Complementos de Matematica II

22 de septiembre de 2019

Índice general

Parte I

Teoría del orden y Grupos

Capítulo 1

Relaciones

1.1. Definiciones

1.1.1. Relación

Una relación R entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Para notar que un elemento $a \in A$ se relaciona con otro elemento $b \in B$ escribimos aRb o $(a, b) \in R$.

1.1.2. Relación funcional

Diremos que una relacion $R \subseteq A \times B$ es una relación funcional si:

$$aRb \wedge aRc \Rightarrow b = c$$

Llamaremos dominio de la relación al conjunto $dom\,(R) = \{a \in A | \exists b \in B : aRb\}$.

Diremos que el conjunto $im\,(R) = \{b \in B | \exists a \in A : aRb\}$ es la imagen de R.

Cuando $dom\,(R) = A$ diremos que R es una función.

1.1.3. Relación inversa

Si R es una relación entre A y B se define la relación inversa R^{-1} entre B y A como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : aRb\}$$

1.1.4. Union, intersección y diferencia

Sean R y S relaciones entre A y B llamamos union de R y S a la relación $R \cup S$.

Analogamente podemos considerar las relaciones $R \cap S$ y $R - S$.

1.1.5. Composición

Dada una relación R entre A y B, y otra relacion S entre B y C; definimos la relación:

$$S \circ R = \{(a, b) \in A \times C | \exists b \in b : aRb \wedge bSc\}$$

1.1.6. Restricción

Sean R una relación de A en B, $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$, llamaremos restricción de R a $A' \times B'$ a la relación:

$$R|_{A' \times B'} = \{(a, b) \in A' \times B' : aRb\}$$

Si $f : A \to B$ es una función entonces $f|_{A'} = f|_{A' \times B}$.

1.2. Clasificación de relaciones

1.2.1. Propiedades

Sea R una relación de A en A, diremos que R es:

Reflexiva si $\forall a \in A : aRa$.

Simétrica si $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$.

Antisimétrica si $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$.

Transitiva si $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

Total si $\forall a, b \in A : aRb \vee bRa$.

1.2.2. Relación de equivalencia

Si R es una relación en A reflexiva, simétrica y transitiva diremos que R es una relación de equivalencia.

- Llamaremos clase de equivalencia de $a \in A$ y lo notaremos $\overline{a}$ al conjunto:
$$\overline{a} = \{b \in A : aRb\}$$

- A la siguiente partición de A la llamaremos conjunto cociente:
$$A/R = \{\overline{a} : a \in A\}$$

- La función $\pi : A \to A/R$ definida por $\pi(a) = \overline{a}$ es llamada proyección al cociente.

- Para cualquier función $f : A \to B$ llamaremos nucelo de f a la siguiente relación de equivalencia:
$$ker(f) = \{(a, a') : f(a) = f(a')\}$$

Observación Cuando definimos una función sobre el conjunto cociente de una relación de equivalencia, debemos prestar atención a la forma en la que lo hacemos. Consideremos a modo de ejemplo la siguiente función sobre el cociente de la relación de equivalencia modulo 5:

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & & \overline{x} & \to & f(\overline{x}) = x \end{array}$$

Esta función no esta bien definida, o mas precisamente, f no es una función. En efecto $f\left(\overline{0}\right) = 0$ y $f\left(\overline{5}\right) = 5$ pero $\overline{0} = \overline{5}$ por lo cual existe un elemento del dominio con dos imagenes diferentes.

Debemos entonces, cada vez que definimos una función sobre clases de equivalencia asegurarnos de que si $x \sim y$ entonces $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$, de ser asi diremos que f tiene una buena definición.

1.3. Teoremas

1.3.1. Invertibilidad de relaciones funcionales

Enunciado Sea f una relación funcional de A en B, entonces f^{-1} es relación funcional si y solo si f es inyectiva.

Demostración

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sean a, a', b tales que $f(a) = b$ y $f(a') = b$ luego $f^{-1}(b) = a$ y $f^{-1}(b) = a'$ y como f^{-1} es funcional resulta $a = a'$.

- $\boxed{\Leftarrow}$: Sean a, a', b tales que $f^{-1}(b) = a$ y $f^{-1}(b) = a'$ luego $f(a) = b$ y $f(a') = b$ y como f es inyectiva resulta $a = a'$.

1.3.2. Composición de funciones

Enunciado Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones, entonces $g \circ f$ es una función.

Demostración Dado $a \in A$ sabemos que existe un único $b \in B$ tal que $f(a) = b$ pues f es una función.

Por la misma razón, para dicho elemento b existe un único elemento $c \in C$ tal que $g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a) = c$.

Hemos visto que dado $a \in A$ existe un único elemento $c \in C$ tal que $g \circ f(a) = c$, es decir $g \circ f$ es una función.

1.3.3. Herencia de propiedades

Enunciado Sean R una relación de A en B, $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$, entonces si R es reflexiva tambien lo será $R|_{A' \times B'}$. También ocurre lo mismo si R es simétrica, antisimétrica o transitiva.

Demostración EJERCICIO.

