1. Utilizando los axiomas de cuerpo, los teoremas probados en teoría y considerando $a, b, c \in \mathbb{R}$, demostrar las siguientes propiedades de los números reales:

   a) $-(-a) = a$ (El número opuesto al opuesto de a es el propio número a).

   b) $-0 = 0$

   c) $0 \cdot a = 0$

   d) $a(-b) = -(ab) = (-a)b$.

   e) $(-a)(-b) = ab$.

   f) $a(b - c) = ab - ac$.

Soluciones

a)

$$
\begin{array}{rc}
 & \boldsymbol{-(-a)} \\
= & \langle \text{Existencia de neutro} \rangle \\
 & -(-a) + 0 \\
= & \langle \text{Existencia de opuesto} \rangle \\
 & -(-a) + (a + (-a)) \\
= & \langle \text{Propiedad conmutativa} \rangle \\
 & -(-a) + ((-a) + a) \\
= & \langle \text{Propiedad asociativa} \rangle \\
 & (-(-a) + (-a)) + a \\
= & \langle \text{Existencia de neutro} \rangle \\
 & 0 + a \\
= & \langle \text{Existencia de neutro} \rangle \\
 & \boldsymbol{a}
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{rc}
 & \mathbf{-0} \\
= & \langle \text{Existencia de neutro} \rangle \\
 & -0 + 0 \\
= & \langle \text{Existencia de opuesto} \rangle \\
 & \mathbf{0}
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{cc}
 & \mathbf{0}\boldsymbol{a} \\
= & \langle \text{Existencia de neutro} \rangle \\
 & 0a + 0 \\
= & \langle \text{Existencia de opuesto} \rangle \\
 & 0a + (0a + (-(0a))) \\
= & \langle \text{Propiedad asociativa} \rangle \\
 & (0a + 0a) + (-(0a)) \\
= & \langle \text{Propiedad conmutativa} \rangle \\
 & (a0 + 0a) + (-(0a)) \\
= & \langle \text{Propiedad conmutativa} \rangle \\
 & (a0 + a0) + (-(0a)) \\
= & \langle \text{Propiedad distributiva} \rangle \\
 & a(0 + 0) + (-(0a)) \\
= & \langle \text{Existencia de neutro} \rangle \\
 & a0 + (-(0a)) \\
= & \langle \text{Propiedad conmutativa} \rangle \\
 & 0a + (-(0a)) \\
= & \langle \text{Existencia de opuesto} \rangle \\
 & \mathbf{0}
\end{array}
$$

d)

$$
\begin{array}{cc}
 & \boldsymbol{a}\,(-\boldsymbol{b}) \\
= & \langle \text{Existencia de neutro} \rangle \\
 & a(-b) + 0 \\
= & \langle \text{Existencia de opuesto} \rangle \\
 & a(-b) + (ab + (-(ab))) \\
= & \langle \text{Propiedad asociativa} \rangle \\
 & (a(-b) + ab) + (-(ab)) \\
= & \langle \text{Propiedad distributiva} \rangle \\
 & a(-b + b) + (-(ab)) \\
= & \langle \text{Existencia de opuesto} \rangle \\
 & a0 + (-(ab)) \\
= & \langle \text{Ejercicio } c \rangle \\
 & 0 + (-(ab)) \\
= & \langle \text{Existencia de neutro} \rangle \\
 & -\,(\boldsymbol{ab})
\end{array}
$$

$$\begin{array}{cc}
 & \boldsymbol{-(ab)} \\
= & \langle \text{Existencia de neutro} \rangle \\
 & 0 + (-(ab)) \\
= & \langle \text{Ejercicio } c \rangle \\
 & 0b + (-(ab)) \\
= & \langle \text{Existencia de opuesto} \rangle \\
 & (-a + a)\, b + (-(ab)) \\
= & \langle \text{Propiedad distributiva} \rangle \\
 & ((-a)\, b + ab) + (-(ab)) \\
= & \langle \text{Propiedad asociativa} \rangle \\
 & (-a)\, b + (ab + (-(ab))) \\
= & \langle \text{Existencia de opuesto} \rangle \\
 & (-a)\, b + 0 \\
= & \langle \text{Existencia de neutro} \rangle \\
 & \boldsymbol{(-a)\, b}
\end{array}$$

e)

$$\begin{array}{cc}
 & \boldsymbol{(-a)(-b)} \\
= & \langle \text{Ejercicio } d \rangle \\
 & -(a(-b)) \\
= & \langle \text{Ejercicio } d \rangle \\
 & -(-(ab)) \\
= & \langle \text{Ejercicio } a \rangle \\
 & \boldsymbol{ab}
\end{array}$$

f) COMPLETAR.

