1. Generalidades

1. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & -1 \le x \le 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Determine:

   a) El valor de la constante k.

   b) $E(X)$ y $V(X)$.

   c) La función de distribución acumulada F.

   d) El valor x^* tal que $F(x^*) = \frac{1}{2}$. El valor x^* se denomina mediana de la variable aleatoria X.

   Soluciones

   a) $\int_{-1}^{0} kx^2 dx = k\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} = \frac{k0}{3} - \frac{-k}{3} = \frac{k}{3} = 1 \iff k = 3.$

   b)

   - $E(X) = \int_{-1}^{0} 3x^2 \cdot x dx = 3\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} = 0 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}.$
   - $E(X^2) = \int_{-1}^{0} 3x^2 \cdot x^2 dx = 3\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{0} = 0 + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$
   - $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$

   c) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ y^3|_{-1}^{x} = x^3 + 1 & -1 \le x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

   d) $F(x^*) = (x^*)^3 + 1 = \frac{1}{2} \iff x^* = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

2. El tiempo de funcionamiento (en horas) hasta que se produzca la primera falla en ciertas componentes, es una variable aleatoria Y, con función de distribución acumulada dada por

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y^2} & y \ge 0 \end{cases}$$

a) Determine la función densidad para la variable aleatoria Y.

b) Calcule la probabilidad de que una componente funcione por lo menos 200 horas.

Soluciones

a)

- $F(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y^2} = \int_0^y f(x)\,dx & y \geq 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-x^2}\right) = 2xe^{-x^2} & x \geq 0 \end{cases}$

b) $P(Y \geq 200) = 1 - F(200) = 1 - \left(1 - e^{-200^2}\right) = e^{-40000} \approx 0.$

3. La duración en horas de un cierto tipo de tubos es una variable aleatoria con función densidad dada por

$$f(t) = \begin{cases} \frac{100}{t^2} & t \geq 100 \\ 0 & t < 100 \end{cases}$$

a) Calcule la probabilidad de que un tubo dure menos de 200 horas cuando se sabe que aún funciona después de 150 horas.

b) Si se instalan tres de tales tubos, calcule la probabilidad de que uno de ellos dure a lo sumo 150 horas.

c) ¿Cuál es el número mínimo de tubos que hay que colocar en conjunto para que la probabilidad de que todos funcionen más de 150 horas sea menor o igual que $\frac{1}{2}$?.

Soluciones

- T: «Duración en horas de un cierto tipo de tubo».
- $F(t) = \begin{cases} 0 + \int_{100}^t f(x)\,dx = \frac{t-100}{t} & t \geq 100 \\ 0 & t < 100 \end{cases}$

a) $P\left(T \leq 200 | T \geq 150\right) = \frac{P(150 \leq T \leq 200)}{P(T \geq 150)} = \frac{F(200)-F(150)}{1-F(150)} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$.

b)

- Y : «Cantidad de tubos que duran al lo sumo 150 horas, de un total de 3». $Y \sim Bi\left(3, F\left(150\right)\right)$.
- $p\left(1\right) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{9}$.

c)

- Z : «Cantidad de tubos que duran al menos 150 horas, de un total de n». $Z \sim Bi\left(n, 1-F\left(150\right)\right)$.
- $p\left(n\right) = \binom{n}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \leq \frac{1}{2} \iff n > \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1,7095$.
- Deben colocarse al menos 2 tubos.

4. Un proceso químico puede producir un organismo de tipo A o B difíciles de distinguir. Un organismo de tipo A contiene una proporción x de una sustancia química que varía aleatoriamente con función densidad

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 4\left(1-x\right)^{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para un organismo de tipo B, la correspondiente función densidad es

$$g\left(x\right) = \begin{cases} 6x\left(1-x\right) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se propone clasificar el tipo de un organismo, en función de la proporción x de la sustancia química, con el siguiente criterio: si $x \leq \frac{1}{3}$ el organismo es clasificado de tipo A, y en otro caso, es clasificado de tipo B. Calcule la probabilidad de que un organismo de tipo A sea clasificado de tipo B.

Solución

- X : «Proporción de la sustancia química presente en el organísmo».
- $P\left(X > \frac{1}{3} / \text{el organismo es de tipo } A\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{1} 4\left(1-x\right)^{3} dx = -\left(x-1\right)^{4}\Big|_{\frac{1}{3}}^{1} = \frac{16}{81}$.

