

1. Dar diagramas para:

- a) Los retículos con 5 elementos.
- b) Los retículos con 6 elementos.
- c) El retículo de los subespacios vectoriales de \mathbb{R}^2 .

Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.

2. Interpretar \wedge y \vee en los siguientes conjuntos ordenados:

- a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, donde A es un conjunto arbitrario.
- b) $(\mathbb{N}, |)$, donde $|$ denota la relación «divide a».
- c) Álgebra de Lindenbaum-Tarski (ver ejercicio práctica anterior).

Soluciones

a)

- $\wedge = \cap$.
- $\vee = \cup$.

b)

- $\wedge = mcd$.
- $\vee = mcm$.

c)

- $\wedge = \wedge$.
- $\vee = \vee$.

3. Sea (X, \wedge, \vee) un retículo.

a) Probar que para todos $x, y, z \in X$ se satisface:

1) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

2) $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

3) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.

b) Probar que si una de las desigualdades anteriores es una igualdad, las restantes también lo son.

Soluciones

a)

1) Sabemos que $y \wedge z \leq y$ y $y \wedge z \leq z$ luego por compatibilidad tenemos $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee y$ y $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z$ y nuevamente por compatibilidad $(x \vee (y \wedge z)) \wedge (x \vee (y \wedge z)) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Finalmente concluimos lo propuesto por idempotencia.

2) Trivial por dualidad.

3) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

4. Sea (X, \wedge, \vee) un retículo. Probar que los siguientes subconjuntos de X son subretículos:

a) $A = \{x \in X : x \leq a\}$.

b) $B = \{x \in X : b \leq x\}$.

c) $C = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$.

Soluciones

a) Sabemos que $a \in A$ luego $A \neq \emptyset$. Además sean $x, y \in A$ luego $x \leq a$ y $y \leq a$, pero por compatibilidad $x \vee y \leq a \vee a = a$ por lo que $x \vee y \in A$. Análogamente $x \wedge y \in A$.

b) Análogo.

c) Análogo.

5. Sea (L, \preceq) un retículo. Un polinomio p en n variables es una función $p : L^n \rightarrow L$ que pertenece al conjunto inductivo P_L :

- Para $i \in \{1, \dots, n\}$, $\pi_i \in P_L$ donde $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$.
- Si $f, g \in P_L$ entonces $f \vee g \in P_L$, donde $(f \vee g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) \vee g(\bar{x})$.
- Si $f, g \in P_L$ entonces $f \wedge g \in P_L$, donde $(f \wedge g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) \wedge g(\bar{x})$.

Sea f un polinomio en n variables, y $x_i \preceq y_i$ para cada i de 1 hasta n . Probar que $f(x_1, \dots, x_n) \preceq f(y_1, \dots, y_n)$.

Solución COMPLETAR.

6. Un retículo L se llama *modular* si para todos $a, b, c \in L$ resulta

$$a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

Probar que son equivalentes:

- a) L es modular.
- b) $a \geq c \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ para todos $a, b, c \in L$.
- c) $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ para todos $a, b, c \in L$.
- d) $a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para todos $a, b, c \in L$.

Soluciones

- $\boxed{a \Rightarrow b}$: Sea $a \geq c$ luego por ser L modular

$$\begin{aligned} c \vee (b \wedge a) &= (c \vee b) \wedge a \\ \iff (b \wedge a) \vee c &= a \wedge (c \vee b) \\ \iff (a \wedge b) \vee c &= a \wedge (b \vee c) \end{aligned}$$

- $\boxed{b \Rightarrow c}$: Sabemos que $a \vee c \geq a$ y por hipótesis $(a \vee c) \wedge (b \vee a) = ((a \vee c) \wedge b) \vee a$, luego aplicando varias veces conmutatividad obtenemos

$$a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

- $\boxed{c \Rightarrow d}$: Trivial por dualidad.
- $\boxed{d \Rightarrow a}$: Sea $a \leq c$ entonces $a \vee c = c$ y por hipótesis para cualquier b , resulta

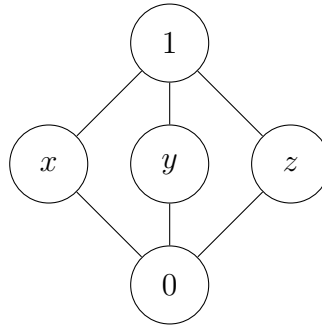
$$\begin{aligned}
 a \wedge (b \vee (a \wedge c)) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\
 \iff a \vee (b \wedge (a \vee c)) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\
 \iff a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge c
 \end{aligned}$$

7. Probar que todo retículo distributivo es modular. ¿Es cierta la recíproca?

Solución Sea $a \leq c$ entonces $a \wedge c = a$, luego por distributividad:

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$$

La recíproca no vale, pues basta considerar el siguiente contraejemplo:



donde puede observarse que es modular pero $y \vee (x \wedge z) = y \neq 1 = (y \vee x) \wedge (y \vee z)$.

