Complementos de Matematica II

12 de noviembre de 2019

Índice general

Parte I

Teoría del orden y Grupos

Capítulo 1

Relaciones

1.1. Definiciones

1.1.1. Relación

Una relación R entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Para notar que un elemento $a \in A$ se relaciona con otro elemento $b \in B$ escribimos aRb o $(a, b) \in R$.

1.1.2. Relación funcional

Diremos que una relacion $R \subseteq A \times B$ es una relación funcional si:

$$aRb \wedge aRc \Rightarrow b = c$$

Llamaremos dominio de la relación al conjunto $dom\,(R) = \{a \in A | \exists b \in B : aRb\}$.

Diremos que el conjunto $im\,(R) = \{b \in B | \exists a \in A : aRb\}$ es la imagen de R.

Cuando $dom\,(R) = A$ diremos que R es una función.

1.1.3. Relación inversa

Si R es una relación entre A y B se define la relación inversa R^{-1} entre B y A como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : aRb\}$$

1.1.4. Union, intersección y diferencia

Sean R y S relaciones entre A y B llamamos union de R y S a la relación $R \cup S$.

Analogamente podemos considerar las relaciones $R \cap S$ y $R - S$.

1.1.5. Composición

Dada una relación R entre A y B, y otra relacion S entre B y C; definimos la relación:

$$S \circ R = \{(a, b) \in A \times C | \exists b \in b : aRb \wedge bSc\}$$

1.1.6. Restricción

Sean R una relación de A en B, $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$, llamaremos restricción de R a $A' \times B'$ a la relación:

$$R|_{A' \times B'} = \{(a, b) \in A' \times B' : aRb\}$$

Si $f : A \to B$ es una función entonces $f|_{A'} = f|_{A' \times B}$.

1.2. Clasificación de relaciones

1.2.1. Propiedades

Sea R una relación de A en A, diremos que R es:

Reflexiva si $\forall a \in A : aRa$.

Simétrica si $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$.

Antisimétrica si $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$.

Transitiva si $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

Total si $\forall a, b \in A : aRb \vee bRa$.

1.2.2. Relación de equivalencia

Si R es una relación en A reflexiva, simétrica y transitiva diremos que R es una relación de equivalencia.

- Llamaremos clase de equivalencia de $a \in A$ y lo notaremos $\overline{a}$ al conjunto:
$$\overline{a} = \{b \in A : aRb\}$$
- A la siguiente partición de A la llamaremos conjunto cociente:
$$A/R = \{\overline{a} : a \in A\}$$
- La función $\pi : A \to A/R$ definida por $\pi(a) = \overline{a}$ es llamada proyección al cociente.
- Para cualquier función $f : A \to B$ llamaremos nucelo de f a la siguiente relación de equivalencia:
$$ker(f) = \{(a, a') : f(a) = f(a')\}$$

Observación Cuando definimos una función sobre el conjunto cociente de una relación de equivalencia, debemos prestar atención a la forma en la que lo hacemos. Consideremos a modo de ejemplo la siguiente función sobre el cociente de la relación de equivalencia modulo 5:

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & & \overline{x} & \to & f(\overline{x}) = x \end{array}$$

Esta función no esta bien definida, o mas precisamente, f no es una función. En efecto $f\left(\overline{0}\right) = 0$ y $f\left(\overline{5}\right) = 5$ pero $\overline{0} = \overline{5}$ por lo cual existe un elemento del dominio con dos imagenes diferentes.

Debemos entonces, cada vez que definimos una función sobre clases de equivalencia asegurarnos de que si $x \sim y$ entonces $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$, de ser asi diremos que f tiene una buena definición.

1.3. Teoremas

1.3.1. Invertibilidad de relaciones funcionales

Enunciado Sea f una relación funcional de A en B, entonces f^{-1} es relación funcional si y solo si f es inyectiva.

