1. Obtener la Forma clausal equivalente de las siguientes formulas:

   a) $\forall x\,(\neg P\,(x) \vee \exists y\,(P\,(y) \wedge Q\,(y)))$

   b) $\exists x \forall y\,(P\,(x, y) \wedge Q\,(x) \wedge \neg R\,(y))$

   c) $\forall x\,(P\,(x) \rightarrow \neg \forall y\,(Q\,(x, y) \rightarrow \exists z P\,(z)))$

Soluciones

a)

- $\forall x\,(\neg P\,(x) \vee \exists y\,(P\,(y) \wedge Q\,(y)))$
- $\forall x \exists y\,(\neg P\,(x) \vee (P\,(y) \wedge Q\,(y)))$
- $\forall x\,(\neg P\,(x) \vee (P\,(f\,(x)) \wedge Q\,(f\,(x))))$
- $\neg P\,(x) \vee (P\,(f\,(x)) \wedge Q\,(f\,(x)))$
- $(\neg P\,(x) \vee P\,(f\,(x))) \wedge (\neg P\,(x) \vee Q\,(f\,(x)))$

b)

- $\exists x \forall y\,(P\,(x, y) \wedge Q\,(x) \wedge \neg R\,(y))$
- $\forall y\,(P\,(c, y) \wedge Q\,(c) \wedge \neg R\,(y))$
- $P\,(c, y) \wedge Q\,(c) \wedge \neg R\,(y)$

c)

- $\forall x\,(P\,(x) \rightarrow \neg \forall y\,(Q\,(x, y) \rightarrow \exists z P\,(z)))$
- $\forall x\,(\neg P\,(x) \vee \neg \forall y\,(Q\,(x, y) \rightarrow \exists z P\,(z)))$
- $\forall x\,(\neg P\,(x) \vee \neg \forall y\,(\neg Q\,(x, y) \vee \exists z P\,(z)))$
- $\forall x\,(\neg P\,(x) \vee \exists y \neg\,(\neg Q\,(x, y) \vee \exists z P\,(z)))$
- $\forall x\,(\neg P\,(x) \vee \exists y\,(Q\,(x, y) \wedge \neg \exists z P\,(z)))$
- $\forall x\,(\neg P\,(x) \vee \exists y\,(Q\,(x, y) \wedge \forall z \neg P\,(z)))$
- $\forall x \exists y \forall z\,(\neg P\,(x) \vee (Q\,(x, y) \wedge \neg P\,(z)))$
- $\forall x \forall z\,(\neg P\,(x) \vee (Q\,(x, f\,(x)) \wedge \neg P\,(z)))$
- $\neg P\,(x) \vee (Q\,(x, f\,(x)) \wedge \neg P\,(z))$
- $(\neg P\,(x) \vee Q\,(x, f\,(x))) \wedge (\neg P\,(x) \vee \neg P\,(z))$

2. ¿Se deduce $(p \wedge q)$ de $(\neg p \to q) \wedge (p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$? Contestar utilizando el método de resolución para la lógica proposicional.

   Solución

   1) $p \vee q$
   2) $\neg p \vee q$
   3) $p \vee \neg q$
   4) $\neg p \vee \neg q$
   5) $\neg q$ (4 y 3)
   6) p (5 y 1)
   7) q (6 y 2)
   8) $\emptyset$ (7 y 5)

3. Demuestre por resolución la validez del siguiente argumento: «Si continúa la lluvia el río aumentará. Si el río aumenta entonces el puente será arrastrado. Si la continuación de la lluvia hace que el puente sea arrastrado entonces un solo camino no será suficiente para la ciudad. O bien un solo camino es suficiente para la ciudad, o los ingenieros han cometido un error. Por lo tanto los Ingenieros han cometido un error».

   Solución Sean:

   - $ll \equiv$ «continua la lluvia».
   - $r \equiv$ «el río aumentará».
   - $p \equiv$ «el puente será arrastrado».
   - $c \equiv$ «un camino será suficiente».
   - $e \equiv$ «los ingenieros han cometido un error».

