1. En el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, considerar la relación

$$R = \{(0,1), (0,3), (1,1), (1,5), (3,2), (3,8), (4,4), (4,9),$$

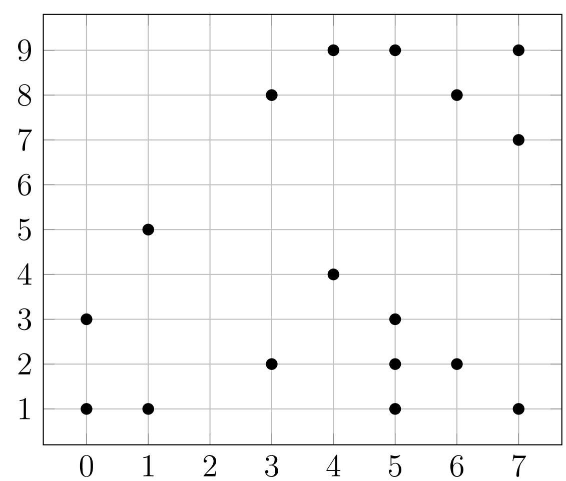
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,9), (6,2), (6,8), (7,1), (7,7), (7,9)\}$$

a) Graficar R.

b) Determinar:

1) $R(0)$.
2) $R(\{1,2,3\})$.
3) $R(A)$.
4) $R^{-1}(0)$.
5) $R^{-1}(\{1,2,3\})$.
6) $R^{-1}(A)$.

Soluciones

a) 

b)

1) $R(0) = \{1, 3\}$.
2) $R(\{1,2,3\}) = \{1, 5, 2, 8\}$.
3) $R(A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$.
4) $R^{-1}(0) = \emptyset$.
5) $R^{-1}(\{1,2,3\}) = \{0, 1, 5, 7, 3\}$.
6) $R^{-1}(A) = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. Sean R y S relaciones sobre un conjunto A. Probar:

   a) $dom\,(R \cap S) \subseteq dom\,(R) \cap dom\,(S)$.
   b) $dom\,(R \cup S) = dom\,(R) \cup dom\,(S)$.
   c) $dom\,(R - S) \supseteq dom\,(R) - dom\,(S)$.
   d) $im\,(R \cap S) \subseteq im\,(R) \cap im\,(S)$.
   e) $im\,(R \cup S) \subseteq im\,(R) \cup im\,(S)$.
   f) $im\,(R - S) \supseteq im\,(R) - im\,(S)$.

Soluciones

a)

$$\boxed{\begin{array}{cc} & x \in dom\,(R \cap S) \\ \Longleftrightarrow & \langle def.dom\rangle \\ & \exists y/\,(x,y) \in R \cap S \\ \Longleftrightarrow & \langle def.\cap\rangle \\ & \exists y/xRy \wedge xSy \\ \Rightarrow & \langle def.dom\rangle \\ & x \in dom\,(R) \wedge x \in dom\,(S) \\ \Longleftrightarrow & \langle def.\cap\rangle \\ & x \in dom\,(R) \cap dom\,(S) \end{array}}$$

b)

- $$\boxed{\begin{array}{cc} & x \in dom\,(R \cup S) \\ \Longleftrightarrow & \langle def.dom\rangle \\ & \exists y/\,(x,y) \in R \cup S \\ \Longleftrightarrow & \langle def.\cup\rangle \\ & \exists y/xRy \vee xSy \\ \Rightarrow & \langle def.dom\rangle \\ & x \in dom\,(R) \vee x \in dom\,(S) \\ \Longleftrightarrow & \langle def.\cup\rangle \\ & x \in dom\,(R) \cup dom\,(S) \end{array}}$$

■
$$\boxed{\begin{array}{cc}
 & x \in dom\,(R) \cup dom\,(S) \\
\Longleftrightarrow & \langle def.\cup \rangle \\
 & x \in dom\,(R) \vee x \in dom\,(S) \\
\Rightarrow & \boxed{\begin{array}{c|c}
\langle Sup \rangle & \langle Sup \rangle \\
x \in dom\,(R) & x \in dom\,(S) \\
\langle def.dom \rangle & \langle def.dom \rangle \\
\exists y / xRy & \exists y / xSy \\
\langle i_{\vee} \rangle & \langle i_{\vee} \rangle \\
\exists y / xRy \vee xSy & \exists y / xRy \vee xSy
\end{array}} \\
 & \exists y / xRy \vee xSy \\
\Longleftrightarrow & \langle def.\cup \rangle \\
 & \exists y / \,(x,y) \in R \cup S \\
\Longleftrightarrow & \langle def.dom \rangle \\
 & x \in dom\,(R \cup S)
\end{array}}$$

