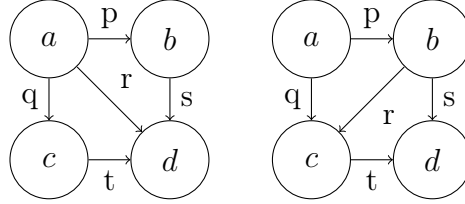


1. Considerar los siguientes diagramas. En ambos casos, probar que si los dos triángulos conmutan, también conmuta el cuadrado.



### Solución

- Sabemos que  $s \circ p = r$  y  $t \circ q = r$  por lo tanto  $s \circ p = r = t \circ q$ , es decir que el cuadrado conmuta.
- Sabemos que  $r \circ p = q$  y  $t \circ r = s$  por lo tanto:

$$s \circ p = (t \circ r) \circ p = t \circ (r \circ p) = t \circ q$$

2. Sea  $P$  un conjunto ordenado. Mostrar que  $P$  puede considerarse como una categoría.

**Solución** Para  $(P, \leq)$  definimos:

- $ob \mathcal{P} = P$ .
- $cod(a, b) = b$ .
- $mor \mathcal{P} = \leq$ .
- $dom(a, b) = a$ .
- $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$ .

Luego:

- Para cada objeto  $a$  por reflexividad  $(a, a) \in \leq$  por lo que  $(a, a) \in mor \mathcal{P}$ ; a este morfismo lo llamaremos  $id_a$  resultando:
  - $(a, b) \circ id_a = (a, b) \circ (a, a) = (a, b)$ .
  - $id_a \circ (c, a) = (a, a) \circ (c, a) = (c, a)$ .

- Sean  $(a, b)$ ,  $(b, c)$  y  $(c, d)$  morfismos, luego por transitividad también son morfismos  $\boxed{(a, c)}$ ,  $\boxed{(b, d)}$  y  $(a, d)$ . Veamos que vale la asociatividad:
  - $((c, d) \circ (b, c)) \circ (a, b) = \boxed{(b, d)} \circ (a, b) = (a, d)$ .
  - $(c, d) \circ ((b, c) \circ (a, b)) = (c, d) \circ \boxed{(a, c)} = (a, d)$ .

3. Verificar que un monoide  $M$  define una categoría con un único objeto cuyas flechas son los elementos de  $M$ .

**Solución** Para  $(M, 0, +)$  definimos:

- $ob \mathcal{M} = \{*\}$ .
- $cod(x) = *$ .
- $mor \mathcal{M} = M$ .
- $dom(x) = *$ .
- $x \circ y = x + y$ .

Luego:

- Para el único objeto  $*$  existe el morfismo  $0 = id_*$  de manera tal que:
  - $x \circ id_* = x + 0 = x$ .
  - $id_* \circ y = 0 + y = y$ .
- Para tres morfismos  $x, y, z$  (elementos de  $M$ ) por clausura de monoide también son morfismos  $\boxed{x + y}$  y  $\boxed{y + z}$ . Veamos que vale la asociatividad:

$$(x \circ y) \circ z = \left( \boxed{x + y} \right) + z = x + \left( \boxed{y + z} \right) = x \circ (y \circ z)$$

4. Dada una categoría  $\mathcal{C}$ , podemos definir  $\mathcal{C}^{op}$  con los mismo objetos que  $\mathcal{C}$  pero las flechas con sentido inverso, es decir,  $ob \mathcal{C}^{op} = ob \mathcal{C}$  y  $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ . Verificar que  $\mathcal{C}^{op}$  es una categoría.

**Solución** Sean  $f_{op} : X \rightarrow Y$  y  $g_{op} : Y \rightarrow Z$  en  $Hom \mathcal{C}^{op}$ , definimos  $g_{op} \circ_{op} f_{op}$  como  $(f \circ g)_{op}$ . Observemos que la composición tiene sentido pues en  $\mathcal{C}$  resultan  $f : Y \rightarrow X$  y  $g : Z \rightarrow Y$ . Luego:

- Para cada objeto  $X$  el morfismo  $id_X$  resulta ser el mismo en  $\mathcal{C}$  y en  $\mathcal{C}^{op}$  por lo que:
  - $f_{op} \circ_{op} id_X = (id_X \circ f)_{op} = f_{op}$ .
  - $id_X \circ_{op} h_{op} = (h \circ id_X)_{op} = h_{op}$  (donde  $h_{op} : Y \rightarrow X$ ).
- Sean  $f_{op} : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  y  $h : C \rightarrow D$ , luego:
  - $(h_{op} \circ_{op} g_{op}) \circ_{op} f_{op} = (g \circ h)_{op} \circ_{op} f_{op} = f \circ (g \circ h)$ .
  - $h_{op} \circ_{op} (g_{op} \circ_{op} f_{op}) = h_{op} \circ_{op} (f \circ g)_{op} = (f \circ g) \circ h$ .

5. Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  dos categorías, se define  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  cuyos objetos son pares ordenados de la forma  $(C, D)$  con  $C \in ob \mathcal{C}$ ,  $D \in ob \mathcal{D}$  y además:

$$Hom_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C, D), (C', D')) = Hom_{\mathcal{C}}(C, C') \times Hom_{\mathcal{D}}(D, D')$$

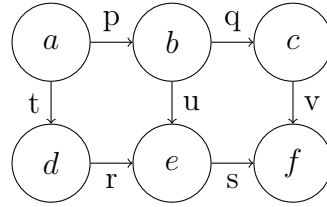
Verificar que  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  es una categoría.

