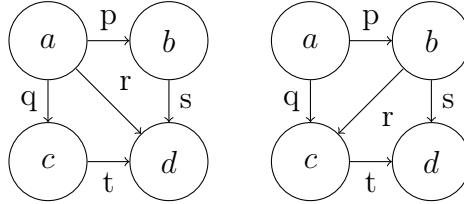


1. Considerar los siguientes diagramas. En ambos casos, probar que si los dos triángulos conmutan, también conmuta el cuadrado.



Solución

- Sabemos que $s \circ p = r$ y $t \circ q = r$ por lo tanto $s \circ p = r = t \circ q$, es decir que el cuadrado conmuta.
- Sabemos que $r \circ p = q$ y $t \circ r = s$ por lo tanto:

$$s \circ p = (t \circ r) \circ p = t \circ (r \circ p) = t \circ q$$

2. Sea P un conjunto ordenado. Mostrar que P puede considerarse como una categoría.

Solución Definimos:

- $ob \mathcal{P} = P$.
- $mor \mathcal{P} = \leq$.
- $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$.

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición:* La composición está bien definida pues si (b, c) y (a, b) son morfismos, por transitividad también lo será su composición (a, c) .
- *Morfismo identidad:* Para cada objeto a por reflexividad $(a, a) \in \leq$ por lo que $(a, a) \in mor \mathcal{P}$; a este morfismo lo llamaremos id_a resultando
 - $(a, b) \circ id_a = (a, b) \circ (a, a) = (a, b)$.
 - $id_a \circ (b, a) = (a, a) \circ (b, a) = (b, a)$.

- *Asociatividad*: Sean (a, b) , (b, c) y (c, d) morfismos, por transitividad también son morfismos $\boxed{(a, c)}$, $\boxed{(b, d)}$ y (a, d) luego
 - $((c, d) \circ (b, c)) \circ (a, b) = \boxed{(b, d)} \circ (a, b) = (a, d)$.
 - $(c, d) \circ ((b, c) \circ (a, b)) = (c, d) \circ \boxed{(a, c)} = (a, d)$.
3. Verificar que un monoide M define una categoría con un único objeto cuyas flechas son los elementos de M .

Solución Definimos:

- $ob \mathcal{M} = \{*\}$.
- $mor \mathcal{M} = M$.
- $x \circ y = x + y$.

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición*: Por clausura de monoides, si x e y son morfismos, también lo será su composición $x + y$.
- *Morfismo identidad*: Para el único objeto $*$ existe el morfismo $0 = id_*$ de manera tal que
 - $x \circ id_* = x + 0 = x$.
 - $id_* \circ y = 0 + y = y$.
- *Asociatividad*: Para tres morfismos x, y, z (elementos de M) por clausura de monoide también son morfismos $\boxed{x + y}$ y $\boxed{y + z}$, luego

$$(x \circ y) \circ z = \left(\boxed{x + y} \right) + z = x + \left(\boxed{y + z} \right) = x \circ (y \circ z)$$

4. Dada una categoría \mathcal{C} , podemos definir \mathcal{C}^{op} con los mismo objetos que \mathcal{C} pero las flechas con sentido inverso, es decir, $ob \mathcal{C}^{op} = ob \mathcal{C}$ y $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Verificar que \mathcal{C}^{op} es una categoría.

Solución Definamos:

- $mor \mathcal{C}^{op} = \{f_{op} : X \rightarrow Y / f : Y \rightarrow X \in mor \mathcal{C}\}$.
- $g_{op} \circ_{op} f_{op} = (f \circ g)_{op}$

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición:* Dadas $f_{op} : A \rightarrow B$ y $g_{op} : B \rightarrow C$ por definición existen en \mathcal{C} los morfismos $f : B \rightarrow A$ y $g : C \rightarrow B$ luego es válida la composición $f \circ g$ y por definición $(f \circ g)_{op}$ es un morfismo de \mathcal{C}^{op} .
- *Morfismo identidad:* Para cada objeto X sabemos que existe id_X , luego $id_{X_{op}}$ es un morfismo de la categoría opuesta para el cual
 - $f_{op} \circ_{op} id_{X_{op}} = (id_X \circ f)_{op} = f_{op}$.
 - $id_{X_{op}} \circ_{op} h_{op} = (h \circ id_X)_{op} = h_{op}$.
- *Asociatividad:* Sean $f_{op} : A \rightarrow B$, $g_{op} : B \rightarrow C$ y $h_{op} : C \rightarrow D$, luego
 - $(h_{op} \circ_{op} g_{op}) \circ_{op} f_{op} = (g \circ h)_{op} \circ_{op} f_{op} = f \circ (g \circ h)$.
 - $h_{op} \circ_{op} (g_{op} \circ_{op} f_{op}) = h_{op} \circ_{op} (f \circ g)_{op} = (f \circ g) \circ h$.

5. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías, se define $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ cuyos objetos son pares ordenados de la forma (C, D) con $C \in ob \mathcal{C}$, $D \in ob \mathcal{D}$ y además:

$$Hom_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C, D), (C', D')) = Hom_{\mathcal{C}}(C, C') \times Hom_{\mathcal{D}}(D, D')$$

Verificar que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una categoría.

Solución Definimos:

- $ob \mathcal{C} \times \mathcal{D} = ob \mathcal{C} \times ob \mathcal{D}$.
- $(p, q) \circ_{\times} (f, g) = (p \circ f, q \circ g)$.

