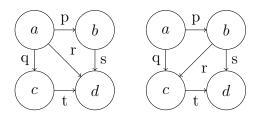
1. Considerar los siguientes diagramas. En ambos casos, probar que si los dos triángulos conmutan, también conmuta el cuadrado.



Solución

- Sabemos que $s \circ p = r$ y $t \circ q = r$ por lo tanto $s \circ p = r = t \circ q$, es decir que el cuadrado conmuta.
- \bullet Sabemos que $r \circ p = q$ y $t \circ r = s$ por lo tanto:

$$s \circ p = (t \circ r) \circ p = t \circ (r \circ p) = t \circ q$$

2. Sea ${\cal P}$ un conjunto ordenado. Mostrar que ${\cal P}$ puede considerarse como una categoría.

Solución Para (P, \leq) definimos:

$$\bullet$$
 $ob \mathcal{P} = P$.

$$cod(a,b) = b.$$

$$\blacksquare mor \mathcal{P} = \leq .$$

$$\bullet \ dom(a,b) = a.$$

•
$$(b,c) \circ (a,b) = (a,c).$$

Luego:

■ Para cada objeto a por reflexividad $(a, a) \in \leq$ por lo que $(a, a) \in mor \mathcal{P}$; a este morfismo lo llamaremos id_a resultando:

•
$$(a,b) \circ id_a = (a,b) \circ (a,a) = (a,b).$$

•
$$id_a \circ (c, a) = (a, a) \circ (c, a) = (c, a).$$

1

- Sean (a, b), (b, c) y (c, d) morfismos, luego por transitividad también son morfismos (a, c), (b, d) y (a, d). Veamos que vale la asociatividad:
 - $((c,d)\circ(b,c))\circ(a,b)=\overline{(b,d)}\circ(a,b)=(a,d).$
 - $(c,d) \circ ((b,c) \circ (a,b)) = (c,d) \circ \overline{(a,c)} = (a,d).$
- 3. Verificar que un monoide M define una categoría con un único objeto cuyas flechas son los elementos de M.

Solución Para (M, 0, +) definimos:

• $ob \mathcal{M} = \{*\}.$

cod(x) = *.

- \bullet mor $\mathcal{M} = M$.
- dom(x) = *.

 $x \circ y = x + y.$

Luego:

- Para el único objeto * existe el morfismo $0 = id_*$ de manera tal que:
 - $\bullet \ x \circ id_* = x + 0 = x.$
 - $\bullet \ id_* \circ y = 0 + y = y.$
- Para tres morfismos x, y, z (elementos de M) por clausura de monoide también son morfismos x + y y y + z. Veamos que vale la asociatividad:

$$(x \circ y) \circ z = (x + y) + z = x + (y + z) = x \circ (y \circ z)$$

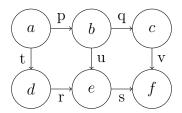
- 4. Dada una categoría \mathcal{C} , podemos definir \mathcal{C}^{op} con los mismo objetos que \mathcal{C} pero las flechas con sentido inverso, es decir, $ob \mathcal{C}^{op} = ob \mathcal{C}$ y $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$. Verificar que \mathcal{C}^{op} es una categoría.
 - **Solución** Sean $f_{op}: X \to Y$ y $g_{op}: Y \to Z$ en $Hom \mathcal{C}^{op}$, definimos $g_{op} \circ_{op} f_{op}$ como $(f \circ g)_{op}$. Observemos que la composición tiene sentido pues en \mathcal{C} resultan $f: Y \to X$ y $g: Z \to Y$. Luego:

