

Práctica adicional

Función de variable aleatoria

2. Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $p_X(x) = x/6$, donde $x = 1, 2, 3$ e $Y = (X - 2)^2$.

- Determine la distribución de probabilidad de Y.
- Calcule $E(Y)$ y $V(Y)$.

Resolución:

X es una variable aleatoria discreta cuya distribución de probabilidad $p_X(x)$ es

$$p_X(x) = \begin{cases} x/6 & \text{si } x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$Y = H(X) = (X - 2)^2$ es una variable aleatoria discreta

- Analizamos los valores posibles de Y

Si $X=1 \Rightarrow Y=H(1)=1$

Si $X=2 \Rightarrow Y=H(2)=0$

Si $X=3 \Rightarrow Y=H(3)=1$

Luego, calculamos la distribución de probabilidad $p_Y(y)$ de la variable Y en base a los valores de $p_X(x)$

X	$p_X(x)$
1	1/6
2	2/6
3	3/6



Y	$p_Y(y)$
1	$p_X(1) + p_X(3) = 4/6$
0	$p_X(2) = 2/6$

Por lo tanto

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2/3 & \text{si } y = 1 \\ 1/3 & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

-

Esperanza de Y: $E(Y) = 2/3 * 1 + 1/3 * 0 = 2/3$

$E(Y^2) = 2/3 * 1^2 + 1/3 * 0^2 = 2/3$

Varianza de Y: $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 2/3 - 4/9 = 2/9$

5. Un cierto tipo de instrumento electrónico tiene una duración X (en unidades de 1.000 hs.) que varía aleatoriamente con función densidad $f_X(x) = e^{-x}$, $x > 0$. El costo de fabricar tal instrumento es de \$2. El fabricante vende el instrumento por \$5, pero garantiza un reembolso total si $X \leq 0,9$. Determine la esperanza matemática de la utilidad por instrumento.

Resolución:

X: "duración de un instrumento electrónico en unidades de 1000 horas"

X es una variable aleatoria continua cuya función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ es

$$X : \text{Exp}(1) \quad f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Por ser una distribución exponencial, sabemos que su función de distribución acumulada $F_X(x)$ resulta

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

y además

$$E(X)=1$$

$$V(X)=1$$

Definimos:

C: "costo de fabricación del instrumento en pesos"

V: "precio de venta del instrumento"

R: "reembolso en pesos si la duración es menor a 900 horas"

T: "utilidad por instrumento en pesos"

Veamos los valores que asumen estas variables:

C=2 es una constante

V=5 es una constante

$$R=H(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 0,9 \\ 0 & \text{si } x > 0,9 \end{cases} \text{ es una variable aleatoria discreta}$$

La utilidad T resulta

$$T=5-2-R = \begin{cases} -2 & \text{si } r=5 \\ 3 & \text{si } r=0 \end{cases} = J(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 0,9 \\ 3 & \text{si } x > 0,9 \end{cases} \text{ es una variable aleatoria discreta}$$

Calculamos la probabilidad para cada valor posible de T:

$$P(T=-2)=P(X \leq 0,9)=F_X(0,9)=1-e^{-0,9} \approx 0,59$$

$$P(T=3)=P(X > 0,9)=1-F_X(0,9)=e^{-0,9} \approx 0,41$$

Por lo tanto, la distribución de probabilidad $p_T(t)$ es

$$p_T(t) = \begin{cases} 0,59 & \text{si } t = -2 \\ 0,41 & \text{si } t = 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente, la esperanza matemática de T es

$$E(T) = 0,59 * (-2) + 0,41 * 3 = 0,05$$

Luego, la utilidad promedio por instrumento será \$0,05.

7. Considere una v.a $X \sim U[0, 1]$. Halle la función de densidad de la v.a. Y cuando:

a) $Y = a + (b - a)X$, $b > a$.

b) $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X$, $\lambda > 0$.

Resolución:

Sabemos que X es una variable aleatoria continua y

$$X : U[0,1] \quad f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como X tiene una distribución uniforme, su función de distribución acumulada $F_X(x)$ es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (7)$$

a) Definimos $Y = H(X) = a + (b - a)X$, con $b > a$.

Analizamos los valores posibles para Y a partir de los valores posibles de X

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (b - a)x \leq b - a \Leftrightarrow a \leq a + (b - a)x \leq b \Leftrightarrow a \leq y \leq b$$

Luego, Y es una variable aleatoria continua definida en el intervalo $[a, b]$ porque X es v.a. continua y $H(X)$ es una función continua por ser la ecuación de una recta en el plano.