Demostración

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sean a, a', b tales que $f(a) = b$ y $f(a') = b$ luego $f^{-1}(b) = a$ y $f^{-1}(b) = a'$ y como f^{-1} es funcional resulta $a = a'$.
- $\boxed{\Leftarrow}$: Sean a, a', b tales que $f^{-1}(b) = a$ y $f^{-1}(b) = a'$ luego $f(a) = b$ y $f(a') = b$ y como f es inyectiva resulta $a = a'$.

1.3.2. Composición de funciones

Enunciado Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones, entonces $g \circ f$ es una función.

Demostración Dado $a \in A$ sabemos que existe un único $b \in B$ tal que $f(a) = b$ pues f es una función.

Por la misma razón, para dicho elemento b existe un único elemento $c \in C$ tal que $g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a) = c$.

Hemos visto que dado $a \in A$ existe un único elemento $c \in C$ tal que $g \circ f(a) = c$, es decir $g \circ f$ es una función.

1.3.3. Herencia de propiedades

Enunciado Sean R una relación de A en B, $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$, entonces si R es reflexiva tambien lo será $R|_{A' \times B'}$. También ocurre lo mismo si R es simétrica, antisimétrica o transitiva.

Demostración EJERCICIO.

1.3.4. Biyectividad entre relaciones de equivalencia y particiones

Enunciado Si R es una relación de equivalencia en A entonces A/R es una partición de A y además, dada una particion $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ la relación definida por $a \sim b \iff \exists X \in P : a, b \in X$ es una relación de equivalencia.

Demostración EJERCICIO.

1.3.5. Teorema de factorización

Enunciado Si $\sim$ es una relación de equivalencia en A y $f : A \to B$ es una función tal que $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$, entonces existe una única función $\widetilde{f} : A/\sim \to B$ tal que $f = \widetilde{f} \circ \pi$.

Demostración EJERCICIO. Definir $f(\overline{a}) = f(a)$ y probar que esta definición no depende del representante elegido.

Capítulo 2

Conjuntos ordenados

2.1. Preordenes

2.1.1. Definiciones

Una relación $\preceq$ en A es un preorden si es reflexiva y transitiva.
Diremos que un elemento a es

maximal si $\forall x : a \preceq x \Rightarrow x \preceq a$.

minimal si $\forall x : x \preceq a \Rightarrow a \preceq x$.

máximo si $\forall x : x \preceq a$.

mínimo si $\forall x : a \preceq x$.

cota superior de $B \subseteq A$ si $\forall b \in B : b \preceq a$.

cota inferior de $B \subseteq A$ si $\forall b \in B : a \preceq b$.

supremo de $B \subseteq A$ si $a \in \text{mín}\{c \in A : c \text{ es cota superior de } B\}$.

ínfimo de $B \subseteq A$ si $a \in \text{máx}\{c \in A : c \text{ es cota superior de } B\}$.

2.1.2. Orden inverso

Si $(A, \preceq)$ es un conjunto preordenado, el orden inverso $\succeq$ se define como $a \succeq b \iff b \preceq a$, resultando este un preorden donde todas las definiciones se dualizan:

- a es elemento maximal en $(A, \preceq) \iff a$ es elemento minimal en $(A, \succeq)$.
- a es cota superior en $(A, \preceq) \iff a$ es cota inferior en $(A, \succeq)$.
- a es supremo en $(A, \preceq) \iff a$ es ínfimo en $(A, \succeq)$.

2.1.3. Teorema de extremos en preordenes

Enunciado Sea $\preceq$ un preorden sobre un conjunto A, luego las siguientes proposiciones son validas:

- Si $M \in A$ es un elemento máximo, entonces también es maximal.
- Si $m \in A$ es un elemento mínimo, entonces también es minimal.

Demostración EJERCICIO.

2.2. Relaciones de orden

2.2.1. Definición

Una relación $\leq$ en un conjunto A es un orden parcial (o simplemente orden) si es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Se dice que $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado (poset).

Observación La noción de orden parcial es mucho más intuitiva que la noción de preorden, de hecho es un caso particular que no admite ciclos.

Vale la pena notar tambien que en un poset si existen máximos o mínimos son únicos.