- Para cada objeto X el morfismo lo id_X resulta ser el mismo en \mathcal{C} y en \mathcal{C}^{op} por lo que:
 - $f_{op} \circ_{op} id_X = (id_X \circ f)_{op} = f_{op}$.
 - $id_X \circ_{op} h_{op} = (h \circ id_X)_{op}^{-r} = h_{op} \text{ (donde } h_{op} : Y \to X).$
- Sean $f_{op}: A \to B$, $q: B \to C$ y $h: C \to D$, luego:
 - $(h_{op} \circ_{op} g_{op}) \circ_{op} f_{op} = (g \circ h)_{op} \circ_{op} f_{op} = f \circ (g \circ h).$
 - $h_{op} \circ_{op} (g_{op} \circ_{op} f_{op}) = h_{op} \circ_{op} (f \circ g)_{op} = (f \circ g) \circ h.$
- 5. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías, se define $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ cuyos objetos son pares ordenados de la forma (C, D) con $C \in ob \mathcal{C}$, $D \in ob \mathcal{D}$ y ademas:

$$Hom_{\mathcal{C}\times D}\left((C,D),(C',D')\right)=Hom_{\mathcal{C}}\left(C,C'\right)\times Hom_{\mathcal{C}}\left(D,D'\right)$$

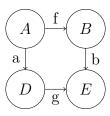
Verificar que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una categoría.

- 6. Definamos C^{\rightarrow} como la categoría de las flechas de una categoría C, es decir, los objetos de C^{\rightarrow} son las flechas de C. Una flecha de C^{\rightarrow} de $f:A\rightarrow B$ en $g:D\rightarrow E$ es un par (a,b) de flechas de C tales que $g\circ a=b\circ f$.
 - a) Expresar las flechas de C^{\rightarrow} en términos de diagramas conmutativos.
 - b) Probar que si en el diagrama los cuadrados conmutan, entonces también conmuta el rectángulo exterior:



- c) Utilizar el apartado anterior para definir la composición en C^{\rightarrow} .
- d) Verificar que C^{\rightarrow} es una categoría.

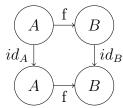
 $a)\;$ El par (a,b) es una flecha de C^{\rightarrow} si el siguiente diagrama conmuta en $C\colon$



- b) Sabemos que $u \circ p = r \circ t$ y $v \circ q = s \circ u$ y queremos ver si $v \circ (q \circ p) = s \circ (r \circ t)$. Por asociatividad en $C v \circ (q \circ p) = (v \circ q) \circ p$, es decir $v \circ (q \circ p) = (s \circ u) \circ p = s \circ (u \circ p) = s \circ (r \circ t)$.
- c) Para (r,p) y (s,q) como en el diagrama, definimos $(s,q) \circ (r,p)$ como $(s \circ r, q \circ p)$.

d)

- Para cada $f: A \to B$ en $ob C^{\to}$ definimos $id_f = (id_{dom(f)}, id_{cod(f)}).$
 - $\bullet\,$ Observemos que id_f es una flecha de C^{\to} pues el siguiente diagrama conmuta:

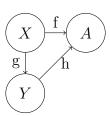


- Sean $a:A\to D$ y $b:B\to E$ como en el diagrama, luego: $(a,b)\circ id_f=\left(a\circ id_{dom(f)},b\circ id_{cod(f)}\right)=(a,b)$
- Analogamente sean $a:D\to A$ y $b:E\to B$, entonces: $id_f\circ(a,b)=\left(id_{dom(f)}\circ a,id_{cod(f)}\circ b\right)=(a,b)$
- \bullet Sean $(r,p),\,(s,q)$ y (x,w) como en el siguiente diagrama:

$$((r,p)\circ(s,q))\circ(x,w)=(r\circ s,p\circ q)\circ(x,w)=((r\circ s)\circ x,(p\circ q)\circ w)=\\=(r\circ(s\circ x),p\circ(q\circ w))=(r,p)\circ(s\circ x,q\circ w)=(r,p)\circ((s,q)\circ(x,w))$$

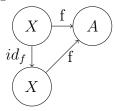
- 7. Sean C una categoría y A un objeto de C. Definimos C|A como la categoría cuyos objetos son las flechas f de C tales que cod(f) = A. Una flecha g en C|A de $f: X \to A$ en $h: Y \to A$ es una flecha $g: X \to Y$ de C tal que $f = h \circ g$.
 - a) Expresar las flechas de C|A en términos de diagramas conmutativos.
 - b) Verificar que C|A es una categoría.
 - c) Si P es la categoría definida por un conjunto ordenado y $x \in P$, determinar P|x.

a) Si el siguiente diagrama conmuta en C, entonces g es una flecha de C|A.

