Índice general

Parte I

Variables aleatorias discretas

Capítulo 1

Distribución Binomial

1.1. Descripción

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernoulli independientes entre sí, con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Es decir, sean $\mathcal{E}$ un experimento, S el espacio muestral asociado a tal experimento y A un suceso del espacio con probabilidad p, entonces X: «Numero de ocurrencias del suceso A en n repeticiones independientes de $\mathcal{E}$» es una variable aleatoria con distribución binomial.

- $X \sim B\left(n, p\right)$.
- $R_X = \{0, \ldots, n\}$

1.2. Función de Probabilidad

La probabilidad de que una variable aleatoria $X \sim B\left(n, p\right)$ sea x es:

$$P\left(X = x\right) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Demostración Consideremos una sucesión s de ensayos del experimento $\mathcal{E}$ que satisfaga la condición de que $X(s) = x$. Tal resultado aparecería, por ejemplo, si las primeras x repeticiones del experimento resultasen en la ocurrencia de A, mientras que las ultimas $n - x$ resultasen $\overline{A}$, es decir:

$$\left(\underbrace{A, A, \ldots, A}_{x}, \underbrace{\overline{A}, \overline{A}, \ldots, \overline{A}}_{n-x}\right)$$

Puesto que todas las repeticiones son independientes, la probabilidad de esta sucesión sería $p^x q^{n-x}$, pero exactamente la misma probabilidad estaría asociada con cualquier otro orden de dicha sucesión.

Debemos elegir x posiciones entre n para ubicar a las A. La cantidad total de dichas sucesiones es justamente $\binom{n}{x}$ de donde sigue el resultado.

1.3. Condición de cierre

[1]

$$\sum_{i \in R_X} P(X = i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \underbrace{=}_{1} (p+q)^n = 1^n = 1$$

[1] Teorema del binomio

1.4. Esperanza

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i \in R_X} iP(X=i) = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\frac{n!}{i!\,(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n!}{i!\,(n-[i+1])!} p^{i+1} (1-p)^{n-(i+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{i!\,(n-i-1)!} pp^i (1-p)^{n-i-1} = \\
&= np\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!\,(n-i-1)!} p^i (1-p)^{n-i-1} = np\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-i-1} = \\
&\underbrace{=}_{1} np\,[p+(1-p)]^{n-1} = np
\end{aligned}
$$

Alternativa Si $X \sim B(n,p)$ podemos expresar a X como suma de n variables de Bernoulli $Y_i(y) = \begin{cases} 1 & y = A \\ 0 & y = \overline{A} \end{cases}$, es decir: $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Luego:

$$
E(X) = E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np
$$

1.5. Varianza y desvió estándar

$$
V(Y_i) = E\left(Y_i^2\right) - \left[E(Y_i)^2\right] = p - p^2 = p(1-p) = pq
$$

$$
V(X) = V\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] \underbrace{=} \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq
$$

$$
\sigma_X = \sqrt{npq}
$$

1.6. Ejemplos

1.6.1. Lanzamiento de monedas

$\mathcal{E}$: «Se tira una moneda y se observa el resultado».

- $S = \{\odot, \otimes\}$. $\#S = 2$.
- $A = \{\text{Salio cara}\}$. $\#A = 1$. $P(A) = \frac{1}{2}$.
- X: «Cantidad de caras en 3 repeticiones independientes de $\mathcal{E}$».
  - $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$.
  - $X(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} Y(x_i) = Y(x_1) + Y(x_2) + Y(x_3)$.
  - $P(X = x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$.
  - $X(\otimes, \otimes, \otimes) = 0$.
  - $X(\otimes, \otimes, \odot) = 1$.
  - $X(\otimes, \odot, \otimes) = 1$.
  - $X(\otimes, \odot, \odot) = 2$.
  - $R_X = \{0, \dots, 3\}$.
  - $X(\odot, \otimes, \otimes) = 1$.
  - $X(\odot, \otimes, \odot) = 2$.
  - $X(\odot, \odot, \otimes) = 2$.
  - $X(\odot, \odot, \odot) = 3$.

