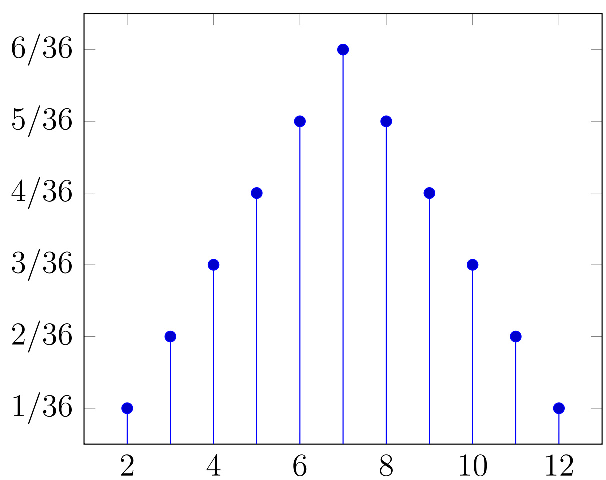
# 1. Generalidades

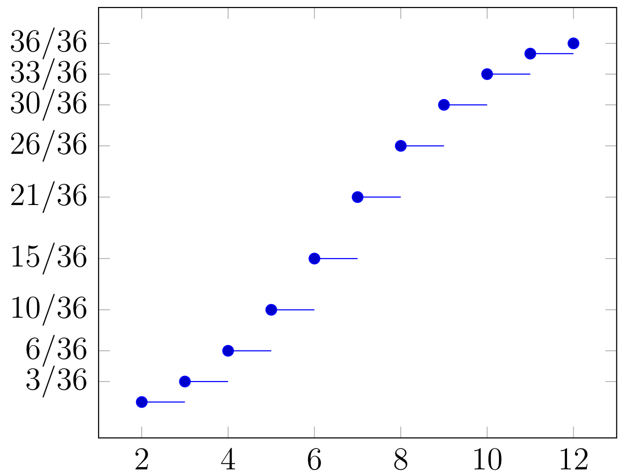
1. Se arrojan en forma sucesiva dos dados. Sea $X$ la suma de los números observados. Determine el recorrido de $X$ y represente la función de probabilidad puntual y la distribución acumulada para la variable $X$. Calcule e interprete la esperanza matemática, varianza y desvío estándar de $X$.

**Solución**

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |



| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X \leq x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{15}{36}$ | $\frac{21}{36}$ | $\frac{26}{36}$ | $\frac{30}{36}$ | $\frac{33}{36}$ | $\frac{35}{36}$ | $\frac{36}{36}$ |




- $E(X) = \sum_{i=2}^{12} x_i p(x_i) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7.$
- $E(X^2) = \sum_{i=2}^{12} x_i^2 p(x_i) = 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + 4^2 \cdot \frac{3}{36} + 5^2 \cdot \frac{4}{36} + \ldots + 12^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1974}{36}.$
- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1974}{36} - 49 = \frac{1974}{36} - \frac{1764}{36} = \frac{210}{36}.$
- $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{210}}{6}.$

2. La función de distribución acumulada $F(t)$ de una variable aleatoria $T$ es:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ \frac{1}{3} & 3 \leq t < 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \leq t < 5 \\ \frac{2}{3} & 5 \leq t < 6 \\ 1 & 6 \leq t \end{cases}$$

*a*) Determine la función de probabilidad puntual de la variable aleatoria $T$.

*b*) Calcule $P(3 < T \leq 5)$.

*c*) Calcule e interprete la esperanza matemática, varianza y desvío estándar de $T$.

**Soluciones**

*a*)

- $p(3) = F(3) = \frac{1}{3}$.
- $p(4) = F(4) - F(3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
- $p(5) = F(5) - F(4) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.
- $p(6) = F(6) - F(5) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

*b*) $P(3 < T \leq 5) = p(4) + p(5) = \frac{2}{6}$.

*c*)

- $E(X) = \displaystyle\sum_{i=3}^{6} x_i p(x_i) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{27}{6}$.
- $E(X^2) = \displaystyle\sum_{i=3}^{6} x_i^2 p(x_i) = 3^2 \cdot \frac{1}{3} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{131}{6}$.
- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{131}{6} - \frac{27}{6} = \frac{104}{6}$.
- $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{104}{6}}$.