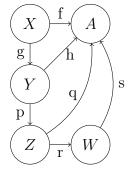


b)

- Dados dos morfismos $g: X \to Y$ y $p: Y \to Z$ en C|A definimos la composición en C|A como la composición en C y para cada objeto $f: X \to A$ definimos el morfismo $id_f = id_{dom(f)}$.
 - Observemos que $id_{dom}(f)$ es un morfismo de la categoría pues el siguiente diagrama conmuta:



- Una flecha α que parte de f debe tener tipo $X \to Y$, luego $\alpha \circ id_f = \alpha$.
- Una flecha β que llega a f debe tener tipo $W \to X$, luego $id_f \circ \beta = \beta$.
- Sean g, p, q como en el siguiente diagrama conmutativo:



luego $(r \circ p) \circ g = r \circ (p \circ g)$ por asociatividad en C.

- c) COMPLETAR.
- 8. Probar que en Set los monomorfismos (epimorfismos) son exactamente las funciones inyectivas (respectivamente sobreyectivas).

Solución

.

• \Longrightarrow : Sea $f: B \to C$ un monomorfismo, luego para cualquier conjunto A y funciones $g, h: A \to B$ sabemos que:

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

Supongamos que f no es inyectiva, es decir que existen $b_1 \neq b_2 \in B$ tales que $f(b_1) = f(b_2)$. Definimos funciones constantes g, h tales que $g(x) = b_1$ y $h(x) = b_2$, luego:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(b_1) = f(b_2) = f(h(x)) = f \circ h(x)$$

y como f es monomorfismo resulta g = h lo cual es una contradicción pues $g(x) = b_1 \neq b_2 = h(x)$.

• \sqsubseteq : Sea $f: B \to C$ una función inyectiva, luego sabemos que $f(b_1) = f(b_2) \iff b_1 = b_2$. Para $g, h: A \to B$ tales que $f \circ g = f \circ h$ resulta:

$$f \circ g(x) = f \circ h(x) \iff f(g(x)) = f(h(x)) \iff g(x) = h(x)$$

• \Longrightarrow : Sea $f:A\to B$ un epimorfismo, luego para cualquier conjunto C y funciones $g,h:B\to C$ sabemos que:

$$q \circ f = h \circ f \Rightarrow q = h$$

Supongamos que f no es sobreyectiva, es decir que existe $b \in B$ tal que $f(x) \neq b$ (para cualquier x). Definimos g, h iguales salvo en b donde $g(b) = c_1$ y $h(b) = c_2$, luego:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = h(f(x)) = h \circ f(x)$$

y como f es un epimorfimo resulta g=h lo cual es una contradicción.

• \sqsubseteq : Sea $f:A\to B$ una función sobreyectiva y sean dos funciones $g,h:B\to C$ tales que $g\circ f=h\circ f$. Supongamos que $g\ne h$, luego existe $f(x)\in B$ tal que $g(f(x))\ne h(f(x))$ lo cual es una contradicción pues:

$$g \circ f(x) = h \circ f(x) \iff g(f(x)) = h(f(x))$$

- 9. Sean C una categoría y f,g flechas de C. Probar que:
 - a) Si f y g son monomorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.
 - b) Si $g\circ f$ es un monomorfismo, f también lo es.
 - c) Si f y g son epimorfismos, entonces $g\circ f$ también lo es.
 - d) Si $g\circ f$ es un epimorfismo, g también lo es.
 - e) Si f^{-1} es la inversa de f y g^{-1} es la inversa de g, entonces $f^{-1} \circ g^{-1}$ es la inversa de $g \circ f$.

