

1. Probar que en el conjunto $\{a, b\}$ hay tres órdenes posibles. ¿Y en $\{a, b, c\}$ y $\{a, b, c, d\}$?

Solución COMPLETAR.

2. En $(\mathbb{N}, |)$, donde $|$ denota la relación «divide a»:
 - a) Verificar que $(\mathbb{N}, |)$ es un conjunto ordenado.
 - b) ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?
 - c) Si S es el conjunto de los divisores de 60, graficar el conjunto ordenado inducido por $|$ en S .

Soluciones

a)

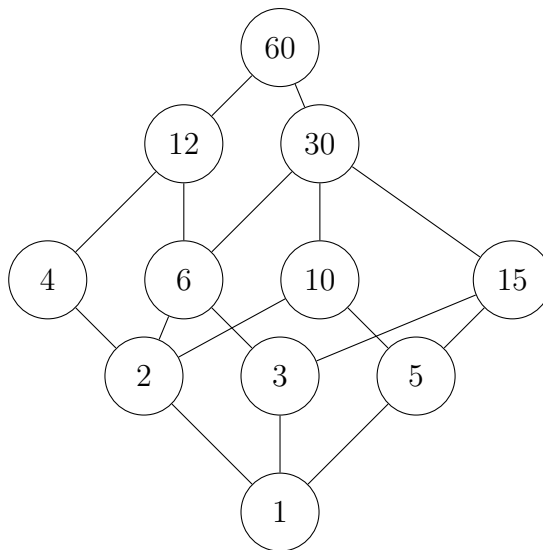
- Reflexividad: Sea $n \in \mathbb{N}$, luego $n = n * 1 \iff n|n$.
- Antisimetría: Sean $n, m \in \mathbb{N}/n|m \wedge m|n$ luego $n = m * c$ y $m = n * k$. Finalmente:

$$n = n * k * c \iff 1 = k * c \iff k = c = 1$$

por lo que $n = m * 1 = m$.

b) No lo es pues para cualquier par de primos p_1 y p_2 resulta: $p_1 \parallel p_2$.

c)



3. *Yoneda Lemma*: Probar que en un preorden (P, \preceq) vale: $x \preceq y \iff \forall z : z \preceq x \Rightarrow z \preceq y$.

Solución

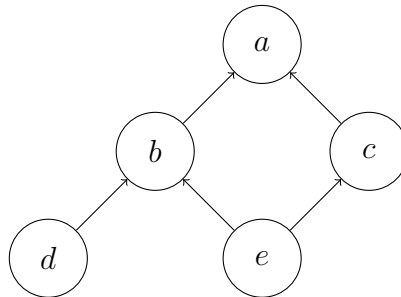
- \Rightarrow : Sea $z \preceq x$, luego por transitividad: $z \preceq x \preceq y$.
 - \Leftarrow : Por reflexividad tenemos $x \preceq x$ y por hipótesis: $x \preceq x \Rightarrow x \preceq y$.
4. Sea A un conjunto arbitrario. Verificar que $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un conjunto ordenado. ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?

Solución

- Reflexividad: Sea $X \in \mathcal{P}(A)$, luego $x \in X \Rightarrow x \in X$ por lo que $X \subseteq X$.
- Antisimetría: Sean $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ luego si $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$ resulta $X = Y$ por definición.
- Transitividad: Sean $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A) / X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z$ luego $x \in X \Rightarrow x \in Y \Rightarrow x \in Z$ por lo que $X \subseteq Z$.

No necesariamente es totalment ordenado. Por ejemplo para $A = \{1, 2, 3\}$ resulta $\{1, 2\} \parallel \{2, 3\}$.

5. Sea $V = \{a, b, c, d, e\}$. El grafo dirigido de la siguiente figura define un orden en V de la siguiente manera: $x \preceq y \iff x = y$ o existe un xy -camino dirigido.



a) Insertar el símbolo correcto ($\preceq, \succeq, \parallel$) entre cada par de elementos:

$$1) \quad a \quad e .$$

$$3) \quad d \quad a .$$

$$2) \quad b \quad c .$$

$$4) \quad c \quad d .$$

b) ¿Es un conjunto totalmente ordenado? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

Soluciones

a)

$$1) \quad a \succeq e .$$

$$3) \quad d \preceq a .$$

$$2) \quad b \parallel c .$$

$$4) \quad c \parallel d .$$

b)

- No es totalmente ordenado pues existen elementos que no son comparables.
- a es elemento máximo. No existe elemento mínimo.
- d y e son minimales. a es maximal.

