1. Considerar los siguientes diagramas. En ambos casos, probar que si los dos triángulos conmutan, también conmuta el cuadrado.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "r"] & b \arrow[d, "s"] \\ c \arrow[r, "t"'] & d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & b \arrow[d, "s"] \arrow[dl, "r"] \\ c \arrow[r, "t"'] & d \end{tikzcd}$$

Solución

- Sabemos que $s \circ p = r$ y $t \circ q = r$ por lo tanto $s \circ p = r = t \circ q$, es decir que el cuadrado conmuta.
- Sabemos que $r \circ p = q$ y $t \circ r = s$ por lo tanto:

$$s \circ p = (t \circ r) \circ p = t \circ (r \circ p) = t \circ q$$

2.

   a) Sea P un conjunto ordenado. Mostrar que X puede considerarse como una categoría.

   b) Verificar que un monoide M define una categoría con un único objeto cuyas flechas son los elementos de M.

Soluciones

a) Para $(P, \leq)$ definimos:

- $ob\,\mathcal{P} = P$.
- $mor\,\mathcal{P} = \leq$.
- $dom\,(a, b) = a$.
- $cod\,(a, b) = b$.
- $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$.

Luego:

- Para cada objeto a por reflexividad $(a,a) \in \leq$ por lo que $(a,a)\, mor \in \mathcal{P}$; a este morfismo lo llamaremos id_a resultando:
  - $(a,b) \circ id_a = (a,b) \circ (a,a) = (a,b)$.
  - $id_a \circ (c,a) = (a,a) \circ (c,a) = (c,a)$.
- Sean (a,b), (b,c) y (c,d) morfismos, luego por transitividad también son morfismos $\boxed{(a,c)}$, $\boxed{(b,d)}$ y (a,d). Veamos que vale la asociatividad:
  - $((c,d) \circ (b,c)) \circ (a,b) = \boxed{(b,d)} \circ (a,b) = (a,d)$.
  - $(c,d) \circ ((b,c) \circ (a,b)) = (c,d) \circ \boxed{(a,c)} = (a,d)$.

b) Para $(M, 0, +)$ definimos:

- $ob\, \mathcal{M} = \{*\}$.
- $mor\, \mathcal{M} = M$.
- $dom\,(x) = *$.
- $cod\,(x) = *$.
- $x \circ y = y + x$.

Luego:

- Para el único objeto $*$ existe el morfismo $0 = id_*$ de manera tal que:
  - $x \circ id_* = x + 0 = x$.
  - $id_* \circ y = 0 + y = y$.
- Para tres morfismos x, y, z (elementos de M) por clausura de monoide también son morfismos $\boxed{x+y}$ y $\boxed{y+z}$. Veamos que vale la asociatividad:

  $$(x \circ y) \circ z = \left(\boxed{x+y}\right) + z = x + \left(\boxed{y+z}\right) = x \circ (y \circ z)$$

3. Definamos $C^{\rightarrow}$ como la categoría de las flechas de una categoría C, es decir, los objetos de $C^{\rightarrow}$ son las flechas de C. Una flecha de $C^{\rightarrow}$ de $f : A \rightarrow B$ en $g : D \rightarrow E$ es un par (a,b) de flechas de C tales que $g \circ a = b \circ f$.

a) Expresar las flechas de $C^{\to}$ en términos de diagramas conmutativos.

b) Probar que si en el diagrama los cuadrados conmutan, entonces también conmuta el rectángulo exterior:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "p"] \arrow[d, "t"'] & b \arrow[r, "q"] \arrow[d, "u"] & c \arrow[d, "v"] \\
d \arrow[r, "r"'] & e \arrow[r, "s"'] & f
\end{tikzcd}$$

c) Utilizar el apartado anterior para definir la composición en $C^{\to}$.

d) Verificar que $C^{\to}$ es una categoría.

