1. Probar que en el conjunto $\{a, b\}$ hay tres órdenes posibles. ¿Y en $\{a, b, c\}$ y $\{a, b, c, d\}$?

   Solución COMPLETAR.

2. En $(\mathbb{N}, |)$, donde $|$ denota la relación «divide a»:

   a) Verificar que $(\mathbb{N}, |)$ es un conjunto ordenado.

   b) ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?

   c) Si S es el conjunto de los divisores de 60, graficar el conjunto ordenado inducido por $|$ en S.

   Soluciones

   a)

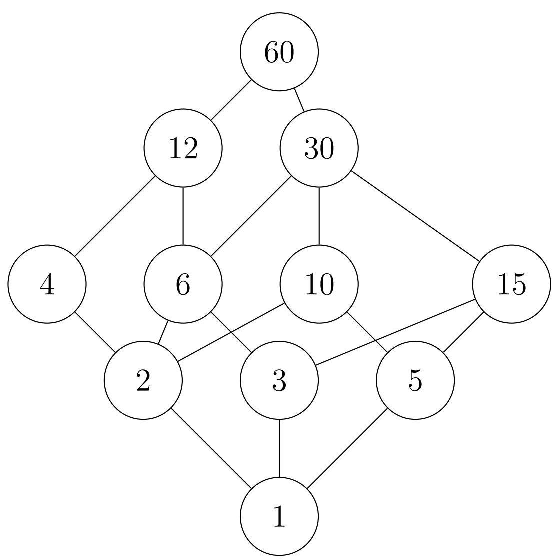
   - Reflexividad: Sea $n \in \mathbb{N}$, luego $n = n * 1 \iff n|n$.
   - Antisimetría: Sean $n, m \in \mathbb{N}/n|m \wedge m|n$ luego $n = m * c$ y $m = n * k$. Finalmente:

     $$n = n * k * c \iff 1 = k * c \iff k = c = 1$$

     por lo que $n = m * 1 = m$.

   b) No lo es pues para cualquier par de primos p_1 y p_2 resulta: $p_1 \parallel p_2$.

   c)



3. *Yoneda Lemma*: Probar que en un preorden $(P, \preceq)$ vale: $x \preceq y \iff \forall z : z \preceq x \Rightarrow z \preceq y$.

   Solución

   - $\boxed{\Rightarrow}$: Sea $z \preceq x$, luego por transitividad: $z \preceq x \preceq y$.
   - $\boxed{\Leftarrow}$: Por reflexididad tenemos $x \preceq x$ y por hipotesis: $x \preceq x \Rightarrow x \preceq y$.

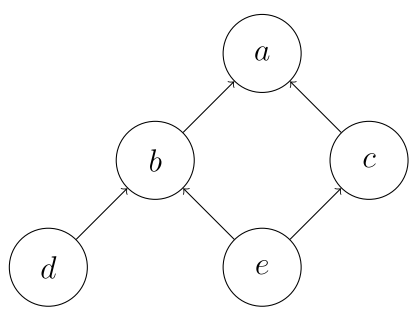
4. Sea A un conjunto arbitrario. Verificar que $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un conjunto ordenado. ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?

   Solución

   - Reflexividad: Sea $X \in \mathcal{P}(A)$, luego $x \in X \Rightarrow x \in X$ por lo que $X \subseteq X$.
   - Antisimetría: Sean $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ luego si $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$ resulta $X = Y$ por definición.
   - Transitividad: Sean $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A) / X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z$ luego $x \in X \Rightarrow x \in Y \Rightarrow x \in Z$ por lo que $X \subseteq Z$.

   No necesariamente es totalment ordenado. Por ejemplo para $A = \{1, 2, 3\}$ resulta $\{1, 2\} \parallel \{2, 3\}$.

5. Sea $V = \{a, b, c, d, e\}$. El grafo dirigido de la siguiente figura define un orden en V de la siguiente manera: $x \preceq y \iff x = y$ o existe un xy-camino dirigido.



a) Insertar el símbolo correcto $(\preceq, \succeq, \|)$ entre cada par de elementos:

1) $a \quad e$.	3) $d \quad a$.
2) $b \quad c$.	4) $c \quad d$.

b) ¿Es un conjunto totalmente ordenado? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

Soluciones

a)

1) $a \succeq e$.	3) $d \preceq a$.
2) $b \| c$.	4) $c \| d$.

b)

- No es totalmente ordenado pues existen elementos que no son comparables.
- a es elemento máximo. No existe elemento mínimo.
- d y e son minimales. a es maximal.