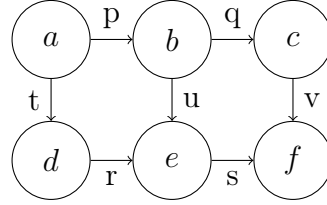
Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Morfismo identidad:* Para cada objeto $(C, D) \in ob \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ existen los objetos $C \in ob \mathcal{C}$ y $D \in ob \mathcal{D}$ y también los morfismos id_C e id_D , por lo que también existe el morfismo (id_C, id_D) para el cual
 - $(f, g) \circ_{\times} (id_C, id_D) = (f \circ id_C, g \circ id_D) = (f, g)$.
 - $(id_C, id_D) \circ_{\times} (f, g) = (id_C \circ f, id_D \circ g) = (f, g)$.

- *Asociatividad*: Sean $(f, g) : (C_1, C_2) \rightarrow (D_1, D_2)$, $(p, q) : (C_2, C_3) \rightarrow (D_2, D_3)$ y $(r, s) : (C_3, C_4) \rightarrow (D_3, D_4)$, luego
 - $((r, s) \circ_{\times} (p, q)) \circ_{\times} (f, g) = (r \circ p, s \circ q) \circ_{\times} (f, g) = (r \circ p \circ f, s \circ q \circ g)$.
 - $(r, s) \circ_{\times} ((p, q) \circ_{\times} (f, g)) = (r, s) \circ_{\times} (p \circ f, q \circ g) = (r \circ p \circ f, s \circ q \circ g)$.

6. Definamos C^{\rightarrow} como la categoría de las flechas de una categoría C , es decir, los objetos de C^{\rightarrow} son las flechas de C . Una flecha de C^{\rightarrow} de $f : A \rightarrow B$ en $g : D \rightarrow E$ es un par (a, b) de flechas de C tales que $g \circ a = b \circ f$.

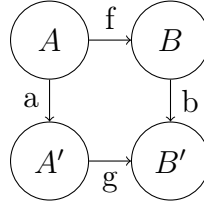
- a) Expresar las flechas de C^{\rightarrow} en términos de diagramas conmutativos.
- b) Probar que si en el diagrama los cuadrados conmutan, entonces también conmuta el rectángulo exterior:



- c) Utilizar el apartado anterior para definir la composición en C^{\rightarrow} .
- d) Verificar que C^{\rightarrow} es una categoría.

Soluciones

- a) El par (a, b) es una flecha de C^{\rightarrow} si el siguiente diagrama conmuta en C :

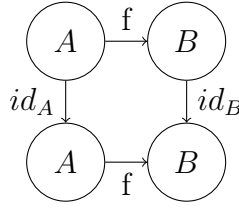


- b) Sabemos que $u \circ p = r \circ t$ y $v \circ q = s \circ u$ y queremos ver si $v \circ (q \circ p) = s \circ (r \circ t)$. Por asociatividad en C $v \circ (q \circ p) = (v \circ q) \circ p$, es decir $v \circ (q \circ p) = (s \circ u) \circ p = s \circ (u \circ p) = s \circ (r \circ t)$.

c) Para (r, p) y (s, q) como en el diagrama, definimos $(s, q) \circ (r, p)$ como $(s \circ r, q \circ p)$.

d)

- Para cada $f : A \rightarrow B$ en $ob C^{\rightarrow}$ definimos $id_f = (id_{dom(f)}, id_{cod(f)})$.
 - Observemos que id_f es una flecha de C^{\rightarrow} pues el siguiente diagrama conmuta:



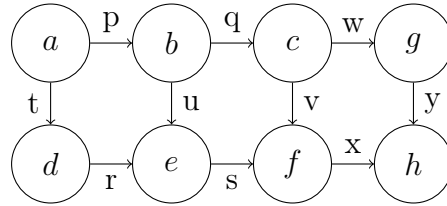
- Sean $a : A \rightarrow A'$ y $b : B \rightarrow B'$ como en el diagrama, luego:

$$(a, b) \circ id_f = (a \circ id_{dom(f)}, b \circ id_{cod(f)}) = (a, b)$$

- Análogamente sean $a : D \rightarrow A$ y $b : E \rightarrow B$, entonces:

$$id_f \circ (a, b) = (id_{dom(f)} \circ a, id_{cod(f)} \circ b) = (a, b)$$

- Sean (r, p) , (s, q) y (x, w) como en el siguiente diagrama:



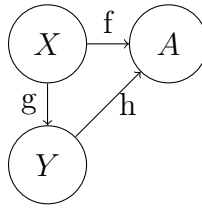
$$\begin{aligned}
 ((r, p) \circ (s, q)) \circ (x, w) &= (r \circ s, p \circ q) \circ (x, w) = ((r \circ s) \circ x, (p \circ q) \circ w) = \\
 &= (r \circ (s \circ x), p \circ (q \circ w)) = (r, p) \circ (s \circ x, q \circ w) = (r, p) \circ ((s, q) \circ (x, w))
 \end{aligned}$$

7. Sean C una categoría y A un objeto de C . Definimos $C|A$ como la categoría cuyos objetos son las flechas f de C tales que $cod(f) = A$. Una flecha g en $C|A$ de $f : X \rightarrow A$ en $h : Y \rightarrow A$ es una flecha $g : X \rightarrow Y$ de C tal que $f = h \circ g$.