Soluciones

a) El par (a, b) es una flecha de $C^{\to}$ si el siguiente diagrama conmuta en C:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\
D \arrow[r, "g"'] & E
\end{tikzcd}$$

b) Sabemos que $u \circ p = r \circ t$ y $v \circ q = s \circ u$ y queremos ver si $v \circ (q \circ p) = s \circ (r \circ t)$. Por asociatividad en C $v \circ (q \circ p) = (v \circ q) \circ p$, es decir $v \circ (q \circ p) = (s \circ u) \circ p = s \circ (u \circ p) = s \circ (r \circ t)$.

c) Para (r, p) y (s, q) como en el diagrama, definimos $(s, q) \circ (r, p)$ como $(s \circ r, q \circ p)$.

d)

- Para cada $f : A \to B$ en $ob\, C^{\to}$ definimos $id_f = \big(id_{dom(f)}, id_{cod(f)}\big)$.
  - Observemos que id_f es una flecha de $C^{\to}$ pues el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_A"'] & B \arrow[d, "id_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

  - Sean $a : A \to D$ y $b : B \to E$ como en el diagrama, luego:

$$(a, b) \circ id_f = \big(a \circ id_{dom(f)}, b \circ id_{cod(f)}\big) = (a, b)$$

  - Analogamente sean $a : D \to A$ y $b : E \to B$, entonces:

$$id_f \circ (a, b) = \big(id_{dom(f)} \circ a, id_{cod(f)} \circ b\big) = (a, b)$$

- Sean (r, p), (s, q) y (x, w) como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "p"] \arrow[d, "t"'] & b \arrow[r, "q"] \arrow[d, "u"] & c \arrow[r, "w"] \arrow[d, "v"] & g \arrow[d, "y"] \\ d \arrow[r, "r"'] & e \arrow[r, "s"'] & f \arrow[r, "x"] & h \end{tikzcd}$$

$$((r, p) \circ (s, q)) \circ (x, w) = (r \circ s, p \circ q) \circ (x, w) = ((r \circ s) \circ x, (p \circ q) \circ w) =$$

$$= (r \circ (s \circ x), p \circ (q \circ w)) = (r, p) \circ (s \circ x, q \circ w) = (r, p) \circ ((s, q) \circ (x, w))$$

4. Sean C una categoría y A un objeto de C. Definimos $C|A$ como la categoría cuyos objetos son las flechas f de C tales que $cod\,(f) = A$. Una flecha g en $C|A$ de $f : X \to A$ en $h : Y \to A$ es una flecha $g : X \to Y$ de C tal que $f = h \circ g$.

   a) Expresar las flechas de $C|A$ en términos de diagramas conmutativos.

   b) Verificar que $C|A$ es una categoría.

   c) Si P es la categoría definida por un conjunto ordenado y $x \in P$, determinar $P|x$.

Soluciones

a) Si el siguiente diagrama conmuta en C, entonces g es una flecha de $C|A$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \\ Y \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

b)

- Dados dos morfismos $g : X \to Y$ y $p : Y \to Z$ en $C|A$ definimos la composición en $C|A$ como la composición en C y para cada objeto $f : X \to A$ definimos el morfismo $id_f = id_{dom(f)}$.
  - Observemos que $id_{dom}(f)$ es un morfismo de la categoría pues el siguiente diagrama conmuta:

    $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_f"'] & A \\ X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

  - Una flecha α que parte de f debe tener tipo $X \to Y$, luego $\alpha \circ id_f = \alpha$.
  - Una flecha β que llega a f debe tener tipo $W \to X$, luego $id_f \circ \beta = \beta$.
- Sean g, p, q como en el siguiente diagrama conmutativo:

  $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \\ Y \arrow[ur, "h"'] \arrow[d, "p"'] & \\ Z \arrow[uur, bend right, "q"] \arrow[r, "r"'] & W \arrow[uu, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

  luego $(r \circ p) \circ g = r \circ (p \circ g)$ por asociatividad en C.

c) COMPLETAR.

5. Probar que en Set los monomorfismos (epimorfismos) son exactamente las funciones inyectivas (respectivamente sobreyectivas).

   Solución COMPLETAR.

6. Sean C una categoría y f, g flechas de C. Probar que:

   a) Si f y g son monomorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.
   b) Si $g \circ f$ es un monomorfismo, f también lo es.
   c) Si f y g son epimorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.
   d) Si $g \circ f$ es un epimorfismo, g también lo es.
   e) Si f^{-1} es la inversa de f y g^{-1} es la inversa de g, entonces $f^{-1} \circ g^{-1}$ es la inversa de $g \circ f$.

   Soluciones

   a) COMPLETAR.
   b) COMPLETAR.
   c) COMPLETAR.
   d) COMPLETAR.
   e) COMPLETAR.

7. Mostrar que una flecha de una categoría puede ser monomorfismo y epimorsmo y no isomorfismo.

   Solución COMPLETAR.