6. Sean $(P, \preceq)$ un conjunto ordenado, X un conjunto, y $f : X \to P$ una función. Se define la relación H sobre elementos de X como $xHx' \iff f(x) \preceq f(x')$. ¿Que tipo de relación es H? Dar condiciones para que H sea un conjunto ordenado.

Solución

- Reflexividad: $x \in X \Rightarrow f(x) \in P \Rightarrow f(x) \preceq f(x) \iff xHx$.
- Transitividad: Sean $x, y, z \in X / xHy \wedge yHz$ luego:

$$f(x) \preceq f(y) \wedge f(y) \preceq f(z) \Rightarrow f(x) \preceq f(z) \iff xHz$$

- Antisimetría: Si agregamos la hipotesis de que f sea inyectiva, entonces si $xHy \wedge yHx$ resultara:

$$f(x) \preceq f(y) \wedge f(y) \preceq (x) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

7. En $(Prop, D)$, donde $Prop$ son las fórmulas del cálculo proposicional y $\phi D \psi \iff \{\phi\} \vdash \psi$:

   a) Verificar si $(Prop, D)$ es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.

   b) ¿La realación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

Soluciones

a)

- Reflexividad: Sea $\phi \in Prop$ luego por la regla trivial $\{\phi\} \vdash \phi$.
- Transitividad: Sean ϕ, ψ, γ tales que $\{\phi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \gamma$ luego:
  1) $\{\phi\} \cup \{\psi\} \vdash \psi \wedge \gamma$ (introducción de la conjunción en ambas hipótesis).
  2) $\{\phi\} \cup \{\psi\} \vdash \gamma$ (eliminación de la conjunción en 1).
  3) $\{\phi\} \vdash \psi \rightarrow \gamma$ (introducción de la implicación en 2).
  4) $\{\phi\} \cup \{\phi\} = \{\phi\} \vdash \gamma$ (eliminación de la implicación en hipótesis y 3).
- Es un conjunto preordenado pues la antisimetría no se cumple como demuestra el siguiente ejemplo: $\{\perp\} \vdash p \wedge \neg p$ y $\{p \wedge \neg p\} \vdash \perp$ pero $\perp \neq p \wedge \neg p$.

b)

- La relación no es total pues, por ejemplo, $p \parallel q$.
- Cualquier proposicion semanticamente equivalente a $\perp$ es mínimo ya que $\forall \phi \in PROP : \{\perp\} \vdash \phi$. No existe elemento máximo.
- No existen maximales pues para cualquier $\phi \in PROP$ siempre ocurre $\{\phi\} \vdash \phi \vee \psi$ pero $\{\phi \vee \psi\} \nvdash \phi$. Todos los mínimos son minimales.

8. En $(Prop, I)$, donde $\phi I \psi \iff \emptyset \vdash \phi \Rightarrow \psi$.

   a) Verificar si $(Prop, I)$ es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.

   b) ¿La realación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

   c) Explique el nexo entre esta relación y la del ejercicio anterior.

   Soluciones

   a) COMPLETAR.

   b) COMPLETAR.

   c) COMPLETAR.

9. Sea $(P, \preceq)$ un preorden. Construir un conjunto ordenado $(P/\sim, \sqsubseteq)$, donde $x \sim y$ si y solo si $x \preceq y$ y $y \preceq x$, tal que $\pi : P \to P/\sim$ sea monótona.

   Aplicar esta construcción a la relación $(Prop, D)$ del ejercicio anterior. Para este caso partricular, la construcción se llama «álgrebra de Lindenbaum-Tarski».

   Solución COMPLETAR.

10. Probar que:

    a) Si R define un orden en el conjunto V, entonces R^{-1} tambien define un orden en V, llamado «orden inverso».

    b) Si R define un orden total en el conjunto V, entonces R^{-1} tambien define un orden total en V.

    c) Si $(A, \preceq)$ es un orden no total, puede existir un $S \subseteq A$ tal que $(S, \preceq)$ es un orden total.

    Soluciones

    a)

    - Reflexividad: Sea $x \in V$, luego $xRx \Rightarrow xR^{-1}x$.

- Antisimetría: Sean $x, y \in V$ tales que $xR^{-1}y$ y $yR^{-1}x$, luego xRy y yRx. Por antisimetría de R resulta $x = y$.
- Transitividad: Sean $x, y, z \in V / xR^{-1}y \wedge yR^{-1}z$ luego $yRx \wedge zRy$ y por transitividad zRx. Por definición de R^{-1} resulta $xR^{-1}z$.

b) Supongamos existen $x, y \in V$ tales que $x \parallel_{R^{-1}} y$, luego $x \parallel_R y$. Contradicción.

c) Lo propuesto ocurre por ejemplo con $A = \{2, 3, 4\}$ y $S = \{2, 4\}$ con la relacion $|$.