   Nuestro argumento es:

   $((ll \to r) \wedge (r \to p) \wedge ((ll \to p) \to \neg c) \wedge (c \vee e)) \to e$

En forma clausal:

- $(ll \to r) \wedge (r \to p) \wedge ((ll \to p) \to \neg c) \wedge (c \vee e)$
- $(\neg ll \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg (\neg ll \vee p) \vee \neg c) \wedge (c \vee e)$
- $(\neg ll \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge ((ll \wedge \neg p) \vee \neg c) \wedge (c \vee e)$
- $(\neg ll \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (ll \vee \neg c) \wedge (\neg p \vee \neg c) \wedge (c \vee e)$

Agregamos $\neg e$ y aplicamos resolución:

1) $\neg ll \vee r$
2) $\neg r \vee p$
3) $ll \vee \neg c$
4) $\neg p \vee \neg c$
5) $c \vee e$
6) $\neg e$
7) c (5 y 6)
8) $\neg p$ (7 y 4)
9) $\neg r$ (8 y 2)
10) $\neg ll$ (9 y 1)
11) $\neg c$ (10 y 3)
12) $\emptyset$ (11 y 7)

4. Determinar si las siguientes fórmulas son lógicamente válidas usando resolución, es decir, la formula implicada es consecuencia lógica de la primera:

   a) $\exists x \forall y R(x, y) \to \forall y \exists x R(x, y)$

   b) $\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x) \to \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

Soluciones

a) Pasando a forma clausal:

- $\exists x \forall y R(x, y)$
- $\forall y R(c, y)$
- $\boxed{R(c, y)}$

- $\forall y \exists x R(x, y)$
- $\forall y R(f(y), y)$
- $\boxed{R(f(y), y)}$

Resolviendo:

1) $R(c, y)$
2) $\neg R(f(y), y)$
3) No es posible unificar.

b) Pasando a forma clausal:

- $\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- $\boxed{P(c) \wedge Q(x)}$

- $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$
- $\boxed{P(c) \wedge Q(c)}$

Resolviendo:

1) $P(c) \wedge Q(x)$
2) $\neg (P(c) \wedge Q(c))$
3) $\emptyset$ (1 y 2 $[c/x]$)

5. Demostrar utilizando resolución, que H es consecuencia lógica de F y G, es decir, $F \wedge G \wedge \neg H$ es insatisfactible; donde:

   - $F \equiv \exists x (P(x) \wedge \forall y (D(y) \rightarrow Q(x,y)))$
   - $G \equiv \forall x (P(x) \wedge \forall y (C(y) \rightarrow \neg Q(x,y)))$
   - $H \equiv \forall x (D(x) \rightarrow \neg C(x))$

   Solución Pasando a forma clausal:

   - $\exists x (P(x) \wedge \forall y (D(y) \rightarrow Q(x,y)))$
   - $\exists x (P(x) \wedge \forall y (\neg D(y) \vee Q(x,y)))$
   - $\exists x (P(x) \wedge (\neg D(y) \vee Q(x,y)))$
   - $\boxed{P(c) \wedge (\neg D(y) \vee Q(c,y))}$
   - $\forall x (P(x) \wedge \forall y (C(y) \rightarrow \neg Q(x,y)))$
   - $\forall x (P(x) \wedge \forall y (\neg C(y) \vee \neg Q(x,y)))$
   - $\boxed{P(x) \wedge (\neg C(y) \vee \neg Q(x,y))}$
   - $\forall x (D(x) \rightarrow \neg C(x))$
   - $\forall x (\neg D(x) \vee \neg C(x))$
   - $\boxed{\neg D(x) \vee \neg C(x)}$

Resolviendo:

1) $P(c)$
2) $\neg D(y) \vee Q(c,y)$
3) $P(x)$
4) $\neg C(y) \vee \neg Q(x,y)$
5) $\neg(\neg D(x) \vee \neg C(x))$
6) $\neg D(y) \vee \neg C(y)$ (2 y 4 $[c/x]$)
7) $\emptyset$ (5 y 6 $[x/y]$)

6. Probar usando resolución el conocido ejemplo de «Todos los hombres son mortales, Sócrates es hombre entonces Sócrates es mortal».

