1. Probar que en el conjunto $\{a, b\}$ hay tres órdenes posibles. ¿Y en $\{a, b, c\}$ y $\{a, b, c, d\}$?

   Solución COMPLETAR.

2. En $(\mathbb{N}, |)$, donde $|$ denota la relación «divide a»:

   a) Verificar que $(\mathbb{N}, |)$ es un conjunto ordenado.

   b) ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?

   c) Si S es el conjunto de los divisores de 60, graficar el conjunto ordenado inducido por $|$ en S.

   Soluciones

   a)

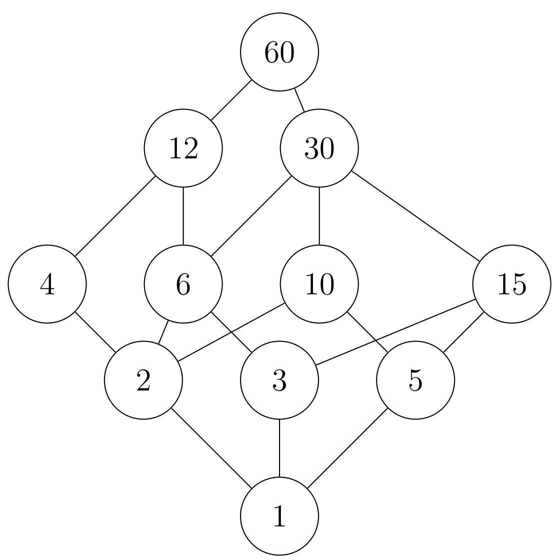
   - Reflexividad: Sea $n \in \mathbb{N}$, luego $n = n * 1 \iff n|n$.
   - Antisimetría: Sean $n, m \in \mathbb{N}/n|m \wedge m|n$ luego $n = m * c$ y $m = n * k$. Finalmente:

     $$n = n * k * c \iff 1 = k * c \iff k = c = 1$$

     por lo que $n = m * 1 = m$.

   b) No lo es pues para cualquier par de primos p_1 y p_2 resulta: $p_1 \parallel p_2$.

   c)



3. *Yoneda Lemma*: Probar que en un preorden $(P, \preceq)$ vale: $x \preceq y \iff \forall z : z \preceq x \Rightarrow z \preceq y$.

   Solución

   - $\boxed{\Rightarrow}$: Sea $z \preceq x$, luego por transitividad: $z \preceq x \preceq y$.
   - $\boxed{\Leftarrow}$: Por reflexididad tenemos $x \preceq x$ y por hipotesis: $x \preceq x \Rightarrow x \preceq y$.

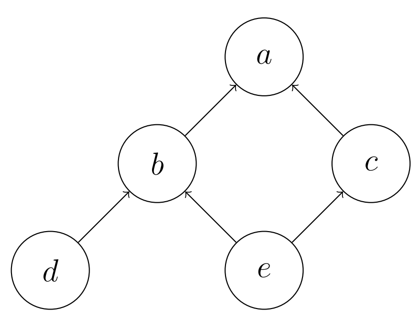
4. Sea A un conjunto arbitrario. Verificar que $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un conjunto ordenado. ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?

   Solución

   - Reflexividad: Sea $X \in \mathcal{P}(A)$, luego $x \in X \Rightarrow x \in X$ por lo que $X \subseteq X$.
   - Antisimetría: Sean $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ luego si $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$ resulta $X = Y$ por definición.
   - Transitividad: Sean $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A) / X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z$ luego $x \in X \Rightarrow x \in Y \Rightarrow x \in Z$ por lo que $X \subseteq Z$.

   No necesariamente es totalment ordenado. Por ejemplo para $A = \{1, 2, 3\}$ resulta $\{1, 2\} \parallel \{2, 3\}$.

