1. Verificar la ley del paralelogramo para los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

Solucion

- $u + v = (u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$.
- $\|u+v\|^2 = [u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n]\,(u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) = (u_1 + v_1)^2 + \ldots + (u_n + v_n)^2 = \underbrace{\left(u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2\right) + \ldots + \left(u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2\right)}_{*}$.
- $\|u-v\|^2 = [u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n]\,(u_1 - v_1, \ldots, u_n - v_n) = (u_1 - v_1)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2 = \underbrace{\left(u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2\right) + \ldots + \left(u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2\right)}_{**}$.
- $* + ** = 2\,(u_1^2 + v_1^2) + \ldots + 2\,(u_n^2 + v_n^2) = 2\left[(u_1^2 + v_1^2) + \ldots + (u_n^2 + v_n^2)\right] = 2\left[(u_1^2 + \ldots + u_n^2) + (v_1^2 + \ldots + v_n^2)\right] = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

2. Sea $v = (a, b)$. Describir el conjunto H de vectores (x, y) que son ortogonales a v.

Solucion $H = \{(x, y)\,/\,[x, y] \cdot (a, b) = 0\} = \{(x, y)\,/xa + yb = 0\}$.

3. Sea $W = \langle\{v_1, \ldots, v_p\}\rangle$. Mostrar que si x es ortogonal a todo v_j, para $1 \le j \le p$, luego x es ortogonal a todo vector en W.

Solucion Sea $v \in W/v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p$. Luego $v \cdot x = (\alpha_1 v_1) \cdot x + \ldots + (\alpha_p v_p) \cdot x = \alpha_1 \underbrace{(v_1 \cdot x)}_{0} + \ldots + \alpha_p \underbrace{(v_p \cdot x)}_{0} = 0$.

4. Mostrar que si $x \in W \cap W^{\perp}$, entonces $x = 0$.

Soluciones COMPLETAR.

5. En cada caso, mostrar que $\{u_1, u_2\}$ o $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortogonal para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ respectivamente, y luego expresar a x como combinacion lineal de la base correspondiente:

   a) $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}.$

   b) $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}.$

   Soluciones

   a) $u_1 \cdot u_2 = 12 - 12 = 0$. $x = 3u_1 + \frac{1}{2}u_2$.

   b) $u_1 \cdot u_2 = -1+1 = 0$, $u_1 \cdot u_3 = 2+(-2) = 0$, $u_2 \cdot u_3 = -2+4-2 = 0$. $x = \frac{5}{2}u_1 - \frac{3}{2}u_2 + 2u_3$.

6. Suponer que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por n vectores ortogonales distintos de 0. Explicar por que $W = \mathbb{R}^n$.

   Solucion Debemos ver que los n vectores generan $\mathbb{R}^n$. Ya sabemos que son n, nos resta ver que son linealmente independientes. Supongamos que no lo sean, luego uno de ellos puede expresarse como combinacion lineal de los demas: $v_1 = \alpha v_2 + \beta v_3$. Ahora:

   $$(\alpha v_2 + \beta v_3) \cdot v_1 = (\alpha v_2) \cdot v_1 + (\beta v_2) \cdot v_1 = \alpha (v_2 \cdot v_1) + \beta (v_2 \cdot v_1) = 0$$

   es decir $v_1 \cdot v_1 = 0 \iff v_1 = 0$. Contradiccion.

7. Sean U, V matrices ortogonales. Explicar por que UV es una matriz ortogonal.

   Solucion Sabemos que $U^{-1} = U^t$ y $V^{-1} = V^t$, luego $(UV)^t = V^tU^t = V^{-1}U^{-1}$; es decir, $(UV)^t = (UV)^{-1}$.

8. Sea $\{u_1, u_2\}$ un conjunto ortogonal de vectores distintos de cero y c_1, c_2 escalares no nulos. Mostrar que $\{c_1u_1, c_2u_2\}$ tambien es ortogonal.

   Solucion COMPLETAR.

9. Dado $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$ y sea $L = \langle\{u\}\rangle$. Para $y \in \mathbb{R}^n$, la reflexion de y en L se define como:
$$ref_L y = 2proy_L y - y$$

   a) Graficar en $\mathbb{R}^2$ para observar que la $ref_L y$ es la suma de $\hat{y} = proy_L y$ con $\hat{y} - y$.

   b) Mostrar que la aplicacion $y \mapsto ref_L y$ es una transformacion lineal.

