Práctica 4: AUTOVECTORES Y AUTOVALORES

1. *i*) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$ definida por $T(u,v) = (v,u)$ para $u, v \in \mathbb{K}$. Calcular los autovalores y los autovectores asociados para T.
   ii) Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3, \mathbb{K}^3)$ definida por $T(u,v,w) = (2v, 0, 5w)$ para $u, v, w \in \mathbb{K}$. Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para T.
   iii) Para $n \in \mathbb{N}$ sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ definida por
   $$T(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n, \cdots, x_1 + \cdots + x_n), x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}.$$
   Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para T.

2. Encontrar los autovalores y autovectores asociados para los operadores lineales sobre $\mathbb{K}^2$ dados por las siguientes matrices
   $$a) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Encontrar el autoespacio correspondiente de cada autovalor
   $$i) A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 10, \qquad ii) B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 3$$
   .

4. Para cada matriz dada, encontrar los autovalores para el operador T sobre $\mathbb{K}^n$ sin realizar cálculos. Describir los autovectores $v \in \mathbb{K}^n$ asociados a cada autovalor λ analizando las soluciones a de la ecuación matricial $(A - \lambda I)v = 0$.
   $$a) \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Un espacio vectorial U se dice invariante bajo T si $T(U) \subset U$. Supongamos que U_1, U_2 son dos subespacios invariantes bajo T. Probar que $U_1 \cap U_2$ también es invariante bajo T.

6. Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(V)$ inversible y $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$. Probar que λ es autovalor de T si y sólo si λ^{-1} es autovalor de T^{-1}.

7. Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ matriz inversible y $\lambda \in \mathbb{K}$. Probar que λ es autovalor de A si y sólo si λ es autovalor de A^t.

8. Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ con la propiedad que todo $v \in V$ es un autovalor para T. Probar que T debe ser igual a un escalar por la identidad en V.

9. *i*) Considerar una matriz $n \times n$ con la propiedad que todas las sumas de sus filas son iguales a un mismo número β. Mostrar que β es un autovalor de A.
   ii) Considerar una matriz $n \times n$ con la propiedad que todas las sumas de sus columnas son iguales a un mismo número β. Mostrar que β es un autovalor de A.

10. Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encontrar h tal que el autoespacio correspondiente a $\lambda = 5$ sea bidimensional.

11. En cada uno de los siguientes items, sea $A = PDP^-1$ y calcule A^4.

$$i)P = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ ii)P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix};\ iii)P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Diagonalizar las siguientes matrices

$$i) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

13. Sea A una matriz 3×3 con dos autovalores. Cada autoespacio es unidimensional. Determinar si A es diagonalizable justificando la respuesta.

14. Demostrar que si A es tanto diagonalizable como invertible, también lo es A^{-1}.

15. *i*) Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea inversible pero no diagonalizable. *ii*) Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea diagonalizable pero no inversible.

16. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 6 & 12 & 11 & 2 & -4 \\ 9 & 20 & 10 & 10 & -6 \\ 15 & 28 & 14 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizarla, encontrar sus autovalores y determinar las bases para los autoespacios correspondientes.