1. Dar diagramas para:

   a) Los retículos con 5 elementos.

   b) Los retículos con 6 elementos.

   c) El retículo de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

   Soluciones

   a) COMPLETAR.

   b) COMPLETAR.

   c) COMPLETAR.

2. Interpretar $\wedge$ y $\vee$ en los siguientes conjuntos ordenados:

   a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, donde A es un conjunto arbitrario.

   b) $(\mathbb{N}, |)$, donde $|$ denota la relacion «*divide a*».

   c) Álgebra de Lindenbaum-Tarski (ver ejercicio práctica anterior).

   Soluciones

   a) COMPLETAR.

   b) COMPLETAR.

   c) COMPLETAR.

3. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo.

   a) Probar que para todos $x, y, z \in X$ se satisface:

      1) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

      2) $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

      3) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.

   b) Probar que si una de las desigualdades anteriores es una igualdad, las restantes también lo son.

Soluciones

a) COMPLETAR.
   1) COMPLETAR.
   2) COMPLETAR.
   3) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

4. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo. Probar que los siguientes subconjuntos de X son subretículos:

   a) $\{x \in X : x \leq a\}$.

   b) $\{x \in X : b \leq x\}$.

   c) $\{x \in X : a \leq x \leq b\}$.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

c) COMPLETAR.

5. Sea $(L, \preceq)$ un retículo. Un polinomio p en n variables es una función $p : L^n \to L$ que pertenece al conjunto inductivo P_L:

   - Para $i \in \{1, \ldots, n\}, \pi_i \in P_L$ donde $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.
   - Si $f, g \in P_L$ entonces $f \vee g \in P_L$, donde $(f \vee g)(\overline{x}) = f(\overline{x}) \vee g(\overline{x})$.
   - Si $f, g \in P_L$ entonces $f \wedge g \in P_L$, donde $(f \wedge g)(\overline{x}) = f(\overline{x}) \wedge g(\overline{x})$.

   Sea f un polinomio en n variables, y $x_i \preceq y_i$ para cada i de 1 hasta n. Probar que $f(x_1, \ldots, x_n) \preceq f(y_1, \ldots, y_n)$.

Solución COMPLETAR.

6. Un retículo L se llama *modular* si para todos $a, b, c \in L$ resulta

$$a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

Probar que son equivalentes:

a) L es modular.
b) $a \geq c \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ para todos $a, b, c \in L$.
c) $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ para todos $a, b, c \in L$.
d) $a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para todos $a, b, c \in L$.

Soluciones

a) COMPLETAR.
b) COMPLETAR.
c) COMPLETAR.
d) COMPLETAR.

7. Probar que todo retículo distributivo es modular. ¿Es cierta la recíproca?

   Solución COMPLETAR.

8. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo. Probar que:

   a) Si $\vee$ tiene elemento neutro 0, entonces $a \wedge 0 = 0$ para todo $a \in X$.
   b) Si $\wedge$ tiene elemento neutro 1, entonces $a \vee 1 = 1$ para todo $a \in X$.

   Soluciones

   a) COMPLETAR.
   b) COMPLETAR.

9. Sean $(X, \wedge, \vee)$ y $(Y, \wedge', \vee')$ retículos con 0 y 1; y $h : X \rightarrow Y$ un homomorfísmo de retículo. Mostrar con un ejemplo que no siempre $h(1_X) = 1_Y$ o $h(0_X) = 0_Y$

Solución COMPLETAR.

10. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo acotado (con 0 y 1). Dado $a \in X$, si existe $b \in X$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$, b se llama *complemento* de a, y en caso de ser único se nota $\overline{a}$. Probar que:

    a) $\overline{\overline{a}} = a$.

    b) $\overline{0} = 1$.

    c) Si X es distributivo, $\overline{(a \wedge b)} = \overline{a} \vee \overline{b}$ y $\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \wedge \overline{b}$.

    Soluciones

    a) COMPLETAR.

    b) COMPLETAR.

    c) COMPLETAR.

11. Sean $(X, \wedge, \vee)$ y $(Y, \wedge', \vee')$ retículos y $h : X \to Y$ un homomorfísmo de retículo. Probar que:

    a) $h(X)$ es un subretículo de Y.

    b) Si X es distributivo, $h(X)$ es distributivo.

    Soluciones

    a) COMPLETAR.

    b) COMPLETAR.

12. Verificar que todo isomorfismo de retículo se corresponde con un isomorfismo de conjuntos ordenados.

    Solución COMPLETAR.

13. Probar que el retículo potencia de cualquier conjunto es completo.

Solución COMPLETAR.

14. COMPLETAR.

15. COMPLETAR.

16. Sea $(P, \leq)$ un orden total. Probar que P es un retículo distributivo.

    Solución COMPLETAR.

17. *Retículo completo*. Sea $(P, \leq)$ un orden. Probar que si todo subconjunto de P tiene supremo, entonces todo subconjunto de P tiene ínfimo.

    Solución COMPLETAR.

18. COMPLETAR.