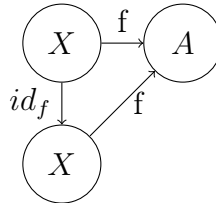
- a) Expresar las flechas de $C|A$ en términos de diagramas conmutativos.
- b) Verificar que $C|A$ es una categoría.
- c) Si P es la categoría definida por un conjunto ordenado y $x \in P$, determinar $P|x$.

Soluciones

- a) Si el siguiente diagrama conmuta en C , entonces g es una flecha de $C|A$.

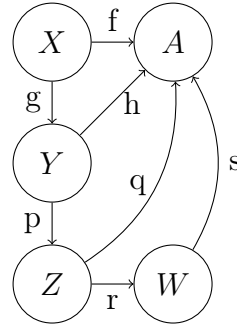


- b)
 - Dados dos morfismos $g : X \rightarrow Y$ y $p : Y \rightarrow Z$ en $C|A$ definimos la composición en $C|A$ como la composición en C y para cada objeto $f : X \rightarrow A$ definimos el morfismo $id_f = id_{dom(f)}$.
 - Observemos que $id_{dom(f)}$ es un morfismo de la categoría pues el siguiente diagrama conmuta:



- Una flecha α que parte de f debe tener tipo $X \rightarrow Y$, luego $\alpha \circ id_f = \alpha$.
- Una flecha β que llega a f debe tener tipo $W \rightarrow X$, luego $id_f \circ \beta = \beta$.

- Sean g, p, q como en el siguiente diagrama conmutativo:



luego $(r \circ p) \circ g = r \circ (p \circ g)$ por asociatividad en C .

c) COMPLETAR.

- Probar que en Set los monomorfismos (epimorfismos) son exactamente las funciones inyectivas (respectivamente sobreyectivas).

Solución

■

- \Rightarrow : Sea $f : B \rightarrow C$ un monomorfismo, luego para cualquier conjunto A y funciones $g, h : A \rightarrow B$ sabemos que:

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

Supongamos que f no es inyectiva, es decir que existen $b_1 \neq b_2 \in B$ tales que $f(b_1) = f(b_2)$. Definimos funciones constantes g, h tales que $g(x) = b_1$ y $h(x) = b_2$, luego:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(b_1) = f(b_2) = f(h(x)) = f \circ h(x)$$

y como f es monomorfismo resulta $g = h$ lo cual es una contradicción pues $g(x) = b_1 \neq b_2 = h(x)$.

- $\boxed{\Leftarrow}$: Sea $f : B \rightarrow C$ una función inyectiva, luego sabemos que $f(b_1) = f(b_2) \iff b_1 = b_2$. Para $g, h : A \rightarrow B$ tales que $f \circ g = f \circ h$ resulta:

$$f \circ g(x) = f \circ h(x) \iff f(g(x)) = f(h(x)) \iff g(x) = h(x)$$

■

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sea $f : A \rightarrow B$ un epimorfismo, luego para cualquier conjunto C y funciones $g, h : B \rightarrow C$ sabemos que:

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

Supongamos que f no es sobreyectiva, es decir que existe $b \in B$ tal que $f(x) \neq b$ (para cualquier x). Definimos g, h iguales salvo en b donde $g(b) = c_1$ y $h(b) = c_2$, luego:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = h(f(x)) = h \circ f(x)$$

y como f es un epimorfismo resulta $g = h$ lo cual es una contradicción.

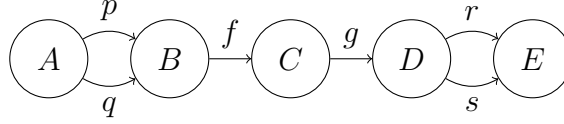
- $\boxed{\Leftarrow}$: Sea $f : A \rightarrow B$ una función sobreyectiva y sean dos funciones $g, h : B \rightarrow C$ tales que $g \circ f = h \circ f$. Supongamos que $g \neq h$, luego existe $f(x) \in B$ tal que $g(f(x)) \neq h(f(x))$ lo cual es una contradicción pues:

$$g \circ f(x) = h \circ f(x) \iff g(f(x)) = h(f(x))$$

9. Sean C una categoría y f, g flechas de C . Probar que:

- Si f y g son monomorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.
- Si $g \circ f$ es un monomorfismo, f también lo es.
- Si f y g son epimorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.
- Si $g \circ f$ es un epimorfismo, g también lo es.
- Si f^{-1} es la inversa de f y g^{-1} es la inversa de g , entonces $f^{-1} \circ g^{-1}$ es la inversa de $g \circ f$.

Soluciones Sean f, g, p, q, r, s como en el siguiente diagrama:



- a) Supongamos $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q$ luego por asociatividad resulta $g \circ (f \circ p) = g \circ (f \circ q)$ y como g es monomorfismo $f \circ p = f \circ q$. Nuevamente como f es monomorfismo tenemos $p = q$. En definitiva: $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q \Rightarrow p = q$, es decir, $g \circ f$ es monomorfismo.
- b) Supongamos $f \circ p = f \circ q$, luego $g \circ (f \circ p) = g \circ (f \circ q)$ y por asociatividad $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q$. Como $g \circ f$ es monomorfismo resulta $p = q$. En definitiva: $f \circ p = f \circ q \Rightarrow p = q$.
- c) Supongamos $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f)$ luego por asociatividad resulta $(r \circ g) \circ f = (s \circ g) \circ f$ y como f es epimorfismo $r \circ g = s \circ g$. Nuevamente como g es epimorfismo tenemos $r = s$. En definitiva: $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f) \Rightarrow r = s$, es decir, $(g \circ f)$ es epimorfismo.
- d) Supongamos $r \circ g = s \circ g$, luego $(r \circ g) \circ f = (s \circ g) \circ f$ y por asociatividad $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f)$. Como $g \circ f$ es epimorfismo resulta $r = s$. En definitiva: $r \circ g = s \circ g \Rightarrow r = s$.
- e) Sabemos que:

$$\begin{array}{ll}
 \blacksquare f \circ f^{-1} = id_C. & \blacksquare g \circ g^{-1} = id_D. \\
 \blacksquare f^{-1} \circ f = id_B. & \blacksquare g^{-1} \circ g = id_C.
 \end{array}$$

