1. Dar diagramas para:

    a) Los retículos con 5 elementos.

    b) Los retículos con 6 elementos.

    c) El retículo de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

    Soluciones

    a) COMPLETAR.

    b) COMPLETAR.

    c) COMPLETAR.

2. Interpretar $\wedge$ y $\vee$ en los siguientes conjuntos ordenados:

    a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, donde A es un conjunto arbitrario.

    b) $(\mathbb{N}, |)$, donde $|$ denota la relacion «*divide a*».

    c) Álgebra de Lindenbaum-Tarski (ver ejercicio práctica anterior).

    Soluciones

    a)
        - $\wedge = \cap$.
        - $\vee = \cup$.

    b)
        - $\wedge = mcd$.
        - $\vee = mcm$.

    c)
        - $\wedge = \wedge$.
        - $\vee = \vee$.

3. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo.

   a) Probar que para todos $x, y, z \in X$ se satisface:
      1) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
      2) $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
      3) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.

   b) Probar que si una de las desigualdades anteriores es una igualdad, las restantes también lo son.

   Soluciones

   a)
      1) Sabemos que $y \wedge z \leq y$ y $y \wedge z \leq z$ luego por compatibilidad tenemos $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee y$ y $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z$ y nuevamente por compatibilidad $(x \vee (y \wedge z)) \wedge (x \vee (y \wedge z)) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Finalmente concluimos lo propuesto por idempotencia.
      2) Trivial por dualidad.
      3) COMPLETAR.

   b) COMPLETAR.

4. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo. Probar que los siguientes subconjuntos de X son subretículos:

   a) $A = \{x \in X : x \leq a\}$.
   b) $B = \{x \in X : b \leq x\}$.
   c) $C = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$.

   Soluciones

   a) Sabemos que $a \in A$ luego $A \neq \emptyset$. Ademas sean $x, y \in A$ luego $x \leq a$ y $y \leq a$, pero por compatibilidad $x \vee y \leq a \vee a = a$ por lo que $x \vee y \in A$. Analogamente $x \wedge y \in A$.
   b) Análogo.
   c) Análogo.

5. Sea $(L, \preceq)$ un retículo. Un polinomio p en n variables es una función $p : L^n \to L$ que pertenece al conjunto inductivo P_L:

   - Para $i \in \{1, \ldots, n\}, \pi_i \in P_L$ donde $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.
   - Si $f, g \in P_L$ entonces $f \vee g \in P_L$, donde $(f \vee g)(\overline{x}) = f(\overline{x}) \vee g(\overline{x})$.
   - Si $f, g \in P_L$ entonces $f \wedge g \in P_L$, donde $(f \wedge g)(\overline{x}) = f(\overline{x}) \wedge g(\overline{x})$.

   Sea p un polinomio en n variables, y $x_i \preceq y_i$ para cada i de 1 hasta n. Probar que $p(x_1, \ldots, x_n) \preceq p(y_1, \ldots, y_n)$.

   Solución

   - Caso base: Si $p = \pi_i$ entonces $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i \preceq y_i = \pi_i(y_1, \ldots, y_n)$.
   - Caso inductivo: Supongamos que $f(x_1, \ldots, x_n) \preceq f(y_1, \ldots, y_n)$ y $g(x_1, \ldots, x_n) \preceq g(y_1, \ldots, y_n)$.
     - Si $p = f \vee g$ entonces $p(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \vee g(x_1, \ldots, x_n)$ y por compatibilidad en la hipótesis inductiva:

       $$f(x_1, \ldots, x_n) \vee g(x_1, \ldots, x_n) \preceq f(y_1, \ldots, y_n) \vee g(y_1, \ldots, y_n)$$

     - Analogamente para $p = f \wedge g$.

6. Un retículo L se llama *modular* si para todos $a, b, c \in L$ resulta

   $$a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

   Probar que son equivalentes:

   a) L es modular.
   b) $a \geq c \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ para todos $a, b, c \in L$.
   c) $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ para todos $a, b, c \in L$.
   d) $a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para todos $a, b, c \in L$.