2.2.2. Ordenes naturales

Dados dos posets $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ hay dos formas de definir un orden parcial en el producto cartesiano $A \times B$:

Orden producto $(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq_A a' \wedge b \leq_B b'$

Orden lexicográfico $(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq_A a' \vee (a = a' \wedge b \leq b')$

2.2.3. Cadenas y anticadenas

Sea $(A, \leq)$ un poset y $X \subseteq A$ un subconjunto, diremos que:

- $(X, \leq)$ es una cadena si el orden es total.
- $(X, \leq)$ es una anticadena si: $\forall x, y \in X : x \leq y \Rightarrow x = y$

2.2.4. Morfismos entre posets

Los morfismos de posets son las funciones que «respetan» la estructura, es decir, el orden.

Sea $f : (A, \leq) \to (B, \leq)$ diremos que f es un:

morfismo entre A y B si f es creciente, es decir: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

isomorfismo entre A y B si $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$.

antiisomorfismo entre A y B si $x \leq y \iff f(y) \leq f(x)$.

Observación La existencia de una función biyectiva y monótona no implica que los ordenes sean isomorfos, como demuestra el siguiente ejemplo:

$$id : (\mathbb{N}, |) \to (\mathbb{N}, \leq)$$

Dicha funcion es biyectiva y es morfismo de orden, sin embardo id^{-1} no lo es pues $2 \leq 3$ pero $2 \parallel 3$.

2.2.5. Conjuntos bien ordenados

Un orden total $(A, \leq)$ se dice conjunto bien ordenado si:

$$\forall B \subseteq A / B \neq \emptyset : B \text{ tiene elemento mínimo}$$

2.3. Teoremas

2.3.1. Existencia de elementos particulares en posets finitos

Enunciado En un poset finito siempre existen elementos maximales/minimales.

Demostración EJERCICIO.

2.3.2. Teorema de isomorfismos

Enunciado f es un isomorfismos (respectivamente antiisomorfismo) de orden si y solo si f y f^{-1} son crecientes (respectivamente decrecientes).

Demostración EJERCICIO.

2.3.3. Propiedades de ordenes totales

Enunciado Sea $(A, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado y $a \in A$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. a es maximal (minimal).
2. a es cota superior (inferior).
3. a es supremo (ínfimo).
4. a es máximo (mínimo).

Demostración EJERCICIO.

2.3.4. Isomorfismo de ordenes totales

Enunciado Si $(A, \leq_A)$ es un conjunto totalmente ordenado, $(B, \leq_B)$ es un poset y $f : A \to B$ es biyectiva y crenciente (respectivamente decreciente), entonces f es un isomorfismo (respectivamente antiisomorfismo) de orden. En particular $(B, \leq_B)$ es totalmente ordenado.

Demostración COMPLETAR.

2.3.5. Principio de buena ordenación

Enunciado Todo conjunto admite un buen orden.

Demostración EJERCICIO.

2.3.6. Principio del buen orden

Enunciado Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es bien ordenado.

Demostración EJERCICIO.

Capítulo 3

Retículos

3.1. Definiciones

3.1.1. Definición en teoría del orden

Un poset $(L, \leq)$ se dice un retículo si:

$$\forall a, b \in L \exists x, y \in L / x = \sup\{a, b\} \wedge y = \text{ínf}\{a, b\}$$

Observaciones

- No necesariamente existen $\text{máx}\{a, b\}$ y $\text{mín}\{a, b\}$.
- Tomar supremo/ínfimo define dos operaciones en L: $a \vee b := \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b := \text{ínf}\{a, b\}$.

3.1.2. Definición algebraica

Un retículo $(L, \vee, \wedge)$ consiste de un conjunto no vacío L junto con dos operaciones $\wedge, \vee$ que satisfacen:

Asociatividad $\forall x, y, z \in L \begin{cases} x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \end{cases}$

Conmutatividad $\forall x, y \in L \begin{cases} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{cases}$

Absorción $\forall x, y \in L \begin{cases} x \vee (x \wedge y) = x \\ x \wedge (x \vee y) = x \end{cases}$

