Transformaciones lineales. Primera parte.

1. Para cada una de las siguientes funciones $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinar si se trata de una transformacion lineal y en caso afirmativo: obtener $nul\,(T)\,, img\,(T)$, calcular sus dimensiones y determinar si T es inversible.

   a) $T\,((x,y)) = (y,x)$.
   b) $T\,((x,y)) = (x^2, y^2)$.
   c) $T\,((x,y)) = (x,-y)$.
   d) $T\,((x,y)) = (x,0)$.

   Soluciones

   a)
      - $T\,(\alpha\,(x_1,y_1) + \beta\,(x_2,y_2)) = T\,((\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_2, \beta y_2)) = T\,((\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta$ $\boxed{(\alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2)}$.
      - $\alpha T\,((x_1,y_1)) + \beta T\,((x_2,y_2)) = \alpha\,(y_1,x_1) + \beta\,(y_2,x_2) = (\alpha y_1, \alpha x_1) + (\beta y_2, \beta x_2) = \boxed{(\alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2)}$.
      - $\mathcal{N}\,(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T\,(x,y) = (0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y,x) = (0,0)\} = \{(0,0)\}$.
      - $\mathcal{N}\,(T)$ no tiene base, luego $dim\,[\mathcal{N}\,(T)] = 0$.
      - $img\,(T) = \{T\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$.
      - $dim\,[img\,(T)] = 2$.
      - $\mathcal{N}\,(T) = \{0\} \Rightarrow T$ es inyectiva y $dim\,[img\,(T)] = dim\,(\mathbb{R}^2) \Rightarrow T$ es sobreyectiva, por lo que T es inversible.

   b) No es lineal pues $2T\,(1,1) = 2\,(1,1) = (2,2) \neq T\,(2\,(1,1)) = T\,(2,2) = (4,4)$.

   c) COMPLETAR.

2. Sea $V = \mathbb{R}^n$, fijamos la base canonica $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Para cada $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hallar A_i tal que $A_i x = T_i\,(x)\,, \forall x \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, 4$.

   a) $T_1\,(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
   b) $T_2\,(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
   c) $T_3\,(x) = cx, c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
   d) $T_4\,(x) = y$, donde $y = (y_k)_{k=1}^n$ con $y_k = x_k, i \neq k \neq j, y_k = x_i, k = j$ y $y_k = x_j, k = i$.

Soluciones

a) $T_1(e_i) = e_i$, por lo tanto $A_1 = \begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & \ldots & e_n \\ | & | & | \end{bmatrix} = I$.

b) $T_2(e_i) = 0$, por lo tanto $A_2 = \begin{bmatrix} | & | & | \\ 0 & \ldots & 0 \\ | & | & | \end{bmatrix}$.

c) $T_3(e_i) = ce_i$, por lo tanto $A_3 = \begin{bmatrix} | & | & | \\ ce_1 & \ldots & ce_n \\ | & | & | \end{bmatrix} = cI$.

d) COMPLETAR.

3. Consideremos la base canonica de $V = \mathbb{R}^2$ dada por $B = \{e_1, e_2\}$ y la transformacion lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que aplica los vectores e_1 y e_2 como sigue:

   - $T(e_1) = e_1 + e_2$,
   - $T(e_2) = 2e_1 - e_2$

   Obtener:

   a) $T(3e_1 - 4e_2)$ y $T^2(3e_1 - 4e_2)$.

   b) Las matrices asociadas a T y T^2 en la base B.

   c) $T(v), \forall v \in V$.

Soluciones

a)
   - $T(3e_1 - 4e_2) = T(3e_1) - T(4e_2) = 3T(e_1) - 4T(e_2) = 3(e_1 + e_2) - 4(2e_1 - e_2) = (3, 3) - (8, -4) = (-5, 7)$.
   - $T(T(3e_1 - 4e_2)) = T(-5, 7) = T(-5e_1 + 7e_2) = -5T(e_1) + 7T(e_2) = -5(1, 1) + 7(2, -1) = (9, -12)$.

b) $A = \begin{bmatrix} | & | \\ T(e_1) & T(e_2) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

c) $T(x_1, x_2) = Ax = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$.

