1. Considerar los siguientes diagramas. En ambos casos, probar que si los dos triángulos conmutan, también conmuta el cuadrado.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "r"] & b \arrow[d, "s"] \\ c \arrow[r, "t"'] & d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & b \arrow[d, "s"] \arrow[dl, "r"] \\ c \arrow[r, "t"'] & d \end{tikzcd}$$

Solución

- Sabemos que $s \circ p = r$ y $t \circ q = r$ por lo tanto $s \circ p = r = t \circ q$, es decir que el cuadrado conmuta.
- Sabemos que $r \circ p = q$ y $t \circ r = s$ por lo tanto:

$$s \circ p = (t \circ r) \circ p = t \circ (r \circ p) = t \circ q$$

2. Sea P un conjunto ordenado. Mostrar que P puede considerarse como una categoría.

Solución Definimos:

- $ob\, \mathcal{P} = P$.
- $mor\, \mathcal{P} =\leq$.
- $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$.

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición*: La composición esta bien definida pues si (b, c) y (a, b) son morfismos, por transitividad también lo será su composición (a, c).
- *Morfismo identidad*: Para cada objeto a por reflexividad $(a, a) \in\leq$ por lo que $(a, a) \in mor\, \mathcal{P}$; a este morfismo lo llamaremos id_a resultando
  - $(a, b) \circ id_a = (a, b) \circ (a, a) = (a, b)$.
  - $id_a \circ (b, a) = (a, a) \circ (b, a) = (b, a)$.

- *Asociatividad*: Sean (a,b), (b,c) y (c,d) morfismos, por transitividad también son morfismos $\boxed{(a,c)}$, $\boxed{(b,d)}$ y (a,d) luego
  - $((c,d)\circ(b,c))\circ(a,b) = \boxed{(b,d)}\circ(a,b) = (a,d)$.
  - $(c,d)\circ((b,c)\circ(a,b)) = (c,d)\circ\boxed{(a,c)} = (a,d)$.

3. Verificar que un monoide M define una categoría con un único objeto cuyas flechas son los elementos de M.

   Solución Definimos:

   - $ob\,\mathcal{M} = \{*\}$.
   - $mor\,\mathcal{M} = M$.
   - $x\circ y = x+y$.

   Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

   - *Buena definición*: Por clausura de monoides, si x e y son morfismos, también lo será su composición $x+y$.
   - *Morfismo identidad*: Para el único objeto $*$ existe el morfismo $0 = id_*$ de manera tal que
     - $x\circ id_* = x+0 = x$.
     - $id_*\circ y = 0+y = y$.
   - *Asociatividad*: Para tres morfismos x,y,z (elementos de M) por clausura de monoide también son morfismos $\boxed{x+y}$ y $\boxed{y+z}$, luego

   $$(x\circ y)\circ z = \left(\boxed{x+y}\right)+z = x+\left(\boxed{y+z}\right) = x\circ(y\circ z)$$

4. Dada una categoría $\mathcal{C}$, podemos definir $\mathcal{C}^{op}$ con los mismo objetos que $\mathcal{C}$ pero las flechas con sentido inverso, es decir, $ob\,\mathcal{C}^{op} = ob\,\mathcal{C}$ y $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$. Verificar que $\mathcal{C}^{op}$ es una categoría.

   Solución Definamos:

   - $mor\,\mathcal{C}^{op} = \{f_{op} : X\to Y / f : Y\to X \in mor\,\mathcal{C}\}$.
   - $g_{op}\circ_{op} f_{op} = (f\circ g)_{op}$

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición*: Dadas $f_{op} : A \to B$ y $g_{op} : B \to C$ por definición existen en $\mathcal{C}$ los morfismos $f : B \to A$ y $g : C \to B$ luego es valida la composición $f \circ g$ y por definición $(f \circ g)_{op}$ es un morfismo de $\mathcal{C}^{op}$.
- *Morfismo identidad*: Para cada objeto X sabemos que existe id_X, luego $id_{X_{op}}$ es un morfismo de la categoría opuesta para el cual
  - $f_{op} \circ_{op} id_{X_{op}} = (id_X \circ f)_{op} = f_{op}$.
  - $id_{X_{op}} \circ_{op} h_{op} = (h \circ id_X)_{op} = h_{op}$.
- *Asociatividad*: Sean $f_{op} : A \to B$, $g_{op} : B \to C$ y $h_{op} : C \to D$, luego
  - $(h_{op} \circ_{op} g_{op}) \circ_{op} f_{op} = (g \circ h)_{op} \circ_{op} f_{op} = f \circ (g \circ h)$.
  - $h_{op} \circ_{op} (g_{op} \circ_{op} f_{op}) = h_{op} \circ_{op} (f \circ g)_{op} = (f \circ g) \circ h$.

5. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, se define $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ cuyos objetos son pares ordenados de la forma (C, D) con $C \in ob\,\mathcal{C}$, $D \in ob\,\mathcal{D}$ y además:

$$Hom_{\mathcal{C}\times D}\left((C, D), (C', D')\right) = Hom_{\mathcal{C}}\left(C, C'\right) \times Hom_{\mathcal{C}}\left(D, D'\right)$$

Verificar que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una categoría.