8. Sea (X, \wedge, \vee) un retículo. Probar que:

- Si \vee tiene elemento neutro 0, entonces $a \wedge 0 = 0$ para todo $a \in X$.
- Si \wedge tiene elemento neutro 1, entonces $a \vee 1 = 1$ para todo $a \in X$.

Soluciones

- a) Por propiedad, como $0 \vee a = a$, entonces $0 \wedge a = 0$.
- b) Por propiedad, como $a \wedge 1 = a$, entonces $a \vee 1 = 1$.
9. Sean (X, \wedge, \vee) y (Y, \wedge', \vee') retículos con 0 y 1; y $h : X \rightarrow Y$ un homomorfismo de retículo. Mostrar con un ejemplo que no siempre $h(1_X) = 1_Y$ o $h(0_X) = 0_Y$

Solución Basta considerar $id : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ y $id : -\mathbb{N} \rightarrow -\mathbb{N}_0$.

10. Sea (X, \wedge, \vee) un retículo acotado (con 0 y 1). Dado $a \in X$, si existe $b \in X$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$, b se llama *complemento* de a , y en caso de ser único se nota \bar{a} . Probar que:

- a) $\bar{\bar{a}} = a$.
- b) $\bar{0} = 1$.
- c) Si X es distributivo, $\overline{(a \wedge b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$ y $\overline{(a \vee b)} = \bar{a} \wedge \bar{b}$.

Soluciones

- a) Sabemos que $a \wedge \bar{a} = 0$ y $\bar{\bar{a}} \wedge \bar{a} = 0$, por lo que a y \bar{a} son complementos de \bar{a} , luego como el complemento es único debe ser $\bar{\bar{a}} = a$.
- b) Sabemos $0 \vee \bar{0} = 1$ y como $0 \vee x = x$ (pues 0 es mínimo) entonces $0 \vee \bar{0} = \bar{0}$ por lo que $\bar{0} = 1$.
- c) Para mostrar que el complemento de $a \wedge b$ es $\bar{a} \vee \bar{b}$ debemos ver que $(\bar{a} \vee \bar{b}) \vee (a \wedge b) = 1$ y $(\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (a \wedge b) = 0$.
- $(\bar{a} \vee \bar{b}) \vee (a \wedge b) = ((\bar{a} \vee \bar{b}) \vee a) \wedge ((\bar{a} \vee \bar{b}) \vee b) = (1 \vee \bar{b}) \wedge (1 \vee \bar{a}) = 1$.
 - $(\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (a \wedge b) = (\bar{a} \wedge (a \wedge b)) \vee (\bar{b} \wedge (a \wedge b)) = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge a) = 0$.

La otra igualdad se deduce por dualidad.

11. Sean (X, \wedge, \vee) y (Y, \wedge', \vee') retículos y $h : X \rightarrow Y$ un homomorfismo de retículo. Probar que:
- a) $h(X)$ es un subretículo de Y .
- b) Si X es distributivo, $h(X)$ es distributivo.

Soluciones

a)

- Sabemos que $X \neq \emptyset$ por ser retículo, luego $h(X) \neq \emptyset$.
- Sean $a', b' \in h(X) \subseteq Y$ tales que $h(a) = a'$ y $h(b) = b'$. Sabemos que $h(a \wedge b) \in Y$ y como h es un homomorfismo resulta $h(a \vee b) = h(a) \vee' h(b) = a' \vee' b' \in Y$. Analogamente para $a' \wedge' b'$.

b) Sean $a', b', c' \in h(X) \subseteq Y$ tales que $h(a) = a'$, $h(b) = b'$ y $h(c) = c'$, luego $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ y como h es un homomorfismo resultan:

- $h(a \wedge (b \vee c)) = h(a) \wedge' h(b \vee c) = a' \wedge' (b' \vee' c')$.
- $h((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) = h(a \wedge b) \vee' h(a \wedge c) = (h(a) \wedge' h(b)) \vee' (h(a) \wedge' h(c)) = (a' \wedge' b') \vee' (a' \wedge' c')$

La otra ley también vale por dualidad.

12. Verificar que todo isomorfismo de retículo se corresponde con un isomorfismo de conjuntos ordenados.

Solución Sean (X, \wedge, \vee) y (Y, \wedge', \vee') retículos y $f : X \rightarrow Y$ un isomorfismo de retículo.

- Veamos primero que si f es isomorfismo de retículo también lo es f^{-1} . Sean $a', b' \in Y$ tales que $f(a) = a'$ y $f(b) = b'$ luego sabemos que $f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b) = a' \vee' b'$ por lo que

$$f^{-1}(a' \vee' b') = a \vee b = f^{-1}(a') \vee f^{-1}(b')$$

Analogamente para $a \wedge b$.

