Álgebra Lineal - LM - PM - LCC **2018**

Práctica 2: ESPACIOS VECTORIALES

1. Analizar si los siguientes conjuntos con las operaciones definidas son espacios vectoriales.

   a) El conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$, con la suma y el producto por escalar usuales.

   b) El conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$, con la suma $x+y$ definida como $x.y$ y el producto cx como x^c.

   c) El conjunto de las funciones pares, con la suma y porducto por escalar usuales.

   d) El conjunto de las funciones continuas, con el producto cf definido como $(cf)(x) = f(cx)$ y la suma habitual de funciones.

   e) El conjunto de las funciones reales biyectivas, con el producto por escalar habitual y la suma $f + g$ definida como $(f + g)(x) = f(g(x))$.

   f) El conjunto de los polinomios a coeficientes reales de grado a lo sumo 3, incluído el polinomio nulo, con la suma y producto por escalar habituales.

   g) $\mathbb{R}^2$ con el producto por escalar habitual y la suma de $x = (x_1, x_2)^T$ e $y = (y_1, y_2)^T$ definida como $x + y = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)^T$.

2. Decir en cada caso que no resulte e.v., cuál es la propiedad que se está violando.
   Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial. En particular, sabemos que existe $0 \in V$ tal que $0 + x = x$ para todo $x \in V$; y que para todo $x \in V$ existe un vector $\bar{x}$ tal que $x + \bar{x} = 0$. Demostrar los siguientes enunciados.

   a) Unicidad del neutro: si $0' \in V$ es tal que $0' + x = x$ para todo $x \in V$, entonces $0' = 0$.

   b) Unicidad del opuesto: dado $x \in V$, si $\bar{x}' \in V$ es tal que $x + \bar{x}' = 0$, entonces $\bar{x}' = \bar{x}$.

   c) Propiedad cancelativa: si $z + x = z + y$ entonces $x = y$.

   d) $\alpha{\cdot}0 = 0, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

   e) $0{\cdot}v = 0, \forall v \in V$.

   f) $(-\alpha \cdot v) = \alpha \cdot (-v) = -(a \cdot v)$, donde $-v$ es el opuesto de $v, \forall v \in V$.

   g) Si $\alpha \cdot v = 0$ entonces $\alpha = 0$ o $v = O$.

3. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   a) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) con $b_1 = 0$.

   b) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) con $b_1 = 1$.

   c) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) con $b_1 b_2 b_3 = 0$.

   d) El conjunto formado por las 3-uplas (x, y, z) tal que $x + y - 2z = 4$.

   e) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) que son combinación lineal de $v = (1, 4, 0)$ y $w = (2, 2, 2)$.

   f) El conjunto formado por las 3-uplas (b_2, b_2, b_3) tal que $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

   g) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) que verifican $b_1 = b_2 = b_3$.

4. Mostrar que las dos propiedades que definen un subespacio vectorial (i.e. que la suma sea cerrada en el conjunto y que el producto por escalar también lo sea) son propiedades independientes una de otra. Para ello buscar un conjunto que sea cerrado bajo la suma pero no bajo el producto por escalar y otro conjunto que cumpla lo contrario.

5. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

   a) El conjunto de las matrices triangulares.

   b) El conjunto de las matrices singulares.

   c) El conjunto de las matrices simétricas.

6. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sean U y W subespacios de V. Probar que

$$U + W = \{v \in V : v = u + w, u \in U, w \in W\}$$

es un subespacio de V.

7. . Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   a) Describir un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a A y no a B.

   b) Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, debe contener también a $\mathbb{I}$.

8. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Para que vectores $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ los siguientes sistemas tienen solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

10. Dadas $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ probar que el espacio columna de AB está contenido en el espacio columna de A. Dar un ejemplo donde dicha contención sea estricta.

11. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{\infty}$?

    a) $\{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\infty} : \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\} es\ finito\}$.

    b) $\{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\infty} : \exists i_0 \in \mathbb{N} / x_i = 0, \forall i \geqslant i_0\}$.

    c) $\{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\infty} : x_i \geqslant x_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}\}$ (conjunto de sucesiones decrecientes).

    d) $\{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\infty} : \exists \lim\limits_{i\to\infty} x_i\}$ (conjunto de sucesiones convergentes).

    e) $\{x = (x_1, x_2, \cdots) \in \mathbb{R}^{\infty} : \exists c \in \mathbb{R} / x_{i+1} = c x_i, \forall i \in \mathbb{N}\}$ (conjunto de progresiones geométricas).

12. Probar el siguiente enunciado: Sean $U_1, U_2 \subset V$ subespacios. Luego $V = U_1 \oplus U_2$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:
    i) $V = U_1 + U_2$.
    ii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
    Encontrar un contraejemplo para demostrar que este resultado no puede extenderse a m subespacios.

13. Para cada uno de los siguientes conjuntos determinar si es un subespacio de $C(\mathbb{R})$ o explique por que no lo es

    a) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(x) \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

    b) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(0) = 0, \}$.

    c) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0, \}$.

    d) El conjunto de funciones constantes.

    e) $\{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

14. Dar un ejemplo de subespacio no vacío de $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que U sea cerrado bajo la multiplicación por escalares, pero que no sea un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

15. Sea $\mathbb{K}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$, y sea U el subespacio de $\mathbb{K}[x]$ dado por

$$U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{K}\}.$$

Encontrar un subespacio W de $\mathbb{K}[x]$ tal que $\mathbb{K}[x] = U \oplus W$.

16. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y sean W_1, W_2, W_3 son subespacios de V. Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones

    i) Si $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$ luego $W_1 = W_2$.

    ii) Si $W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3$ luego $W_1 = W_2$.