Solución

1) $\neg H(x) \vee M(x)$
2) $H(s)$
3) $\neg M(s)$
4) $M(s)$ (1 y 2 $[s/x]$)
5) $\emptyset$ (3 y 4)

7. Dados los siguientes hechos y relaciones,

a) Un ungulado es un animal.
b) Un pez es un animal.
c) Una cebra es un ungulado.
d) Un arenque es un pez.
e) Un tiburón es un pez.
f) La cebra vive en la tierra.
g) La rana vive en la tierra y en el agua.
h) Los peces viven en el agua.
i) Un animal que vive en el agua puede nadar.

utilizar resolución para contestar si existen animales que pueden nadar. Encontrar a partir del relato, que animal/es pueden nadar.

Solución

- $U(x) \rightarrow A(x)$
- $P(x) \rightarrow A(x)$
- $U(cebra)$
- $P(arenque)$
- $P(tiburon)$
- $V(cebra, tierra)$
- $V(rana, tierra)$
- $V(rana, agua)$
- $P(x) \rightarrow V(x, agua)$
- $(A(x) \wedge V(x, agua)) \rightarrow N(x)$
- $\therefore \exists x A(x) \wedge N(x)$

1) $\neg U(x) \vee A(x)$
2) $\neg P(x) \vee A(x)$
3) $U(cebra)$
4) $P(arenque)$
5) $P(tiburon)$
6) $V(cebra, tierra)$
7) $V(rana, tierra)$
8) $V(rana, agua)$
9) $\neg P(x) \vee V(x, agua)$
10) $\neg A(x) \vee \neg V(x, agua) \vee N(x)$
11) $\neg A(x) \vee \neg N(x)$
12) $\neg P(x) \vee \neg N(x)$ (11 y 2)
13) $\neg N(arenque)$ (4 y 12 $[arenque/x]$)
14) $V(arenque, agua)$ (4 y 9 $[arenque/x]$)
15) $\neg A(arenque) \vee N(arenque)$ (10 y 14 $[arenque/x]$)
16) $A(arenque)$ (2 y 4 $[arenque/x]$)
17) $N(arenque)$ (15 y 16)
18) $\emptyset$ (13 y 17)

Pueden nadar la rana, el tiburón y el arenque.

8. Considérense las siguientes sentencias:

   - A John le gusta toda clase de comida.
   - Las manzanas son comida.
   - El pollo es comida.
   - Cualquier cosa que uno coma y no le mate es comida.
   - Bill come cacahuetes y aún está vivo.
   - Sue come todo lo que come Bill.

   Utilizar resolución para mostrar que a John le gustan los cacahuetes.

   Solución

   - $\forall x\,(Comida(x) \to Gusta(John, x))$
   - $\forall x\,(Manzana(x) \to Comida(x))$
   - $Comida(Pollo)$
   - $\forall x \forall y\,((Come(x, y) \wedge \neg Mata(y, x)) \to Comida(y))$
   - $Come(Bill, Cacahuetes)$
   - $\neg Mata(Cacahuetes, Bill)$
   - $\forall x\,(Come(Bill, x) \to Come(Sue, x))$

1) $\neg Comida\,(x) \vee Gusta\,(John, x)$
2) $\neg Manzana\,(x) \vee Comida\,(x)$
3) $Comida\,(Pollo)$
4) $\neg Come\,(x, y) \vee Mata\,(y, x) \vee Comida\,(y)$
5) $Come\,(Bill, Cacahuetes)$
6) $\neg Mata\,(Cacahuetes, Bill)$
7) $\neg Come\,(Bill, x) \vee Come\,(Sue, x)$
8) $\neg Gusta\,(John, Cacahuetes)$
9) $\neg Comida\,(Cacahuetes)$ (8 y 1 $[Cacahuetes/x]$)
10) $\neg Come\,(x, Cacahuetes) \vee Mata\,(Cacahuetes, x)$ (9 y 4 $[Cacahuetes/y]$)
11) $\neg Come\,(Bill, Cacahuetes)$ (10 y 6 $[Bill/x]$)
12) $\emptyset$ (11 y 5)

9.

