Analisis Matematico II

11 de diciembre de 2018

Índice general

Parte I

Aplicaciones de la derivada

Capítulo 1

Estudio de funciones

1.1. Definiciones

1.1.1. Extremos de una funcion

1.1.1.1. Extremos absolutos

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion y $c, d \in D$ diremos que:

- $f(c)$ es *maximo absoluto* de f en D si $f(x) \leq f(c)\ \forall x \in D$
- $f(d)$ es *minimo absoluto* de f en D si $f(x) \geq f(d)\ \forall x \in D$

1.1.1.2. Extremos relativos

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion y $c, d \in D$ diremos que:

- f alcanza un *maximo relativo* en c si $\exists E(c) / f(x) \leq f(c)\ \forall x \in E(c)$
- f alcanza un *minimo relativo* en d si $\exists E(d) / f(x) \geq f(d)\ \forall x \in E(d)$

1.1.2. Concavidad y convexidad

1.1.2.1. Conjunto convexo

Un conjunto C se dice convexo si $\forall p, q \in C$, el segmento $\overline{pq} \subset C$.

1.1.2.2. Epigrafo

Llamamos epigrafo a la region que esta por encima de la grafica de una funcion. Es decir:

$$ef = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in Dom(f), y \geq f(x)\}$$

1.1.2.3. Concavidad y convexidad de funciones

- Una funcion f se dice *convexa* en $[a, b]$ si su epigrafo es convexo. Es decir:

  $$\forall x, y \in [a, b] \wedge \forall \alpha \in (0, 1) \Rightarrow f\left[\alpha y + (1 - \alpha)\, x\right] \leq \alpha f\left(y\right) + (1 - \alpha)\, f(x)$$

- Una funcion f se dice *concava* en $[a, b]$ si su epigrafo es no es convexo. Es decir:

  $$\forall x, y \in [a, b] \wedge \forall \alpha \in (0, 1) \Rightarrow f\left[\alpha y + (1 - \alpha)\, x\right] \geq \alpha f\left(y\right) + (1 - \alpha)\, f(x)$$

Propiedad Si f es convexa en $[a, b]$ entonces $-f$ es concava en $[a, b]$.

1.1.3. Punto de inflexion

Sea c un punto de contacto entre dos intervalos tales que f es convexa en uno de ellos y concava en el otro, diremos que f tiene en c un punto de inflexion.

1.1.4. Punto critico

Decimos que $c \in Dom(f)$ es un *punto critico* de f si $f'(c) = 0$ o f no es derivable en c.

1.2. Teoremas

1.2.1. Teorema de Weierstrass

Sea f continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces f alcanza su maximo y minimo absoluto en $[a, b]$. Es decir:

$$\exists \alpha, \beta \in [a, b] / m = f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) = M, \forall x \in [a, b]$$

1.2.2. Teorema de los valores intermedios

Sea f definida y continua en $[a, b]$, y sean M, m sus respectivos extremos absolutos; entonces f alcanza todos los valores entre m y M. Es decir: $Im(f) = [m, M]$.

1.2.3. Teorema de Fermat

Enunciado Sea f definida en un entorno de x_0 y supongamos f tiene en x_0 un extremo relativo, entonces $f'(x_0) = 0$ o bien $\exists f'(x_0)$.

Demostracion Supongamos lo contrario, es decir $f'(x_0) \neq 0$. Si $f'(x_0) > 0$ tenemos que $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ y por el teorema de conservacion del signo: $\exists \delta > 0/0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. Por lo tanto:

1. Si $x_0 - \delta < x < x_0$ entonces $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ y $x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$
2. Si $x_0 < x < x_0 + \delta$ entonces $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ y $x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

Es decir, f no tendra extremo relativo en x_0. ¡Absurdo! $\therefore f'(x_0) = 0$.

Observaciones

- El teorema de Fermat nos dice que si f tiene un extremo relativo en c, entonces c es un punto critico de f. Por lo tanto para hallar extremos relativos de una funcion, debemos localizar sus puntos criticos y determinar mediante algun criterio si hay extremos en ellos; pues no en todo punto critico hay extremos.
- El teorema de Weierstrass nos asegura la existencia de extremos absolutos para una funcion continua en $[a, b]$. Estos pueden alcanzarse en a, b o en puntos interiores al intervalo. Para hallarlos debemos localizar los puntos criticos de f en (a, b) y comparar sus imagenes con $f(a)$ y $f(b)$.

1.2.4. Teorema de Rolle

Enunciado Sea f definida y continua en $[a, b]$; y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$ entonces $\exists c \in (a, b)/f'(c) = 0$.

Demostracion Sean m, M los extremos absolutos garantizados por el teorema de Weierstrass, sera entonces $m \leq M$.

- Si fuese $m = M$ resultaria f constante y tendriamos $f'(x) = 0$.
- Si $m < M$ y como $f(a) = f(b)$, al menos uno de los extremos sera asumido en un punto $c \in (a,b)$. Por lo tanto f tendra un extremo relativo en c y siendo derivable en (a,b) resultara $f'(c) = 0$ por el teorema de Fermat.

1.2.5. Teorema de Lagrange

Enunciado Sea f definida en $[a,b]$, continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists c \in (a,b) / f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Demostracion Definimos $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ para $x \in [a,b]$, entonces F verifica:

- $F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = f(a)$.
- $F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$.

Luego:

1. $F(a) = F(b)$.
2. F es continua en $[a,b]$ por ser f continua en $[a,b]$ y por el algebra de funciones continuas.
3. F es derivable en (a,b) por ser f derivable en (a,b) y por el algebra de funciones derivables.

Por (1), (2) y (3) verifica las hipotesis del teorema de Rolle y en consecuencia $\exists c \in (a,b) / F'(c) = 0$.

Ahora $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, luego $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ entonces $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

1.2.6. Teorema de Cauchy

Enunciado Sean f, g funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) entonces:

$$\exists c \in (a,b) / f'(c)\left[g(b) - g(a)\right] = g'(c)\left[f(b) - f(a)\right]$$

Demostracion Definamos $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$. Es facil ver que h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y ademas puede comprobarse que $h(a) = h(b)$. Luego por el teorema de Rolle $\exists c \in (a, b)/h'(c) = 0$.

Ahora como $h'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)]$ tenemos que $h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$.

1.3. Estudio de la variacion de una funcion

1.3.1. Criterio para determinar monotonia

Enunciado Sea f una funcion continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b):

1. Si $f'(x) > 0\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) < 0\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $[a, b]$.
3. Si $f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ es constante en $[a, b]$.

Demostracion Sean $x_1, x_2 \in [a, b]/x_1 < x_2$. Por el teorema de Lagrange $\exists c \in (x_1, x_2)/f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

1. Como $f'(x) > 0\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ y como $x_2 - x_1 > 0$ resulta $f(x_2) > f(x_1)$, por lo tanto f es creciente en $[a, b]$.
2. Analogo para $f'(x) < 0\ \forall x \in (a, b)$ resulta $f(x_2) < f(x_1)$.
3. Sea $x \in (a, b)$ por el teorema de Lagrange $\exists c \in (a, x)/f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Como $f'(x) = 0$ resulta $f'(c) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a)\ \forall x \in [a, b]$. Por lo tanto f es constante en $[a, b]$.

1.3.2. Criterio de la primer derivada

Enunciado Sea f una funcion continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) salvo a lo sumo en $x_0 \in (a, b)$:

1. Si $f'(x) > 0\ \forall x \in (a, x_0)$ y $f'(x) < 0\ \forall x \in (x_0, b)$ entonces $f(x_0)$ es el maximo de f en (a, b).
2. Si $f'(x) < 0\ \forall x \in (a, x_0)$ y $f'(x) > 0\ \forall x \in (x_0, b)$ entonces $f(x_0)$ es el minimo de f en (a, b).

Demostracion

1. Por el criterio para determinar monotonia sabemos que f es estrictamente creciente en (a, x_0) y estrictamente decreciente en (x_0, b), luego $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \neq x_0$ y en consecuencia f tiene un maximo en x_0.

2. Analogo.

1.3.3. Criterio de la segunda derivada

Enunciado Sea f una funcion dos veces derivable en (a, b) tal que f'' es continua en $c \in (a, b)$ y $f'(c) = 0$ entonces:

1. Si $f''(c) > 0$ entonces $f(c)$ es un minimo relativo.

2. Si $f''(c) < 0$ entonces $f(c)$ es un maximo relativo.

Demostracion

1. Si $f''(c) > 0$, por ser f'' continua en c y por el teorema de conservacion del signo, existira un entorno $E_\delta(c)$ donde $f''(x) > 0$ $\forall x \in E_\delta(c)$. Por lo tanto f' es estrictamente creciente en $E_\delta(c)$ pero como $f'(c) = 0$ y f' es continua en $E_\delta(c)$ por ser derivable; resulta que f' cambio de signo en c y por el teorema anterior f tiene un minimo relativo en c.

2. Analogo.

1.3.4. Criterios para determinar concavidad

Enunciado

1. Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b):

   a) Si f' es creciente en (a, b) entonces f es convexa en $[a, b]$.

   b) Si f' es decreciente en (a, b) entonces f es concava en $[a, b]$.

