1. Escribir una función en Scilab para resolver un sistema triangular superior, y otra función para resolver un sistema triangular inferior.

   **Solución**

```
function x = superior(A, b)
    n = size(A, 1)
    x = zeros(n, 1)

    x(n) = b(n) / A(n, n)
    for i = n-1:-1:1
        x(i) = (b(i) - A(i, i+1:n) * x(i+1:n)) / A(i, i)
    end
endfunction

function x = inferior(A, b)
    x = flipdim(superior(A', flipdim(b, 1)), 1)
endfunction
```

2. Se provee el método de eliminación de Gauss programado en Scilab en la función `GaussElim`.

   (a) Estudiar el código de la funcion `GaussElim`.

   (b) Aplicarlo para resolver los siguientes sistemas $Ax = b$.

      i. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

      ii. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

      iii. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(c) Modificar la función `GaussElim` a fin de contar el número de operaciones realizadas.

(d) Aprovechando las caracteristicas especiales de Scilab para operar con submatrices, reescribir la función de eliminación Gaussiana en forma más corta.

**Soluciones**

(a)

```
function [x, a] = gausselim(A, b)
    a = [A b];
    [nA, mA] = size(A)

    for k = 1:nA-1
        for i = k+1:nA
            for j = k+1:nA+1
                a(i, j) = a(i, j) - a(k, j) * a(i, k) / a(k, k);
            end;
        end;
    end;

    x = superior(a(:,1:mA), a(:,mA+1))
    a = [triu(a(:,1:mA)), a(:,mA+1)]
endfunction
```

(b)

i. $x = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

ii. COMPLETAR.

iii. $x = \begin{pmatrix} -4 & 2/3 & -7 & 4/3 \end{pmatrix}^T$.

(c) COMPLETAR.

(d) COMPLETAR.

3. Suponga que queremos resolver los suigentes tres sistemas de ecuaciones:

$$S1 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 14 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 & = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 & = 5 \end{cases}$$

$$S2 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 & = -5 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 & = 19 \end{cases}$$

$$S3 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 & = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 & = 12 \end{cases}$$

Podemos escribir los tres sistemas de ecuaciones como una única ecuación matricial: $AX = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 14 & 9 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 5 & 19 & 12 \end{pmatrix}$$

(a) Modificar el método de eliminación Gaussiana a fin de resolver múltiples sistemas de ecuaciones lineales. La matriz aumentada para este caso es $A^+ = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, donde $A$ es una matriz de $n \times n$, y $B$ es una matriz de $n \times m$. La solución es una matriz de $n \times m$.

(b) Utilizar el método programado en el item anterior para resolver los tres sistemas lineales dados.

(c) Utilizar el método programado en el primer item para calcular la inversa de la matriz $A$ por eliminación Gaussiana.

**Soluciones**

(a) COMPLETAR.

(b) COMPLETAR.

(c) COMPLETAR.

4. Se puede demostrar que el determinante de una matriz se obtiene multiplicando los elementos en la diagonal principal de la matriz triangular

superior resultante de la etapa de eliminación progresiva del procedimiento de eliminación Gaussiana. Escribir una función que calcule el determinante de una matriz por eliminación Gaussiana supuesta sin pivoteo.

**Solución**

```
function d = determinante(A)
    n = size(A, 1)
    [x a] = gausselim(A, zeros(n, 1))
    d = prod(diag(a))
endfunction
```

5. Se provee el método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial, programado en Scilab en la función `GaussElimPP`.

   (a) Estudiar el código de la función `GaussElimPP`.

   (b) Aplicarlo para resolver los sistemas lineales dados en el segundo apartado del ejercicio 2.

   **Soluciones**

   (a) COMPLETAR.

   (b) COMPLETAR.

6. Construir un algoritmo para resolver por el método de Gauss el problema $Ax = b$, siendo $A$ una matriz tridiagonal:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Contar la cantidad de operaciones que se realizan en este caso.

**Solución** COMPLETAR.

7. Programar en Scilab el siguiente algoritmo para obtener la factorización $PA = LU$ a partir de la eliminación de Gauss con pivoteo parcial:

   - $U = A$, $L = I$, $P = I$
   - $\forall k \in \{1 \dots m\}$:
     - Seleccionar $i \geq k$ que maximiza $|u_{ik}|$
     - $u_{k,k:m} \leftrightarrow u_{i,k:m}$ (intercambio de filas)
     - $l_{k,1:k-1} \leftrightarrow l_{i,1:k-1}$
     - $p_{k,:} \leftrightarrow p_{i,:}$
       - $\forall j \in \{k+1 \dots m\}$:
         - $l_{jk} = u_{jk}/u_{kk}$
         - $u_{j,k:m} = u_{j,k:m} - l_{jk}u_{k,k:m}$

   Aplicar el algoritmo a la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

**Solución** COMPLETAR.

8. Factorizar las siguientes matrices usando el algoritmo diseñado en el ejercicio anterior y comparar los resultados con la implementación de Scilab de la factorización $LU$.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1,012 & -2,132 & 3,104 \\ -2,132 & 4,096 & -7,013 \\ 3,104 & -7,013 & 0,014 \end{pmatrix}$

   (b) $B = \begin{pmatrix} 2,1756 & 4,0231 & -2,1732 & 5,1967 \\ -4,0231 & 6,0000 & 0 & 1,1973 \\ -1,0000 & 5,2107 & 1,1111 & 0 \\ 6,0235 & 7,0000 & 0 & 4,1561 \end{pmatrix}$

**Soluciones**

(a) COMPLETAR.