3. La siguiente tabla muestra la función de distribución acumulada de una variable aleatoria $X$:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X \leq x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 |

Determine:

*a*) La función de probabilidad puntual de $X$.

*b*)

1) $P(1 \leq X \leq 3)$,
2) $P(X < 3)$ y
3) $P(X > 1,4)$.

*c*) Calcule e interprete la esperanza matemática, varianza y desvío estándar de $X$.

**Soluciones**

*a*)

- $p(1) = F(1) = \frac{1}{8}$.
- $p(2) = F(2) - F(1) = \frac{2}{8}$.
- $p(3) = F(3) - F(2) = \frac{3}{8}$.
- $p(4) = F(4) - F(3) = \frac{2}{8}$.

*b*)

1) $P(1 \leq X \leq 3) = p(1)+p(2)+p(3) = F(3) = \frac{3}{4} = P(X \leq 3)$.
2) $P(X < 3) = p(1) + p(2) = F(2) = P(X \leq 2) = \frac{3}{8}$.
3) $P(X > 1,4) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = \frac{7}{8}$.

*c*)

- $E(X) = 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + 4 \cdot p(4) = \frac{22}{8}$.
- $E(X^2) = 1^2 p(1) + 2^2 p(2) + 3^2 p(3) + 4^2 p(4) = \frac{68}{8}$.
- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{68}{8} - \frac{22}{8} = \frac{46}{8}$.

# 2. Algunas variables aleatorias discretas famosas

4. A fin de verificar sus estados financieros las compañías tienen auditores permanentes para revisar los asientos contables. Se sabe que un empleado efectúa un asiento erróneo con probabilidad $\frac{5}{100}$. Un auditor verifica 3 asientos al azar.

   *a*) Encuentre la distribución de probabilidad de la v. a. $Y$: «número de asientos erróneos detectados».

   *b*) Calcule la probabilidad de que el auditor detecte más de un error.

**Nota** No se considera la posibilidad de que el auditor cometa errores.

**Soluciones**

*a*)

- $\mathcal{E}$: «Se auditan tres asientos al azar».
- $A = \{\text{El asiento tiene errores}\}$. $P(A) = \frac{5}{100}$.
- Si consideramos que el tamaño de la muestra es despreciable con relación al tamaño de la población, luego $Y \sim B\left(3, \frac{5}{100}\right)$.
- $p(0) = \binom{3}{0}\left(\frac{5}{100}\right)^0\left(\frac{95}{100}\right)^{3-0} = \left(\frac{95}{100}\right)^3$.
- $p(1) = \binom{3}{1}\left(\frac{5}{100}\right)^1\left(\frac{95}{100}\right)^{3-1} = 3\cdot\left(\frac{5}{100}\right)\left(\frac{95}{100}\right)^2$.
- $p(2) = \binom{3}{2}\left(\frac{5}{100}\right)^2\left(\frac{95}{100}\right)^{3-2} = 3\cdot\left(\frac{5}{100}\right)^2\left(\frac{95}{100}\right)$.
- $p(3) = \binom{3}{3}\left(\frac{5}{100}\right)^3\left(\frac{95}{100}\right)^{3-3} = \left(\frac{5}{100}\right)^3$.

*b*) $p(2) + p(3) = 3\cdot\left(\frac{5}{100}\right)^2\left(\frac{95}{100}\right) + \left(\frac{5}{100}\right)^3$.

5. Considere en la situación del problema anterior la v. a. $Z$: «número de asientos revisados hasta encontrar el primer asiento erróneo».

   *a*) Determine el recorrido de $Z$.

   *b*) Calcule $P(Z=5)$.

   **Soluciones**

   *a*) $R_Z = \mathbb{N}$.

   *b*) $Z \sim G\left(\frac{5}{100}\right)$. $P(Z=5) = \left(\frac{95}{100}\right)^{5-1}\left(\frac{5}{100}\right) = \left(\frac{95}{100}\right)^{4}\left(\frac{5}{100}\right)$.

6. De un lote de 20 artículos 4 son defectuosos. Se eligen al azar 3 artículos. Sea $X$: «número de artículos defectuosos encontrados». Determine la distribución de $X$ cuando los artículos se extraen con reposición y cuando se extraen sin reposición. En ambos casos calcular la función de probabilidad acumulada.

