

Errores Numéricos

Juan Manuel Rabasedas

20/09/2018

- Para aproximar $f'(x)$ podemos utilizar la expresión en diferencias finitas de primer orden:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Para aproximar $f'(x)$ podemos utilizar la expresión en diferencias finitas de primer orden:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Sabemos que cuando h tiende a cero, la fórmula nos da el valor exacto de la derivada $f'(x)$

- Para aproximar $f'(x)$ podemos utilizar la expresión en diferencias finitas de primer orden:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Sabemos que cuando h tiende a cero, la fórmula nos da el valor exacto de la derivada $f'(x)$
- Podemos esperar que cuanto más pequeño sea h mejor será la aproximación.

- Para aproximar $f'(x)$ podemos utilizar la expresión en diferencias finitas de primer orden:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Sabemos que cuando h tiende a cero, la fórmula nos da el valor exacto de la derivada $f'(x)$
- Podemos esperar que cuanto más pequeño sea h mejor será la aproximación.
- Debido a los errores de redondeo esto no es así.

- La función `numderivative` de Scilab permite usar fórmulas de diferencias finitas de órdenes 1, 2, o 4.
- `numderivative(f,x,order)`
- `f`: es una función de scilab
`x`: es el valor donde se evaluará f'
`order`: se usa para indicar el orden de la fórmula de diferencias finitas

Ejemplo

```
clc // limpia la consola
clear // borra el contenido de la memoria
xdel(winsid()) // cierra ventanas graficas

// Definicion de la funcion
function y = f(x)
    y = x.*x;
endfunction

// Calculo de la derivada utilizando diferencias finitas
function y = dfa(f,x,h)
    y = (f(x+h) - f(x))./h;
endfunction

x = 1; // Punto donde vamos a evaluar la derivada
ih = (0:16)';
h = (10.^-ih); // Vector con los valores de h

df_approx = dfa(f,x,h); // Evaluación de la derivada por diferencias finitas
df_scilab = numderivative(f,x,order=1); // Derivada obtenida por numderivative
df_true = 2; // Valor verdadero de la derivada en x = 1
```

Ejemplo

```
// Errores absolutos y relativos
```

```
err_abs = abs(df_approx - df_true);  
err_rel = err_abs./abs(df_true);  
err_abs_sci = abs(df_scilab - df_true);  
err_rel_sci = err_abs_sci/abs(df_true);
```

```
// Grafica
```

```
plot(ih,log10(err_rel),'b*-'); // Gráfica en escala logarítmica en el eje y  
title('Error relativo utilizando diferencias finitas');  
xlabel('i');  
ylabel('$\log_{10}$ (Err Rel)$');  
plot(ih,log10(err_rel_sci),'r-');
```

```
// Impresión de resultados en pantalla
```

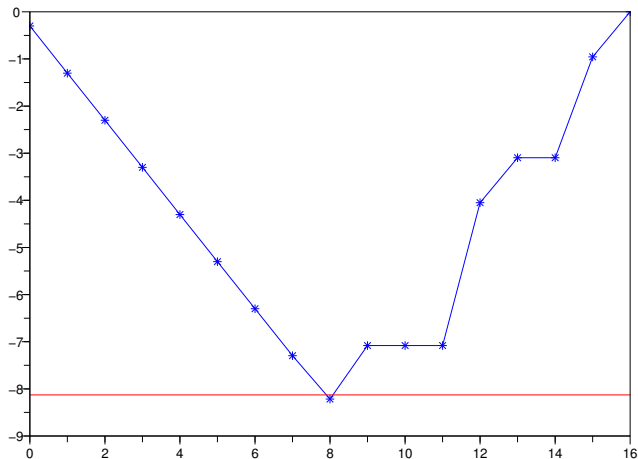
```
tablevalue = [ih,h,df_true*ones(length(h),1),df_approx,err_abs,err_rel];  
mprintf('%s\n',strcat(repmat('-',1,80)));  
mprintf('%4s %8s %12s %18s %14s %14s\n',...  
    'i', 'h','Der. exact','Der approx','Abs. error','Rel. error');  
mprintf('%s\n',strcat(repmat('-',1,80)));  
mprintf('%4d %8.1e %9.6e %18.10e %14.5e %14.5e\n',tablevalue);  
mprintf('%s\n',strcat(repmat('-',1,80)));  
mprintf('%4.1s %8s %9.6e %18.10e %14.5e %14.5e\n',...  
    ' ', 'Scilab',[df_true,df_scilab,err_abs_sci,err_rel_sci]);  
mprintf('%s\n',strcat(repmat('-',1,80)));
```