1. ¿Cual es la probabilidad de que salgan 2 caras en 3 repeticiones del experimento?

   a) $P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

   b) Probabilidad clásica:

   - $S' = \{(x_1, x_2, x_3) / x_i \in S\}$. $\#S' = 2^3 = 8$.
   - $B = \{\text{Salieron exactamente 2 caras}\} = \{(\otimes, \odot, \odot), (\odot, \otimes, \odot), (\odot, \odot, \otimes)\}$.
   - $P(B) = \frac{\#B}{\#S'} = \frac{3}{8}$.

2. ¿Cual es la probabilidad de que salgan al menos 2 caras en 3 repeticiones del experimento?

   a) $P(X \geq 2) = p(2) + p(3) = \frac{3}{8} + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} = \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{4}{8}$.

b) Probabilidad clásica:

- $C = \{\text{Salieron exactamente 3 caras}\} = \{(\odot, \odot, \odot)\}$. $\#C = 1$.
- $D = \{\text{Salieron al menos 2 caras}\} = B \cup C$. $\#D = 3 + 1 = 4$.
- $P(D) = \frac{\#D}{\#S'} = \frac{4}{8}$.

3. ¿Cuantas caras se espera que salgan en 4 repeticiones del experimento?

a)

$$E(X') = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i q^{n-i} =$$

$$= 0+1\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\cdot 6\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 4\cdot 1\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 1 =$$

$$= 0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

b) $E(X') = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

1.6.2. Apuestas a la ruleta

$\mathcal{E}$: «Se tira la bolilla y se observa el resultado».

- $S = \{0, \ldots, 36\}$. $\#S = 37$.
- $A = \{\text{Sale un numero negro}\}$. $\#A = 18$. $P(A) = \frac{18}{37}$.
- X: «Cantidad de números negros en 4 repeticiones independientes de $\mathcal{E}$».
  - $X \sim B\left(4, \frac{18}{37}\right)$.
  - $P(X = x) = \binom{4}{x} \left(\frac{18}{37}\right)^x \left(\frac{19}{37}\right)^{4-x}$.
  - $R_X = \{0, \ldots, 4\}$.

1. ¿Cual es la probabilidad de que la mayoría sean negros?

a) $P(X > 2) = p(3) + p(4) = \binom{4}{3} \left(\frac{18}{37}\right)^3 \left(\frac{19}{37}\right)^{4-3} + \binom{4}{4} \left(\frac{18}{37}\right)^4 \left(\frac{19}{37}\right)^{4-4} = \frac{16399584}{69343957} + \frac{104976}{1874161} \approx 0,2925$.

b) Probabilidad clásica:

- $\#S' = 37^4 = 1874161$.
- $B = \{\text{Hay exactamente 3 numeros negros}\}$. $\#B = 4 \cdot 19 \cdot 18^3 = 443232$.
- $C = \{\text{Hay exactamente 4 numeros negros}\}$. $\#C = 18^4 = 104976$.
- $D = \{\text{La mayoria son negros}\} = B \cup C$. $\#D = 548208$.
- $P(D) = \frac{\#D}{\#S'} = \frac{548208}{1874161} \approx 0,2925$.

2. ¿Cual es la probabilidad de que todos sean rojos?

   a) $P(X=0) = \binom{4}{0} \left(\frac{18}{37}\right)^0 \left(\frac{19}{37}\right)^{4-0} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^4 \approx 0,0695$.

   b) Probabilidad clásica:

   - $E = \{\text{No hay ningún número negro}\}$. $\#E = 19^4 = 130321$.
   - $P(E) = \frac{\#E}{\#S'} = \frac{130321}{1874161} \approx 0,0695$.

3. ¿Cuantos números negros se esperan en 37 repeticiones del experimento?

$$E(X') = 37 \cdot \frac{18}{37} = 18$$

Capítulo 2

Distribución Geométrica

2.1. Descripción

La distribución geométrica es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número repeticiones independientes necesarias hasta que ocurra un determinado evento.

Es decir, sean $\mathcal{E}$ un experimento, S el espacio muestral asociado a tal experimento y A un suceso del espacio con probabilidad p, entonces X: «Numero de repeticiones independientes de $\mathcal{E}$ hasta que ocurre A por primera vez» es una variable aleatoria con distribución geométrica.

