

1. Probar que en el conjunto  $\{a, b\}$  hay tres órdenes posibles. ¿Y en  $\{a, b, c\}$  y  $\{a, b, c, d\}$ ?

**Solución** COMPLETAR.

2. En  $(\mathbb{N}, |)$ , donde  $|$  denota la relación «divide a»:
  - a) Verificar que  $(\mathbb{N}, |)$  es un conjunto ordenado.
  - b) ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?
  - c) Si  $S$  es el conjunto de los divisores de 60, graficar el conjunto ordenado inducido por  $|$  en  $S$ .

### Soluciones

a)

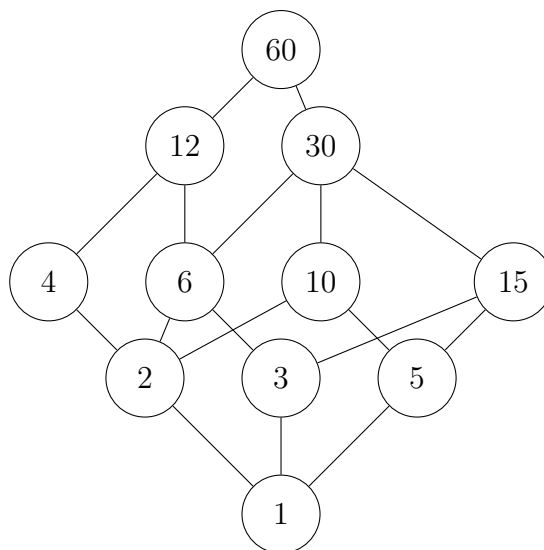
- Reflexividad: Sea  $n \in \mathbb{N}$ , luego  $n = n * 1 \iff n|n$ .
- Antisimetría: Sean  $n, m \in \mathbb{N}/n|m \wedge m|n$  luego  $n = m * c$  y  $m = n * k$ . Finalmente:

$$n = n * k * c \iff 1 = k * c \iff k = c = 1$$

por lo que  $n = m * 1 = m$ .

b) No lo es pues para cualquier par de primos  $p_1$  y  $p_2$  resulta:  $p_1 \parallel p_2$ .

c)



3. *Yoneda Lemma*: Probar que en un preorden  $(P, \preceq)$  vale:  $x \preceq y \iff \forall z : z \preceq x \Rightarrow z \preceq y$ .

### Solución

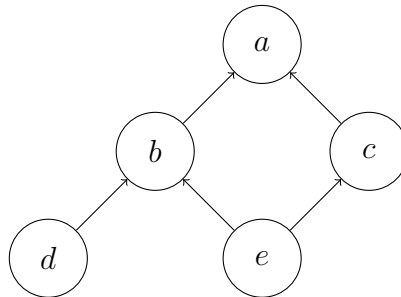
- $\Rightarrow$ : Sea  $z \preceq x$ , luego por transitividad:  $z \preceq x \preceq y$ .
  - $\Leftarrow$ : Por reflexividad tenemos  $x \preceq x$  y por hipótesis:  $x \preceq x \Rightarrow x \preceq y$ .
4. Sea  $A$  un conjunto arbitrario. Verificar que  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$  es un conjunto ordenado. ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?

### Solución

- Reflexividad: Sea  $X \in \mathcal{P}(A)$ , luego  $x \in X \Rightarrow x \in X$  por lo que  $X \subseteq X$ .
- Antisimetría: Sean  $X, Y \in \mathcal{P}(A)$  luego si  $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$  resulta  $X = Y$  por definición.
- Transitividad: Sean  $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A) / X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z$  luego  $x \in X \Rightarrow x \in Y \Rightarrow x \in Z$  por lo que  $X \subseteq Z$ .

No necesariamente es totalment ordenado. Por ejemplo para  $A = \{1, 2, 3\}$  resulta  $\{1, 2\} \parallel \{2, 3\}$ .