4. Sean $T_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T_1((x, y, z)) = (x, y, 0)$ y $T_2((x, y, z)) = (x, y, y)$. Hallar $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$. Analizar si son epimorfismos, monomorfismos, isomorfismos o ninguna de ellas.

   - $T_1 \circ T_2(x, y, z) = T_1(T_2(x, y, z)) = T_1(x, y, y) = (x, y, 0)$ y $T_2 \circ T_1(x, y, z) = T_2(T_1(x, y, z)) = T_2(x, y, 0) = (x, y, y)$.
   - Ninguna es monomorfismo pues $T_1 \circ T_2(0, 0, 0) = T_1 \circ T_2(0, 0, 1)$ y $T_2 \circ T_1(0, 0, 0) = T_2 \circ T_1(0, 0, 1)$.
   - Ninguna es epimorfismo pues $img(T_1 \circ T_2) = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}^3\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) : x, y \in \mathbb{R}^3\} = \langle\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}\rangle$ y $img(T_2 \circ T_1) = \{(x, y, y) : x, y \in \mathbb{R}^3\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 1) : x, y \in \mathbb{R}^3\} = \langle\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}\rangle$ ambos distintos de $\mathbb{R}^3$.
   - De lo anterior sigue que ninguna es un isomorfismo.

5. Definimos:

   $$\mathbb{R}_n[x] = \{p : p \text{ es un polinomio a coeficientes reales tal que } grad(p) \leq n, x \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$$

   Sea

   $$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^{2\times 2} & \to & \mathbb{R}_3[x] \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \to & T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2d)x^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d) \end{array}$$

   a) Probar que T es lineal.

   b) Hallar una base para $\mathcal{N}(T)$ y una para $img(T)$.

   c) Determinar si T es un isomorfismo.

Soluciones

a)

- $T\left(\alpha\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}\right) = (2\alpha d)\,x^3+[\alpha\,(a+b)]\,x^2+$ $[\alpha\,(a-c)]\,x+2\,[\alpha\,(c+d)] = \alpha T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.
- COMPLETAR.

b)

- $\mathcal{N}\,(T) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0\right\}$ $=\{0\}$, no tiene base.
- $img\,(T) = \left\{\underbrace{(2d)}_{\alpha}\,x^3+\underbrace{(a+b)}_{\beta}\,x^2+\underbrace{(a-c)}_{\gamma}\,x+\underbrace{2\,(c+d)}_{\epsilon}/a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\} =$ $\{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\epsilon/\alpha,\beta,\gamma,\epsilon\in\mathbb{R}\} = \langle\{x^3,x^2,x,1\}\rangle = \mathbb{R}_3\,[x]$.

c) De lo anterior sigue que T es un isomorfismo.

6. Sea $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/f\,(z) = z + w\bar{z}$, donde $w = a+bi$ con $a,b\in\mathbb{R}$.

   a) Considerar $w = 1+i$ y calcular $T_w\,(2+3i)$.

   b) Comprobar que T_w es una transformacion lineal.

   c) Si $B = \{1, i\}$ es base de $\mathbb{C}$, hallar la matriz de T_w en dicha base.

   d) Probar que T_w es isomorfismo si y solo si $a^2+b^2 \neq 1$.

Soluciones

a) $T_w\,(2+3i) = 2+3i+(1+i)\,(2-3i) = 2+3i+2-3i+2i-3i^2 = 7+2i$.

b) COMPLETAR.

c) $A = \begin{bmatrix} | & | \\ T_w\,(1) & T_w\,(i) \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a & b \\ b & 1-a \end{bmatrix}$.

d) T_w es isomorfismos si y solo si A es inversible si y solo si $|A| = 0$ si y solo si $(1+a)\,(1-a)-b^2 = 0 \iff 1-a^2-b^2 = 0 \iff$ $a^2+b^2 = 1$.