2. Utilizando los axiomas de orden, los teoremas probados en teoría y considerando $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, demostrar las siguientes propiedades de los números reales:

   a) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

   b) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

   c) Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$ (donde a^2 es una notación para el producto aa).

   d) $1 > 0$. Es decir, $1 \in \mathbb{R}^+$.

e) Si $a < b$, entonces $-b < -a$. En particular, si $a < 0$ entonces $-a > 0$.

f) $ab > 0$ si y solo si a y b son los dos positivos o los dos negativos.

g) $a > 0$ si y solo si $\frac{1}{a} > 0$.

Soluciones

Lema:

$$\begin{array}{cc} & \boldsymbol{(-a)+(-b)} \\ = & \langle\text{Existencia de neutro y opuesto}\rangle \\ & (a+b)+(-(a+b))+(-a)+(-b) \\ = & \langle\text{Propiedad conmutativa y asociativa}\rangle \\ & -(a+b)+a+(-a)+b+(-b) \\ = & \langle\text{Existencia de neutro y opuesto}\rangle \\ & \boldsymbol{-(a+b)} \end{array}$$

a)

$$\begin{array}{cc} & \boldsymbol{a<b} \\ \Longleftrightarrow & \langle\text{Definición de } <\rangle \\ & b-a\in\mathbb{R}^+ \\ \Longleftrightarrow & \langle\text{Existencia de neutro y opuesto}\rangle \\ & b-a+c-c\in\mathbb{R}^+ \\ \Longleftrightarrow & \langle\text{Propiedad conmutativa}\rangle \\ & b+c-a-c\in\mathbb{R}^+ \\ \Longleftrightarrow & \langle\text{Lema}\rangle \\ & b+c-(a+c)\in\mathbb{R}^+ \\ \Longleftrightarrow & \langle\text{Definición de } <\rangle \\ & \boldsymbol{a+c<b+c} \end{array}$$

$b)$

$$
\begin{array}{cc}
 & \boldsymbol{a < b \wedge c < 0} \\
\iff & \langle \text{Definición de } < \rangle \\
 & b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge 0 - c \in \mathbb{R}^+ \\
\iff & \langle \text{Definición de resta y Existencia de neutro} \rangle \\
 & b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge -c \in \mathbb{R}^+ \\
\implies & \langle \text{Suma y producto de positivos} \rangle \\
 & (b - a)(-c) \in \mathbb{R}^+ \\
\iff & \langle \text{Ejercicio 1.}f \rangle \\
 & b(-c) - a(-c) \in \mathbb{R}^+ \\
\iff & \langle \text{Ejercicio 1.}d \rangle \\
 & -bc - a(-c) \in \mathbb{R}^+ \\
\iff & \langle \text{Definición de resta} \rangle \\
 & -bc + (-(a(-c))) \in \mathbb{R}^+ \\
\iff & \langle \text{Ejercicio 1.}d \rangle \\
 & -bc + (-(-(ac))) \in \mathbb{R}^+ \\
\iff & \langle \text{Ejercicio 1.}a \rangle \\
 & -bc + ac \in \mathbb{R}^+ \\
\iff & \langle \text{Propiedad conmutativa} \rangle \\
 & ac - bc \in \mathbb{R}^+ \\
\iff & \langle \text{Definición de } > \rangle \\
 & \boldsymbol{ac > bc}
\end{array}
$$

$c)$

$$\begin{array}{lc} & \boldsymbol{a \neq 0} \\ \iff & \langle \text{Dicotomia} \rangle \\ & a > 0 \lor a < 0 \\ \implies & \langle \text{Analisis por casos} \rangle \end{array}$$

$\begin{array}{lc} & a > 0 \\ \iff & \langle \text{Definición de } > \rangle \\ & a - 0 \in \mathbb{R}^+ \\ \implies & \langle \text{Suma y producto de positivos} \rangle \\ & a\,(a - 0) \in \mathbb{R}^+ \\ \iff & \langle \text{Ejercicio } 1.f \rangle \\ & aa - a0 \in \mathbb{R}^+ \\ \iff & \langle \text{Ejercicio } 1.c \rangle \\ & aa - 0 \in \mathbb{R}^+ \\ \iff & \langle \text{Definición de } > \rangle \\ & aa > 0 \end{array}$	$\begin{array}{lc} & a < 0 \\ \implies & \langle \text{Ejercicio } b \rangle \\ & aa > a0 \\ \iff & \langle \text{Ejercicio } 1.c \rangle \\ & aa > 0 \end{array}$