2. Distribución Uniforme

5. Se sabe que una variable aleatoria continua X tiene distribución uniforme en el intervalo $[1,4]$.

   a) Determine sus funciones densidad de probabilidades y de distribución acumulada.

   b) Halle $P(X>2)$.

   c) Halle $P(2<X<3)$.

   d) Halle $P\left(X<\frac{3}{2}\right)$.

   Soluciones

   a)
   - $\int_1^4 kdx = kx|_1^4 = 4k-k = 3k = 1 \iff k=\frac{1}{3}$.
   - $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 1\le x\le 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$
   - $F(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{1}{3}y|_1^x = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = \frac{x-1}{3} & 1\le x\le 4 \\ 1 & x>4 \end{cases}$

   b) $P(X>2) = 1-P(X\le 2) = 1-F(2) = 1-\frac{2-1}{3} = \frac{2}{3}$.

   c) $P(2<X<3) = F(3)-F(2) = \frac{3-1}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

   d) $P\left(X<\frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$.

6. El tiempo en minutos que una persona demora en ir de su casa a una estación de tren es una variable aleatoria T con distribución uniforme en el intervalo $[20,25]$.

   a) Calcule la probabilidad de que si la persona deja su casa a las 07:05:00, alcance el tren que parte a las 07:28:00.

   b) Calcule el tiempo promedio que la persona demora en realizar el trayecto desde su casa a la estación de tren.

Soluciones

- T : «Tiempo en minutos para ir desde la casa a la estación».
- $T \sim U\,[20, 25]$. $f\,(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 20 \leq t \leq 25 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$. $F\,(t) = \begin{cases} 0 & t < 20 \\ \frac{t-20}{5} & 20 \leq t \leq 25 \\ 1 & t > 25 \end{cases}$.
- $E\,(T) = \frac{20+25}{2} = \frac{45}{2}$. $V\,(T) = \frac{(25-20)^2}{12} = \frac{25}{12}$.

a) $P\,(T \leq 23) = F\,(23) = \frac{23-20}{5} = \frac{3}{5}$.

b) $E\,(T) = \frac{45}{2}$.

3. Distribución Exponencial y Erlang

7. La duración en horas de cierta componente electrónica es una variable aleatoria X con distribución exponencial de parámetro $\alpha = \frac{1}{100}$.

   a) Calcule $P\,(X \leq E\,(X))$.

   b) Calcule la mediana y la esperanza de X y compárelas.

   c) Un equipo está formado por tres de dichas componentes que funcionan independientemente. El equipo falla cuando fallan al menos dos componentes. Calcule la probabilidad de que el equipo funcione por lo menos 200 horas.

Soluciones

a) $P\,(X \leq E\,(X)) = P\,(X \leq 100) = F\,(100) = 1 - e^{-1} \approx 0,6321$.

b) $M\,(X) = \frac{\ln(2)}{1/100} \approx 69,3147 < 100 = E\,(X)$.

c)

- Y: «Cantidad de componentes que fallan antes de 200 horas de un total de tres». $Y \sim Bi\,(3; P\,(X < 200)) \approx Bi\,(3; 0,865)$.
- $1 - P\,(Y \geq 2) =$ COMPLETAR.

8. El número de accidentes en una fábrica se puede representar por un proceso de Poisson con promedio dos accidentes por semana.

   a) Calcule la probabilidad de que el tiempo entre dos accidentes sea mayor que 3 días.

   b) Calcule la probabilidad de que el tiempo hasta el tercer accidente sea mayor que 12 días.

Soluciones

- X_t: «Cantidad de accidentes en una fábrica en t días».
- $\lambda = \frac{2}{7}\frac{accidentes}{dias} =$. $X_t \sim Po\left(\lambda t\right)$.

a)

- Y: «Tiempo en días entre dos accidentes».
- $Y \sim Ex\left(\frac{2}{7}\right)$. $f\left(y\right) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{2}{7}e^{-\frac{2}{7}y} & y > 0 \end{cases}$. $F\left(y\right) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{2}{7}y} & y > 0 \end{cases}$.
- $P\left(Y > 3\right) = 1 - F\left(3\right) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{2}{7}3}\right) = e^{-\frac{6}{7}} \approx 0,42437$.

b)

