Resolución del Trabajo Práctico 1

Dada la función $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x - 1|$, se define la función $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ par y tal que para todo $x \in [0, 2]$ sea $g(x) = f(x)$.

a) Representar gráficamente las funciones f y g e indicar sus dominios y recorridos.

b) Encontrar la ley de la función g.

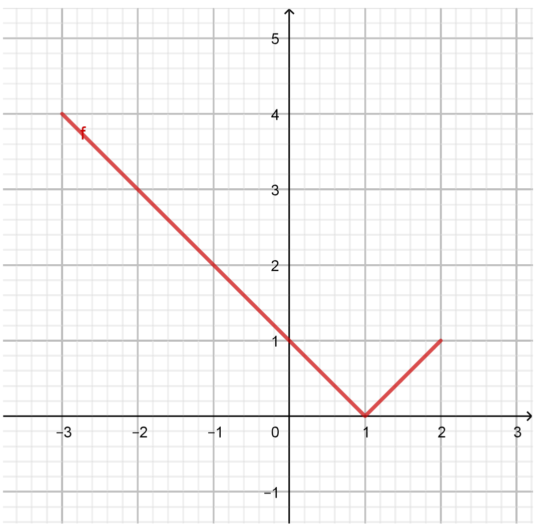
a) Para graficar la función f usamos la definición del valor absoluto y así encontramos su ley expresada en partes:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x-1 \geq 0 \quad \wedge \ x \in [-3,2] \\ -(x-1) & si \quad x-1 < 0 \quad \wedge \ x \in [-3,2] \end{cases} = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \quad \wedge \ x \in [-3,2] \\ -x+1 & si \quad x < 1 \quad \wedge \ x \in [-3,2] \end{cases}$$

Obtenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ -x+1 & si \quad -3 \leq x < 1 \end{cases}$$

Ahora hacemos la gráfica de la función f y expresamos su dominio y recorrido el cual se lo puede obtener a partir de ella:



$Dom\ f = [-3, 2]$ y $Rec\ f = [0, 4]$.

Nota:

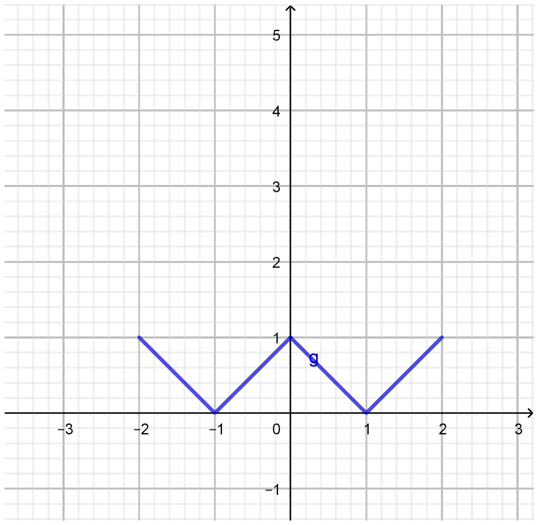
El recorrido de la función f también puede obtenerse analíticamente. Si quieren ver una forma de realizarlo, te la presentamos en las Observaciones que aparecen al final del ejercicio.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Para graficar la función g, sabemos que:

- $g(x) = f(x)$ para todo $x \in [0, 2]$ por lo que en ese intervalo su gráfica coincide con la gráfica de la función f.
- g es una función par por lo que su gráfica es simétrica respecto al eje y.

  Así la gráfica de la función g es:



$Dom\ g = [-2, 2]$ y $Rec\ g = [0, 1]$.

b) Hallamos la ley de la función g:

Sabemos que $g(x) = f(x) = |x - 1|$ para todo $x \in [0, 2]$.

Por otro lado, como g es una función par, se verifica que $g(x) = g(-x)$ para todo x en su dominio. Luego dado $x \in [-2, 0)$ resulta:

$$g(x) = g(-x) \underbrace{=}_{0<-x\leq 2} f(-x) = |-x - 1| = |-1(x + 1)| = |-1|\ |x + 1| = |x + 1|\,.$$

Por lo tanto:

$$g(x) = \begin{cases} |x+1| & si \quad -2 \leq x < 0 \\ |x-1| & si \quad 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Sabiendo que $|x+1| = |-x-1|$, y teniendo en cuenta la definición de valor absoluto, también podemos escribir la ley de la función g de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} |x+1| & si \quad -2 \leq x < 0 \\ |x-1| & si \quad 0 \leq x \leq 2. \end{cases} = \begin{cases} |-x-1| & si \quad -2 \leq x < 0 \\ |x-1| & si \quad 0 \leq x \leq 2. \end{cases} = ||x| - 1|.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

OBSERVACIONES:

1) RECORRIDOS DE LAS FUNCIONES f y g OBTENIDOS ANALÍTICAMENTE.

Veamos que $Rec\ f = [0,4]$, para eso probemos la doble contención entre los conjuntos (veamos que todo elemento del $Rec\ f$ es un elemento del intervalo $[0,4]$ y viceversa):

$\subseteq$ Sea $y \in Rec\ f$ luego existe $x \in Dom\ f$ tal que $f(x) = y$,
$x \in Dom\ f \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow -4 \leq x-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |x-1| \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq f(x) = y \leq 4 \Leftrightarrow y \in [0,4]$
Así tenemos que $Rec\ f \subseteq [0,4] \quad (i)$.

$\supseteq$ Sea $y \in [0,4]$, ¿$y \in Rec\ f$? es decir ¿$\exists\ x \in Dom\ f\ /\ f(x) = y$?
Considero $x = 1 - y$.