$$\boldsymbol{aa > 0}$$

$d)$

$$\begin{array}{lc} & \mathbf{1} \\ = & \langle \text{Existencia de neutro} \rangle \\ & 1^2 \\ > & \langle \text{Ejercicio } c \rangle \\ & \mathbf{0} \end{array}$$

e)

$$
\begin{array}{rc}
 & \boldsymbol{a < b} \\
\Longleftrightarrow & \langle \text{Definición de } < \rangle \\
 & b - a \in \mathbb{R}^{+} \\
\Longleftrightarrow & \langle \text{Definicion de resta} \rangle \\
 & b + (-a) \in \mathbb{R}^{+} \\
\Longleftrightarrow & \langle \text{Propiedad conmutativa} \rangle \\
 & -a + b \in \mathbb{R}^{+} \\
\Longleftrightarrow & \langle \text{Ejercicio 1.}b \rangle \\
 & -a + (-(-b)) \in \mathbb{R}^{+} \\
\Longleftrightarrow & \langle \text{Definicion de resta} \rangle \\
 & -a - (-b) \in \mathbb{R}^{+} \\
\Longleftrightarrow & \langle \text{Definición de } < \rangle \\
 & \boldsymbol{-b < -a}
\end{array}
$$

f) COMPLETAR.

g) COMPLETAR.

3. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones. Proporcionar el conjunto solución tanto en forma de intervalo como gráficamente.

   a) $4x > 8$.

   b) $6y < 18$.

   c) $2m \leq -6$.

   d) $-r \leq -7$.

   e) $3r + 1 \geq 16$.

   f) $2m - 5 \geq 15$.

   g) $-3(z-6) > 2z - 5$.

   h) $-2(y+4) \leq 6y + 8$.

   i) $-3 < x - 5 < 6$.

   j) $-19 \leq 3x - 5 \leq -9$.

   k) $-16 < 3t + 2 < -11$.

   l) $-4 \leq \frac{2x-5}{6} \leq 5$.

   m) $(x-3)\sqrt{x+1} \geq 0$.

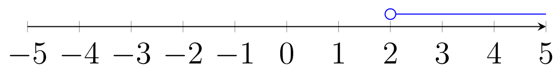
   n) $3x < \frac{1+6x}{2} < \frac{9x-8}{3}$.

   ñ) $x \leq x + 1 \leq x + 5$.

Soluciones

a)

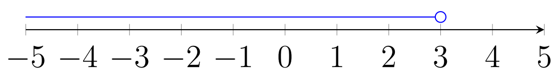
$$4x > 8 \iff \frac{1}{4}4x > \frac{1}{4}8 \iff 1x > \frac{1}{4}8 \iff x > \frac{1}{4}8 \iff x > 2$$



$(2, \infty)$

b)

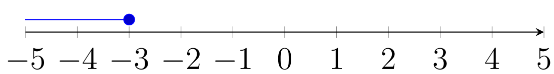
$$6y < 18 \iff \frac{1}{6}6y < \frac{1}{6}18 \iff 1y < \frac{1}{6}18 \iff y < \frac{1}{6}18 \iff y < 3$$



$(-\infty, 3)$

c)

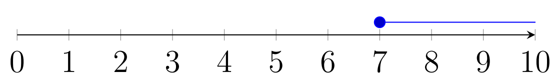
$$2m \leq -6 \iff \frac{1}{2}2m \leq \frac{1}{2}(-6) \iff m \leq -3$$



$(-\infty, -3]$

d)

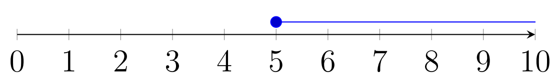
$$-r \leq -7 \iff r \geq 7$$



$[7, \infty)$

e)

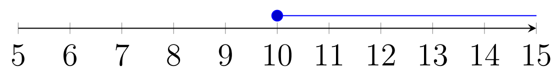
$$3r + 1 \geq 16 \iff 3r \geq 15 \iff r \geq 5$$



$[5, \infty)$

$f)$

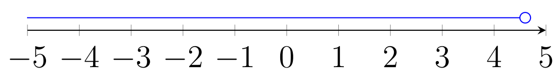
$$2m - 5 \geq 15 \iff 2m \geq 20 \iff m \geq 10$$