Solución Definimos:

- $ob\,\mathcal{C} \times \mathcal{D} = ob\,\mathcal{C} \times ob\,\mathcal{D}$.
- $(p, q) \circ_{\times} (f, g) = (p \circ f, q \circ g)$.

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Morfismo identidad*: Para cada objeto $(C, D) \in ob\,\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ existen los objetos $C \in ob\,\mathcal{C}$ y $D \in ob\,\mathcal{D}$ y también los morfismos id_C e id_D, por lo que también existe el morfismo (id_C, id_D) para el cual
  - $(f, g) \circ_{\times} (id_C, id_D) = (f \circ id_C, g \circ id_D) = (f, g)$.
  - $(id_C, id_D) \circ_{\times} (f, g) = (id_C \circ f, id_D \circ g) = (f, g)$.

- *Asociatividad*: Sean $(f, g) : (C_1, C_2) \to (D_1, D_2)$, $(p, q) : (C_2, C_3) \to (D_2, D_3)$ y $(r, s) : (C_3, C_4) \to (D_3, D_4)$, luego
    - $((r, s) \circ_\times (p, q)) \circ_\times (f, g) = (r \circ p, s \circ q) \circ_\times (f, g) = (r \circ p \circ f, s \circ q \circ g)$.
    - $(r, s) \circ_\times ((p, q) \circ_\times (f, g)) = (r, s) \circ_\times (p \circ f, q \circ g) = (r \circ p \circ f, s \circ q \circ g)$.

6. Definamos $C^{\to}$ como la categoría de las flechas de una categoría C, es decir, los objetos de $C^{\to}$ son las flechas de C. Una flecha de $C^{\to}$ de $f : A \to B$ en $g : D \to E$ es un par (a, b) de flechas de C tales que $g \circ a = b \circ f$.

    a) Expresar las flechas de $C^{\to}$ en términos de diagramas conmutativos.

    b) Probar que si en el diagrama los cuadrados conmutan, entonces también conmuta el rectángulo exterior:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "p"] \arrow[d, "t"'] & b \arrow[r, "q"] \arrow[d, "u"] & c \arrow[d, "v"] \\
d \arrow[r, "r"'] & e \arrow[r, "s"'] & f
\end{tikzcd}$$

    c) Utilizar el apartado anterior para definir la composición en $C^{\to}$.

    d) Verificar que $C^{\to}$ es una categoría.

Soluciones

a) El par (a, b) es una flecha de $C^{\to}$ si el siguiente diagrama conmuta en C:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\
A' \arrow[r, "g"'] & B'
\end{tikzcd}$$

b) Sabemos que $u \circ p = r \circ t$ y $v \circ q = s \circ u$ y queremos ver si $v \circ (q \circ p) = s \circ (r \circ t)$. Por asociatividad en C $v \circ (q \circ p) = (v \circ q) \circ p$, es decir $v \circ (q \circ p) = (s \circ u) \circ p = s \circ (u \circ p) = s \circ (r \circ t)$.

c) Para (r,p) y (s,q) como en el diagrama, definimos $(s,q)\circ(r,p)$ como $(s\circ r, q\circ p)$.

d)

- Para cada $f : A \to B$ en $ob\, C^{\to}$ definimos $id_f = \big(id_{dom(f)}, id_{cod(f)}\big)$.
  - Observemos que id_f es una flecha de $C^{\to}$ pues el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_A"'] & B \arrow[d, "id_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

  - Sean $a : A \to A'$ y $b : B \to B'$ como en el diagrama, luego:

$$(a,b)\circ id_f = \big(a\circ id_{dom(f)}, b\circ id_{cod(f)}\big) = (a,b)$$

  - Análogamente sean $a : D \to A$ y $b : E \to B$, entonces:

$$id_f\circ(a,b) = \big(id_{dom(f)}\circ a, id_{cod(f)}\circ b\big) = (a,b)$$

- Sean (r,p), (s,q) y (x,w) como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "p"] \arrow[d, "t"'] & b \arrow[r, "q"] \arrow[d, "u"] & c \arrow[r, "w"] \arrow[d, "v"] & g \arrow[d, "y"] \\ d \arrow[r, "r"'] & e \arrow[r, "s"'] & f \arrow[r, "x"] & h \end{tikzcd}$$

$$((r,p)\circ(s,q))\circ(x,w) = (r\circ s, p\circ q)\circ(x,w) = ((r\circ s)\circ x, (p\circ q)\circ w) =$$

$$= (r\circ(s\circ x), p\circ(q\circ w)) = (r,p)\circ(s\circ x, q\circ w) = (r,p)\circ((s,q)\circ(x,w))$$

7. Sean C una categoría y A un objeto de C. Definimos $C|A$ como la categoría cuyos objetos son las flechas f de C tales que $cod\,(f) = A$. Una flecha g en $C|A$ de $f : X \to A$ en $h : Y \to A$ es una flecha $g : X \to Y$ de C tal que $f = h\circ g$.

a) Expresar las flechas de $C|A$ en términos de diagramas conmutativos.

b) Verificar que $C|A$ es una categoría.

c) Si P es la categoría definida por un conjunto ordenado y $x \in P$, determinar $P|x$.