**Solución** Definimos  $(p, q) \circ_{\times} (f, g) = (p \circ f, q \circ g)$ .

- *Morfismo identidad*: Para cada objeto  $(C, D) \in ob \mathcal{C} \times \mathcal{D}$  existen los objetos  $C \in ob \mathcal{C}$  y  $D \in ob \mathcal{D}$  y también los morfismos  $id_C$  e  $id_D$ , por lo que también existe el morfismo  $(id_C, id_D)$  para el cual
  - $(f, g) \circ_{\times} (id_C, id_D) = (f \circ id_C, g \circ id_D) = (f, g)$ .
  - $(id_C, id_D) \circ_{\times} (f, g) = (id_C \circ f, id_D \circ g) = (f, g)$ .
- *Asociatividad*: Sean  $(f, g) : (C_1, C_2) \rightarrow (D_1, D_2)$ ,  $(p, q) : (C_2, C_3) \rightarrow (D_2, D_3)$  y  $(r, s) : (C_3, C_4) \rightarrow (D_3, D_4)$ , luego
  - $((r, s) \circ_{\times} (p, q)) \circ_{\times} (f, g) = (r \circ p, s \circ q) \circ_{\times} (f, g) = (r \circ p \circ f, s \circ q \circ g)$ .
  - $(r, s) \circ_{\times} ((p, q) \circ_{\times} (f, g)) = (r, s) \circ_{\times} (p \circ f, q \circ g) = (r \circ p \circ f, s \circ q \circ g)$ .

6. Definamos  $C^{\rightarrow}$  como la categoría de las flechas de una categoría  $\mathcal{C}$ , es decir, los objetos de  $C^{\rightarrow}$  son las flechas de  $\mathcal{C}$ . Una flecha de  $C^{\rightarrow}$  de  $f : A \rightarrow B$  en  $g : D \rightarrow E$  es un par  $(a, b)$  de flechas de  $\mathcal{C}$  tales que  $g \circ a = b \circ f$ .

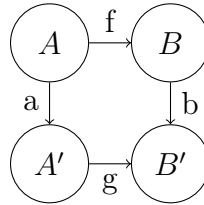
- a) Expresar las flechas de  $C^{\rightarrow}$  en términos de diagramas conmutativos.
- b) Probar que si en el diagrama los cuadrados conmutan, entonces también conmuta el rectángulo exterior:



- c) Utilizar el apartado anterior para definir la composición en  $C^{\rightarrow}$ .
- d) Verificar que  $C^{\rightarrow}$  es una categoría.

### Soluciones

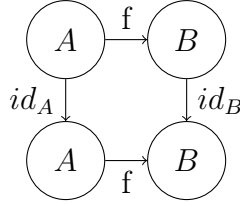
- a) El par  $(a, b)$  es una flecha de  $C^{\rightarrow}$  si el siguiente diagrama conmuta en  $C$ :



- b) Sabemos que  $u \circ p = r \circ t$  y  $v \circ q = s \circ u$  y queremos ver si  $v \circ (q \circ p) = s \circ (r \circ t)$ . Por asociatividad en  $C$   $v \circ (q \circ p) = (v \circ q) \circ p$ , es decir  $v \circ (q \circ p) = (s \circ u) \circ p = s \circ (u \circ p) = s \circ (r \circ t)$ .
- c) Para  $(r, p)$  y  $(s, q)$  como en el diagrama, definimos  $(s, q) \circ (r, p)$  como  $(s \circ r, q \circ p)$ .

d)

- Para cada  $f : A \rightarrow B$  en  $ob C^{\rightarrow}$  definimos  $id_f = (id_{dom(f)}, id_{cod(f)})$ .
  - Observemos que  $id_f$  es una flecha de  $C^{\rightarrow}$  pues el siguiente diagrama conmuta:



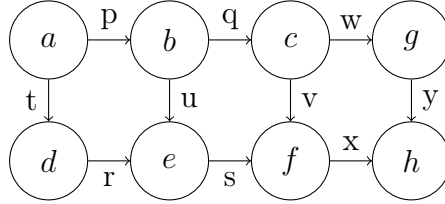
- Sean  $a : A \rightarrow A'$  y  $b : B \rightarrow B'$  como en el diagrama, luego:

$$(a, b) \circ id_f = (a \circ id_{dom(f)}, b \circ id_{cod(f)}) = (a, b)$$

- Análogamente sean  $a : D \rightarrow A$  y  $b : E \rightarrow B$ , entonces:

$$id_f \circ (a, b) = (id_{dom(f)} \circ a, id_{cod(f)} \circ b) = (a, b)$$

- Sean  $(r, p)$ ,  $(s, q)$  y  $(x, w)$  como en el siguiente diagrama:



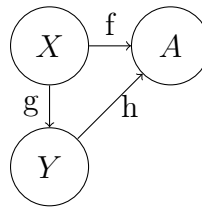
$$\begin{aligned} ((r, p) \circ (s, q)) \circ (x, w) &= (r \circ s, p \circ q) \circ (x, w) = ((r \circ s) \circ x, (p \circ q) \circ w) = \\ &= (r \circ (s \circ x), p \circ (q \circ w)) = (r, p) \circ (s \circ x, q \circ w) = (r, p) \circ ((s, q) \circ (x, w)) \end{aligned}$$

7. Sean  $C$  una categoría y  $A$  un objeto de  $C$ . Definimos  $C|A$  como la categoría cuyos objetos son las flechas  $f$  de  $C$  tales que  $cod(f) = A$ . Una flecha  $g$  en  $C|A$  de  $f : X \rightarrow A$  en  $h : Y \rightarrow A$  es una flecha  $g : X \rightarrow Y$  de  $C$  tal que  $f = h \circ g$ .

