Función de variable aleatoria

20. Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $p_X(x) = x/6$, donde $x = 1, 2, 3$ e $Y=(X-2)^2$.

   a) Determine la distribución de probabilidad de Y.
   b) Calcule E(Y) y V(Y).

Resolución:
X es una variable aleatoria discreta cuya distribución de probabilidad $p_X(x)$ es

$$p_X(x) = \begin{cases} x/6 & \text{si} \quad x = 1,\ 2,\ 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\mathrm{Y{=}H(X)} = (\mathrm{X}-2)^2$ es una variable aleatoria discreta

   a) Analicemos los valores posibles de Y

Si X=1 => Y=H(1)=1
Si X=2 => Y=H(2)=0
Si X=3 => Y=H(3)=1

Luego, calculamos la distribución de probabilidad $p_Y(y)$ de la variable Y en base a los valores de $p_X(x)$

X	$p_X(x)$
1	1/6
2	2/6
3	3/6

$\Rightarrow$

Y	$p_Y(y)$
1	$p_X(1)+ p_X(3)=4/6$
0	$p_X(2)=2/6$

Por lo tanto

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2/3 & \text{si} \quad y = 1 \\ 1/3 & \text{si} \quad y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   b)
      Esperanza de Y: E(Y)= 2/3 * 1 + 1/3 * 0 = 2/3
      $E(Y^2)= 2/3 * 1^2 + 1/3 * 0^2 = 2/3$
      Varianza de Y: $V(Y)= E(Y^2)-(E(Y))^2=2/3-4/9=2/9$

23. Un cierto tipo de instrumento electrónico tiene una duración X (en unidades de 1.000 hs.) que varía aleatoriamente con función densidad $f_X(x) = e^{-x}$, $x > 0$. El costo de fabricar tal instrumento es de \$2. El fabricante vende el instrumento por \$5, pero garantiza un reembolso total si $X \leq 0{,}9$. Determine la esperanza matemática de la utilidad por instrumento.

Resolución:
X:"duración de un instrumento electrónico en unidades de 1000 horas"

X es una variable aleatoria continua cuya función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ es

$$X \sim \mathrm{Exp}(1) \qquad f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Por ser una distribución exponencial, sabemos que su función de distribución acumulada $F_X(x)$ resulta

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

y además
E(X)=1
V(X)=1

Definimos:
C: "costo de fabricación del instrumento en pesos"
V: "precio de venta del instrumento"
R: "reembolso en pesos si la duración es menor a 900 horas"
T: "utilidad por instrumento en pesos"

Veamos los valores que asumen estas variables:
C=2 es una constante
V=5 es una constante

$$R = H(x) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad x \leq 0,9 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0,9 \end{cases}$$ es una variable aleatoria discreta

La utilidad T resulta

$$T = 5 - 2 - R = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad r = 5 \\ 3 & \text{si} \quad r = 0 \end{cases} = J(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \leq 0,9 \\ 3 & \text{si} \quad x > 0,9 \end{cases}$$ es una variable aleatoria discreta

Calculamos la probabilidad para cada valor posible de T:
$P(T=-2)=P(X\leq 0,9)=F_X(0,9)=1-e^{-0,9}\approx 0,59$
$P(T=3)=P(X>0,9)=1-F_X(0,9)=e^{-0,9}\approx 0,41$

Por lo tanto, la distribución de probabilidad $p_T(t)$ es

$$p_T(t) = \begin{cases} 0,59 & \text{si } t = -2 \\ 0,41 & \text{si } t = 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente, la esperanza matemática de T es
E(T) = 0,59 * (-2) + 0,41 * 3 = 0,05
Luego, la utilidad promedio por instrumento será $0,05.

25. Considere una v.a X ~ U[0, 1]. Halle la función de densidad de la v.a. Y cuando:
   a) Y = $a + (b - a)$X, $b > a$.
   b) Y = $-\frac{1}{\lambda}$ ln X, $\lambda > 0$.

Resolución:
Sabemos que X es una variable aleatoria continua y

$$\mathrm{X}\sim\mathrm{U}[0,1] \qquad \mathrm{f_X}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como X tiene una distribución uniforme, su función de distribución acumulada $\mathrm{F_X}(x)$ es

$$\mathrm{F_X}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le \mathrm{x} \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \tag{7}$$

a) Definimos Y=H(X)=a+(b-a)X, con b>a.

Analizamos los valores posibles para Y a partir de los valores posibles de X

$$0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le (b-a)x \le b-a \Leftrightarrow a \le a+(b-a)x \le b \Leftrightarrow a \le y \le b$$

Luego, Y es una variable aleatoria continua definida en el intervalo [a,b] porque X es v.a. continua y H(X) es una función continua por ser la ecuación de una recta en el plano.