Ahora:

$$\begin{array}{ll}
 \blacksquare (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_D. \\
 \blacksquare (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_C \circ f = f^{-1} \circ f = id_B.
 \end{array}$$

10. Mostrar que una flecha de una categoría puede ser monomorfismo y epimorfismo y no isomorfismo.

Solución Consideremos en Mon el morfismo $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f(n) = n$. Observemos que $n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$.

- Monomorfismo: Sean $g, h : M \rightarrow \mathbb{N}_0$ morfismos tales que $f \circ g = f \circ h$ y supongamos existe $m \in M$ tal que $g(m) \neq h(m)$, luego:

$$f \circ g(m) = f \circ h(m) \iff f(g(m)) = f(h(m))$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto f es monomorfismo.

- Epimorfismo: Sean $g, h : \mathbb{Z} \rightarrow M$ morfismos tales que $g \circ f = h \circ f$ y supongamos existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $g(z) \neq h(z)$, luego:

$$g \circ f(z) = h \circ f(z) \iff g(f(z)) = h(f(z))$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto f es epimorfismo.

- Isomorfismo: Supongamos que existe $f^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{Z}}$ y $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{N}_0}$. En particular para $n \geq 0$ sabemos que $f^{-1}(n) = n$, luego:

$$0 = f^{-1}(0) = f^{-1}(-n + n) = f(-n)^{-1} + f(n)^{-1} = f(-n)^{-1} + n$$

por lo que $f(-n)^{-1} = -n$ lo cual es absurdo ya que $-n \notin \mathbb{N}_0$. Por lo tanto f no es isomorfismo.

11. Mostrar que una flecha de una categoría concreta puede ser epimorfismo y no sobreyectiva.

Solución La misma función del ejercicio anterior cumple dichas características.

12. Mostrar que dos objetos terminales en una categoría son isomorfos. Por dualidad: ¿qué se puede decir de los objetos iniciales?

Solución Sean 1 y $1'$ dos elementos terminales de una categoría. Por ser 1 terminal, existe un único morfismo $f : 1' \rightarrow 1$ y análogamente existe un único morfismo $g : 1 \rightarrow 1'$. Como $1'$ es terminal existe un único morfismo de $1'$ en $1'$ luego $f \circ g : 1' \rightarrow 1'$ debe ser $id_{1'}$. Análogamente para $g \circ f$.

Dos objetos iniciales en una categoría son isomorfos.

13. ¿Cuáles son los objetos iniciales y terminales en $Set \times Set$? ¿Cuáles en Set^{\rightarrow} ?

Solución

- $Set \times Set$:
 - Iniciales: (\emptyset, \emptyset) .
 - Terminales: $(\{x\}, \{y\})$.
 - Set^{\rightarrow} :
 - Iniciales: $0 : \emptyset \rightarrow \emptyset$.
 - Terminales: $f : \{x\} \rightarrow \{y\}$.
14. Dar una categoría sin objetos iniciales. Dar una sin objetos finales. Dar una donde los objetos finales e iniciales coincidan.

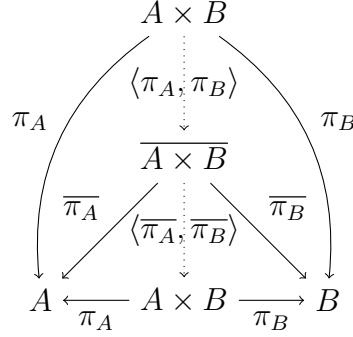
Solución

- La categoría del poset (\mathbb{Z}^-, \leq) no tiene objetos iniciales.
 - La categoría del poset (\mathbb{Z}^+, \leq) no tiene objetos finales.
 - El monoide trivial es una categoría cuyo único objeto es final e inicial.
15. Sea \mathcal{C} una categoría. Probar que si dos objetos admiten producto (co-producto), éste es único salvo isomorfismo.

Solución Sean A y B dos objetos con productos $A \times B$ (con proyecciones π_A y π_B) y $\overline{A} \times \overline{B}$ (con proyecciones $\overline{\pi}_A$ y $\overline{\pi}_B$).

Como $A \times B$ es producto sabemos que para cualquier objeto C y par de funciones $f : C \rightarrow A$ y $g : C \rightarrow B$ (en particular para $\overline{A} \times \overline{B}$ y sus proyecciones) existe un único morfismo $\langle \overline{\pi}_A, \overline{\pi}_B \rangle : \overline{A} \times \overline{B} \rightarrow A \times B$ tal que $\pi_A \circ \langle \overline{\pi}_A, \overline{\pi}_B \rangle = \overline{\pi}_A$ y $\pi_B \circ \langle \overline{\pi}_A, \overline{\pi}_B \rangle = \overline{\pi}_B$.