2. Ademas si existe f'' en (a, b) :

   a) Si $f'' \geq 0$ en (a, b) entonces f es convexa en $[a, b]$.

   b) Si $f'' \leq 0$ en (a, b) entonces f es concava en $[a, b]$.

Demostracion

1.

a) Sean $x, y/a \leq x \leq y \leq b$ y $z = \alpha y + (1-\alpha)x$, con $\alpha \in (0,1)$. Veamos primero que las siguientes expresiones son equivalentes y luego que si f' es creciente, se obtiene la ultima desigualdad:

$$\begin{array}{ccc} f \text{ es convexa en } [a,b] & \Longleftrightarrow & f(z) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x) \Longleftrightarrow \\ f(z) + \alpha f(z) - \alpha f(z) & \leq & \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x) \Longleftrightarrow \\ f(z) = \alpha f(z) + (1-\alpha) f(z) & \leq & \alpha f(y) + (1-\alpha) f(x) \Longleftrightarrow \\ (1-\alpha)\left[f(z) - f(x)\right] & \leq & \alpha\left[f(y) - f(z)\right] \end{array}$$

f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces f es continua en $[x,z]$ y en $[z,y]$ y derivable en (x,z) y en (z,y). Por lo tanto, aplicando el teorema de Lagrange a f en cada uno de esos intervalos, podemos asegurar que existen $c \in (x,z)$ y $d \in (z,y)$ tales que $f'(c) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ y $f'(d) = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$.

Como f' es creciente y $c < 0$ resulta $f'(c) < f'(d)$ entonces $(1-\alpha)\left[f(z) - f(x)\right] = (1-\alpha)(z-x)f'(c) \leq (1-\alpha)(z-x)f'(d)$. Por hipotesis $z = \alpha y + (1-\alpha)x$ y en consecuencia $x = \frac{z-\alpha y}{1-\alpha}$. Ahora:

$$z - x = z - \left(\frac{z-\alpha y}{1-\alpha}\right) = \frac{z(1-\alpha) - z + \alpha y}{1-\alpha} = \frac{\alpha(y-z)}{1-\alpha}$$

y reemplazando la parte derecha la desigualdad anterior:

$$(1-\alpha)\left[f(z) - f(x)\right] \leq (1-\alpha)\frac{\alpha(y-z)}{(1-\alpha)}f'(d) = \alpha(y-z)\frac{f(y)-f(z)}{(y-z)} = \alpha\left[f(y) - f(z)\right]$$

b) Se puede repetir la demostracion anterior teniendo en cuenta que si f' es decreciente $\Rightarrow -f'$ es creciente $\Rightarrow -f$ es convexa $\Rightarrow f$ es concava.

2.

a) Si $f'' \geq 0$ en $(a,b) \Rightarrow f'$ es creciente en $(a,b) \Rightarrow f$ es convexa en $[a,b]$.

b) Analogo.

1.3.5. Criterio para determinacion de puntos de inflexion

Sea f derivable en I y $c \in I$ entonces f tiene un punto de inflexion en c si y solo si f' tiene un extremo relativo en c.

1.3.6. Corolario

Enunciado Sea f derivable en I y $c \in I$ un punto de inflexion de f, si existe $f''(c)$, necesariamente sera $f''(c) = 0$.

Demostracion Resulta de aplicar a f' la condicion necesaria para extremo de una funcion derivable.

Observacion $f''(c) = 0$ no es condicion suficiente para que f tenga un punto de inflexion en c.

1.3.7. Criterio de la derivada de mayor orden

Sea $f(x)$ una funcion derivable en (a, c) y sea $b \in (a, c)$.
Si $f'(b) = f''(b) = f'''(b) = \ldots = f^{(n-1)}(b) = 0$ y $f^{(n)}(b) \neq 0$ entonces:

1. Si n es par:
   a) $f^{(n)} < 0 \Rightarrow x = b$ es un maximo local.
   b) $f^{(n)} > 0 \Rightarrow x = b$ es un minimo local.
2. Si n es impar:
   a) $f^{(n)} < 0 \Rightarrow x = b$ es un punto de inflexion decreciente.
   b) $f^{(n)} > 0 \Rightarrow x = b$ es un punto de inflexion creciente.

Capítulo 2

Indeterminaciones

2.1. Formas indeterminadas

2.1.1. Definicion

Se llama forma indeterminada a una expresión algebraica que involucra límites del tipo: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} o bien $\infty - \infty$. Dicho límite puede converger a cualquier valor, puede converger a infinito o puede no existir, dependiendo de las funciones f y g.

2.1.2. Ejemplos

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x}^{\to 0}}{\underbrace{x^3}_{\to 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1$

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x^2}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1} = 0$

2.1.3. Transformacion de formas indeterminadas

Forma	Condiciones	Transformacion a 0/0	Transformacion a ∞/∞
$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$		$\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$	
$0\cdot\infty$	$\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{1/g(x)}$	$\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to c} \frac{g(x)}{1/f(x)}$
1^{∞}	$\lim\limits_{x\to c} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = exp\left(\lim\limits_{x\to c} \frac{ln\,[f(x)]}{1/g(x)}\right)$	$\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = exp\left(\lim\limits_{x\to c} \frac{g(x)}{1/ln\,[f(x)]}\right)$
0^0	$\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0^+,\ \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = exp\left(\lim\limits_{x\to c} \frac{g(x)}{1/ln\,[f(x)]}\right)$	$\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = exp\left(\lim\limits_{x\to c} \frac{ln\,[f(x)]}{1/g(x)}\right)$
∞^0	$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = exp\left(\lim\limits_{x\to c} \frac{g(x)}{1/ln\,[f(x)]}\right)$	$\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = exp\left(\lim\limits_{x\to c} \frac{ln\,[f(x)]}{1/g(x)}\right)$
$\infty-\infty$	$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to c} [f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to c} \frac{1/g(x)-1/f(x)}{1/[f(x)g(x)]}$	$\lim\limits_{x\to c} [f(x)-g(x)] = ln\left[\lim\limits_{x\to c} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}\right]$

2.2. Regla de L'Hôpital

2.2.1. Cuando $x \to a$

Enunciado Sean f, g funciones derivables en $\mathring{E}(a)$ tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ y si $g'(x) \neq 0\ \forall x \in \mathring{E}(a)$ entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Demostracion Consideremos las funciones $F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$ y $G(x) \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$.
Asi definidas F y G son continuas en $E(a)$, ya que f y g lo son en $\mathring{E}(a)$ y ademas, $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = F(a) = G(a) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} G(x)$.

Sea $x \in \mathring{E}(a)$ y supongamos $x > a$. F y G son conitnuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x). Ademas $G' \neq 0$ en (a, x) pues $G' = g'$. Luego por el teorema de Cauchy $\exists c \in (a, x) / F'(c)\,[G(x) - G(a)] = G'(c)\,[F(x) - F(a)]$ o sea:

$$\frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} \underbrace{=}_{F(a)=G(a)=0} \frac{F(x)}{G(x)}$$

Ahora si $x \to a^+$, entonces $c \to a^+$ $(a < c < x)$ de modo que:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F'(c)}{G'(c)} = \lim_{c\to a^+} \frac{F'(c)}{G'(c)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

Analogamente para $x < a$.

Nota La regla de L'Hôpital tambien se cumple cuando f, g son tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

2.2.2. Cuando $x \to \infty$

Enunciado Sean f, g funciones derivables en $(M, +\infty)$, siendo $M > 0$ fijo. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x)$ y si $g'(x) \neq 0\ \forall x > M$ entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Demostracion Sean $F(t) = f(1/t)$ y $G(t) = g(1/t)$, entonces si $x = 1/t$ sera $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \frac{F(t)}{G(t)}$ y ademas $t \to 0^+$ cuando $x \to +\infty$. Luego por la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\overbrace{F(t)}^{\to 0}}{\underbrace{G(t)}_{\to 0}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

y finalmente $\lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = L \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$

Nota La regla de L'Hôpital tambien se cumple cuando f, g son tales que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$.

Capítulo 3

Polinomios de aproximacion

3.1. Conceptos previos

3.1.1. Infinitesimos

Una funcion f se dice un *infinitesimo* en a (o cuando $x \to a$) si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, pudiendo ser tambien $a = \pm\infty$.

3.1.1.1. Equivalencia de infinitesimos

Se dice que dos infinitesimos en a, $f(x)$ y $g(x)$ son *equivalentes* si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

3.1.1.2. Compracion de infinitesimos

Sean f, g dos infinitesimos en a:

- Se dice que f y g tienen el *mismo orden* si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$.
- Se dice que el orden de f es *mayor* al de g si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- Se dice que el orden de f es *menor* al de g si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
- Cuando $\nexists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ se dice que los infinitesimos son *incomparables*.

3.1.1.3. Orden de un infinitesimo

Decimos que un infinitesimo f en a tiene orden α, si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^\alpha} = k \neq 0$.

3.1.2. Diferenciabilidad

3.1.2.1. Teorema

Enunciado Si f es derivable en x_0 entonces:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \theta(x)(x-x_0)$$

siendo $\lim\limits_{x\to x_0} \theta(x) = 0$.

Demostracion

Sabemos que $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \iff \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = 0$.