   **Solución**

   - $\mathcal{E}$: «Extracción de tres artículos con reposición».
   - $D = \{\text{Artículo defectuoso encontrado}\}$. $P(D) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.
   - $X \sim B\left(3, \frac{1}{5}\right)$. $R_X = \{0, \ldots, 3\}$. $P(X=x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{3-x}$.

   - $p(0) = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3$.
   - $p(1) = 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2$.
   - $p(2) = 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)$.
   - $p(3) = 1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3$.

   - $F(0) = p(0)$.
   - $F(1) = F(0) + p(1)$.
   - $F(2) = F(1) + p(2)$.
   - $F(3) = 1$.

- $\mathcal{E}'$: Extracción de tres artículos sin reposición.
- $X' \sim H(20, 4, 3)$. $R_{X'} = R_X$. $P(X = x) = \frac{\binom{4}{x} \cdot \binom{20-4}{3-x}}{\binom{20}{3}}$.
- COMPLETAR.

7. Un lote de 25 piezas contiene 3 que son defectuosas. Un comprador utiliza el siguiente plan de muestreo para la aceptación: «Si en una muestra de tamaño 5 (donde las extracciones se realizan sin reposición) encuentra al menos una pieza defectuosa, rechaza el lote; de lo contrario lo acepta».

   Calcule la probabilidad de que el lote sea aceptado. Además, halle el número promedio de lotes rechazados, cuando se inspeccionaron 100 lotes.

   **Solución**

   - $\mathcal{E}$: «Extracción de tres artículos sin reposición».
   - $D = \{\text{Artículo defectuoso encontrado}\}$. $P(D) = \frac{3}{25}$.
   - $X$ : «Numero de piezas defectuosas en una muestra de tamaño 5».
   - $X \sim H(25, 3, 5)$. $R_X = \{0, \ldots, 3\}$. $P(X = x) = \frac{\binom{3}{x} \cdot \binom{25-3}{5-x}}{\binom{25}{5}}$.
   - $P(X = 0) = \frac{1 \cdot \binom{22}{5}}{\binom{25}{5}} = \frac{26334}{53130}$.
   - $Y$ : «Numero de lotes rechazados de un total de 100 lotes».
   - $Y \sim B\left(100, \frac{26334}{53130}\right)$. $E(Y) = 100 \cdot \frac{26334}{53130} \approx 49,56$.

8. Supongamos que un mecanismo es inspeccionado regularmente al finalizar cada día para chequear si aún funciona correctamente. Sea $p$ la probabilidad del suceso «el mecanismo falla durante cualquier día dado». Considere la variable aleatoria $X$: «número de inspecciones necesarias para obtener la primera falla».

   *a*) Determine la distribución de probabilidades de $X$.

   *b*) Halle la probabilidad de que sean necesarios 5 días para encontrar la primera falla.

   *c*) Halle $p$ de modo que la probabilidad hallada en b) sea máxima.

**Soluciones**

*a*) $X \sim G(p)$. $P(X = x) = q^{x-1}p$.

*b*) $P(X = 5) = q^4 p$.

*c*) Sea $f(q) = q^4(1-q) = q^4 - q^5$ con $q \in [0,1]$.

- $f'(q) = -q^3(5q-4)$. $f'(q) = 0 \iff q = 0 \vee q = \frac{4}{5}$.
- $f''(q) = 12q^2 - 20q^3$. $f''(0) = 0$. $f''\left(\frac{4}{5}\right) < 0 \Rightarrow \frac{4}{5}$ es máximo local.
- $f(0) = 0$. $f\left(\frac{4}{5}\right) \approx 0{,}082$. $f(1) = 0$.
- $\therefore$ para que la probabilidad hallada en b) sea máxima debera ser:
$$q = \frac{4}{5} \iff p = \frac{1}{5}$$

9. Un «gran» lote de llantas para autos contiene el 20 % de llantas defectuosas. De ese lote se seleccionarán 5 llantas para colocar en un auto.

*a*) Calcule la probabilidad de que sea necesario seleccionar 8 llantas del lote para obtener 5 en buen estado.

*b*) Calcule el número promedio de selecciones para obtener 5 llantas en buen estado.