3.1.3. Teoremas

3.1.3.1. Equivalencia de las definiciones

Enunciado Si $(L, \vee, \wedge)$ es un retículo como en la definición algebraica, entonces

$$x \leq y \iff x \vee y = y$$

definie un orden parcial $(L, \leq)$ tal que $x \vee y = \sup\{x, y\}$ y $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Demostración

- $\boxed{\Rightarrow}$:
  - Veamos que $\leq$ así definido es un orden parcial.
    - Reflexividad: Por absorción $x \wedge (x \vee x) = x$ por lo que $x \vee x = x \vee (x \wedge (x \vee x))$ y nuevamente por absorción:

      $$\boxed{x \vee x} = x \vee (x \wedge (x \vee x)) = \boxed{x} \iff x \leq x$$

    - Antisimetría: Supongamos $x \leq y$ e $y \leq x$, luego $x \leq y \iff x \vee y = y$ e $y \leq x \iff y \vee x = x$ y por conmutatividad $x = y$.
    - Transitividad: Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq z$, luego $x \leq y \iff x \vee y = y$ e $y \leq z \iff y \vee z = z$. Calculemos $x \vee z$:

      $$x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$$

      Como $x \vee z = z$ entonces $x \leq z$.
  - Finalmente veamos que $x \vee y = \sup\{x, y\}$ y $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.
    - Por definición $x \leq x \vee y \iff x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$ lo cual vale por idempotencia, luego sabemos que $x \vee y$ es cota superior de $\{x, y\}$.
    - Sea z otra cota superior del mismo conjunto, entonces $x \leq z \iff x \vee z = z$ e $y \leq z \iff y \vee z = z$, luego

      $$\boxed{(x \vee y) \vee z} = x \vee (y \vee z) = x \vee z = \boxed{z} \Rightarrow x \vee y \leq z$$

      por lo que $x \vee y$ es la mínima cota supeior, es decir $x \vee y = \sup\{x, y\}$.

    - Analogamente para $x \wedge y = \text{ínf}\,\{x, y\}$.

- $\boxed{\Leftarrow}$: Veamos que si definimos $x \vee y = \sup\{x, y\}$ y $x \wedge y = \text{ínf}\,\{x, y\}$, entonces se verifica le definición algebraica de $(L, \wedge, \vee)$.
    - Asociatividad: COMPLETAR.
    - Conmutatividad: $x \vee y = \sup\{x, y\} = \sup\{y, x\} = y \vee x$. Analogamente para $x \wedge y$.
    - Absorción: COMPLETAR.

3.1.3.2. Propiedades derivadas

Enunciado Sea $(L, \wedge, \vee)$ un retículo y $x, y, z, w \in L$, entonces:

1. $x \leq x \vee y$
2. $x \wedge y \leq x$
3. $x \leq y \iff x \vee y = y \iff x \wedge y = x$
4. Idempotencia: $x \vee x = x = x \wedge x$
5. Compatibilidad: $x \leq z \wedge y \leq z \Rightarrow \begin{cases} x \vee y \leq z \vee w \\ x \wedge y \leq z \wedge w \end{cases}$

Demostración

1. COMPLETAR.
2. COMPLETAR.
3. COMPLETAR.
4. Vease reflexividad en equivalencia de las definiciones.
5. COMPLETAR.

Capítulo 4

Grupos

Parte II

Teoría de categorías

Capítulo 5

Introducción

5.1. Definiciones

5.1.1. Categoría

Una categoría $\mathcal{C}$ es:

- Una clase de objetos: $ob\,\mathcal{C}$.
- Una clase de morfismos entre objetos: $mor\,\mathcal{C}$. Llamaremos $Hom\,(A, B)$ a todos los morfismos entre los objetos A y B.
- Para cada $A, B, C \in ob\,\mathcal{C}$ un operador binario

  $$\circ : Hom\,(B, C) \times Hom\,(A, B) \to Hom\,(A, C)$$

  llamado composición tal que:

  - $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (siempre que tengan sentido).
  - Dado un objeto A existe un morfismo $id_A \in Hom\,(A, A)$ para el cual si B es otro objeto se cumplen:
    - $\forall f \in Hom\,(A, B) : f \circ id_A = f$.
    - $\forall f \in Hom\,(B, A) : id_A \circ f = f$.