5. Sea  $V = \{a, b, c, d, e\}$ . El grafo dirigido de la siguiente figura define un orden en  $V$  de la siguiente manera:  $x \preceq y \iff x = y$  o existe un  $xy$ -camino dirigido.



a) Insertar el símbolo correcto ( $\preceq, \succeq, \parallel$ ) entre cada par de elementos:

- |              |              |
|--------------|--------------|
| 1) $a$ $e$ . | 3) $d$ $a$ . |
| 2) $b$ $c$ . | 4) $c$ $d$ . |

b) ¿Es un conjunto totalmente ordenado? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

### Soluciones

a)

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $a$ $\succeq$ $e$ .   | 3) $d$ $\preceq$ $a$ .   |
| 2) $b$ $\parallel$ $c$ . | 4) $c$ $\parallel$ $d$ . |

b)

- No es totalmente ordenado pues existen elementos que no son comparables.
- $a$  es elemento máximo. No existe elemento mínimo.
- $d$  y  $e$  son minimales.  $a$  es maximal.

6. Sean  $(P, \preceq)$  un conjunto ordenado,  $X$  un conjunto, y  $f : X \rightarrow P$  una función. Se define la relación  $H$  sobre elementos de  $X$  como  $xHx' \iff f(x) \preceq f(x')$ . ¿Que tipo de relación es  $H$ ? Dar condiciones para que  $H$  sea un conjunto ordenado.

### Solución

- Reflexividad:  $x \in X \Rightarrow f(x) \in P \Rightarrow f(x) \preceq f(x) \iff xHx$ .
- Transitividad: Sean  $x, y, z \in X/xHy \wedge yHz$  luego:

$$f(x) \preceq f(y) \wedge f(y) \preceq f(z) \Rightarrow f(x) \preceq f(z) \iff xHz$$

- Antisimetría: Si agregamos la hipótesis de que  $f$  sea inyectiva, entonces si  $xHy \wedge yHx$  resultara:

$$f(x) \preceq f(y) \wedge f(y) \preceq (x) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

7. En  $(Prop, D)$ , donde  $Prop$  son las fórmulas del cálculo proposicional y  $\phi D \psi \iff \{\phi\} \vdash \psi$ :

- Verificar si  $(Prop, D)$  es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.
- ¿La relación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

### Soluciones

a)

- Reflexividad: Sea  $\phi \in Prop$  luego por la regla trivial  $\{\phi\} \vdash \phi$ .
- Transitividad: Sean  $\phi, \psi, \gamma$  tales que  $\{\phi\} \vdash \psi$  y  $\{\psi\} \vdash \gamma$  luego:
  - $\{\phi\} \cup \{\psi\} \vdash \psi \wedge \gamma$  (introducción de la conjunción en ambas hipótesis).
  - $\{\phi\} \cup \{\psi\} \vdash \gamma$  (eliminación de la conjunción en 1).
  - $\{\phi\} \vdash \psi \rightarrow \gamma$  (introducción de la implicación en 2).
  - $\{\phi\} \cup \{\phi\} = \{\phi\} \vdash \gamma$  (eliminación de la implicación en hipótesis y 3).
- Es un conjunto preordenado pues la antisimetría no se cumple como demuestra el siguiente ejemplo:  $\{\perp\} \vdash p \wedge \neg p$  y  $\{p \wedge \neg p\} \vdash \perp$  pero  $\perp \neq p \wedge \neg p$ .

b)

- La relación no es total pues, por ejemplo,  $p \parallel q$ .
- Cualquier proposición semanticamente equivalente a  $\perp$  es mínimo ya que  $\forall \phi \in PROP : \{\perp\} \vdash \phi$ . No existe elemento máximo.
- No existen maximales pues para cualquier  $\phi \in PROP$  siempre ocurre  $\{\phi\} \vdash \phi \vee \psi$  pero  $\{\phi \vee \psi\} \not\vdash \phi$ . Todos los mínimos son minimales.

8. En  $(Prop, I)$ , donde  $\phi I \psi \iff \emptyset \vdash \phi \rightarrow \psi$ .
- Verificar si  $(Prop, I)$  es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.
  - ¿La relación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?
  - Explique el nexo entre esta relación y la del ejercicio anterior.

### Soluciones

- a)
- Reflexividad: Sea  $\phi \in Prop$  luego por la regla trivial  $\{\phi\} \vdash \phi$  y por introducción de la implicación  $\emptyset \vdash \phi \rightarrow \phi$ .
  - Transitividad: Sean  $\phi, \psi, \gamma$  tales que  $\emptyset \vdash \phi \rightarrow \psi$  y  $\emptyset \vdash \psi \rightarrow \gamma$  luego:
    - 1)  $\{\phi\} \vdash \phi$  (trivial).
    - 2)  $\{\phi\} \vdash \psi$  (eliminación de la implicación en 1 e hipótesis).
    - 3)  $\{\phi\} \vdash \gamma$  (eliminación de la implicación en 2 e hipótesis).
    - 4)  $\emptyset \vdash \phi \rightarrow \gamma$  (introducción de la implicación en 3).
  - También es un preorden pues la antisimetría falla por la misma razón que el ejercicio anterior.
- b) COMPLETAR.
- c) Claramente si  $\phi D \psi$  también  $\phi I \psi$  pues si  $\{\phi\} \vdash \psi$  es un seciente válido también lo es  $\emptyset \vdash \phi \rightarrow \psi$ .