Análogamente existe un único morfismo $\langle \pi_A, \pi_B \rangle : A \times B \rightarrow \overline{A} \times \overline{B}$ tal que $\overline{\pi}_A \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_A$ y $\overline{\pi}_B \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_B$.



Sabemos que entre $A \times B$ y $A \times B$ existe un único morfismo f tal que $\pi_A \circ f = \pi_A$ y $\pi_B \circ f = \pi_B$. Veamos que $\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle$ cumple estas propiedades:

$$\pi_A \circ (\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle) = (\pi_A \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle) \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \overline{\pi_A} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_A$$

$$\pi_B \circ (\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle) = (\pi_B \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle) \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \overline{\pi_B} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_B$$

Como $id_{A \times B}$ también cumple dichas propiedades, entonces debe ser $id_{A \times B} = \langle \pi_A, \pi_B \rangle \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle$. Análogamente $\langle \pi_A, \pi_B \rangle \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle = id_{A \times B}$.

16. Sea P un poset. Determina objetos iniciales, objetos terminales, productos y coproductos en las siguientes categorías:

- Poset*.
- Set*.
- Mon*.
- Grp*.

Soluciones

- Poset*:

- Iniciales: $0 = (\emptyset, \emptyset)$.
- Terminales: $1 = (\{x\}, \Delta)$.
- Productos: $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B) = ((A \times B, \leq_A \wedge \leq_B), fst, snd)$.
- Coproductos: $A + B = \text{COMPLETAR}$.

b) *Set*:

- Iniciales: $0 = \emptyset$.
- Terminales: $1 = \{x\}$.
- Productos: $A \times B = (A \times B, fst, snd)$.
- Coproductos: $A + B = (A \uplus B, \times \{0\}, \times \{1\})$.

c) *Mon*:

- Iniciales: $0 = (\{e\}, \oplus)$
- Terminales: $1 = 0$.
- Productos: $(A, \oplus) \times (B, \otimes) = ((A \times B,), ,)$ COMPLETAR.
- Coproductos: $(A, \oplus) + (B, \otimes) = ((,), ,)$ COMPLETAR.

d) *Grp*:

- Iniciales: $0 = (\{e\}, \oplus)$
- Terminales: $1 = 0$.
- Productos: $(A, \oplus) \times (B, \otimes) = ((,), ,)$ COMPLETAR.
- Coproductos: $(A, \oplus) + (B, \otimes) = ((,), ,)$ COMPLETAR.

17. Dar una categoría donde algún par de objetos carecen de producto.

Solución (\mathbb{Q}, \leq) .

18. Sea \mathcal{C} una categoría y sean A, B, C, D objetos de \mathcal{C} . Mostrar que en caso de existir $A \times B, C \times D$ y dos morfismos $f : A \rightarrow C$ y $g : B \rightarrow D$, entonces puede definirse un morfismo $f \times g : A \times B \rightarrow C \times D$.

Solución

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\
 f \downarrow & & \downarrow \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle & & \downarrow g \\
 C & \xleftarrow{\pi_3} & C \times D & \xrightarrow{\pi_4} & D
 \end{array}$$

Dicho morfismo existe pues lo garantiza la propiedad universal de $C \times D$.

19. Mostrar las siguientes identidades:

- a) $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id.$
- b) $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h.$
- c) $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle.$
- d) $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k).$
- e) $\langle [f, g], [h, k] \rangle = [\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle].$

Soluciones

- a) Sabemos que $\langle \pi_A, \pi_B \rangle$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \times B & & \\
 & \swarrow \pi_A & \downarrow \langle \pi_A, \pi_B \rangle & \searrow \pi_B & \\
 A & \xleftarrow{\pi_A} & A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B
 \end{array}$$

Observemos que id hace conmutar el diagrama pues $\pi_B \circ id = \pi_B$ y $\pi_A \circ id = \pi_A$; y como solo existe un morfismo con esa propiedad, debe ser $id = \langle \pi_A, \pi_B \rangle$.

- b) Sabemos que $\langle f, g \rangle$ es el único morfismo que hace conmutar el diagrama interior:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & & \downarrow h & & \\
 & & D & & \\
 & \swarrow f & \downarrow \langle f, g \rangle & \searrow g & \\
 A & \xleftarrow{\pi_A} & A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B
 \end{array}$$

Además sabemos que el único morfismo que hace conmutar el diagrama exterior es $\langle f \circ h, g \circ h \rangle$. Veamos entonces que $\langle f, g \rangle$ también conmuta el diagrama exterior:

- $\pi_B \circ (\langle f, g \rangle \circ h) = (\pi_B \circ \langle f, g \rangle) \circ h = g \circ h.$
- $\pi_A \circ (\langle f, g \rangle \circ h) = (\pi_A \circ \langle f, g \rangle) \circ h = f \circ h.$

- c) COMPLETAR.
d) COMPLETAR.
e) COMPLETAR.

20. Probar los siguientes isomorfismos:

- a) $A \times B \cong B \times A.$
b) $A \times 1 \cong A.$
c) $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C.$
d) ¿Cuales son los enunciados duales?

Soluciones

- a) Sean $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ y $(B \times A, \pi_3, \pi_4)$ dos productos. Como $A \times B$ es producto sabemos que existe un único morfismo $\langle \pi_4, \pi_3 \rangle$ entre $B \times A$ y $A \times B$ tal que $\pi_1 \circ \langle \pi_4, \pi_3 \rangle = \pi_4$ y $\pi_2 \circ \langle \pi_4, \pi_3 \rangle = \pi_3$.