- Z: «Tiempo en minutos hasta el tercer accidente». $Z \sim Er\left(\frac{2}{7}, 3\right)$.
- $f\left(z\right) = \begin{cases} \frac{2}{7}e^{-\frac{2}{7}z}\frac{\left(\frac{2}{7}z\right)^{3-1}}{(3-1)!} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$
- $F\left(z\right) = \begin{cases} 1 - \displaystyle\sum_{n=0}^{3-1} e^{-\frac{2}{7}z}\left(\frac{2}{7}z\right)^n \frac{1}{n!} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$
- $P\left(Z > 12\right) = 1 - F\left(12\right) = 1 - \left\{1 - \left[e^{-\frac{2}{7}12}\left(1 + \frac{2}{7}12 + \frac{4}{49}144\frac{1}{2}\right)\right]\right\} \approx 0,33426$.

9. El número de diarios que vende un canillita es una variable aleatoria X con distribución de Poisson con tasa 50 diarios/hora.

    a) Calcule la probabilidad de que transcurran más de dos minutos entre dos ventas.

    b) Si el canillita tarda 5 minutos en preparar y tomar un café, calcule la probabilidad de que realice esas acciones sin ser interrumpido por un cliente.

    c) Calcule el tiempo promedio que transcurre entre dos ventas.

    d) Calcule la probabilidad de que transcurran en total más de siete minutos para la siguiente venta, dado que ya han transcurrido cinco minutos desde la última.

    e) Calcule la probabilidad de que transcurran más de ocho minutos hasta la quinta venta.

    f) Calcule el tiempo promedio que transcurre hasta la quinta venta.

Soluciones

- X_t: «Numero de diarios vendidos en t minutos».
- $\lambda = \frac{50}{60}\frac{diarios}{minuto} = \frac{5}{6}\frac{diarios}{minutos}$. $X_t \sim Po\left(\lambda t\right)$. $P\left(X_t = k\right) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$.
- Y: «Tiempo en minutos entre dos ventas sucesivas».
- $Y \sim Ex\left(\frac{5}{6}\right)$. $f\left(y\right) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{5}{6}e^{-\frac{5}{6}y} & y > 0 \end{cases}$. $F\left(y\right) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{5}{6}y} & y > 0 \end{cases}$.

a) $P\left(Y \geq 2\right) = 1 - F\left(2\right) \approx 1 - 0,8111 = 0,1889$.

b) $P\left(Y \geq 5\right) = 1 - F\left(5\right) \approx 1 - 0,9845 = 0,0155$.

c) $E\left(Y\right) = \frac{6}{5}$.

d) $P\left(Y \geq 7 | Y \geq 5\right) = P\left(Y \geq 2\right) \approx 0,1889$.

e)

- Z: «Tiempo en minutos hasta la quinta venta». $Z \sim Er\left(\frac{5}{6}, 5\right)$.
- $f(z) = \begin{cases} \frac{5}{6} e^{-\frac{5}{6}z} \frac{\left(\frac{5}{6}z\right)^{5-1}}{(5-1)!} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$
- $F(z) = \begin{cases} 1 - \displaystyle\sum_{n=0}^{5-1} e^{-\frac{5}{6}z} \left(\frac{5}{6}z\right)^n \frac{1}{n!} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$
- $P(Z \geq 8) = 1 - F(8) = 1 - \left[1 - \displaystyle\sum_{n=0}^{4} e^{-\frac{5}{6}8} \left(\frac{5}{6}8\right)^n \frac{1}{n!}\right] =$

  $= \displaystyle\sum_{n=0}^{4} e^{-\frac{40}{6}} \left(\frac{40}{6}\right)^n \frac{1}{n!} = e^{-\frac{40}{6}} \left[\sum_{n=0}^{4} \left(\frac{40}{6}\right)^n \frac{1}{n!}\right] =$

  $= e^{-\frac{40}{6}} \left[1 + \frac{40}{6} + \left(\frac{40}{6}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{40}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \left(\frac{40}{6}\right)^4 \frac{1}{24}\right] \approx e^{-\frac{40}{6}} \cdot 161,576$

f) $E(Z) = \frac{5}{\frac{5}{6}} = 6$.

4. Distribución Normal

10. Pruebe que si Z es una variable aleatoria con distribución normal con media 0 y desvío estándar 1, entonces $P(-a < Z < a) = 2P(Z < a) - 1$.