11. Sea $(P, \preceq)$ un preorden. Probar que si existe un elemento máximo, entonces todos los maximales son máximos.

Solución Sea M un elemento máximo de P y m un elemento maximal. Como m es minimal resulta $\forall x : m \leq x \Rightarrow x \leq m$, en particular para $x = M$ tenemos $m \leq M \Rightarrow M \leq m$. Veamos que m es máximo: sea $x \in P$ luego, $x \leq M \leq m$, es decir $\forall x : x \leq m$.

12. Sean $(A, \preceq_1)$ y $(A, \preceq_2)$ dos conjuntos ordenados (con el mismo conjunto subyacente).

a) ¿Define $\preceq_1 \cap \preceq_2$ un orden en A?

b) ¿Define $\preceq_1 \cup \preceq_2$ un orden en A?

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) No. Sean $x \neq y$ luego para $\preceq_1 = \Delta_A \cup \{(x, y)\}$ y $\preceq_2 = \Delta_A \cup \{(y, x)\}$ en $\preceq_1 \cup \preceq_2$ se rompe la antisimetría.

13. Probar que el conjunto de todos los elementos maximales (minimales) de un conjunto ordenado, es una anticadena.

Solución

- Sean $a \neq b$ en el conjunto de todos los elementos maximales. Supongamos $a \leq b$ luego $b \leq a$ y por antisimetría $a = b$. Contradicción. Análogo si $b \leq a$.
- Análogo para minimales.

14. Considerar el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ y el de los enteros negativos $\mathbb{Z}^-$ con sus órdenes usuales. Probar que $\mathbb{Z}^+ \not\simeq \mathbb{Z}^-$.

    Solución COMPLETAR.

15. Sea $(A, \preceq)$ un conjunto ordenado. Para todo elemento $a \in A$ definamos

$$S(a) = \{x \in A : x \preceq a\}$$

    Si $\mathcal{A} = \{S(a) : a \in A\}$, ordenado por la inclusión, demostrar que $A \simeq \mathcal{A}$.

    Solución COMPLETAR.

16. Sean $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ dos conjuntos ordenados

    a) Dar un ejemplo de conjuntos $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ y una función $f : X \to Y$ que sea sobreyectiva y preserve el orden pero que no sea un isomorfismo de conjuntos ordenados.

    b) Probar que son equivalentes:

        1) X e Y son isomorfos.

        2) Existe $f : X \to Y$ sobreyectiva tal que $f(a) \preceq_Y f(b)$ si y solo si $a \preceq_X b$.

        3) Existen $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ homomorfismos de conjuntos ordenados tales que $f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$.

    c) Mostrar que $(X \to Y, \preceq_{X \to Y})$ es un conjunto ordenado, donde $X \to Y$ representa las funciones entre $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$, y el orden está definido por $f \preceq_{X \to Y} g$ si y solo si $\forall x : f(x) \preceq_Y g(x)$.

    d) Mostrar que $(X \times Y, \preceq_{X \times Y})$ es un conjunto ordenado, donde $(x, y) \preceq_{X \times Y} (x', y')$ si y solo si $x \preceq_X x'$ y $y \preceq_Y y'$.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b)

   1) COMPLETAR.
   2) COMPLETAR.
   3) COMPLETAR.

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

17. Sean $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ dos conjuntos ordenados. Una «conexión Galois» es un par de funciones (f_*, f^*) con $f_* : X \to Y$ y $f^* : Y \to X$ tales que para todos $x \in X$ e $y \in Y$ vale:

$$f_*(x) \preceq_Y y \iff x \preceq_X f^*(y)$$

a) Probar que si $f_* : X \to Y$ es un isomorfismo, entonces (f_*, f_*^{-1}) es una conexión de Galois.

b) Dada una función $A \to B$, probar que se puede construir una conexión de Galois entre el conjunto potencia de A y el de B utilizando los operadores que calculan la imagen de f sobre un subconjunto de A y la imagen inversa de f sobre un subconjunto de B.

c) Considerando los órdenes usuales sobre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}_0^+$, encontrar f^* tal que (f_*, f^*) sea una conexión Galois donde $f_* : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_0^+$ es la inclusión.

d) Dada una conexión Galois (f_*, f^*) entre X e Y, probar que para todo $x \in X, y \in Y$ vale $x \preceq_X f^*(f_*(x))$ y $f_*(f^*(y)) \preceq_Y y$.

e) Dada una conexion de Galois (f_*, f^*) entre X e Y, probar que f_* y f^* son monótonas.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

18. Probar que la relación de isomorfismo entre conjuntos ordenados es una relación de equivalencia.

    Solución COMPLETAR.