6. Sean (P, \preceq) un conjunto ordenado, X un conjunto, y $f : X \rightarrow P$ una función. Se define la relación H sobre elementos de X como $xHx' \iff f(x) \preceq f(x')$. ¿Que tipo de relación es H ? Dar condiciones para que H sea un conjunto ordenado.

Solución

- Reflexividad: $x \in X \Rightarrow f(x) \in P \Rightarrow f(x) \preceq f(x) \iff xHx$.
- Transitividad: Sean $x, y, z \in X/xHy \wedge yHz$ luego:

$$f(x) \preceq f(y) \wedge f(y) \preceq f(z) \Rightarrow f(x) \preceq f(z) \iff xHz$$

- Antisimetría: Si agregamos la hipótesis de que f sea inyectiva, entonces si $xHy \wedge yHx$ resultara:

$$f(x) \preceq f(y) \wedge f(y) \preceq (x) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

7. En $(Prop, D)$, donde $Prop$ son las fórmulas del cálculo proposicional y $\phi D\psi \iff \{\phi\} \vdash \psi$:

- Verificar si $(Prop, D)$ es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.
- ¿La relación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

Soluciones

a)

- Reflexividad: Sea $\phi \in Prop$ luego por la regla trivial $\{\phi\} \vdash \phi$.
- Transitividad: Sean ϕ, ψ, γ tales que $\{\phi\} \vdash \psi$ y $\{\psi\} \vdash \gamma$ luego:
 - $\{\phi\} \cup \{\psi\} \vdash \psi \wedge \gamma$ (introducción de la conjunción en ambas hipótesis).
 - $\{\phi\} \cup \{\psi\} \vdash \gamma$ (eliminación de la conjunción en 1).
 - $\{\phi\} \vdash \psi \rightarrow \gamma$ (introducción de la implicación en 2).
 - $\{\phi\} \cup \{\phi\} = \{\phi\} \vdash \gamma$ (eliminación de la implicación en hipótesis y 3).
- Es un conjunto preordenado pues la antisimetría no se cumple como demuestra el siguiente ejemplo: $\{\perp\} \vdash p \wedge \neg p$ y $\{p \wedge \neg p\} \vdash \perp$ pero $\perp \neq p \wedge \neg p$.

b)

- La relación no es total pues, por ejemplo, $p \parallel q$.
- Cualquier proposición semanticamente equivalente a \perp es mínimo ya que $\forall \phi \in PROP : \{\perp\} \vdash \phi$. No existe elemento máximo.
- No existen maximales pues para cualquier $\phi \in PROP$ siempre ocurre $\{\phi\} \vdash \phi \vee \psi$ pero $\{\phi \vee \psi\} \not\vdash \phi$. Todos los mínimos son minimales.

8. En $(Prop, I)$, donde $\phi I \psi \iff \emptyset \vdash \phi \rightarrow \psi$.
- Verificar si $(Prop, I)$ es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.
 - ¿La relación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?
 - Explique el nexo entre esta relación y la del ejercicio anterior.

Soluciones

- a)
- Reflexividad: Sea $\phi \in Prop$ luego por la regla trivial $\{\phi\} \vdash \phi$ y por introducción de la implicación $\emptyset \vdash \phi \rightarrow \phi$.
 - Transitividad: Sean ϕ, ψ, γ tales que $\emptyset \vdash \phi \rightarrow \psi$ y $\emptyset \vdash \psi \rightarrow \gamma$ luego:
 - 1) $\{\phi\} \vdash \phi$ (trivial).
 - 2) $\{\phi\} \vdash \psi$ (eliminación de la implicación en 1 e hipótesis).
 - 3) $\{\phi\} \vdash \gamma$ (eliminación de la implicación en 2 e hipótesis).
 - 4) $\emptyset \vdash \phi \rightarrow \gamma$ (introducción de la implicación en 3).
 - También es un preorden pues la antisimetría falla por la misma razón que el ejercicio anterior.
- b) COMPLETAR.
- c) Claramente si $\phi D \psi$ también $\phi I \psi$ pues si $\{\phi\} \vdash \psi$ es un seciente válido también lo es $\emptyset \vdash \phi \rightarrow \psi$.

9. Sea (P, \preceq) un preorden. Construir un conjunto ordenado $(P/\sim, \sqsubseteq)$, donde $x \sim y$ si y solo si $x \preceq y$ y $y \preceq x$, tal que $\pi : P \rightarrow P/\sim$ sea monótona.

Aplicar esta construcción a la relación $(Prop, D)$ del ejercicio anterior. Para este caso particular, la construcción se llama «álgebra de Lindenbaum-Tarski».

