

Funciones Recursivas de Listas

Pablo Verdes

LCC

23 de abril de 2018

Contenidos

- Listas: definición, notaciones
- Concatenación de listas
- Funciones de listas: definición, notaciones
- Funciones base: definición y ejemplos
- Operador composición: definición y ejemplos
- Operador repetición: definición y ejemplos
- El conjunto de Funciones Recursivas de Listas: definición inductiva
- El poder de cálculo de las *FRL*

Listas

- **Definición:** Una **lista** es una secuencia ordenada y finita de cero o más elementos de \mathbb{N}_0 . Notación:
 - ▶ $[x_1, x_2, \dots, x_k]$ para una lista de longitud k
 - ▶ letras mayúsculas (por ej. X, Y, Z) cuando no estemos interesados en la cantidad de elementos, o con supra-índice (por ej. X^k) si lo estamos
 - ▶ $[]$ para la lista vacía
- Llamaremos \mathcal{L} al conjunto de todas las listas.
- Con \mathcal{L}^n indicaremos el conjunto de listas que poseen exactamente n elementos.
- Con $\mathcal{L}^{\geq n}$ representaremos al conjunto de listas con al menos n elementos. Ejemplos:
 - ▶ $\mathcal{L}^{\geq 1}$ es el conjunto de todas las listas salvo la vacía
 - ▶ $\mathcal{L}^{\geq 4}$ es el conjunto de todas las listas con al menos 4 elementos

Concatenación de listas

- La operación natural en \mathcal{L} es la concatenación.

- **Definición:**

Dadas dos listas $X = [x_1, \dots, x_m]$ e $Y = [y_1, \dots, y_n]$, llamamos **concatenación** de X e Y a la lista $[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$.

Notación:

- ▶ Usaremos la expresión $[X, Y]$ o equivalentemente X, Y (sin corchetes) para indicar la concatenación de las listas X e Y .
 - ▶ Para distinguir en particular ciertos elementos de interés, usaremos notaciones del tipo $[a, X, b, Y]$ —o bien su versión desprovista de corchetes: a, X, b, Y .
- Es fácil probar que se trata de una operación asociativa.
Elemento neutro: la lista vacía.

Funciones de listas

- **Definición:**

Las **funciones de listas** son funciones que van de \mathcal{L} en \mathcal{L} .

Notación:

- ▶ Usaremos letras mayúsculas: F, G, \dots
- ▶ Para indicar que una función F asigna a la lista X la lista Y , usaremos la notación $F X = Y$ (nótese la omisión de paréntesis). También usaremos las notaciones $F[X] = Y$, $X \xrightarrow{F} Y$, o $X \xlongequal{F} Y$.
- Observemos que a las funciones numéricas $f : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ definidas anteriormente se las puede considerar como funciones de listas $F : \mathcal{L}^k \rightarrow \mathcal{L}^1$.
- Tal como hiciéramos para las FR , definiremos un conjunto de funciones base y ciertos operadores. Esto nos permitirá construir recursivamente un conjunto particular de funciones de listas.

Contenidos

- Listas: definición, notaciones
- Concatenación de listas
- Funciones de listas: definición, notaciones
- **Funciones base: definición y ejemplos**
- Operador composición: definición y ejemplos
- Operador repetición: definición y ejemplos
- El conjunto de Funciones Recursivas de Listas: definición inductiva
- El poder de cálculo de las *FRL*

Funciones base

- ❶ Cero a izquierda: $O_i[x_1, x_2, \dots, x_k] = [0, x_1, x_2, \dots, x_k]$
- ❷ Cero a derecha: $O_d[x_1, x_2, \dots, x_k] = [x_1, x_2, \dots, x_k, 0]$
- ❸ Borrar a izquierda: $\square_i[x_1, x_2, \dots, x_k] = [x_2, x_3, \dots, x_k]$
- ❹ Borrar a derecha: $\square_d[x_1, x_2, \dots, x_k] = [x_1, x_2, \dots, x_{k-1}]$
- ❺ Sucesor a izquierda: $S_i[x_1, x_2, \dots, x_k] = [x_1 + 1, x_2, \dots, x_k]$
- ❻ Sucesor a derecha: $S_d[x_1, x_2, \dots, x_k] = [x_1, x_2, \dots, x_k + 1]$

Funciones base

- Ejemplos:

① $O_i[1, 2, 3] = [0, 1, 2, 3]$

② $O_d[1, 2, 3] = [1, 2, 3, 0]$

③ $\square_i[2, 3, 5, 7] = [3, 5, 7]$

④ $\square_d[2, 3, 5, 7] = [2, 3, 5]$

⑤ $S_i[5, 6, 7] = [6, 6, 7]$

⑥ $S_d[5, 6, 7] = [5, 6, 8]$

- Observemos que:

$$\text{dom}(O_i) = \text{dom}(O_d) = \mathcal{L}$$

$$\text{dom}(\square_i) = \text{dom}(\square_d) = \mathcal{L}^{\geq 1}$$

$$\text{dom}(S_i) = \text{dom}(S_d) = \mathcal{L}^{\geq 1}$$

Operador composición

- Definición:

Sean F y G funciones de listas. Construimos por **composición** la función de listas $H = F \circ G$, que notaremos simplemente $H = FG$, como

$$H X = F[G X],$$

es decir, dada una lista X se aplica primero la función G , y al resultado obtenido se aplica la función F .

- Ejemplos:

- ▶ $O_i O_i [1, 2, 3] = O_i [0, 1, 2, 3] = [0, 0, 1, 2, 3]$
- ▶ $S_i S_d O_d [1, 3, 5] = S_i S_d [1, 3, 5, 0] = S_i [1, 3, 5, 1] = [2, 3, 5, 1]$
- ▶ $\square_i \square_d [1, 2, 3, 4] = \square_i [1, 2, 3] = [2, 3]$
- ▶ $\square_d \square_i [1, 2, 3, 4] = \square_d [2, 3, 4] = [2, 3]$
- ▶ $S_d S_i O_d O_i [X] = [1, X, 1], \quad \square_i \square_d S_d S_i O_d O_i X = X$

Operador composición

- **Ejercicio:** Defina las siguientes funciones de listas:

(a) *borraExtremos*, que elimine el primer y último elemento de una lista de longitud al menos dos

(b) *diez*, tal que

$$\text{diez}[x_1, \dots, x_n] = [x_1, \dots, x_n, 10]$$

(usando notación de potencia de una función de listas: $S_d^{10} O_d$)

(c) *secuencia*, tal que

$$\text{secuencia}[x_1, \dots, x_n] = [0, 1, 2, x_1, \dots, x_n, 2, 1, 0]$$

- Apreciamos aquí la incomodidad de escribir de derecha a izquierda al componer funciones de listas.
- Por tal motivo, a continuación modificamos nuestra definición de composición.

Operador composición (nuevo)

- Definición:

Sean F y G funciones de listas. Construimos por **composición** la función de listas $H = F \circ G$, que notaremos simplemente $H = FG$, como

$$H X = G[F X],$$

es decir, dada una lista X se aplica primero la función F , y al resultado obtenido se aplica la función G .

Ejemplo:

$$S_i S_d O_d [1, 3, 5] = S_d O_d [2, 3, 5] = O_d [2, 3, 6] = [2, 3, 6, 0]$$

- Dominio de la composición:

$$\text{dom}(FG) = \{X \in \mathcal{L} \mid X \in \text{dom}(F) \wedge FX \in \text{dom}(G)\}$$

Ejemplos: $\text{dom}(\square_i \square_d) = \mathcal{L}^{\geq 2}$, $\text{dom}(O_d \square_i) = \mathcal{L}$

Operador repetición

- Definición:

Sea $F : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$. Definimos la **repetición** de F , que denotamos $\langle F \rangle$, como:

$$\langle F \rangle [x, Y, z] = \begin{cases} [x, Y, z] & \text{si } x = z \\ F\langle F \rangle [x, Y, z] & \text{si } x \neq z \end{cases}$$

- En palabras, la función $\langle F \rangle$ actúa aplicando F hasta que el primer y el último elementos de su argumento son iguales.
- Dominio:
 - Observemos que $\langle F \rangle$ está definida sobre listas de la forma $[x, Y, z]$, es decir, que tienen al menos dos elementos (Y podría ser vacía): $\text{dom}(\langle F \rangle) \subseteq \mathcal{L}^{\geq 2}$.
 - Más precisamente, $X \in \text{dom}(\langle F \rangle)$ si en la sucesión $\{X, FX, FFX, FFFX, \dots\}$ existe una lista cuyo primer y último elementos son iguales.