Soluciones

- $\boxed{a \Rightarrow b}$: Sea $a \geq c$ luego por ser L modular

$$\begin{array}{rcl} c \vee (b \wedge a) & = & (c \vee b) \wedge a \\ \Longleftrightarrow & & \\ (b \wedge a) \vee c & = & a \wedge (c \vee b) \\ \Longleftrightarrow & & \\ (a \wedge b) \vee c & = & a \wedge (b \vee c) \end{array}$$

- $\boxed{b \Rightarrow c}$: Sabemos que $a \vee c \geq a$ y por hipótesis $(a \vee c) \wedge (b \vee a) = ((a \vee c) \wedge b) \vee a$, luego aplicando varias veces conmutatividad obtenemos

$$a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

- $\boxed{c \Rightarrow d}$: Trivial por dualidad.
- $\boxed{d \Rightarrow a}$: Sea $a \leq c$ entonces $a \vee c = c$ y por hipótesis para cualquier b, resulta

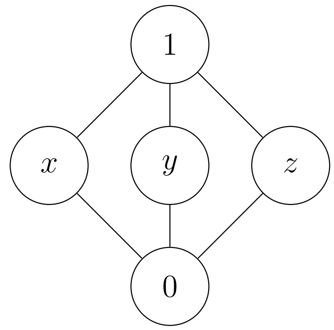
$$\begin{array}{rcl} a \wedge (b \vee (a \wedge c)) & = & (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ \Longleftrightarrow & & \\ a \vee (b \wedge (a \vee c)) & = & (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ \Longleftrightarrow & & \\ a \vee (b \wedge c) & = & (a \vee b) \wedge c \end{array}$$

7. Probar que todo retículo distributivo es modular. ¿Es cierta la recíproca?

Solución Sea $a \leq c$ entonces $a \wedge c = a$, luego por distributividad:

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$$

La recíproca no vale, pues basta considerar el siguiente contraejemplo:



donde puede observarse que es modular pero

$$y \vee (x \wedge z) = y \neq 1 = (y \vee x) \wedge (y \vee z)$$

8. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo. Probar que:

   a) Si $\vee$ tiene elemento neutro 0, entonces $a \wedge 0 = 0$ para todo $a \in X$.

   b) Si $\wedge$ tiene elemento neutro 1, entonces $a \vee 1 = 1$ para todo $a \in X$.

   Soluciones

   a) Por propiedad, como $0 \vee a = a$, entonces $0 \wedge a = 0$.

   b) Por propiedad, como $a \wedge 1 = a$, entonces $a \vee 1 = 1$.

9. Sean $(X, \wedge, \vee)$ y $(Y, \wedge', \vee')$ retículos con 0 y 1; y $h : X \to Y$ un homomorfísmo de retículo. Mostrar con un ejemplo que no siempre $h(1_X) = 1_Y$ o $h(0_X) = 0_Y$

   Solución Basta considerar $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ y $id : -\mathbb{N} \to -\mathbb{N}_0$.

10. Sea $(X, \wedge, \vee)$ un retículo acotado (con 0 y 1). Dado $a \in X$, si existe $b \in X$ tal que $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$, b se llama *complemento* de a, y en caso de ser único se nota $\overline{a}$. Probar que:

    a) $\overline{\overline{a}} = a$.

    b) $\overline{0} = 1$.

    c) Si X es distributivo, $\overline{(a \wedge b)} = \overline{a} \vee \overline{b}$ y $\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \wedge \overline{b}$.

Soluciones

a) Sabemos que $a \wedge \overline{a} = 0$ y $\overline{\overline{a}} \wedge \overline{a} = 0$, por lo que a y $\overline{\overline{a}}$ son complementos de $\overline{a}$, luego como el complemento es único debe ser $\overline{\overline{a}} = a$.

b) Sabemos $0 \vee \overline{0} = 1$ y como $0 \vee x = x$ (pues 0 es mínimo) entonces $0 \vee \overline{0} = \overline{0}$ por lo que $\overline{0} = 1$.

c) Para mostrar que el complemento de $a \wedge b$ es $\overline{a} \vee \overline{b}$ debemos ver que $\left(\overline{a} \vee \overline{b}\right) \vee (a \wedge b) = 1$ y $\left(\overline{a} \vee \overline{b}\right) \vee (a \wedge b) = 0$.

