Resolución ejercicio 10, práctica 1 - Números reales

10) Sea A un conjunto no vacío de números reales. Probar que A está acotado si y sólo si existe un número real positivo L tal que $|x| < L$ para todo $x \in A$.

Sea A un conjunto no vacío de números reales.
($\Longrightarrow$) Si A está acotado entonces (debemos probar "tesis") existe $L > 0$ tal que $|x| < L$ $\forall x \in A$; o sea, existe $L > 0$ tal que $-L < x < L$ $\forall x \in A$.
Como A está acotado, significa que está acotado superior e inferiormente. Es decir, (definición de cota superior e inferior, respectivamente) existen M y m números reales tales que para todo $x \in A$ se verifica $x \leq M$ y $x \geq m$. O sea,

$$m \leq x \leq M \ \ \forall x \in A$$

Observemos que resulta $m \leq M$.
Ahora, (propiedad de valor absoluto) todo número real verifica $-|x| \leq x \leq |x|$, además $|x| < |x| + 1$ y $-|x| - 1 < -|x|$. Luego

$$-|m| - 1 < -|m| \leq m \leq x \leq M < |M| + 1 \ \ \forall x \in A$$

Consideremos $L = \max\{|M| + 1, |m| + 1\}$. Veamos que L verifica la "tesis".
Efectivamente $L > 0$ y además $L \geq |M| + 1$ y $L \geq |m| + 1$ luego vale $-L \leq -|m| - 1$ y entonces

$$-L \leq -|m| - 1 < -|m| \leq m \leq x \leq M < |M| + 1 \leq L \ \ \forall x \in A$$

o sea, existe $L > 0$ tal que

$$-L < x < L \ \ \forall x \in A \iff |x| < L \ \ \forall x \in A$$

($\Longleftarrow$) Si existe $L > 0$ tal que $|x| < L$ $\forall x \in A$; o sea, si existe $L > 0$ tal que $-L < x < L$ $\forall x \in A$. Como $x < L$ $\forall x \in A$, L es cota superior de A, por lo tanto A está acotado superiormente. Además, como $-L < x$ $\forall x \in A$, resulta $-L$ una cota inferior de A, luego A está acotado inferiormente. Luego A está acotado, como queríamos probar.