5.1.2. Localidad

Decimos que una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría:

Pequeña si $ob\,\mathcal{C}$ y $mor\,\mathcal{C}$ son conjuntos.

Localmente pequeña si $Hom\,(A, B)$ es un conjunto para cualquier $A, B \in ob\,\mathcal{C}$.

Grande si no es una categoría pequeña.

5.1.3. Clasificación de morfismos

Decimos que $f \in Hom\,(A, B)$ es un

monomorfismo si $\forall X \in ob\,\mathcal{C} \forall g, h \in Hom\,(X, A) : f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

epimorfismo si $\forall X \in ob\,\mathcal{C} \forall g, h \in Hom\,(B, X) : g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & X \end{tikzcd}$$

isomorfismo si $\exists f^{-1} \in Hom\,(B, A) : f \circ f^{-1} = id_B \wedge f^{-1} \circ f = id_A$.

5.1.4. Clasificación de objetos

Un objeto $0 \in ob\,\mathcal{C}$ se dice *inicial* si $\forall A \in ob\,\mathcal{C} \exists! f : 0 \to A$.
Un objeto $1 \in ob\,\mathcal{C}$ se dice *terminal* si $\forall A \in ob\,\mathcal{C} \exists! f : A \to 1$.

5.1.5. Productos

El *producto* de dos objetos A y B es una terna $(A \times B, \pi_A : A \times B \to A, \pi_B : A \times B \to B)$ que cumple la siguiente propiedad universal:

$$\forall C \in ob\,\mathcal{C} \forall f : C \to A, g : C \to B \exists! \, \langle f, g\rangle : C \to A \times B / \pi_A \circ \langle f, g\rangle = f \wedge \pi_B \circ \langle f, g\rangle = g$$

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f, g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

El *coproducto* de dos objetos A y B es una terna $(A + B, \iota_A : A \to A + B, \iota_B : B \to A + B)$ que cumple la siguiente propiedad universal:

$$\forall C \in ob\,\mathcal{C} \forall f : A \to C, g : B \to C \exists! \, [f, g] : A + B \to C / \, [f, g] \circ \iota_A = f \wedge [f, g] \circ \iota_B = g$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \times B \arrow[d, dashed, "{[f, g]}"] & B \arrow[l, "\iota_B"'] \arrow[dl, "g"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

5.1.6. Ecualizador

El *ecualizador* de dos morfismos $f, g : A \to B$ es un morfismo $e : X \to A$ que verifica $f \circ e = g \circ e$ y tal que para todo morfismo $e' : X' \to A$ para el cual $f \circ e' = g \circ e'$, existe un único $k : X' \to X$ cumpliendo $e \circ k = e'$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \\
X' \arrow[u, dashed, "\exists! k"] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}$$

5.2. Ejemplos

5.2.1. Poset

Dado un poset $(P, \leq)$ definimos la categoría $\mathcal{P}$ donde:

- $ob\,\mathcal{P} = P$.
- $mor\,\mathcal{P} = \leq$.
- $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$.

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición*: La composición esta bien definida pues si (b, c) y (a, b) son morfismos, por transitividad también lo será su composición (a, c).
- *Morfismo identidad*: Para cada objeto a por reflexividad $(a, a) \in \leq$ por lo que $(a, a) \in mor\,\mathcal{P}$; a este morfismo lo llamaremos id_a resultando
  - $(a, b) \circ id_a = (a, b) \circ (a, a) = (a, b)$.
  - $id_a \circ (b, a) = (a, a) \circ (b, a) = (b, a)$.
- *Asociatividad*: Sean (a, b), (b, c) y (c, d) morfismos, por transitividad también son morfismos $\boxed{(a, c)}$, $\boxed{(b, d)}$ y (a, d) luego
  - $((c, d) \circ (b, c)) \circ (a, b) = \boxed{(b, d)} \circ (a, b) = (a, d)$.
  - $(c, d) \circ ((b, c) \circ (a, b)) = (c, d) \circ \boxed{(a, c)} = (a, d)$.