5. Sea $V = \{a, b, c, d, e\}$. El grafo dirigido de la siguiente figura define un orden en V de la siguiente manera: $x \preceq y \iff x = y$ o existe un xy-camino dirigido.



a) Insertar el símbolo correcto ($\preceq, \succeq, \|$) entre cada par de elementos:

1) $a \quad e$.	3) $d \quad a$.
2) $b \quad c$.	4) $c \quad d$.

b) ¿Es un conjunto totalmente ordenado? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

Soluciones

a)

1) $a \succeq e$.	3) $d \preceq a$.
2) $b \parallel c$.	4) $c \parallel d$.

b)

- No es totalmente ordenado pues existen elementos que no son comparables.
- a es elemento máximo. No existe elemento mínimo.
- d y e son minimales. a es maximal.

6. Sean $(P, \preceq)$ un conjunto ordenado, X un conjunto, y $f : X \to P$ una función. Se define la relación H sobre elementos de X como $xHx' \iff f(x) \preceq f(x')$. ¿Que tipo de relación es H? Dar condiciones para que H sea un conjunto ordenado.

Solución

- Reflexividad: $x \in X \Rightarrow f(x) \in P \Rightarrow f(x) \preceq f(x) \iff xHx$.
- Transitividad: Sean $x, y, z \in X / xHy \wedge yHz$ luego:

$$f(x) \preceq f(y) \wedge f(y) \preceq f(z) \Rightarrow f(x) \preceq f(z) \iff xHz$$

- Antisimetría: Si agregamos la hipotesis de que f sea inyectiva, entonces si $xHy \wedge yHx$ resultara:

$$f(x) \preceq f(y) \wedge f(y) \preceq (x) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

7. En $(Prop, D)$, donde $Prop$ son las fórmulas del cálculo proposicional y $\phi D\psi \iff \{\phi\} \vdash \psi$:

   a) Verificar si $(Prop, D)$ es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.

   b) ¿La realación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

Soluciones

a)

- Reflexividad: Sea $\phi \in Prop$ luego por la regla trivial $\{\phi\} \vdash \phi$.
- Transitividad: Sean ϕ, ψ, γ tales que $\{\phi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \gamma$ luego:
  1) $\{\phi\} \cup \{\psi\} \vdash \psi \wedge \gamma$ (introducción de la conjunción en ambas hipótesis).
  2) $\{\phi\} \cup \{\psi\} \vdash \gamma$ (eliminación de la conjunción en 1).
  3) $\{\phi\} \vdash \psi \rightarrow \gamma$ (introducción de la implicación en 2).
  4) $\{\phi\} \cup \{\phi\} = \{\phi\} \vdash \gamma$ (eliminación de la implicación en hipótesis y 3).
- Es un conjunto preordenado pues la antisimetría no se cumple como demuestra el siguiente ejemplo: $\{\bot\} \vdash p \wedge \neg p$ y $\{p \wedge \neg p\} \vdash \bot$ pero $\bot \neq p \wedge \neg p$.

b)

- La relación no es total pues, por ejemplo, $p \parallel q$.
- Cualquier proposicion semanticamente equivalente a $\bot$ es mínimo ya que $\forall \phi \in PROP : \{\bot\} \vdash \phi$. No existe elemento máximo.
- No existen maximales pues para cualquier $\phi \in PROP$ siempre ocurre $\{\phi\} \vdash \phi \vee \psi$ pero $\{\phi \vee \psi\} \nvdash \phi$. Todos los mínimos son minimales.

8. En $(Prop, I)$, donde $\phi I \psi \iff \emptyset \vdash \phi \to \psi$.

   a) Verificar si $(Prop, I)$ es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.

   b) ¿La realación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

   c) Explique el nexo entre esta relación y la del ejercicio anterior.

   Soluciones

   a)

      - Reflexividad: Sea $\phi \in Prop$ luego por la regla trivial $\{\phi\} \vdash \phi$ y por introducción de la implicación $\emptyset \vdash \phi \to \phi$.
      - Transitividad: Sean ϕ, ψ, γ tales que $\emptyset \vdash \phi \to \psi$ y $\emptyset \vdash \psi \to \gamma$ luego:
        1) $\{\phi\} \vdash \phi$ (trivial).
        2) $\{\phi\} \vdash \psi$ (eliminación de la implicación en 1 e hipótesis).
        3) $\{\phi\} \vdash \gamma$ (eliminación de la implicación en 2 e hipótesis).
        4) $\emptyset \vdash \phi \to \gamma$ (introducción de la implicación en 3).
      - También es un preorden pues la antisimetría falla por la misma razón que el ejercicio anterior.

   b) COMPLETAR.

   c) Claramente si $\phi D \psi$ también $\phi I \psi$ pues si $\{\phi\} \vdash \psi$ es un secuente valido tambien lo es $\emptyset \vdash \phi \to \psi$.