Soluciones

a) Si el siguiente diagrama conmuta en C, entonces g es una flecha de $C|A$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \\ Y \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

b)

- Dados dos morfismos $g : X \to Y$ y $p : Y \to Z$ en $C|A$ definimos la composición en $C|A$ como la composición en C y para cada objeto $f : X \to A$ definimos el morfismo $id_f = id_{dom(f)}$.
    - Observemos que $id_{dom}(f)$ es un morfismo de la categoría pues el siguiente diagrama conmuta:

    $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_f"'] & A \\ X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

    - Una flecha α que parte de f debe tener tipo $X \to Y$, luego $\alpha \circ id_f = \alpha$.
    - Una flecha β que llega a f debe tener tipo $W \to X$, luego $id_f \circ \beta = \beta$.

- Sean g, p, q como en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \\
Y \arrow[ur, "h"'] \arrow[d, "p"'] & \\
Z \arrow[uur, bend right, "q"] \arrow[r, "r"'] & W \arrow[uu, bend right, "s"']
\end{tikzcd}$$

  luego $(r \circ p) \circ g = r \circ (p \circ g)$ por asociatividad en C.

c) COMPLETAR.

8. Probar que en Set los monomorfismos (epimorfismos) son exactamente las funciones inyectivas (respectivamente sobreyectivas).

Solución

-
    - $\boxed{\Rightarrow}$: Sea $f : B \to C$ un monomorfismo, luego para cualquier conjunto A y funciones $g, h : A \to B$ sabemos que:

    $$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

    Supongamos que f no es inyectiva, es decir que existen $b_1 \neq b_2 \in B$ tales que $f(b_1) = f(b_2)$. Definimos funciones constantes g, h tales que $g(x) = b_1$ y $h(x) = b_2$, luego:

    $$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(b_1) = f(b_2) = f(h(x)) = f \circ h(x)$$

    y como f es monomorfismo resulta $g = h$ lo cual es una contradicción pues $g(x) = b_1 \neq b_2 = h(x)$.

- $\boxed{\Leftarrow}$: Sea $f : B \to C$ una función inyectiva, luego sabemos que $f(b_1) = f(b_2) \iff b_1 = b_2$. Para $g, h : A \to B$ tales que $f \circ g = f \circ h$ resulta:

  $$f \circ g(x) = f \circ h(x) \iff f(g(x)) = f(h(x)) \iff g(x) = h(x)$$

▪

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sea $f : A \to B$ un epimorfismo, luego para cualquier conjunto C y funciones $g, h : B \to C$ sabemos que:

  $$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

  Supongamos que f no es sobreyectiva, es decir que existe $b \in B$ tal que $f(x) \neq b$ (para cualquier x). Definimos g, h iguales salvo en b donde $g(b) = c_1$ y $h(b) = c_2$, luego:

  $$g \circ f(x) = g(f(x)) = h(f(x)) = h \circ f(x)$$

  y como f es un epimorfismo resulta $g = h$ lo cual es una contradicción.
- $\boxed{\Leftarrow}$: Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva y sean dos funciones $g, h : B \to C$ tales que $g \circ f = h \circ f$. Supongamos que $g \neq h$, luego existe $f(x) \in B$ tal que $g(f(x)) \neq h(f(x))$ lo cual es una contradicción pues:

  $$g \circ f(x) = h \circ f(x) \iff g(f(x)) = h(f(x))$$

9. Sean C una categoría y f, g flechas de C. Probar que:

   a) Si f y g son monomorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.

   b) Si $g \circ f$ es un monomorfismo, f también lo es.

   c) Si f y g son epimorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.

   d) Si $g \circ f$ es un epimorfismo, g también lo es.

   e) Si f^{-1} es la inversa de f y g^{-1} es la inversa de g, entonces $f^{-1} \circ g^{-1}$ es la inversa de $g \circ f$.

Soluciones Sean f, g, p, q, r, s como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "p"] \arrow[r, bend right, "q"'] & B \arrow[r, "f"] & C \arrow[r, "g"] & D \arrow[r, bend left, "r"] \arrow[r, bend right, "s"'] & E \end{tikzcd}$$

a) Supongamos $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q$ luego por asociatividad resulta $g \circ (f \circ p) = g \circ (f \circ q)$ y como g es monomorfismo $f \circ p = f \circ q$. Nuevamente como f es monomorfismo tenemos $p = q$. En definitiva: $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q \Rightarrow p = q$, es decir, $g \circ f$ es monomorfismo.

b) Supongamos $f \circ p = f \circ q$, luego $g \circ (f \circ p) = g \circ (f \circ q)$ y por asociatividad $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q$. Como $g \circ f$ es monomorfismo resulta $p = q$. En definitiva: $f \circ p = f \circ q \Rightarrow p = q$.