7. Sea $T : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$ tal que $T(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = a_0 + a_1(x+1) + \ldots + a_n(x+1)^n$. Probar que T es isomorfismo.

   Solucion

   - T es inyectiva: COMPLETAR.
   - T es sobreyectiva: Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ en el codominio. Observemos que T es una transformacion que desplaza la grafica de los elementos de su dominio hacia la izquierda. Luego para $P(x-1)$ en el dominio resultara $T(P(x-1)) = P(x)$.

8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (x+y, x+z, S(v))$, donde $v = (x, y, z)$. Determinar, si es posible, S de modo que T resulte lineal.

   Solucion

   - $T[(x,y,z) + (x',y',z')] = T(x+x', y+y', z+z') =$ $\Big(x+x'+y+y', x+x'+z+z', \boxed{S(x+x', y+y', z+z')}\Big)$.
   - $T(x,y,z) + T(x',y',z') = (x+y, x+z, S(x,y,z)) + (x'+y', x'+z', S(x',y',z')) =$ $\Big(x+x'+y+y', x+x'+z+z', \boxed{S(x,y,z) + S(x',y',z')}\Big)$.
   - De lo antenior buscamos que $S(v+v') = S(v) + S(v')$.
   - $T[\alpha(x,y,z)] = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \Big(\alpha x + \alpha y, \alpha x + \alpha z, \boxed{S(\alpha x, \alpha y, \alpha z)}\Big)$.
   - $\alpha T(x,y,z) = \alpha(x+y, x+z, S(x,y,z)) = \Big(\alpha x + \alpha y, \alpha x + \alpha z, \boxed{\alpha S(x,y,z)}\Big)$.
   - De lo antenior buscamos que $S(\alpha v) = \alpha S(v)$.
   - En definitiva, S debe ser transformacion lineal.

9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformacion lineal tal que:

   $$T(0,0,1) = (2,3,5), \quad T(0,1,1) = (1,0,0), \quad T(1,1,1) = (0,1,-1)$$

   a) Probar que con esta informacion es posible obtener $T(v), \forall v \in \mathbb{R}^3$.
   b) Determinar, fijada la base canonica en $\mathbb{R}^3$, la matriz de T.
   c) Utilizando (9b), obtener $dim[\mathcal{N}(T)]$ y $rang(T)$.
   d) Determinar si T es inversible.

Soluciones

a) En efecto puesto que dichos 3 vectores son linealmente independientes resulta que generan todo el espacio, es decir que para todo v resulta $v = \alpha(0,0,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,1,1)$. Ademas como T es lineal $T(v) = \alpha(2,3,5) + \beta(1,0,0) + \gamma(0,1,-1)$.

b) Observemos que $e_1 = (1,1,1) - (0,1,1)$, $e_2 = (0,1,1) - (0,0,1)$ y $e_3 = (0,1,1)$, luego $T(e_1) = (-1,1,-1)$, $T(e_2) = (-1,-3,-5)$ y $T(e_3) = (2,3,5)$. Finalmente $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{N}(T) = \{0\}$ y $rang(T) = 3$.

d) En efecto.

10. Determinar, si existe, una transformacion lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que verifique $T(1,-1,1) = (1,0)$ y $T(1,1,1) = (0,1)$.

Solucion Sea $B = \{(1,-1,1), (1,1,1), (0,3,1)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$ luego la transformacion dada por la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ asociada a las bases B y a la base canonica de $\mathbb{R}^2$ es lineal.

11. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Probar que para $T_{1,2} \in \mathcal{L}(V,W)$

a) $A = \{v \in V : T_1(v) = T_2(v)\}$ es un subespacio de V.

b) Si $V = \langle U \rangle$ y $T_1(u) = T_2(u)$, $\forall u \in U$ entonces $T_1(v) = T_2(v)$ $\forall v \in V$.

Soluciones

a) Sean $v_1, v_2 \in A$ luego $T_1(v_1 + v_2) = T_1(v_1) + T_1(v_2) = T_2(v_1) + T_2(v_2) = T_2(v_1 + v_2)$ y ademas $T_1(\alpha v_1) = \alpha T_1(v_1) = \alpha T_2(v_1) = T_2(\alpha v_1)$.

b) COMPLETAR.