Solución Definimos $X \sqsubseteq Y \iff \exists x \in X, y \in Y/x \preceq y$. Veamos que π es monótona: sean $x, y/x \preceq y$ luego $x \in \pi(x) \wedge y \in \pi(y)$ por lo que $\pi(x) \sqsubseteq \pi(y)$.

Veamos ahora que $(P/\sim, \sqsubseteq)$ es un conjunto ordenado:

- Reflexividad: Sea $X \in P/\sim$. Para cualquier $x \in X$ resultará $x \preceq x$ por lo que $X \sqsubseteq X$.
- Transitividad: Sean $X, Y, Z \in P/\sim$ tales que $X \sqsubseteq Y$ y $Y \sqsubseteq Z$, luego sabemos que existen $x \in X, y \in Y, z \in Z$ tales que $x \preceq y \preceq z$ y por transitividad resulta $x \preceq z$ por lo que $X \sqsubseteq Z$.
- Antisimetría: Sean $X, Y \in P/\sim$ tales que $X \sqsubseteq Y$ y $Y \sqsubseteq X$, luego existen $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$ tales que $x \preceq y$ y $y' \preceq x'$.

Supongamos que $X \neq Y$, como ambos son clases de equivalencia entonces deben ser conjuntos disjuntos. Luego:

- Como $x \sim x'$ sabemos que $x' \preceq x$ y por transitividad $x' \preceq y$.
- Como $y \sim y'$ sabemos que $y \preceq y'$ y por transitividad $y \preceq x$.
- Como $x \preceq y \wedge y \preceq x$ entonces $x \sim y$, es decir $x, y \in X$.

Tenemos entonces $y \in X \wedge y \in Y$. Contradicción.

10. Probar que:

- a) Si R define un orden en el conjunto V , entonces R^{-1} también define un orden en V , llamado «orden inverso».
- b) Si R define un orden total en el conjunto V , entonces R^{-1} también define un orden total en V .
- c) Si (A, \preceq) es un orden no total, puede existir un $S \subseteq A$ tal que (S, \preceq) es un orden total.

Soluciones

a)

- Reflexividad: Sea $x \in V$, luego $xRx \Rightarrow xR^{-1}x$.
- Antisimetría: Sean $x, y \in V$ tales que $xR^{-1}y$ y $yR^{-1}x$, luego xRy y yRx . Por antisimetría de R resulta $x = y$.
- Transitividad: Sean $x, y, z \in V/xR^{-1}y \wedge yR^{-1}z$ luego $yRx \wedge zRy$ y por transitividad zRx . Por definición de R^{-1} resulta $xR^{-1}z$.

- b) Supongamos existen $x, y \in V$ tales que $x \parallel_{R^{-1}} y$, luego $y \parallel_R x$. Contradicción.

- c) Lo propuesto ocurre por ejemplo con $A = \{2, 3, 4\}$ y $S = \{2, 4\}$ con la relación $|$.
11. Sea (P, \preceq) un preorden. Probar que si existe un elemento máximo, entonces todos los maximales son máximos.

Solución Sea M un elemento máximo de P y m un elemento maximal. Como m es minimal resulta $\forall x : m \leq x \Rightarrow x \leq m$, en particular para $x = M$ tenemos $m \leq M \Rightarrow M \leq m$. Veamos que m es máximo: sea $x \in P$ luego, $x \leq M \leq m$, es decir $\forall x : x \leq m$.

12. Sean (A, \preceq_1) y (A, \preceq_2) dos conjuntos ordenados (con el mismo conjunto subyacente).
- a) ¿Define $\preceq_1 \cap \preceq_2$ un orden en A ?
- b) ¿Define $\preceq_1 \cup \preceq_2$ un orden en A ?

Soluciones

- a) En efecto.
- Reflexividad: Sea $x \in A$ luego $x \preceq_1 x$ y $x \preceq_2 x$ por lo que $(x, x) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$.
 - Transitividad: Sean $x, y, z \in A$ tales que $(x, y) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$ y $(y, z) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$, luego ocurren $x \preceq_1 y$, $x \preceq_2 y$, $y \preceq_1 z$ y $y \preceq_2 z$. Además por sus respectivas transitividades también tenemos $x \preceq_1 z$ y $x \preceq_2 z$ por lo que $(x, z) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$.
 - Antisimetría: Sean $x, y \in A$ tales que $(x, y) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$ y $(y, x) \in \preceq_1 \cap \preceq_2$ luego $x \preceq_1 y$ e $y \preceq_1 x$ y por reflexividad $x = y$.
- b) No. Sean $x \neq y$ luego para $\preceq_1 = \Delta_A \cup \{(x, y)\}$ y $\preceq_2 = \Delta_A \cup \{(y, x)\}$ en $\preceq_1 \cup \preceq_2$ se rompe la antisimetría.