Análogamente un único morfismo $\langle \pi_2, \pi_1 \rangle$ entre $A \times B$ y $B \times A$ tal que $\pi_3 \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle = \pi_2$ y $\pi_4 \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle = \pi_1$:

$$\begin{array}{ccc}
 & B \times A & \\
 \pi_4 \swarrow & \vdots & \searrow \pi_3 \\
 A \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} B \\
 & \langle \pi_4, \pi_3 \rangle &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & A \times B & \\
 \pi_2 \swarrow & \vdots & \searrow \pi_1 \\
 B \xleftarrow{\pi_3} & B \times A & \xrightarrow{\pi_4} A \\
 & \langle \pi_2, \pi_1 \rangle &
 \end{array}$$

También sabemos que existe un único morfismo entre $A \times B$ y si mismo que hace conmutar el diagrama, por lo que este debe ser el morfismo identidad. Análogamente para $B \times A$.

Como el morfismo identidad es el único morfismo entre $A \times B$ y si mismo que hace conmutar el diagrama y $\langle \pi_4, \pi_3 \rangle \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle$ también tiene esta propiedad, entonces se trata del mismo morfismo. Análogamente para $B \times A$.

- b) Por ser $A \times 1$ producto y 1 elemento terminal, sabemos que existen los siguientes morfismos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \swarrow id_A & \vdots & \searrow g & \\
 A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times 1 & \xrightarrow{\pi_2} & 1
 \end{array}$$

donde $\boxed{\pi_1 \circ \langle id_A, g \rangle = id_A}$.

Ademas observemos que:

- $\pi_1 \circ (\langle id_A, g \rangle \circ \pi_1) = (\pi_1 \circ \langle id_A, g \rangle) \circ \pi_1 = id_A \circ \pi_1 = \pi_1$
- $\pi_2 \circ (\langle id_A, g \rangle \circ \pi_1) = \pi_2$

por lo que $\boxed{\langle id_A, g \rangle \circ \pi_1 = id_{A \times 1}}$.

- c) COMPLETAR.

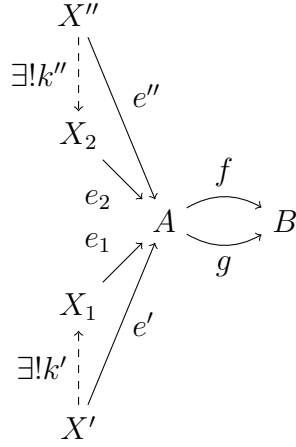
d)

- $A + B \cong B + A$.
- $A + 0 \cong A$.
- $A + (B + C) \cong (A + B) + C$.

21. Probar que si dos morfismos $f, g : X \rightarrow Y$ admiten egalizador (coegalizador), éste es único salvo isomorfismo.

Solución Sean $e_1 : X_1 \rightarrow A$ y $e_2 : X_2 \rightarrow A$ dos ecualizadores de $f, g : A \rightarrow B$, luego sabemos:

- a) $f \circ e_1 = g \circ e_1$.
- b) $f \circ e_2 = g \circ e_2$.
- c) $\forall e' : X' \rightarrow A$ para el cual $f \circ e' = g \circ e'$ existe un único $k' : X' \rightarrow X_1$ tal que $e_1 \circ k' = e'$.
- d) $\forall e'' : X'' \rightarrow A$ para el cual $f \circ e'' = g \circ e''$ existe un único morfismo $k'' : X'' \rightarrow X_2$ tal que $e_2 \circ k'' = e''$.



Por c), sabemos que para $e' = e_2$ existe un único $k' : X_2 \rightarrow X_1$ tal que $e_1 \circ k' = e_2$ y análogamente por d), existe un único $k'' : X_1 \rightarrow X_2$ tal que $e_2 \circ k'' = e_1$. Tenemos entonces:

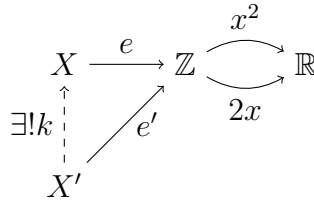
$$e_2 = e_1 \circ k' = e_2 \circ (k'' \circ k)' \Rightarrow k'' \circ k' = id_{X_2}$$

$$e_1 = e_2 \circ k'' = e_1 \circ (k' \circ k'') \Rightarrow k' \circ k'' = id_{X_1}$$

por lo que ambos ecualizadores son isomorfismos.

22. Encontrar el ecualizador en Set .

Solución Veamos primero un ejemplo:



Observemos el conjunto de valores para los cuales $f = g$: $X = \{0, 2\}$, luego el morfismo $e(x) = x$ cumple trivialmente la conmutatividad.

Consideremos además $e' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $e'(2x) = 2$ y $e'(2x + 1) = 0$, es evidente que este morfismo también conmuta el diagrama.

Intentemos definir un morfismo $k : \mathbb{N} \rightarrow X$ tal que $e \circ k = e'$, es decir: $e(k(x)) = e'(x) \iff k(x) = e'(x)$, por lo que esta es la única forma de definirlo.

En definitiva el ecualizador de dos funciones $f, g : A \rightarrow B$ es:

$$e : \{a \in A : f(a) = g(a)\} \hookrightarrow B$$

23. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos morfismos en *Set*. Probar que el coequalizador de f y g es el cociente de Y por la relación de equivalencia $y \equiv z$ si y sólo si existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ y $z = g(x)$ o bien $y = g(x)$ y $z = f(x)$.