$c)$
$$\boxed{\begin{array}{cc}
 & x \in dom\,(R) - dom\,(S) \\
\Longleftrightarrow & \langle def.- \rangle \\
 & x \in dom\,(R) \wedge x \notin dom\,(S) \\
\Rightarrow & \langle def.dom \rangle \\
 & (\exists y / \,(x,y) \in R) \wedge (\forall z : (x,z) \notin S) \\
\Rightarrow & \langle z = y \rangle \\
 & \exists y / \,(x,y) \in R \wedge (x,y) \notin S \\
\Longleftrightarrow & \langle def.- \rangle \\
 & \exists y / \,(x,y) \in R - S \\
\Longleftrightarrow & \langle def.dom \rangle \\
 & x \in dom\,(R - S)
\end{array}}$$

$d)$
$$\boxed{\begin{array}{cc}
 & y \in im\,(R \cap S) \\
\Longleftrightarrow & \langle def.im \rangle \\
 & \exists x / \,(x,y) \in R \cap S \\
\Longleftrightarrow & \langle def.\cap \rangle \\
 & \exists x / \,(x,y) \in R \wedge (x,y) \in S \\
\Rightarrow & \langle def.im \rangle \\
 & y \in im\,(R) \wedge y \in im\,(S) \\
\Longleftrightarrow & \langle def.\cap \rangle \\
 & y \in im\,(R) \cap im\,(S)
\end{array}}$$

$$
e)\quad \begin{array}{|lc|}
\hline
 & y \in im\,(R \cup S) \\
\Longleftrightarrow & \langle def.im \rangle \\
 & \exists x/\,(x,y) \in R \cup S \\
\Longleftrightarrow & \langle def.\cup \rangle \\
 & \exists x/\,(x,y) \in R \vee (x,y) \in S \\
\Rightarrow & \begin{array}{|c|c|}
\hline
\langle Sup \rangle & \langle Sup \rangle \\
\exists x/\,(x,y) \in R & \exists x/\,(x,y) \in S \\
\langle def.im \rangle & \langle def.im \rangle \\
y \in im\,(R) & y \in im\,(S) \\
\langle i_{\vee} \rangle & \langle i_{\vee} \rangle \\
y \in im\,(R) \vee y \in im\,(S) & y \in im\,(R) \vee y \in im\,(S) \\
\hline
\end{array} \\
 & y \in im\,(R) \vee y \in im\,(S) \\
\Longleftrightarrow & \langle def.\cup \rangle \\
 & y \in im\,(R) \cup im\,(S) \\
\hline
\end{array}
$$

$$
f)\quad \begin{array}{|lc|}
\hline
 & y \in im\,(R) - im\,(S) \\
\Longleftrightarrow & \langle def.- \rangle \\
 & y \in im\,(R) \wedge y \notin im\,(S) \\
\Rightarrow & \langle def.im \rangle \\
 & (\exists x/\,(x,y) \in R) \wedge (\forall z : (z,y) \notin S) \\
\Rightarrow & \langle z = y \rangle \\
 & \exists x/\,(x,y) \in R \wedge (x,y) \notin S \\
\Longleftrightarrow & \langle def.- \rangle \\
 & \exists x/\,(x,y) \in R - S \\
\Longleftrightarrow & \langle def.im \rangle \\
 & y \in im\,(R - S) \\
\hline
\end{array}
$$

3. Sean $R \in \mathcal{P}(A \times B)$ y $S \in \mathcal{P}(B \times C)$ relaciones, construir una relacion $R \circ S \in \mathcal{P}(A \times C)$. Mostrar que esta construcción es asociativa.