17. Sean A y B matrices tales que $AB = 0$. Demostrar que el espacio columna de B está contenido en el espacio nulo de A. ¿Qué sucede con el espacio fila de A y el espacio nulo de B^T?

18. Sean W_1, W_2 subespacios de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$. Comparar con el ejercicio 6 de la primera parte de la práctica.

19. Considere el espacio vectorial V de todas las funciones con dominio y codomimio igual a $\mathbb{R}$ (con la suma y producto por escalares usuales).
    Sean $V_i = \{f \in V : f \text{ es un función impar}\}$ y $V_p = \{f \in V : f \text{ es un función par}\}$. Probar que

    a) V_i y V_p son subespacios de V.

    b) $V_i + V_p = V$.

    c) $V_i \cap V_p = \{0\}$.

20. En el espacio vectorial de las matrices reales de orden 3, describir el subespacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

21. Sea $\langle S \rangle$ el subespacio generado por un subconjunto S de V. Demostrar las siguientes propiedades

    a) Si $S \subset T$, entonces $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$.

    b) $S \subset \langle S \rangle$.

    c) Si $S \subset T$ y T es un subespacio de V, entonces $\langle S \rangle \subset T$. Es decir que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.

    d) S es un subespacio de V si y sólo si $\langle S \rangle = S$.

    e) Si $\langle S \rangle = U$, entonces $\langle U \rangle = U$.

    f) Sea $W \subset V$. Entonces *i*)$\langle S \cap W \rangle \subset \langle S \rangle \cap \langle W \rangle$, *ii*)$\langle S \cup W \rangle \subset \langle S \rangle + \langle W \rangle$.

    g) Valen las contenciones inversas en los ítems *a*) y *f*).

22. Describir el menor subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a

    a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

    b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

    c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

23. Sea V el espacio vectorial de los polinomios en $\mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual a 3. Considere los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^3 + 2x^2 + 4, & p_4(x) &= 3x^3 + 6x^2 + 9x + 12, \\ p_2(x) &= 2x^3 + 5x^2 + 11x + 8, & p_5(x) &= x^3 + 3x^2 + 8x + 3. \\ p_3(x) &= x^2 + 5x, \end{aligned}$$

    Para $j \in \{4, 5\}$ determinar si $p_j \in \langle \{p_1, p_2, p_3\} \rangle$.

24. Analizar si los siguientes vectores son linealmente independientes

   a) $(1,1,0,0); (1,0,1,0); (0,0,1,1); (0,1,0,1)$.

   b) $(1,1,0); (1,0,0); (0,1,1); (x,y,z)$ para x, y, z cualesquiera.

25. Sea $P = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z - t = 0\}$. Verificar que P es un espacio vectorial y hallar 3 vectores linealmente independientes en P.

26. Probar que

   a) Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es *l.d.*

   b) Si S es *l.i.* entonces T es *l.i.* $\forall T \subset S$.

   c) Si S es *l.d.* entonces T es *l.d* $\forall T \supset S$.

27. Si $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ es un conjunto *l.i.*, probar que $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ también es *l.i.*

28. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

29. Sea $A = \{(1,-3,2)^t, (2,4,1)^t, (3,1,3)^t, (1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, obtener:

   a) Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

   b) Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

30. Sea $S = \langle\{(1,-1,1)^t, (2,1,0)^t, (4,-1,2)\} \subset \mathbb{R}^3$. Obtener una base de S.

31. Encontrar la dimensión de:

   a) el espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.

   b) el espacio nulo de la matriz $I \in \mathcal{M}_{4\times 4}$.

   c) el espacio de matrices simétricas 3×3. Hallar una base.

32. Describir los cuatro espacios asociados a las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

33. Dar en cada caso una matriz que cumpla las condiciones dadas o justificar porque no existe

   a) Su espacio columna está generado por los vectores $(1,0,0)^t, (0,0,1)^t$, y su espacio fila está generado por $(1,1)^t, (1,2)^t$.

   b) Su espacio columna tiene al vector $(1,1,1)^t$ como base y su espacio fila tiene como base al vector $(1,2,1)^t$.

   c) Su espacio columna contiene a los vectores $(1,1,0)^t, (1,0,1)^t$ pero no al vector $(1,1,1)^t$.

   d) Su espacio columna contiene a $(1,2,1)^t$, su espacio nulo contiene a $(-1,0,1)^t$ y tiene determinante -1.

34. Sea $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base para un espacio vectorial V.

   a) Demostrar que $B_2 = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ también es una base.

   b) Hallar la matriz de cambio de base $A \,/\, [v]_{B_1} = A\,[v]_{B_2}$

35. Sea $V = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,/\, a_i \in \mathbb{R} \right\}$ y $B_1 = \left\{1, x, x^2\right\}$ base estándar de V.

   a) Probar que $B_2 = \left\{x - 1, 1, (x-1)^2\right\}$ es otra base de V.

   b) Hallar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

c) Utilizar lo obtenido en el item anterior y determinar $[p]_{B_2}$ donde $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$. ¿Cuáles son las coordenadas de p en la base $\{1, (x-1)^2, x-1\}$?

36. Hallar la matriz de cambio de base de:

a) la base estándar de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a la base
$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.
Determinar $[A]_{B'}$ para $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) la base $\{1, x, -1 + 2x^2, -3x + 4x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ a la base $\{1, \frac{-1}{2} + x, -x + x^2, \frac{1}{4} - \frac{3}{2}x^2 + x^3\}$.

37. En el espacio $\mathbb{R}^2$ se considera la base estándar B.
Si $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, ¿existe una base B' tal que A sea la matriz de cambio de base de B a B'? De existir, hallar dicha base.