Práctica 0: MATRICES - DETERMINANTES - SISTEMAS LINEALES

1. Encontrar matrices $A, B \in \mathcal{M}_2[\mathbb{R}]$ tales que:
   a) $AB = 0$, $A \neq 0$ y $B \neq 0$.
   b) $AB = 0$ y $BA \neq 0$.
   c) $AA = A$, $A \neq 0$ y $A \neq \mathbb{I}$.
   d) $AA = 0$ y $A \neq 0$.
   e) $A^2 = -\mathbb{I}$.
   f) $AB = -BA$, sin que $AB = 0$.
2. Sean
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   a) La primera fila de AB es una combinación lineal de todas las filas de B ¿Cuáles son los escalares de esta combinación, y cuál es la primera fina de AB? ¿Y la segunda fila?.
   b) La primera columna de AB es una combinación lineal de todas las columnas de A. ¿Cuáles son los escalares de esta combinación, y cuál es la primera columna de AB? ¿Y la segunda columna.
3. Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justificar y mostrar un contraejemplo en el caso de que sea FALSO.
   a) Si la primera y la tercera columna de B son iguales, también lo son la primera y la tercera columna de AB.
   b) Si la primera y la tercera fila de B son iguales, también los son la primera y la tercera fila de AB.
   c) Si la primera y la tercera fila de A son iguales, también lo son la primera y la tercera fila de AB.
   d) $(AB)^2 = A^2B^2$.
4. Demostrar $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}[\mathbb{R}]$, $\forall C \in \mathcal{M}_{n,m}[\mathbb{R}]$, y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ que vale:
   a) $(A^t)^t = A$,
   b) $(A + B)^t = A^t + B^t$,
   c) $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$,
   d) $(AC)^t = C^t A^t$
5. La matriz de rotación del plano x, y en un ángulo θ es
$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$
   Recordando algunas identidades trigonométricas, verifique que $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1+\theta_2)$. ¿Qué matriz es $A(\theta)A(-\theta)$.
6. *a*) Sean A y B dos matrices triangulares inferiores. Muestre que el producto AB es una matriz triangular inferior, y que si A es invertible, A^{-1} también es triangular inferior.
   b) Sean A y B dos matrices triangulares superiores. Muestre que el producto AB es una matriz triangular superior, y que si A es invertible, A^{-1} también es triangular superior.
   c) Sean A y B dos matrices diagonales. Muestre que el producto AB es una matriz diagonal, y que si A es invertible, A^{-1} también es una matriz diagonal.
7. Determinar 4 vectores distintos $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de modo tal que resulte $\det(A) = 0$, siendo
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & 11 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

8. Dados n escalares $x_1, \cdot, x_n$ se llama determinante de Vandermonde al siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

   a) Verificar que el determinante de Vandermonde es igual a $\prod_{k<j, j=2}^{n} (x_j - x_k)$.

   Notar que es condición suficiente y necesaria para que el determinante de una colección de n escalares sea 0, que dos de dichos escalares sean iguales.

   b) Determinar para que valores de α se anula el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ 2 & 1 & -2 & \alpha \\ 4 & 1 & 4 & \alpha^2 \\ 8 & 1 & -8 & \alpha^3 \end{vmatrix}.$$

9. Sea $A \in \mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$ probar que, si existe, su inversa es única.

10. Definición: Dada una matriz A, se dice que el rango de A es r, si existe una submatriz cuadrada de orden r con determinante distinto de cero y toda submatriz cuadrada de orden $r+1$ tiene determinante nulo, conviniendo que el rango de la matriz nula es 0.

    a) Demostrar que el rango r de una matriz cuadrada A de orden n es menor que n si y solo si $|A| = 0$.

    b) Calcular el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Resolver los siguientes sistemas utilizando eliminación gaussiana.

$$a)\left|\begin{array}{l} x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6 \end{array}\right. \qquad b)\left|\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 = -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -8 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 = 7 \end{array}\right. \qquad c)\left|\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right. .$$