   Solución Definimos $R \circ S$ tal que $(a, c) \in R \circ S \iff \exists b \in B / aRb \wedge bSc$. Mostraremos que $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$, donde $T \in \mathcal{P}(C \times D)$:

$$
\begin{array}{cc}
 & (a, d) \in (R \circ S) \circ T \\
\iff & \langle def.\circ \rangle \\
 & \exists c \in C / a (R \circ S) c \wedge cTd \\
\iff & \langle def.\circ \rangle \\
 & \exists c \in C, b \in B / (aRb \wedge bSc) \wedge cTd \\
\iff & \langle asoc.\wedge \rangle \\
 & \exists c \in C, b \in B / aRb \wedge (bSc \wedge cTd) \\
\iff & \langle def.\circ \rangle \\
 & \exists b \in B / aRb \wedge b (S \circ T) d \\
\iff & \langle def.\circ \rangle \\
 & (a, d) \in R \circ (S \circ T)
\end{array}
$$

4. Mostrar que $\mathcal{P}(A \times B)$ es «equivalente» a $A \to \mathcal{P}(B)$.

   Solución Sea $f : \mathcal{P}(A \times B) \mapsto A \to \mathcal{P}(B)$ tal que $f(R)$ es una función que asigna a cada elemento $a \in A$ el conjunto $R(a)$. Veamos que esta función es biyectiva:

   - Inyectividad: Sean $R, S \in \mathcal{P}(A \times B) / R \neq S$ luego existe un par (a, b) tal que pertenece a una relación y no a la otra.

     Supongamos sin perdida de generalidad que $(a, b) \in R \wedge (a, b) \notin S$, entonces $b \in f(R)(a)$ pero $b \notin f(S)(a)$; por lo que $f(R) \neq f(S)$.

   - Sobreyectividad: Sea $g \in A \to \mathcal{P}(B)$, definimos $R \in \mathcal{P}(A \times B)$ tal que $aRb \iff b \in g(a)$. De esta manera, por definicion de f resultará $f(R) = g$.

5. Sean $R, S, S_1, S_2, T, T_1, T_2$ relaciones apropiadas. Probar:

   a) $R \subseteq R \circ R^{-1} \circ R$.

   b) $S_1 \subseteq S_2$ y $T_1 \subseteq T_2$ implica que $(S_1 \circ T_1) \subseteq (S_2 \circ T_2)$.

   c) $(R \circ S) \cap T \subseteq R \circ (S \cap (R^{-1} \circ T))$.

Soluciones

a)

$$
\boxed{
\begin{array}{cc}
 & (a,b) \in R \\
\Rightarrow & \langle def.^{-1} \rangle \\
 & (b,a) \in R^{-1} \\
\Rightarrow & \langle def. \circ \rangle \\
 & (a,a) \in R \circ R^{-1} \\
\Rightarrow & \langle i_{\wedge} \rangle \\
 & a\left(R \circ R^{-1}\right) a \wedge (a,b) \in R \\
\Rightarrow & \langle def. \circ \rangle \\
 & (a,b) \in \left(R \circ R^{-1}\right) \circ R
\end{array}
}
$$

b)

$$
\boxed{
\begin{array}{cc}
 & (x,z) \in S_1 \circ T_1 \\
\Rightarrow & \langle def. \circ \rangle \\
 & \exists y / x S_1 y \wedge y T_1 z \\
\Rightarrow & \langle Hip \rangle \\
 & \exists y / x S_2 y \wedge y T_2 z \\
\Rightarrow & \langle def. \circ \rangle \\
 & (x,z) \in S_2 \circ T_2
\end{array}
}
$$

c) COMPLETAR.

6. Sea $R \in \mathcal{P}\left(A^2\right)$. Probar:

   a) R es reflexiva si y solo si $\Delta_A \subseteq R$.
   b) R es simétrica si y solo si $R \subseteq R^{-1}$.
   c) R es antisimética si y solo si $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$.
   d) R es transitiva si y solo si $R \circ R \subseteq R$.

   donde $\Delta_A = \{(a,a) : a \in A\}$.