Sea entonces $\theta(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$. Es facil ver que:

- $\lim\limits_{x\to x_0} \theta(x) = 0$
- $\theta(x)+f'(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \theta(x)(x-x_0)+f'(x_0)(x-x_0) = f(x)-f(x_0)$

Luego $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \theta(x)(x-x_0)$.

Nota Si llamamos $\Delta x = x - x_0$ al incremento de x y $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ al incremento de y resulta: $\Delta f = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\text{termino lineal}} + \underbrace{\theta(x)\Delta x}_{\text{termino no lineal}}$ con $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \theta(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \theta(x) = 0$.

3.1.2.2. Diferencial de una funcion

Llamamos diferencial de f en x_0, y lo notamos df, a la parte lineal de Δf es decir: $df = f'(x_0)\Delta x$.

El polinomio $P(x) = f(x_0) + df$ es la aproximacion lineal de $f(x)$. Este es el unico poliniomio que satisface:

1. $P(x_0) = f(x_0)$
2. $P'(x_0) = f'(x_0)$
3. $gr\,[P(x)] = 1$

Demostracion Supongamos que existe otro polinomio $Q(x) = Ax + B$ que verifica las tres condiciones. Entonces $Q(x_0) = Ax_0 + B = f(x_0)$ y ademas $Q'(x_0) = A = f'(x_0)$, luego $B = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Finamlente $Q(x) = Ax + B = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = P(x)$.

Observacion Se considera que tomando valores pequeños de Δx, resulta $\Delta f \approx df$, es decir: $f(x) \approx f(x_0) + df$.

3.2. Polinomio de Taylor

3.2.1. Definicion

Si f es n veces derivable en un entorno de a, llamamos polinomio de Taylor de grado n de f alrededor de a al polinomio:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Se tiene que T_n es el unico polinomio de grado menor o igual que n tal que sus primeras n derivadas en a coinciden con f y sus n primeras derivadas en a y ademas $f(x) = T_n(x) + E(x)$ con $\lim\limits_{x\to a} E(x) = 0$.

Puede probarse ademas que $E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ con ξ entre a y x.

3.2.2. Propiedades

Sean f, g funciones, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $a \in Dom(f), Dom(g)$:

- $T_n(\alpha f + \beta g) = \alpha T_n(f) + \beta T_n(g)$
- $T_{2n}(fg) = T_n(f)T_n(g)$
- $T_{n-m}(f/g) = \frac{T_n(f)}{T_m(g)}$
- $T_{nm}(f \circ g) = T_n(f) \circ T_m(g)$
- $T_{n-1}(f') = [T_n(f)]'$
- $T_{n+1}(\int f) = \int T(f)$

Parte II

Calculo integral

Capítulo 4

Introduccion

4.1. Definiciones

4.1.1. Area

El area es una funcion $\mathcal{A}$ que asigna a las regiones del plano medibles, un numero real. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de regiones medibles y sean $R, R_1, R_2 \in \mathcal{M}$ entonces definimos: $\mathcal{A} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\mathcal{A}(R) \geq 0 \ \forall R \in \mathcal{M}$.
- Si R es un rectangulo de base b y altura h entonces $\mathcal{A}(R) = bh$.
- Si $R_1 \subseteq R_2$ entonces $\mathcal{A}(R_1) \leq \mathcal{A}(R_2)$.
- $\mathcal{A}(R_1 \cup R_2) = \mathcal{A}(R_1) + \mathcal{A}(R_2) - \mathcal{A}(R_1 \cap R_2)$.
- Si R_1 es congruente con R_2 entonces $\mathcal{A}(R_1) = \mathcal{A}(R_2)$.

4.1.2. Particion

Sean $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto de puntos de $[a, b]$ tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Decimos que P es una particion de $[a, b]$.

Llamamos $\mathcal{P}[a, b]$ al conjunto de todas las particiones posibles de $[a, b]$. Una particion $P \in \mathcal{P}[a, b]$ divide al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, \ldots n$ cuyas logitudes (no necesariamente iguales entre si) son $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

4.1.3. Particion regular

Si para una particion $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se tiene que $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ $\forall i$, decimos que es *regular*. En ese caso $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$.

4.1.4. Norma

Llamamos norma de la particion P al numero $\|P\| = max\{|\Delta x_i| : i = 1, \dots, n\}$

Observaciones

- Si P es regular entonces $\|P\| = \frac{b-a}{n}$ y por lo tanto $\|P\| \to 0 \iff n \to \infty$.
- Si P no es regular lo anterior no es cierto.

4.1.5. Funcion seccionalmente continua

Se dice que f es seccionalmente continua en $[a,b]$, si tiene un numero finito de discontinuidades en $[a,b]$ del tipo evitable o del tipo salto finito. Es decir, existe una particion $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que f es continua en cada subintervalo de P y existen los limites laterales para cada uno de los extremos.

4.2. Sumas de Riemann

4.2.1. Definicion

Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$, si para cada i elegimos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$; llamamos suma de Riemann de f en $[a,b]$ asociada a P a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

Observacion Una suma de Riemann depende de f, de P y de la eleccion de los c_i.

4.2.2. Suma superior, inferior, derecha e izquierda

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Como f es continua en cada $[x_{i-1}, x]$, por el teorema de Weierstrass existen $m, M \in [x_{i-1}, x_i]$ donde f asume el minimo y el maximo respectivamente en dicho subintervalo.

Llamamos:

- Suma superior de f a $U_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i$
- Suma inferior de f a $L_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i$
- Suma derecha de f a $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$
- Suma izquierda de f a $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$

4.2.3. Teorema

Enunciado Si f es continua en $[a, b]$ entonces existen $\lim_{n\to\infty} U_n$ y $\lim_{n\to\infty} L_n$ y ademas $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} L_n$.

Observacion Sea $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene $f(m_i) \leq f(c_i) \leq f(M_i)$, luego $L_n(f) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i < U_n(f)$ y por el teorema de intercalacion $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} L_n$.

4.2.4. Area

Sea f continua y no negativa en $[a, b]$ y sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ defimimos: $\mathcal{A}(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$. En particular tomando una particion regular y suma derecha: $\mathcal{A}(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n})$.

Capítulo 5

Integral definida

5.1. Integral de Riemann

5.1.1. Definicion

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, decimos que f es integrable en $[a, b]$ si existe

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \forall P \forall c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

y en este caso, llamamos integral definida de f desde a hasta b y lo notamos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Extendemos la definicion para $a > b$ y $a = b$:

- Si $a > b$, entonces $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- Si $a = b$, entonces $\int_b^a f(x)dx = 0$.

Nota No toda integral definida representa un area. Si la funcion no es positiva entonces la integral representa el area de la region por debajo de la grafica y por arriba del eje x menos la region del area por debajo del eje x y por arriba de la grafica.

5.1.2. Condiciones de integracion

5.1.2.1. Condiciones suficientes

Si f es continua o monotona en $[a, b]$ entonces es integrable. Ademas si f es seccionalmente continua en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$ y resulta:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt$$

5.1.2.2. Condicion necesaria

Si f es integrable en $[a, b]$ entonces f es acotada en $[a, b]$. Es decir, $\exists M > 0 / \|f(x)\| \leq M \ \forall x \in [a, b]$.

5.1.3. Propiedades

Sean f, g integrables en $[a, b]$ entonces:

1. $\displaystyle\int_a^b c dx = c(b - a) \ \forall c \in \mathbb{R}$.

2. $\displaystyle\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \ \forall c \in \mathbb{R}$.

4. $\displaystyle\int_a^b (f - g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ cualquiera sea c y siempre que existan las integrales.

Demostracion

1. Como $f = c$ es continua entonces es integrable en $[a, b]$. Sea P una particion regular entonces

$$\int\limits_a^b c dx = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} c\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} c(b-a) = c(b-a)$$

4. Se deduce de (2) y (3).

5.

   a) Primer caso: $a < c < b$. Sabemos que $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.
   Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una particion de $[a, b]$ tal que $x_k = c$. Definimos $P_1 = \{x_0, \ldots, x_k\}$ y $P_2 = \{x_k, \ldots, x_n\}$ donde $P_1 \cup P_2 = P$. Es claro que si $\|P\| \to 0$ tambien lo hacen $\|P_1\|$ y $\|P_2\|$. Renombremos los puntos de $P_2 = \{t_0, \ldots, t_m\}$ donde $t_0 = x_k$, $m = n - k$ y $t_m = x_{k+m} = x_n = b$. Entonces:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{\|P\|\to 0}\left(\sum_{i=1}^{k} f(c_i)\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\right)$$

   y por propiedades del limite resulta:

$$= \underbrace{\lim_{\|P_1\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(c_i)\Delta x_i}_{L_1} + \underbrace{\lim_{\|P_2\|\to 0}\sum_{i=1}^{m} f(c_i')\Delta t_i}_{L_2}$$

   con $c_i' \in [t_{i-1}, t_i]$. Si existe alguno de los limites L_1 o L_2 entonces existe el otro y vale $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

b) Segundo caso: $c < a < b$. Por el primer caso:

$$\int_c^b f = \int_c^a f + \int_a^b f \Rightarrow \int_a^b f = -\int_c^a f + \int_c^b f \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

c) Tercer caso: $a < b < c$: se demuestra de manera analoga al segundo caso.