c) Supongamos $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f)$ luego por asociatividad resulta $(r \circ g) \circ f = (s \circ g) \circ f$ y como f es epimorfismo $r \circ g = s \circ g$. Nuevamente como g es epimorfismo tenemos $r = s$. En definitiva: $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f) \Rightarrow r = s$, es decir, $(g \circ f)$ es epimorfismo.

d) Supongamos $r \circ g = s \circ g$, luego $(r \circ g) \circ f = (s \circ g) \circ f$ y por asociatividad $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f)$. Como $g \circ f$ es epimorfismo resulta $r = s$. En definitiva: $r \circ g = s \circ g \Rightarrow r = s$.

e) Sabemos que:

- $f \circ f^{-1} = id_C$.
- $f^{-1} \circ f = id_B$.
- $g \circ g^{-1} = id_D$.
- $g^{-1} \circ g = id_C$.

Ahora:

- $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_D$.
- $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ f = id_B$.

10. Mostrar que una flecha de una categoría puede ser monomorfismo y epimorfismo y no isomorfismo.

Solución Consideremos en Mon el morfismo $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ tal que $f(n) = n$. Observemos que $n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$.

- Monomorfismo: Sean $g, h : M \to \mathbb{N}_0$ morfismos tales que $f \circ g = f \circ h$ y supongamos existe $m \in M$ tal que $g(m) \neq h(m)$, luego:

$$f \circ g(m) = f \circ h(m) \iff f(g(m)) = f(h(m))$$

  lo cual es una contradicción. Por lo tanto f es monomorfismo.

- Epimorfismo: Sean $g, h : \mathbb{Z} \to M$ morfismos tales que $g \circ f = h \circ f$ y supongamos existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $g(z) \neq h(z)$, luego:

$$g \circ f(z) = h \circ f(z) \iff g(f(z)) = h(f(z))$$

  lo cual es una contradicción. Por lo tanto f es epimorfismo.

- Isomorfismo: Supongamos que existe $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ tal que $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{Z}}$ y $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{N}_0}$. En particular para $n \geq 0$ sabemos que $f^{-1}(n) = n$, luego:

$$0 = f^{-1}(0) = f^{-1}(-n+n) = f(-n)^{-1} + f(n)^{-1} = f(-n)^{-1} + n$$

  por lo que $f(-n)^{-1} = -n$ lo cual es absurdo ya que $-n \notin \mathbb{N}_0$. Por lo tanto f no es isomorfismo.

11. Mostrar que una flecha de una categoría concreta puede ser epimorfismo y no sobreyectiva.

Solución La misma función del ejercicio anterior cumple dichas características.

12. Mostrar que dos objetos terminales en una categoría son isomorfos. Por dualidad: ¿qué se puede decir de los objetos iniciales?

Solución Sean 1 y $1'$ dos elementos terminales de una categoría. Por ser 1 terminal, existe un único morfismo $f : 1 \to 1'$ y análogamente existe un único morfismo $g : 1' \to 1$. Como $1'$ es terminal existe un único morfismo de $1'$ en $1'$ luego $f \circ g : 1' \to 1'$ debe ser $id_{1'}$. Análogamente para $g \circ f$.

Dos objetos iniciales en una categoría son isomorfos.

13. ¿Cuales son los objetos iniciales y terminales en $Set \times Set$? ¿Cuáles en $Set^{\rightarrow}$?

Solución

- $Set \times Set$:
  - Iniciales: $(\emptyset, \emptyset)$.
  - Terminales: $(\{x\}, \{y\})$.
- $Set^{\rightarrow}$:
  - Iniciales: $0 : \emptyset \rightarrow \emptyset$.
  - Terminales: $f : \{x\} \rightarrow \{y\}$.

14. Dar una categoría sin objetos iniciales. Dar una sin objetos finales. Dar una donde los objetos finales e iniciales coincidan.

Solución

- La categoría del poset $(\mathbb{Z}^-, \leq)$ no tiene objetos iniciales.
- La categoría del poset $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ no tiene objetos finales.
- El monoide trivial es una categoría cuyo único objeto es final e inicial.

15. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Probar que si dos objetos admiten producto (coproducto), éste es único salvo isomorfismo.

Solución Sean A y B dos objetos con productos $A \times B$ (con proyecciones π_A y π_B) y $\overline{A \times B}$ (con proyecciones $\overline{\pi_A}$ y $\overline{\pi_B}$).

Como $A \times B$ es producto sabemos que para cualquier objeto C y par de funciones $f : C \rightarrow A$ y $g : C \rightarrow B$ (en particular para $\overline{A \times B}$ y sus proyecciones) existe un único morfismo $\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle : \overline{A \times B} \rightarrow A \times B$ tal que $\pi_A \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle = \overline{\pi_A}$ y $\pi_B \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle = \overline{\pi_B}$.