1.3.4. Biyectividad entre relaciones de equivalencia y particiones

Enunciado Si R es una relación de equivalencia en A entonces A/R es una partición de A y además, dada una particion $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ la relación definida por $a \sim b \iff \exists X \in P : a, b \in X$ es una relación de equivalencia.

Demostración EJERCICIO.

1.3.5. Teorema de factorización

Enunciado Si $\sim$ es una relación de equivalencia en A y $f : A \to B$ es una función tal que $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$, entonces existe una única función $\widetilde{f} : A/\sim \to B$ tal que $f = \widetilde{f} \circ \pi$.

Demostración EJERCICIO. Definir $f(\overline{a}) = f(a)$ y probar que esta definición no depende del representante elegido.

Capítulo 2

Conjuntos ordenados

2.1. Preordenes

2.1.1. Definiciones

Una relación $\preceq$ en A es un preorden si es reflexiva y transitiva.

Diremos que un elemento a es

maximal si $\forall x : a \preceq x \Rightarrow x \preceq a$.

minimal si $\forall x : x \preceq a \Rightarrow a \preceq x$.

máximo si $\forall x : x \preceq a$.

mínimo si $\forall x : a \preceq x$.

cota superior de $B \subseteq A$ si $\forall b \in B : b \preceq a$.

cota inferior de $B \subseteq A$ si $\forall b \in B : a \preceq b$.

supremo de $B \subseteq A$ si $a \in \text{mín}\{c \in A : c \text{ es cota superior de } B\}$.

ínfimo de $B \subseteq A$ si $a \in \text{máx}\{c \in A : c \text{ es cota superior de } B\}$.

2.1.2. Orden inverso

Si $(A, \preceq)$ es un conjunto preordenado, el orden inverso $\succeq$ se define como $a \succeq b \iff b \preceq a$, resultando este un preorden donde todas las definiciones se dualizan:

- a es elemento maximal en $(A, \preceq) \iff a$ es elemento minimal en $(A, \succeq)$.
- a es cota superior en $(A, \preceq) \iff a$ es cota inferior en $(A, \succeq)$.
- a es supremo en $(A, \preceq) \iff a$ es ínfimo en $(A, \succeq)$.

2.1.3. Teorema de extremos en preordenes

Enunciado Sea $\preceq$ un preorden sobre un conjunto A, luego las siguientes proposiciones son validas:

- Si $M \in A$ es un elemento máximo, entonces también es maximal.
- Si $m \in A$ es un elemento mínimo, entonces también es minimal.

Demostración EJERCICIO.

2.2. Relaciones de orden

2.2.1. Definición

Una relación $\leq$ en un conjunto A es un orden parcial (o simplemente orden) si es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Se dice que $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado (poset).

Observación La noción de orden parcial es mucho más intuitiva que la noción de preorden, de hecho es un caso particular que no admite ciclos.

Vale la pena notar tambien que en un poset si existen máximos o mínimos son únicos.

2.2.2. Ordenes naturales

Dados dos posets $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ hay dos formas de definir un orden parcial en el producto cartesiano $A \times B$:

Orden producto $(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq_A a' \wedge b \leq_B b'$

Orden lexicográfico $(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq_A a' \vee (a = a' \wedge b \leq b')$

2.2.3. Cadenas y anticadenas

Sea $(A, \leq)$ un poset y $X \subseteq A$ un subconjunto, diremos que:

- $(X, \leq)$ es una cadena si el orden es total.
- $(X, \leq)$ es una anticadena si: $\forall x, y \in X : x \leq y \Rightarrow x = y$

2.2.4. Morfismos entre posets

Los morfismos de posets son las funciones que «respetan» la estructura, es decir, el orden.
Sea $f : (A, \leq) \to (B, \leq)$ diremos que f es un:

morfismo entre A y B si f es creciente, es decir: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

isomorfismo entre A y B si $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$.

antiisomorfismo entre A y B si $x \leq y \iff f(y) \leq f(x)$.

Observación La existencia de una función biyectiva y monótona no implica que los ordenes sean isomorfos, como demuestra el siguiente ejemplo:

$$id : (\mathbb{N}, |) \to (\mathbb{N}, \leq)$$

Dicha funcion es biyectiva y es morfismo de orden, sin embardo id^{-1} no lo es pues $2 \leq 3$ pero $2 \parallel 3$.

2.2.5. Conjuntos bien ordenados

Un orden total $(A, \leq)$ se dice conjunto bien ordenado si:

$$\forall B \subseteq A / B \neq \emptyset : B \text{ tiene elemento mínimo}$$

2.3. Teoremas

2.3.1. Existencia de elementos particulares en posets finitos

Enunciado En un poset finito siempre existen elementos maximales/minimales.

Demostración EJERCICIO.

2.3.2. Teorema de isomorfismos

Enunciado f es un isomorfismos (respectivamente antiisomorfismo) de orden si y solo si f y f^{-1} son crecientes (respectivamente decrecientes).

Demostración EJERCICIO.

2.3.3. Propiedades de ordenes totales

Enunciado Sea $(A, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado y $a \in A$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. a es maximal (minimal).
2. a es cota superior (inferior).
3. a es supremo (ínfimo).
4. a es máximo (mínimo).