8. Considerar que en el siguiente diagrama los 4 trapecios conmutan.

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[rrr] \arrow[dr, "p"] \arrow[ddd] & & & f \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] & \\
& c \arrow[r] & d \arrow[dr, "q"] & \\
g \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & h
\end{tikzcd}$$

Probar que:

a) Si el cuadrado interno conmuta, también lo hace el cuadrado externo.

b) Si p es epimorfismo y q es monomorfismo, entonces si el cuadrado externo conmuta, también lo hace el cuadrado interno.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

9. Sean C y D dos categorías. Se define $C \times D$ de la siguiente manera: los objetos de $C \times D$ son de la forma (A, B) para $A \in C$ y $B \in D$ y las flechas $(f, g) : (A, B) \to (A', B')$ donde $f : A \to A' \in C$ y $g : B \to B' \in D$.

a) Verificar que $C \times D$ es una categoría.

b) Probar que $P_1 : C \times D \to C$, $P_1 (A, B) = A$ y $P_2 : C \times D \to D$, $P_2 (A, B) = B$, definen functores.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

10. Dados dos funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, definir un funtor que componga ambos. ¿Es posible definir una categoría cuyos objetos sean las categorías y sus flechas sean los funtores entre estas?

    Solución COMPLETAR.

11. Si $f : A \to B$ en Set, entonces definimos $f^{-1}(X) = \{a \in A : f(a) \in X\}$ donde $X \subseteq B$. Probar que $I : Set \to Set$ es un funtor contravariante, llevando: $I(A) = \mathcal{P}(A)$ y $I(f) = f^{-1}$.

    Solución COMPLETAR.

12. Se ha visto que puede considerarse a un monoide como una categoría con un único objeto, ¿Qué es un funtor entre dos categorías de este tipo? ¿Y entre categorías formadas a partir de conjuntos ordenados?

    Solución COMPLETAR.

13. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, para cada objeto X de $\mathcal{C}$ definimos $Hom(X, -) : \mathcal{C} \to Set$ donde $Hom(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$ y $Hom(X, f)(g) = f \circ g$. Probar que $Hom(X, -)$ es efectivamente un funtor para cada X. Definir análogamente un funtor $Hom(-, X)$.

    Solución COMPLETAR.

14. Dado un semigurpo $(S, \cdot)$, podemos construir un monoide $(S', \cdot')$ donde $S' = S \cup \{e\}$, $(0, x) \cdot' (0, y) = (0, x \cdot y)$ y $(1, e) \cdot' x = x = x \cdot' (1, e)$. Utilizando esta construcción, definir un funtor $F : Sem \to Mon$ y probar que es un monomorfismo en Cat.

    Solución COMPLETAR.

15. Definimos la asignación $Fr : Set \to Mon$ tal que $Fr(X) = X^*$ [1] y $Fr(f)(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)$. Usando el funtor U :

[1] X^* es el monoide de las palabras sobre el alfabeto X con la concatenación como operación. Puede pensar en las palabras de X como las listas de elementos de X.

$Mon \to Set$ que se olvida de la estructura de monoide, consideramos $i : X \to U(Fr(X))$ la función que lleva un elemento x de X a la palabra x.

a) Probar que Fr es un funtor.

b) Probar que dado $f : X \to U(M)$ en Set donde M es un monoide, puedo construir una única $\overline{f} : Fr(X) \to M$ en Mon tal que $U(\overline{f}) \circ i = f$ en Set[2].

c) ¿A cuál monoide es isomorfo $Fr(X)$ donde X es un conjunto de un solo elemento?

d) ¿Este funtor preserva productos?

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

16. Mostrar que dos objetos terminales en una categoría son isomorfos. Por dualidad, ¿qué se puede decir de los objetos iniciales?

Solución COMPLETAR.

17. ¿Cuáles son los objetos terminales en $Set \times Set$? ¿Cuáles en $Set^{\to}$? ¿En un conjunto ordenado considerado como categoría? ¿Y cuáles son los objetos iniciales?

Solución COMPLETAR.

18. Dar una categoría sin objetos iniciales. Dar una sin objetos finales. Dar una donde los objetos finales e iniciales coincidan.

[2]Cuando un monoide como $Fr(X)$ satisface esta propiedad, decimos que es el monoide libre sobre X.

Solución COMPLETAR.