Ejemplo

i	h	Der. exact	Der approx	Abs. error	Rel. error
0	1.0e+000	2.000000e+000	3.0000000000e+000	1.00000e+000	5.00000e-001
1	1.0e-001	2.000000e+000	2.1000000000e+000	1.00000e-001	5.00000e-002
2	1.0e-002	2.000000e+000	2.0100000000e+000	1.00000e-002	5.00000e-003
3	1.0e-003	2.000000e+000	2.0010000000e+000	1.00000e-003	5.00000e-004
4	1.0e-004	2.000000e+000	2.0001000000e+000	1.00000e-004	5.00000e-005
5	1.0e-005	2.000000e+000	2.0000100000e+000	1.00000e-005	5.00001e-006
6	1.0e-006	2.000000e+000	2.0000009999e+000	9.99924e-007	4.99962e-007
7	1.0e-007	2.000000e+000	2.0000001011e+000	1.01088e-007	5.05439e-008
8	1.0e-008	2.000000e+000	1.9999999878e+000	1.21549e-008	6.07747e-009
9	1.0e-009	2.000000e+000	2.0000001655e+000	1.65481e-007	8.27404e-008
10	1.0e-010	2.000000e+000	2.0000001655e+000	1.65481e-007	8.27404e-008
11	1.0e-011	2.000000e+000	2.0000001655e+000	1.65481e-007	8.27404e-008
12	1.0e-012	2.000000e+000	2.0001778012e+000	1.77801e-004	8.89006e-005
13	1.0e-013	2.000000e+000	1.9984014443e+000	1.59856e-003	7.99278e-004
14	1.0e-014	2.000000e+000	1.9984014443e+000	1.59856e-003	7.99278e-004
15	1.0e-015	2.000000e+000	2.2204460493e+000	2.20446e-001	1.10223e-001
16	1.0e-016	2.000000e+000	0.0000000000e+000	2.00000e+000	1.00000e+000
Scilab		2.000000e+000	2.0000000149e+000	1.49012e-008	7.45058e-009

Ejemplo

Error relativo utilizando diferencias finitas



Ejercicio (2)

Usando aritmética de cuatro dígitos de precisión (mantisa decimal de 4 dígitos con redondeo), sume la siguiente expresión

$$0,1025 \cdot 10^4 + (-0,9123) \cdot 10^3 + (-0,9663) \cdot 10^2 + (-0,9315) \cdot 10^1$$

tanto ordenando los números de mayor a menor (en valor absoluto), como de menor a mayor. Realiza cada operación de forma separada, primero igualando exponentes y luego normalizando el resultado en cada paso.

¿Cuál de las dos posibilidades es más exacta? Justifique los resultados que encuentre.

La suma exacta es $1025 - 912,3 - 96,63 - 9,315 = 6,755$

Ejercicios

La suma exacta es $1025 - 912,3 - 96,63 - 9,315 = 6,755$

Sumar de mayor a menor, requiere evaluar con el orden

$$(((0,1025 \cdot 10^4 + (-0,9123) \cdot 10^3) + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9315) \cdot 10^1)$$