$[10, \infty)$

$g)$

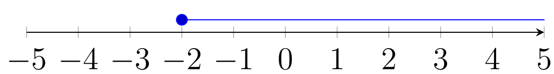
$$-3\,(z-6) > 2z-5 \iff -3z+18 > 2z-5 \iff 23 > 5z \iff z < \frac{23}{5}$$



$(-\infty, \frac{23}{5})$

$h)$

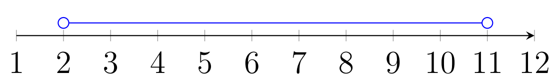
$$-2\,(y+4) \leq 6y+8 \iff -2y-8 \leq 6y+8 \iff -16 \leq 8y \iff -2 \leq y$$



$[-2, \infty)$

$i)$

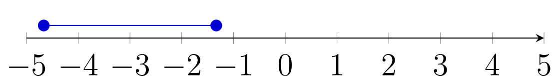
$$-3 < x - 5 < 6 \iff 2 < x < 11$$



$(2, 11)$

$j)$

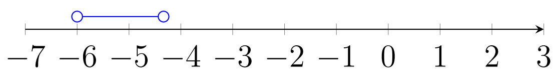
$$-19 \leq 3x - 5 \leq -9 \iff -14 \leq 3x \leq -4 \iff -\frac{14}{3} \leq x \leq -\frac{4}{3}$$



$[-\frac{14}{3}, -\frac{4}{3}]$

$k)$

$$-16 < 3t + 2 < -11 \iff -18 < 3t < -13 \iff -6 < t < -\frac{13}{3}$$

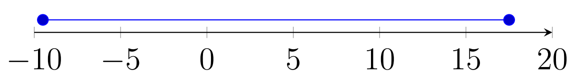


$(-6, -\frac{13}{3})$

$l)$

$$-4 \leq \frac{2x-5}{6} \leq 5 \iff -24 \leq 2x-5 \leq 30 \iff -19 \leq 2x \leq 35 \iff$$

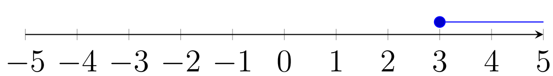
$$\iff -\frac{19}{2} \leq x \leq -\frac{35}{2}$$



$[-\frac{19}{2}, -\frac{139}{2}]$

$m)$

$$(x-3)\underbrace{\sqrt{x+1}}_{\geq 0} \geq 0 \iff x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$$



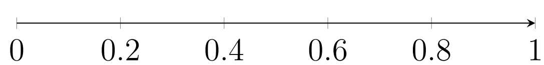
$[3, \infty)$

$n)$

$$3x < \frac{1+6x}{2} < \frac{9x-8}{3} \iff \underbrace{3x < \frac{1+6x}{2}}_{P(x)} \wedge \frac{1+6x}{2} < \frac{9x-8}{3} \iff$$

$$\iff P(x) \wedge 1+6x < \frac{18x-16}{3} \iff P(x) \wedge 3+18x < 18x-16 \iff$$

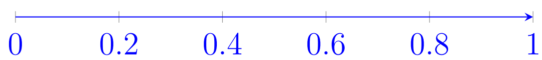
$$P(x) \wedge 3 < -16 \iff P(x) \wedge -19 > 0 \iff \bot$$



$\emptyset$

$\tilde{n})$

$$x \leq x+1 \leq x+5 \iff 0 \leq 1 \leq 5 \iff \top$$



$(-\infty, \infty)$

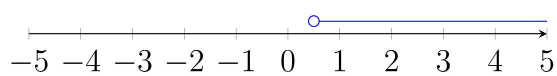
4. Hallar el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita. Expresarlos como intervalos de números reales y graficar.

$a)$ $\begin{cases} 4x - 8 & > -6 \\ \frac{x}{2} + 2 & > 0 \end{cases}$ $\qquad$ $b)$ $\begin{cases} 5x + \frac{1}{4} & \geq 0 \\ 2x - 10 & < 0 \\ 7x - 14 & \leq 0 \end{cases}$

Soluciones

$a)$

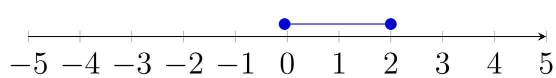
$$\begin{cases} 4x - 8 & > -6 \\ \frac{x}{2} + 2 & > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x & > 2 \\ \frac{x}{2} & > -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & > \frac{1}{2} \\ x & > -4 \end{cases} \Longleftrightarrow x > \frac{1}{2}$$



