Álgebra Lineal - LM - PM - LCC 2018

Práctica 6: Formas de Jordan

1. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Mostrar que cada uno de los siguientes subespacios son invariantes por T:
$$i)\{0\} \qquad ii)V \qquad iii)nul(T) \qquad iv)Img(T).$$

2. Sean $\{W_i\}$ una colección de subespacios de un espacio vectorial V invariantes por T. Mostrar que $W = \bigcap_i W_i$ también es invariante por T.

3. Hallar todos los subespacios invariantes de $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ considerada como operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$.

4. Sea $\hat{T}$ la restricción de un operador T a un subespacio invariante W, es decir $\hat{T}w = Tw, \forall w \in W$. Probar que para todo polinomio $p(t)$, $f(\hat{T})w = f(T)w$.

5. Sea $T : V \to V$, $T \in \mathcal{L}(V)$. Supongamos que para todo $v \in V$ se tiene que $T^k v = 0$ pero $T^{k-1}v \neq 0$. Probar que:

   a) $S = \{T^{k-1}, \cdots, Tv, v\}$ es linealmente independiente.

   b) El subespacio $W = \langle X \rangle$ es invariante por T.

   c) La restricción $\hat{T}$ de T a W es nilpotente de índice k.

   d) La matriz de $\hat{T}$ relativa a la base ordenada de W $\{T^{k-1}, \cdots, Tv, v\}$ es de la forma
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   siendo esta matriz nilpotente de orden k.

6. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, probar que

   a) $\{0\} = nul(T^0) \subset nul(T^1) \subset \cdots \subset nul(T^k) \subset nul(T^{k+1}) \subset \cdots$.

   b) $nul(T^m) = nul(T^{m+1}) \Rightarrow nul(T^m) = nul(T^{m+1}) = nul(T^{m+2}) = \cdots$.

   c) Si $\dim V = n$ luego $nul(T^n) = nul(T^{n+1}) = \cdots$.

7. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n$, luego $V = nul(T^n) \oplus img(T^n)$.

8. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Mostrar que A es nilpotente de índice 2.

   b) Hallar la matriz nilpotente M en forma canónica que es semejante a A.

9. Determinar todas las posibles formas canónicas de Jordan para una matriz de orden 5 cuyo polinomio minimal es $m(t) = (t-2)^2$.

10. Mostrar que las siguientes matrices nilpotentes de orden n son semejantes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$