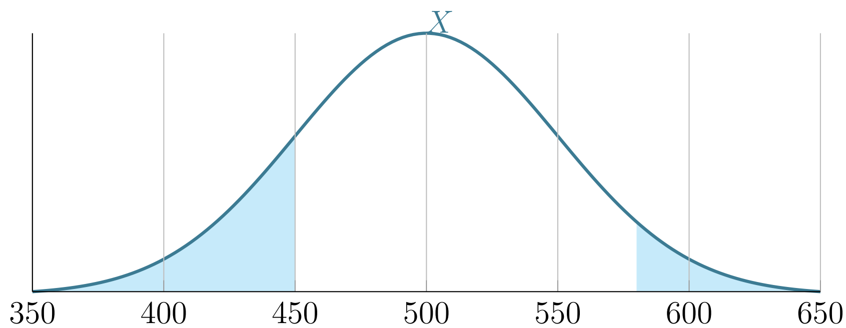
    Solución COMPLETAR.

11. El tiempo de duración de cierta pila es una variable aleatoria X normalmente distribuida con media $\mu = 500hs$ y desvío estándar $\sigma = 50hs$.

    a) ¿Qué porcentaje de pilas duran más de 580 hs?

    b) ¿Qué porcentaje de pilas duran menos de 450 hs?

Soluciones



a)

- $P(X \geq 580) = 1 - P(X < 580)$.
  - $Z = \frac{X-500}{50}$. $X < 580 \iff Z = \frac{X-500}{50} < \frac{580-500}{50} = \frac{8}{5}$.
  - $P(X \geq 580) = 1 - P\left(Z < \frac{8}{5}\right) \approx 1 - 0,9452 = 0,0548$.

b)

- $P(X < 450)$.
  - $X < 450 \iff Z = \frac{X-500}{50} < \frac{450-500}{50} = -1$.
  - $P(X < 450) = P(Z < -1) \approx 0,15866$.

12. Los alambres que se utilizan en cierta computadora deben tener una resistencia entre 0,12 y 0,14 ohms. Las resistencias de los alambres producidos por una empresa tienen una distribución normal con media $\mu = 0,13$ ohms y desviación estándar $\sigma = 0,005$ ohms. Si se utilizan cuatro de estos alambres, ¿cuál es la probabilidad de que los cuatro cumplan con las especificaciones?

    Solución COMPLETAR.

13. Supongamos que la duración de dos instrumentos electrónicos D_1 y D_2 tienen distribuciones normales con medias $\mu_1 = 40hs$, $\mu_2 = 45hs$ y desvíos estándares $\sigma_1 = 36hs$ y $\sigma_2 = 9hs$ respectivamente.

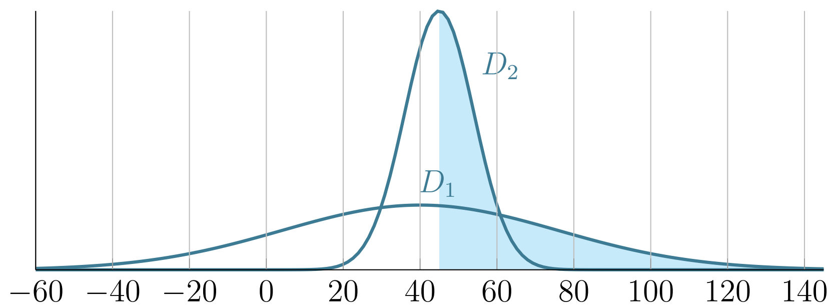
    a) ¿Cuál debería preferirse para ser usado durante un período de 45 hs?

    b) ¿Cuál debería preferirse para ser usado durante un período de 48 hs?

Soluciones

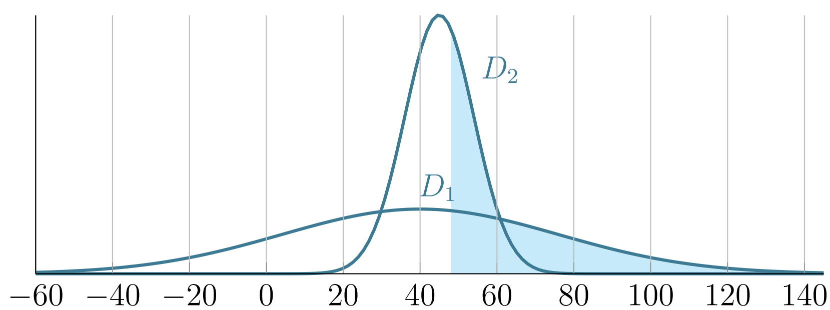
- D_i: «Duración en horas del instrumento i».
- $D_1 \sim N(40hs, 36hs)$. $D_2 \sim N(45hs, 9hs)$.