Soluciones

a)

- $$
\boxed{
\begin{array}{cc}
 & x \in \Delta_A \\
\Longleftrightarrow & \langle def. \Delta_A \rangle \\
 & x = (a,a) \text{ p. a. } a \in A \\
\Longleftrightarrow & \langle R.\text{reflexiva} \rangle \\
 & x \in R
\end{array}
}
$$

- $$\boxed{\begin{array}{cc} & a \in A \\ \iff & \langle def.\Delta_A \rangle \\ & (a,a) \in \Delta_A \\ \Rightarrow & \langle \Delta_A \subseteq R \rangle \\ & (a,a) \in R \\ \Rightarrow & \langle sup \rangle \\ & (a,a) \in R \wedge (a,a) \notin R \\ \Rightarrow & \langle \text{absurdo} \rangle \\ & R \text{ es reflexiva} \end{array}}$$

b)

- $$\boxed{\begin{array}{cc} & aRb \\ \Rightarrow & \langle R \text{ simétrica} \rangle \\ & bRa \\ \Rightarrow & \langle def.R^{-1} \rangle \\ & aR^{-1}b \end{array}}$$

- $$\boxed{\begin{array}{cc} & aRb \\ \Rightarrow & \langle R \subseteq R^{-1} \rangle \\ & aR^{-1}b \\ \Rightarrow & \langle def.R^{-1} \rangle \\ & bRa \end{array}}$$

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

7. Sean R y S relaciones sobre un conjunto A. Determinar la validez de los siguientes enunciados:

   a) Si R y S son reflexivas, entonces $R \cap S$ tambien lo es.

   b) Si R y S son reflexivas, entonces $R \cup S$ tambien lo es.

   c) Si R y S son simétricas, entonces $R \cap S$ tambien lo es.

   d) Si R y S son simétricas, entonces $R \cup S$ tambien lo es.

   e) Si R y S son antisimétricas, entonces $R \cap S$ tambien lo es.

   f) Si R y S son antisimétricas, entonces $R \cup S$ tambien lo es.

   g) Si R y S son transitivas, entonces $R \cap S$ tambien lo es.

h) Si R y S son transitivas, entonces $R \cup S$ tambien lo es.

i) Si R es reflexiva (simétrica, antisimétrica, transitiva), entonces R^{-1} tambien lo es.

Soluciones

a)

$$\boxed{\begin{array}{cc} & a \in A \\ \Rightarrow & \langle Hip \rangle \\ & aRa \wedge aSa \\ \Longleftrightarrow & \langle def.\cap \rangle \\ & (a,a) \in R \cap S \end{array}}$$

b)

$$\boxed{\begin{array}{cc} & a \in A \\ \Rightarrow & \langle Hip \rangle \\ & aRa \\ \Rightarrow & \langle i_\vee \rangle \\ & aRa \vee aSa \\ \Longleftrightarrow & \langle def.\cup \rangle \\ & (a,a) \in R \cup S \end{array}}$$

c)

$$\boxed{\begin{array}{cc} & (a,b) \in R \cap S \\ \Longleftrightarrow & \langle def.\cap \rangle \\ & aRb \wedge aSb \\ \Rightarrow & \langle Hip \rangle \\ & bRa \wedge bSa \\ \Longleftrightarrow & \langle def.\cap \rangle \\ & (b,a) \in R \cap S \end{array}}$$

$$d)\quad \boxed{\begin{array}{cc} & (a,b)\in R\cup S \\ \iff & \langle def.\cup\rangle \\ & (a,b)\in R\vee(a,b)\in S \\ \Rightarrow & \boxed{\begin{array}{c|c} \langle Sup\rangle & \langle Sup\rangle \\ (a,b)\in R & (a,b)\in S \\ \langle Hip\rangle & \langle Hip\rangle \\ (b,a)\in R & (b,a)\in S \\ \langle i_{\vee}\rangle & \langle i_{\vee}\rangle \\ (b,a)\in R\vee(b,a)\in S & (b,a)\in R\vee(b,a)\in S \end{array}} \\ & (b,a)\in R\vee(b,a)\in S \\ \iff & \langle def.\cup\rangle \\ & (b,a)\in R\cup S \end{array}}$$

- e) COMPLETAR.
- f) Falso: $R=\{(a,b)\}, S=\{(b,a)\}$.
- g) COMPLETAR.
- h) Falso: $R=\{(a,b)\}, S=\{(b,c)\}$.
- i) COMPLETAR.

8. Sea A un conjunto con n elementos. ¿Cuantas relaciones hay en A? ¿Cuantas relaciones tales que $R(A)=A$ hay en A? ¿Cuantas relaciones reflexivas hay en A?

   Solución COMPLETAR.