9. Sea $(P, \preceq)$ un preorden. Construir un conjunto ordenado $(P/\sim, \sqsubseteq)$, donde $x \sim y$ si y solo si $x \preceq y$ y $y \preceq x$, tal que $\pi : P \to P/\sim$ sea monótona.

   Aplicar esta construcción a la relación $(Prop, D)$ del ejercicio anterior. Para este caso partricular, la construcción se llama «álgrebra de Lindenbaum-Tarski».

   Solución Definimos $X \sqsubseteq Y \iff \exists x \in X, y \in Y / x \preceq y$. Veamos que π es monotona: sean $x, y / x \preceq y$ luego $x \in \pi(x) \wedge y \in \pi(y)$ por lo que $\pi(x) \sqsubseteq \pi(y)$.

Veamos ahora que $(P/\sim, \sqsubseteq)$ es un conjunto ordenado:

- Reflexividad: Sea $X \in P/\sim$. Para cualquier $x \in X$ resultará $x \preceq x$ por lo que $X \sqsubseteq X$.
- Transitividad: Sean $X, Y, Z \in P/\sim$ tales que $X \sqsubseteq Y$ y $Y \sqsubseteq Z$, luego sabemos que existen $x \in X, y \in Y, z \in Z$ tales que $x \preceq y \preceq z$ y por transitividad resulta $x \preceq z$ por lo que $X \sqsubseteq Z$.
- Antisimetría: Sean $X, Y \in P/\sim$ tales que $X \sqsubseteq Y$ y $Y \sqsubseteq X$, luego existen $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$ tales que $x \preceq y$ y $y' \preceq x'$.

  Supongamos que $X \neq Y$, como ambos son clases de equivalencia entonces deben ser conjuntos disjuntos. Luego:

  - Como $x \sim x'$ sabemos que $x' \preceq x$ y por transitividad $x' \preceq y$.
  - Como $y \sim y'$ sabemos que $y \preceq y'$ y por transitividad $y \preceq x$.
  - Como $x \preceq y \wedge y \preceq x$ entonces $x \sim y$, es decir $x, y \in X$.

  Tenemos entonces $y \in X \wedge y \in Y$. Contradicción.

10. Probar que:

    a) Si R define un orden en el conjunto V, entonces R^{-1} tambien define un orden en V, llamado «orden inverso».

    b) Si R define un orden total en el conjunto V, entonces R^{-1} tambien define un orden total en V.

    c) Si $(A, \preceq)$ es un orden no total, puede existir un $S \subseteq A$ tal que $(S, \preceq)$ es un orden total.

Soluciones

a)

- Reflexividad: Sea $x \in V$, luego $xRx \Rightarrow xR^{-1}x$.
- Antisimetría: Sean $x, y \in V$ tales que $xR^{-1}y$ y $yR^{-1}x$, luego xRy y yRx. Por antisimetría de R resulta $x = y$.
- Transitividad: Sean $x, y, z \in V / xR^{-1}y \wedge yR^{-1}z$ luego $yRx \wedge zRy$ y por transitividad zRx. Por definición de R^{-1} resulta $xR^{-1}z$.

b) Supongamos existen $x, y \in V$ tales que $x \parallel_{R^{-1}} y$, luego $y \parallel_R x$. Contradicción.

c) Lo propuesto ocurre por ejemplo con $A = \{2, 3, 4\}$ y $S = \{2, 4\}$ con la relacion $|$.

11. Sea $(P, \preceq)$ un preorden. Probar que si existe un elemento máximo, entonces todos los maximales son máximos.

    Solución Sea M un elemento máximo de P y m un elemento maximal. Como m es minimal resulta $\forall x : m \leq x \Rightarrow x \leq m$, en particular para $x = M$ tenemos $m \leq M \Rightarrow M \leq m$. Veamos que m es máximo: sea $x \in P$ luego, $x \leq M \leq m$, es decir $\forall x : x \leq m$.