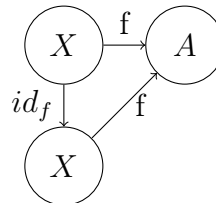
- a) Expresar las flechas de  $C|A$  en términos de diagramas conmutativos.
- b) Verificar que  $C|A$  es una categoría.
- c) Si  $P$  es la categoría definida por un conjunto ordenado y  $x \in P$ , determinar  $P|x$ .

### Soluciones

- a) Si el siguiente diagrama conmuta en  $C$ , entonces  $g$  es una flecha de  $C|A$ .

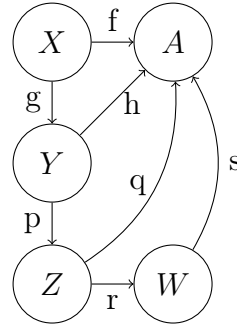


- b)
  - Dados dos morfismos  $g : X \rightarrow Y$  y  $p : Y \rightarrow Z$  en  $C|A$  definimos la composición en  $C|A$  como la composición en  $C$  y para cada objeto  $f : X \rightarrow A$  definimos el morfismo  $id_f = id_{dom(f)}$ .
  - Observemos que  $id_{dom(f)}$  es un morfismo de la categoría pues el siguiente diagrama conmuta:



- Una flecha  $\alpha$  que parte de  $f$  debe tener tipo  $X \rightarrow Y$ , luego  $\alpha \circ id_f = \alpha$ .
- Una flecha  $\beta$  que llega a  $f$  debe tener tipo  $W \rightarrow X$ , luego  $id_f \circ \beta = \beta$ .

- Sean  $g, p, q$  como en el siguiente diagrama conmutativo:



luego  $(r \circ p) \circ g = r \circ (p \circ g)$  por asociatividad en  $C$ .

c) COMPLETAR.

- Probar que en  $Set$  los monomorfismos (epimorfismos) son exactamente las funciones inyectivas (respectivamente sobreyectivas).

### Solución

■

- $\Rightarrow$ : Sea  $f : B \rightarrow C$  un monomorfismo, luego para cualquier conjunto  $A$  y funciones  $g, h : A \rightarrow B$  sabemos que:

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

Supongamos que  $f$  no es inyectiva, es decir que existen  $b_1 \neq b_2 \in B$  tales que  $f(b_1) = f(b_2)$ . Definimos funciones constantes  $g, h$  tales que  $g(x) = b_1$  y  $h(x) = b_2$ , luego:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(b_1) = f(b_2) = f(h(x)) = f \circ h(x)$$

y como  $f$  es monomorfismo resulta  $g = h$  lo cual es una contradicción pues  $g(x) = b_1 \neq b_2 = h(x)$ .

- $\boxed{\Leftarrow}$ : Sea  $f : B \rightarrow C$  una función inyectiva, luego sabemos que  $f(b_1) = f(b_2) \iff b_1 = b_2$ . Para  $g, h : A \rightarrow B$  tales que  $f \circ g = f \circ h$  resulta:

$$f \circ g(x) = f \circ h(x) \iff f(g(x)) = f(h(x)) \iff g(x) = h(x)$$

■

- $\boxed{\Rightarrow}$ : Sea  $f : A \rightarrow B$  un epimorfismo, luego para cualquier conjunto  $C$  y funciones  $g, h : B \rightarrow C$  sabemos que:

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

Supongamos que  $f$  no es sobreyectiva, es decir que existe  $b \in B$  tal que  $f(x) \neq b$  (para cualquier  $x$ ). Definimos  $g, h$  iguales salvo en  $b$  donde  $g(b) = c_1$  y  $h(b) = c_2$ , luego:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = h(f(x)) = h \circ f(x)$$

y como  $f$  es un epimorfismo resulta  $g = h$  lo cual es una contradicción.

- $\boxed{\Leftarrow}$ : Sea  $f : A \rightarrow B$  una función sobreyectiva y sean dos funciones  $g, h : B \rightarrow C$  tales que  $g \circ f = h \circ f$ . Supongamos que  $g \neq h$ , luego existe  $f(x) \in B$  tal que  $g(f(x)) \neq h(f(x))$  lo cual es una contradicción pues:

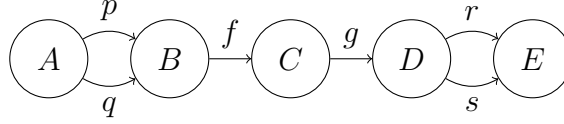
$$g \circ f(x) = h \circ f(x) \iff g(f(x)) = h(f(x))$$

9. Sean  $C$  una categoría y  $f, g$  flechas de  $C$ . Probar que:

- Si  $f$  y  $g$  son monomorfismos, entonces  $g \circ f$  también lo es.
- Si  $g \circ f$  es un monomorfismo,  $f$  también lo es.
- Si  $f$  y  $g$  son epimorfismos, entonces  $g \circ f$  también lo es.
- Si  $g \circ f$  es un epimorfismo,  $g$  también lo es.
- Si  $f^{-1}$  es la inversa de  $f$  y  $g^{-1}$  es la inversa de  $g$ , entonces  $f^{-1} \circ g^{-1}$  es la inversa de  $g \circ f$ .