- Ahora $a, b \in X/a \preceq b$ resultará $a \vee b = b$ y como f es isomorfismo:

$$\begin{aligned} a \preceq b &\iff a \vee b = b \iff f(a \vee b) = f(b) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(a) \vee' f(b) = f(b) \iff f(a) \preceq' f(b) \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} f(a) \preceq' f(b) &\iff f(a) \vee' f(b) = f(b) \iff f^{-1}(f(a) \vee' f(b)) = f^{-1}(f(b)) \iff \\ &\iff f^{-1}(f(a)) \vee f^{-1}(f(b)) = b \iff a \vee b = b \iff a \preceq b \end{aligned}$$

13. Probar que el retículo potencia de cualquier conjunto es completo.

Solución Sean $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup)$ un retículo y $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, debemos ver que $X \cap Y$ y $X \cup Y$ están en $\mathcal{P}(A)$; o lo que es lo mismo, que están contenidos en A .

- Como $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ entonces $X \subseteq A$ y $Y \subseteq A$, luego:

$$\alpha \in X \cap Y \iff \alpha \in X \wedge \alpha \in Y \Rightarrow \alpha \in A$$

- Como $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ entonces $X \subseteq A$ y $Y \subseteq A$, luego:

$$\alpha \in X \cup Y \iff \alpha \in X \vee \alpha \in Y$$

- Si $\alpha \in X \Rightarrow \alpha \in A$ (pues $X \subseteq A$).
- Si $\alpha \in Y \Rightarrow \alpha \in A$ (pues $Y \subseteq A$).

14. *Knaster-Tarski*. Sea (L, \sqsubseteq) un retículo completo y $f : L \rightarrow L$ una función monótona. Probar que el mínimo punto fijo de f es $y = \bigwedge D$ donde $D = \{x \in L \mid f(x) \sqsubseteq x\}$.

Solución

- Veamos que y es punto fijo, es decir que $f(y) = y$ o lo que es lo mismo: $f(y) \sqsubseteq y$ y $y \sqsubseteq f(y)$.
 - $f(y) \sqsubseteq y$: Sea $x \in D$ luego por definición $f(x) \sqsubseteq x$. Como y es cota inferior de D resulta $y \sqsubseteq x$ y como f es monótona $f(y) \sqsubseteq f(x)$. Ahora por transitividad $f(y) \sqsubseteq x$, es decir que $f(y)$ también es cota inferior de D y como y es la mayor de las cotas inferiores de D resulta $f(y) \sqsubseteq y$.
 - $y \sqsubseteq f(y)$: Sabemos que y es cota inferior de D , es decir $\forall x \in D : y \sqsubseteq x$ y como f es monótona resulta $f(y) \sqsubseteq f(x)$ por lo que $f(y)$ también es cota inferior de D ; pero y es la menor de ellas luego $y \sqsubseteq f(y)$.
- Resta ver que y es el menor de los puntos fijos. Como todos los puntos fijos están en D , debemos ver que: $\forall x \in D : y \sqsubseteq x$, lo cual se deduce sabiendo que y es cota inferior de D .

15. Aplicar el resultado del ejercicio anterior para definir el conjunto inductivo de los números pares P como el mínimo punto fijo de una función monótona, donde P se define como el menor conjunto para el cual:

- $0 \in P$.
- Si $n \in P$, entonces $n + 2 \in P$.

Solución COMPLETAR.

16. Sea (P, \leq) un orden total. Probar que P es un retículo distributivo.

Solución COMPLETAR.

17. *Retículo completo.* Sea (P, \leq) un orden. Probar que si todo subconjunto de P tiene supremo, entonces todo subconjunto de P tiene ínfimo.

Solución COMPLETAR.

18. Un *álgebra de Boole* es un retículo acotado distributivo con complementos.

- a) Dar un ejemplo de álgebra de Boole de los retículos vistos en clase.
- b) Probar que $O_n = (\{x \in \mathbb{N} : x|n\}, |)$ es un álgebra de Boole si n es producto de factores primos distintos.
- c) Enunciar y probar la ley de De Morgan para las álgebras de Boole.
- d) Si (L, \leq) es un álgebra de Boole, entonces para $x, y \in L$ si $x \leq y$ entonces $\bar{y} \leq \bar{x}$.
- e) Si $(L, \leq), (L', \leq')$ son álgebras de Boole, entonces todo isomorfismo de conjuntos ordenados de L en L' preserva complementos.
- f) Sean $(L, \leq), (L', \leq')$ álgebras de Boole. Construir un orden para $L \times L'$ y probar que es un álgebra de Boole.

Soluciones

- a)* COMPLETAR.
- b)* COMPLETAR.
- c)* COMPLETAR.
- d)* COMPLETAR.
- e)* COMPLETAR.
- f)* COMPLETAR.