9. Analizar si las siguientes relaciones son o no relaciones de equivalencia:
   - a) En $\mathbb{Z}$, la relación $aRb \iff a-b$ es par.
   - b) En $\{f : A\to B\}$ las relaciones siguientes:
     1) $fRg \iff f(A)\subseteq g(A)$.
     2) $fRg \iff f(A)=g(A)$.
     3) $fRg \iff f^{-1}(A)=g^{-1}(A)$.
   - c) Isomorfismo de grafos.

Soluciones

a)

- Reflexividad: Sea $x \in \mathbb{Z}$, luego $x - x = 0 = 2 \cdot 0$ por lo que xRx.
- Simetría: Sean $x, y / xRy$, luego $x - y = 2 \cdot k \iff y - x = 2 \cdot -k$, por lo que yRx.
- Transitividad: Sean $x, y, z / xRy \wedge yRz$, luego $x - y = 2 \cdot k$ y $y - z = 2 \cdot k'$. Ahora:

$$x - z = 2k + y - (y - 2k') = 2k - 2k' = 2(k - k')$$

por lo que xRz.

b)

1) Falso: Para $f = \{(a, b), (b, b)\}, g = \{(a, b), (b, a)\}$ resulta $(f, g) \in R$ pero $(g, f) \notin R$.
2) Verdadero: COMPLETAR.
3) Verdadero: COMPLETAR.

c) COMPLETAR.

10. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la siguiente relación:

$$(a, b) R (c, d) \iff a + d = c + b$$

a) Probar que R es una relación de equivalencia.

b) Mostrar en un esquema la clase de equivalencia de $(1, 1)$ definida por R.

Soluciones

a)

- Reflexividad: Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ luego $(x, y) R (x, y) \iff x + y = y + x$, lo cual vale.
- Simetría: Sea $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ luego $(a, b) R (c, d) \iff a + d = c + b = a + d \iff (c, d) R (a, b)$.

- Transitividad: Si $(a,b)\,R\,(c,d)$ y $(c,d)\,R\,(e,f)$ entonces $a+d = c+b$ y $c+f = e+d$. Luego:

$$a+d = c+b \iff a+f+d = c+f+b \iff a+f+d = e+d+b \iff$$

$$\iff a+f = e+b \iff (a,b)\,R\,(e,f)$$

b) $(1,1)\,R\,(c,d) \iff 1+d = c+1 \iff d = c.$

$$\overline{(1,1)} = \{(x,x)\,/x \in \mathbb{R}\}$$

11. Dada $f : A \to B$, probar que $ker\,(f)$ es una relación de equivalencia sobre A, donde:

$$ker\,(f) = \{(a,a')\,/a,a' \in A, f\,(a) = f\,(a')\}$$

Solución

- Reflexividad: Sea $a \in A$, luego $f\,(a) = f\,(a)$ por lo que $(a,a) \in ker\,(f)$.
- Simetría: Sean $a,a' \in A$ tales que $(a,a') \in ker\,(f)$ luego $f\,(a) = f\,(a') = f\,(a) \Rightarrow (a',a) \in ker\,(f)$.
- Transitividad: Sean $x,y,z/xKy \wedge yKz$, luego $f\,(x) = f\,(y) = f\,(z) \Rightarrow (x,z) \in ker\,(f)$.

12. Sea $par : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ la función que toma valor «True» en los pares y «False» en los impares. Calcular $\mathbb{N}/ker\,(par)$.

Solución

- $ker\,(par) = \{(a,a') \in \mathbb{N}^2/par\,(a) = par\,(a')\}$.
- $N/ker\,(par) = \{\{(a,a') \in \mathbb{P}^2\}, \{(a,a') \in \mathbb{I}^2\}\}$.

13. Dar una definicion de $ker\,(f)$ en términos de f, la composición y la inversa de relaciones; y sin usar pertenencia ni comprensión de conjuntos.

    Solución
    $$aRa' \iff f \circ f^{-1}\,(a) = f^{-1}\,(a')$$

14. Dada una funcion $f : A \to B$ y una relación de equivalencia $R \subseteq ker\,(f)$, probar que existen $h : A \to A/R$ y $g : A/R \to B$ tal que $f = g \circ h$.

    Solución Sean $h\,(a) = [a]$, $g\,([a]) = f\,(a)$ y $x, y / f\,(x) = y$. Luego:
    $$g \circ h\,(x) = g\,(h\,(x)) = g\,([x]) = f\,(x)$$