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.
- d) COMPLETAR.
- e) COMPLETAR.
- 10. Mostrar que una flecha de una categoría puede ser monomorfismo y epimorsmo y no isomorfismo.

Solución COMPLETAR.

11. Mostrar que una flecha de una categoría concreta puede ser epimorfismo y no sobreyectiva.

Solución COMPLETAR.

12. Mostrar que dos objetos terminales en una categoría son isomorfos. Por dualidad: ¿qué se puede decir de los objetos iniciales?

Solución COMPLETAR.

13. ¿Cuales son los objetos iniciales y terminales en $Set \times Set$? ¿Cuáles en $Set \rightarrow$?

Solución COMPLETAR.

14. Dar una categoría sin objetos iniciales. Dar una sin objetos finales. Dar una donde los objetos finales e iniciales coincidan.

Solución COMPLETAR.

15. Sea \mathcal{C} una categoría. Probar que si dos objetos admiten producto (coproducto), éste es único salvo isomorfismo.

- 16. Sea *P* un poset. Determina objetos iniciales, objetos terminales, productos y coproductos en las siguientes categorías:
 - a) Poset.
 - b) Set.
 - c) Mon.
 - d) Grp.

Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.
- d) COMPLETAR.
- 17. Dar una categoría donde algún par de objetos carecen de producto.

Solución COMPLETAR.

18. Sea \mathcal{C} una categoría y sean A, B, C, D objetos de \mathcal{C} . Mostrar que en caso de existir $A \times B$, $C \times D$ y dos morfismos $f : A \to C$ y $g : B \to D$, entonces puede definirse un morfismo $f \times g : A \times B \to C \times D$.

- 19. Mostrar las siguientes identidades:
 - a) $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id$.
 - b) $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$.
 - c) $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle$.
 - $d) (f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k).$
 - $e) \langle [f, g], [h, k] \rangle = [\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle].$

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.
- d) COMPLETAR.
- e) COMPLETAR.
- 20. Probar los siguientes isomorfismos:
 - a) $A \times B \cong B \times A$.
 - b) $A \times 1 \cong A$.
 - c) $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$.
 - d) ¿Cuales son los enunciados duales?

Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.
- d) COMPLETAR.
- 21. Probar que si dos morfismos $f,g:X\to Y$ admiten egalizador (coegalizador), éste es único salvo isomorfismo.

Solución COMPLETAR.

22. Encontrar el ecualizador en Set.

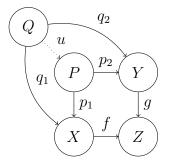
Solución COMPLETAR.

23. Sean $f, g: X \to Y$ dos morfismos en Set. Probar que el coegalizador de f y g es el cociente de Y por la relación de equivalencia $y \equiv z$ si y sólo si existe $x \in X$ tal que y = f(x) y z = g(x) o bien y = g(x) y z = f(x).

24. Probar que en una categoría \mathcal{C} todo ecualizador e es un monomorfismo. Mostrar que si además e es epimorfismo, entonces se tiene un isomorfimos.

Solución COMPLETAR.

25. El pullback de dos morfismos $f: X \to Z$ y $g: Y \to Z$ consiste en un objeto P junto con dos morfismos $p_1: P \to X$, $p_2: P \to Y$ tal que $f \circ p_1 = g \circ p_2$, y además si existe otro objeto Q con dos morfismos $q_1: Q \to X$, $q_2: Q \to Y$ tal que $f \circ q_1 = g \circ q_2$, entonces existe un único morfismo $u: Q \to P$ tal que $p_1 \circ u = q_1$ y $p_2 \circ u = q_2$. A continuación, un diagrama que muestra la situación:



Probar que el pullback de dos morfismos, si existe, es único salvo isomorfismo.