a)



- $P(D_1 \geq 45) = 1 - P(D_1 < 45)$.
  - $Z_1 = \frac{D_1 - 40}{36}$. $D_1 < 45 \iff Z_1 = \frac{D_1 - 40}{36} < \frac{45-40}{36} = \frac{5}{36}$.
  - $P(D_1 \geq 45) = 1 - P\left(Z_1 < \frac{5}{36}\right) \approx 1 - 0,55567 = \boxed{0,44433}$.
- $P(D_2 > 45) = 1 - P(D_2 < 45)$.
  - $Z_2 = \frac{D_2 - 45}{9}$ $D_2 < 45 \iff Z_2 < 0$.
  - $P(D_2 \geq 45) = 1 - P(Z_2 < 0) = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.
- Es preferible usar D_2.

b)

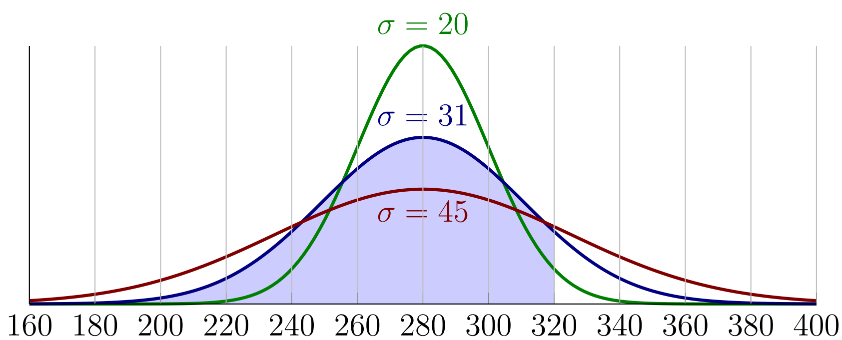


- $P(D_1 \geq 48) = 1 - P(D_1 < 48)$.
  - $Z_1 = \frac{D_1 - 40}{36}$. $D_1 < 48 \iff Z_1 = \frac{D_1 - 40}{36} < \frac{48-40}{36} = \frac{8}{36}$.
  - $P(D_1 \geq 48) = 1 - P\left(Z_1 < \frac{8}{36}\right) \approx 1 - 0,58706 = \boxed{0,41294}$.

- $P(D_2 > 48) = 1 - P(D_2 < 48)$.
  - $Z_2 = \frac{D_2 - 45}{9}$. $D_2 < 48 \iff Z_2 < \frac{48-45}{9} = \frac{1}{3}$.
  - $P(D_2 \geq 48) = 1 - P\left(Z_2 < \frac{1}{3}\right) \approx 1 - 0,6293 = \boxed{0,3707}$.
- Es preferible usar D_1.

14. El tiempo de duración de una batería tiene una distribución normal con media 280 hs. Determine el máximo valor admisible para el desvío estándar si se desea que la batería funcione menos de 320 hs. con probabilidad $\frac{90}{100}$.

Solución



- $P(X < 320)$.
  - $Z = \frac{X-280}{\sigma}$. $X < 320 \iff Z = \frac{X-280}{\sigma} < \frac{320-280}{\sigma} = \frac{40}{\sigma}$.
  - $P(X < 320) = P\left(Z < \frac{40}{\sigma}\right) = \frac{90}{100} \iff \sigma \approx 31$.

15. La venta semanal de nafta (en toneladas) de una estación de servicio es una variable aleatoria X con distribución normal con media 100 y desvío estándar 10. Suponiendo que el camión de suministro viene una vez por semana, calcule la capacidad que debe tener la cisterna de la estación para poder satisfacer la demanda de sus clientes con probabilidad $\frac{99}{100}$.

Solución COMPLETAR.

16. La producción anual en una fábrica es una variable aleatoria X con distribución normal con media μ y desvío estándar σ. El 90 % de los años la producción es inferior a 1300 y el 40 % de los años es superior a 1100. Halle la probabilidad de que la producción durante un año sea superior a 1000.

    Solución COMPLETAR.