Demostración EJERCICIO.

2.3.4. Isomorfismo de ordenes totales

Enunciado Si $(A, \leq_A)$ es un conjunto totalmente ordenado, $(B, \leq_B)$ es un poset y $f : A \to B$ es biyectiva y crenciente (respectivamente decreciente), entonces f es un isomorfismo (respectivamente antiisomorfismo) de orden. En particular $(B, \leq_B)$ es totalmente ordenado.

Demostración COMPLETAR.

2.3.5. Principio de buena ordenación

Enunciado Todo conjunto admite un buen orden.

Demostración EJERCICIO.

2.3.6. Principio del buen orden

Enunciado Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es bien ordenado.

Demostración EJERCICIO.

Capítulo 3

Retículos

3.1. Definiciones

3.1.1. Definición en teoría del orden

Un poset $(L, \leq)$ se dice un retículo si:

$$\forall a, b \in L \exists x, y \in L / x = \sup\{a, b\} \wedge y = \inf\{a, b\}$$

Observaciones

- No necesariamente existen $\max\{a, b\}$ y $\min\{a, b\}$.
- Tomar supremo/ínfimo define dos operaciones en L: $a \vee b := \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b := \inf\{a, b\}$.

3.1.2. Definición algebraica

Un retículo $(L, \vee, \wedge)$ consiste de un conjunto no vacío L junto con dos operaciones $\wedge, \vee$ que satisfacen:

Asociatividad $\forall x, y, z \in L \begin{cases} x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \end{cases}$

Conmutatividad $\forall x, y \in L \begin{cases} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{cases}$

Absorción $\forall x, y \in L \begin{cases} x \vee (x \wedge y) = x \\ x \wedge (x \vee y) = x \end{cases}$

3.1.3. Teoremas

3.1.3.1. Equivalencia de las definiciones

Enunciado Si $(L, \vee, \wedge)$ es un retículo como en la definición algebraica, entonces

$$x \leq y \iff x \vee y = y$$

definie un orden parcial $(L, \leq)$ tal que $x \vee y = \sup\{x, y\}$ y $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Demostración

- $\boxed{\Rightarrow}$:
  - Veamos que $\leq$ así definido es un orden parcial.
    - Reflexividad: Por absorción $x \wedge (x \vee x) = x$ por lo que $x \vee x = x \vee (x \wedge (x \vee x))$ y nuevamente por absorción:

      $$\boxed{x \vee x} = x \vee (x \wedge (x \vee x)) = \boxed{x} \iff x \leq x$$

    - Antisimetría: Supongamos $x \leq y$ e $y \leq x$, luego $x \leq y \iff x \vee y = y$ e $y \leq x \iff y \vee x = x$ y por conmutatividad $x = y$.
    - Transitividad: Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq z$, luego $x \leq y \iff x \vee y = y$ e $y \leq z \iff y \vee z = z$. Calculemos $x \vee z$:

      $$x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$$

      Como $x \vee z = z$ entonces $x \leq z$.
  - Finalmente veamos que $x \vee y = \sup\{x, y\}$ y $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.
    - Por definición $x \leq x \vee y \iff x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$ lo cual vale por idempotencia, luego sabemos que $x \vee y$ es cota superior de $\{x, y\}$.
    - Sea z otra cota superior del mismo conjunto, entonces $x \leq z \iff x \vee z = z$ e $y \leq z \iff y \vee z = z$, luego

      $$\boxed{(x \vee y) \vee z} = x \vee (y \vee z) = x \vee z = \boxed{z} \Rightarrow x \vee y \leq z$$

      por lo que $x \vee y$ es la mínima cota supeior, es decir $x \vee y = \sup\{x, y\}$.

◦ Analogamente para $x \wedge y = \text{ínf}\,\{x, y\}$.

- $\boxed{\Leftarrow}$: Veamos que si definimos $x \vee y = \sup\{x, y\}$ y $x \wedge y = \text{ínf}\,\{x, y\}$, entonces se verifica le definición algebraica de $(L, \wedge, \vee)$.
    - Asociatividad: COMPLETAR.
    - Conmutatividad: $x \vee y = \sup\{x, y\} = \sup\{y, x\} = y \vee x$. Analogamente para $x \wedge y$.
    - Absorción: COMPLETAR.

3.1.3.2. Propiedades derivadas

Enunciado Sea $(L, \wedge, \vee)$ un retículo y $x, y, z, w \in L$, entonces:

1. $x \leq x \vee y$
2. $x \wedge y \leq x$
3. $x \leq y \iff x \vee y = y \iff x \wedge y = x$
4. Idempotencia: $x \vee x = x = x \wedge x$
5. Compatibilidad: $x \leq z \wedge y \leq z \Rightarrow \begin{cases} x \vee y \leq z \vee w \\ x \wedge y \leq z \wedge w \end{cases}$

Demostración

1. COMPLETAR.
2. COMPLETAR.
3. COMPLETAR.
4. Vease reflexividad en equivalencia de las definiciones.
5. COMPLETAR.

Capítulo 4

Grupos

Parte II

Teoría de categorias