- $X \sim G(p)$.
- $R_X = \mathbb{N}$.

2.2. Función de Probabilidad

La probabilidad de que una variable aleatoria $X \sim G(p)$ sea x es:

$$P(X = x) = q^{x-1}p$$

Demostración El resultado es trivial ya que $X = x$ si y solo si las primeras $x-1$ repeticiones de $\mathcal{E}$ resultaron $\overline{A}$ mientras que la restante da por resultado A.

2.3. Condición de Cierre

[2]

$$\sum_{i\in R_X} P\left(X=i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1}p=\sum_{i=0}^{\infty} q^{i}p\underbrace{=}_{2}\frac{p}{1-q}=\frac{p}{p}=1$$

2.4. Esperanza

$$\begin{aligned}E\left(X\right)=\sum_{i\in R_X} iP\left(X=i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} iP\left(X=i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}p=p\sum_{i=0}^{\infty} iq^{i}=\\ =p\left[\frac{d}{dp}\left(\sum_{i=0}^{\infty} q^{i}\right)\right]=p\left[\frac{d}{dp}\left(-\frac{1}{p}\right)\right]=p\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}\end{aligned}$$

2.5. Varianza y desvió estándar

- $V\left(X\right)=\frac{q}{p^2}$.
- $\sigma_X=\frac{\sqrt{q}}{p}$.

2.6. Ejemplos

2.6.1. Juego de poker

$\mathcal{E}$: «Se reparte una mano de poker».

- $C=\left\{\left(x,y\right)/x\in\left\{A,2,\ldots,10,J,Q,K\right\}\wedge y\in\left\{\clubsuit,\heartsuit,\spadesuit,\diamondsuit\right\}\right\}$. $\#C=52$.
- $S=\left\{X\in\mathcal{P}\left(C\right)/\left|X\right|=5\right\}$. $\#S=\binom{52}{5}=2598960$.
- $A=\{\text{Poker}\}$. $\#A=13\cdot 48=624$. $P\left(A\right)=\frac{624}{2598960}$.

[2] Convergencia de series geométricas ($q<1$)

- X: «Cantidad de manos necesarias hasta que sale poker».
  - $X \sim G\left(\frac{624}{2598960}\right)$.
  - $R_X = \mathbb{N}$.
  - $P(X = x) = \left(\frac{2598336}{2598960}\right)^{x-1}\left(\frac{624}{2598960}\right)$

1. ¿Cual es la probabilidad de conseguir un poker en una partida de 15 manos?

$$P(X \leq 15) = \sum_{i=0}^{15} \left(\frac{2598336}{2598960}\right)^{i-1} \left(\frac{624}{2598960}\right) \approx 0,0036$$

2. ¿Cuantas manos deben jugarse para que lo mas probable sea haber recibido un poker?

$$P(X \leq x) > \frac{1}{2} \iff \sum_{i=1}^{x} pq^{i-1} > \frac{1}{2} \iff p\frac{1-q^x}{1-q} > \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff 1 - q^x > \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} > q^x \iff \log_{\frac{2598336}{2598960}}\left(\frac{1}{2}\right) >?x$$

   Deben jugarse 2887 manos.

3. ¿Luego de cuantas manos se espera recibir un poker?

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{2598960}{624} = 4165$$

2.6.2. Reproducción Humana

$\mathcal{E}$: «Se realiza el acto sexual en el día de ovulación».

$p = \frac{30}{100}$: Probabilidad de quedar embarazada a los 25 años, teniendo sexo en el día de la ovulación.

- X: «Cantidad de relaciones sexuales durante la ovluación necesarias hasta quedar embarazada».
  - $X \sim G\left(\frac{30}{100}\right)$.
  - $R_X = \mathbb{N}$.
  - $P(X = x) = \left(\frac{70}{100}\right)^{x-1}\left(\frac{30}{100}\right)$.