12. Sean V y W espacios vectoriales de dimension finita y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Probar que:

   a) Si T es inyectiva, entonces T transforma conjuntos L.I. de V en conjuntos L.I. de W.

   b) Si T es sobreyectiva, entonces T transforma conjuntos generadores de V en conjuntos generadores de W.

   c) T es biyectiva si y solo si T transforma bases de V en bases de W.

Soluciones

   a) COMPLETAR.

   b) Sea $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V / \langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle = V$, nos preguntamos si $\langle\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}\rangle = W$:

      - $\boxed{\subseteq}$: $x \in \langle\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}\rangle \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{T(v_i)}_{\in W} \Rightarrow x \in W.$

      - $\boxed{\supseteq}$: $x \in W \underbrace{\Rightarrow}_{Hip.} \exists v \in V / T(v) = x \Rightarrow \exists v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i / T(v) = x \Rightarrow$

        $\Rightarrow T\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\right) = x \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_i T(v_i) = x \Rightarrow x \in \langle\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}\rangle = W.$

   c) COMPLETAR.

13. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y supongamos que existe un aplicacion lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que tanto $\mathcal{N}(T)$ como $img(T)$ son subespacios de dimension finita. Probar que V tambien debe ser de dimension finita.

Solucion COMPLETAR.

14. Sea V un espacio vectorial de dimension finita sobre $\mathbb{K}$, y $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que:

    a) $T \circ S$ es inversible si y solo si S y T son inversibles.

    b) Para I la funcion identidad en $V, T \circ S = I$ si y solo si $S \circ T = I$.

    Soluciones

    a) COMPLETAR.

    b) COMPLETAR.

Transformaciones lineales. Segunda parte.

1. Sea V el espacio vectorial de los numeros complejos y $\mathbb{K}$ el cuerpo de los numeros reales. Con las operaciones usuales, V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Describir explicitamente un isomorfismo de este espacio con $\mathbb{R}^2$.

    Solucion Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ definida como $T(z) = (Re(z), Im(z))$, veamos que es biyectiva:

    - Inyectiva: $T(z_1) = T(z_2) \iff (Re(z_1), Im(z_1)) = (Re(z_2), Im(z_2)) \iff Re(z_1) = Re(z_2) \wedge Im(z_1) = Im(z_2) \iff z_1 = z_2$.
    - Sobreyectiva: Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, luego para $a + bi \in \mathbb{C}$ resulta $T(a + bi) = (a, b)$.

    Veamos que es lineal:

    - Sean $z_1 = a+bi$ y $z_2 = x+yi$, luego $T(z_1 + z_2) = T(a + x + (b + y)i) = (a + x, b + y) = (a, b) + (x, y) = T(z_1) + T(z_2)$.
    - Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, luego $T(\alpha z_1) = T(\alpha a + \alpha bi) = (\alpha a, \alpha b) = \alpha(a, b) = \alpha T(z_1)$.

2. Una matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ con entradas en $\mathbb{C}$ tal que $A = \bar{A}^t$, es decir $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, para todos $i, j = 1, \ldots, n$ se dice Hermitiana. Sea W el conjunto de todas las matrices Hermitianas 2×2:

   a) Verificar que W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

   b) Verificar que la aplicacion $(x, y, z, t) \mapsto \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^4$ en W.

   Soluciones

   a) COMPLETAR.

   b) COMPLETAR.

3. Mostrar que $\mathbb{K}^{m \times n}$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{mn}$.

   Solucion Sea $T(A) = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn})$, es facil ver que T es una aplicacion lineal biyectiva.

4. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimension finita sobre $\mathbb{K}$. Probar que V y W son isomorfos si y solo si $dim(V) = dim(W)$.

   - $\boxed{\Rightarrow}$: Sea T el isomorfismos entre V y W. Como T es inyectiva resulta $dim(\mathcal{N}(T)) = 0$ y como es sobreyectiva resulta que $img(T) = W$. Luego por el teorema de la dimension resulta $dim(V) = 0 + dim(W)$.
   - $\boxed{\Leftarrow}$: COMPLETAR.

