Funtores

1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Probar que $P_1 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $P_1(C, D) = C$ y $P_2 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ tal que $P_2(C, D) = D$ definen functores.

   Solución COMPLETAR.

2. Dado un conjunto X, definimos el conjunto $List(X)$ de la listas finitas de elementos de X. Probar que $List : Set \to Set$ es un funtor. Considerando ahora $List(X)$ como un monoide, probar que $List : Set \to Mon$ es un funtor. Determinar si $List$ preserva productos. *Ayuda*: pensar en cual monoide es isomorfo a $List(X)$ cuando X es un conjunto con un solo elemento.

   Solución COMPLETAR.

3. Se ha visto que puede considerarse a un monoide como una categoría con un único objeto, ¿Qué es un funtor entre dos categorías de este tipo? ¿Y entre categorías formadas a partir de conjuntos ordenados?

   Solución COMPLETAR.

4. Dados dos funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, definir un funtor que componga ambos. ¿Es posible definir una categoría cuyos objetos sean las categorías y sus flechas sean los funtores entre estas?

   Solución COMPLETAR.

5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos, coproductos y exponenciales; y $A \in ob\,\mathcal{C}$. Probar que las siguientes aplicaciones pueden extenderse con estructura funtorial:

   a) COMPLETAR.
   b) COMPLETAR.
   c) COMPLETAR.
   d) COMPLETAR.

e) COMPLETAR.

f) COMPLETAR.

g) COMPLETAR.

h) COMPLETAR.

Soluciones

a) $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tal que $\Delta(B) = (B, B)$.

b) COMPLETAR.

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

e) COMPLETAR.

f) COMPLETAR.

g) COMPLETAR.

h) COMPLETAR.

6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña, para cada objeto X de $\mathcal{C}$ definimos $Hom(X, -) : \mathcal{C} \to Set$ donde $Hom(X, -)(Y) = Hom(X, Y)$ y $Hom(X, -)(f) = Hom(X, f)$. Probar que $Hom(X, -)$ es efectivamente un funtor para cada X. Definir análogamente un funtor $Hom(-, X)$.

   Solución COMPLETAR.

7. Si $f : A \to B$ en Set, entonces definimos $f^{-1}(X) = \{a \in A : f(a) \in X\}$ donde $X \subseteq B$. Probar que $I : Set \to Set$ es un funtor contravariante, llevando: $I(A) = \mathcal{P}(A)$ y $I(f) = f^{-1}$.

   Solución COMPLETAR.

8. Dado un semigurpo $(S, \cdot)$, podemos construir un monoide $(S', \cdot')$ donde $S' = S \uplus \{e\}$, $(0, x) \cdot' (0, y) = (0, x \cdot y)$ y $(1, e) \cdot' x = x = x \cdot' (1, e)$. Utilizando esta construcción, definir un funtor $F : Sem \to Mon$ y probar que es un monomorfismo en Cat.

Solución COMPLETAR.

9. Probar o refutar: sea C una categoría con productos, y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un functor, entonces siempre existe un único morfismo $F(A \times B) \to FA \times FB$.

   Solución COMPLETAR.

10. Sea $U : Mon \to Set$ el functor que olvida la estructura de monoide. Definimos además $U^2 : Mon \to Set$ que en objetos actúa llevando $(X, \otimes, e) \mapsto X \times X$. Probar que a U^2 se lo puede denotar de estructura functorial.

    Solución COMPLETAR.

Transformaciones naturales

Adjunciones

Monadas

Lema de Yoneda

Ejercicios adicionales

1. Definimos la asignación $Fr : Set \to Mon$ tal que $Fr(X) = X^*$ [1] y $Fr(f)(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)$. Usando el funtor $U : Mon \to Set$ que se olvida de la estructura de monoide, consideramos $i : X \to U(Fr(X))$ la función que lleva un elemento x de X a la palabra x.

   a) Probar que Fr es un funtor.

[1] X^* es el monoide de las palabras sobre el alfabeto X con la concatenación como operación. Puede pensar en las palabras de X como las listas de elementos de X.

b) Probar que dado $f : X \to U(M)$ en Set donde M es un monoide, puedo construir una única $\overline{f} : Fr(X) \to M$ en Mon tal que $U\left(\overline{f}\right) \circ i = f$ en Set[2].

c) ¿A cuál monoide es isomorfo $Fr(X)$ donde X es un conjunto de un solo elemento?

d) ¿Este funtor preserva productos?

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

[2]Cuando un monoide como $Fr(X)$ satisface esta propiedad, decimos que es el monoide libre sobre X.