{F(X)}$. Es fácil ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} A & & F(A) & \xrightarrow{id_{F_A}} & F(A) \\ f\downarrow & & F(f)\downarrow & & \downarrow F(f) \\ B & & F(B) & \xrightarrow[id_{F_B}]{} & F(B) \end{array}$$

12. Considere el funtor $List : Set \to Set$. Mostrar que puede construirse un isomorfismo natural $REV : List \dot{\longrightarrow} List$ tal que REV_X es la función que invierte las palabras de $List\,(X)$. ¿Se puede hacer lo mismo con el funtor $List' : Set \to Mon$?

   Solución Para ver que es transformación natural debemos ver si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} A & & List(A) & \xrightarrow{REV_A} & List(A) \\ f\downarrow & & List(f)\downarrow & & \downarrow List(f) \\ B & & List(B) & \xrightarrow[REV_B]{} & List(B) \end{array}$$

   - $(REV_B \circ List\,(f))\,\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = REV_B\,\langle f\,(a_1)\,, \ldots, f\,(a_n)\rangle = \langle f\,(a_n)\,, \ldots, f\,(a_1)\rangle$.
   - $(List\,(f) \circ REV_A)\,\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = List\,(f)\,\langle a_n, \ldots, a_1\rangle = \langle f\,(a_n)\,, \ldots, f\,(a_1)\rangle$.

Solo nos resta ver que es un isomorfismo:

$$REV_X \circ REV_X \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \iff REV_X \circ REV_X = id_{List(X)}$$

13. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos y exponenciales; y A un objeto de la misma. Definir una transformación natural $\eta : \left(-^A \times A\right) \overset{\cdot}{\longrightarrow} id_{\mathcal{C}}$.

    Solución Sean $X, Y \in ob\,\mathcal{C}$ y $f : X \to Y$ un morfismo de la categoría, luego sabemos que $\left(-^A \times A\right)(X) = X^A \times A$ y $\left(-^A \times A\right)(f) = \overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A$.

$$\begin{tikzcd}
id_{\mathcal{C}}(X) = X \arrow[d, "f"'] & X^A \arrow[d, dashed] & X^A \times A = \left(-^A \times A\right)(X) \arrow[ll, bend right, "\varepsilon_{AX}"'] \arrow[d, "\overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A = \left(-^A \times A\right)(f)"] \\
id_{\mathcal{C}}(Y) = Y & Y^A & Y^A \times A = \left(-^A \times A\right)(Y) \arrow[ll, bend left, "\varepsilon_{AY}"]
\end{tikzcd}$$

    Del diagrama anterior podemos deducir que $\eta_X = \varepsilon_{AX}$.

14. Sea $\mathcal{C}$ una C.C.C. y A un objeto de la misma. Definir una transformación natural $\eta : Id \overset{\cdot}{\longrightarrow} A^{A^-}$, y probar que efectivamente es una transformación natural. *Ayuda*: puede ser útil probar los siguientes lemas:

    - $curry\,(f) \circ g = curry\,(f \circ (g \times id))$.
    - $swap \circ (h \times i) = (i \times h) \circ swap$.

    donde *swap* es el isomorfismo que conmuta los factores de un producto.

    Solución COMPLETAR.

15. Probar o refutar: sea $U : Grp \to Set$ el funtor forgetful de grupos, entonces toda transformación natural $\eta : U \overset{\cdot}{\longrightarrow} U$ es un isomorfismo natural.

Solución COMPLETAR.

16. Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, mostrar que los funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ forman una categoría con las transformaciones naturales como flechas. A esta categoría se la nota $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

    Solución COMPLETAR.

17. Probar que Cat es una C.C.C.

    Solución COMPLETAR.

18. Dada una categoría pequeña $\mathcal{C}$, mostrar que las categorías $\mathcal{C}^2$ y $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ son isomorfas en Cat.

    Solución COMPLETAR.

Adjunciones

19. COMPLETAR.

    Solución COMPLETAR.

20. COMPLETAR.

    Solución COMPLETAR.

21. COMPLETAR.

    Solución COMPLETAR.

22. COMPLETAR.

    Solución COMPLETAR.

23. COMPLETAR.

Solución COMPLETAR.

24. COMPLETAR.

    Solución COMPLETAR.

Monadas

25. COMPLETAR.

    Solución COMPLETAR.

26. COMPLETAR.

    Solución COMPLETAR.

27. COMPLETAR.

    Solución COMPLETAR.

28. COMPLETAR.

    Solución COMPLETAR.

29. COMPLETAR.

    Solución COMPLETAR.

30. COMPLETAR.

    Solución COMPLETAR.

31. COMPLETAR.

    Solución COMPLETAR.

Lema de Yoneda

32. COMPLETAR.

    Solución COMPLETAR.

Ejercicios adicionales

1. Definimos la asignación $Fr : Set \to Mon$ tal que $Fr(X) = X^*$ [1] y $Fr(f)(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)$. Usando el funtor $U : Mon \to Set$ que se olvida de la estructura de monoide, consideramos $i : X \to U(Fr(X))$ la función que lleva un elemento x de X a la palabra x.

    a) Probar que Fr es un funtor.

    b) Probar que dado $f : X \to U(M)$ en Set donde M es un monoide, puedo construir una única $\overline{f} : Fr(X) \to M$ en Mon tal que $U\left(\overline{f}\right) \circ i = f$ en Set[2].

    c) ¿A cuál monoide es isomorfo $Fr(X)$ donde X es un conjunto de un solo elemento?

    d) ¿Este funtor preserva productos?

    Soluciones

    a) COMPLETAR.

    b) COMPLETAR.

    c) COMPLETAR.

    d) COMPLETAR.

[1] X^* es el monoide de las palabras sobre el alfabeto X con la concatenación como operación. Puede pensar en las palabras de X como las listas de elementos de X.

[2] Cuando un monoide como $Fr(X)$ satisface esta propiedad, decimos que es el monoide libre sobre X.