17. Se desea ajustar una máquina para envasar café en frascos de 180 grs. Se conoce que el envasado de café varía aleatoriamente con distribución normal y desvío estándar $\sigma = 5grs$. Determine el máximo valor posible para el ajuste (μ), de modo que la probabilidad de volcar café en el proceso de envasado sea a lo sumo $\frac{2}{100}$.

    Solución COMPLETAR.

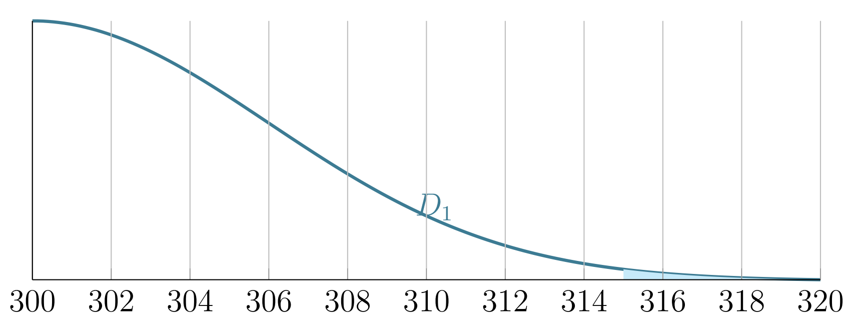
18. La bebida «Delicia Jamaiquina» se vende en latas de 315 ml. El volumen promedio que vierte la máquina llenadora en una lata es 300 ml, con desvío estándar 6 ml. Si se supone que el volumen de bebida vertido por la llenadora sigue una distribución normal.

    a) ¿Cuál es la probabilidad que la máquina llenadora provoque un derrame en una lata?

    b) Las especificaciones del contenido son 300 ± 20 ml. ¿Qué proporción de latas cumple con el requisito?

    Soluciones

    - X: «Volumen vertido por la llenadora en ml». $X \sim N\,(300ml, 6ml)$.



a)

- $P(X > 315) = 1 - F(315)$.
  - $Z = \frac{X-300}{6}$. $X < 315 \Rightarrow Z < \frac{315-300}{6} = \frac{15}{6} = 2,5$.
  - $P(X > 315) = 1 - P(Z < 2,5) \approx 1 - 0,99379 = 0,00621$.

b)

- $P(X > 280) = 1 - P(X < 280)$.
  - $X < 280 \iff Z < \frac{280-300}{6} = -\frac{10}{3}$.
  - $P(X > 280) = 1 - P\left(Z < -\frac{10}{3}\right) \approx 1 - 0,99957$.

5. Función de variable aleatoria

19. El número de días necesarios para concluir cierto proyecto de construcción es una v. a. X con distribución:

x	10	11	12	13	14
$p(x)$	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

y la ganancia del contratista es $Y = 1000(12 - X)$.

a) Determine la distribución de probabilidad de Y.

b) Calcule $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$ y $V(Y)$.

Soluciones

a)

y	2000	1000	0	-1000	-2000
$p(y)$	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

b)

- $E(X) = 10 \cdot 0,2 + 11 \cdot 0,3 + 12 \cdot 0,3 + 13 \cdot 0,1 + 14 \cdot 0,1 = 11,6$.
- $E(X^2) = 10^2 \cdot 0,2 + 11^2 \cdot 0,3 + 12^2 \cdot 0,3 + 13^2 \cdot 0,1 + 14^2 \cdot 0,1 = 136$.
- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 136 - 11,6^2 = 1,44$.
- COMPLETAR.
- COMPLETAR.

- COMPLETAR.

20. Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $p(x) = \frac{x}{6}$, donde $x = 1, 2, 3$ e $Y = (X-2)^2$.

    a) Determine la distribución de probabilidad de Y.

    b) Calcule $E(Y)$ y $V(Y)$.

    Soluciones

    a)

    - $y = 0 \iff x = 2$.
    - $y = 1 \iff x = 1 \vee x = 3$.

y	0	1
$p(y)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$

    b)

    - $E(Y) = 0 + \frac{4}{6} = \frac{4}{6}$.
    - $E(Y^2) = 0 + \frac{4}{6} = \frac{4}{6}$.
    - $V(Y) = \frac{4}{6} - \frac{16}{36} = \frac{8}{36}$.