Análogamente existe un único morfismo $\langle \pi_A, \pi_B \rangle : A \times B \rightarrow \overline{A \times B}$ tal que $\overline{\pi_A} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_A$ y $\overline{\pi_B} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_B$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[ddl, bend right, "\pi_A"'] \arrow[ddr, bend left, "\pi_B"] \arrow[d, dotted, "\langle \pi_A, \pi_B \rangle"] & \\
 & \overline{A \times B} \arrow[dl, "\overline{\pi_A}"'] \arrow[dr, "\overline{\pi_B}"] \arrow[d, dotted, "\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Sabemos que entre $A \times B$ y $A \times B$ existe un único morfismo f tal que $\pi_A \circ f = \pi_A$ y $\pi_B \circ f = \pi_B$. Veamos que $\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle$ cumple estas propiedades:

$$\pi_A \circ (\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle) = (\pi_A \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle) \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \overline{\pi_A} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_A$$

$$\pi_B \circ (\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle) = (\pi_B \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle) \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \overline{\pi_B} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_B$$

Como $id_{A \times B}$ también cumple dichas propiedades, entonces debe ser $id_{A \times B} = \langle \pi_A, \pi_B \rangle \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle$. Análogamente $\langle \pi_A, \pi_B \rangle \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle = id_{\overline{A \times B}}$.

16. Sea P un poset. Determina objetos iniciales, objetos terminales, productos y coproductos en las siguientes categorías:

    a) *Poset*.
    b) *Set*.
    c) *Mon*.
    d) *Grp*.

    Soluciones

    a) *Poset*:
    - Iniciales: $0 = (\emptyset, \emptyset)$.
    - Terminales: $1 = (\{x\}, \Delta)$.
    - Productos: $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B) = ((A \times B, \leq_A \wedge \leq_B), fst, snd)$.
    - Coproductos: $A + B =$ COMPLETAR.

b) *Set*:
   - Iniciales: $0 = \emptyset$.
   - Terminales: $1 = \{x\}$.
   - Productos: $A \times B = (A \times B, fst, snd)$.
   - Coproductos: $A + B = (A \uplus B, \times \{0\}, \times \{1\})$.

c) *Mon*:
   - Iniciales: $0 = (\{e\}, \oplus)$
   - Terminales: $1 = 0$.
   - Productos: $(A, \oplus) \times (B, \otimes) = ((A \times B,), ,)$ COMPLETAR.
   - Coproductos: $(A, \oplus) + (B, \otimes) = ((,), ,)$ COMPLETAR.

d) *Grp*:
   - Iniciales: $0 = (\{e\}, \oplus)$
   - Terminales: $1 = 0$.
   - Productos: $(A, \oplus) \times (B, \otimes) = ((,), ,)$ COMPLETAR.
   - Coproductos: $(A, \oplus) + (B, \otimes) = ((,), ,)$ COMPLETAR.

17. Dar una categoría donde algún par de objetos carecen de producto.

    Solución $(\mathbb{Q}, \leq)$.

18. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean A, B, C, D objetos de $\mathcal{C}$. Mostrar que en caso de existir $A \times B$, $C \times D$ y dos morfismos $f : A \to C$ y $g : B \to D$, entonces puede definirse un morfismo $f \times g : A \times B \to C \times D$.

    Solución

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, dashed, "\langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle"] & B \arrow[d, "g"] \\
C & C \times D \arrow[l, "\pi_3"] \arrow[r, "\pi_4"'] & D
\end{tikzcd}
$$

Dicho morfismo existe pues lo garantiza la propiedad universal de $C \times D$.

19. Mostrar las siguientes identidades:

   a) $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id$.
   b) $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$.
   c) $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle$.
   d) $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k)$.
   e) $\langle [f, g], [h, k] \rangle = [\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle]$.

Soluciones

a) Sabemos que $\langle \pi_A, \pi_B \rangle$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, dashed, "\langle \pi_A, \pi_B \rangle"] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Observemos que id hace conmutar el diagrama pues $\pi_B \circ id = \pi_B$ y $\pi_A \circ id = \pi_A$; y como solo existe un morfismo con esa propiedad, debe ser $id = \langle \pi_A, \pi_B \rangle$.

b) Sabemos que $\langle f, g \rangle$ es el único morfismo que hace conmutar el diagrama interior:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, "h"] & \\
& D \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f, g \rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Además sabemos que el único morfismo que hace conmutar el diagrama exterior es $\langle f \circ h, g \circ h \rangle$. Veamos entonces que $\langle f, g \rangle$ también conmuta el diagrama exterior:

- $\pi_B \circ (\langle f, g \rangle \circ h) = (\pi_B \circ \langle f, g \rangle) \circ h = g \circ h$.
- $\pi_A \circ (\langle f, g \rangle \circ h) = (\pi_A \circ \langle f, g \rangle) \circ h = f \circ h$.

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

e) COMPLETAR.

20. Probar los siguientes isomorfismos:

a) $A \times B \cong B \times A$.

b) $A \times 1 \cong A$.

c) $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$.

d) ¿Cuales son los enunciados duales?