Solución COMPLETAR.

26. Encontrar el pull-back en Set.

- 27. Sea \mathcal{C} una categoría con exponenciales.
 - a) Probar $curry(eval_{A,B}) = id_{B^A}$.
 - b) Dado un morfismo $f: B \to C$, construir un morfismo $B^A \to C^A$.

- c) Dado un morfismo $f:A\rightarrow C^{B},$ construir un morfismo $uncurry\left(f\right) :A\times B\rightarrow C.$
- d) Probar uncurry(curry(f)) = f y curry(uncurry(f)) = f.

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.
- d) COMPLETAR.
- 28. Sea \mathcal{C} una CCC y sean A, B objetos de \mathcal{C} . Probar:
 - a) B^A es único salvo isomorfismo.
 - b) $1^A \cong 1$.
 - c) $B^1 \cong B$.

Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.
- 29. Hallar los exponenciales en Set.

Solución COMPLETAR.

30. Demostrar que un álgebra de Boole es una CCC.

Solución COMPLETAR.

31. En una categoría con coproductos y objeto final, podemos definir los booleanos como el objeto Bool=1+1. En este caso, a i_1 le llamamos true y a i_2 le llamamos false. Escribimos un morfismo $not:Bool\to Bool$ tal que:

$$not \circ true = false$$

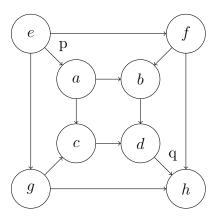
$$not \circ false = true$$

Suponiendo que la categoría tiene exponenciales: ¿puede escribir un morfismo $and:Bool\times Bool \to Bool$ que se comporte como la conjunción?

Solución COMPLETAR.

Ejercicios adicionales

1. Considerar que en el siguiente diagrama los 4 trapecios conmutan.



Probar que:

- a) Si el cuadrado interno conmuta, también lo hace el cuadrado externo.
- b) Si p es epimorfismo y q es monomorfismo, entonces si el cuadrado externo conmuta, también lo hace el cuadrado interno.

Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.

- 2. Sean C y D dos categorías. Se define $C \times D$ de la siguiente manera: los objetos de $C \times D$ son de la forma (A, B) para $A \in C$ y $B \in D$ y las flechas $(f, g) : (A, B) \to (A', B')$ donde $f : A \to A' \in C$ y $g : B \to B' \in D$.
 - a) Verificar que $C \times D$ es una categoría.
 - b) Probar que $P_1: C \times D \to C$, $P_1(A, B) = A \text{ y } P_2: C \times D \to D$, $P_2(A, B) = B$, definen functores.

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- 3. Dados dos funtores $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G: \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, definir un funtor que componga ambos. ¿Es posible definir una categoría cuyos objetos sean las categorías y sus flechas sean los funtores entre estas?

Solución COMPLETAR.

4. Si $f: A \to B$ en Set, entonces definimos $f^{-1}(X) = \{a \in A : f(a) \in X\}$ donde $X \subseteq B$. Probar que $I: Set \to Set$ es un funtor contravariante, llevando: $I(A) = \mathcal{P}(A)$ y $I(f) = f^{-1}$.

Solución COMPLETAR.

5. Se ha visto que puede considerarse a un monoide como una categoría con un único objeto, ¿Qué es un funtor entre dos categorías de este tipo? ¿Y entre categorías formadas a partir de conjuntos ordenados?

Solución COMPLETAR.

6. Sea \mathcal{C} una categoría, para cada objeto X de \mathcal{C} definimos Hom(X, -): $\mathcal{C} \to Set$ donde $Hom(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$ y $Hom(X, f)(g) = f \circ g$. Probar que Hom(X, -) es efectivamente un funtor para cada X. Definir análogamente un funtor Hom(-, X).