9. Sea  $(P, \preceq)$  un preorden. Construir un conjunto ordenado  $(P/\sim, \sqsubseteq)$ , donde  $x \sim y$  si y solo si  $x \preceq y$  y  $y \preceq x$ , tal que  $\pi : P \rightarrow P/\sim$  sea monótona.

Aplicar esta construcción a la relación  $(Prop, D)$  del ejercicio anterior. Para este caso particular, la construcción se llama «álgebra de Lindenbaum-Tarski».

**Solución** Definimos  $X \sqsubseteq Y \iff \exists x \in X, y \in Y/x \preceq y$ . Veamos que  $\pi$  es monótona: sean  $x, y/x \preceq y$  luego  $x \in \pi(x) \wedge y \in \pi(y)$  por lo que  $\pi(x) \sqsubseteq \pi(y)$ .

Veamos ahora que  $(P/\sim, \sqsubseteq)$  es un conjunto ordenado:

- Reflexividad: Sea  $X \in P/\sim$ . Para cualquier  $x \in X$  resultará  $x \preceq x$  por lo que  $X \sqsubseteq X$ .
- Transitividad: Sean  $X, Y, Z \in P/\sim$  tales que  $X \sqsubseteq Y$  y  $Y \sqsubseteq Z$ , luego sabemos que existen  $x \in X, y \in Y, z \in Z$  tales que  $x \preceq y \preceq z$  y por transitividad resulta  $x \preceq z$  por lo que  $X \sqsubseteq Z$ .
- Antisimetría: Sean  $X, Y \in P/\sim$  tales que  $X \sqsubseteq Y$  y  $Y \sqsubseteq X$ , luego existen  $x, x' \in X$  e  $y, y' \in Y$  tales que  $x \preceq y$  y  $y' \preceq x'$ .

Supongamos que  $X \neq Y$ , como ambos son clases de equivalencia entonces deben ser conjuntos disjuntos. Luego:

- Como  $x \sim x'$  sabemos que  $x' \preceq x$  y por transitividad  $x' \preceq y$ .
- Como  $y \sim y'$  sabemos que  $y \preceq y'$  y por transitividad  $y \preceq x$ .
- Como  $x \preceq y \wedge y \preceq x$  entonces  $x \sim y$ , es decir  $x, y \in X$ .

Tenemos entonces  $y \in X \wedge y \in Y$ . Contradicción.

10. Probar que:

- a) Si  $R$  define un orden en el conjunto  $V$ , entonces  $R^{-1}$  también define un orden en  $V$ , llamado «orden inverso».
- b) Si  $R$  define un orden total en el conjunto  $V$ , entonces  $R^{-1}$  también define un orden total en  $V$ .
- c) Si  $(A, \preceq)$  es un orden no total, puede existir un  $S \subseteq A$  tal que  $(S, \preceq)$  es un orden total.

## Soluciones

a)

- Reflexividad: Sea  $x \in V$ , luego  $xRx \Rightarrow xR^{-1}x$ .
- Antisimetría: Sean  $x, y \in V$  tales que  $xR^{-1}y$  y  $yR^{-1}x$ , luego  $xRy$  y  $yRx$ . Por antisimetría de  $R$  resulta  $x = y$ .
- Transitividad: Sean  $x, y, z \in V/xR^{-1}y \wedge yR^{-1}z$  luego  $yRx \wedge zRy$  y por transitividad  $zRx$ . Por definición de  $R^{-1}$  resulta  $xR^{-1}z$ .

- b) Supongamos existen  $x, y \in V$  tales que  $x \parallel_{R^{-1}} y$ , luego  $y \parallel_R x$ . Contradicción.