5. Sea T la transformacion lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1)$$

   a) Si B es la base ordenada estandar de $\mathbb{R}^3$ y B' es la base ordenada estandar para $\mathbb{R}^2$, determianr la matriz de T relativa al par (B, B').

   b) Si $B = \{(1,0,-1), (1,1,1), (1,0,0)\}$ y $B' = \{(0,1), (1,0)\}$ ¿ Cual es la matriz de T relativa al par (B, B')?

Soluciones

a) $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

b) Notemos que $T(1,0,-1) = (1,-3) = -3(0,1) + 1(1,0)$, $T(1,1,1) = (2,1) = 1(0,1) + 2(1,0)$ y $T(1,0,0) = (1,-1) = -1(0,1) + 1(1,0)$, luego la matriz sera $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Sea T un operador lineal sobre $\mathbb{K}^n$ y sea A la matriz de T relativa a la base estandar de $\mathbb{K}^n$. Sea W el subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los vectores columnas de A. ¿Que relacion existe entre W y T?

Solucion Recordemos que $img(T) = \{Ax / x \in \mathbb{K}^n\}$. Veremos que $\mathcal{C}(A) = img(T)$:

- $\boxed{\subseteq}$: $v \in \mathcal{C}(A) \Rightarrow v = x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{K}^n} \in img(T)$.
- $\boxed{\supseteq}$: $v \in img(T) \Rightarrow v = Ax = A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{K}^n} = x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n \in \mathcal{C}(A)$.

7. Sea V un espacio vectorial de dimension finita sobre el campo $\mathbb{K}$ y sean S y T operadores lineales sobre V. Probar que existen bases ordenadas B y B' en V tales que $[S]_B = [T]_{B'}$ si y solo si existe un operador lineal inversible U sobre V tal que $T = USU^{-1}$.

Solucion

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ las bases de la hipotesis. Recordemos que un operador lineal queda completamente definido por como actua sobre los vectores de una base. Sea entonces $U : V \to V$ dado por $U(v_i) = w_i$. Como U lleva base en base, sabemos que es isomorfo, luego $U(v_i) = w_i \iff U^{-1}(w_i) = v_i$.

Como por hipotesis $[S]_B = [T]_{B'}$ entonces la i-esima columna de S (S_i) ha de ser igual a la i-esima columna de T (T_i) para todo i, es decir:

$$S_i = [S(v_i)]_B = [T(w_i)]_{B'} = T_i = (x_1, \dots, x_n)$$

Tenemos $S(v_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ y $T(w_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j$, luego:

a) $T(w_i) = T(U(v_i)) = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j$.

b) $US(v_i) = U\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j U(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j$.

De lo anterior sigue que $US(v_i) = TU(v_i)$ por lo tanto $US = TU \iff USU^{-1} = T$.

- $\boxed{\Leftarrow}$: COMPLETAR.

8. En $\mathbb{R}^3$, sean $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 2)$ y $v_3 = (-1, -1, 0)$.

   a) Si f es un funcional lineal sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1) = 1, f(v_2) = -1$ y $f(v_3) = 3$; y si $v = (a, b, c)$, hallar $f(v)$.

   b) Describir explicitamente un funcional lineal f sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1) = f(v_2) = 0$ pero $f(v_3) \neq 0$.

   c) Sea f cualquier funcional lineal tal que $f(v_1) = f(v_2) = 0$ pero $f(v_3) \neq 0$. Si $v = (2, 3, -1)$, muestre que $f(v) \neq 0$.

Soluciones

a) Sea $f(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$, luego resultara $f(v_1) = \alpha + \gamma = 1$, $f(v_2) = \beta + 2\gamma = -1$ y $f(v_3) = -\alpha - \beta = 3$. Resolviendo el sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

resulta $\gamma = 1$, $\beta = -3$ y $\alpha = 0$. Luego $f(v) = -3b + c$.

b) $f(v) = c - a - 2b$.

c) Notemos que $v = -v_1 - 3v_3$, luego $f(v) = -f(v_1) - 3f(v_3) = -3f(v_3) \neq 0$.

