

1. Obtener la Forma clausal equivalente de las siguientes formulas:

- a)  $\forall x (\neg P(x) \vee \exists y (P(y) \wedge Q(y)))$
- b)  $\exists x \forall y (P(x, y) \wedge Q(x) \wedge \neg R(y))$
- c)  $\forall x (P(x) \rightarrow \neg \forall y (Q(x, y) \rightarrow \exists z P(z)))$

### Soluciones

- a)
  - $\forall x (\neg P(x) \vee \exists y (P(y) \wedge Q(y)))$
  - $\forall x \exists y (\neg P(x) \vee (P(y) \wedge Q(y)))$
  - $\forall x (\neg P(x) \vee (P(f(x)) \wedge Q(f(x))))$
  - $\neg P(x) \vee (P(f(x)) \wedge Q(f(x)))$
  - $(\neg P(x) \vee P(f(x))) \wedge (\neg P(x) \vee Q(f(x)))$
- b)
  - $\exists x \forall y (P(x, y) \wedge Q(x) \wedge \neg R(y))$
  - $\forall y (P(c, y) \wedge Q(c) \wedge \neg R(y))$
  - $P(c, y) \wedge Q(c) \wedge \neg R(y)$
- c)
  - $\forall x (P(x) \rightarrow \neg \forall y (Q(x, y) \rightarrow \exists z P(z)))$
  - $\forall x (\neg P(x) \vee \neg \forall y (Q(x, y) \rightarrow \exists z P(z)))$
  - $\forall x (\neg P(x) \vee \neg \forall y (\neg Q(x, y) \vee \exists z P(z)))$
  - $\forall x (\neg P(x) \vee \exists y \neg (\neg Q(x, y) \vee \exists z P(z)))$
  - $\forall x (\neg P(x) \vee \exists y (Q(x, y) \wedge \neg \exists z P(z)))$
  - $\forall x (\neg P(x) \vee \exists y (Q(x, y) \wedge \forall z \neg P(z)))$
  - $\forall x \exists y \forall z (\neg P(x) \vee (Q(x, y) \wedge \neg P(z)))$
  - $\forall x \forall z (\neg P(x) \vee (Q(x, f(x)) \wedge \neg P(z)))$
  - $\neg P(x) \vee (Q(x, f(x)) \wedge \neg P(z))$
  - $(\neg P(x) \vee Q(x, f(x))) \wedge (\neg P(x) \vee \neg P(z))$

2. ¿Se deduce  $(p \wedge q)$  de  $(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$ ? Contestar utilizando el método de resolución para la lógica proposicional.

### Solución

- 1)  $p \vee q$
  - 2)  $\neg p \vee q$
  - 3)  $p \vee \neg q$
  - 4)  $\neg p \vee \neg q$
  - 5)  $\neg q \vee \neg q$  (4 y 3)
  - 6)  $\neg q$  (equivalencia lógica)
  - 6)  $p$  (6 y 1)
  - 7)  $q$  (7 y 2)
  - 8)  $\emptyset$  (7 y 6)
3. Demuestre por resolución la validez del siguiente argumento: «Si continúa la lluvia el río aumentará. Si el río aumenta entonces el puente será arrastrado. Si la continuación de la lluvia hace que el puente sea arrastrado entonces un solo camino no será suficiente para la ciudad. O bien un solo camino es suficiente para la ciudad, o los ingenieros han cometido un error. Por lo tanto los Ingenieros han cometido un error».

### Solución Sean:

- |   |  |
|---|--|
| ■ $ll \equiv$ «continúa la lluvia».       | ■ $c \equiv$ «un camino será suficiente».            |
| ■ $r \equiv$ «el río aumentará».          |  |
| ■ $p \equiv$ «el puente será arrastrado». | ■ $e \equiv$ «los ingenieros han cometido un error». |

Nuestro argumento es:

$$((ll \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p) \wedge ((ll \rightarrow p) \rightarrow \neg c) \wedge (c \vee e)) \rightarrow e$$

En forma clausal:

- $(ll \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p) \wedge ((ll \rightarrow p) \rightarrow \neg c) \wedge (c \vee e)$
- $(\neg ll \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg(\neg ll \vee p) \vee \neg c) \wedge (c \vee e)$
- $(\neg ll \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge ((ll \wedge \neg p) \vee \neg c) \wedge (c \vee e)$
- $(\neg ll \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (ll \vee \neg c) \wedge (\neg p \vee \neg c) \wedge (c \vee e)$

Agregamos  $\neg e$  y aplicamos resolución:

- |                         |                          |
|-------------------------|--------------------------|
| 1) $\neg ll \vee r$     | 7) $c$ (5 y 6)           |
| 2) $\neg r \vee p$      | 8) $\neg p$ (7 y 4)      |
| 3) $ll \vee \neg c$     | 9) $\neg r$ (8 y 2)      |
| 4) $\neg p \vee \neg c$ | 10) $\neg ll$ (9 y 1)    |
| 5) $c \vee e$           | 11) $\neg c$ (10 y 3)    |
| 6) $\neg e$             | 12) $\emptyset$ (11 y 7) |

4. Determinar si las siguientes fórmulas son lógicamente válidas usando resolución, es decir, la formula implicada es consecuencia lógica de la primera:

- a)  $\exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$   
b)  $\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

### Soluciones

- a) Pasando a forma clausal:

- |                                 |                                       |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| ■ $\exists x \forall y R(x, y)$ | ■ $\neg(\forall y \exists x R(x, y))$ |
| ■ $\forall y R(c, y)$           | ■ $\exists y \neg \exists x R(x, y)$  |
|                                 | ■ $\exists y \forall x \neg R(x, y)$  |
|                                 | ■ $\exists y \neg R(x, y)$            |
| ■ $\boxed{R(c, y)}$             | ■ $\boxed{\neg R(x, k)}$              |

Resolviendo:

- 1)  $R(c, y)$
- 2)  $\neg R(x, k)$
- 3)  $\emptyset$  (1 y 2  $[c/x, k/y]$ )

b) Pasando a forma clausal:

- |  |  |
|--|--|
| ■ $\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ | ■ $\neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))$    |
|  | ■ $\forall x \neg (P(x) \wedge Q(x))$    |
|  | ■ $\forall x (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$ |
| ■ $\boxed{P(c) \wedge Q(x)}$             | ■ $\boxed{\neg P(x) \vee \neg Q(x)}$     |

Resolviendo:

- 1)  $P(c)$
- 2)  $Q(x)$
- 3)  $\neg P(x) \vee \neg Q(x)$
- 4)  $\neg P(x)$  (2 y 3)
- 5)  $\emptyset$  (1 y 4  $[c/x]$ )

5. Demostrar utilizando resolución, que  $H$  es consecuencia lógica de  $F$  y  $G$ , es decir,  $F \wedge G \wedge \neg H$  es insatisfactible; donde:

- $F \equiv \exists x (P(x) \wedge \forall y (D(y) \rightarrow Q(x, y)))$
- $G \equiv \forall x (P(x) \wedge \forall y (C(y) \rightarrow \neg Q(x, y)))$
- $H \equiv \forall x (D(x) \rightarrow \neg C(x))$

**Solución** Pasando a forma clausal:

- $\exists x (P(x) \wedge \forall y (D(y) \rightarrow Q(x, y)))$
- $\exists x (P(x) \wedge \forall y (\neg D(y) \vee Q(x, y)))$
- $\exists x (P(x) \wedge (\neg D(y) \vee Q(x, y)))$
- $\boxed{P(c) \wedge (\neg D(y) \vee Q(c, y))}$

- $\forall x (P(x) \wedge \forall y (C(y) \rightarrow \neg Q(x, y)))$
- $\forall x (P(x) \wedge \forall y (\neg C(y) \vee \neg Q(x, y)))$
- $\boxed{P(x) \wedge (\neg C(y) \vee \neg Q(x, y))}$
- $\neg \forall x (D(x) \rightarrow \neg C(x))$
- $\neg \forall x (\neg D(x) \vee \neg C(x))$
- $\exists x \neg (\neg D(x) \vee \neg C(x))$
- $\exists x (D(x) \wedge C(x))$
- $\boxed{D(k) \wedge C(k)}$

Resolviendo:

- |                                  |                                      |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $P(c)$                        | 6) $C(k)$                            |
| 2) $\neg D(y) \vee Q(c, y)$      | 7) $Q(c, k)$ (5 y 2 $[k/y]$ )        |
| 3) $P(x)$                        | 8) $\neg C(k)$ (7 y 4 $[c/x, k/y]$ ) |
| 4) $\neg C(y) \vee \neg Q(x, y)$ | 9) $\emptyset$ (8 y 6)               |
| 5) $D(k)$                        |                                      |

6. Probar usando resolución el conocido ejemplo de «Todos los hombres son mortales, Sócrates es hombre entonces Sócrates es mortal».