12. Sean $(A, \preceq_1)$ y $(A, \preceq_2)$ dos conjuntos ordenados (con el mismo conjunto subyacente).

    a) ¿Define $\preceq_1 \cap \preceq_2$ un orden en A?

    b) ¿Define $\preceq_1 \cup \preceq_2$ un orden en A?

    Soluciones

    a) En efecto.
        - Reflexividad: Sea $x \in A$ luego $x \preceq_1 x$ y $x \preceq_2 x$ por lo que $(x, x) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$.
        - Transitividad: Sean $x, y, z \in A$ tales que $(x, y) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$ y $(y, z) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$, luego ocurren $x \preceq_1 y$, $x \preceq_2 y$, $y \preceq_1 z$ y $y \preceq_2 z$. Ademas por sus respectivas transitividades tambien tenemos $x \preceq_1 z$ y $x \preceq_2 z$ por lo que $(x, z) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$.
        - Antisimetría: Sean $x, y \in A$ tales que $(x, y) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$ y $(y, x) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$ luego $x \preceq_1 y$ e $y \preceq_1 x$ y por reflexividad $x = y$.

    b) No. Sean $x \neq y$ luego para $\preceq_1 = \Delta_A \cup \{(x, y)\}$ y $\preceq_2 = \Delta_A \cup \{(y, x)\}$ en $\preceq_1 \cup \preceq_2$ se rompe la antisimetría.

13. Probar que el conjunto de todos los elementos maximales (minimales) de un conjunto ordenado, es una anticadena.

    Solución

    - Sean $a \neq b$ en el conjunto de todos los elementos maximales. Supongamos $a \leq b$ luego $b \leq a$ y por antisimetría $a = b$. Contradicción. Análogo si $b \leq a$.
    - Análogo para minimales.

14. Considerar el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ y el de los enteros negativos $\mathbb{Z}^-$ con sus órdenes usuales. Probar que $\mathbb{Z}^+ \not\simeq \mathbb{Z}^-$.

    Solución Supongamos que $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^-$ es un isomorfismo de orden luego, como 1 es mínimo en $\mathbb{Z}^+$ tenemos $\forall x : 1 \leq x \Rightarrow \forall x : f(1) \leq f(x)$; pero entonces $f(1)$ es mínimo en $\mathbb{Z}^-$. Absurdo.

15. Sea $(A, \preceq)$ un conjunto ordenado. Para todo elemento $a \in A$ definamos

    $$S(a) = \{x \in A : x \preceq a\}$$

    Si $\mathcal{A} = \{S(a) : a \in A\}$, ordenado por la inclusión, demostrar que $A \simeq \mathcal{A}$.

    Solución

    - $\boxed{\Rightarrow}$: Sean $x, y \in A / x \preceq y$, veamos que $S(x) \subseteq S(y)$

    $$\begin{array}{cc} & \alpha \in S(x) \\ \Rightarrow & \langle def.S \rangle \\ & \alpha \preceq x \\ \Rightarrow & \langle transitividad \rangle \\ & \alpha \preceq y \\ \Rightarrow & \langle def.S \rangle \\ & \alpha \in S(y) \end{array}$$

- $\boxed{\Leftarrow}$: Sean $X, Y \in \mathcal{A}$ tales que $X = S(x)$, $Y = S(y)$ y $X \subseteq Y$; veamos que $x \preceq y$:

$$\begin{array}{cc} & x \in X \\ \Rightarrow & \langle X \subseteq Y \rangle \\ & x \in Y \\ \Rightarrow & \langle def.Y \rangle \\ & x \in S(y) \\ \Rightarrow & \langle def.S \rangle \\ & x \preceq y \end{array}$$

- Para que todo esto tenga sentido, debemos asegurarnos de que S es biyectiva:
  - Sobreyectividad: Sea $X \in \mathcal{A}$ luego por definición de $\mathcal{A}$ existe $a \in A / S(a) = X$.
  - Inyectividad: Sean $a, b \in A / a \neq b$, luego $S(a) = \{x \in A : x \preceq a\}$ y $S(b) = \{x \in A : x \preceq b\}$.
    - Caso $a \prec b$: Sabemos que $b \in S(b)$. Si $A = B$ entonces $b \in S(a)$, luego $b \prec a$. Contradicción.
    - Caso $b \prec a$: Analogo.
    - Caso $a \parallel b$: Analogo.