21. El contenido de magnesio en una aleación es una v. a. con función de densidad $f_X(x) = \frac{x}{18}$, $0 \leq x \leq 6$. La ganancia que se obtiene de la aleación es $G = 10 + 2X$.

    a) Determine la distribución de densidad de G.

    b) Calcule $E(G)$.

    Soluciones

    a)

    - $0 \leq x \leq 6 \iff 0 \leq 2x \leq 12 \iff 10 \leq g \leq 22$
    - $P(G \leq g) = P(10 + 2X \leq g) = P\left(X \leq \frac{g-10}{2}\right) = \int\limits_0^{\frac{g-10}{2}} \frac{x}{18} dx =$

      $= \left.\frac{x^2}{36}\right|_0^{\frac{g-10}{2}} = \frac{1}{144}\left(g^2 - 20g + 100\right)$

- $F_G(g) = \begin{cases} 0 & g < 10 \\ \frac{1}{144}\left(g^2 - 20g + 100\right) & 10 \leq g \leq 22 \\ 1 & g > 22 \end{cases}$
- $f_G(g) = \begin{cases} \frac{d}{dg}\frac{1}{144}\left(g^2 - 20g + 100\right) = \frac{1}{72}(g - 10) & 10 \leq g \leq 22 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Alternativa

$$f_G(g) = f_X\left(\frac{g-10}{2}\right)\left|\frac{d}{dg}\left(\frac{g-10}{2}\right)\right| = \frac{g-10}{36}\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{72}(g-10)$$

b)

- $E(X) = \int_0^6 x \cdot \frac{x}{18} dx = \left.\frac{x^3}{54}\right|_0^6 = 4.$
- $E(G) = E(10 + 2X) = 10 + 2E(X) = 10 + 8 = 18$

22. Determine la función densidad de la variable aleatoria Y, siendo $Y = 4 - X^2$ y $X \sim U[-1, 1]$.

    Solución COMPLETAR.

23. Un cierto tipo de instrumento electrónico tiene una duración X (en unidades de 1.000 hs.) que varía aleatoriamente con función densidad $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. El costo de fabricar tal instrumento es de \$2. El fabricante vende el instrumento por \$5, pero garantiza un reembolso total si $X \leq 0,9$. Determine la esperanza matemática de la utilidad por instrumento.

    Solución COMPLETAR.

24. Un lote de 10 motores eléctricos es vendido o rechazado según el resultado del siguiente proceso de inspección. Se eligen al azar dos motores y se inspeccionan. Si al menos uno es defectuoso el lote es rechazado, de lo contrario se acepta. El costo de fabricar un motor es de \$75 y se vende por \$100. Si el lote contiene 1 motor defectuoso, calcule la esperanza matemática de la utilidad por lote.

Solución COMPLETAR.

25. Considere una v.a. $X \sim U[0,1]$. Halle la función de densidad de la v.a. Y cuando:

    a) $Y = a + (b-a)X$, $b > a$.

    b) $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(X)$, $\lambda > 0$.

    Soluciones

    a) COMPLETAR.

    b) COMPLETAR.

26. Sea X una variable aleatoria con distribución binomial con parámetros n y p. Hallar la distribución de la variable aleatoria $Y = n - X$.

    Solución COMPLETAR.

27. En una empresa embotelladora de jugos, la cantidad de líquido por botella es una v. a. $X \sim N(500ml, 30ml)$.

    a) Calcule la probabilidad de que una botella contenga menos de 430 ml.

    b) Las botellas se venden en pack de 12 de ellas. Calcule la probabilidad de que, en un pack, por lo menos 3 de ellas contengan menos de 430 ml.

    c) El costo de producción de cada botella es \$0,20 y cada pack se vende al supermercadista a \$4,80. Si en el pack se detectan 3 o más unidades con menos de 430 ml, el pack se considera defectuoso y la empresa reembolsa al supermercadista el doble del dinero recibido por el pack. Calcule la ganancia promedio por cada pack.

    Soluciones

    a) COMPLETAR.

    b) COMPLETAR.

    c) COMPLETAR.

28. El intervalo de tiempo empleado en determinado trabajo en la construcción de una casa es una variable aleatoria X cuya distribución es exponencial con un promedio de 10 horas. El costo de ese trabajo es $C = 100 + 40X + 3X^2$. Calcule la esperanza matemática de C. ¿Espera que el valor de C sea mayor que \$2000 con mucha frecuencia?

    Solución COMPLETAR.