5.1.4. Propiedades de orden

Sean f, g integrables en $[a, b]$ entonces:

1. Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

2. Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

3. Si $m \leq f(x) \leq M$ en $[a, b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

4. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.

Demostracion

1. Como $f(x) \geq 0$ entonces $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(c_i)}_{\geq 0} \underbrace{\Delta x_i}_{\geq 0} \geq 0$.

2. Sea $h(x) = f(x) - g(x)$. Como f, g son integrables, h es integrable y $h(x) \geq 0$ luego por el punto anterior:

$$0 \leq \int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \iff \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

3. Se deduce de (2) y aplicando propiedades de la integral constante.

4. Sabemos que $-|f| \leq f \leq |f|$, luego por el punto 2, sera

$$-\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b -|f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

por lo tanto $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$

5.1.5. Funcion integral

Si f es integrable en $[a, x]$ para cada $x \in [a, b]$ definimos la funcion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \int_a^x f(t)dt$. En general, si f es integrable en $[a, x]$ para cada $x \in [a, b]$ y $c \in [a, b]$ se puede definir $F_c(x) = \int_c^x f(t)dt.$

Observacion Si $c, d \in [a, b]$, entoncesF_c y F_d difieren en una constante. En efecto $F_c(x) - F_d(x) = \int_c^x f(t)dt - \int_d^x f(t)dt = \int_c^x f(t)dt + \int_x^d f(t)dt = \int_c^d f(t)dt.$

5.2. Teoremas

5.2.1. Teorema de valor promedio

Definicion Sea f continua en $[a, b]$, se define el valor promedio de f en $[a, b]$ al numero $VP(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$

Enunciado Sea f continua en $[a,b]$ entonces:

$$\exists c \in [a,b]/f(c) = VP(f) \iff f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

Demostracion Sean m, M los valores minimo y maximo alcanzados por f y garantizados por el teorema de Weierstrass. $m \leq f(x) \leq M$ luego por propiedad de orden:

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx \iff m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

5.2.2. Teorema de valor medio ponderado

Sean f, g continuas en $[a,b]$. Si g no cambia de signo en $[a,b]$ entonces:

$$\exists \xi \in [a,b]/\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

5.2.3. Primer teorema fundamental del calculo

Enunciado Sea f integrable en $[a,x]$ $\forall x \in [a,b]$ y sea $c \in [a,b]$, entonces F_c es continua en $[a,b]$ y ademas si f es continua resulta F_c derivable en x y $F_c'(x) = f(x)$.

Demostracion

1. Probaremos F_c continua en $[a,b]$ mostrando que $\lim\limits_{x \to x_0} F_c(x) = \lim\limits_{h \to 0} F_c(x_0+h) = F_c(x_0)$.

   a) Si $h > 0$ entonces

$$F_c(x_0+h) - F_c(x_0) = \int_c^{x_0+h} f(t)dt - \int_c^{x_0} f(t)dt = \int_c^{x_0+h} f(t)dt + \int_{x_0}^{c} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

como f es integrable en $[a,b]$ sabemos que f es acotada en $[a,b]$ y que existen m, M tales que $m \leq f(x) \leq M$, luego $mh \leq \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq Mh$ y en consecuencia $mh \leq F_c(x_0+h) - F_c(x_0) \leq Mh$. Ahora $\lim\limits_{h\to 0^+} mh = \lim\limits_{h\to 0^+} Mh = 0$ por el teorema de intercalacion $\lim\limits_{h\to 0^+} [F_c(x_0+h) - F_c(x_0)] = 0$ es decir: $\lim\limits_{h\to 0^+} F_c(x_0+h) = F_c(x_0)$.

b) Si $h < 0$ entonces entonces

$$F_c(x_0) - F_c(x_0+h) = \int\limits_c^{x_0} f(t)dt - \int\limits_c^{x_0+h} f(t)dt = \int\limits_c^{x_0} f(t)dt + \int\limits_{x_0+h}^{c} f(t)dt = \int\limits_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt$$

y exactamente igual que en el punto anterior:

$$mh \leq \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq Mh \iff m(-h) \leq \int\limits_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt \leq M(-h)$$

luego $\lim\limits_{h\to 0^-} F_c(x_0+h) = F_c(x_0)$.

2. Sea f continua en (a,b) veremos que $\exists F_c'(x)\ \forall x \in (a,b)$ y que $F_c'(x) = f(x)$.

a) Sea $h > 0$ tal que $x+h \in (a,b)$ entonces por el teorema del valor promedio $\frac{F_c(x+h)-F_c(x)}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(t)dt = f(\alpha)$ para algun $\alpha \in (x, x+h)$.

Ahora derivamos:

$$F_c'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F_c(h+x) - F_c(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} f(\alpha) = \lim_{\alpha\to x^+} f(\alpha) = f(x)$$

b) Analogamente si $h < 0$.

5.2.4. Segundo teorema fundamental del calculo

Enunciado Sea f continua en $[a,b]$ y de P una primitiva de f en (a,b) entonces para todo $c \in (a,b)$ vale $P(x) = P(c) + \int\limits_c^x f(t)dt \ \forall x \in (a,b)$ o bien:

$$\int\limits_c^x f(t)dt = P(x) - P(c)$$

Demostracion Sea $F_c(x) = \int\limits_c^x f(t)dt$, como f es continua en (a,b), por el primer teorema fundamental del calculo resulta $F_c'(x) = f(x)$. Ahora como por hipotesis P es una primitiva de f tenemos $F_c(x) - P(x) = k \ \forall x \in (a,b)$. En particular para $x = c$ se tiene que $F_c(c) - P(c) = k$ y como $F_c(c) = 0$ entonces $k = -P(c)$, por lo tanto $F_c(x) = P(x) - P(c)$.

Capítulo 6

Logaritmo y exponenciacion

6.1. Funcion logaritmo

6.1.1. Definicion

Se llama funcion logaritmo natural de x y se nota $ln(x)$ a la funcion:

$$\begin{aligned} ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \rightarrow & ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \end{aligned}$$

Observacion Como $f(x) = 1/x$ es continua en $\mathbb{R}^+$, por el primer teorema fundamental resulta $ln'(x) = 1/x \ \forall x \in \mathbb{R}^+$.

6.1.2. Propiedades

Enunciado Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ $r \in \mathbb{Q}$ entonces:

1. $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$
2. $ln(1/y) = -ln(y)$
3. $ln(x/y) = ln(x) - ln(y)$
4. $ln(x^r) = rln(x)$

Demostracion

1. Sea para y fijo $h(x) = ln(xy)$, entonces por regla de la cadena $h'(x) = \frac{1}{xy}y = \frac{1}{x}$. Luego $h(x)$ y $ln(x)$ son primitivas de $1/x$ y en consecuencia difieren en una constante. Es decir: $h(x) = ln(x) + c \Rightarrow ln(xy) = ln(x) + c$. Si tomamos $x = 1$, $h(1) = \underbrace{ln(1y) = ln(1) + c = c}_{c=ln(y)}$ por lo tanto $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$.

2. Sea $x = 1/y$ y aplicando el punto anterior sera $ln(1) = ln(\frac{1}{y}y) = ln(\frac{1}{y}) + ln(y) = 0$ y por lo tanto $ln(\frac{1}{y}) = -ln(y)$.

3. Se deduce de (1) y (2).

4. Sean $g(x) = ln(x^r)$ y $h(x) = rln(x)$ para $r \in \mathbb{Q}$. Como $g'(x) = \frac{1}{x^r}r^{x-1} = \frac{r}{x}$ y $h'(x) = r\frac{1}{x} = \frac{r}{x}$ las funciones g, h difieren en una constante luego $g(x) = h(x) + c \iff ln(x^r) = rln(x) + c$. Si $x = 1$ entonces $ln(1^r) = ln(1) = \underbrace{0 = rln(1) + c = 0 + c = c}_{c=0}$ de donde $ln(x^r) = rln(x)$.

Observacion Puesto que $Im(ln) = \mathbb{R}$ y ln es inyectiva entonces existe un unico $x > 0/ln(x) = 1$. Este numero se denota con e es decir: $ln(e) = \int_1^e \frac{1}{t}dt = 1$.

6.2. Funcion exponencial

6.2.1. Definicion

La funcion $ln(x)$ es inyectiva y por lo tanto invertible. Llamamos funcion exponencial a la funcion inversa del logaritmo natural, es decir:

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\to E(x) = y \iff x = ln(y) \end{aligned}$$

6.2.2. Propiedades

Enunciado

1. $E(0) = 1$, $E(1) = e$

2. $E'(x) = E(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

3. $E(x + y) = E(x)E(y)\ \forall x \in \mathbb{R}$

4. $E(-y) = \frac{1}{E(y)}$

5. $E(x - y) = \frac{E(x)}{E(y)}$

6. $E(r) = e^r\ \forall r \in \mathbb{Q}$

Demostracion

1. COMPLETAR.

2. $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow E'(x) = \frac{1}{1/y} = \frac{1}{1/E(x)} = E(x)$.

3. Sea $a = E(x)$, $b = E(y)$ y $c = E(x + y)$ es decir $ln(a) = x$, $ln(b) = y$ y $ln(c) = x + y$ por lo tanto $ln(ab) = ln(a) + ln(b) = x + y = ln(c)$ y como $ln(x)$ es inyectiva resulta $ab = c$ entonces $E(x)E(y) = E(x + y)$.