- $0 \leq y \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -y \leq 0 \Rightarrow -3 \leq 1-y \leq 1 \Rightarrow x = 1-y \in Dom\ f$.
- $f(x) = f(1-y) \underbrace{=}_{-3\leq 1-y \leq 1} -(1-y)+1 = -1+y+1 = y$

Por lo tanto $y \in Rec\ f$.

Así tenemos que $[0,4] \subseteq Rec\ f \quad (ii)$.
De (i) y (ii) $Rec\ f = [0,4]$.

También para la función $g = ||x|-1|$, $x \in [-2,2]$, podemos obtener analíticamente su recorrido:

$$-2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq |x|-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq ||x|-1| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq g(x) \leq 1 \Rightarrow Rec\ g \subseteq [0,1].$$

Sí ahora sospechamos que $Rec\ g = [0,1]$, al ser una igualdad de conjuntos debemos probar la doble contención, es decir, nos falta una.

Sea entonces $\hat{y} \in [0,1]$, ¿ $\exists\ x \in Dom\ g/\ g(x) = \hat{y}$?
Considerando $\hat{x} = 1 - \hat{y}$, tenemos

$$0 \leqq \hat{y} \leqq 1 \Rightarrow 0 \geqq -\hat{y} \geqq -1 \Rightarrow 1 \geqq 1-\hat{y} \geqq 0 \Rightarrow 0 \leqq \hat{x} \leqq 1.$$

Luego, $\hat{x} \in\ Dom\ g$ y además,

$$g(\hat{x}) = g(1-\hat{y}) = ||1-\hat{y}|-1| \underbrace{=}_{0\leq 1-\hat{y}\leq 1} \hat{y},$$

es decir, $\hat{y} \in\ Rec\ g$ y $[0,1] \subseteq Rec\ g$.
Por lo tanto, al tener la doble contención, $Rec\ g = [0,1]$ como queríamos ver.

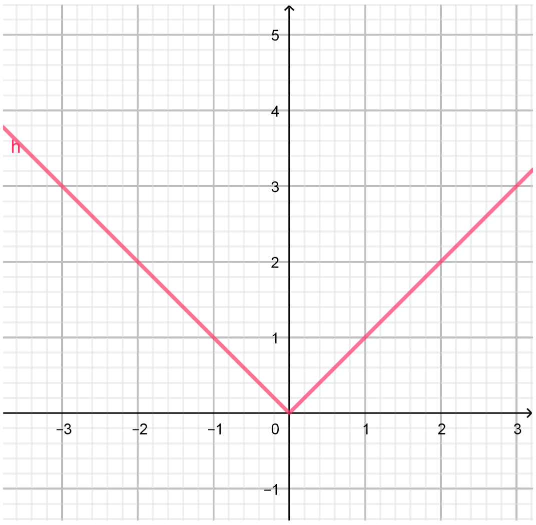
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

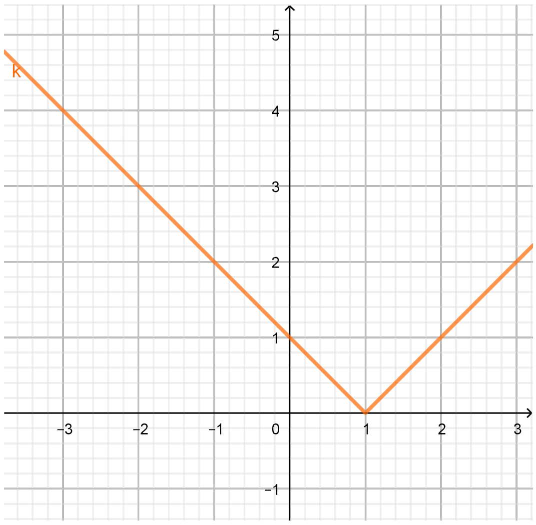
2) OTRA FORMA DE GRAFICAR LA FUNCIÓN f.

Si bien al momento de realizar el Trabajo Práctico aún no habíamos visto cómo realizar la gráfica de una función por corrimientos, al día de la fecha ya este tema debería haberse estudiado. Por lo tanto, otra forma de obtener la gráfica de f, utilizando estos conceptos, sería :

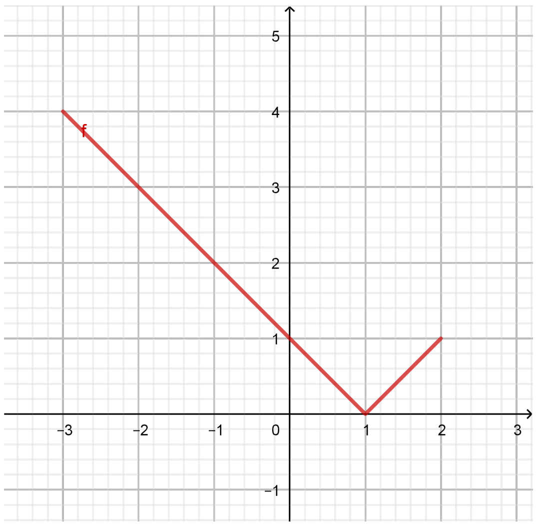
Sea $h(x) = |x|$. La ley de la función f coincide con $h(x-1)$, a esta nueva función la llamamos k, es decir que $k(x) = |x-1|$. Notemos que las funciones f y k son distintas, ya que tienen distinto dominio.

Como $k(x) = h(x-1)$, podemos obtener la gráfica de k trasladando hacia la derecha una unidad la gráfica de h.





Luego, para la gráfica de f sólo resta acotar el dominio al intervalo $[-3, 2]$.



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119