Operador repetición: ejemplos

- **Pasar a izquierda:** \triangleleft

Esta función envía el elemento del extremo derecho al izquierdo.

$$X, y \xrightarrow{\triangleleft} y, X \qquad \triangleleft = O_i \langle S_i \rangle \square_d$$

- **Pasar a derecha:** \triangleright

Esta función envía el elemento del extremo izquierdo al derecho.

$$x, Y \xrightarrow{\triangleright} Y, x \qquad \triangleright = O_d \langle S_d \rangle \square_i$$

- **Duplicar a izquierda:** D_i

Esta función duplica el primer elemento de la lista.

$$x, Y \xrightarrow{D_i} x, x, Y \qquad D_i = O_d \langle S_d \rangle \triangleleft$$

- **Duplicar a derecha:** D_d

Esta función duplica el último elemento de la lista.

$$X, y \xrightarrow{D_d} X, y, y \qquad D_d = O_i \langle S_i \rangle \triangleright$$

- **Intercambiar extremos:** \leftrightarrow

Esta función intercambia los extremos de una lista.

$$x, Y, z \xrightarrow{\leftrightarrow} z, Y, x \qquad \leftrightarrow = \triangleright O_i \triangleleft O_i \langle S_i \triangleright \triangleright S_i \triangleleft \triangleleft \rangle \square_d \square_i \triangleright$$

Funciones Recursivas de Listas

- **Definición:**

Definimos inductivamente el conjunto de **Funciones Recursivas de Listas** (FRL) como el menor conjunto tal que:

- ▶ Las funciones base pertenecen a FRL .
 - ▶ Las funciones obtenidas aplicando un número finito de operaciones de composición y repetición sobre elementos de FRL también pertenecen a FRL .
- Observemos que todas las funciones vistas en el ejemplo anterior son FRL .
- A continuación mostraremos que las FRL son, al menos, tan poderosas como las FR para representar procedimientos de cálculo.

Contenidos

- Listas: definición, notaciones
- Concatenación de listas
- Funciones de listas: definición, notaciones
- Funciones base: definición y ejemplos
- Operador composición: definición y ejemplos
- Operador repetición: definición y ejemplos
- El conjunto de Funciones Recursivas de Listas: definición inductiva
- **El poder de cálculo de las *FRL***

El poder de cálculo de las *FRL*

- Observemos que las *FR* y las *FRL* ‘viven’ en mundos diferentes, en el sentido de que operan sobre elementos de distinto tipo.
- Por tal motivo, necesitamos establecer una correspondencia entre los conjuntos *FR* y *FRL*.
- Haciendo abuso de notación, usaremos el símbolo X para denotar tanto a un elemento de \mathbb{N}_0^k como de \mathcal{L}^k .
- **Definición:**

Sea $g : \mathbb{N}_0^k \rightarrow \mathbb{N}_0$ una función numérica. Si existe una función de listas F_g tal que $\forall X^k \in \text{dom}(g)$ y $\forall Y$

$$F_g[X, Y] = [g(X), X, Y]$$

entonces diremos que F_g **representa** a la función numérica g como una función de listas.

El poder de cálculo de las *FRL*

Teorema:

Para toda función numérica $g \in FR$ existe una función de listas $F_g \in FRL$ que la representa.

D/ Por inducción en *FR*.

- **Casos base:**

- ▶ Funciones cero $c^{(n)}$: $F_c = O_i$ (trivial)
- ▶ Funciones proyección $p_k^{(n)}$: $F_{p_k} = \triangleright^{k-1} D_i (\leftrightarrow \triangleleft)^{k-1}$
- ▶ Función sucesor s : $F_s = D_i S_i$ (trivial)

- **Operador composición:** Lema 1

- **Operador recursión:** Lema 2

- **Operador minimización:** Lema 3



El poder de cálculo de las *FRL*

Lema 1: (La **composición** de funciones numéricas de *FR* que tienen representación en *FRL* también tiene representación en *FRL*.)

Sean las funciones numéricas $f^{(n)}$ y $\{g_i^{(k)}\}_{i=1}^n$, con representaciones en *FRL* dadas por F_f y $\{F_{g_i}\}_{i=1}^n$ respectivamente. Entonces la composición

$$h = \Phi(f, g_1, g_2, \dots, g_n)$$

también tiene representación en *FRL*.

D/ Buscamos $F_h \in FRL$ tal que $F_h[X, Y] = [h(X), X, Y]$.

Proponemos

$$F_h = F_{g_1} \triangleright F_{g_2} \triangleright \dots F_{g_n} \triangleleft^{n-1} F_f \triangleright \square_i^n \triangleleft$$

Veamos que dicha función efectivamente representa a la función h .