Solución COMPLETAR.

24. Probar que en una categoría \mathcal{C} todo ecualizador e es un monomorfismo. Mostrar que si además e es epimorfismo, entonces se tiene un isomorfismo.

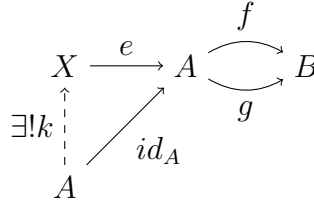
Solución Sea $e : X \rightarrow A$ ecualizador de $f, g : A \rightarrow B$, luego $f \circ e = g \circ e$. Consideremos además dos morfismos $k', k'' : X' \rightarrow X$ para los cuales $e \circ k' = e \circ k''$:

$$\begin{array}{ccccc} & & & f & \\ & & & \curvearrowright & \\ X & \xrightarrow{e} & A & & B \\ & \uparrow k' & \uparrow k'' & \curvearrowleft g & \\ & X' & & & \end{array}$$

Si definimos $e' := e \circ k'$ tenemos que $\boxed{f \circ e'} = f \circ e \circ k' = g \circ e \circ k' = \boxed{g \circ e'}$ lo que implica por propiedad universal de ecualizadores que k' es el único morfismo para el cual $e \circ k' = e'$, sin embargo también ocurre que $e \circ k'' = e'$; luego k' y k'' deben ser el mismo morfismo, de donde concluimos que e es monomorfismo.

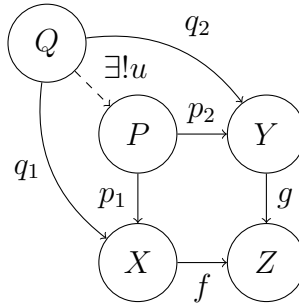
Supongamos que además de monomorfismo también es epimorfismo, luego como $f \circ e = g \circ e$ resulta $f = g$.

Si también consideramos que $f \circ id_A = f = g = g \circ id_A$, sabemos que existe un único morfismo $k : A \rightarrow X$ tal que $e \circ k = id_A$.



Como $\boxed{e \circ id_X} = e = id_A \circ e = (e \circ k) \circ e = \boxed{e \circ (k \circ e)}$ y e es monomorfismo, resulta $k \circ e = id_X$.

25. El *pullback* de dos morfismos $f : X \rightarrow Z$ y $g : Y \rightarrow Z$ consiste en un objeto P junto con dos morfismos $p_1 : P \rightarrow X$, $p_2 : P \rightarrow Y$ tal que $f \circ p_1 = g \circ p_2$, y además si existe otro objeto Q con dos morfismos $q_1 : Q \rightarrow X$, $q_2 : Q \rightarrow Y$ tal que $f \circ q_1 = g \circ q_2$, entonces existe un único morfismo $u : Q \rightarrow P$ tal que $p_1 \circ u = q_1$ y $p_2 \circ u = q_2$. A continuación, un diagrama que muestra la situación:



Probar que el pullback de dos morfismos, si existe, es único salvo isomorfismo.

Solución COMPLETAR.

26. Encontrar el pull-back en Set .

Solución $P = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$, $p1 = fst$, $p2 = snd$.

27. Sea \mathcal{C} una categoría con exponenciales.

- a) Probar $curry(eval_{A,B}) = id_{B^A}$.
- b) Dado un morfismo $f : B \rightarrow C$, construir un morfismo $B^S \rightarrow C^S$.
- c) Dado un morfismo $f : S \rightarrow C^B$, construir un morfismo $uncurry(f) : S \times B \rightarrow C$.
- d) Probar $uncurry(curry(f)) = f$ y $curry(uncurry(f)) = f$.

Soluciones

- a) Como B^A es un exponencial, sabemos que para cualquier morfismo $g : C \times A \rightarrow B$ (en particular para ε) existe un único morfismo $\tilde{\varepsilon} : B^A \rightarrow B^A$ tal que $\varepsilon \circ (\tilde{\varepsilon} \times id_A) = \varepsilon$:

$$\begin{array}{ccccc} \exists! \tilde{\varepsilon} : B^A & B^A \times A & \xrightarrow{\varepsilon} & B & B^A \xleftarrow{\pi_1} B^A \times A \xrightarrow{\pi_2} A \\ & \tilde{\varepsilon} \times id_A \uparrow & \nearrow \varepsilon & & \tilde{\varepsilon} \downarrow \quad \tilde{\varepsilon} \times id_A \downarrow \quad id_A \downarrow \\ & B^A \times A & & B^A \xleftarrow{\pi_1} B^A \times A \xrightarrow{\pi_2} A \end{array}$$

Puesto que id_{B^A} también tiene esa propiedad, entonces $\tilde{\varepsilon} = id_{B^A}$.