7. Dado un semigurpo (S, \cdot) , podemos construir un monoide (S', \cdot') donde $S' = S \cup \{e\}, (0, x) \cdot' (0, y) = (0, x \cdot y)$ y $(1, e) \cdot' x = x = x \cdot' (1, e)$. Utilizando esta construcción, definir un funtor $F : Sem \to Mon$ y probar que es un monomorfismo en Cat.

Solución COMPLETAR.

- 8. Definimos la asignación $Fr: Set \to Mon$ tal que $Fr(X) = X^{*-1}$ y $Fr(f)(x_1x_2\cdots x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$. Usando el funtor $U: Mon \to Set$ que se olvida de la estructura de monoide, consideramos $i: X \to U(Fr(X))$ la función que lleva un elemento x de X a la palabra x.
 - a) Probar que Fr es un funtor.
 - b) Probar que dado $f: X \to U(M)$ en Set donde M es un monoide, puedo construir una única $\overline{f}: Fr(X) \to M$ en Mon tal que $U(\overline{f}) \circ i = f$ en Set^2 .
 - c) ¿A cuál monoide es isomorfo Fr(X) donde X es un conjunto de un solo elemento?
 - d) ¿Este funtor preserva productos?

Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.
- d) COMPLETAR.
- 9. Sea \mathcal{C} con 0. Verificar que si un morfismo $f: X \to Y$ en \mathcal{C} admite núcleo (conúcleo), éste es único salvo isomorfismo.

 $^{^1}X^*$ es el monoide de las palabras sobre el alfabeto X con la concatenación como operación. Puede pensar en las palabras de X como las listas de elementos de X.

²Cuando un monoide como Fr(X) satisface esta propiedad, decimos que es el monoide libre sobre X.

10. Sean \mathcal{C} una categoría con 0 y $f: X \to Y$ un morfismo en \mathcal{C} . Probar que $p: Y \to C$ es un conúcleo de f en \mathcal{C} si y solo si p^{op} es un núcleo de f^{op} en \mathcal{C}^{op} .

Solución COMPLETAR.

11. Sean \mathcal{C} un categoría con 0 y $f: X \to Y$ un morfismo en \mathcal{C} . Probar que ker(f)(coker(f)) coincice con el egalizador (coegalizador) de f y 0.

Solución COMPLETAR.

12. Sean x e y elementos de un conjunto ordenado P. ¿Cuál sería el producto de x e y considerando P como una categoría?

Solución COMPLETAR.

13. Sean P y Q conjuntos ordenados. ¿Cuál es el coproducto de P y Q en Poset?

Solución COMPLETAR.

14. ¿Grp tiene productos? ¿Tiene coproductos? ¿Tiene objeto inicial? ¿Tiene objeto final? ¿Y Mon?

- 15. Un ωCPO es un conjunto ordenado con mínimo (notado \bot) tal que toda cadena ascendente numerable $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \cdots$ (que notamos $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ tiene un supremo $\sqcup \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Una función monótona entre dos ωCPO es continua si $f(\sqcup \{a_i\}_{i=0}^{\infty}) = \sqcup \{f(a_i)\}_{i=0}^{\infty}$ para toda cadena ascendente numerable $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$.
 - a) Probar que podemos armar una categoría cuyos objetos son ωCPO y cuyas flechas son funciones continuas.
 - b) ¿Esta categoría tiene productos? En caso afirmativo, describirlos. ¿Y coproductos?

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- 16. Probar o refutar: sea C una categoría con productos, y $F:C\to C$ un functor, entonces siempre existe un único morfismo $F(A\times B)\to FA\times FB$.

Solución COMPLETAR.

17. Sea $U:Mon \to Set$ el functor que olvida la estructura de monoide. Definimos además $U^2:Mon \to Set$ que en objetos lleva $(X,\otimes,e) \mapsto X \times X$. Probar que a U^2 se lo puede denotar de estructura functorial.