$(\frac{1}{2}, \infty)$

$b)$

$$\begin{cases} 5x + \frac{1}{4} & \geq 0 \\ 2x - 10 & < 0 \\ 7x - 14 & \leq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & \geq -\frac{1}{20} \\ x & < 5 \\ x & \leq 2 \end{cases} \Longleftrightarrow -\frac{1}{20} \leq x \leq 2$$



$[-\frac{1}{20}, 2]$

5. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones fraccionarias. Proporcionar el conjunto solución tanto en forma de intervalo como gráficamente.

   a) $\frac{5}{x+3} + \frac{3}{x-1} < 0.$ *b*) $\frac{4x-3}{3-x} > 0.$ *c*) $\frac{4-9x}{5x+7} \leq 3.$

Soluciones

a)

- Caso $x - 1 < 0 \iff x < 1$:

$$\frac{5}{x+3}+\frac{3}{x-1} < 0 \iff \frac{5\,(x-1)}{x+3}+3 > 0 \iff \frac{5\,(x-1)}{x+3} > -3 \iff$$

$$\iff 5\,(x-1) > -3\,(x+3) \iff 5x-5 > -3x-9 \iff$$

$$\iff 8x > -4 \iff x > -\frac{1}{2}$$

es decir, $-\frac{1}{2} < x < 1 \iff x \in \boldsymbol{\left(-\frac{1}{2}, 1\right)}$.

- Caso $x - 1 > 0 \iff x > 1$. Análogamente:

$$\frac{5}{x+3} + \frac{3}{x-1} < 0 \iff x < -\frac{1}{2}$$

es decir, $1 < x < -\frac{1}{2} \iff x \in \boldsymbol{\emptyset}$.

- Caso $x + 3 > 0 \iff x > -3$:

$$\frac{5}{x+3}+\frac{3}{x-1} < 0 \iff 5+\frac{3\,(x+3)}{x-1} < 0 \iff \frac{3\,(x+3)}{x-1} < -5 \iff$$

$$\iff 3\,(x+3) < -5\,(x-1) \iff 3x+9 < -5x+5 \iff$$

$$\iff 8x < -4 \iff x < -\frac{1}{2}$$

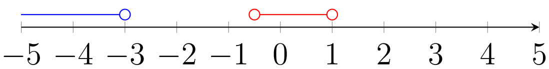
es decir, $-3 < x < -\frac{1}{2} \iff x < -3 \iff x \in \boldsymbol{(-\infty, -3)}$.

- Caso $x + 3 < 0 \iff x < -3$. Análogamente:

$$\frac{5}{x+3} + \frac{3}{x-1} < 0 \iff x > -\frac{1}{2}$$

es decir, $-\frac{1}{2} < x < -3 \iff x \in \boldsymbol{\emptyset}$.

- Solución gráfica:



$(-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

b)

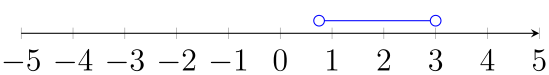
- Caso $3 - x > 0 \iff x < 3$:

$$\frac{4x-3}{3-x} > 0 \iff 4x - 3 > 0 \iff 4x > 3 \iff x > \frac{3}{4}$$

  es decir, $\frac{3}{4} < x < 3 \iff x \in \left(\frac{3}{4}, 3\right)$.
- Caso $3 - x < 0 \iff x > 3$. Análogamente:

$$\frac{4x-3}{3-x} > 0 \iff x < \frac{3}{4}$$

  es decir, $3 < x < \frac{3}{4} \iff x \in \emptyset$.
- Solución gráfica:



$(-\infty, -3)$

c) COMPLETAR.

6. ¿A qué distancia está 7 de 4? ¿Y -3 de -19? ¿Y -24 de 49?

   a) Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al 3 en menos de 2.

   b) Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al -1 en menos de 4.

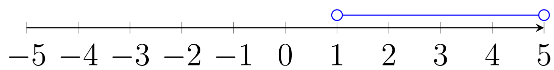
   c) Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al 0 en mas de 1.