1. ¿Cual es la probabilidad de que sea necesario tener 13 relaciones durante la ovluación para quedar embarazada a los 25 años?

$$P\left(X = 13\right) = \left(\frac{70}{100}\right)^{13-1}\left(\frac{30}{100}\right) \approx 0,004$$

2. ¿Cuantas relaciones sexuales durante la ovulación se esperan sean necesarias para quedar embarazada a los 25 años?

$$E\left(X\right) = \frac{1}{p} = \frac{100}{30} \approx 3,33$$

Capítulo 3

Distribución Hipergeométrica

3.1. Descripción

La distribución hipergeométrica es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de elementos que pertenecen a una determinada categoría en una muestra simple sin reemplazo de una determinada población.

Sea S la población en estudio y A un subconjunto de S, entonces X: «Numero de elementos de A en una muestra simple sin reemplazos de n elementos» es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica.

- $X \sim H(\#S, \#A, n)$.
- $R_X = \{\text{máx}(0, n + \#A - \#S), \ldots, \text{mín}(n, \#A)\}$

3.2. Función de Probabilidad

La probabilidad de que una variable aleatoria $X \sim H(\#S, \#A, n)$ sea x es:

$$P(X = x) = \frac{\binom{\#A}{x} \cdot \binom{\#S - \#A}{n - x}}{\binom{\#S}{n}}$$

Demostración Observemos que si $X = x$ entonces nuestra muestra contiene x elementos de la categoría A. La cantidad de formas diferentes de extraerlos es $\binom{\#A}{x}$. Por cada una de ellas habrá $\binom{\#S-\#A}{n-x}$ formas de elegir los restantes elementos de la categoría complementaria. En total hay $\binom{\#A}{x} \cdot \binom{\#S-\#A}{n-x}$ formas de componer una muestra con x elementos de la categoría A.

La cantidad de muestras diferentes de n elementos de un total de $\#S$ elementos es $\binom{\#S}{n}$.

Luego, calculando el cociente entre los casos favorables y los posibles, logramos derivar la función de probabilidad.

3.3. Condición de Cierre

3.4. Esperanza

3.5. Varianza y desvió estándar

3.6. Ejemplos

Capítulo 4

Distribución de Pascal

4.1. Descripción

4.2. Función de Probabilidad

4.3. Condición de Cierre

4.4. Esperanza

4.5. Varianza y desvió estándar

4.6. Ejemplos

Capítulo 5

Distribución de Poisson

5.1. Descripción

5.2. Función de Probabilidad

5.3. Condición de Cierre

$$\sum_{i \in R_X} P(X = i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{1}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

5.4. Esperanza

$$E(X) = \sum_{i \in R_X} iP(X = i) = \sum_{i=0}^{\infty} iP(X = i) = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} =$$
$$= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{1}{i!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

5.5. Varianza y desvió estándar

$$E\left(X^2\right) = \sum_{i\in R_X} i^2 P\left(X=i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 P\left(X=i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{(i-1)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(i+1\right) \frac{e^{-\lambda}\lambda\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[i \frac{e^{-\lambda}\lambda\lambda^i}{i!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda\lambda^i}{i!} \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left[\lambda \left(i \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \right) \right] = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \left[i \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \right] =$$

$$= \lambda \left[\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}}_{\lambda} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}}_{1} \right] = \lambda^2 + \lambda$$

$$V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left[E\left(X\right)\right]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\sigma_X = \sqrt{\lambda}$$

5.6. Ejemplos

Capítulo 6

Distribución Multinomial

6.1. Descripción

6.2. Función de Probabilidad

6.3. Condición de Cierre

6.4. Esperanza

6.5. Varianza y desvió estándar

6.6. Ejemplos

Apéndice A

Resumen de distribuciones discretas

Distribución	R_X	$p(x)$	$E(X)$	$V(X)$	$\approx$
$Be(p)$	$\{0,1\}$	$p^x q^{1-x}$	p	pq	-
$Bi(n,p)$	$\{0,\dots,n\}$	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$	np	npq	$Po(np)$
$Pa(r,p)$	$\{r,\dots\}$	$\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	
$G(p)$	$\mathbb{N}$	$q^{x-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$Pa(1,p)$
$H(N,d,n)$		$\frac{\binom{d}{x}\cdot\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq\frac{N-n}{N-1}$	$Bi\left(n,\frac{d}{N}\right)$
$Po(\lambda)$	$\mathbb{N}_0$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	λ	λ	