1. Dar diagramas para:

    a) Los retículos con 5 elementos.

    b) Los retículos con 6 elementos.

    c) El retículo de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

    Soluciones

    a) COMPLETAR.

    b) COMPLETAR.

    c) COMPLETAR.

2. Interpretar $\wedge$ y $\vee$ en los siguientes conjuntos ordenados:

    a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, donde A es un conjunto arbitrario.

    b) $(\mathbb{N}, |)$, donde $|$ denota la relacion «*divide a*».

    c) Álgebra de Lindenbaum-Tarski (ver ejercicio práctica anterior).

    Soluciones

    a)

    - $\wedge = \cap$.
    - $\vee = \cup$.

    b)

    - $\wedge = mcd$.
    - $\vee = mcm$.

    c)

    - $\wedge = \wedge$.
    - $\vee = \vee$.

3. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo.

   a) Probar que para todos $x, y, z \in X$ se satisface:

      1) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
      2) $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
      3) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.

   b) Probar que si una de las desigualdades anteriores es una igualdad, las restantes también lo son.

   Soluciones

   a)

      1) Sabemos que $y \wedge z \leq y$ y $y \wedge z \leq z$ luego por compatibilidad tenemos $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee y$ y $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z$ y nuevamente por compatibilidad $(x \vee (y \wedge z)) \wedge (x \vee (y \wedge z)) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Finalmente concluimos lo propuesto por idempotencia.
      2) Trivial por dualidad.
      3) COMPLETAR.

   b) COMPLETAR.

4. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo. Probar que los siguientes subconjuntos de X son subretículos:

   a) $A = \{x \in X : x \leq a\}$.

   b) $B = \{x \in X : b \leq x\}$.

   c) $C = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$.

   Soluciones

   a) Sabemos que $a \in A$ luego $A \neq \emptyset$. Ademas sean $x, y \in A$ luego $x \leq a$ y $y \leq a$, pero por compatibilidad $x \vee y \leq a \vee a = a$ por lo que $x \vee y \in A$. Analogamente $x \wedge y \in A$.

   b) Análogo.

   c) Análogo.

5. Sea $(L, \preceq)$ un retículo. Un polinomio p en n variables es una función $p : L^n \to L$ que pertenece al conjunto inductivo P_L:

   - Para $i \in \{1, \ldots, n\}, \pi_i \in P_L$ donde $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.
   - Si $f, g \in P_L$ entonces $f \vee g \in P_L$, donde $(f \vee g)(\overline{x}) = f(\overline{x}) \vee g(\overline{x})$.
   - Si $f, g \in P_L$ entonces $f \wedge g \in P_L$, donde $(f \wedge g)(\overline{x}) = f(\overline{x}) \wedge g(\overline{x})$.

   Sea f un polinomio en n variables, y $x_i \preceq y_i$ para cada i de 1 hasta n. Probar que $f(x_1, \ldots, x_n) \preceq f(y_1, \ldots, y_n)$.

   Solución COMPLETAR.

6. Un retículo L se llama *modular* si para todos $a, b, c \in L$ resulta

$$a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

   Probar que son equivalentes:

   a) L es modular.
   b) $a \geq c \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ para todos $a, b, c \in L$.
   c) $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ para todos $a, b, c \in L$.
   d) $a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para todos $a, b, c \in L$.

   Soluciones

   - $\boxed{a \Rightarrow b}$: Sea $a \geq c$ luego por ser L modular

$$\begin{array}{rcl} c \vee (b \wedge a) & = & (c \vee b) \wedge a \\ \Longleftrightarrow & & \\ (b \wedge a) \vee c & = & a \wedge (c \vee b) \\ \Longleftrightarrow & & \\ (a \wedge b) \vee c & = & a \wedge (b \vee c) \end{array}$$

   - $\boxed{b \Rightarrow c}$: Sabemos que $a \vee c \geq a$ y por hipótesis $(a \vee c) \wedge (b \vee a) = ((a \vee c) \wedge b) \vee a$, luego aplicando varias veces conmutatividad obtenemos

$$a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

- $\boxed{c \Rightarrow d}$: Trivial por dualidad.
- $\boxed{d \Rightarrow a}$: Sea $a \leq c$ entonces $a \vee c = c$ y por hipótesis para cualquier b, resulta

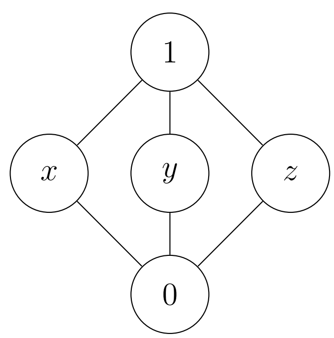
$$\begin{array}{rcl} a \wedge (b \vee (a \wedge c)) & = & (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ \Longleftrightarrow & & \\ a \vee (b \wedge (a \vee c)) & = & (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ \Longleftrightarrow & & \\ a \vee (b \wedge c) & = & (a \vee b) \wedge c \end{array}$$

7. Probar que todo retículo distributivo es modular. ¿Es cierta la recíproca?

Solución Sea $a \leq c$ entonces $a \wedge c = a$, luego por distributividad:

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$$

La recíproca no vale, pues basta considerar el siguiente contraejemplo:



donde puede observarse que es modular pero $y \vee (x \wedge z) = y \neq 1 = (y \vee x) \wedge (y \vee z)$.

8. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo. Probar que:

   a) Si $\vee$ tiene elemento neutro 0, entonces $a \wedge 0 = 0$ para todo $a \in X$.

   b) Si $\wedge$ tiene elemento neutro 1, entonces $a \vee 1 = 1$ para todo $a \in X$.

Soluciones

a) Por propiedad, como $0 \vee a = a$, entonces $0 \wedge a = 0$.

b) Por propiedad, como $a \wedge 1 = a$, entonces $a \vee 1 = 1$.

9. Sean $(X, \wedge, \vee)$ y $(Y, \wedge', \vee')$ retículos con 0 y 1; y $h : X \to Y$ un homomorfísmo de retículo. Mostrar con un ejemplo que no siempre $h(1_X) = 1_Y$ o $h(0_X) = 0_Y$

Solución Basta considerar $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ y $id : -\mathbb{N} \to -\mathbb{N}_0$.

10. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo acotado (con 0 y 1). Dado $a \in X$, si existe $b \in X$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$, b se llama *complemento* de a, y en caso de ser único se nota $\overline{a}$. Probar que:

a) $\overline{\overline{a}} = a$.

b) $\overline{0} = 1$.

c) Si X es distributivo, $\overline{(a \wedge b)} = \overline{a} \vee \overline{b}$ y $\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \wedge \overline{b}$.

Soluciones

a) Sabemos que $a \wedge \overline{a} = 0$ y $\overline{\overline{a}} \wedge \overline{a} = 0$, por lo que a y $\overline{\overline{a}}$ son complementos de $\overline{a}$, luego como el complemento es único debe ser $\overline{\overline{a}} = a$.

b) Sabemos $0 \vee \overline{0} = 1$ y como $0 \vee x = x$ (pues 0 es mínimo) entonces $0 \vee \overline{0} = \overline{0}$ por lo que $\overline{0} = 1$.

c) COMPLETAR.

11. Sean $(X, \wedge, \vee)$ y $(Y, \wedge', \vee')$ retículos y $h : X \to Y$ un homomorfísmo de retículo. Probar que:

a) $h(X)$ es un subretículo de Y.

b) Si X es distributivo, $h(X)$ es distributivo.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

12. Verificar que todo isomorfismo de retículo se corresponde con un isomorfismo de conjuntos ordenados.

    Solución COMPLETAR.

13. Probar que el retículo potencia de cualquier conjunto es completo.

    Solución COMPLETAR.

14. *Knaster-Tarski*. Sea $(L, \sqsubseteq)$ un retículo completo y $f : L \to L$ una función monótona. Probar que el mínimo punto fijo de f es $\bigwedge \{x \in L | f(x) \sqsubseteq x\}$.

    Solución COMPLETAR.

15. Aplicar el resultado del ejercicio anterior para definir el conjunto inductivo de los números pares P como el mínimo punto fijo de una función monótona, donde P se define como el menor conjunto para el cual:

    - $0 \in P$.
    - Si $n \in P$, entonces $n + 2 \in P$.

    Solución COMPLETAR.

16. Sea $(P, \leq)$ un orden total. Probar que P es un retículo distributivo.

    Solución COMPLETAR.

17. *Retículo completo*. Sea $(P, \leq)$ un orden. Probar que si todo subconjunto de P tiene supremo, entonces todo subconjunto de P tiene ínfimo.

Solución COMPLETAR.

18. Un *álgebra de Boole* es un retículo acotado distributivo con complementos.

    a) Dar un ejemplo de álgebra de Bool de los retículos vistos en clase.

    b) Probar que $O_n = (\{x \in \mathbb{N} : x|n\}, |)$ es un álgebra de Boole si n es producto de factores primos distintos.

    c) Enunciar y probar la ley de De Morgan para las álgebras de Boole.

    d) Si $(L, \leq)$ es un álgebra de Boole, entonces para $x, y \in L$ si $x \leq y$ entonces $\overline{y} \leq \overline{x}$.

    e) Si $(L, \leq), (L', \leq')$ son álgebras de Boole, entoneces todo isomorfismo de conjuntos ordenados de L en L' preserva complementos.

    f) Sean $(L, \leq), (L', \leq')$ álgebras de Boole. Construir un orden para $L \times L'$ y probar que es un álgebra de Boole.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

e) COMPLETAR.

f) COMPLETAR.