4. COMPLETAR.

5. COMPLETAR.

6. $ln(e^r) = rln(e) = r$ y por definicion de $E(x)$ resulta $E(r) = e^r$.

6.3. Base a

6.3.1. Exponencial en base a

Si $a > 0$ y $a \neq 1$ definimos la funcion exponencial de base a como $a^x = e^{xln(a)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

6.3.2. Logaritmo en base a

Llamamos funcion logaritmo de base a, con $a > 0, a \neq 1$ a la funcion inversa de la funcion exponencial de base a. Es decir:

$$\begin{aligned} log_a : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\to log_a(x) = y \iff a^y = x \end{aligned}$$

6.3.3. Propiedades

1. $log_a x = \frac{ln(x)}{ln(a)}$
2. $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$
3. $log_a(x/y) = log_a(x) - log_a(y)$
4. $a^{x+y} = a^x a^y$
5. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

Capítulo 7

Tecnicas de integracion

7.1. Tecnicas basicas

7.1.1. Integrales inmediatas

$\int f(x)dx$	$f(x)$	$f'(x)$
$kx+c$	k	0
$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	x^n	nx^{n-1}
$a\int f(x)dx+b\int g(x)dx$	$af(x)+bg(x)$	$af'(x)+bg'(x)$
$ln\left(\lvert x\rvert\right)+c$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{x\lvert x\rvert}{2}+c$	$\lvert x\rvert$	$\frac{x}{\lvert x\rvert}$
$\lvert x\rvert+c$	$sgn(x)$	0
$\frac{a^x}{ln(a)}+c$	a^x	$a^x ln(a)$
$\frac{xln(x)-x}{ln(a)}+c$	$log_a(x)$	$\frac{1}{xln(a)}$
$\frac{b^{ax}}{aln(b)}+c$	b^{ax}	$b^{ax}ln(b)a$
$-cos(x)+c$	$sen(x)$	$cos(x)$
$sen(x)+c$	$cos(x)$	$-sen(x)$
$-ln\left[\lvert cos\left(x\right)\rvert\right]+c$	$tan(x)$	$sec^2(x)$
$xsen^{-1}(x)+\sqrt{1-x^2}+c$	$sen^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$xcos^{-1}(x)-\sqrt{1-x^2}+c$	$cos^{-1}(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$xtan^{-1}(x)-\frac{ln\left(x^2+1\right)}{2}+c$	$tan^{-1}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\int f(x)dx$	$f(x)$	$f'(x)$

7.1.2. Integracion por substitucion

Sea f continua en I y sea g derivable, con derivada continua en I tal que $Im(g) \subset I$ entonces $\displaystyle\int f\left[g(x)\right] g'(x)dx = \int f(t)dt$.

7.1.3. Integracion por partes

Sean f, g derivables con derivada continua en I entonces:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

7.2. Integracion de funciones racionales

7.2.1. Cociente de polinomios

7.2.1.1. Raices reales simples

COMPLETAR.

7.2.1.2. Raices reales multiples

COMPLETAR.

7.2.1.3. Raices complejas simples

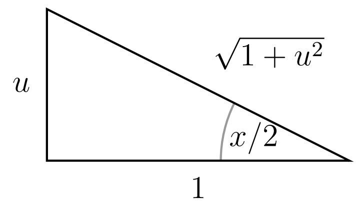
COMPLETAR.

7.2.1.4. Raices complejas multiples

COMPLETAR.

7.2.2. Cociente de funciones trigonometricas

Las integrales de cocientes de funciones trigonometricas se resuelven mediante la sustitucion $u = tan(x/2)$.



Aplicando el coseno del angulo doble obtenemos:

$$cos(x) = cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 - \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Aplicando el seno del angulo doble:

$$sen(x) = sen\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = 2sen\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

Ademas $u = tan(x/2) \iff x = 2tan^{-1}(u)$ luego: $dx = \frac{2}{1+u^2}du$.

7.2.3. Cociente de funciones exponenciales

Las integrales de cocientes de funciones exponenciales se resuelven mediente la sustitucion $u = e^x$.

Parte III

Calculo diferencial en campos escalares

Capítulo 8

Limites y continuidad

8.1. Definiciones

8.1.1. Campo escalar

Llamamos campo escalar a una funcion cuyo dominio esta contenido en $\mathbb{R}^n$ y cuyo codominio es $\mathbb{R}$. Es decir:

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

8.1.2. Conjunto imagen

Llamamos conjunto imagen de f a: $\{y \in \mathbb{R} : y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ p.a. } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$

8.1.3. Grafica de un campo escalar

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, llamaremos grafica de f al conjunto:

$$G_f = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) : \vec{x} \in Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

Observacion $G_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

8.1.4. Conjunto de nivel

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$ llamamos conjunto de nivel k de f y lo notamos C_k al conjunto: $C_k = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = k\}$

8.1.5. Norma

La norma es una funcion de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}_0^+$ que indicaremos $\|\cdot\|$ definida por:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\vec{x} \times \vec{x}}$$

8.1.6. Distancia

La distancia es una funcion de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}_0^+$ que indicaremos $dist$ definida por $dist(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Propiedades

- $dist(\vec{x}, \vec{y}) = dist(\vec{y}, \vec{x})$.
- $dist(\vec{x}, \vec{y}) \leq dist(\vec{x}, \vec{z}) + dist(\vec{z}, \vec{y})$.
- $dist(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$.
- $dist(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$

8.1.7. Bola

Definimos bola de centro $\vec{a}$ y radio r como:

$$B(\vec{a}, r) = B_r(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : dist(\vec{x}, \vec{a}) < r\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$$

Observacion En $\mathbb{R}$ resulta $B_r(a) = (a - r, a + r)$.

8.1.8. Entorno

Llamaremos entorno de un punto $\vec{a}$ a todo conjunto que contenga $B_r(\vec{a})$. Es decir E es un entorno de $\vec{a}$ si y solo si: $\exists r > 0 / B_r(\vec{a}) \subseteq E$.

8.1.9. Punto interior

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\vec{x} \in A$ decimos que $\vec{x}$ es un punto interior de A si y solo si: $\exists r > 0 / \vec{x} \in B_r(\vec{x}) \subseteq A$. Definimos ademas $\mathring{A}$ como el conjunto de todos los puntos interiores de A.

8.1.10. Conjunto abierto

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto si todos sus puntos son interiores, es decir si $A = \mathring{A}$.

8.1.11. Conjunto cerrado

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ decimos que A es cerrado si $\mathcal{C}A$ (complemento de A) es abierto.

8.1.12. Punto de clausura

Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, el punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de clausura de A si y solo si todo entorno de $\vec{x}$ tiene interseccion no vacia con A. Llamaremos clausura de A y lo notaremos $\overline{A}$ al conjunto de todos los puntos de clausura de A.

Propiedad A es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

8.1.13. Punto frontera

Un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es punto frontera de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si cualquier entorno de $\vec{x}$ tiene interseccion no vacia con A y $\mathcal{C}A$. Definimos frontera de A y lo notamos ∂A al conjunto de todos los puntos de frontera de A.

8.1.14. Punto exterior

Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, el punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es llamado punto exterior de A si existe $B_r(\vec{x}) \subseteq \mathcal{C}A$. Llamamos exterior de A y lo notaremos $ext(A)$ al conjunto de todos los puntos exteriores de A.

8.1.15. Conjunto compacto

Un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ es llamado conjunto compacto.

8.1.16. Campo escalar acotado

Decimos que f es acotada en un entorno E de (a, b) si existe $M > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq M \ \forall (x, y) \in E(a, b)$.

8.1.17. Funcion vectorial

Llamamos funcion vectorial a $\vec{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ dada por $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$. A cada funcion α_k la llamamos funcion componente de $\vec{\alpha}$.

Si todas las funciones componentes son continuas, llamamos *curva* al conjunto $\Gamma = \{\vec{\alpha}(t) : t \in [a, b]\}$ y decimos que $\vec{\alpha}(t)$ es una parametrizacion continua de la curva Γ. Notemos que un punto $P \in \Gamma \iff \exists t_0 \in [a, b] / \vec{\alpha}(t_0) = P$.

Si las funciones componentes tienen derivadas continuas o seccionalmente continuas, la curva Γ se dice regular o regular a trozos.

8.2. Limites

8.2.1. Definicion

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\vec{a} \in \overline{D}$ (o sea que todo entorno de $\vec{a}$ tiene interseccion no vacia con D) entonces diremos que $L \in \mathbb{R}$ es el limite de f cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{a}$ y lo notamos $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = L$ si y solo si:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 / \vec{x} \in D \wedge 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - L| < \epsilon$$

Observacion

- Para $n = 2$: Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(a, b) \in \overline{D}$ entonces $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = L$ si y solo si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 / (x, y) \in D \wedge 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon$.

8.2.2. Condiciones necesarias

- Sean C_1 y C_2 dos curvas que contienen al punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $L_1 = \lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$ cuando (x, y) se acerca de (a, b) por la curva C_1 y $L_2 = \lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$ cuando (x, y) se acerca de (a, b) por la curva C_2 entonces $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$.
- Si existe $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = L$ entonces f es acotada en algun entorno de (a, b).