**Soluciones** Sean  $f, g, p, q, r, s$  como en el siguiente diagrama:



- a) Supongamos  $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q$  luego por asociatividad resulta  $g \circ (f \circ p) = g \circ (f \circ q)$  y como  $g$  es monomorfismo  $f \circ p = f \circ q$ . Nuevamente como  $f$  es monomorfismo tenemos  $p = q$ . En definitiva:  $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q \Rightarrow p = q$ , es decir,  $g \circ f$  es monomorfismo.
- b) Supongamos  $f \circ p = f \circ q$ , luego  $g \circ (f \circ p) = g \circ (f \circ q)$  y por asociatividad  $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q$ . Como  $g \circ f$  es monomorfismo resulta  $p = q$ . En definitiva:  $f \circ p = f \circ q \Rightarrow p = q$ .
- c) Supongamos  $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f)$  luego por asociatividad resulta  $(r \circ g) \circ f = (s \circ g) \circ f$  y como  $f$  es epimorfismo  $r \circ g = s \circ g$ . Nuevamente como  $g$  es epimorfismo tenemos  $r = s$ . En definitiva:  $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f) \Rightarrow r = s$ , es decir,  $(g \circ f)$  es epimorfismo.
- d) Supongamos  $r \circ g = s \circ g$ , luego  $(r \circ g) \circ f = (s \circ g) \circ f$  y por asociatividad  $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f)$ . Como  $g \circ f$  es epimorfismo resulta  $r = s$ . En definitiva:  $r \circ g = s \circ g \Rightarrow r = s$ .
- e) Sabemos que:

$$\begin{array}{ll}
 \blacksquare f \circ f^{-1} = id_C. & \blacksquare g \circ g^{-1} = id_D. \\
 \blacksquare f^{-1} \circ f = id_B. & \blacksquare g^{-1} \circ g = id_C.
 \end{array}$$

Ahora:

$$\begin{array}{ll}
 \blacksquare (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_D. \\
 \blacksquare (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_C \circ f = f^{-1} \circ f = id_B.
 \end{array}$$

10. Mostrar que una flecha de una categoría puede ser monomorfismo y epimorfismo y no isomorfismo.

**Solución** Consideremos en  $Mon$  el morfismo  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $f(n) = n$ . Observemos que  $n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$ .

- Monomorfismo: Sean  $g, h : M \rightarrow \mathbb{N}_0$  morfismos tales que  $f \circ g = f \circ h$  y supongamos existe  $m \in M$  tal que  $g(m) \neq h(m)$ , luego:

$$f \circ g(m) = f \circ h(m) \iff f(g(m)) = f(h(m))$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $f$  es monomorfismo.

- Epimorfismo: Sean  $g, h : \mathbb{Z} \rightarrow M$  morfismos tales que  $g \circ f = h \circ f$  y supongamos existe  $z \in \mathbb{Z}$  tal que  $g(z) \neq h(z)$ , luego:

$$g \circ f(z) = h \circ f(z) \iff g(f(z)) = h(f(z))$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $f$  es epimorfismo.

- Isomorfismo: Supongamos que existe  $f^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$  tal que  $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{Z}}$  y  $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{N}_0}$ . En particular para  $n \geq 0$  sabemos que  $f^{-1}(n) = n$ , luego:

$$0 = f^{-1}(0) = f^{-1}(-n + n) = f^{-1}(-n) + f^{-1}(n) = f^{-1}(-n) + n$$

por lo que  $f^{-1}(-n) = -n$  lo cual es absurdo ya que  $-n \notin \mathbb{N}_0$ . Por lo tanto  $f$  no es isomorfismo.

11. Mostrar que una flecha de una categoría concreta puede ser epimorfismo y no sobreyectiva.

**Solución** La misma función del ejercicio anterior cumple dichas características.

12. Mostrar que dos objetos terminales en una categoría son isomorfos. Por dualidad: ¿qué se puede decir de los objetos iniciales?

**Solución** Sean  $1$  y  $1'$  dos elementos terminales de una categoría. Por ser  $1$  terminal, existe un único morfismo  $f : 1' \rightarrow 1$  y análogamente existe un único morfismo  $g : 1 \rightarrow 1'$ . Como  $1'$  es terminal existe un único morfismo de  $1'$  en  $1'$  luego  $f \circ g : 1' \rightarrow 1'$  debe ser  $id_{1'}$ . Análogamente para  $g \circ f$ .

Dos objetos iniciales en una categoría son isomorfos.

13. ¿Cuáles son los objetos iniciales y terminales en  $Set \times Set$ ? ¿Cuáles en  $Set^{\rightarrow}$ ?

### Solución

- $Set \times Set$ :
    - Iniciales:  $(\emptyset, \emptyset)$ .
    - Terminales:  $(\{x\}, \{y\})$ .
  - $Set^{\rightarrow}$ :
    - Iniciales:  $0 : \emptyset \rightarrow \emptyset$ .
    - Terminales:  $f : \{x\} \rightarrow \{y\}$ .
14. Dar una categoría sin objetos iniciales. Dar una sin objetos finales. Dar una donde los objetos finales e iniciales coincidan.

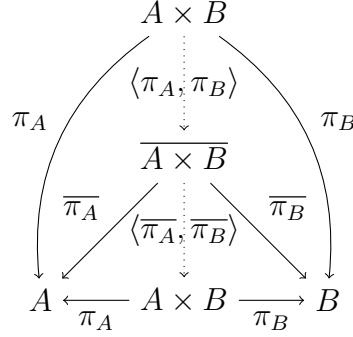
### Solución

- La categoría del poset  $(\mathbb{Z}^-, \leq)$  no tiene objetos iniciales.
  - La categoría del poset  $(\mathbb{Z}^+, \leq)$  no tiene objetos finales.
  - El monoide trivial es una categoría cuyo único objeto es final e inicial.
15. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Probar que si dos objetos admiten producto (co-producto), éste es único salvo isomorfismo.