- b)

$$\begin{array}{ccc} & C^S & \\ \widetilde{f \circ \varepsilon_{SB}} \uparrow & & \\ B^S & & C^S \times S \xrightarrow{\varepsilon_{SC}} C \\ & \nearrow f \circ \varepsilon_{SB} & \\ & B^S \times S & \end{array}$$

c) Por ser $C^B \times B$ un producto existe $f \times id_B$:

$$\begin{array}{ccccc} S & \xleftarrow{\pi_3} & S \times B & & \\ f \downarrow & & \exists! \downarrow & \searrow \pi_4 & \\ C^B & \xleftarrow{\pi_1} & C^B \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \end{array}$$

luego $uncurry(f) := \varepsilon \circ (f \times id_B) : S \times B \rightarrow C$.

d)

- Sean $f : S \rightarrow C^B$, y $h := uncurry(f) = \varepsilon \circ (f \times id_B)$. Como C^B es exponencial entonces para $uncurry(f)$ existe un único morfismo $\tilde{h} : S \rightarrow C^B$ para el cual $\varepsilon \circ (\tilde{h} \times id_B) = h$ y como también $\varepsilon \circ (f \times id_B) = h$ entonces $\tilde{h} \times id_B = f \times id_B$ por lo que $\tilde{h} = f$, es decir: $curry(uncurry(f)) = f$.
- Sea $f : S \times B \rightarrow C$. Como C^B es exponencial entonces para f existe un único morfismo $\tilde{f} : S \rightarrow C^B$ para el cual $\varepsilon \circ (\tilde{f} \times id_B) = f$, luego $uncurry(\tilde{f}) = \varepsilon \circ (\tilde{f} \times id_B) = f$.

28. Sea \mathcal{C} una CCC y sean A, B objetos de \mathcal{C} . Probar:

- a) B^A es único salvo isomorfismo.
- b) $1^A \cong 1$.
- c) $B^1 \cong B$.

Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.

29. Hallar los exponenciales en Set .

Solución $B^A = Hom(A, B)$.

30. Demostrar que un álgebra de Boole es una CCC.

Solución Un álgebra de Boole es un retículo acotado distributivo con complementos. Consideremos entonces la categoría inducida por el poset.

- En dicha categoría el producto corresponde al ínfimo, luego por ser retículo existe el producto para cualquier par de elementos.
- Por ser acotado tiene mínimo y máximo luego en la categoría corresponden al objeto inicial y terminal.

Veremos ahora que si C es complemento de B entonces C^B es exponencial.

$$\begin{array}{ccc} C^B & & C^B \wedge B \rightarrow C \\ \uparrow & & \uparrow \nearrow \\ A & & A \wedge B \end{array}$$

Sabemos que $C \vee B = 1$ y $C \wedge B = 0$. Debemos ver que:

- $C^B \wedge B \leq C$: COMPLETAR.
- $A \wedge B \leq C \Rightarrow A \wedge B \leq C^B \wedge B$: COMPLETAR.
- $A \wedge B \leq C \Rightarrow A \leq C^B$: COMPLETAR.

31. En una categoría con coproductos y objeto final, podemos definir los booleanos como el objeto $Bool = 1 + 1$. En este caso, a i_1 le llamamos *true* y a i_2 le llamamos *false*. Escribimos un morfismo $not : Bool \rightarrow Bool$ tal que:

$$not \circ true = false$$

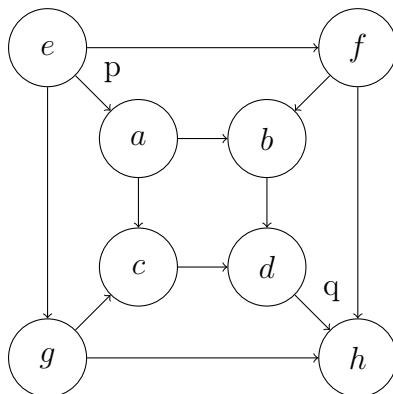
$$not \circ false = true$$

Suponiendo que la categoría tiene exponenciales: ¿puede escribir un morfismo $and : Bool \times Bool \rightarrow Bool$ que se comporte como la conjunción?

Solución COMPLETAR.

Ejercicios adicionales

1. Considerar que en el siguiente diagrama los 4 trapecios conmutan.



Probar que:

- a) Si el cuadrado interno conmuta, también lo hace el cuadrado externo.
- b) Si p es epimorfismo y q es monomorfismo, entonces si el cuadrado externo conmuta, también lo hace el cuadrado interno.

Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.

2. Sea \mathcal{C} con 0. Verificar que si un morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} admite núcleo (conúcleo), éste es único salvo isomorfismo.

Solución COMPLETAR.

3. Sean \mathcal{C} una categoría con 0 y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo en \mathcal{C} . Probar que $p : Y \rightarrow C$ es un conúcleo de f en \mathcal{C} si y solo si p^{op} es un núcleo de f^{op} en \mathcal{C}^{op} .

Solución COMPLETAR.

4. Sean \mathcal{C} un categoría con 0 y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo en \mathcal{C} . Probar que $\ker(f)$ ($\operatorname{coker}(f)$) coincida con el igualizador (coequalizador) de f y 0.

Solución COMPLETAR.

5. Un ωCPO es un conjunto ordenado con mínimo (notado \perp) tal que toda cadena ascendente numerable $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \dots$ (que notamos $\{a_i\}_{i=0}^\infty$) tiene un supremo $\sqcup \{a_i\}_{i=0}^\infty$. Una función monótona entre dos ωCPO es continua si $f(\sqcup \{a_i\}_{i=0}^\infty) = \sqcup \{f(a_i)\}_{i=0}^\infty$ para toda cadena ascendente numerable $\{a_i\}_{i=0}^\infty$.
- a) Probar que podemos armar una categoría cuyos objetos son ωCPO y cuyas flechas son funciones continuas.
 - b) ¿Esta categoría tiene productos? En caso afirmativo, describirlos.
¿Y coproductos?

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.