Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebra y Geometría I

Lic. en Cs. de la Computación - Año 2016

TRABAJO PRÁCTICO Nº 4: Funciones

1. Determinar si cada una de las siguientes relaciones es una función. En caso que lo sea, determinar su imagen.
   (a) $\mathcal{R} = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{Z}; y = x^2 + 7\}$, $\mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$.
   (b) $\mathcal{R} = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}; y^2 = x\}$, $\mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
   (c) $\mathcal{R} = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}; y = 3x + 1\}$, $\mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
   (d) $\mathcal{R} = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{Q}; x^2 + y^2 = 1\}$, $\mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$.
2. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Sea $f : A \to B$ la función dada por
$$f = \{(1, 2), (1, 6), (3, 6), (4, 8), (5, 6), (6, 8), (7, 12)\}.$$
   Determinar la preimagen de B_1 mediante f en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $B_1 = \{2\}$ (c) $B_1 = \{6, 8\}$ (e) $B_1 = \{6, 8, 10, 12\}$
   (b) $B_1 = \{6\}$ (d) $B_2 = \{6, 8, 10\}$ (f) $B_1 = \{10, 12\}$.

3. Para cada una de las siguientes funciones, determinar $Im(f)$, $f(A)$ y $f^{-1}(B)$ para los subconjuntos A y B indicados.
   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 1$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{7, 8, 9\}$.
   (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^3 - x$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-5, -4, -3\}$.
   (c) $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$. $A = [0, \frac{\pi}{2}]$, $B = [-1, 0]$.
   (d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x$, $A = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{4^n : n \in \mathbb{N}\}$.
   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [1, +\infty)$, $B = [4, 9]$.
4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} x + 7, & x \leq 0 \\ -2x + 5, & 0 < x < 3 \\ x - 1, & 3 \leq x \end{cases}$$
   Determinar la preimagen mediante f de cada uno de los siguientes intervalos:

   (a) $[-5, -1]$, (b) $[-5, 0]$, (c) $[-2, 4]$, (d) $(5, 10)$, (e) $[11, 17)$.

5. Dar un ejemplo de una función $f : A \to B$ y de dos subconjuntos A_1, A_2 de A de modo que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.
6. Determinar para cada uno de los ítems del ejercicio 3 si la función f es inyectiva y/o sobreyectiva.
7. Dar, en cada caso, un ejemplo de conjuntos finitos A y B con $|A|$, $|B| \geqq 4$, y una función f tal que:
   a) f no sea inyectiva ni sobre;
   b) f sea inyectiva pero no sobre;
   c) f sea sobre pero no inyectiva;
   d) f sea sobre e inyectiva.
8. Sea $f : A \to B$ una función y sean $A_1, A_2 \subseteq A$. Demostrar que si f es inyectiva, entonces $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

9. Determinar si cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es inyectiva y/o sobreyectiva. En caso de que no sea sobre, determinar su imagen.

   (a) $f(x) = x + 7$ (c) $f(x) = 2x - 3$ (e) $f(x) = x^2 + x$
   (b) $f(x) = x^2$ (d) $f(x) = -x + 5$ (f) $f(x) = x^3$.

10. Sea $f : A \to B$ una función y $A_1 \subseteq A$. Se denomina *restricción de* f a A_1 a la función $f_{|A_1} : A_1 \to B$ definida por $f_{|A_1}(x) = f(x)$ para cada $x \in A_1$.
    (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función parte entera. Probar que $f_{|\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}}$, donde $1_{\mathbb{Z}}$ es la función identidad en $\mathbb{Z}$.
    (b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2\pi x)$. Probar que $f_{|\mathbb{Z}}$ es la función constante igual a 1.
11. Sea $f : A \to B$ una función y $A_1 \subseteq A$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente la respuesta.
    (a) Si f es inyectiva, entonces $f_{|A_1}$ es inyectiva.
    (b) Si $f_{|A_1}$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
    (c) Si f es sobre, entonces $f_{|A_1}$ es sobre.
    (d) Si $f_{|A_1}$ es sobre, entonces f es sobre.
12. Si $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son funciones, definimos $h : A \times C \to B \times E$ por $h(a, c) = (f(a), g(b))$. Demostrar que h es biyectiva si y sólo si f y g son biyectivas.
13. Sean $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definidas por $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x$ y
    $$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es par;} \\ 1 & \text{si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$
    Determinar:

    (a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $g \circ h$ (d) $f \circ (g \circ h)$ (e) $(f \circ g) \circ h$

14. Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(n) = 2n$. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $f : A \to \mathbb{N}$ es la función dada por $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ encontrar $g \circ f$.
15. Sean S y T conjuntos (fijos) en un universo U dado. Definimos $g : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ por $g(A) = T \cap (S \cup A)$. Demostrar que $g \circ g = g$.
16. Para cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinar si f es invertible y, si lo es, determinar f^{-1}.

    (a) $f = \{(x, y) : 2x + 3y = 7\}$ (b) $f = \{(x, y) : y = x^3\}$. (c) $f = \{(x, y) : y = x^4 + x\}$.

17. Sean $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = x^2$. Demostrar que $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}$. ¿Es $g = f^{-1}$?
18. Demostrar que $f : \mathbb{R}_0^{+1} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = \sqrt{x}$ es invertible y hallar su inversa.
19. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida por
    $$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0 \\ -2x, & x \leq 0 \end{cases}$$
    Demostrar que f es biyectiva y hallar su inversa.
20. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Demostrar que
    a) $g \circ f : A \to C$ sobre $\Rightarrow$ g sobre.
    b) $g \circ f : A \to C$ inyectiva $\Rightarrow$ f inyectiva.