- Juan tiene un perro y Pedro tiene un gato.
- Todos los que tienen una mascota aman a los animales.
- Nadie que ame a los animales los mata.
- Juan, Pedro o María mataron a la gata de Luis que se llama Iris.

Probar que María mató a Iris, usando resolución. Analizar las adaptaciones necesarias para resolver utilizando PROLOG.

Solución

- Argumento:
  - $\exists x \exists y \left(Perro\left(x\right) \land Gato\left(y\right) \land Tiene\left(Juan, x\right) \land Tiene\left(Pedro, y\right)\right)$
  - $\forall x \forall y \left(\left(Tiene\left(x, y\right) \land Mascota\left(y\right)\right) \to \left(\forall z \left(Animal\left(z\right) \to Ama\left(x, z\right)\right)\right)\right)$
  - $\forall x \forall y \left(\left(Animal\left(y\right) \land Ama\left(x, y\right)\right) \to \left(\forall z \left(Animal\left(z\right) \to \neg Mata\left(x, z\right)\right)\right)\right)$
  - $\forall x \left(Gato\left(x\right) \to Mascota\left(x\right)\right)$
  - $\forall x \left(Perro\left(x\right) \to Mascota\left(x\right)\right)$
  - $\forall x \left(Mascota\left(x\right) \to Animal\left(x\right)\right)$
  - $Gato\left(Iris\right)$
  - $Tiene\left(Luis, Iris\right)$
  - $Mata\left(Juan, Iris\right) \lor Mata\left(Pedro, Iris\right) \lor Mata\left(Maria, Iris\right)$
- Forma clausal:
  - $Perro\left(a\right) \land Gato\left(b\right) \land Tiene\left(Juan, a\right) \land Tiene\left(Pedro, b\right)$
  - $\neg Tiene\left(x, y\right) \lor \neg Mascota\left(y\right) \lor \neg Animal\left(z\right) \lor Ama\left(x, z\right)$
  - $\neg Animal\left(y\right) \lor \neg Ama\left(x, y\right) \lor \neg Animal\left(z\right) \lor \neg Mata\left(x, z\right)$
  - $\neg Gato\left(x\right) \lor Mascota\left(x\right)$
  - $\neg Perro\left(x\right) \lor Mascota\left(x\right)$
  - $\neg Mascota\left(x\right) \lor Animal\left(x\right)$
  - $Gato\left(Iris\right)$
  - $Tiene\left(Luis, Iris\right)$
  - $Mata\left(Juan, Iris\right) \lor Mata\left(Pedro, Iris\right) \lor Mata\left(Maria, Iris\right)$
- Versión simplificada:
  - $\exists x \left(TieneAnimal\left(Juan, x\right)\right)$
  - $\exists x \left(TieneAnimal\left(Pedro, x\right)\right)$
  - $\forall x \forall y \left(TieneAnimal\left(x, y\right) \to AmaAnimales\left(x\right)\right)$
  - $\forall x \left(AmaAnimales\left(x\right) \to \neg MataIris\left(x\right)\right)$
  - $MataIris\left(Juan\right) \lor MataIris\left(Pedro\right) \lor MataIris\left(Maria\right)$