**Soluciones**

*a*)

- $\mathcal{E}$ : «Se extrae una llanta del lote».
- $D = \{\text{La llanta es defectuosa}\}$. $P(D) = \frac{20}{100}$. $P\left(\overline{D}\right) = \frac{80}{100}$.
- $X$ : «Número repeticiones necesarias hasta encontrar 5 en buen estado».
- Como el tamaño poblacional es «grande», podemos aproximar la variable con una distribución de Pascal.
$X \sim P\left(5, \frac{80}{100}\right)$. $P(X = x) = \binom{x-1}{5-1}\left(\frac{80}{100}\right)^5\left(\frac{20}{100}\right)^{x-5}$.
- $P(X = 8) = \binom{7}{4}\left(\frac{80}{100}\right)^5\left(\frac{20}{100}\right)^3 = 35 \cdot \frac{3276800000}{10000000000} \cdot \frac{8000}{1000000} \approx 0{,}917$.

*b*) $E(X) = 5/\frac{80}{100} = 6{,}25$.

10. El número de moléculas que hay en un $cm^3$ de aire es una v. a. con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 3$.

   *a*) Calcule la probabilidad de que en $1cm^3$ de aire no se encuentre ninguna molécula.

   *b*) Calcule la probabilidad de que en $1cm^3$ de aire se encuentre a lo sumo dos moléculas.

   *c*) ¿Cuál es el mínimo volumen de aire en el que la probabilidad de encontrar por lo menos una molécula es mayor o igual que 0,99?

**Soluciones**

   *a*) $P(X=0) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} = e^{-3}$.

   *b*) $P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = e^{-3} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} + \frac{e^{-3}3^2}{2!} = \frac{17}{2}e^{-3}$.

   *c*) Recordemos que $\lambda$ representa el número de moléculas esperadas en un $cm^3$ de aire.

      - $Y_v$ : «Número de moléculas en $v$ $cm^3$ de aire».
      - $Y_v \sim P(v\lambda)$. $P(Y_v = y) = \frac{e^{-v\lambda}(v\lambda)^y}{y!}$.

   $$P(Y_v \geq 1) \geq 0,99 \iff P(Y_v = 0) \leq 0,01 \iff e^{-v3} \leq 0,01$$

   $$\iff -3v \leq \ln(0,01) \approx -4,605 \iff v \gtrsim \frac{4,605}{3} = 1,535$$

11. Se sabe que el número de grietas que aparecen en una longitud dada de palanquilla sigue una ley de Poisson. ¿Qué valor debe tener el promedio de grietas por metro, para que la probabilidad de encontrar al menos una grieta en 4 metros sea menor que 0.5?

**Solución** Sean $\lambda$ el numero de grietas por metro y $X_v$ : «Numero de grietas en $v$ metros», luego:

$$P(X_4 \geq 1) < \frac{1}{2} \iff 1 - P(X_4 = 0) \leq \frac{1}{2} \iff 1 - \frac{e^{-4\lambda}(4\lambda)^0}{0!} < \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff \frac{1}{2} < e^{-4\lambda} \iff \ln\left(\frac{1}{2}\right) < -4\lambda \iff \lambda < -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{4} \approx 0,17328$$

12. El número de clientes que entran en un negocio es una v. a. de Poisson con tasa 30 clientes/hora.

    *a*) Calcule la probabilidad de que en un período de 2 minutos no ingresen clientes al negocio.

    *b*) Se observa el número de clientes que ingresan al negocio durante 15 intervalos de 2 minutos. Calcule la probabilidad de que en a lo sumo 5 de esos intervalos no se registren ingresos.

    **Solución**

    *a*)
    - $X \sim P\left(\frac{30}{60} \cdot 2\right)$. $P(X = x) = \frac{e^{-1}1^x}{x!}$.
    - $P(X = 0) = \frac{e^{-1}1^0}{0!} = e^{-1}$.

    *b*)
    - $Y$ : «Numero de intervalos de 2 minutos en los que no ingresan clientes de un total de 15 intervalos».
    - $Y \sim B(15, e^{-1})$. $P(Y \leq 5) = \sum_{i=0}^{5} \binom{15}{i} p^i q^{15-i} \approx 0,5057$.

13. El número de defectos en un rollo de alambre de 100 metros es una v. a. con distribución de Poisson de tasa $\lambda$. La probabilidad de que un rollo de 100 metros de alambre tenga al menos un defecto es $\frac{40}{100}$.

    *a*) Calcule la probabilidad de que en 50 metros de alambre se encuentren a lo sumo dos defectos.