Sabemos que H(X) es continua, estrictamente monótona creciente y derivable en el conjunto de números reales por ser la ecuación de una recta, en particular lo sigue siendo en el intervalo [0,1].
Por lo tanto, podemos calcular la función de densidad de probabilidad $\mathrm{f_Y}(y)$ directamente a partir de $\mathrm{f_X}(x)$ como

$$\mathrm{f_Y}(y)=\mathrm{f_X}(\mathrm{H}^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial \mathrm{H}^{-1}(y)}{\partial y} \right|$$

Sabemos que

$$\mathrm{Y} = \mathrm{H}(\mathrm{X}) = a + (b-a)\mathrm{X} \Rightarrow \frac{\mathrm{Y}-a}{b-a} = \mathrm{X} = \mathrm{H}^{-1}(\mathrm{Y})$$

Luego, podemos escribir

$$\mathrm{f_X}(\mathrm{H}^{-1}(y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le \mathrm{H}^{-1}(y) \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \le y \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{7.a.1}$$

$$\left| \frac{\partial \mathrm{H}^{-1}(y)}{\partial y} \right| = \left| \frac{1}{b-a} \right| = \frac{1}{b-a} \quad \text{porque } b>a \tag{7.a.2}$$

Por lo tanto, utilizando los resultados encontrados en (7.a.1) y (7.a.2), podemos decir que

$$\text{Y\textasciitilde U[a,b]} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le y \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este resultado nos muestra que, a partir de una variable con distribución uniforme en el intervalo [0,1], es posible obtener otra variable aleatoria distribuida uniformemente en un intervalo [a,b] deseado usando la función H(X) =a+(b-a)X, con b>a.

Ahora resolvemos el problema a partir de la función de distribución acumulada de Y.
Analizamos los valores posibles para Y a partir de los valores posibles de X

$$0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le (b-a)x \le b-a \Leftrightarrow a \le a+(b-a)x \le b \Leftrightarrow a \le y \le b$$

Luego, Y es una variable aleatoria continua definida en el intervalo [a,b] porque X es v.a. continua y H(X) es una función continua por ser la ecuación de una recta en el plano.
Buscamos $F_Y(y)$ en base a la función de distribución acumulada de X:

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(a+(b-a)X \le y)=P(X \le \dfrac{y-a}{b-a}) = F_X(\dfrac{y-a}{b-a})$

Utilizando la ecuación (7), podemos escribir

$$F_Y(y)=F_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dfrac{y-a}{b-a} < 0 \\ \dfrac{y-a}{b-a} & \text{si } 0 \le \dfrac{y-a}{b-a} \le 1 \\ 1 & \text{si } \dfrac{y-a}{b-a} > 1 \end{cases}$$

Analizando cada expresión para $F_Y(y)$

$F_Y(y)=0$ si $\dfrac{y-a}{b-a} < 0 \Leftrightarrow y < a$

$F_Y(y)=1$ si $\dfrac{y-a}{b-a} > 1 \Leftrightarrow y > b$

$F_Y(y)= \dfrac{y-a}{b-a}$ si $0 \le \dfrac{y-a}{b-a} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le y-a \le b-a \Leftrightarrow a \le y \le b$

Por lo tanto, $F_Y(y)$ resulta

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < a \\ \dfrac{y-a}{b-a} & \text{si } a \le y \le b \\ 1 & \text{si } y > b \end{cases}$$

Luego, la función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$ resulta

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le y \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En base a la expresión hallada para $f_Y(y)$ es posible afirmar que Y es una variable aleatoria continua con distribución uniforme en el intervalo [a,b], es decir $Y \sim U[a,b]$.

b) Definimos Y = $-\frac{1}{\lambda}$ ln X, $\lambda > 0$.

Analizamos los valores posibles para Y a partir de los valores posibles de X. Como ln X no está definido para X=0, analizaremos el intervalo (0,1]

$$0 < x \le 1 \Leftrightarrow \ln x \le \ln(1) = 0 \Leftrightarrow 0 \le -\frac{1}{\lambda}\ln x \Leftrightarrow 0 \le y$$

Luego, Y es una variable aleatoria continua definida en el conjunto de reales positivos porque X es una variable aleatoria continua y H(X) = $-\frac{1}{\lambda}$ ln X es una función continua en el intervalo (0,1].

Como H(X) es continua, estrictamente monótona y derivable en el conjunto de números reales positivos, podemos calcular la función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$ directamente a partir de $f_X(x)$ como

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right|$$

Sabemos que

$$Y = H(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln X \Rightarrow e^{-\lambda Y} = X = H^{-1}(Y)$$

Luego, podemos escribir

$$f_X(H^{-1}(y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < H^{-1}(y) \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (7.b.1)$$

Por otra parte

$$\left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right| = \left| e^{-\lambda y} \cdot (-\lambda) \right| = \lambda\, e^{-\lambda y} \quad \text{porque } \lambda > 0 \qquad (7.b.2)$$

Luego, de (7.b.1) y (7.b.2), podemos decir que

$$Y \sim Exp(\lambda) \qquad f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \le 0 \end{cases}$$

Debemos aclarar que se asignó 0 a la función de distribución de probabilidad cuando $y \le 0$.