Sabemos que $H(X)$ es continua, estrictamente monótona creciente y derivable en el conjunto de números reales por ser la ecuación de una recta, en particular lo sigue siendo en el intervalo $[0, 1]$.

Por lo tanto, podemos calcular la función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$ directamente a partir de $f_X(x)$ como

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right|$$

Sabemos que

$$Y = H(X) = a + (b - a)X \Rightarrow \frac{Y - a}{b - a} = X = H^{-1}(Y)$$

Luego, podemos escribir

$$f_X(H^{-1}(y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq H^{-1}(y) \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq y \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.a.1)$$

$$\left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right| = \left| \frac{1}{b - a} \right| = \frac{1}{b - a} \quad \text{porque } b > a \quad (7.a.2)$$

Por lo tanto, utilizando los resultados encontrados en (7.a.1) y (7.a.2), podemos decir que

$$Y : U[a, b] \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq y \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este resultado nos muestra que, a partir de una variable con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$, es posible obtener otra variable aleatoria distribuida uniformemente en un intervalo $[a,b]$ deseado usando la función $H(X) = a + (b-a)X$, con $b > a$.

Ahora resolvemos el problema a partir de la función de distribución acumulada de Y.

Analizamos los valores posibles para Y a partir de los valores posibles de X

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (b-a)x \leq b-a \Leftrightarrow a \leq a + (b-a)x \leq b \Leftrightarrow a \leq y \leq b$$

Luego, Y es una variable aleatoria continua definida en el intervalo $[a,b]$ porque X es v.a. continua y $H(X)$ es una función continua por ser la ecuación de una recta en el plano.

Buscamos $F_Y(y)$ en base a la función de distribución acumulada de X:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(a + (b-a)X \leq y) = P(X \leq \frac{y-a}{b-a}) = F_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right)$$

Utilizando la ecuación (7), podemos escribir

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{y-a}{b-a} < 0 \\ \frac{y-a}{b-a} & \text{si } 0 \leq \frac{y-a}{b-a} \leq 1 \\ 1 & \text{si } \frac{y-a}{b-a} > 1 \end{cases}$$

Analizando cada expresión para $F_Y(y)$

$$F_Y(y) = 0 \quad \text{si } \frac{y-a}{b-a} < 0 \Leftrightarrow y < a$$

$$F_Y(y) = 1 \quad \text{si } \frac{y-a}{b-a} > 1 \Leftrightarrow y > b$$

$$F_Y(y) = \frac{y-a}{b-a} \quad \text{si } 0 \leq \frac{y-a}{b-a} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y-a \leq b-a \Leftrightarrow a \leq y \leq b$$

Por lo tanto, $F_Y(y)$ resulta

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < a \\ \frac{y-a}{b-a} & \text{si } a \leq y \leq b \\ 1 & \text{si } y > b \end{cases}$$

Luego, la función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$ resulta

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq y \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En base a la expresión hallada para $f_Y(y)$ es posible afirmar que Y es una variable aleatoria continua con distribución uniforme en el intervalo $[a,b]$, es decir $Y : U[a,b]$.

b) Definimos $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X$, $\lambda > 0$.

Analizamos los valores posibles para Y a partir de los valores posibles de X. Como $\ln X$ no está definido para $X=0$, analizaremos el intervalo $(0,1]$

$$0 < x \leq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln(1) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{1}{\lambda} \ln x \Leftrightarrow 0 \leq y$$

Luego, Y es una variable aleatoria continua definida en el conjunto de reales positivos porque X es una variable aleatoria continua y $H(X) = -\frac{1}{\lambda} \ln X$ es una función continua en el intervalo $(0,1]$.

Como $H(X)$ es continua, estrictamente monótona y derivable en el conjunto de números reales positivos, podemos calcular la función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$ directamente a partir de $f_X(x)$ como

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right|$$

Sabemos que

$$Y = H(X) = -\frac{1}{\lambda} \ln X \Rightarrow e^{-\lambda Y} = X = H^{-1}(Y)$$

Luego, podemos escribir

$$f_X(H^{-1}(y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < H^{-1}(y) \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.b.1)$$

Por otra parte

$$\left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right| = \left| e^{-\lambda y} \cdot (-\lambda) \right| = \lambda e^{-\lambda y} \quad \text{porque } \lambda > 0 \quad (7.b.2)$$

Luego, de (7.b.1) y (7.b.2), podemos decir que

$$Y : \text{Exp}(\lambda) \quad f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

Debemos aclarar que se asignó 0 a la función de distribución de probabilidad cuando $y \leq 0$.