    *b*) Calcule la probabilidad de que en 10 rollos de 100 metros de alambre c/u, haya a lo sumo uno con uno o más defectos.

    *c*) Calcule la esperanza matemática de la variable aleatoria «número de rollos de 100 metros entre los 10 rollos, que tienen al menos un defecto».

**Soluciones**

*a*)

- $P\left(X_{100} \geq 1\right) = \frac{40}{100} \iff 1 - p\left(0\right) = \frac{40}{100} \iff$
$\iff \frac{60}{100} = \frac{e^{-100\lambda}(100\lambda)^0}{0!} \iff 100\lambda = -\ln\left(\frac{60}{100}\right) \iff \lambda \approx 0,005$
- $P\left(X_{50} \leq 2\right) = e^{-50\lambda} + e^{-50\lambda} \cdot 50\lambda + \frac{e^{-50\lambda}(50\lambda)^2}{2} \approx 0,9978$

*b*) COMPLETAR.

*c*) COMPLETAR.

# 3. Práctica suplementaria

1. Una variable aleatoria $X$ puede tomar cuatro valores: 0, 10, 20 o 30 con probabilidades $\frac{(1+3a)}{4}$, $\frac{(1-a)}{4}$, $\frac{(1+2a)}{4}$, $\frac{(1-4a)}{4}$, respectivamente.

   *a*) Averigüe el o los valores de $a$ para que ésta sea una distribución de probabilidades.

   *b*) Para los valores de a) hallados, obtenga:

   1) $E\left(2X+1\right)$.
   2) $V\left(2X+1\right)$.

**Soluciones**

*a*)

- $\frac{(1+3a)}{4} + \frac{(1-a)}{4} + \frac{(1+2a)}{4} + \frac{(1-4a)}{4} = 1 \iff \frac{4}{4} = 1.$
- $0 \leq \frac{(1+3a)}{4} \leq 1 \iff -1/3 \leq a \leq 1.$
- $0 \leq \frac{(1-a)}{4} \leq 1 \iff -3 \leq a \leq 1.$
- $0 \leq \frac{(1+2a)}{4} \leq 1 \iff -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}.$
- $0 \leq \frac{(1-4a)}{4} \leq 1 \iff -\frac{3}{4} \leq a \leq \frac{1}{4}.$
- $\therefore -1/3 \leq a \leq 1/4.$

*b*)

1) COMPLETAR.
2) COMPLETAR.

2. La función de probabilidad puntual de una variable aleatoria $X$ que determina la ganancia en millones de dólares de una empresa si realiza una determinada operación está definida de la siguiente manera:

| $x$ | $-2$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |

Halle:

a) Cuánto espera ganar la empresa al realizar la operación.

b) $E(-X)$.

c) $V(X)$.

**Soluciones**

a) $E(X)=(-2)\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{2}=1$.

b) $E(-X)=(-1)\cdot E(X)=-1$.

c) $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\left[4\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{2}\right]-1=5$.

3. Un aparato consta de 15 componentes que funcionan independientemente. La probabilidad de funcionamiento de una componente en un período de tiempo $t$ es 0,97. Calcule la probabilidad de que en un período de tiempo $t$,

a) fallen 2 componentes,

b) fallen a lo sumo 2 componentes,

c) fallen por lo menos 2 componentes,

d) funcionen por lo menos 13 componentes.

**Soluciones**

- $X$ : «Cantidad de componentes que fallan en un período de tiempo $t$, de un total de 15 componentes independientes».
- $X\sim B\left(15,\frac{3}{100}\right)$. $P(X=x)=\binom{15}{x}\left(\frac{3}{100}\right)^x\left(\frac{97}{100}\right)^{15-x}$.

*a*) $P(X=2)=\binom{15}{2}\left(\frac{3}{100}\right)^2\left(\frac{97}{100}\right)^{15-2}=105\cdot\frac{9}{10000}\cdot\left(\frac{97}{100}\right)^{13}\approx 0,063.$

*b*) $P(X\leq 2)=p(0)+p(1)+p(2)\approx 0,99.$

*c*) $P(X\geq 2)=1-P(X<2)\approx 0,347.$

*d*) $P(X\leq 2)\approx 0,99.$

4. Un fabricante de piezas las envía a sus clientes en lotes de 20. La probabilidad de que una pieza resulte defectuosa es $\frac{6}{100}$.