9. Sea $B = \left\{ \underbrace{(1,0,-1)}_{b_1}, \underbrace{(1,1,1)}_{b_2}, \underbrace{(2,2,0)}_{b_3} \right\}$ una base de $\mathbb{C}^3$. Hallar la base dual de B.

Solucion Observemos primero que $V = (\mathbb{C}^3, \mathbb{C}, +, \cdot)$ y sea $v = (z_1, z_2, z_3) = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$, luego $z_1 = \alpha + \beta + 2\gamma$, $z_2 = \beta + 2\gamma$ y $z_3 = -\alpha + \beta$.

- $f_1(v) = \alpha = z_1 - z_2$.
- $f_2(v) = \beta = z_1 - z_2 + z_3$.
- $f_3(v) = \gamma = \frac{1}{2}(-z_1 + 2z_2 - z_3)$.

10. Sean $v_1 = (1,0,-1,2)$ y $v_2 = (2,3,1,1)$ y sea $W = \langle\{v_1, v_2\}\rangle$. ¿Que funcionales lineales de la forma $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$ estan en el anulador de W?

Solucion Buscamos $f / f(1,0,-1,2) = f(2,3,1,1) = 0$ es decir:

$$c_1 - c_3 + 2c_4 = 0 = 2c_1 + 3c_2 + c_3 + c_4$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

luego $c = \alpha(-2,1,0,1) + \beta(1,-1,1,0)$, por lo tanto:

$$W^0 = \{f(x) = x \cdot c / c \in \langle\{(-2,1,0,1), (1,-1,1,0)\}\rangle\}$$

11. Sea $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y sean

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea W el subespacio de V que consiste de todas las matrices A tales que $AB = 0$. Sea f un funcional lineal sobre V que esta en el anulador de W. Supongamos que $f(I) = 0$ y $f(C) = 3$. Hallar $f(B)$.

Solucion Observemos primero que $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 2a-b & -2a+b \\ 2c-d & -2c+d \end{bmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : 2a = b \wedge 2c = d \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\}$. Luego $B = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{\in W} + 3I$ y por lo tanto $f(B) = f(X) + 3f(I) = 0$.

12. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V de dimension finita:

    a) Probar que $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.

    b) Probar que $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

    Soluciones COMPLETAR.

13. Sea V un espacio vectorial de dimension finita sobre $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio de V. SI f es un funcional lineal sobre W, pruebe que existe un funcional lineal g sobre V tal que $g(v) = f(v)$, $\forall v \in W$.

    Solucion Sea B_V una base de V y B_W una base de W tales que $B_W \subseteq B_V$. Toda transformacion lineal (en particular los funcionales lineales) queda determinada por como actua sobre los vectores de la base, luego podemos definir a $g(v) = f(v)$ para cada vector en B_W y $g(v) = 0$ para cada vector en $B_V - B_W$.

14. Sea $v \in V$ espacio vectorial, entonces v induce un funcional lineal L_v en V^* definido por:

$$\begin{array}{rcccc} L_v & : & V^* & \to & \mathbb{K} \\ & & f & \to & L_v(f) = f(v) \end{array}$$

    a) Mostrar que L_v es lineal.

    b) Probar que si V es de dimension finita y $v \neq 0$, entonces existe un funcional lineal f tal que $f(v) \neq 0$.

    c) Probar que si V es de dimension finita, la aplicacion lineal $v \mapsto L_v$ es un isomorfismo de V en V^{**}.

d) Probar que si L es un funcional lineal sobre el espacio dual V^* del espacio vectorial V de dimension finita, entonces existe un unico vector $v \in V$ tal que $L(f) = f(v)$ para todo $f \in V^*$.

e) Mostrar que en un espacio vectorial V de dimension finita, toda base de V^* es la dual de alguna base de V.

Soluciones COMPLETAR.