Este resultado nos muestra que, a partir de una variable con distribución uniforme en el intervalo (0,1), es posible obtener otra variable aleatoria con distribución exponencial con un parámetro λ dado usando la función $H(X) = -\frac{1}{\lambda} \ln X$, con $\lambda > 0$.

Ahora resolvemos el problema a partir de la función de distribución acumulada de Y.

Buscamos $F_Y(y)$ en base a la función de distribución acumulada de X:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln X \leq y\right) = P(-\ln X \leq \lambda y) = P(e^{-\ln X} \leq e^{\lambda y}) = P\left(\frac{1}{X} \leq e^{\lambda y}\right) = P(X \geq e^{-\lambda y}) = 1 - P(X \leq e^{-\lambda y})$$

En el intervalo analizado, y de acuerdo a la ecuación (7), podemos decir que

$$P(Y \leq y) = 1 - P(X \leq e^{-\lambda y}) = 1 - e^{-\lambda y}$$

Luego

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

Finalmente, podemos decir que

$$Y : \text{Exp}(\lambda) \quad f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

9. En una empresa embotelladora de jugos, la cantidad de líquido por botella es una variable aleatoria $X \sim N(500 \text{ ml}, 30 \text{ ml})$.

- Calcule la probabilidad de que una botella contenga menos de 430 ml.
- Las botellas se venden en pack de 12 de ellas. Calcule la probabilidad de que en un pack, por lo menos 3 de ellas contengan menos de 430 ml.
- El costo de producción de cada botella es \$0,20 y cada pack se vende al supermercadista a \$4,80. Si en el pack se detectan 3 o más unidades con menos de 430 ml, el pack se considera defectuoso y la empresa reembolsa al supermercadista el doble del dinero recibido por el pack. Calcule la ganancia promedio por cada pack.

Resolución:

Sabemos que X: "cantidad de líquido de una botella en ml" es una variable aleatoria continua y

$$X : N(500 \text{ ml}, (30 \text{ ml})^2) \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 30} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-500}{30}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{a) Definimos la variable estandarizada } Z = \frac{X - 500}{30}.$$

Luego

$$P(X < 430) = P\left(Z < -\frac{7}{3}\right) \approx 0,0099$$

b) Suponiendo que el contenido de líquido de cada botella es independiente del contenido de las demás, definimos la variable aleatoria Y como
Y: "número de botellas que contienen menos de 430 ml en un pack de 12 botellas"

Y es una variable aleatoria discreta que se distribuye como una binomial de esta manera:

$$Y : Bi(12, 0,0099)$$

$$P(Y = y) = \binom{12}{y} 0,0099^y (1-0,0099)^{12-y}, \quad y = \overline{0,12}$$

Entonces

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) - P(Y=2) = 0,0002$$

c) Definimos:

C: "costo de producción por pack de 12 botellas en \$"

V: "precio de venta en \$ del pack"

R: "reembolso en \$ si hay al menos 3 botellas con menos de 430 ml"

G: "ganancia por pack en \$"

Veamos los valores que asumen estas variables:

C = 0,20 * 12 = 2,4 es una constante

V = 4,8 es una constante

$$R = H(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 3 \\ 2 \cdot 4,8 = 9,6 & \text{si } y \geq 3 \end{cases} \text{ es una variable aleatoria discreta}$$

La ganancia G resulta

$$G = V - C - R = \begin{cases} 2,4 & \text{si } r = 9,6 \\ -7,2 & \text{si } r = 0 \end{cases} = J(y) = \begin{cases} 2,4 & \text{si } y < 3 \\ -7,2 & \text{si } y \geq 3 \end{cases}$$

G es una variable aleatoria discreta.

$$P(G = -7,2) = P(Y \geq 3) = 0,0002$$

$$P(G = 2,4) = P(Y < 3) = 1 - 0,0002 = 0,9998$$

Entonces, la distribución de probabilidad $p_G(g)$ resulta

$$p_G(g) = \begin{cases} 0,0002 & \text{si } g = -7,2 \\ 0,9998 & \text{si } g = 2,4 \end{cases}$$

Finalmente, la ganancia promedio por pack será la esperanza matemática de G

$$E(G) = -7,2 * P(G = -7,2) + 2,4 * P(G = 2,4) = -7,2 * 0,0002 + 2,4 * 0,9998 = 2,39808$$