Ejercicios

La suma exacta es $1025 - 912,3 - 96,63 - 9,315 = 6,755$

Sumar de mayor a menor, requiere evaluar con el orden

$$(((0,1025 \cdot 10^4 + (-0,9123) \cdot 10^3) + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9315) \cdot 10^1)$$

$$s_1 = 0,1025 \cdot 10^4$$

Ejercicios

La suma exacta es $1025 - 912,3 - 96,63 - 9,315 = 6,755$

Sumar de mayor a menor, requiere evaluar con el orden

$$(((0,1025 \cdot 10^4 + (-0,9123) \cdot 10^3) + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9315) \cdot 10^1)$$

$$s_1 = 0,1025 \cdot 10^4$$

$$s_2 = s_1 - 0,0912 \cdot 10^4$$

Ejercicios

La suma exacta es $1025 - 912,3 - 96,63 - 9,315 = 6,755$

Sumar de mayor a menor, requiere evaluar con el orden

$$(((0,1025 \cdot 10^4 + (-0,9123) \cdot 10^3) + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9315) \cdot 10^1)$$

$$s_1 = 0,1025 \cdot 10^4$$

$$s_2 = s_1 - 0,0912 \cdot 10^4$$

$$= 0,0113 \cdot 10^4$$

Ejercicios

La suma exacta es $1025 - 912,3 - 96,63 - 9,315 = 6,755$

Sumar de mayor a menor, requiere evaluar con el orden

$$(((0,1025 \cdot 10^4 + (-0,9123) \cdot 10^3) + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9315) \cdot 10^1)$$

$$s_1 = 0,1025 \cdot 10^4$$

$$s_2 = s_1 - 0,0912 \cdot 10^4$$

$$= 0,0113 \cdot 10^4$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3$$

Ejercicios

La suma exacta es $1025 - 912,3 - 96,63 - 9,315 = 6,755$

Sumar de mayor a menor, requiere evaluar con el orden

$$(((0,1025 \cdot 10^4 + (-0,9123) \cdot 10^3) + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9315) \cdot 10^1)$$

$$s_1 = 0,1025 \cdot 10^4$$

$$s_2 = s_1 - 0,0912 \cdot 10^4$$

$$= 0,0113 \cdot 10^4$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3$$

$$s_3 = s_2 - 0,09663 \cdot 10^3$$

Ejercicios

La suma exacta es $1025 - 912,3 - 96,63 - 9,315 = 6,755$

Sumar de mayor a menor, requiere evaluar con el orden

$$(((0,1025 \cdot 10^4 + (-0,9123) \cdot 10^3) + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9315) \cdot 10^1)$$

$$s_1 = 0,1025 \cdot 10^4$$

$$s_2 = s_1 - 0,0912 \cdot 10^4$$

$$= 0,0113 \cdot 10^4$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3$$

$$s_3 = s_2 - 0,09663 \cdot 10^3$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3 - 0,0966 \cdot 10^3$$

Ejercicios

La suma exacta es $1025 - 912,3 - 96,63 - 9,315 = 6,755$

Sumar de mayor a menor, requiere evaluar con el orden

$$(((0,1025 \cdot 10^4 + (-0,9123) \cdot 10^3) + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9315) \cdot 10^1)$$

$$s_1 = 0,1025 \cdot 10^4$$

$$s_2 = s_1 - 0,0912 \cdot 10^4$$

$$= 0,0113 \cdot 10^4$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3$$

$$s_3 = s_2 - 0,09663 \cdot 10^3$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3 - 0,0966 \cdot 10^3$$

$$= 0,0164 \cdot 10^3 = 0,1640 \cdot 10^2$$

Ejercicios

La suma exacta es $1025 - 912,3 - 96,63 - 9,315 = 6,755$

Sumar de mayor a menor, requiere evaluar con el orden

$$(((0,1025 \cdot 10^4 + (-0,9123) \cdot 10^3) + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9315) \cdot 10^1)$$

$$s_1 = 0,1025 \cdot 10^4$$

$$s_2 = s_1 - 0,0912 \cdot 10^4$$

$$= 0,0113 \cdot 10^4$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3$$

$$s_3 = s_2 - 0,09663 \cdot 10^3$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3 - 0,0966 \cdot 10^3$$

$$= 0,0164 \cdot 10^3 = 0,1640 \cdot 10^2$$

$$s_4 = s_3 - 0,09315 \cdot 10^2$$

Ejercicios

La suma exacta es $1025 - 912,3 - 96,63 - 9,315 = 6,755$

Sumar de mayor a menor, requiere evaluar con el orden

$$(((0,1025 \cdot 10^4 + (-0,9123) \cdot 10^3) + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9315) \cdot 10^1)$$