8.2.3. Limites radiales

Si consideramos las infinitas rectas que pasan por el origen ($y = mx$ y $x = 0$) podemos calcular el limite de un campo escalar en el origen en todas esas direcciones si evaluamos: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, mx)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(0, y)$.

Observacion Los limites radiales no son todas las direcciones posibles, luego son suficientes para el calculo de un limite.

8.2.4. Coordenadas polares

8.2.5. Teoremas

8.2.5.1. Unicidad del limite

Si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ este es unico.

8.2.5.2. Formulaciones equivalentes

Las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \iff \lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x, y) - L] = 0 \iff \lim_{\|(x,y)-(a,b)\|\to 0} |f(x, y) - L| = 0$$

8.2.5.3. Algebra de limites

Sean f, g campos escalares de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ con igual dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $b = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ y $c = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y)$ entonces:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) + g(x, y) = b + c$.
2. $\forall\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \alpha f(x, y) = \alpha b$.
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)g(x, y) = bc$.
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} |f(x, y)| = |b|$.
5. Si $c \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = b/c$.

8.2.5.4. Caracter local del limite

Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / \exists r > 0$ tal que $f(x,y) = g(x,y) \forall (x,y) \in B_r\left[(a,b)\right] - \{(a,b)\}$, entonces si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$.

8.2.5.5. Teorema de intercalacion

Sean $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / \exists r > 0$ donde $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ para todo $(x,y) \in B_r\left[(a,b)\right] - \{(a,b)\}$ entonces si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$ resulta $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

8.3. Continuidad

8.3.1. Definicion

Decimos que el campo escalar $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continuo en $(a,b) \in D$ si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

8.3.2. Continuidad de la composicion

Enunciado Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (con $f(D) \subseteq B$). Si f es continua en (a,b) y g es continua en $f(a,b)$ entonces $h(x,y) = g \circ f(x,y) = g\left[f(x,y)\right]$ es continua en (a,b).

Demostracion Sea $\epsilon > 0$, como g es continua en $f(a,b)$ existe $r > 0$ tal que $|f(x,y) - f(a,b)| < r \Rightarrow |g\left[f(x,y)\right] - g\left[f(a,b)\right]| < \epsilon$; pero como f es conitnua en (a,b) para este r existe $\delta = \delta(r) > 0$ tal que si

$$\|(x,y) - (a,b)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < r \Rightarrow |g\left[f(x,y)\right] - g\left[f(a,b)\right]| < \epsilon$$

y por lo tanto $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g\left[f(x,y)\right] = g\left[f(a,b)\right]$.

Capítulo 9

Derivadas y diferenciabilidad

9.1. Derivadas

9.1.1. Derivada direccional

Sea, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathring{D}$ (entonces $\exists r > 0 / B_r(\vec{x}) \subseteq D$), $\vec{u}$ un versor y $h \neq 0 / \vec{x} + h\vec{u} \in B_r(\vec{x})$; entonces si existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\vec{x}+h\vec{u}) - f(\vec{x})}{h} = D_{\vec{u}} f(\vec{x})$ se lo llama derivada direccional de f en la direccion de $\vec{u}$.

Por ejemplo podemos tomar h tal que $|h| < r$ pues:

$$dist(\vec{x}+h\vec{u}, x) = \|\vec{x}+h\vec{u}-\vec{x}\| = \|h\vec{u}\| = |h|\,\|\vec{u}\| = |h| < r$$

Observacion En $\mathbb{R}^2$ si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es un versor y $\vec{x} = (a, b)$ entonces:

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b)}{h}$$

9.1.2. Derivada parcial

Sea $\vec{u} = \vec{e}_i = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{iesima}, 0, \ldots, 0)$ el iesimo vector de la base canonica de $\mathbb{R}^n$ si existe $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{e}_i) - f(\vec{x})}{h} = D_{\vec{e}_i} f(\vec{x})$ se lo llama derivada parcial iesima de f en $\vec{x}$.

Notaciones $D_{\vec{e}_i} f(\vec{x}) = D_i f(\vec{x}) = f_{x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$.

9.1.3. Derivadas de orden superior

Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y existen f_x y f_y en todo punto de $\mathring{D}$ podemos considerar las derivadas parciales dobles de f que notaremos:

- $D_1(D_1 f) = D_{11} f = f_{xx}$.
- $D_2(D_1 f) = D_{21} f = (f_x)_y = f_{xy}$.
- $D_1(D_2 f) = D_{12} f = (f_y)_x = f_{yx}$.
- $D_2(D_2 f) = D_{22} f = f_{yy}$.

En general si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ notamos:

$$D_{ij} f = D_i(D_j f) = (f_{x_j})_{x_i} = f_{x_j x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

9.1.4. Teorema de Clairaut

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\vec{a} \in \mathring{D}$, si $D_{ij} f$ y $D_{ji} f$ son continuas en $\vec{a}$ entonces: $D_{ij} f(\vec{a}) = D_{ji} f(\vec{a})$.

9.1.5. Matriz Hessiana

Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un campo escalar con derivadas de segundo orden continuas y $\vec{a} \in \mathring{A}$ llamamos matriz Hessiana de f en $\vec{a}$ a la matriz dada por las derivadas parciales segundas de f en $\vec{a}$, es decir:

$$H_f(\vec{a}) = H(\vec{a}) = \begin{pmatrix} D_{11} f(\vec{a}) & D_{12} f(\vec{a}) & \cdots & D_{1n} f(\vec{a}) \\ D_{21} f(\vec{a}) & \cdots & \cdots & D_{2n} f(\vec{a}) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} f(\vec{a}) & \cdots & \cdots & D_{nn} f(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Llamamos Hessiano al determinate de dicha matriz.

9.1.6. Condicion suficiente de continuidad

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D abierto tal que $D_j f$ para $j = 1, \ldots, n$ son acotadas en D entonces f es continua en D. Si D no es abierto y para $j = 1, \ldots, n$ son acotadas en $\mathring{D}$ entonces f es continua en $\mathring{D}$.

Observacion

- La existencia de las derivadas direccionales en cualquier direccion no garantiza la continuidad del campo escalar. Por ejemplo $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+x^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$.

9.2. Diferenciabilidad

9.2.1. Definicion

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{a} \in \mathring{D}$ y $\vec{v}/\vec{a}+\vec{v} \in B_r(\vec{a})$ decimos que f es diferenciable en $\vec{a}$ si existe $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que: $f(\vec{a} + \vec{v}) - f(\vec{a}) = \vec{\alpha} \times \vec{v} + \|\vec{v}\|\, E(\vec{a}, \vec{v})$ donde $\lim\limits_{\|\vec{v}\| \to 0} E(\vec{a}, \vec{v}) = 0\ \forall \vec{v}/\vec{a} + \vec{v} \in B_r(\vec{a})$, es decir $\|v\| < r$.

Observaciones

- El termino $\vec{\alpha} \times \vec{v}$ es lineal en $\vec{v}$ y representa una transformacion lineal llamada diferencial de f en $\vec{a}$.
- Para $\vec{v}$ «chico» la diferencia $f(\vec{a} + \vec{v}) - f(\vec{a}) \approx \vec{\alpha} \times \vec{v}$ $(\Delta f \approx df)$.

9.2.2. Propiedades

Enunciado Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferenciable en $a \in \mathring{D}$ entonces:

1. f es continua en a.
2. f tiene derivadas direccionales en cualquier direccion $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\vec{v}\| = 1$ y vale: $D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \vec{\alpha} \times \vec{v}$.

Demostracion

1. Veamos que $\lim_{\vec{v}\to 0}[f(\vec{a}+\vec{v})-f(\vec{a})]=0$ resultando f continua en $\vec{a}$. Como f es diferenciable en $\vec{a}$ sera:

   $$\lim_{\vec{v}\to 0}[f(\vec{a}+\vec{v})-f(\vec{a})]=\lim_{\vec{v}\to 0}[\vec{\alpha}\times\vec{v}+\|\vec{v}\|\,E(\vec{a},\vec{v})]=\lim_{\vec{v}\to 0}\vec{\alpha}\times\vec{v}+\lim_{\vec{v}\to 0}\|\vec{v}\|\,E(\vec{a},\vec{v})=\vec{\alpha}\times\lim_{\vec{v}\to 0}\vec{v}=0$$

2.

9.2.3. Condicion suficiente de diferenciabilidad

Si $D_i f$ son continuas $\forall i=1,\ldots,n$ entonces f es diferenciable en $\vec{a}\in\mathring{A}$.

9.2.4. Vector gradiente

Si existen todas las derivadas parciales de f se llama gradiente de f en $\vec{a}$ al vector $\nabla f(\vec{a})=(D_1 f(\vec{a}),\ldots,D_n f(\vec{a}))$.

Observacion Si f es diferenciable en a entonces $D_{\vec{v}}f(\vec{a})=\vec{\alpha}\times\vec{v}=\nabla f(\vec{a})\times\vec{v}$ con $\|\vec{v}\|=1$.

Capítulo 10

Aplicaciones

10.1. Teoremas

10.1.1. Teorema de valor medio para campos escalares

Enunciado Sea D un abierto de $\mathbb{R}^n$, si $f : D \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas tal que el segmento $\overline{a, a+h} \subseteq D$ entonces existe $p \in \overline{a, a+h}$ tal que: $f(a+h) - f(a) = \nabla f(p) \times h$

Demostracion Definimos $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $F(t) = f(a+th)$. Resulta F derivable y $F'(t) = \nabla f(a+th) \times h$.

