1. Sea F_n la sucesión de Fibonacci:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

   a) Probar que: $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

   b) Desarrollar formulas para las siguientes sumas:

      1) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}$.

      2) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i}$.

Soluciones

a)

- Caso base $n = 1$: $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 = 1 = 2 - 1 = F_2 + F_1 - 1 = F_3 - 1$.
- Caso inductivo $n = k$: Supongamos que $\sum_{i=1}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$.

  Luego: $\sum_{i=1}^{k+1} F_i = \sum_{i=1}^{k} F_i + F_{k+1} \underbrace{=}_{H.I.} F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$.

b)

1) Observemos que:

   - $\sum_{i=1}^{1} F_{2i-1} = F_1 = 1$.
   - $\sum_{i=1}^{2} F_{2i-1} = F_1 + F_3 = 3 = F_4$.
   - $\sum_{i=1}^{3} F_{2i-1} = F_1 + F_3 + F_5 = 8 = F_6$.

Probaremos entonces que: $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$:

- Caso base $n = 1$: Trivial.
- Caso $n = k$: Supongamos que $\sum_{i=1}^{k} F_{2i-1} = F_{2k}$. Luego:

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i-1} = \sum_{i=1}^{k} F_{2i-1} + F_{2(k+1)-1} \underbrace{=}_{H.I.} F_{2k} + F_{2k+1} = F_{2k+2} = F_{2(k+1)}$$

2) COMPLETAR.

2. Encontrar una fórmula para la siguiente sumatoria: $\sum_{i=0}^{n} (a + bi)$.

Solución

$$\sum_{i=0}^{n} (a + bi) = \sum_{i=0}^{n} a + \sum_{i=0}^{n} bi = a \sum_{i=0}^{n} 1 + b \sum_{i=0}^{n} i = a (n + 1) + b \left[\frac{n (n + 1)}{2} \right]$$

3. ¿Cuales de los siguientes enunciados son verdaderos? Probar las respuestas:

   a) $n^2 \in O (n^3)$.
   b) $n^2 \in \Omega (n^3)$.
   c) $2^n \in \Theta (2^{n+1})$.
   d) $n! \in \Theta [(n + 1)!]$.

Soluciones

a) *Verdadero*: $0 \leq n^2 \leq cn^3 \iff 0 \leq 1 \leq cn$. Basta tomar $c = n_0 = 1$.

b) *Falso*: $0 \leq cn^3 \leq n^2 \iff 0 \leq cn \leq 1 \iff 0 \leq n \leq 1/c$. Para que esto ocurra, n debe estar acotado por una constante.

c) *Verdadero*: $0 \leq c_2 2^{n+1} \leq 2^n \leq c_1 2^{n+1} \iff 0 \leq c_2 2 \leq 1 \leq c_1 2 \iff 0 \leq c_2 \leq 1/2 \leq c_1$. Basta tomar $c_1 = c_2 = 1/2$.

d) *Falso*: $0 \leq c (n + 1)! \leq n! \iff 0 \leq c (n + 1) \leq 1 \iff n \leq \frac{1}{c} - 1$. Para que esto ocurra, n debe estar acotado por una constante.

4. Demostrar que $f \in \Theta(g)$ si y solo si existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

Solución

- $\boxed{\Rightarrow}$: Por hipótesis $f \in O(g)$ y $f \in \Omega(g)$; y por definición tenemos:
    - $\forall n \geq n_2 : 0 \leq f(n) \leq c_2 g(n)$.
    - $\forall n \geq n_1 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n)$.

  Luego tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ valen ambas desigualdades.
- $\boxed{\Leftarrow}$: Por definición tenemos $f \in O(g)$ y $f \in \Omega(g)$, luego $f \in \Theta(g)$.

5. Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ asintoticamente no negativas y $h(n) = f(n) + g(n)$, demostrar que:

$$h(n) \in \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$$

Solución Como f y g son asintoticamente no negativas, $\forall n > n_1 : f(n) \geq 0$ y $\forall n > n_2 : g(n) \geq 0$; tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ resulta h ser asintoticamente no negativa. Ademas, tomando $c_1 = 2$ y $c_2 = 1$:

- $0 \leq f(n) + g(n) \leq c_1 \max\{f(n), g(n)\} \Rightarrow h \in O(\max\{f(n), g(n)\})$.
- $0 \leq c_2 \max\{f(n), g(n)\} \leq \underbrace{f(n)}_{\geq 0} + \underbrace{g(n)}_{\geq 0} \Rightarrow h \in \Omega(\max\{f(n), g(n)\})$.

6. Dadas $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, demostrar las siguientes propiedades de las notaciones asintoticas:

    a) O y Ω son transitivas.

    b) f asintoticamente no negativa $\Rightarrow f(n) \in \Theta[f(n)]$.

    c) Θ es simétrica.

    d) $f(n) \in O[g(n)] \iff g(n) \in \Omega[f(n)]$.

    e) $f(n) \in O[g(n)] \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}^+ : kf(n) \in O[g(n)]$.

    f) $f(n) \in O[g(n)] \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}^+ : kf(n) \in \Omega[g(n)]$.