**Solución**

- |                          |                            |
|--------------------------|----------------------------|
|                          | 3) $\neg M(s)$             |
| 1) $\neg H(x) \vee M(x)$ | 4) $M(s)$ (1 y 2 $[s/x]$ ) |
| 2) $H(s)$                | 5) $\emptyset$ (3 y 4)     |

7. Dados los siguientes hechos y relaciones,

- |                                |   |
|--------------------------------|---|
| a) Un ungulado es un animal.   | g) La rana vive en la tierra y en el agua.    |
| b) Un pez es un animal.        |   |
| c) Una cebra es un ungulado.   | h) Los peces viven en el agua.                |
| d) Un arenque es un pez.       |   |
| e) Un tiburón es un pez.       | i) Un animal que vive en el agua puede nadar. |
| f) La cebra vive en la tierra. |   |

utilizar resolución para contestar si existen animales que pueden nadar.  
Encontrar a partir del relato, que animal/es pueden nadar.

### Solución

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| ■ $U(x) \rightarrow A(x)$             | ■ $V(\text{cebra}, \text{tierra})$                    |
| ■ $P(x) \rightarrow A(x)$             | ■ $V(\text{rana}, \text{tierra})$                     |
| ■ $U(\text{cebra})$                   | ■ $V(\text{rana}, \text{agua})$                       |
| ■ $P(\text{arenque})$                 | ■ $P(x) \rightarrow V(x, \text{agua})$                |
| ■ $P(\text{tiburon})$                 | ■ $(A(x) \wedge V(x, \text{agua})) \rightarrow N(x)$  |
|                                       | ■ $\therefore \exists x A(x) \wedge N(x)$             |
| 1) $\neg U(x) \vee A(x)$              | 10) $\neg A(x) \vee \neg V(x, \text{agua}) \vee N(x)$ |
| 2) $\neg P(x) \vee A(x)$              | 11) $\neg A(x) \vee \neg N(x)$                        |
| 3) $U(\text{cebra})$                  | 12) $\neg A(x) \vee \neg V(x)$ (11 y 10)              |
| 4) $P(\text{arenque})$                | 13) $\neg P(x) \vee \neg V(x)$ (12 y 2)               |
| 5) $P(\text{tiburon})$                | 14) $\neg P(x) \vee \neg P(x)$ (13 y 9)               |
| 6) $V(\text{cebra}, \text{tierra})$   | 15) $\neg P(x)$ (equivalencia lógica)                 |
| 7) $V(\text{rana}, \text{tierra})$    | 16) $\emptyset$ (15 y 4 [ $x/\text{arenque}$ ])       |
| 8) $V(\text{rana}, \text{agua})$      | 17) $\emptyset$ (15 y 4 [ $x/\text{tiburon}$ ])       |
| 9) $\neg P(x) \vee V(x, \text{agua})$ |   |

Pueden nadar el tiburón y el arenque.

8. Considérense las siguientes sentencias:

- |   |  |
|---|--|
| ■ A John le gusta toda clase de comida. | y no le mate es comida.                |
| ■ Las manzanas son comida.              | ■ Bill come cacahuets y aún está vivo. |
| ■ El pollo es comida.                   | ■ Sue come todo lo que come Bill.      |
| ■ Cualquier cosa que uno coma           |  |

Utilizar resolución para mostrar que a John le gustan los cacahuets.