Soluciones

- $d(7, 4) = |7 - 4| = |3| = 3$.
- $d(-3, -19) = |-3 - (-19)| = |-3 + 19| = |16| = 16$.
- $d(-24, 49) = |-24 - 49| = |-73| = 73$.

a)

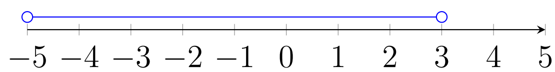
$$d(x,3) < 2 \iff |x-3| < 2 \iff -2 < x-3 < 2 \iff 1 < x < 5$$



$(1,5)$

b)

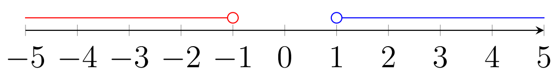
$$d(x,-1) < 4 \iff |x-(-1)| < 4 \iff -4 < x+1 < 4 \iff -5 < x < 3$$



$(-5,3)$

c)

$$d(x,0) > 1 \iff |x-0| > 1 \iff x > 1 \vee x < -1$$



$(1,\infty) \ \cup \ (-\infty,-1)$

7. Representar en la recta numérica los puntos x tales que:

   a) $|x| = 4$.

   b) $|x-4| < 1$.

   c) $|x+2| \geq 1$.

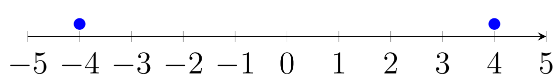
   d) $|x-3| < 7$.

   e) $|x^2 - 3x - 2| \leq 2$.

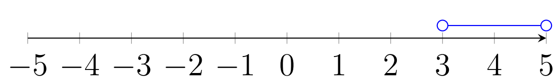
   f) $\frac{3}{|3x+1|} \leq 2$.

Soluciones

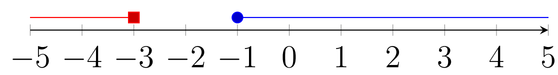
a) $|x| = 4 \iff x = 4 \vee x = -4$



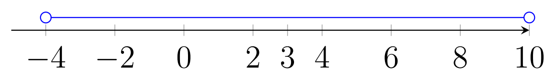
b) $|x-4| < 1 \iff -1 < x-4 < 1 \iff 3 < x < 5$



c) $|x+2| \geq 1 \iff x+2 \geq 1 \vee x+2 \leq -1 \iff x \geq -1 \vee x \leq -3$



d) $|x-3| < 7 \iff -7 < x-3 < 7 \iff -4 < x < 10$



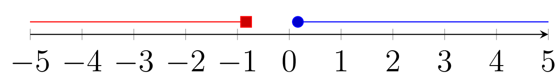
e) COMPLETAR.

f)

$$\frac{3}{|3x+1|} \leq 2 \iff 3 \leq 2\,|3x+1| \iff \frac{3}{2} \leq |3x+1| \iff$$

$$\iff \frac{3}{2} \leq 3x+1 \vee -\frac{3}{2} \geq 3x+1 \iff \frac{1}{2} \leq 3x \vee -\frac{5}{2} \geq 3x \iff$$

$$\iff \frac{1}{6} \leq x \vee -\frac{5}{6} \geq x \iff x \in \left(\frac{1}{6}, \infty\right) \cup \left(-\infty, -\frac{5}{6}\right)$$



8. Decidir si cada uno de los siguientes conjuntos está acotado, acotado superiormente o acotado inferiormente.

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 6\}$.

c) $C = [2, 8)$.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} / x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$.

e) $E = \mathbb{Z} - \mathbb{N}$.

f) $F = \{0\}$.

g) $G = \left\{x \in \mathbb{R} / x = 1 - \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}\right\}$.

h) $H = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

i) $I = \emptyset$.

Soluciones

a)

- A es acotado inferiormenente pues para $b = 1 \in \mathbb{R}$ resulta:

  - $b \leq 1$.
  - $b \leq 2$.
  - $b \leq 3$.
  - $b \leq 4$.
  - $b \leq 5$.

- A es acotado superiormente pues para $b = 5 \in \mathbb{R}$ resulta:

  - $1 \leq b$.
  - $2 \leq b$.
  - $3 \leq b$.
  - $4 \leq b$.
  - $5 \leq b$.

b)

- B es acotado inferiormenente pues para $b = -3 \in \mathbb{R}$ resulta:

$$a \in B \implies -3 \leq a \leq 6 \implies b \leq a$$

- B es acotado superiormente pues para $b = 6 \in \mathbb{R}$ resulta:

$$a \in B \implies -3 \leq a \leq 6 \implies a \leq b$$

c)

- C es acotado inferiormenente pues para $b = 2 \in \mathbb{R}$ resulta:

$$a \in C \implies 2 \leq a < 8 \implies b \leq a$$

- C es acotado superiormente pues para $b = 8 \in \mathbb{R}$ resulta:

$$a \in C \implies 2 \leq a < 8 \implies a < 8 \implies a \leq b$$

d)