Soluciones

a)

- Sean f, g, h tales que $f \in O(g)$ y $g \in O(h)$, sabemos que existen c_1, c_2, n_1, n_2 tales que:
  - $\forall n \geq n_1 : 0 \leq f(n) \leq c_1 g(n)$.
  - $\forall n \geq n_2 : 0 \leq g(n) \leq c_2 h(n)$.

  Luego tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ valen ambas desigualdades, por lo tanto:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c_1 g(n) \leq \underbrace{c_1 c_2}_{c} h(n) \Rightarrow f \in O(h)$$

- Análogo.

b) Sabemos que existe $n_0 / \forall n \geq n_0 : f(n) \geq 0$, luego tomando $c = 1$ resultan:

- $\forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq cf(n) \Rightarrow f \in O(f)$
- $\forall n \geq n_0 : 0 \leq cf(n) \leq f(n) \Rightarrow f \in \Omega(f)$

c) Sean $f, g / f \in \Theta(g)$, luego existen n_0, c_1, c_2 tal que:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

luego, dividiendo por c_1 y por c_2:

- $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n) \Rightarrow g \in O(f)$.
- $\forall n \geq n_0 : 0 \leq \frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \Rightarrow g \in \Omega(f)$.

d)

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sabemos que existen n_0, c tales que $\forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n)$ y dividiendo por c resulta:

$$0 \leq \frac{1}{c} f(n) \leq g(n) \Rightarrow g \in \Omega(f)$$

- $\boxed{\Leftarrow}$: Sabemos que existen n_0, c tales que $\forall n \geq n_0 : 0 \leq cf(n) \leq g(n)$ y dividiendo por c resulta:

$$0 \leq f(n) \leq \frac{1}{c} g(n) \Rightarrow f \in O(g)$$

e) Puesto que $f(n) \in O[g(n)]$ sabemos que existen n_0, c tales que $\forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n)$. Sea $k \in \mathbb{R}^+$, luego multiplicando por k en la inecuación anterior obtenemos:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq kf(n) \leq kcg(n)$$

es decir, $kf \in O(g)$.

f) Análogo.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ constantes, b positivo, probar que:

a) $(n+a)^b \in \Theta\left(n^b\right)$.

b) $b^n \in \Theta\left(b^{n+a}\right)$.

Soluciones

a)

- $\boxed{(n+a)^b \in O\left(n^b\right)}$: Sea $n_0 > a$ luego: $\forall n \geq n_0 : 0 \leq (n+a)^b \leq (2n)^b = 2^b n^b$.
- $\boxed{(n+a)^b \in \Omega(n)^n}$:
  - Caso $a \geq 0$: Sea $n_0 \geq 0$ luego:

  $$\forall n \geq n_0 : 0 \leq a \iff 0 \leq n \leq n+a \iff 0 \leq n^b \leq (n+a)^b$$

  - Caso $a \leq 0$: Sea $n_0 \geq -2a \iff -n_0 \leq 2a \iff -n_0/2 \leq a$, luego $\forall n \geq n_0$:

  $$-\frac{n}{2} \leq a \iff n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \leq n+a \iff \left(\frac{n}{2}\right)^b = \frac{1}{2^b} n^b \leq (n+a)^b$$

b)

- $0 \leq b^n \leq b^n = (1/b^a)\, b^a b^n = (1/b^a)\, b^{n+a}$.
- $0 \leq (1/b^a)\, b^{n+a} \leq (1/b^a)\, b^{n+a} = b^n$.

8. Demostrar que dadas dos funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ asintoticamente no negativas, y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k$ con $k \in \mathbb{R}^+$, entonces $f(n) \in \Theta[g(n)]$.

Solución COMPLETAR.

9. Encontrar dos funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ tal que $f(n) \notin O[g(n)]$ y $g(n) \notin O[f(n)]$. Probar la respuesta.

Solución Sean $f(x) = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar} \\ n^2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$.

- Supongamos $f(n) \in O[g(n)]$, luego existen n_0 y c tales que:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

  En particular para n impar $0 \leq n^2 \leq cn \iff 0 \leq n \leq c$. Absurdo.

- Análogo.

10. Probar usando propiedades aritméticas que $\sum_{i=1}^{n} i^k \in \Theta\left(n^{k+1}\right)$ para $k \in \mathbb{Z}^+$.

Solución

- $\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k \leq n^k + \ldots + n^+ = nn^k = n^{k+1}$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + \ldots + \left(\frac{n}{2}\right)^k + \ldots + n^k \geq \left(\frac{n}{2}\right)^k + \ldots + n^k \geq \left(\frac{n}{2}\right)^k + \ldots + \left(\frac{n}{2}\right)^k =$
  $= \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)^k = \left(\frac{n}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) n^{k+1}$