5.2.2. Monoide

Dado un monoide $(M, +)$ definimos la categoría $\mathcal{M}$ donde:

- $ob\,\mathcal{M} = \{*\}$.
- $mor\,\mathcal{M} = M$.
- $x \circ y = x + y$.

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición*: Por clausura de monoides, si x e y son morfismos, también lo será su composición $x+y$.
- *Morfismo identidad*: Para el único objeto $*$ existe el morfismo $0 = id_*$ de manera tal que
  - $x \circ id_* = x + 0 = x$.
  - $id_* \circ y = 0 + y = y$.
- *Asociatividad*: Para tres morfismos x, y, z (elementos de M) por clausura de monoide también son morfismos $\boxed{x+y}$ y $\boxed{y+z}$, luego

$$(x \circ y) \circ z = \left(\boxed{x+y}\right) + z = x + \left(\boxed{y+z}\right) = x \circ (y \circ z)$$

5.2.3. Categoría opuesta

Dada una categoría $\mathcal{C}$ definimos la categoría opuesta $\mathcal{C}^{op}$ donde:

- $ob\,\mathcal{C}^{op} = ob\,\mathcal{C}$.
- $mor\,\mathcal{C}^{op} = \{f_{op} : X \to Y / f : Y \to X \in mor\,\mathcal{C}\}$.
- $g_{op} \circ_{op} f_{op} = (f \circ g)_{op}$

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición*: Dadas $f_{op} : A \to B$ y $g_{op} : B \to C$ por definición existen en $\mathcal{C}$ los morfismos $f : B \to A$ y $g : C \to B$ luego es valida la composición $f \circ g$ y por definición $(f \circ g)_{op}$ es un morfismo de $\mathcal{C}^{op}$.
- *Morfismo identidad*: Para cada objeto X sabemos que existe id_X, luego $id_{X_{op}}$ es un morfismo de la categoría opuesta para el cual
  - $f_{op} \circ_{op} id_{X_{op}} = (id_X \circ f)_{op} = f_{op}$.
  - $id_{X_{op}} \circ_{op} h_{op} = (h \circ id_X)_{op} = h_{op}$.
- *Asociatividad*: Sean $f_{op} : A \to B$, $g_{op} : B \to C$ y $h_{op} : C \to D$, luego
  - $(h_{op} \circ_{op} g_{op}) \circ_{op} f_{op} = (g \circ h)_{op} \circ_{op} f_{op} = f \circ (g \circ h)$.
  - $h_{op} \circ_{op} (g_{op} \circ_{op} f_{op}) = h_{op} \circ_{op} (f \circ g)_{op} = (f \circ g) \circ h$.

5.2.4. Categoría producto

Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ definimos la categoría producto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ donde:

- $ob\,\mathcal{C} \times \mathcal{D} = ob\,\mathcal{C} \times ob\,\mathcal{D}$.
- $Hom\left((C,D),(C',D')\right) = Hom\,(C,C') \times Hom\,(D,D')$.
- $(p,q) \circ_\times (f,g) = (p \circ f, q \circ g)$.

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Morfismo identidad*: Para cada objeto $(C,D) \in ob\,\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ existen los objetos $C \in ob\,\mathcal{C}$ y $D \in ob\,\mathcal{D}$ y también los morfismos id_C e id_D, por lo que también existe el morfismo (id_C, id_D) para el cual
  - $(f,g) \circ_\times (id_C, id_D) = (f \circ id_C, g \circ id_D) = (f,g)$.
  - $(id_C, id_D) \circ_\times (f,g) = (id_C \circ f, id_D \circ g) = (f,g)$.
- *Asociatividad*: Sean $(f,g) : (C_1,C_2) \to (D_1,D_2)$, $(p,q) : (C_2,C_3) \to (D_2,D_3)$ y $(r,s) : (C_3,C_4) \to (D_3,D_4)$, luego
  - $((r,s) \circ_\times (p,q)) \circ_\times (f,g) = (r \circ p, s \circ q) \circ_\times (f,g) = (r \circ p \circ f, s \circ q \circ g)$.
  - $(r,s) \circ_\times ((p,q) \circ_\times (f,g)) = (r,s) \circ_\times (p \circ f, q \circ g) = (r \circ p \circ f, s \circ q \circ g)$.