19. Sea $\mathcal{C}$ con 0. Verificar que si un morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ admite núcleo (conúcleo), éste es único salvo isomorfismo.

    Solución COMPLETAR.

20. Sean $\mathcal{C}$ una categoría con 0 y $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Probar que $p : Y \to C$ es un conúcleo de f en $\mathcal{C}$ si y solo si p^{op} es un núcleo de f^{op} en $\mathcal{C}^{op}$.

    Solución COMPLETAR.

21. Probar que si dos morfismos $f, g : X \to Y$ admiten egalizador (coegalizador), éste es único salvo isomorfismo.

    Solución COMPLETAR.

22. Sean $\mathcal{C}$ un categoría con 0 y $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Probar que $ker\,(f)\,(coker\,(f))$ coincice con el egalizador (coegalizador) de f y 0.

    Solución COMPLETAR.

23. Sean $f, g : X \to Y$ dos morfismos en Set. Probar que el coegalizador de f y g es el cociente de Y por la relación de equivalencia $y \equiv z$ si y sólo si existe $x \in X$tal que $y = f\,(x)$ y $z = g\,(x)$ o bien $y = g\,(x)$ y $z = f\,(x)$.

    Solución COMPLETAR.

24. Mostrar las siguientes identidades:

    a) $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id$.
    b) $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$.
    c) $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle$.
    d) $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k)$.
    e) $\langle [f, g]\,, [h, k] \rangle = [\langle f, h \rangle\,, \langle g, k \rangle]$.

Soluciones

a) COMPLETAR.
b) COMPLETAR.
c) COMPLETAR.
d) COMPLETAR.
e) COMPLETAR.

25. Sean x e y elementos de un conjunto ordenado P. ¿Cuál sería el producto de x e y considerando P como una categoría?

    Solución COMPLETAR.

26. Sean P y Q conjuntos ordenados. ¿Cuál es el coproducto de P y Q en $Poset$?

    Solución COMPLETAR.

27. Dar una categoría donde algún par de objetos carecen de producto.

    Solución COMPLETAR.

28. Probar los siguientes isomorfismos:

    a) $A \times B \cong B \times A$.
    b) $A \times 1 \cong A$.
    c) $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$.

    Soluciones

    a) COMPLETAR.
    b) COMPLETAR.
    c) COMPLETAR.

29. ¿Grp tiene productos? ¿Tiene coproductos? ¿Tiene objeto inicial? ¿Tiene objeto final? ¿Y Mon?

Solución COMPLETAR.

30. Un ωCPO es un conjunto ordenado con mínimo (notado $\perp$) tal que toda cadena ascendente numerable $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \cdots$ (que notamos $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ tiene un supremo $\sqcup \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Una función monótona entre dos ωCPO es continua si $f\left(\sqcup \{a_i\}_{i=0}^{\infty}\right) = \sqcup \{f(a_i)\}_{i=0}^{\infty}$ para toda cadena ascendente numerable $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$.

    a) Probar que podemos armar una categoría cuyos objetos son ωCPO y cuyas flechas son funciones continuas.

    b) ¿Esta categoría tiene productos? En caso afirmativo, describirlos. ¿Y coproductos?

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

31. Probar o refutar: sea C una categoría con productos, y $F : C \to C$ un functor, entonces siempre existe un único morfismo $F(A \times B) \to FA \times FB$.

Solución COMPLETAR.

32. Sea $U : Mon \to Set$ el functor que olvida la estructura de monoide. Definimos además $U^2 : Mon \to Set$ que en objetos lleva $(X, \otimes, e) \mapsto X \times X$. Probar que a U^2 se lo puede denotar de estructura functorial.

Solución COMPLETAR.

33. El *pullback* de dos morfismos $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$ consiste en un objeto P junto con dos morfismos $p_1 : P \to X$, $p_2 : P \to Y$ tal que $f \circ p_1 = g \circ p_2$, y además si existe otro objeto Q con dos morfismos $q_1 : Q \to X$, $q_2 : Q \to Y$ tal que $f \circ q_1 = g \circ q_2$, entonces existe un único morfismo $u : Q \to P$ tal que $p_1 \circ u = q_1$ y $p_2 \circ u = q_2$. A continuación, un diagrama que muestra la situación:

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & Z
\end{tikzcd}
$$

Probar que el pullback de dos morfismos, si existe, es único salvo isomorfismo.

Solución COMPLETAR.