   *a*) Calcule la probabilidad de que un lote no contenga piezas defectuosas.

   *b*) Calcule la esperanza matemática de número de piezas defectuosas por lote e interprete su significado.

   *c*) Si un cliente recibe 10 lotes, calcule la esperanza matemática de la v. a. $Y$: «número de lotes que tienen a lo sumo una pieza defectuosa».

**Soluciones**

- $D=\{\text{Pieza defectuosa}\}$. $P(D)=\frac{6}{100}$.
- $X$: «número de piezas defectuosas en un lote de 20».
- $X\sim B\left(20,\frac{6}{100}\right)$. $P(X=x)=p(x)=\binom{20}{x}\cdot\left(\frac{6}{100}\right)^x\cdot\left(\frac{94}{100}\right)^{20-x}$.

*a*) $p(0)=1\cdot 1\cdot\left(\frac{94}{100}\right)^{20}=\left(\frac{94}{100}\right)^{20}$.

*b*) $E(X)=20\cdot\frac{6}{100}=\frac{120}{100}$. En general, la cantidad de piezas defectuosas en cada lote será 1.

*c*)

- $D'=\{\text{Lote con a lo sumo una pieza defectuosa}\}$. $P(D')=P(X\leq 1)$.
- $Y\sim B(10,P(X\leq 1))$. $E(Y)=10\cdot P(X\leq 1)$.

5. En una fábrica dos máquinas producen el mismo artículo. La máquina $A$ produce diariamente el doble de artículos que la máquina $B$. El 2 % de los artículos producidos por la máquina $A$ son defectuosos al igual que el 3 % de los producidos por $B$. Si se combina la producción diaria de ambas máquinas y luego se toman al azar 10 artículos. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a lo sumo dos defectuosos?

**Solución**

- $\mathcal{E}$ : «Se extrae una pieza de la producción total».
- $A = \{\text{La pieza proviene de la maquina A}\}$. $P(A) = \frac{2}{3}$.
- $B = \{\text{La pieza proviene de la maquina B}\}$. $P(B) = \frac{1}{3}$.
- $D = \{\text{La pieza es defectuosa}\}$.
- $P(D) = P(D|A)\,P(A) + P(D|B)\,P(B) = \frac{2}{100}\frac{2}{3} + \frac{3}{100}\frac{1}{3} = \frac{7}{300}$.
- $X$ : «Cantidad de piezas defectuosas en 10 repeticiones independientes del experimento». $X \sim B\left(10, \frac{7}{300}\right)$.
- $P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) =$
  $= \left(\frac{293}{300}\right)^{10} + 10\left(\frac{7}{300}\right)\left(\frac{293}{300}\right)^{9} + 45\left(\frac{7}{300}\right)^{2}\left(\frac{293}{300}\right)^{8} \approx 0,998.$

6. Un sistema de protección está constituido por $n$ radares que funcionan independientemente. La probabilidad de que un radar detecte un cohete que ingrese a la zona de protección es $\frac{90}{100}$. ¿Cuál es el número de radares necesarios para que la probabilidad de detectar un cohete que ingrese a la zona de protección sea 0, 999?

**Solución**

- $X$ : «Cantidad de detecciones de un cohete en un sistema de $n$ radares».
- $X \sim B\left(n, \frac{90}{100}\right)$. $P(X = x) = \binom{n}{x}\left(\frac{90}{100}\right)^{x}\left(\frac{10}{100}\right)^{n-x}$.
- $P(X > 0) = 0,999 \iff 1 - p(0) = 0,999 \iff$
  $\iff 1 - \left(\frac{10}{100}\right)^{n} = 0,999 \iff 0,001 = \left(\frac{10}{100}\right)^{n} \iff n = 3$

7. Dos aparatos funcionan durante un tiempo $t$. El primer aparato consta de $n_1$ bloques, el segundo de $n_2$. Durante el tiempo $t$ cada bloque del primer aparato falla independientemente de los otros con probabilidad $p_1$ y cada bloque del segundo aparato falla independientemente de los otros con probabilidad $p_2$. Los bloques del primer aparato fallan independientemente de los del segundo. Calcule la probabilidad de que durante el tiempo $t$ fallen exactamente $m_1$ bloques del primer aparato y $m_2$ del segundo.