16. Sean $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ dos conjuntos ordenados

    a) Dar un ejemplo de conjuntos $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ y una función $f : X \to Y$ que sea sobreyectiva y preserve el orden pero que no sea un isomorfismo de conjuntos ordenados.

    b) Probar que son equivalentes:

    1) X e Y son isomorfos.
    2) Existe $f : X \to Y$ sobreyectiva tal que $f(a) \preceq_Y f(b)$ si y solo si $a \preceq_X b$.
    3) Existen $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ homomorfismos de conjuntos ordenados tales que $f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$.

    c) Mostrar que $(X \to Y, \preceq_{X \to Y})$ es un conjunto ordenado, donde $X \to Y$ representa las funciones entre $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$, y el orden está definido por $f \preceq_{X \to Y} g$ si y solo si $\forall x : f(x) \preceq_Y g(x)$.

    d) Mostrar que $(X \times Y, \preceq_{X \times Y})$ es un conjunto ordenado, donde $(x, y) \preceq_{X \times Y} (x', y')$ si y solo si $x \preceq_X x'$ y $y \preceq_Y y'$.

Soluciones

a) Sean $X = \mathbb{N}$, $Y = \{1\}$ y $f(n) = 1$. La función es claramente sobreyectiva y preserva el orden, pero no es inyectiva.

b)

- $\boxed{1 \Rightarrow 2}$: Trivial pues el isomorfismo entre X e Y es en particular sobreyectivo.
- $\boxed{2 \Rightarrow 1}$: Supongamos que la función de nuestra hipótesis no es inyectiva luego existen $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, es decir $f(x_1) \preceq f(x_2)$ y $f(x_2) \preceq f(x_1)$; pero entonces $x_1 \preceq x_2 \wedge x_2 \preceq x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$. Contradicción.
- $\boxed{3 \Rightarrow 1}$: Como consecuencia de las hipótesis f y g resultan ser biyectivas y ademas $f^{-1} = g$. Ademas por ser homorfismos también preservan la estructura, por lo tanto X e Y son isomorfos.
- $\boxed{1 \Rightarrow 3}$: Trivial pues el isomorfismo y su inversa verifican dichas condiciones.

c) COMPLETAR.

d)

- Reflexividad: Sea $(x, y) \in X \times Y$, luego $x \in X$ y $y \in Y$ y por sus respectivas reflexividades $x \preceq_X x$ y $y \preceq_Y y$ por lo que $(x, y) \preceq_{X \times Y} (x, y)$.
- Transitividad: Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in X \times Y$ tales que $(a, b) \preceq (c, d)$ y $(c, d) \preceq (e, f)$, luego por definición tenemos:

  - $a \preceq_X c$.
  - $c \preceq_X e$.
  - $b \preceq_Y d$.
  - $d \preceq_Y f$.

  y por transitividades tambien ocurren $a \preceq_X e$ y $b \preceq_Y f$. Finalmente por definición $(a, b) \preceq (e, f)$.

- Antisimetría: Sean $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ tales que $(x, y) \preceq (x', y')$ y $(x', y') \preceq (x, y)$ luego por definicion tenemos:

  - $x \preceq_X x'$.
  - $y \preceq_Y y'$.
  - $x' \preceq_X x$.
  - $y' \preceq_Y y$.

  y por antisimetrías ocurren $x = x'$ y $y = y'$ por lo que $(x, y) = (x', y')$.

