1. Probar que en el conjunto $\{a, b\}$ hay tres órdenes posibles. ¿Y en $\{a, b, c\}$ y $\{a, b, c, d\}$?

2. En $(\mathbb{N}, |)$, donde $|$ denota la relación «divide a»:

   a) Verificar que $(\mathbb{N}, |)$ es un conjunto ordenado.

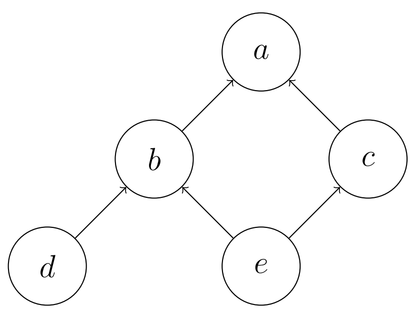
   b) ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?

   c) Si S es el conjunto de los divisores de 60, graficar el conjunto ordenado inducido por $|$ en S.

3. Yoneda Lemma: Probar que en un preorden $(P, \preceq)$ vale: $x \preceq y \iff \forall z : z \preceq x \Rightarrow z \preceq y$.

4. Sea A un conjunto arbitrario. Verificar que $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un conjunto ordenado. ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?

5. Sea $V = \{a, b, c, d, e\}$. El grafo dirigido de la siguiente figura define un orden en V de la siguiente manera: $x \preceq y \iff x = y$ o existe un xy-camino dirigido.



   a) Insertar el símbolo correcto $(\preceq, \succeq, \|)$ entre cada par de elementos:

1) $a \qquad e$.	3) $d \qquad a$.
2) $b \qquad c$.	4) $c \qquad d$.

   b) ¿Es un conjunto totalmente ordenado? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

6. Seam $(P, \preceq)$ un conjunto ordenado, X un conjunto, y $p : X \to P$ una función. Se define la relación H sobre elementos de X como $xHx' \iff p(x) \preceq p(x')$. ¿Que tipo de relación es H? Dar condiciones para que H sea un conjunto ordenado.

7. En $(Prop, D)$, donde $Prop$ son las fórmulas del cálculo proposicional y $\phi D \psi \iff \{\phi\} \vdash \psi$:

    a) Verificar si $(Prop, D)$ es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.

    b) ¿La realación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

8. En $(Prop, I)$, donde $\phi I \psi \iff \emptyset \vdash \phi \Rightarrow \psi$.

    a) Verificar si $(Prop, I)$ es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.

    b) ¿La realación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

    c) Explique el nexo entre esta relación y la del ejercicio anterior.

9. Sea $(P, \preceq)$ un preorden. Construir un conjunto ordenado $(P/\sim, \sqsubseteq)$, donde $x \sim y$ si y solo si $x \preceq y$ y $y \preceq x$, tal que $\pi : P \to P/\sim$ sea monótona.

    Aplicar esta construcción a la relación $(Prop, D)$ del ejercicio anterior. Para este caso partricular, la construcción se llama «álgrebra de Lindenbaum-Tarski».

10. Probar que:

    a) Si R define un orden en el conjunto V, entonces R^{-1} tambien define un orden en V, llamado «orden inverso».

    b) Si R define un orden total en el conjunto V, entonces R^{-1} tambien define un orden total en V.

    c) Si $(A, \preceq)$ es un orden no total, puede existir un $S \subseteq A$ tal que $(S, \preceq)$ es un orden total.

11. Sea $(P, \preceq)$ un preorden. Probar que si existe un elemento máximo, entonces todos los maximales son máximos.

12. Sean $(A, \preceq_1)$ y $(A, \preceq_2)$ dos conjuntos ordenados (con el mismo conjunto subyacente).

    a) ¿Define $\preceq_1 \cap \preceq_2$ un orden en A?

b) ¿Define $\preceq_1 \cup \preceq_2$ un orden en A?

13. Probar que el conjunto de todos los elementos maximales (minimales) de un conjunto ordenado, es una anticadena.

14. Considerar el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ y el de los enteros negativos $\mathbb{Z}^-$ con sus órdenes usuales. Probar que $\mathbb{Z}^+ \not\simeq \mathbb{Z}^-$.

15. Sea $(A, \preceq)$ un conjunto ordenado. Para todo elemento $a \in A$ definamos

$$S(a) = \{x \in A : x \preceq a\}$$

Si $\mathcal{A} = \{S(a) : a \in A\}$, ordenado por la inclusión, demostrar que $A \simeq \mathcal{A}$.

16. Sean $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ dos conjuntos ordenados

   a) COMPLETAR.

   b) Probar que son equivalentes:

      1) X e Y son isomorfos.
      2) COMPLETAR.
      3) COMPLETAR.

   c) COMPLETAR.

   d) COMPLETAR.

17. Sean $(X, \preceq_X)$ y $(Y, \preceq_Y)$ dos conjuntos ordenados. Una «conexión Galois» es un par de funciones

   a) COMPLETAR.

   b) COMPLETAR.

   c) COMPLETAR.

   d) COMPLETAR.

   e) COMPLETAR.

18. Probar que la relación de isomorfismo entre conjuntos ordenados es una relación de equivalencia.