**Solución** COMPLETAR.

8. El 30 % de los aspirantes a un trabajo tienen entrenamiento avanzado en programación. Los aspirantes son entrevistados al azar y en forma sucesiva.

    *a*) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el primer aspirante con entrenamiento avanzado en programación en la quinta entrevista?

    *b*) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el quinto aspirante con entrenamiento avanzado en programación en la décima entrevista?

**Soluciones**

*a*)

- $X$ : «Numero entrevistas hasta encontrar un aspirante con entrenamiento avanzado en programación».
- $X \sim G\left(\frac{30}{100}\right)$. $P\left(X=5\right) = \left(\frac{70}{100}\right)^{5-1} \frac{30}{100} \approx 0,072$.

*b*)

- $Y$ : «Numero de entrevistas hasta encontrar el quinto aspirante con entrenamiento avanzado en programación».
- $Y \sim P\left(5, \frac{30}{100}\right)$. $P\left(X=10\right) = \binom{10-1}{5-1} \cdot \left(\frac{30}{100}\right)^{5} \left(\frac{70}{100}\right)^{10-5} \approx 0,051$.

9. El número de artículos demandados por semana en un negocio es una v. a. de Poisson con tasa 7 artículos/semana. ¿Qué existencia de dicho artículo debe tener dicho negocio al comenzar la semana, para satisfacer la demanda con probabilidad mayor o igual que 0,99?

**Solución**

$$P\left(X \leq x\right) \geq 0,99 \iff \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-7} 7^{x}}{x!} \geq 0,99 \iff x \geq 14$$

10. En cierto punto de una ruta se coloca un dispositivo para contar el número de autos que pasan por allí en un período de tiempo dado. El número de autos que pasan por allí en un período de un minuto es una v. a. de Poisson con tasa $\lambda = 6$. El dispositivo puede fallar con una probabilidad $\frac{1}{100}$ (se entiende por fallar que pase un vehículo y el dispositivo no lo detecte).

    *a*) Calcule la probabilidad de que en un período de 2 minutos pasen 7 autos.

    *b*) Calcule la probabilidad de que en un período de 2 minutos el dispositivo registre 5 autos cuando en realidad pasaron 7.

    **Soluciones**

    *a*)

    - $X_t$ : «Número de autos que pasan en un intervalo de $t$ minutos».
    - $X_t \sim P(\lambda t)$. $P(X_t = x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$. $R_x = \mathbb{N}_0$.
    - $P(X_2 = 7) = \frac{e^{-12}12^7}{7!} \approx 0,0437$.

    *b*)

    - $D = \{\text{Auto detectado}\}$. $P(D) = 1 - P\left(\overline{D}\right) = \frac{99}{100}$.
    - $Y$ : «Cantidad de autos detectados de un total de 7».
    - $Y \sim B\left(7, \frac{99}{100}\right)$. $P(Y = 5) = \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^5 \left(\frac{1}{100}\right)^2 \approx 0,002$.

11. Una fábrica produce piezas de las cuales el 2 % son defectuosas.

    *a*) Calcule la probabilidad de que en un lote de 100 piezas no haya piezas defectuosas.

    *b*) Calcule la probabilidad de que en un lote de 100 piezas haya a lo sumo 3 piezas defectuosas.

    **Nota** Aunque la variable aleatoria $X$: «número de piezas defectuosas en un lote de 100 piezas», tiene claramente distribución binomial, el problema puede aproximarse utilizando una variable aleatoria con distribución de Poisson.

**Soluciones**

- $D = \{\text{La pieza es defectuosa}\}$. $P(D) = \frac{2}{100}$.
- $X$ : «Número de piezas defectuosas en un total de 100 piezas».
- $X \sim B\left(100, \frac{2}{100}\right)$. $P(X = x) = \binom{100}{x} \cdot \left(\frac{2}{100}\right)^{x} \cdot \left(\frac{98}{100}\right)^{100-x}$.

*a*) $P(X = 0) = \left(\frac{98}{100}\right)^{100} \approx 0,13262$.

*b*) $P(X \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) \approx 0,859$.

- $X \approx P\left(100 \cdot \frac{2}{100}\right)$. $P(X = x) \approx \frac{e^{-2}2^{x}}{x!}$.

*a*) $P(X = 0) \approx \frac{e^{-2}2^{0}}{0!} = e^{-2} \approx 0,13533$.

*b*) $P(X \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) \approx 0,857$.