$$s_1 = 0,1025 \cdot 10^4$$

$$s_2 = s_1 - 0,0912 \cdot 10^4$$

$$= 0,0113 \cdot 10^4$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3$$

$$s_3 = s_2 - 0,09663 \cdot 10^3$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3 - 0,0966 \cdot 10^3$$

$$= 0,0164 \cdot 10^3 = 0,1640 \cdot 10^2$$

$$s_4 = s_3 - 0,09315 \cdot 10^2$$

$$= 0,1640 \cdot 10^2 - 0,0932 \cdot 10^2$$

Ejercicios

La suma exacta es $1025 - 912,3 - 96,63 - 9,315 = 6,755$

Sumar de mayor a menor, requiere evaluar con el orden

$$(((0,1025 \cdot 10^4 + (-0,9123) \cdot 10^3) + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9315) \cdot 10^1)$$

$$s_1 = 0,1025 \cdot 10^4$$

$$s_2 = s_1 - 0,0912 \cdot 10^4$$

$$= 0,0113 \cdot 10^4$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3$$

$$s_3 = s_2 - 0,09663 \cdot 10^3$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3 - 0,0966 \cdot 10^3$$

$$= 0,0164 \cdot 10^3 = 0,1640 \cdot 10^2$$

$$s_4 = s_3 - 0,09315 \cdot 10^2$$

$$= 0,1640 \cdot 10^2 - 0,0932 \cdot 10^2$$

$$= 0,0708 \cdot 10^2 = 0,7080 \cdot 10^1 = 7,080$$

Ejercicios

La suma exacta es $1025 - 912,3 - 96,63 - 9,315 = 6,755$

Sumar de mayor a menor, requiere evaluar con el orden

$$(((0,1025 \cdot 10^4 + (-0,9123) \cdot 10^3) + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9315) \cdot 10^1)$$

$$s_1 = 0,1025 \cdot 10^4$$

$$s_2 = s_1 - 0,0912 \cdot 10^4$$

$$= 0,0113 \cdot 10^4$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3$$

$$s_3 = s_2 - 0,09663 \cdot 10^3$$

$$= 0,1130 \cdot 10^3 - 0,0966 \cdot 10^3$$

$$= 0,0164 \cdot 10^3 = 0,1640 \cdot 10^2$$

$$s_4 = s_3 - 0,09315 \cdot 10^2$$

$$= 0,1640 \cdot 10^2 - 0,0932 \cdot 10^2$$

$$= 0,0708 \cdot 10^2 = 0,7080 \cdot 10^1 = 7,080$$

$$E_r = \frac{7,08 - 6,755}{6,755} = 0,048$$

Sumar de menor a mayor requiere evaluar con el orden:

$$(((-0,9315) \cdot 10^1 + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9123) \cdot 10^3) + 0,1025 \cdot 10^4$$

Sumar de menor a mayor requiere evaluar con el orden:

$$(((-0,9315) \cdot 10^1 + (-0,9663) \cdot 10^2) + (-0,9123) \cdot 10^3) + 0,1025 \cdot 10^4$$

$$z_1 = -0,9315 \cdot 10^1$$

$$z_2 = z_1 - 0,9663 \cdot 10^2$$

$$= -0,09315 \cdot 10^2 - 0,9663 \cdot 10^2 \approx -0,0932 \cdot 10^2 - 0,9663 \cdot 10^2$$

$$= -1,0595 \cdot 10^2$$

$$= -0,1060 \cdot 10^3$$

$$z_3 = z_2 - 0,9123 \cdot 10^3$$

$$= -0,1060 \cdot 10^3 - 0,9123 \cdot 10^3$$

$$= -1,0183 \cdot 10^3$$

$$= -0,1018 \cdot 10^4$$

$$z_4 = z_3 + 0,1025 \cdot 10^4$$

$$= -0,1018 \cdot 10^4 + 0,1025 \cdot 10^4$$

$$= 0,0007 \cdot 10^4 = 0,7000 \cdot 10^1 = 7$$

$$E_r = \frac{7 - 6,755}{6.755} = 0,036$$