5.2.5. Categoría de morfismos

Dada una categoría $\mathcal{C}$ definimos la categoría de sus morfismos $\mathcal{C}^\to$ donde:

- $ob\,\mathcal{C}^\to = mor\,\mathcal{C}$.
- $Hom\,(f : A \to B, g : A' \to B') = \{(a,b) \in Hom\,(A,A') \times Hom\,(B,B') : g \circ a = b \circ f\}$.
- $(a',b') \circ (a,b) = (a' \circ a, b' \circ b)$.

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición*: Sean
  - $(a : A \to A', b : B \to B')$ morfismo entre $f : A \to B$ y $g : A' \to B'$
  - $(a' : A' \to A'', b' : B' \to B'')$ morfismo entre g y $h : A'' \to B''$

sabemos por definición que

- $g \circ a = b \circ f$
- $h \circ a' = b' \circ g$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & A' \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "b"'] & B' \arrow[r, "b'"'] & B'' \end{tikzcd}$$

luego para la composición $(a' \circ a, b' \circ b)$ resulta

$$h \circ (a' \circ a) = (h \circ a') \circ a = (b' \circ g) \circ a = b' \circ (g \circ a) = b' \circ (b \circ f) = (b' \circ b) \circ f$$

es decir que también es un morfismo de la categoría.

- *Morfismo identidad*: Para cada objeto $f : A \to B$ definimos $id_f = (id_A, id_B)$. Observemos que id_f es un morfismo de $C^{\to}$ pues $id_B \circ f = f = f \circ id_A$, luego

  - $(a, b) \circ id_f = (a \circ id_A, b \circ id_B) = (a, b)$
  - $id_f \circ (a, b) = (id_A \circ a, id_B \circ b) = (a, b)$

- *Asociatividad*: Sean morfismos y objetos como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & A' \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[r, "a''"] \arrow[d, "h"] & A''' \arrow[d, "i"] \\ B \arrow[r, "b"'] & B' \arrow[r, "b'"'] & B'' \arrow[r, "b''"'] & B''' \end{tikzcd}$$

luego

$$((a'', b'') \circ (a', b')) \circ (a, b) = (a'' \circ a', b'' \circ b') \circ (a, b) = (a'' \circ a' \circ a, b'' \circ b' \circ b) =$$

$$= (a'', b') \circ (a' \circ a, b' \circ b) = (a'', b') \circ ((a', b') \circ (a, b))$$

5.3. Teoremas

5.3.1. Principio de dualidad

Enunciado Si un teorema vale en una categoría $\mathcal{C}$, entonces el coteorema (invirtiendo el sentido de los morfismos) vale en la categoría $\mathcal{C}^{op}$.

Observaciones

- Las definiciones de monomorfismo y epimorfismos son definiciones duales, es decir que f es monomorfismo en la categoría $\mathcal{C}$ si y solo si f es epimorfismo en la categoría $\mathcal{C}^{op}$.
- Las definiciones de objeto inicial y objeto terminal son definiciones duales.
- Los productos en una categoría son coproductos en la categoría opuesta.

5.3.2. Propiedades de isomorfismo

Enunciado Si f es un isomorfismo, también es monomorfismo y epimorfismo.

Demostración COMPLETAR.

5.3.3. Unicidad de elementos iniciales y terminales

Enunciado Los objetos iniciales y terminales son únicos salvo isomorfismo.

Demostración COMPLETAR.

5.3.4. Unicidad de productos y coproductos

Enunciado Los productos y coproductos son únicos salvo isomorfismo.

Demostración COMPLETAR.

5.3.5. Propiedad de ecualizador

Enunciado Si e es un ecualizador, entonces es monomorfismo.

Demostración COMPLETAR.

Capítulo 6

Limites y conos

Capítulo 7

Functores

Capítulo 8

Transformaciones natruales

Capítulo 9

Monadas