Soluciones

a) Sean $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ y $(B \times A, \pi_3, \pi_4)$ dos productos. Como $A \times B$ es producto sabemos que existe un único morfismo $\langle \pi_4, \pi_3 \rangle$ entre $B \times A$ y $A \times B$ tal que $\pi_1 \circ \langle \pi_4, \pi_3 \rangle = \pi_4$ y $\pi_2 \circ \langle \pi_4, \pi_3 \rangle = \pi_3$.

Análogamente un único morfismo $\langle \pi_2, \pi_1 \rangle$ entre $A \times B$ y $B \times A$ tal que $\pi_3 \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle = \pi_2$ y $\pi_4 \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle = \pi_1$:

$$\begin{tikzcd}
& B \times A \arrow[dl, "\pi_4"'] \arrow[d, dashed, "\langle \pi_4, \pi_3 \rangle"] \arrow[dr, "\pi_3"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[d, dashed, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle"] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\
B & B \times A \arrow[l, "\pi_3"] \arrow[r, "\pi_4"'] & A
\end{tikzcd}$$

También sabemos que existe un único morfismo entre $A \times B$ y si mismo que hace conmutar el diagrama, por lo que este debe ser el morfismo identidad. Análogamente para $B \times A$.

Como el morfismo identidad es el único morfismo entre $A \times B$ y si mismo que hace conmutar el diagrama y $\langle \pi_4, \pi_3 \rangle \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle$ también tiene esta propiedad, entonces se trata del mismo morfismo. Análogamente para $B \times A$.

b) Por ser $A \times 1$ producto y 1 elemento terminal, sabemos que existen los siguientes morfismos:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "id_A"'] \arrow[d, dashed, "\langle id_A, g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times 1 \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & 1 \end{tikzcd}$$

donde $\boxed{\pi_1 \circ \langle id_A, g\rangle = id_A}$.

Ademas observemos que:

- $\pi_1 \circ (\langle id_A, g\rangle \circ \pi_1) = (\pi_1 \circ \langle id_A, g\rangle) \circ \pi_1 = id_A \circ \pi_1 = \pi_1$
- $\pi_2 \circ (\langle id_A, g\rangle \circ \pi_1) = \pi_2$

por lo que $\boxed{\langle id_A, g\rangle \circ \pi_1 = id_{A\times 1}}$.

c) COMPLETAR.

d)

- $A + B \cong B + A$.
- $A + 0 \cong A$.
- $A + (B + C) \cong (A + B) + C$.

21. Probar que si dos morfismos $f, g : X \to Y$ admiten egalizador (coegalizador), éste es único salvo isomorfismo.

Solución Sean $e_1 : X_1 \to A$ y $e_2 : X_2 \to A$ dos ecualizadores de $f, g : A \to B$, luego sabemos:

a) $f \circ e_1 = g \circ e_1$.

b) $f \circ e_2 = g \circ e_2$.

c) $\forall e' : X' \to A$ para el cual $f \circ e' = g \circ e'$ existe un único $k' : X' \to X_1$ tal que $e_1 \circ k' = e'$.

d) $\forall e'' : X'' \to A$ para el cual $f \circ e'' = g \circ e''$ existe un único morfismo $k'' : X'' \to X_2$ tal que $e_2 \circ k'' = e''$.

$$
\begin{tikzcd}
X'' \arrow[d, dashed, "\exists! k''"'] \arrow[ddr, "e''"] & & \\
X_2 \arrow[dr, "e_2"'] & & \\
& A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \\
X_1 \arrow[ur, "e_1"] & & \\
X' \arrow[u, dashed, "\exists! k'"] \arrow[uur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Por c), sabemos que para $e' = e_2$ existe un único $k' : X_2 \to X_1$ tal que $e_1 \circ k' = e_2$ y análogamente por d), existe un único $k'' : X_1 \to X_2$ tal que $e_2 \circ k'' = e_1$. Tenemos entonces:

$$e_2 = e_1 \circ k' = e_2 \circ (k'' \circ k)' \Rightarrow k'' \circ k' = id_{X_2}$$

$$e_1 = e_2 \circ k'' = e_1 \circ (k' \circ k'') \Rightarrow k' \circ k'' = id_{X_1}$$

por lo que ambos ecualizadores son isomorfismos.

22. Encontrar el ecualizador en Set.

Solución Veamos primero un ejemplo:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] & \mathbb{Z} \arrow[r, bend left, "x^2"] \arrow[r, bend right, "2x"'] & \mathbb{R} \\
X' \arrow[u, dashed, "\exists! k"] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Observemos el conjunto de valores para los cuales $f = g$: $X = \{0, 2\}$, luego el morfismo $e(x) = x$ cumple trivialmente la conmutatividad.

Consideremos además $e' : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que $e'(2x) = 2$ y $e'(2x+1) = 0$, es evidente que este morfismo también conmuta el diagrama.

Intentemos definir un morfismo $k : \mathbb{N} \to X$ tal que $e \circ k = e'$, es decir: $e(k(x)) = e'(x) \iff k(x) = e'(x)$, por lo que esta es la única forma de definirlo.