17. Sean $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ dos conjuntos ordenados. Una «conexión Galois» es un par de funciones (f_*, f^*) con $f_* : X \to Y$ y $f^* : Y \to X$ tales que para todos $x \in X$ e $y \in Y$ vale:

$$f_*(x) \preceq_Y y \iff x \preceq_X f^*(y)$$

   a) Probar que si $f_* : X \to Y$ es un isomorfismo, entonces (f_*, f_*^{-1}) es una conexión de Galois.

   b) Dada una función $A \to B$, probar que se puede construir una conexión de Galois entre el conjunto potencia de A y el de B utilizando los operadores que calculan la imagen de f sobre un subconjunto de A y la imagen inversa de f sobre un subconjunto de B.

   c) Considerando los órdenes usuales sobre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}_0^+$, encontrar f^* tal que (f_*, f^*) sea una conexión Galois donde $f_* : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_0^+$ es la identidad.

   d) Dada una conexión Galois (f_*, f^*) entre X e Y, probar que para todo $x \in X, y \in Y$ vale $x \preceq_X f^*(f_*(x))$ y $f_*(f^*(y)) \preceq_Y y$.

   e) Dada una conexión de Galois (f_*, f^*) entre X e Y, probar que f_* y f^* son monótonas.

Soluciones

a) Como f_* es isomorfismo de orden, entonces f_*^{-1} también lo es. Veamos que (f_*, f_*^{-1}) es conexión de Galois:

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sabemos que $f_*(x) \preceq_Y y$, luego como f_*^{-1} es isomorfismo de orden, aplicando a ambos lados obtenemos $x \preceq_X f_*^{-1}(y)$.
- $\boxed{\Leftarrow}$: Analogamente en caso contrario.

b) Sean $f_*(A) = im(A)$ y $f^*(B) = im^{-1}(B)$, veamos que (f_*, f^*) es una conexión de Galois:

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sabemos que $im(A) \subseteq B$, queremos ver que $A \subseteq im^{-1}(B)$:

$$
\begin{array}{cc}
 & a \in A \\
\Rightarrow & \langle def.im \rangle \\
 & f(a) \in im(A) \\
\Rightarrow & \langle hipotesis \rangle \\
 & f(a) \in B \\
\Rightarrow & \langle def \rangle \\
 & a \in \{x \in A : f(x) \in B\} \\
\Rightarrow & \langle def.im^{-1} \rangle \\
 & a \in im^{-1}(B)
\end{array}
$$

- $\boxed{\Leftarrow}$: Sabemos que $A \subseteq im^{-1}(B)$, queremos ver que $im(A) \subseteq B$:

$$
\begin{array}{cc}
 & b \in im(A) \\
\Rightarrow & \langle def.im \rangle \\
 & b \in \{f(x) \in B : x \in A\} \\
\Rightarrow & \langle def \rangle \\
 & b \in B
\end{array}
$$

c) COMPLETAR.

d)

- Sea $x \in X$ luego $y = f_*(x) \in Y$ y por reflexividad tenemos $f_*(x) \preceq_Y f_*(x)$, luego:

$$f_*(x) \preceq_Y f_*(x) = y \iff x \preceq_X f^*(y) = f^*(f_*(x))$$

- Analogo.

e)

- Sean x, x' tales que $x \preceq_X x'$. Por el apartado anterior $x' \preceq_X f^*(f_*(x'))$ y por transitividad $x \preceq_X f^*(f_*(x'))$, luego por ser conexión de Galois $f_*(x) \preceq_Y f_*(x')$.
- Analogo.

18. Probar que la relación de isomorfismo entre conjuntos ordenados es una relación de equivalencia.

Solución

- Reflexividad: Sea X un poset, luego la funcion identidad es un isomorfismo de X a X por lo que $X \simeq X$.
- Transitividad: Sean X, Y, Z posets tales que $X \simeq Y \simeq Z$, luego existen isomorfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Queremos ver si $X \simeq Z$, es decir, si existe un isomorfismo entre X y Z.

  Sabemos que $g \circ f$ es una biyección entre X y Z, resta ver que preserva la estructura: sean $a, b \in X$ luego $f(a) \preceq f(b)$ pues f es isomorfismo y por la misma razon $g(f(a)) \preceq g(f(b))$, es decir $g \circ f(a) \preceq g \circ f(b)$.
- Simetría: Sean X, Y posets tales que $X \simeq Y$ luego existe $f : X \to Y$ biyectiva creciente y en consecuencia f^{-1} tambien lo es por lo que $Y \simeq X$.