Este resultado nos muestra que, a partir de una variable con distribución uniforme en el intervalo (0,1), es posible obtener otra variable aleatoria con distribución exponencial con un parámetro λ dado usando la función H(X)= $-\frac{1}{\lambda}$ ln X, con $\lambda > 0$.

Ahora resolvemos el problema a partir de la función de distribución acumulada de Y.
Buscamos $F_Y(y)$ en base a la función de distribución acumulada de X:

$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(-\frac{1}{\lambda}\ln X \leq y)=P(-\ln X \leq \lambda y)=P(e^{-\ln X} \leq e^{\lambda y})=P(\frac{1}{X} \leq e^{\lambda y})=P(X \geq e^{-\lambda y})=1- P(X \leq e^{-\lambda y})$

En el intervalo analizado, y de acuerdo a la ecuación (7), podemos decir que
$P(Y\leq y) =1- P(X \leq e^{-\lambda y})=1- e^{-\lambda y}$
Luego

$$F_Y(y)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda y} & \text{si } y>0 \\ 0 & \text{si } y\leq 0 \end{cases}$$

Finalmente, podemos decir que

$$Y\sim \text{Exp}(\lambda) \qquad f_Y(y)=\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}=\begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda y} & \text{si } y>0 \\ 0 & \text{si } y\leq 0 \end{cases}$$

27. En una empresa embotelladora de jugos, la cantidad de líquido por botella es una variable aleatoria X~N(500 ml, 30 ml).
    a) Calcule la probabilidad de que una botella contenga menos de 430 ml.
    b) Las botellas se venden en pack de 12 de ellas. Calcule la probabilidad de que en un pack, por lo menos 3 de ellas contengan menos de 430 ml.
    c) El costo de producción de cada botella es \$0,20 y cada pack se vende al supermercadista a \$4,80. Si en el pack se detectan 3 o más unidades con menos de 430 ml, el pack se considera defectuoso y la empresa reembolsa al supermercadista el doble del dinero recibido por el pack. Calcule la ganancia promedio por cada pack.

Resolución:
Sabemos que X: "cantidad de líquido de una botella en ml" es una variable aleatoria continua y

$$X\sim N(500\text{ ml}, 30\text{ ml}) \qquad f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\;30}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-500}{30}\right)^2}, \; x\in \mathbb{R}$$

a) Definimos la variable estandarizada $Z=\frac{X-500}{30}$.

Luego

$$P(X<430)=P\left(Z<-\frac{7}{3}\right)\approx 0{,}0099$$

b) Suponiendo que el contenido de líquido de cada botella es independiente del contenido de las demás, definimos la variable aleatoria Y como

Y:"número de botellas que contienen menos de 430 ml en un pack de 12 botellas"

Y es una variable aleatoria discreta que se distribuye como una binomial de esta manera:

$$Y \sim Bi(12,\ 0{,}0099)$$

$$P(Y = y) = \binom{12}{y}\ 0{,}0099^{y}\ (1\text{-}0{,}0099)^{12-y}, \quad y = \overline{0{,}12}$$

Entonces

P(Y≥3)=1-P(Y<3)=1-P(Y=0)-P(Y=1)-P(Y=2)=0,0002

c) Definimos:

C: "costo de producción por pack de 12 botellas en $"

V: "precio de venta en $ del pack"

R: "reembolso en $ si hay al menos 3 botellas con menos de 430 ml"

G: "ganancia por pack en $"

Veamos los valores que asumen estas variables:

C = 0,20 * 12 = 2,4 es una constante

V= 4,8 es una constante

$$R=H(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ y < 3 \\ 2 \cdot 4{,}8 = 9{,}6 & \text{si } \ y \geq 3 \end{cases}$$ es una variable aleatoria discreta

La ganancia G resulta

$$G=V\text{-}C\text{-}R= \begin{cases} 2{,}4 & \text{si } \ r = 9{,}6 \\ -7{,}2 & \text{si } \ r = 0 \end{cases} = J(y) = \begin{cases} 2{,}4 & \text{si } \ y < 3 \\ -7{,}2 & \text{si } \ y \geq 3 \end{cases}$$

G es una variable aleatoria discreta.

P(G=-7,2)=P(Y≥3)=0,0002

P(G=2,4)=P(Y<3)=1-0,0002=0,9998

Entonces, la distribución de probabilidad $p_G(g)$ resulta

$$p_G(g) = \begin{cases} 0{,}0002 & \text{si } g = -7{,}2 \\ 0{,}9998 & \text{si } g = 2{,}4 \end{cases}$$

Finalmente, la ganancia promedio por pack será la esperanza matemática de G

E(G) = -7,2 * P(G=-7,2) + 2,4 * P(G=2,4) = -7,2 * 0,0002 + 2,4 * 0,9998 = 2,39808