En definitiva el ecualizador de dos funciones $f, g : A \to B$ es:

$$e : \{a \in A : f(a) = g(a)\} \hookrightarrow B$$

23. Sean $f, g : X \to Y$ dos morfismos en Set. Probar que el coegalizador de f y g es el cociente de Y por la relación de equivalencia $y \equiv z$ si y sólo si existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ y $z = g(x)$ o bien $y = g(x)$ y $z = f(x)$.

    Solución COMPLETAR.

24. Probar que en una categoría $\mathcal{C}$ todo ecualizador e es un monomorfismo. Mostrar que si además e es epimorfismo, entonces se tiene un isomorfismo.

    Solución Sea $e : X \to A$ ecualizador de $f, g : A \to B$, luego $f \circ e = g \circ e$. Consideremos ademas dos morfismos $k', k'' : X' \to X$ para los cuales $e \circ k' = e \circ k''$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \\ X' \arrow[u, bend left, "k'"] \arrow[u, bend right, "k''"'] & & \end{tikzcd}$$

    Si definimos $e' := e \circ k'$ tenemos que $\boxed{f \circ e'} = f \circ e \circ k' = g \circ e \circ k' = \boxed{g \circ e'}$ lo que implica por propiedad universal de ecualizadores que k' es el único morfismo para el cual $e \circ k' = e'$, sin embargo también ocurre que $e \circ k'' = e'$; luego k' y k'' deben ser el mismo morfismo, de donde concluimos que e es monomorfismo.

Supongamos que ademas de monomorfismo también es epimorfismo, luego como $f \circ e = g \circ e$ resulta $f = g$.

Si también consideramos que $f \circ id_A = f = g = g \circ id_A$, sabemos que existe un único morfismo $k : A \to X$ tal que $e \circ k = id_A$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \\
A \arrow[u, dashed, "\exists! k"] \arrow[ur, "id_A"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Como $\boxed{e \circ id_X} = e = id_A \circ e = (e \circ k) \circ e = \boxed{e \circ (k \circ e)}$ y e es monomorfismo, resulta $k \circ e = id_X$.

25. El *pullback* de dos morfismos $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$ consiste en un objeto P junto con dos morfismos $p_1 : P \to X$, $p_2 : P \to Y$ tal que $f \circ p_1 = g \circ p_2$, y además si existe otro objeto Q con dos morfismos $q_1 : Q \to X$, $q_2 : Q \to Y$ tal que $f \circ q_1 = g \circ q_2$, entonces existe un único morfismo $u : Q \to P$ tal que $p_1 \circ u = q_1$ y $p_2 \circ u = q_2$. A continuación, un diagrama que muestra la situación:

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "\exists! u"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

Probar que el pullback de dos morfismos, si existe, es único salvo isomorfismo.

Solución COMPLETAR.

26. Encontrar el pull-back en Set.

Solución $P = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$, $p1 = fst$, $p2 = snd$.

27. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con exponenciales.

   a) Probar $curry\,(eval_{A,B}) = id_{B^A}$.

   b) Dado un morfismo $f : B \to C$, construir un morfismo $B^S \to C^S$.

   c) Dado un morfismo $f : S \to C^B$, construir un morfismo $uncurry\,(f) : S \times B \to C$.

   d) Probar $uncurry\,(curry\,(f)) = f$ y $curry\,(uncurry\,(f)) = f$.

Soluciones

a) Como B^A es un exponencial, sabemos que para cualquier morfismo $g : C \times A \to B$ (en particular para ε) existe un único morfismo $\widetilde{\varepsilon} : B^A \to B^A$ tal que $\varepsilon \circ (\widetilde{\varepsilon} \times id_A) = \varepsilon$:

$$\exists!\widetilde{\varepsilon} \circlearrowleft B^A \qquad \begin{tikzcd} B^A \times A \arrow[r, "\varepsilon"] & B \\ B^A \times A \arrow[u, "\widetilde{\varepsilon} \times id_A"] \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B^A \arrow[d, dashed, "\widetilde{\varepsilon}"'] & B^A \times A \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, dashed, "\widetilde{\varepsilon} \times id_A"] & A \arrow[d, "id_A"] \\ B^A & B^A \times A \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & A \end{tikzcd}$$

Puesto que id_{B^A} también tiene esa propiedad, entonces $\widetilde{\varepsilon} = id_{B^A}$.

b)

$$\begin{tikzcd} C^S \\ B^S \arrow[u, dashed, "\widetilde{f \circ \varepsilon_{SB}}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C^S \times S \arrow[r, "\varepsilon_{SC}"] & C \\ B^S \times S \arrow[ur, "f \circ \varepsilon_{SB}"'] & \end{tikzcd}$$

c) Por ser $C^B \times B$ un producto existe $f \times id_B$:

$$\begin{tikzcd} S & S \times B \arrow[l, "\pi_3"'] \arrow[d, dashed, "\exists!"'] \arrow[dr, "\pi_4"] & \\ C^B \arrow[from=u, "f"'] & C^B \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd}$$

luego $uncurry\,(f) := \varepsilon \circ (f \times id_B) : S \times B \to C$.