Luego: $f(a+h) - f(a) = F(1) - F(0) \underbrace{=}_{Lagrange} F'(\alpha)(1-0) = F'(\alpha)$ con $0 < \alpha < 1$. Por lo tanto existe $p = a+\alpha h / f(a+h) - f(a) = \nabla f(a+\alpha h) \times h = \nabla f(p) \times h$.

10.1.2. Plano tangente a una superficie

Sea $z = f(x,y)$ la ecuacion de una superficie S en $\mathbb{R}^3$, sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ un punto de la superficie y supongamos que en (x_0, y_0) la funcion f es diferenciable; entonces la ecuacion del plano tangente a S en el punto P es $z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \times (x - x_0, y - y_0)$ es decir:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Definicion alternativa Sea S una superficie de nivel de ecuacion $f(x,y,z) = k$, si f tiene derivadas parciales continuas y $P_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ definimos el plano tangente a S en P_0 como $\{P(x, y, z) : \nabla f(P_0) \times (P - P_0) = 0\}$. La ecuacion cartesiana del plano es entonces:

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Observacion Esta definicion comprende a la anterior. En efecto segun la definicion anterior si $z = f(x, y)$ es la ecuacion de una superficie S definimos plano tangente por $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$. Ahora la superficie S la podemos considerar como la superficie de nivel cero de $h(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$. Sera entonces $\nabla h = (-f_x, -f_y, 1)$, luego el plano tangente en $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ segun la definicion alternativa esta dado por:

$$\begin{aligned} \nabla h(x_0, y_0, z_0) \times (x - x_0, y - y_0, z - z_0) =& 0 \\ -f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + 1(z - z_0) =& 0 \\ f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) =& z - z_0 \end{aligned}$$

10.1.3. Regla de la cadena

Enunciado Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{R}^n$ una funcion vectorial y $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en $\vec{\alpha}(t)$ tal que $Im(\vec{\alpha}) \subset D$; definimos la funcion compuesta $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = (f \circ \vec{\alpha})(t) = f[\vec{\alpha}(t)]$. Si $t \in \mathring{I}$ y existe $\vec{\alpha}'(t)$ entonces g es derivable en t y resulta: $g'(t) = \nabla f[\vec{\alpha}(t)] \times \vec{\alpha}'(t)$.

Demostracion Sean $t \in \mathring{I}$ y $h \neq 0 / t + h \in I$. Llamamos $\vec{a} = \vec{\alpha}(t)$ y $\vec{v} = \vec{\alpha}(t + h) - \vec{\alpha}(t)$. Como f es diferenciable entonces:

$$g(t + h) - g(t) = f(\vec{a} + \vec{v}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \times \vec{v} + \|v\| E(\vec{a}, \vec{v})$$

Observemos que $v \to 0$ cuando $h \to 0$ pues $\vec{\alpha}$ es continua, luego $E(a, v) \to 0$ cuando $h \to 0$. Ahora derivamos:

$$g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t + h) - g(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\nabla f(\vec{a}) \times \underbrace{\frac{\vec{\alpha}(t + h) - \vec{\alpha}(t)}{h}}_{\to \vec{\alpha}'(t)} + \underbrace{\left\| \frac{\vec{\alpha}(t + h) - \vec{\alpha}(t)}{h} \right\|}_{acotado} \underbrace{E(\vec{a}, \vec{v})}_{\to 0} \right)$$

es decir $g'(t) = \nabla f[\vec{\alpha}(t)] \times \vec{\alpha}'(t)$.

10.1.4. Interpretacion geometrica

COMPLETAR.

10.2. Optimizacion

10.2.1. Direccion de maximo crecimiento

Enunciado La derivada direccional en $\vec{a}$ es maxima en la direccion y sentido de $\nabla f(\vec{a})$ y minima en el sentido opuesto.

Demostracion

$|D_{\vec{u}} f(\vec{a})| = |\nabla f(\vec{a}) \times \vec{u}| = |\|\nabla f(\vec{a})\| \, \|\vec{u}\| \, cos\,[\nabla f(\vec{a}), \vec{u}]| \leq \|\nabla f(\vec{a})\| \cdot 1 \cdot 1 = \|\nabla f(\vec{a})\|$

Ademas $|D_{\vec{u}} f(\vec{a})| = \|\nabla f(\vec{a})\| \iff cos\,[\nabla f(\vec{a}), \vec{u}] = \pm 1 \iff \nabla f(\vec{a}) || \vec{u}$

10.2.2. Laplaciano

Sea f un campo escalar que admite derivadas parciales segundas, llamamos Laplaciano de f a $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$. Decimos que f es armonica si $\Delta f = 0$.

10.2.3. Extremos de un campo escalar

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar, si existe $\vec{a} \in A / f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ $\forall \vec{x} \in A$ decimos que $f(\vec{a})$ es un maximo absoluto de f en A.

Si existe $\vec{a} \in A / f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ para todo $\vec{x}$ en un entorno $E(\vec{a}) \cap A$ decimos que $f(\vec{a})$ es un maximo relativo de f.

Si existe $\vec{a} \in A / f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$ $\forall \vec{x} \in A$ decimos que $f(\vec{a})$ es un minimo absoluto de f en A.

Si existe $\vec{a} \in A / f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$ para todo $\vec{x}$ en un entorno $E(\vec{a}) \cap A$ decimos que $f(\vec{a})$ es un minimo relativo de f.

10.2.4. Teorema de Weierstrass

Si f es continua en A compacto entonces f tiene maximo y minimo en A. Es decir existen $\vec{a}, \vec{b} \in A$ tales que $f(\vec{a})$ es maximo absoluto y $f(\vec{b})$ es minimo absoluto.

10.2.5. Condicion necesaria para extremos

Enunciado Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si f tiene un extremo local en $\vec{a} \in A$ y f es diferenciable en $\mathring{A}$ entonces $\nabla f(a) = \vec{0}$ es decir: $D_1 f(\vec{a}) = \ldots = D_n f(\vec{a}) = 0$.

Demostracion Como $\vec{a} \in \mathring{A}$ existe $\delta > 0 / B_\delta(\vec{a}) \subseteq A$. Luego si $\vec{h} \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$ es tal que $\left\|\vec{h}\right\| < \delta$ el segmento $\overline{\vec{a} - \vec{h}, \vec{a} + \vec{h}}$ esta en $B_\delta(\vec{a}) \subseteq A$. Definimos $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ por $g(t) = f(\vec{a} + t\vec{h})$, asi $g(0) = f(\vec{a})$. Como f es diferenciable y tiene un extremo local en $\vec{a}$ resulta g derivable en 0 y tiene un extremo local en 0. Luego sera $g'(0) = \nabla f(\vec{a}) \times \vec{h} = 0 \ \forall \vec{h} / \left\|\vec{h}\right\| < \delta$. Por lo tanto $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$.

Observacion En los puntos de A donde se anula el gradiente de f no necesariamente hay un extremo. Por ejemplo $f(x, y) = xy$.

10.2.6. Punto estacionario y punto de ensilladura

Los puntos $\vec{a}$ tales que $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ son llamados puntos estacionarios o criticos. Puede ocurrir que en un punto critico f tenga un extremo o bien no sabemos que pasa con f.

Si $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ y f no tiene un extremo en $\vec{a}$ entonces $(\vec{a}, f(\vec{a}))$ es llamado punto de ensilladura.

Observacion Si f es diferenciable en todo su dominio A abierto de $\mathbb{R}^n$ entonces $\{\vec{a} \in A : f \text{ tiene un extremo local en } \vec{a}\} \subset \{\vec{a} \in A : \vec{a} \text{ es estacionario}\}$

10.2.7. Criterio del Hessiano

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, su hessiano esta dado por $|H(\vec{a})| = f_{xx}(\vec{a}) f_{yy}(\vec{a}) - f_{xy}^2(\vec{a}) = ac - b^2$. Luego si a es un punto estacionario y supongamos que las derivadas parciales segundas de f son continuas en $B_r(\vec{a})$ entonces:

- $|H(\vec{a})| > 0$ y $f_{xx}(\vec{a}) > 0 \Rightarrow f(\vec{a})$ es minimo local.
- $|H(\vec{a})| > 0$ y $f_{xx}(\vec{a}) < 0 \Rightarrow f(\vec{a})$ es maximo local.
- $|H(\vec{a})| < 0 \Rightarrow f(\vec{a})$ es punto de ensilladura.
- $|H(\vec{a})| = 0 \Rightarrow$ el criterio no decide.