Lema 1 (cont):

$$F_h = F_{g_1} \triangleright F_{g_2} \triangleright \dots F_{g_n} \triangleleft^{n-1} F_f \triangleright \square_i^n \triangleleft$$

	$[X, Y]$
F_{g_1}	$[g_1(X), X, Y]$
\triangleright	$[X, Y, g_1(X)]$
F_{g_2}	$[g_2(X), X, Y, g_1(X)]$
\triangleright	$[X, Y, g_1(X), g_2(X)]$
$\dots F_{g_n}$	$[g_n(X), X, Y, g_1(X), g_2(X), \dots, g_{n-1}(X)]$
\triangleleft^{n-1}	$[g_1(X), g_2(X), \dots, g_n(X), X, Y]$
F_f	$[f(g_1(X), g_2(X), \dots, g_n(X)), g_1(X), g_2(X), \dots, g_n(X), X, Y]$
	$[h(X), g_1(X), g_2(X), \dots, g_n(X), X, Y]$
\triangleright	$[g_1(X), g_2(X), \dots, g_n(X), X, Y, h(X)]$
\square_i^n	$[X, Y, h(X)]$
\triangleleft	$[h(X), X, Y]$

Por lo tanto, F_h representa a la función $h = \Phi(f, g_1, \dots, g_n)$ en FRL . □

El poder de cálculo de las *FRL*

Lema 2: (La **recursión** de funciones numéricas de *FR* que tienen representación en *FRL* también tiene representación en *FRL*.)

Sean las funciones numéricas $g^{(k)}$ y $h^{(k+2)}$, con representaciones en *FRL* dadas por F_g y F_h respectivamente. Entonces la función $f^{(k+1)}$ definida por recursión

$$f = R(g, h)$$

también tiene representación en *FRL*.

D/ Buscamos $F_f \in FRL$ tal que $F_f[y, X, Y] = [f(y, X), y, X, Y]$.

Proponemos

$$F_f = \triangleright F_g O_i \langle \triangleright \leftrightarrow \triangleleft F_h \triangleright \square_i S_i \leftrightarrow \triangleleft \rangle \square_i \leftrightarrow \triangleleft$$

Veamos que dicha función efectivamente representa a la función f .

Lema 2 (cont):

$$F_f = \triangleright F_g O_i \langle \triangleright \leftrightarrow \triangleleft F_h \triangleright \square_i S_i \leftrightarrow \triangleleft \rangle \square_i \leftrightarrow \triangleleft$$

$$\begin{array}{l} \triangleright \\ F_g \\ O_i \end{array} \left| \begin{array}{l} [y, X, Y] \\ [X, Y, y] \\ [g(X), X, Y, y] \\ [0, g(X), X, Y, y] \\ [0, f(0, X), X, Y, y] \end{array} \right.$$

Hay 2 casos posibles: 1) $y = 0$ 2) $y \neq 0$

1) Caso $y = 0$:

$$\begin{array}{l} \langle \dots \rangle \\ \square_i \\ \leftrightarrow \\ \triangleleft \end{array} \left| \begin{array}{l} [y, f(y, X), X, Y, y] \\ [y, f(y, X), X, Y, y] \\ [f(y, X), X, Y, y] \\ [y, X, Y, f(y, X)] \\ [f(y, X), y, X, Y] \end{array} \right.$$

Lema 2 (cont):

$$F_f = \triangleright F_g O_i \langle \triangleright \leftrightarrow \triangleleft F_h \triangleright \square_i S_i \leftrightarrow \triangleleft \rangle \square_i \leftrightarrow \triangleleft$$

2) Caso $y \neq 0$:

	$[0, f(0, X), X, Y, y]$
\triangleright	$[f(0, X), X, Y, y, 0]$
\leftrightarrow	$[0, X, Y, y, f(0, X)]$
\triangleleft	$[f(0, X), 0, X, Y, y]$
F_h	$[h(f(0, X), 0, X), f(0, X), 0, X, Y, y]$
	$[f(1, X), f(0, X), 0, X, Y, y]$
\triangleright	$[f(0, X), 0, X, Y, y, f(1, X)]$
\square_i	$[0, X, Y, y, f(1, X)]$
S_i	$[1, X, Y, y, f(1, X)]$
\leftrightarrow	$[f(1, X), X, Y, y, 1]$
\triangleleft	$[1, f(1, X), X, Y, y]$

Vemos que el resultado de la repetición será $[y, f(y, X), X, Y, y]$.