**Solución** Sean  $A$  y  $B$  dos objetos con productos  $A \times B$  (con proyecciones  $\pi_A$  y  $\pi_B$ ) y  $\overline{A} \times \overline{B}$  (con proyecciones  $\overline{\pi}_A$  y  $\overline{\pi}_B$ ).

Como  $A \times B$  es producto sabemos que para cualquier objeto  $C$  y par de funciones  $f : C \rightarrow A$  y  $g : C \rightarrow B$  (en particular para  $\overline{A} \times \overline{B}$  y sus proyecciones) existe un único morfismo  $\langle \overline{\pi}_A, \overline{\pi}_B \rangle : \overline{A} \times \overline{B} \rightarrow A \times B$  tal que  $\pi_A \circ \langle \overline{\pi}_A, \overline{\pi}_B \rangle = \overline{\pi}_A$  y  $\pi_B \circ \langle \overline{\pi}_A, \overline{\pi}_B \rangle = \overline{\pi}_B$ .

Análogamente existe un único morfismo  $\langle \pi_A, \pi_B \rangle : A \times B \rightarrow \overline{A} \times \overline{B}$  tal que  $\overline{\pi}_A \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_A$  y  $\overline{\pi}_B \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_B$ .



Sabemos que entre  $A \times B$  y  $A \times B$  existe un único morfismo  $f$  tal que  $\pi_A \circ f = \pi_A$  y  $\pi_B \circ f = \pi_B$ . Veamos que  $\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle$  cumple estas propiedades:

$$\pi_A \circ (\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle) = (\pi_A \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle) \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \overline{\pi_A} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_A$$

$$\pi_B \circ (\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle) = (\pi_B \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle) \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \overline{\pi_B} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_B$$

Como  $id_{A \times B}$  también cumple dichas propiedades, entonces debe ser  $id_{A \times B} = \langle \pi_A, \pi_B \rangle \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle$ . Análogamente  $\langle \pi_A, \pi_B \rangle \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle = id_{A \times B}$ .

16. Sea  $P$  un poset. Determina objetos iniciales, objetos terminales, productos y coproductos en las siguientes categorías:

- Poset*.
- Set*.
- Mon*.
- Grp*.

### Soluciones

- Poset*:

- Iniciales:  $0 = (\emptyset, \emptyset)$ .
- Terminales:  $1 = (\{x\}, \Delta)$ .
- Productos:  $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B) = ((A \times B, \leq_A \wedge \leq_B), fst, snd)$ .
- Coproductos:  $A + B = \text{COMPLETAR}$ .

b) *Set*:

- Iniciales:  $0 = \emptyset$ .
- Terminales:  $1 = \{x\}$ .
- Productos:  $A \times B = (A \times B, fst, snd)$ .
- Coproductos:  $A + B = (A \uplus B, \times \{0\}, \times \{1\})$ .

c) *Mon*:

- Iniciales:  $0 = (\{e\}, \oplus)$
- Terminales:  $1 = 0$ .
- Productos:  $(A, \oplus) \times (B, \otimes) = ((, ), , )$  COMPLETAR.
- Coproductos:  $(A, \oplus) + (B, \otimes) = ((, ), , )$  COMPLETAR.

d) *Grp*:

- Iniciales:  $0 = (\{e\}, \oplus)$
- Terminales:  $1 = 0$ .
- Productos:  $(A, \oplus) \times (B, \otimes) = ((, ), , )$  COMPLETAR.
- Coproductos:  $(A, \oplus) + (B, \otimes) = ((, ), , )$  COMPLETAR.

17. Dar una categoría donde algún par de objetos carecen de producto.

**Solución**  $(\mathbb{Q}, \leq)$ .

18. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y sean  $A, B, C, D$  objetos de  $\mathcal{C}$ . Mostrar que en caso de existir  $A \times B, C \times D$  y dos morfismos  $f : A \rightarrow C$  y  $g : B \rightarrow D$ , entonces puede definirse un morfismo  $f \times g : A \times B \rightarrow C \times D$ .

**Solución**

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\
 f \downarrow & & \downarrow \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle & & \downarrow g \\
 C & \xleftarrow{\pi_3} & C \times D & \xrightarrow{\pi_4} & D
 \end{array}$$

Dicho morfismo existe pues lo garantiza la propiedad universal de  $C \times D$ .

19. Mostrar las siguientes identidades:

- a)  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id.$
- b)  $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h.$
- c)  $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle.$
- d)  $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k).$
- e)  $\langle [f, g], [h, k] \rangle = [\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle].$

### Soluciones

- a) Sabemos que  $\langle \pi_A, \pi_B \rangle$  es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \times B & & \\
 & \swarrow \pi_A & \downarrow \langle \pi_A, \pi_B \rangle & \searrow \pi_B & \\
 A & \xleftarrow{\pi_A} & A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B
 \end{array}$$

Observemos que  $id$  hace conmutar el diagrama pues  $\pi_B \circ id = \pi_B$  y  $\pi_A \circ id = \pi_A$ ; y como solo existe un morfismo con esa propiedad, debe ser  $id = \langle \pi_A, \pi_B \rangle$ .