- c) Lo propuesto ocurre por ejemplo con  $A = \{2, 3, 4\}$  y  $S = \{2, 4\}$  con la relación  $|$ .
11. Sea  $(P, \preceq)$  un preorden. Probar que si existe un elemento máximo, entonces todos los maximales son máximos.

**Solución** Sea  $M$  un elemento máximo de  $P$  y  $m$  un elemento maximal. Como  $m$  es minimal resulta  $\forall x : m \leq x \Rightarrow x \leq m$ , en particular para  $x = M$  tenemos  $m \leq M \Rightarrow M \leq m$ . Veamos que  $m$  es máximo: sea  $x \in P$  luego,  $x \leq M \leq m$ , es decir  $\forall x : x \leq m$ .

12. Sean  $(A, \preceq_1)$  y  $(A, \preceq_2)$  dos conjuntos ordenados (con el mismo conjunto subyacente).
- a) ¿Define  $\preceq_1 \cap \preceq_2$  un orden en  $A$ ?
- b) ¿Define  $\preceq_1 \cup \preceq_2$  un orden en  $A$ ?

### Soluciones

- a) En efecto.
- Reflexividad: Sea  $x \in A$  luego  $x \preceq_1 x$  y  $x \preceq_2 x$  por lo que  $(x, x) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$ .
  - Transitividad: Sean  $x, y, z \in A$  tales que  $(x, y) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$  y  $(y, z) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$ , luego ocurren  $x \preceq_1 y$ ,  $x \preceq_2 y$ ,  $y \preceq_1 z$  y  $y \preceq_2 z$ . Además por sus respectivas transitividades también tenemos  $x \preceq_1 z$  y  $x \preceq_2 z$  por lo que  $(x, z) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$ .
  - Antisimetría: Sean  $x, y \in A$  tales que  $(x, y) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$  y  $(y, x) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$  luego  $x \preceq_1 y$  e  $y \preceq_1 x$  y por reflexividad  $x = y$ .
- b) No. Sean  $x \neq y$  luego para  $\preceq_1 = \Delta_A \cup \{(x, y)\}$  y  $\preceq_2 = \Delta_A \cup \{(y, x)\}$  en  $\preceq_1 \cup \preceq_2$  se rompe la antisimetría.

13. Probar que el conjunto de todos los elementos maximales (minimales) de un conjunto ordenado, es una anticadena.

**Solución**

- Sean  $a \neq b$  en el conjunto de todos los elementos maximales. Supongamos  $a \leq b$  luego  $b \leq a$  y por antisimetría  $a = b$ . Contradicción. Análogo si  $b \leq a$ .
  - Análogo para minimales.
14. Considerar el conjunto de los enteros positivos  $\mathbb{Z}^+$  y el de los enteros negativos  $\mathbb{Z}^-$  con sus órdenes usuales. Probar que  $\mathbb{Z}^+ \not\cong \mathbb{Z}^-$ .

**Solución** Supongamos que  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^-$  es un isomorfismo de orden luego, como 1 es mínimo en  $\mathbb{Z}^+$  tenemos  $\forall x : 1 \leq x \iff \forall x : f(1) \leq (x)$ ; pero entonces  $f(1)$  es mínimo en  $\mathbb{Z}^-$ . Absurdo.

15. Sea  $(A, \preceq)$  un conjunto ordenado. Para todo elemento  $a \in A$  definamos

$$S(a) = \{x \in A : x \preceq a\}$$

Si  $\mathcal{A} = \{S(a) : a \in A\}$ , ordenado por la inclusión, demostrar que  $A \simeq \mathcal{A}$ .

**Solución**

- $\Rightarrow$ : Sean  $x, y \in A/x \preceq y$ , veamos que  $S(x) \subseteq S(y)$

$$\begin{aligned} & \alpha \in S(x) \\ \Rightarrow & \langle def.S \rangle \\ & \alpha \preceq x \\ \Rightarrow & \langle transitividad \rangle \\ & \alpha \preceq y \\ \Rightarrow & \langle def.S \rangle \\ & \alpha \in S(y) \end{aligned}$$



- $\boxed{\Leftarrow}$ : Sean  $X, Y \in \mathcal{A}$  tales que  $X = S(x)$ ,  $Y = S(y)$  y  $X \subseteq Y$ ; veamos que  $x \preceq y$ :

$$\begin{aligned}
& x \in X \\
\Rightarrow & \langle X \subseteq Y \rangle \\
& x \in Y \\
\Rightarrow & \langle \text{def.} Y \rangle \\
& x \in S(y) \\
\Rightarrow & \langle \text{def.} S \rangle \\
& x \preceq y
\end{aligned}$$