- D es acotado inferiormenente pues para $b = 0 \in \mathbb{R}$ resulta:

$$a \in D \implies a = \underbrace{2}_{\geq 0}\underbrace{k}_{\geq 0} \geq 0$$

- D no es acotado superiormente pues:
  - Para cualquier $b \in \mathbb{R}^+$ resulta $a = 2b \not\leq b$.
  - Para cualquier $b \in \mathbb{R}_0^-$ resulta $a = 1 \not\leq b$.

e)

- E no es acotado inferiormenente pues:
  - Para cualquier $b \in \mathbb{R}^+$ resulta $b \not\leq -1 = a$.
  - Para cualquier $b \in \mathbb{R}_0^-$ resulta $b \not\leq b - 1 = a$.
- E es acotado superiormente pues para $b = 0 \in \mathbb{R}$ resulta $a \leq 0$ para todo $a \in E$.

f)

- F es acotado inferiormenente pues para $b = 0 \in \mathbb{R}$ resulta $b \leq 0$.
- F es acotado inferiormenente pues para $b = 0 \in \mathbb{R}$ resulta $0 \leq b$.

g) COMPLETAR.

h) COMPLETAR.

i) I no es acotado pues no es distinto del conjunto vacío.

9. Respecto de los conjuntos del ejercicio anterior, se pide:

   a) En los casos en que los conjuntos están acotados superior y/o inferiormenente, determinar el supremo y/o ínfimo.

   b) Establecer si los supremos e ínfimos obtenidos en el ítem anterior son máximos y mínimos, respectivamente, del conjunto considerado.

Soluciones

a)

- $\text{ínf}\,(A) = 1$ pues es cota inferior y además si $1 < c$ entonces c no es cota inferior ya que $c \not\leq 1$.
- $\sup\,(A) = 5$ pues es cota superior y además si $c < 5$ entonces c no es cota superior ya que $5 \not\leq c$.

- $\text{ínf}\,(B) = -3$ pues es cota inferior y además si $-3 < c$ entonces c no es cota inferior ya que $c \not\leq -3$.
- $\sup(B) = 6$ pues es cota superior y además si $c < 6$ entonces c no es cota superior ya que $6 \not\leq c$.
- $\text{ínf}\,(C) = 2$ pues es cota inferior y además si $2 < c$ entonces c no es cota inferior ya que $c \not\leq 2$.
- $\sup(C) = 8$ pues es cota superior y además si $c < 8$ entonces c no es cota superior ya que $a \not\leq c$ para cualquier $a \in (c, 8) \subseteq C$.
- $\text{ínf}\,(D) = 0$ pues es cota inferior y además si $0 < c$ entonces c no es cota inferior ya que $c \not\leq 0$.

- $\sup(E) = -1$.
- $\text{ínf}\,(F) = 0$.
- $\sup(F) = 0$.
- $\text{ínf}\,(G) = 0$.
- $\sup(G) = 1$.

b)

- $\text{ínf}\,(A) \in A \implies \text{mín}\,(A) = 1$.
- $\sup(A) \in A \implies \text{máx}\,(A) = 5$.
- $\text{ínf}\,(B) \in B \implies \text{mín}\,(B) = -3$.
- $\sup(B) \in B \implies \text{máx}\,(B) = 6$.
- $\text{ínf}\,(C) \in C \implies \text{mín}\,(C) = 2$.
- $\text{ínf}\,(D) \in D \implies \text{mín}\,(D) = 0$.
- $\sup(E) \in E \implies \text{máx}\,(E) = -1$.
- $\text{ínf}\,(F) \in F \implies \text{mín}\,(F) = 0$.
- $\sup(F) \in F \implies \text{máx}\,(F) = 0$.
- $\text{ínf}\,(G) \in G \implies \text{mín}\,(G) = 0$.

10. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Probar que A está acotado si y solo si existe un número real positivo L tal que $|x| < L$ para todo $x \in A$.

Solución

- $\boxed{\implies}$: Sean m y M las cotas inferior y superior de A, definimos:

  $$L = \max\{|m|, |M|\}$$

  Por definición de máximo $|m| \le L$ y $|M| \le L$, luego tenemos:

  - $-L \le m \le L \implies -L \le m$.
  - $-L \le M \le L \implies M \le L$.

  Sea $x \in A$:

  - Por ser cota inferior $m \le x$ y como $-L \le m$, por transitividad $-L \le x$.
  - Por ser cota superior $x \le M$ y como $M \le L$, por transitividad $x \le L$.

  De los dos puntos anteriores resulta $-L \le x \le L \iff |x| \le L$.

- $\boxed{\impliedby}$: Sea $x \in A$ luego $|x| \le L \iff -L \le x \le L$, es decir, $-L$ y L son cotas inferior y superior de A.