- b) Sabemos que  $\langle f, g \rangle$  es el único morfismo que hace conmutar el diagrama interior:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & & \downarrow h & & \\
 & & D & & \\
 & \swarrow f & \downarrow \langle f, g \rangle & \searrow g & \\
 A & \xleftarrow{\pi_A} & A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B
 \end{array}$$

Además sabemos que el único morfismo que hace conmutar el diagrama exterior es  $\langle f \circ h, g \circ h \rangle$ . Veamos entonces que  $\langle f, g \rangle$  también conmuta el diagrama exterior:

- $\pi_B \circ (\langle f, g \rangle \circ h) = (\pi_B \circ \langle f, g \rangle) \circ h = g \circ h.$
- $\pi_A \circ (\langle f, g \rangle \circ h) = (\pi_A \circ \langle f, g \rangle) \circ h = f \circ h.$

- c) COMPLETAR.  
d) COMPLETAR.  
e) COMPLETAR.

20. Probar los siguientes isomorfismos:

- a)  $A \times B \cong B \times A.$   
b)  $A \times 1 \cong A.$   
c)  $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C.$   
d) ¿Cuales son los enunciados duales?

### Soluciones

- a) Sean  $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$  y  $(B \times A, \pi_3, \pi_4)$  dos productos. Como  $A \times B$  es producto sabemos que existe un único morfismo  $\langle \pi_4, \pi_3 \rangle$  entre  $B \times A$  y  $A \times B$  tal que  $\pi_1 \circ \langle \pi_4, \pi_3 \rangle = \pi_4$  y  $\pi_2 \circ \langle \pi_4, \pi_3 \rangle = \pi_3$ .

Análogamente un único morfismo  $\langle \pi_2, \pi_1 \rangle$  entre  $A \times B$  y  $B \times A$  tal que  $\pi_3 \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle = \pi_2$  y  $\pi_4 \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle = \pi_1$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & B \times A & \\
 \pi_4 \swarrow & \vdots & \searrow \pi_3 \\
 A \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} B \\
 & \langle \pi_4, \pi_3 \rangle &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & A \times B & \\
 \pi_2 \swarrow & \vdots & \searrow \pi_1 \\
 B \xleftarrow{\pi_3} & B \times A & \xrightarrow{\pi_4} A \\
 & \langle \pi_2, \pi_1 \rangle &
 \end{array}$$

También sabemos que existe un único morfismo entre  $A \times B$  y si mismo que hace conmutar el diagrama, por lo que este debe ser el morfismo identidad. Análogamente para  $B \times A$ .

Como el morfismo identidad es el único morfismo entre  $A \times B$  y si mismo que hace conmutar el diagrama y  $\langle \pi_4, \pi_3 \rangle \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle$  también tiene esta propiedad, entonces se trata del mismo morfismo. Análogamente para  $B \times A$ .

- b) Por ser  $A \times 1$  producto y 1 elemento terminal, sabemos que existen los siguientes morfismos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \swarrow id_A & \vdots & \searrow g & \\
 A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times 1 & \xrightarrow{\pi_2} & 1
 \end{array}$$

donde  $\boxed{\pi_1 \circ \langle id_A, g \rangle = id_A}$ .

Ademas observemos que:

- $\pi_1 \circ (\langle id_A, g \rangle \circ \pi_1) = (\pi_1 \circ \langle id_A, g \rangle) \circ \pi_1 = id_A \circ \pi_1 = \pi_1$
- $\pi_2 \circ (\langle id_A, g \rangle \circ \pi_1) = \pi_2$

por lo que  $\boxed{\langle id_A, g \rangle \circ \pi_1 = id_{A \times 1}}$ .

- c) COMPLETAR.

d)

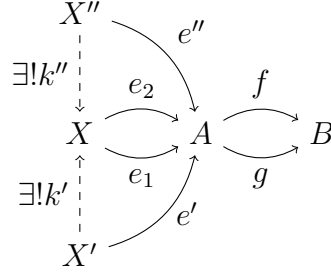
- $A + B \cong B + A$ .
- $A + 0 \cong A$ .
- $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ .

21. Probar que si dos morfismos  $f, g : X \rightarrow Y$  admiten egalizador (coegalizador), éste es único salvo isomorfismo.

**Solución** Sean  $e_1 : X \rightarrow A$  y  $e_2 : X \rightarrow A$  dos ecualizadores de  $f, g : A \rightarrow B$ , luego sabemos:

- $f \circ e_1 = g \circ e_1$ .
- $f \circ e_2 = g \circ e_2$ .
- $\forall e' : X' \rightarrow A$  para el cual  $f \circ e' = g \circ e'$  existe un único  $k' : X' \rightarrow X$  tal que  $e_1 \circ k' = e'$ .
- $\forall e'' : X'' \rightarrow A$  para el cual  $f \circ e'' = g \circ e''$  existe un único morfismo  $k'' : X'' \rightarrow X$  tal que  $e_2 \circ k'' = e''$ .





Veremos que ambos son isomorfos en  $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ . Necesitamos morfismos  $(x : X \rightarrow X, a : A \rightarrow A)$  y  $(x^{-1} : X \rightarrow X, a^{-1} : A \rightarrow A)$  tales que:

- $e_1 \circ x = a \circ e_2$ .
- $e_1 \circ x^{-1} = a^{-1} \circ e_2$ .
- $x \circ x^{-1} = id_X$ .
- $x^{-1} \circ x = id_X$ .
- $a \circ a^{-1} = id_A$ .
- $a^{-1} \circ a = id_A$ .

lo cual es trivial tomando  $x = x^{-1} = id_X$  y  $a = a^{-1} = id_A$ .

ESTO ESTA MUY MAL. NECESITO DORMIR, SON LAS 4AM.