d)

- Sean $f : S \to C^B$, y $h := uncurry\,(f) = \varepsilon \circ (f \times id_B)$. Como C^B es exponencial entonces para $uncurry\,(f)$ existe un único morfismo $\widetilde{h} : S \to C^B$ para el cual $\varepsilon \circ \left(\widetilde{h} \times id_B\right) = h$ y como también $\varepsilon \circ (f \times id_B) = h$ entonces $\widetilde{h} \times id_B = f \times id_B$ por lo que $\widetilde{h} = f$, es decir: $curry\,(uncurry\,(f)) = f$.
- Sea $f : S \times B \to C$. Como C^B es exponencial entonces para f existe un único morfismo $\widetilde{f} : S \to C^B$ para el cual $\varepsilon \circ \left(\widetilde{f} \times id_B\right) = f$, luego $uncurry\left(\widetilde{f}\right) = \varepsilon \circ \left(\widetilde{f} \times id_B\right) = f$.

28. Sea $\mathcal{C}$ una CCC y sean A, B objetos de $\mathcal{C}$. Probar:

   a) B^A es único salvo isomorfismo.

   b) $1^A \cong 1$.

   c) $B^1 \cong B$.

   Soluciones

   a) COMPLETAR.

   b) COMPLETAR.

   c) COMPLETAR.

29. Hallar los exponenciales en Set.

   Solución $B^A = Hom\,(A, B)$.

30. Demostrar que un álgebra de Boole es una CCC.

    Solución Un álgebra de Boole es un retículo acotado distributivo con complementos. Consideremos entonces la categoría inducida por el poset.

    - En dicha categoría el producto corresponde al ínfimo, luego por ser retículo existe el producto para cualquier par de elementos.
    - Por ser acotado tiene mínimo y máximo luego en la categoría corresponden al objeto inicial y terminal.

    Veremos ahora que si C es complemento de B entonces C^B es exponencial.

$$\begin{tikzcd} C^B & & C^B \wedge B \arrow[r] & C \\ A \arrow[u] & & A \wedge B \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

    Sabemos que $C \vee B = 1$ y $C \wedge B = 0$. Debemos ver que:

    - $C^B \wedge B \leq C$: COMPLETAR.
    - $A \wedge B \leq C \Rightarrow A \wedge B \leq C^B \wedge B$: COMPLETAR.
    - $A \wedge B \leq C \Rightarrow A \leq C^B$: COMPLETAR.

31. En una categoría con coproductos y objeto final, podemos definir los booleanos como el objeto $Bool = 1 + 1$. En este caso, a i_1 le llamamos $true$ y a i_2 le llamamos $false$. Escribimos un morfismo $not : Bool \to Bool$ tal que:

$$not \circ true = false$$

$$not \circ false = true$$

    Suponiendo que la categoría tiene exponenciales: ¿puede escribir un morfismo $and : Bool \times Bool \to Bool$ que se comporte como la conjunción?

    Solución COMPLETAR.

Ejercicios adicionales

1. Considerar que en el siguiente diagrama los 4 trapecios conmutan.

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[rrr] \arrow[dr, "p"] \arrow[ddd] & & & f \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
& a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] & \\
& c \arrow[r] & d \arrow[dr, "q"] & \\
g \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & h
\end{tikzcd}$$

   Probar que:

   a) Si el cuadrado interno conmuta, también lo hace el cuadrado externo.

   b) Si p es epimorfismo y q es monomorfismo, entonces si el cuadrado externo conmuta, también lo hace el cuadrado interno.

   Soluciones

   a) COMPLETAR.

   b) COMPLETAR.

2. Sea $\mathcal{C}$ con 0. Verificar que si un morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ admite núcleo (conúcleo), éste es único salvo isomorfismo.

   Solución COMPLETAR.

3. Sean $\mathcal{C}$ una categoría con 0 y $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Probar que $p : Y \to C$ es un conúcleo de f en $\mathcal{C}$ si y solo si p^{op} es un núcleo de f^{op} en $\mathcal{C}^{op}$.

Solución COMPLETAR.

4. Sean $\mathcal{C}$ un categoría con 0 y $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Probar que $ker\,(f)\,(coker\,(f))$ coincice con el egalizador (coegalizador) de f y 0.

Solución COMPLETAR.

5. Un ωCPO es un conjunto ordenado con mínimo (notado $\perp$) tal que toda cadena ascendente numerable $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \cdots$ (que notamos $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ tiene un supremo $\sqcup \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Una función monótona entre dos ωCPO es continua si $f\left(\sqcup \{a_i\}_{i=0}^{\infty}\right) = \sqcup \{f(a_i)\}_{i=0}^{\infty}$ para toda cadena ascendente numerable $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$.

   a) Probar que podemos armar una categoría cuyos objetos son ωCPO y cuyas flechas son funciones continuas.

   b) ¿Esta categoría tiene productos? En caso afirmativo, describirlos. ¿Y coproductos?

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.