Lema 2 (cont):

Finalmente, aplicamos el último bloque de funciones:

$$F_f = \triangleright F_g O_i \langle \triangleright \leftrightarrow \triangleleft F_h \triangleright \square_i S_i \leftrightarrow \triangleleft \rangle \square_i \leftrightarrow \triangleleft$$

$$\begin{array}{l|l} \square_i & [y, f(y, X), X, Y, y] \\ \leftrightarrow & [f(y, X), X, Y, y] \\ \triangleleft & [y, X, Y, f(y, X)] \\ & [f(y, X), y, X, Y] \end{array}$$

Recapitulando, en ambos casos hemos obtenido:

$$F_f [y, X, Y] = [f(y, X), y, X, Y]$$

Por lo tanto, F_f representa a la función $f = R(g, h)$ en FRL . \square

El poder de cálculo de las *FRL*

Lema 3: (La función numérica que se obtiene por **minimización** de otra, representable en *FRL*, también tiene representación en *FRL*.)

Sea la función numérica $h^{(n+1)}$, y F_h su representación en *FRL*. Entonces la función $g^{(n)}$ obtenida por minimización de h :

$$g(X) = M[h](X) = \mu_t(h(t, X) = 0)$$

también tiene representación en *FRL*.

D/ Buscamos $F_g \in FRL$ tal que $F_g[X, Y] = [g(X), X, Y]$.

Proponemos

$$F_g = O_i F_h O_d \langle \square_i S_i F_h \rangle \square_i \square_d$$

Veamos que dicha función efectivamente representa a la función g .

Lema 3 (cont):

$$F_g = O_i F_h O_d \langle \square_i S_i F_h \rangle \square_i \square_d$$

$$\begin{array}{l|l} & [X, Y] \\ O_i & [0, X, Y] \\ F_h & [h(0, X), 0, X, Y] \\ O_d & [h(0, X), 0, X, Y, 0] \end{array}$$

Hay 2 casos posibles: 1) $h(0, X) = 0$ 2) $h(0, X) \neq 0$

1) Caso $h(0, X) = 0$:

$$\begin{array}{l|l} \langle \dots \rangle & [0, 0, X, Y, 0] \\ \square_i & [0, 0, X, Y, 0] \\ \square_d & [0, X, Y, 0] \\ & [0, X, Y] \\ & [\mu_t(h(t, X) = 0), X, Y] \\ & [g(X), X, Y] \end{array}$$

Lema 3 (cont):

$$F_g = O_i F_h O_d \langle \square_i S_i F_h \rangle \square_i \square_d$$

2) Caso $h(0, X) \neq 0$:

$$\begin{array}{c|l} \square_i & [h(0, X), 0, X, Y, 0] \\ S_i & [0, X, Y, 0] \\ F_h & [1, X, Y, 0] \\ & [h(1, X), 1, X, Y, 0] \end{array}$$

Vemos que, en general, el efecto de $\square_i S_i F_h$ es transformar

$$[h(t, X), t, X, Y, 0] \quad \text{en} \quad [h(t+1, X), t+1, X, Y, 0].$$

La repetición se aplicará cierto número de veces, k , hasta que $h(k, X) = 0$.

Llegado ese punto, el estado de la lista será

$$[h(k, X), k, X, Y, 0] = [0, k, X, Y, 0]$$

Lema 3 (cont):

Finalmente, aplicamos el último bloque de funciones:

$$F_g = O_i F_h O_d \langle \square_i S_i F_h \rangle \square_i \square_d$$

$$\begin{array}{l|l} \langle \dots \rangle & [0, k, X, Y, 0] \\ \square_i & [k, X, Y, 0] \\ \square_d & [k, X, Y] \\ & [\mu_t(h(t, X) = 0), X, Y] \\ & [g(X), X, Y] \end{array}$$

Recapitulando, en ambos casos hemos obtenido:

$$F_g [X, Y] = [g(X), X, Y]$$

Por lo tanto, F_g representa a la función $g = M[h]$ en FRL . \square

Conclusión

- Las FR se construían a partir de sus funciones base y la aplicación, un número finito de veces, de los operadores composición (Φ), recursión (R) y minimización (M).
- De los lemas demostrados concluimos, por inducción en FR , que toda función de FR tiene una representación en FRL .
- Por lo tanto, las FRL son un modelo de cálculo al menos tan poderoso como el de las FR .