11. Demostrar que si α y β son dos números reales tales que ambos son mínimo del mismo conjunto A, entonces $\alpha = \beta$.

    Solución Puesto que es mínimo de A sabemos que para cualquier $x \in A$ resulta $\alpha \le x$, en particular esto también es cierto para β por lo que $\alpha \le \beta$.

    Análogamente podemos concluir que $\beta \le \alpha$.

    De todo lo anterior concluimos que $\alpha \le \beta \wedge \beta \le \alpha \implies \alpha = \beta$.

12. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Se define el conjunto siguiente:

    $$-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$$

    a) Siendo A_1, A_2, A_3 los conjuntos encontrados en el ejercicio 7, hallar los conjuntos $-A_1, -A_2$ y $-A_3$.

    b) Mostrar que $-A$ es un conjunto no vacío y que $-(-A) = A$.

    c) Hallar las condiciones bajo las cuales se tiene que $-A = A$.

d) Muestre que si A es un conjunto acotado superiormente (inferiormenente) entonces $-A$ es u conjunto acotado inferiormenente (superiormente).

e) Muestre que si A posee un supremo entonces $-A$ posee ínfimo y se verifica que $\text{ínf}(-A) = -\sup(A)$, y análogamente, si A posee ínfimo entonces $-A$ posee supremo y se verifica que $\sup(-A) = -\text{ínf}(A)$.

f) Utilizar los resultados de las partes anteriores para mostrar que todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente posee ínfimo.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b)

- Sabemos que $A \neq \emptyset$. Sea $x \in A$ luego $-x \in -A$ por lo que $-A \neq \emptyset$.
-
  - $\boxed{\subseteq}$: Sea $x \in -(-A)$, luego por definición $-x \in -A$ y nuevamente por definición $-(-x) \in A$ por lo que $x \in A$.
  - $\boxed{\supseteq}$: Sea $x \in A$, observemos que $x = -(-x)$ luego por definición $-x \in -A$ y nuevamente por definición $-(-x) \in -(-A)$ por lo que $x \in -(-A)$.

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

e) COMPLETAR.

f) COMPLETAR.

13. Si A es un conjunto no vacío de números reales y c es un número real, se define el conjunto

$$cA = \{cx : x \in A\}$$

a) Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ y $B = [-1, 2)$, determinar $2A$ y $-3B$. Analizar las cotas superiores e inferiores de estos conjuntos.

b) Conjeturar las relaciones entre $\sup(A), \text{ínf}(A), \sup(cA)$ e $\text{ínf}(cA)$.

Soluciones

a)

- $2A = \{2x : x \in A\} = \{2x : x \geq 2\}$. Sea $y = 2x$, observemos que $\frac{y}{2} = x$, luego $2A = \left\{y : \frac{y}{2} \geq 2\right\} = \{y : y \geq 4\}$.
- $\text{ínf}\,(2A) = 4$.
- $-3B = \{-3x : x \in B\} = \{-3x : -1 \leq x < 2\} = \left\{y : -1 \leq -\frac{y}{3} < 2\right\} = \left\{y : \frac{1}{3} \geq y > -\frac{2}{3}\right\}$.
- $\text{ínf}\,(-3B) = -\frac{2}{3}$.
- $\sup\,(-3B) = \frac{1}{3}$.

b) COMPLETAR.

14. Si A y B son dos conjuntos no vacíos de números reales tales que

$$a \in A \wedge b \in B \implies a \leq b$$

a) Demostrar que el conjunto A es acotado superiormente y el conjunto B es acotado inferiormente.

b) ¿Existe alguna relación entre el $\sup\,(A)$ y el $\text{ínf}\,(B)$? Hacer una conjetura sobre tal relación.

c) Demostrar lo conjeturado en el ítem anterior.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

c) COMPLETAR.

15. Probar que:

a) Si $|x| < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $x = 0$.

b) Si $|x| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ entonces $x = 0$.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b)

- Supongamos $x > 0$. Como $|x| < \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$ en particular también es cierto para $\epsilon = \frac{|x|}{2}$ por lo que:

$$|x| < \frac{|x|}{2} \iff 1 < \frac{1}{2}$$

  lo cual es una contradicción.

- Supongamos $x < 0$. Como $|x| < \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$ en particular también es cierto para $\epsilon = 2\,|x|$ por lo que:

$$|x| < 2\,|x| \iff 1 > 2$$

  lo cual es una contradicción.

- Por lo tanto $x = 0$.