22. Encontrar el ecualizador en  $Set$ .

**Solución** COMPLETAR.

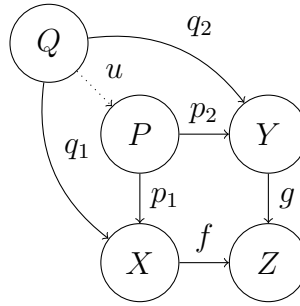
23. Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos morfismos en  $Set$ . Probar que el coequalizador de  $f$  y  $g$  es el cociente de  $Y$  por la relación de equivalencia  $y \equiv z$  si y sólo si existe  $x \in X$  tal que  $y = f(x)$  y  $z = g(x)$  o bien  $y = g(x)$  y  $z = f(x)$ .

**Solución** COMPLETAR.

24. Probar que en una categoría  $\mathcal{C}$  todo ecualizador  $e$  es un monomorfismo. Mostrar que si además  $e$  es epimorfismo, entonces se tiene un isomorfismo.

**Solución** COMPLETAR.

25. El *pullback* de dos morfismos  $f : X \rightarrow Z$  y  $g : Y \rightarrow Z$  consiste en un objeto  $P$  junto con dos morfismos  $p_1 : P \rightarrow X$ ,  $p_2 : P \rightarrow Y$  tal que  $f \circ p_1 = g \circ p_2$ , y además si existe otro objeto  $Q$  con dos morfismos  $q_1 : Q \rightarrow X$ ,  $q_2 : Q \rightarrow Y$  tal que  $f \circ q_1 = g \circ q_2$ , entonces existe un único morfismo  $u : Q \rightarrow P$  tal que  $p_1 \circ u = q_1$  y  $p_2 \circ u = q_2$ . A continuación, un diagrama que muestra la situación:



Probar que el pullback de dos morfismos, si existe, es único salvo isomorfismo.

**Solución** COMPLETAR.

26. Encontrar el pull-back en *Set*.

**Solución** COMPLETAR.

27. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con exponenciales.

- Probar  $\text{curry}(\text{eval}_{A,B}) = \text{id}_{B^A}$ .
- Dado un morfismo  $f : B \rightarrow C$ , construir un morfismo  $B^A \rightarrow C^A$ .
- Dado un morfismo  $f : A \rightarrow C^B$ , construir un morfismo  $\text{uncurry}(f) : A \times B \rightarrow C$ .
- Probar  $\text{uncurry}(\text{curry}(f)) = f$  y  $\text{curry}(\text{uncurry}(f)) = f$ .

### Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.
- d) COMPLETAR.

28. Sea  $\mathcal{C}$  una CCC y sean  $A, B$  objetos de  $\mathcal{C}$ . Probar:

- a)  $B^A$  es único salvo isomorfismo.
- b)  $1^A \cong 1$ .
- c)  $B^1 \cong B$ .

### Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.

29. Hallar los exponenciales en  $Set$ .

**Solución** COMPLETAR.

30. Demostrar que un álgebra de Boole es una CCC.

**Solución** COMPLETAR.

31. En una categoría con coproductos y objeto final, podemos definir los booleanos como el objeto  $Bool = 1 + 1$ . En este caso, a  $i_1$  le llamamos *true* y a  $i_2$  le llamamos *false*. Escribimos un morfismo  $not : Bool \rightarrow Bool$  tal que:

$$not \circ true = false$$

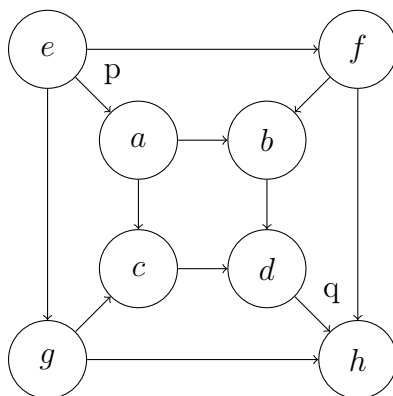
$$not \circ false = true$$

Suponiendo que la categoría tiene exponenciales: ¿puede escribir un morfismo  $and : Bool \times Bool \rightarrow Bool$  que se comporte como la conjunción?

**Solución** COMPLETAR.

## Ejercicios adicionales

1. Considerar que en el siguiente diagrama los 4 trapecios conmutan.



Probar que:

- a) Si el cuadrado interno conmuta, también lo hace el cuadrado externo.
- b) Si  $p$  es epimorfismo y  $q$  es monomorfismo, entonces si el cuadrado externo conmuta, también lo hace el cuadrado interno.

## Soluciones

- a) COMPLETAR.
  - b) COMPLETAR.
2. Sean  $C$  y  $D$  dos categorías. Se define  $C \times D$  de la siguiente manera: los objetos de  $C \times D$  son de la forma  $(A, B)$  para  $A \in C$  y  $B \in D$  y las flechas  $(f, g) : (A, B) \rightarrow (A', B')$  donde  $f : A \rightarrow A' \in C$  y  $g : B \rightarrow B' \in D$ .
    - a) Verificar que  $C \times D$  es una categoría.
    - b) Probar que  $P_1 : C \times D \rightarrow C$ ,  $P_1(A, B) = A$  y  $P_2 : C \times D \rightarrow D$ ,  $P_2(A, B) = B$ , definen funtores.

### Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.

3. Dados dos funtores  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ , definir un funtor que componga ambos. ¿Es posible definir una categoría cuyos objetos sean las categorías y sus flechas sean los funtores entre estas?

**Solución** COMPLETAR.

4. Si  $f : A \rightarrow B$  en  $Set$ , entonces definimos  $f^{-1}(X) = \{a \in A : f(a) \in X\}$  donde  $X \subseteq B$ . Probar que  $I : Set \rightarrow Set$  es un funtor contravariante, llevando:  $I(A) = \mathcal{P}(A)$  y  $I(f) = f^{-1}$ .