   Soluciones COMPLETAR.

10. Sean
$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
    Escribir x como suma de dos vectores, uno en $\langle\{u_1, u_2, u_3\}\rangle$ y otro en $\langle\{u_4\}\rangle$.

    Solucion $x = \left(-\frac{8}{9}u_1 - \frac{2}{9}u_2 + \frac{2}{3}u_3\right) + 2u_4$.

11. Sea W el subespacio generado por $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

    a) Si $y = (3, 1, 5, 1)$, escribirlo como la suma de un vector en W y uno en $W^{\perp}$.

    b) Si $y = (3, -1, 1, 13)$, encontrar el punto mas cercano a y en W.

    c) Si $y = (2, 4, 0, 1)$, encontrar la mejor aproximacion a y mediante vectores de la forma $c_1v_1 + c_2v_2$. Hallar la distancia de y a W.

Soluciones

a) Sean $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, veamos que ambos pertenecen a $W^{\perp}$. Sea $x \in W/x = \alpha v_1 + \beta v_2$, luego $x \cdot v_3 = \alpha v_1 \cdot v_3 + \beta v_2 \cdot v_3 = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ y analogamente para v_4. Finalmente $y = \left(\frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_2\right) + (2v_3 + 2v_4)$.

b) Observemos que $y = \left(\frac{5}{3}v_1 - \frac{14}{3}v_2\right) + \left(\frac{28}{3}v_3 - \frac{14}{3}v_4\right)$, luego el «punto» mas cercano es $\left(\frac{1}{3}, \frac{19}{3}, -\frac{19}{3}, \frac{19}{3}\right)$.

c) Observemos que $y = \left(\frac{11}{2}v_1 - \frac{3}{4}v_2\right) + \left(-\frac{2}{3}v_3\frac{7}{3}v_4\right)$, luego la mejor aproximacion es $\frac{11}{2}v_1 - \frac{3}{4}v_2$.

12. Sean $y = [4, 8, 1]^t$, $u_1 = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^t$, $u_2 = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]^t$ y $W = \langle\{u_1, u_2\}\rangle$.

    a) Sea $U = [u_1 u_2]$. Calcular $U^t U$ y UU^t.

    b) Calcular $proy_W y$ y $(UU^t)\, y$.

Soluciones

a) $U^t U = I$. $UU^t = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$.

b) COMPLETAR.$UU^t y = (2, 4, 5)$.

13. Sea A una matriz $m \times n$. Demostrar que todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede escribirse en la forma $x = p + u$, donde p esta en $\mathcal{F}(A)$ y $u \in \mathcal{N}(A)$. Mostrar que si la ecuacion $Ax = b$ es consistente, entonces hay una unica p en $\mathcal{F}(A)$ tal que $Ap = b$.

Solucion COMPLETAR.

14. Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con una base ortogonal $\{w_1, \ldots, w_p\}$ y sea $\{v_1, \ldots, v_q\}$ una base ortogonal de $W^\perp$.

   a) Explicar por que $\{w_1, \ldots, w_p, v_1, \ldots, v_q\}$ es un conjunto ortogonal.
   b) Explicar por que el conjunto definido en el item anterior genera $\mathbb{R}^n$.
   c) Demostrar que $dim\,(W) + dim\,(W^\perp) = n$.

   Soluciones

   a) Para w_i y w_j sabemos que $w_i \cdot w_j = 0$ por ser $\{w_1, \ldots, w_p\}$ un conjunto ortogonal y analogamente para v_i, v_j. Para w_i y v_j, como $v_j \in W^\perp$ significa que $v_j \cdot w = 0$ para cualquier $w \in W$, en particular para cualquier w_i.
   b) COMPLETAR.
   c) COMPLETAR.

15. Siendo $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$, utilizar el proceso de Gram-Schmidt para producir una base ortogonal de $\langle\{u, v\}\rangle$.

   Solucion Sean $w_1 = u$ y $w_2 = v - \frac{v \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} - \frac{30}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$, luego $\langle\{w_1, w_2\}\rangle$ es base ortogonal de $\langle\{u, v\}\rangle$.

16. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Encontrar una base ortogonal para el espacio columna de A.