- Para que todo esto tenga sentido, debemos asegurarnos de que  $S$  es biyectiva:
  - Sobreyectividad: Sea  $X \in \mathcal{A}$  luego por definición de  $\mathcal{A}$  existe  $a \in A/S(a) = X$ .
  - Inyectividad: Sean  $a, b \in A/a \neq b$ , luego  $S(a) = \{x \in A : x \preceq a\}$  y  $S(b) = \{x \in A : x \preceq b\}$ .
    - Caso  $a \prec b$ : Sabemos que  $b \in S(b)$ . Si  $A = B$  entonces  $b \in S(a)$ , luego  $b \prec a$ . Contradicción.
    - Caso  $b \prec a$ : Análogo.
    - Caso  $a \parallel b$ : Análogo.

16. Sean  $(X, \preceq_X)$  y  $(Y, \preceq_Y)$  dos conjuntos ordenados

- Dar un ejemplo de conjuntos  $(X, \preceq_X)$  y  $(Y, \preceq_Y)$  y una función  $f : X \rightarrow Y$  que sea sobreyectiva y preserve el orden pero que no sea un isomorfismo de conjuntos ordenados.
- Probar que son equivalentes:
  - $X$  e  $Y$  son isomorfos.
  - Existe  $f : X \rightarrow Y$  sobreyectiva tal que  $f(a) \preceq_Y f(b)$  si y solo si  $a \preceq_X b$ .
  - Existen  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  homomorfismos de conjuntos ordenados tales que  $f \circ g = id_Y$  y  $g \circ f = id_X$ .
- Mostrar que  $(X \rightarrow Y, \preceq_{X \rightarrow Y})$  es un conjunto ordenado, donde  $X \rightarrow Y$  representa las funciones entre  $(X, \preceq_X)$  y  $(Y, \preceq_Y)$ , y el orden está definido por  $f \preceq_{X \rightarrow Y} g$  si y solo si  $\forall x : f(x) \preceq_Y g(x)$ .
- Mostrar que  $(X \times Y, \preceq_{X \times Y})$  es un conjunto ordenado, donde  $(x, y) \preceq_{X \times Y} (x', y')$  si y solo si  $x \preceq_X x'$  y  $y \preceq_Y y'$ .

### Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b)
  - 1) COMPLETAR.
  - 2) COMPLETAR.
  - 3) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.
- d) COMPLETAR.

17. Sean  $(X, \preceq_X)$  y  $(Y, \preceq_Y)$  dos conjuntos ordenados. Una «conexión Galois» es un par de funciones  $(f_*, f^*)$  con  $f_* : X \rightarrow Y$  y  $f^* : Y \rightarrow X$  tales que para todos  $x \in X$  e  $y \in Y$  vale:

$$f_*(x) \preceq_Y y \iff x \preceq_X f^*(y)$$

- a) Probar que si  $f_* : X \rightarrow Y$  es un isomorfismo, entonces  $(f_*, f_*^{-1})$  es una conexión de Galois.
- b) Dada una función  $A \rightarrow B$ , probar que se puede construir una conexión de Galois entre el conjunto potencia de  $A$  y el de  $B$  utilizando los operadores que calculan la imagen de  $f$  sobre un subconjunto de  $A$  y la imagen inversa de  $f$  sobre un subconjunto de  $B$ .
- c) Considerando los órdenes usuales sobre  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Q}_0^+$ , encontrar  $f^*$  tal que  $(f_*, f^*)$  sea una conexión Galois donde  $f_* : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_0^+$  es la inclusión.
- d) Dada una conexión Galois  $(f_*, f^*)$  entre  $X$  e  $Y$ , probar que para todo  $x \in X, y \in Y$  vale  $x \preceq_X f^*(f_*(x))$  y  $f_*(f^*(y)) \preceq_Y y$ .
- e) Dada una conexión de Galois  $(f_*, f^*)$  entre  $X$  e  $Y$ , probar que  $f_*$  y  $f^*$  son monótonas.

### Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.

*c)* COMPLETAR.

*d)* COMPLETAR.

18. Probar que la relación de isomorfismo entre conjuntos ordenados es una relación de equivalencia.

**Solución** COMPLETAR.