- Resolución:
  1) $TieneAnimal\,(Juan, a)$
  2) $TieneAnimal\,(Pedro, b)$
  3) $\neg TieneAnimal\,(x, y) \vee AmaAnimales\,(x)$
  4) $\neg AmaAnimales\,(x) \vee \neg MataIris\,(x)$
  5) $MataIris\,(Juan) \vee MataIris\,(Pedro) \vee MataIris\,(Maria)$
  6) $\neg MataIris\,(Maria)$
  7) $MataIris\,(Juan) \vee MataIris\,(Pedro)$ (5 y 6)
  8) $\neg AmaAnimales\,(Juan) \vee MataIris\,(Pedro)$ (7 y 4 $[Juan/x]$)
  9) $\neg TieneAnimal\,(Juan, y) \vee MataIris\,(Pedro)$ (8 y 3 $[Juan/x]$)
  10) $MataIris\,(Pedro)$ (9 y 1 $[a/y]$)
  11) $\neg AmaAnimales\,(Pedro)$ (10 y 4 $[Pedro/x]$)
  12) $\neg TieneAnimal\,(Pedro, y)$ (11 y 3 $[Pedro/x]$)
  13) $\emptyset$ (12 y 2 $[b/y]$)
- En Prolog:

```prolog
tieneanimal(juan, a).
tieneanimal(pedro, b).

amaanimales(X) :- tieneanimal(X,Y).
nomatairis(X) :- amaanimales(X).

sospechoso(juan).
sospechoso(pedro).
sospechoso(maria).

matairis(X) :- sospechoso(X), not(nomatairis(X)).

%% matairis(X).
```

10.

- Frodo era un Hobbit.
- Sam era un Hobbit.
- Todos los Hobbits vivían en la Comarca
- Todos los que vivían en la Comarca vivían en la Tierra Media.
- Todos los que vivían en la tierra Media eran leales a Sauron o lo odiaban.
- Todos los seres son leales a alguien.
- Uno sólo intenta destruir a alguien a quien no es leal.
- Frodo intentó destruir a Saurón.

Probar si odia Frodo a Sauron aplicando resolución. Utilizando un programa en PROLOG contestar si alguien que vive en la Comarca odia a Sauron.

Solución

1) $Hobbit\,(Frodo)$
2) $Hobbit\,(Sam)$
3) $\neg Hobbit\,(x) \vee Comarca\,(x)$
4) $\neg Comarca\,(x) \vee Media\,(x)$
5) $\neg Media\,(x) \vee Leal\,(x, Sauron) \vee Odia\,(x, Sauron)$
6) $Leal\,(x, f\,(x))$
7) $\neg IDestruir\,(x, y) \vee \neg Leal\,(x, y)$
8) $IDestruir\,(Frodo, Sauron)$
9) $\neg Odia\,(Frodo, Sauron)$
10) $\neg Media\,(Frodo) \vee Leal\,(Frodo, Sauron)$ (9 y 5 $[Frodo/x]$)
11) $\neg Comarca\,(Frodo) \vee Leal\,(Frodo, Sauron)$ (10 y 4 $[Frodo/x]$)
12) $\neg Hobbit\,(Frodo) \vee Leal\,(Frodo, Sauron)$ (11 y 3 $[Frodo/x]$)
13) $Leal\,(Frodo, Sauron)$ (12 y 1)
14) $\neg IDestruir\,(Frodo, Sauron)$ (13 y 7 $[Frodo/x, Sauron/y]$)
15) $\emptyset$ (14 y 8)

```
hobbit(frodo).
hobbit(sam).

comarca(X) :- hobbit(X).

media(X) :- comarca(X).

lealoodia(X,sauron) :- media(X).

noleal(X,Y) :- idestruir(X,Y).

odia(X,Y) :- lealoodia(X,Y), noleal(X,Y).

idestruir(frodo,sauron).

%% comcarca(X), odia(X,sauron).
```

11.

- Los miembros del club de bridge de la calle Elm son Joe, Sally, Bill y Ellen.
- Joe está casado con Sally.
- Bill es hermano de Ellen
- El cónyuge de cada persona casada del club también está en el club.
- La última reunión fue en la casa de Joe

A partir de estos hechos (y algunos hechos de conocimiento del dominio) determine usando resolución si “La última reunión fue en casa de Sally.”

Solución COMPLETAR.