Solucion Sean v_i las columnas de A, definimos $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{-5}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $u_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{12}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-12}{36} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{5} \\ \frac{32}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{18}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$, luego $\mathcal{C}(A) = \langle \{u_1, u_2, u_3\} \rangle$.

17.

a) Verificar que $A \times B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$ es un producto interno en $\mathbb{R}^{n \times n}$ (conocido como producto de Frobenius).

b) Probar que $A \times B = tr\,(AB^t)$.

c) Probar que $AB \times C = B \times A^t C$.

Soluciones

a)

- $(A + B) \times C = \sum_{i,j} (A_{ij} + B_{ij}) C_{ij} = \sum_{i,j} (A_{ij} C_{ij} + B_{ij} C_{ij}) = = \sum_{i,j} A_{ij} C_{ij} + \sum_{i,j} B_{ij} C_{ij} = A \times C + B \times C.$
- $\alpha A \times B = \sum_{i,j} \alpha A_{ij} B_{ij} = \alpha \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} = \alpha (A \times B).$
- $A \times B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} = \sum_{i,j} B_{ij} A_{ij} = B \times A.$
- $A \times A = \sum_{i,j} A_{ij} A_{ij} = \sum_{i,j} \underbrace{A_{ij}^2}_{\geq 0} \geq 0$ y claramente $A \times A = 0 \iff A = 0.$

b) COMPLETAR.

c) COMPLETAR.

18. Verificar que $f \times g = \int_{1}^{e} log\,(x)\, f\,(x)\, g\,(x)\, dx$ es un producto interno en $\mathcal{C}\,([1, e])$.

Solucion COMPLETAR.

19. Dados $u, v \in V$ espacio vectorial con producto interno, probar que $u = v$ si y solo si $u \times w = v \times w$ para todo $w \in V$.

Solucion

- $\boxed{\Rightarrow}$: Trivial.
- $\boxed{\Leftarrow}$: COMPLETAR.

20. Sea V un espacio vectorial con producto interno y W un subespacio de V. Probar que $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$.

Solucion

- $\boxed{\subseteq}$: Sea $x \in \left(W^{\perp}\right)^{\perp}$, como $x \in V$ sabemos que podemos escribirlo como $x = p + u$ con $p \in W$ y $u \in W^{\perp}$. Ademas $x \cdot u = 0$ es decir $(p+u) \cdot u = \underbrace{p \cdot u}_{0} + u \cdot u = u \cdot u = 0 \iff u = 0$, por lo que $x = p \in W$.
- $\boxed{\supseteq}$: Sea $x \in W$, como $x \in V$ sabemos que podemos escribirlo como $x = p + u$ con $p \in W^{\perp}$ y $u \in \left(W^{\perp}\right)^{\perp}$. Ademas $x \cdot p = 0$ es decir $(p+u) \cdot p = p \cdot p + \underbrace{p \cdot u}_{0} = p \cdot p = 0 \iff p = 0$, por lo que $x = u \in \left(W^{\perp}\right)^{\perp}$.

21. Sea $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el producto interno definido en el ejercicio 17.

   a) Hallar una base ortogonal para $\mathbb{R}^{n\times n}$ para dicho producto interno.

   b) Hallar $W^{\perp}$, si $W = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   c) Idem para $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Soluciones

   a) Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$, recordemos que $\langle A, B \rangle = aw + bx + cy + dz$; luego la base estandard es una base ortogonal.

   b) Observemos que $W = \left\{ \begin{bmatrix} x & 2y \\ 0 & -y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Buscamos $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / ax + 2by - dy = ax + (2b - d)\, y = 0$ para cualequiera x e y, es decir: $W^{\perp} = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$. Corroboramos:

$$\left\langle a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} a+b & 2a \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & d \\ c & 2d \end{bmatrix} \right\rangle = 0 + 2ad + 0 - 2ad = 0$$

   c) COMPLETAR.

22. Sea $\mathcal{C}\,[(1, e)]$, con el producto interno definido en el ejercicio 18.

   a) Calcular $\|f\|$ para $f\,(x) = \sqrt{2}$.

   b) Hallar un polinomio de grado uno que sea ortogonal a $g\,(x) = 1$.

Soluciones

   a) COMPLETAR.

   b) COMPLETAR.