## Solución

- $\forall x (Comida(x) \rightarrow Gusta(John, x))$
- $\forall x (Manzana(x) \rightarrow Comida(x))$
- $Comida(Pollo)$
- $\forall x \forall y ((Come(x, y) \wedge \neg Mata(y, x)) \rightarrow Comida(y))$
- $Come(Bill, Cacahuets)$
- $\neg Mata(Cacahuets, Bill)$
- $\forall x (Come(Bill, x) \rightarrow Come(Sue, x))$

- 1)  $\neg Comida(x) \vee Gusta(John, x)$
- 2)  $\neg Manzana(x) \vee Comida(x)$
- 3)  $Comida(Pollo)$
- 4)  $\neg Come(x, y) \vee Mata(y, x) \vee Comida(y)$
- 5)  $Come(Bill, Cacahuets)$
- 6)  $\neg Mata(Cacahuets, Bill)$
- 7)  $\neg Come(Bill, x) \vee Come(Sue, x)$
- 8)  $\neg Gusta(John, Cacahuets)$
- 9)  $\neg Comida(Cacahuets)$  (8 y 1  $[Cacahuets/x]$ )
- 10)  $\neg Come(x, Cacahuets) \vee Mata(Cacahuets, x)$  (9 y 4  $[Cacahuets/y]$ )
- 11)  $\neg Come(Bill, Cacahuets)$  (10 y 6  $[Bill/x]$ )
- 12)  $\emptyset$  (11 y 5)

9.

- |   |  |
|---|--|
| ■ Juan tiene un perro y Pedro tiene un gato.            | ■ Nadie que ame a los animales los mata.                           |
| ■ Todos los que tienen una mascota aman a los animales. | ■ Juan, Pedro o María mataron a la gata de Luis que se llama Iris. |

Probar que María mató a Iris, usando resolución. Analizar las adaptaciones necesarias para resolver utilizando PROLOG.

## Solución

### ■ Argumento:

- $\exists x \exists y (Perro(x) \wedge Gato(y) \wedge Tiene(Juan, x) \wedge Tiene(Pedro, y))$
- $\forall x \forall y ((Tiene(x, y) \wedge Mascota(y)) \rightarrow (\forall z (Animal(z) \rightarrow Ama(x, z))))$
- $\forall x \forall y ((Animal(y) \wedge Ama(x, y)) \rightarrow (\forall z (Animal(z) \rightarrow \neg Mata(x, z))))$
- $\forall x (Gato(x) \rightarrow Mascota(x))$
- $\forall x (Perro(x) \rightarrow Mascota(x))$
- $\forall x (Mascota(x) \rightarrow Animal(x))$
- $Gato(Iris)$
- $Tiene(Luis, Iris)$
- $Mata(Juan, Iris) \vee Mata(Pedro, Iris) \vee Mata(Maria, Iris)$

### ■ Forma clausal:

- $Perro(a) \wedge Gato(b) \wedge Tiene(Juan, a) \wedge Tiene(Pedro, b)$
- $\neg Tiene(x, y) \vee \neg Mascota(y) \vee \neg Animal(z) \vee Ama(x, z)$
- $\neg Animal(y) \vee \neg Ama(x, y) \vee \neg Animal(z) \vee \neg Mata(x, z)$
- $\neg Gato(x) \vee Mascota(x)$
- $\neg Perro(x) \vee Mascota(x)$
- $\neg Mascota(x) \vee Animal(x)$
- $Gato(Iris)$
- $Tiene(Luis, Iris)$
- $Mata(Juan, Iris) \vee Mata(Pedro, Iris) \vee Mata(Maria, Iris)$

### ■ Versión simplificada:

- $\exists x (TieneAnimal(Juan, x))$
- $\exists x (TieneAnimal(Pedro, x))$
- $\forall x \forall y (TieneAnimal(x, y) \rightarrow AmaAnimales(x))$
- $\forall x (AmaAnimales(x) \rightarrow \neg MataIris(x))$
- $MataIris(Juan) \vee MataIris(Pedro) \vee MataIris(Maria)$



■ Resolución:

- 1)  $TieneAnimal(Juan, a)$
- 2)  $TieneAnimal(Pedro, b)$
- 3)  $\neg TieneAnimal(x, y) \vee AmaAnimales(x)$
- 4)  $\neg AmaAnimales(x) \vee \neg MataIris(x)$
- 5)  $MataIris(Juan) \vee MataIris(Pedro) \vee MataIris(Maria)$
- 6)  $\neg MataIris(Maria)$
- 7)  $MataIris(Juan) \vee MataIris(Pedro)$  (6 y 5)
- 8)  $\neg AmaAnimales(Juan) \vee MataIris(Pedro)$  (7 y 4  $[Juan/x]$ )
- 9)  $\neg AmaAnimales(Juan) \vee \neg AmaAnimales(Pedro)$  (8 y 4  $[Pedro/x]$ )
- 10)  $\neg TieneAnimal(Juan, y) \vee \neg AmaAnimales(Pedro)$  (9 y 3  $[Juan/x]$ )
- 11)  $\neg AmaAnimales(Pedro)$  (10 y 1  $[a/y]$ )
- 12)  $\neg TieneAnimal(Pedro, y)$  (11 y 3  $[Pedro/x]$ )
- 13)  $\emptyset$  (12 y 2  $[b/y]$ ).

■ En Prolog:

```

tieneanimal(juan, a).
tieneanimal(pedro, b).

amaanimales(X) :- tieneanimal(X,Y).
nomatairis(X) :- amaanimales(X).

sospechoso(juan).
sospechoso(pedro).
sospechoso(maria).

matairis(X) :- sospechoso(X), not(nomatairis(X)).

%% matairis(X).
%% X = maria.

```

10.

- |   |   |
|---|---|
| ■ Frodo era un Hobbit.  | rra Media eran leales a Sauron o lo odiaban.              |
| ■ Sam era un Hobbit.  |   |
| ■ Todos los Hobbits vivían en la Comarca                        | ■ Todos los seres son leales a alguien.                   |
| ■ Todos los que vivían en la Comarca vivían en la Tierra Media. | ■ Uno sólo intenta destruir a alguien a quien no es leal. |
| ■ Todos los que vivían en la tie-                               | ■ Frodo intentó destruir a Saurón.                        |

Probar si odia Frodo a Sauron aplicando resolución. Utilizando un programa en PROLOG contestar si alguien que vive en la Comarca odia a Sauron.

### Solución

- 1)  $Hobbit(Frodo)$
- 2)  $Hobbit(Sam)$
- 3)  $\neg Hobbit(x) \vee Comarca(x)$
- 4)  $\neg Comarca(x) \vee Media(x)$
- 5)  $\neg Media(x) \vee Leal(x, Sauron) \vee Odia(x, Sauron)$
- 6)  $Leal(x, f(x))$
- 7)  $\neg IDestruir(x, y) \vee \neg Leal(x, y)$
- 8)  $IDestruir(Frodo, Sauron)$
- 9)  $\neg Odia(Frodo, Sauron)$
- 10)  $\neg Media(Frodo) \vee Leal(Frodo, Sauron)$  (9 y 5  $[Frodo/x]$ )
- 11)  $\neg Comarca(Frodo) \vee Leal(Frodo, Sauron)$  (10 y 4  $[Frodo/x]$ )
- 12)  $\neg Hobbit(Frodo) \vee Leal(Frodo, Sauron)$  (11 y 3  $[Frodo/x]$ )
- 13)  $Leal(Frodo, Sauron)$  (12 y 1)
- 14)  $\neg IDestruir(Frodo, Sauron)$  (13 y 7  $[Frodo/x, Sauron/y]$ )
- 15)  $\emptyset$  (14 y 8)

```

hobbit(frodo).
hobbit(sam).

comarca(X) :- hobbit(X).

media(X) :- comarca(X).

lealoodia(X,sauron) :- media(X).

noleal(X,Y) :- idestruir(X,Y).

odia(X,Y) :- lealoodia(X,Y), noleal(X,Y).

idestruir(frodo,sauron).

%% odia(X,Y).
%% X = frodo,
%% Y = sauron .

```

11.

- |   |   |
|---|---|
| ■ Los miembros del club de bridge de la calle Elm son Joe, Sally, Bill y Ellen. | ■ El cónyuge de cada persona casada del club también está en el club. |
| ■ Joe está casado con Sally.  | ■ La última reunión fue en la casa de Joe                             |
| ■ Bill es hermano de Ellen  |   |

A partir de estos hechos (y algunos hechos de conocimiento del dominio) determine usando resolución si “La última reunión fue en casa de Sally.”

**Solución** COMPLETAR.