**Solución** COMPLETAR.

5. Se ha visto que puede considerarse a un monoide como una categoría con un único objeto, ¿Qué es un funtor entre dos categorías de este tipo? ¿Y entre categorías formadas a partir de conjuntos ordenados?

**Solución** COMPLETAR.

6. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, para cada objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  definimos  $Hom(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow Set$  donde  $Hom(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$  y  $Hom(X, f)(g) = f \circ g$ . Probar que  $Hom(X, -)$  es efectivamente un funtor para cada  $X$ . Definir análogamente un funtor  $Hom(-, X)$ .

**Solución** COMPLETAR.

7. Dado un semigrupo  $(S, \cdot)$ , podemos construir un monoide  $(S', \cdot')$  donde  $S' = S \cup \{e\}$ ,  $(0, x) \cdot' (0, y) = (0, x \cdot y)$  y  $(1, e) \cdot' x = x = x \cdot' (1, e)$ . Utilizando esta construcción, definir un funtor  $F : Sem \rightarrow Mon$  y probar que es un monomorfismo en  $Cat$ .

**Solución** COMPLETAR.

8. Definimos la asignación  $Fr : Set \rightarrow Mon$  tal que  $Fr(X) = X^*$ <sup>1</sup> y  $Fr(f)(x_1x_2 \cdots x_n) = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n)$ . Usando el funtor  $U : Mon \rightarrow Set$  que se olvida de la estructura de monoide, consideramos  $i : X \rightarrow U(Fr(X))$  la función que lleva un elemento  $x$  de  $X$  a la palabra  $x$ .
- a) Probar que  $Fr$  es un funtor.
  - b) Probar que dado  $f : X \rightarrow U(M)$  en  $Set$  donde  $M$  es un monoide, puedo construir una única  $\bar{f} : Fr(X) \rightarrow M$  en  $Mon$  tal que  $U(\bar{f}) \circ i = f$  en  $Set$ <sup>2</sup>.
  - c) ¿A cuál monoide es isomorfo  $Fr(X)$  donde  $X$  es un conjunto de un solo elemento?
  - d) ¿Este funtor preserva productos?

**Soluciones**

- a) COMPLETAR.
  - b) COMPLETAR.
  - c) COMPLETAR.
  - d) COMPLETAR.
9. Sea  $\mathcal{C}$  con 0. Verificar que si un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{C}$  admite núcleo (conúcleo), éste es único salvo isomorfismo.

**Solución** COMPLETAR.

10. Sean  $\mathcal{C}$  una categoría con 0 y  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Probar que  $p : Y \rightarrow C$  es un conúcleo de  $f$  en  $\mathcal{C}$  si y solo si  $p^{op}$  es un núcleo de  $f^{op}$  en  $\mathcal{C}^{op}$ .

---

<sup>1</sup> $X^*$  es el monoide de las palabras sobre el alfabeto  $X$  con la concatenación como operación. Puede pensar en las palabras de  $X$  como las listas de elementos de  $X$ .

<sup>2</sup>Cuando un monoide como  $Fr(X)$  satisface esta propiedad, decimos que es el monoide libre sobre  $X$ .

**Solución** COMPLETAR.

11. Sean  $\mathcal{C}$  un categoría con 0 y  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Probar que  $\ker(f)$  ( $\operatorname{coker}(f)$ ) coincida con el igualizador (coequalizador) de  $f$  y 0.

**Solución** COMPLETAR.

12. Sean  $x$  e  $y$  elementos de un conjunto ordenado  $P$ . ¿Cuál sería el producto de  $x$  e  $y$  considerando  $P$  como una categoría?

**Solución** COMPLETAR.

13. Sean  $P$  y  $Q$  conjuntos ordenados. ¿Cuál es el coproducto de  $P$  y  $Q$  en  $\mathbf{Poset}$ ?

**Solución** COMPLETAR.

14. ¿ $\mathbf{Grp}$  tiene productos? ¿Tiene coproductos? ¿Tiene objeto inicial? ¿Tiene objeto final? ¿Y  $\mathbf{Mon}$ ?

**Solución** COMPLETAR.

15. Un  $\omega CPO$  es un conjunto ordenado con mínimo (notado  $\perp$ ) tal que toda cadena ascendente numerable  $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \dots$  (que notamos  $\{a_i\}_{i=0}^\infty$ ) tiene un supremo  $\sqcup \{a_i\}_{i=0}^\infty$ . Una función monótona entre dos  $\omega CPO$  es continua si  $f(\sqcup \{a_i\}_{i=0}^\infty) = \sqcup \{f(a_i)\}_{i=0}^\infty$  para toda cadena ascendente numerable  $\{a_i\}_{i=0}^\infty$ .

- a) Probar que podemos armar una categoría cuyos objetos son  $\omega CPO$  y cuyas flechas son funciones continuas.
- b) ¿Esta categoría tiene productos? En caso afirmativo, describirlos. ¿Y coproductos?

### Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

16. Probar o refutar: sea  $C$  una categoría con productos, y  $F : C \rightarrow C$  un functor, entonces siempre existe un único morfismo  $F(A \times B) \rightarrow FA \times FB$ .

**Solución** COMPLETAR.

17. Sea  $U : Mon \rightarrow Set$  el functor que olvida la estructura de monoide. Definimos además  $U^2 : Mon \rightarrow Set$  que en objetos lleva  $(X, \otimes, e) \mapsto X \times X$ . Probar que a  $U^2$  se lo puede denotar de estructura functorial.

**Solución** COMPLETAR.