13. Probar que el conjunto de todos los elementos maximales (minimales) de un conjunto ordenado, es una anticadena.

Solución

- Sean $a \neq b$ en el conjunto de todos los elementos maximales. Supongamos $a \leq b$ luego $b \leq a$ y por antisimetría $a = b$. Contradicción. Análogo si $b \leq a$.
 - Análogo para minimales.
14. Considerar el conjunto de los enteros positivos \mathbb{Z}^+ y el de los enteros negativos \mathbb{Z}^- con sus órdenes usuales. Probar que $\mathbb{Z}^+ \not\preceq \mathbb{Z}^-$.

Solución COMPLETAR.

15. Sea (A, \preceq) un conjunto ordenado. Para todo elemento $a \in A$ definamos

$$S(a) = \{x \in A : x \preceq a\}$$

Si $\mathcal{A} = \{S(a) : a \in A\}$, ordenado por la inclusión, demostrar que $A \simeq \mathcal{A}$.

Solución COMPLETAR.

16. Sean (X, \preceq_X) y (Y, \preceq_Y) dos conjuntos ordenados
- a) Dar un ejemplo de conjuntos (X, \preceq_X) y (Y, \preceq_Y) y una función $f : X \rightarrow Y$ que sea sobreyectiva y preserve el orden pero que no sea un isomorfismo de conjuntos ordenados.
 - b) Probar que son equivalentes:
 - 1) X e Y son isomorfos.
 - 2) Existe $f : X \rightarrow Y$ sobreyectiva tal que $f(a) \preceq_Y f(b)$ si y solo si $a \preceq_X b$.
 - 3) Existen $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ homomorfismos de conjuntos ordenados tales que $f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$.

- c) Mostrar que $(X \rightarrow Y, \preceq_{X \rightarrow Y})$ es un conjunto ordenado, donde $X \rightarrow Y$ representa las funciones entre (X, \preceq_X) y (Y, \preceq_Y) , y el orden está definido por $f \preceq_{X \rightarrow Y} g$ si y solo si $\forall x : f(x) \preceq_Y g(x)$.
- d) Mostrar que $(X \times Y, \preceq_{X \times Y})$ es un conjunto ordenado, donde $(x, y) \preceq_{X \times Y} (x', y')$ si y solo si $x \preceq_X x'$ y $y \preceq_Y y'$.

Soluciones

- a) COMPLETAR.
 - b)
 - 1) COMPLETAR.
 - 2) COMPLETAR.
 - 3) COMPLETAR.
 - c) COMPLETAR.
 - d) COMPLETAR.
17. Sean (X, \preceq_X) y (Y, \preceq_Y) dos conjuntos ordenados. Una «conexión Galois» es un par de funciones (f_*, f^*) con $f_* : X \rightarrow Y$ y $f^* : Y \rightarrow X$ tales que para todos $x \in X$ e $y \in Y$ vale:

$$f_*(x) \preceq_Y y \iff x \preceq_X f^*(y)$$

- a) Probar que si $f_* : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo, entonces (f_*, f_*^{-1}) es una conexión de Galois.
- b) Dada una función $A \rightarrow B$, probar que se puede construir una conexión de Galois entre el conjunto potencia de A y el de B utilizando los operadores que calculan la imagen de f sobre un subconjunto de A y la imagen inversa de f sobre un subconjunto de B .
- c) Considerando los órdenes usuales sobre \mathbb{N} y \mathbb{Q}_0^+ , encontrar f^* tal que (f_*, f^*) sea una conexión Galois donde $f_* : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_0^+$ es la inclusión.
- d) Dada una conexión Galois (f_*, f^*) entre X e Y , probar que para todo $x \in X, y \in Y$ vale $x \preceq_X f^*(f_*(x))$ y $f_*(f^*(y)) \preceq_Y y$.
- e) Dada una conexión de Galois (f_*, f^*) entre X e Y , probar que f_* y f^* son monótonas.

Soluciones

- a)* COMPLETAR.
- b)* COMPLETAR.
- c)* COMPLETAR.
- d)* COMPLETAR.

18. Probar que la relación de isomorfismo entre conjuntos ordenados es una relación de equivalencia.

Solución COMPLETAR.