10.2.8. Extremos condicionados

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g_i : B_i \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (con $i = 1, \ldots, k$) campos escalares diferenciables, se plantea el problema de optimizar f con $k < n$ condiciones $g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$ para $(x_1, \ldots, x_n) \in A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i \right)$

es decir: $$\begin{cases} \textit{optimizar} & f(x_1, \ldots, x_n) \\ s/a & g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ & \vdots \\ & g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ & (x_1, \ldots, x_n) \in A \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} B_i \right) \end{cases}$$

Si $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maximiza o minimiza a f sujeto a las restricciones entonces:

$$\begin{cases} \nabla f(P) & = \alpha_1 \nabla g_1(P) + \alpha_2 \nabla g_2(P) + \ldots + \alpha_k \nabla g_k(P) \\ g_1(P) & = 0 \\ g_2(P) & = 0 \\ \vdots & \\ g_k(P) & = 0 \\ P \in A \cap & \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} B_i \right) \end{cases}$$

Parte IV

Calculo integral en campos escalares

Capítulo 11

Introduccion

11.1. Definiciones

11.1.1. Particion regular de orden n

Sea $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Una particion P de R de orden n es un conjunto de $(n+1)^2$ puntos $(x_j, y_k) \in \mathbb{R}^2$ tales que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ y $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$ con $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}$ y $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$ para todo $j, k = 0, \ldots, n-1$.

11.1.2. Norma de una particion de orden n

La norma de una particion P de orden n esta dada por $\|P\| = \max\limits_{j,k=0,\ldots,n-1} = \{|\Delta x_j|, |\Delta y_k|\}$.

11.1.3. Conjunto de contenido nulo

Llamamos *conjunto de contenido nulo* a un conjunto que es a lo sumo union finita de graficas de funciones continuas.

11.1.4. Regiones elementales

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ decimos que:

1. D es de tipo 1 si $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b \wedge \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ con φ_1, φ_2 continuas en $[a,b]$.
2. D es de tipo 2 si $D = \{(x,y) : c \leq y \leq d \wedge \gamma_1(y) \leq x \leq \gamma_2(y)\}$ con γ_1, γ_2 continuas en $[c,d]$.
3. D es de tipo 3 si D es de tipo 1 y 2.

Si $D \subset \mathbb{R}^3$ entonces:

1. D es de tipo 1 si $D = \{(x,y,z) : (x,y) \in S \wedge \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\}$ con φ_1, φ_2 continuas en S elemental de $\mathbb{R}^2$.
2. D es de tipo 2 si $D = \{(x,y,z) : (y,z) \in S \wedge \varphi_1(y,z) \leq z \leq \varphi_2(y,z)\}$ con φ_1, φ_2 continuas en S elemental de $\mathbb{R}^2$.
3. D es de tipo 3 si $D = \{(x,y,z) : (x,z) \in S \wedge \varphi_1(x,z) \leq y \leq \varphi_2(x,z)\}$ con φ_1, φ_2 continuas en S elemental de $\mathbb{R}^2$.
4. D es de tipo 4 si es de tipo 1, 2 y 3.

Decimos que D es una region elemental si es de tipo 1, 2, 3 o 4. Toda region elemental es cerrada y acotada.

11.2. Integrales dobles sobre rectangulos

11.2.1. Definicion

Sea $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$. Si existe el $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum\limits_{j,k=0}^{n-1} f((c_{jk})\,\Delta x_j \Delta y_k$ independientemente de la eleccion de los c_{jk} decimos que f es integrable en R y lo notamos $\int\limits_R f(x,y)dA = \iint\limits_R f(x,y)dxdy$ donde dA es el diferencial de area.

11.2.2. Propiedades

Si f, g son integrables en $R = [a,b] \times [c,d]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:

- $\displaystyle\iint\limits_R [f(x,y) + g(x,y)]\, dA = \iint\limits_R f(x,y)dA + \iint\limits_R g(x,y)dA.$
- $\displaystyle\iint\limits_R \alpha f(x,y)dA = \alpha \iint\limits_R f(x,y)dA.$
- Si R_i para $i = 1, \ldots m$ son rectangulos disjuntos tales que f es integrable sobre cada R_i y si $R = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} R_i$ es un rectangulo, entonces una funcion acotada f es integrable sobre R y ademas $\displaystyle\iint\limits_R f(x,y)dA = \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_R f(x,y)dA.$

11.2.3. Propiedades de orden

Si f, g son integrables en $R = [a,b] \times [c,d]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:

- Si $f(x,y) \geq 0$ en R entonces $\displaystyle\iint\limits_R f(x,y)dA \geq 0.$
- Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ en R entonces $\displaystyle\iint\limits_R f(x,y)dA \geq \iint\limits_R g(x,y)dA.$
- Si $R_1 \subset R_2$ y $f(x,y) \geq 0$ en R_2 entonces $\displaystyle\iint\limits_{R_1} f(x,y)dA \leq \iint\limits_{R_2} f(x,y)dA.$
- $\displaystyle\left| \iint\limits_R f(x,y)dA \right| \leq \iint\limits_R |f(x,y)|\, dA$

11.2.4. Teorema de Fubini

Si f es continua en $R = [a,b] \times [c,d]$ entonces f es integrable en R. Si en cambio f es acotada tal que el conjunto de puntos de discontinuidades de f es un conjunto de contenido nulo tambien es integrable en R y en ambos casos:

$$\iint\limits_{R} f(x,y)dA = \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{a}^{b} f(x,y)dx \right) dy$$

11.3. Integrales triples sobre un cubo

11.3.1. Definicion

Sea $Q = [a,b]\times[c,d]\times[e,h] \subset \mathbb{R}^3$. Si existe el $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{i,j,k=0}^{n-1} f\left(c_{ijk}\right) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ independientemente de la eleccion de los c_{ijk} decimos que f es integrable en Q y lo notamos $\int\limits_{Q} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{Q} f(x,y,z)dxdydz$ donde dV es el diferencial de volumen.

Capítulo 12

Teoremas y aplicaciones

12.1. Teoremas

12.1.1. Integrales sobre regiones elementales

Sea D una region elemental y $R = [a,b] \times [c,d]$ tal que $R \subset D$, si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua en D se define $f^* : R \to \mathbb{R}$ por $f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \in R - D \end{cases}$

Decimos que f^* es una extension acotada de f a R y definimos: $\iint\limits_D f(x,y)dA = \iint\limits_R f^*(x,y)dA$.

Ademas si D es de tipo 1 entonces:

$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Analogamente si es de tipo 2.

Observacion Si $f(x,y) = 1$ en D entonces $\iint\limits_D f(x,y)dA = a(D)$.

12.1.2. Integrales sobre regiones mas generales

Si D no es una region elemental pero es union de dos regiones elementales cuya interseccion es un conjunto de contenido nulo entonces:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dA = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dA + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dA$$

En general si D es union finita de n regiones elementales que no tienen en comun sino puntos frontera (puntos que pertenecen a conjuntos de contenido nulo) entonces se define: $\iint\limits_{D} f(x,y)dA = \sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} f(x,y)dA$.

12.1.3. Teorema de valor medio

Enunciado Sea f continua en una region elemental D entonces existe (x_0, y_0) tal que $\iint\limits_{D} f(x,y)dA = f(x_0,y_0)a(D)$.

Demostracion Como D es compacto y f es continua el teorema de Weierstrass garantiza que $m \leq f(x,y) \leq M \ \forall (x,y) \in D$. Si $m \geq 0$ por propiedades de orden: $ma(D) \leq \iint\limits_{D} f(x,y)dA \leq Ma(D) \iff m \leq \dfrac{1}{a(D)} \iint\limits_{D} f(x,y)dA \leq M$ y por el teorema de los valores intermedios f alcanza todos los valores entre m y M, en particular $\frac{1}{a(D)} \iint_D f(x,y)dA$.

12.1.4. Cambio de variables

Sean D y D^* regiones elementales, sea $T : D^* \to D$ un campo vectorial biyectivo con derivadas parciales continuas tal que $T(u,v) = (X(u,v), Y(u,v))$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ integrable en D. Observemos que $f(x,y)$ con $(x,y) \in D$ es lo mismo que $(f \circ T)(u,v)$ con $(u,v) \in D^*$.

Luego:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} (f \circ T)(u,v) \left| J_T(u,v) \right| dudv$$

donde $|J_T(u,v)|$ es el valor absoluto del determinante de la matriz jacobiana de T dada por:

$$J_T(u,v) = \begin{pmatrix} X_u(u,v) & X_v(u,v) \\ Y_u(u,v) & Y_v(u,v) \end{pmatrix}$$

12.2. Aplicaciones

12.2.1. Masa de un cuerpo

Sean D una placa o lamina y E un solido. La masa de un cuerpo es su resistencia al desplazamiento. Esta viene dada por la formula $m(D) = \delta(x,y)a(D)$ en el caso de una placa o bien $m(E) = \delta(x,y,z)V(E)$ donde δ es la densidad del cuerpo. Es decir: $m(D) = \iint\limits_{D} \delta(x,y)dA$ o bien $m(E) = \iiint\limits_{E} \delta(x,y,z)dV$.

12.2.2. Centro de gravedad

Las coordenadas del centro de masa o gravedad de una placa D con densidad dada por $\delta(x,y)$ vienan dadas por $x_g = \frac{1}{m(D)} \iint_D x\delta(x,y)dA$ y $y_g = \frac{1}{m(D)} \iint_D y\delta(x,y)dA$.

Para un solido E las formulas correspondientes son $x_g = \frac{1}{m(E)} \iiint\limits_{E} x\delta(x,y,z)dV$, $y_g = \frac{1}{m(E)} \iiint\limits_{E} y\delta(x,y,z)dV$ y $z_g = \frac{1}{m(E)} \iiint\limits_{E} z\delta(x,y,z)dV$.