(b) COMPLETAR.

9. Considerar el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -7 & 6 \\ 5 & 25 & -15 & -3 \\ 6 & -12 & -6 & 22 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Resuelva el sistema mediante el método de eliminación de Gauss. En caso de realizar intercambios de ecuaciones, calcule la matriz de permutación $P$ correspondiente.

(b) A partir de la información obtenida en la eliminación de Gauss, obtenga la factorizacion $PA = LU$, y utilize dicha factorización para resolver el sistema $Ax = \tilde{b}$, donde $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

**Soluciones**

(a) Consideremos la matriz ampliada:

$$E_{21}(4)\,A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 25 & -15 & -3 \\ 6 & -12 & -6 & 22 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$E_{31}(5)\,E_{21}(4)\,A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 15 & -5 & -8 \\ 6 & -12 & -6 & 22 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$E_{41}(6)\,E_{31}(5)\,E_{21}(4)\,A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 15 & -5 & -8 \\ 0 & -24 & 6 & 16 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$E_{32}(-5)\,E_{41}(6)\,E_{31}(5)\,E_{21}(4)\,A=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&-3&1&2\\0&0&\mathbf{0}&2\\0&-24&6&16\end{pmatrix}$$

luego debemos realizar una permutación, reajustar los indices y continuar,

$$E_{42}(-5)\,E_{31}(6)\,E_{41}(5)\,E_{21}(4)\,P_{34}A=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&-3&1&2\\0&-24&6&16\\0&0&0&2\end{pmatrix}\iff$$

$$E_{32}(8)\,E_{42}(-5)\,E_{31}(6)\,E_{41}(5)\,E_{21}(4)\,P_{34}A=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&-3&1&2\\0&0&-2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\iff$$

finalmente repetimos el proceso con $b$,

$$E_{32}(8)\,E_{42}(-5)\,E_{31}(6)\,E_{41}(5)\,E_{21}(4)\,P_{34}b=\begin{pmatrix}1\\-2\\11\\-15\end{pmatrix}$$

y resolvemos el sistema equivalente obteniendo,

$$x=\begin{pmatrix}59/6\\-37/6\\-11/2\\-15/2\end{pmatrix}$$

(b) De lo visto en el ejercicio anterior concluimos que la factorización $PA=LU$ es:

$$PA=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\4&1&0&0\\6&8&1&0\\5&-5&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&-3&1&2\\0&0&-2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

luego:

$$Ax=\tilde{b}\iff PAx=P\tilde{b}\iff LUx=P\tilde{b}$$

Sea $y = Ux$ entonces $Ly = P\tilde{b}$ es el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S_1 = \begin{cases} y_1 & = 2 \\ 4y_1 + y_2 & = 2 \\ 6y_1 + 8y_2 + y_3 & = 0 \\ 5y_1 - 5y_2 + y_4 & = 1 \end{cases}$$

para el cual resulta

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 36 \\ -39 \end{pmatrix}$$

que usaremos para resolver el sistema de ecuaciones $Ux = y$

$$S_2 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 & = 2 \\ -3x_2 + x_3 + 2x_4 & = -6 \\ -2x_3 & = 36 \\ 2x_4 & = -39 \end{cases}$$

obteniendo finalmente

$$x = \begin{pmatrix} 39/2 \\ -17 \\ -18 \\ -39/2 \end{pmatrix}$$

10. Construir un algoritmo para resolver sistemas lineales mediante la factorización $LU$ de Doolittle y utilizarlo para resolver el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix}$$

**Solución** COMPLETAR.

11. Se proveé la factorización de Cholesky, programada en Scilab en la función `Cholesky`.

(a) Estudiar el código de la función `Cholesky`.

(b) Aplicar la función para factorizar las siguientes matrices. En todos los casos verificar que la factorización es correcta.

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -12 & 8 & -16 \\ -12 & 18 & -6 & 9 \\ 8 & -6 & 5 & -10 \\ -16 & 9 & -10 & 46 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**Soluciones**

(a) COMPLETAR.

(b) COMPLETAR.

12. Escribir en Scilab una función que resuelva el sistema $Ax = b$ por el método de Cholesky, para el caso de una matriz $A$ definida positiva. Utilizar la función para resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 16 & -12 & 8 \\ -12 & 18 & -6 \\ 8 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 \\ -66 \\ 46 \end{pmatrix}$$

**Solución** COMPLETAR.