- $\left(\overline{a} \vee \overline{b}\right) \vee (a \wedge b) = \left(\left(\overline{a} \vee \overline{b}\right) \vee a\right) \wedge \left(\left(\overline{a} \vee \overline{b}\right) \vee b\right) = \left(1 \vee \overline{b}\right) \wedge (1 \wedge \overline{a}) = 1.$
- $\left(\overline{a} \vee \overline{b}\right) \wedge (a \wedge b) = (\overline{a} \wedge (a \wedge b)) \vee \left(\overline{b} \wedge (a \wedge b)\right) = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge a) = 0.$

La otra igualdad se deduce por dualidad.

11. Sean $(X, \wedge, \vee)$ y $(Y, \wedge', \vee')$ retículos y $h : X \to Y$ un homomorfísmo de retículo. Probar que:

a) $h(X)$ es un subretículo de Y.

b) Si X es distributivo, $h(X)$ es distributivo.

Soluciones

a)

- Sabemos que $X \neq \emptyset$ por ser retículo, luego $h(X) \neq \emptyset$.
- Sean $a', b' \in h(X) \subseteq Y$ tales que $h(a) = a'$ y $h(b) = b'$. Sabemos que $h(a \wedge b) \in Y$ y como h es un homomorfísmo resulta $h(a \vee b) = h(a) \vee' h(b) = a' \vee' b' \in Y$. Analogamente para $a' \wedge' b'$.

b) Sean $a', b', c' \in h(X) \subseteq Y$ tales que $h(a) = a'$, $h(b) = b'$ y $h(c) = c'$, luego $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ y como h es un homomorfísmo resultan:

- $h(a \wedge (b \vee c)) = h(a) \wedge' h(b \vee c) = a' \wedge' (b' \vee c')$.
- $h((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) = h(a \wedge b) \vee' h(a \wedge c) =$
  $= (h(a) \wedge' h(b)) \vee' (h(a) \wedge' h(c)) = (a' \wedge' b') \vee' (a' \wedge' c')$

La otra ley también vale por dualidad.

12. Verificar que todo isomorfismo de retículo se corresponde con un isomorfismo de conjuntos ordenados.

Solución Sean $(X, \wedge, \vee)$ y $(Y, \wedge', \vee')$ retículos y $f : X \to Y$ un isomorfismo de retículo.

- Veamos primero que si f es isomorfimo de retículo tambien lo es f^{-1}. Sean $a', b' \in Y$ tales que $f(a) = a'$ y $f(b) = b'$ luego sabemos que $f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b) = a' \vee' b'$ por lo que

$$f^{-1}(a' \vee' b') = a \vee b = f^{-1}(a') \vee f^{-1}(b')$$

  Analogamente para $a \wedge b$.

- Ahora $a, b \in X / a \preceq b$ resultará $a \vee b = b$ y como f es isomorfismo:

$$a \preceq b \iff a \vee b = b \iff f(a \vee b) = f(b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(a) \vee' f(b) = f(b) \iff f(a) \preceq' f(b)$$

  Por otro lado:

$$f(a) \preceq' f(b) \iff f(a) \vee' f(b) = f(b) \iff f^{-1}(f(a) \vee' f(b)) = f^{-1}(f(b)) \iff$$

$$\iff f^{-1}(f(a)) \vee f^{-1}(f(b)) = b \iff a \vee b = b \iff a \preceq b$$

13. Probar que el retículo potencia de cualquier conjunto es completo.

Solución Sean $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup)$ un retículo y $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, debemos ver que $X \cap Y$ y $X \cup Y$ estan en $\mathcal{P}(A)$; o lo que es lo mismo, que estan contenidos en A.

- Como $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ entonces $X \subseteq A$ y $Y \subseteq A$, luego:

$$\alpha \in X \cap Y \iff \alpha \in X \wedge \alpha \in Y \Rightarrow x \in A$$

- Como $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ entonces $X \subseteq A$ y $Y \subseteq A$, luego:

$$\alpha \in X \cup Y \iff \alpha \in X \vee \alpha \in Y$$

  - Si $\alpha \in X \Rightarrow \alpha \in A$ (pues $X \subseteq A$).
  - Si $\alpha \in T \Rightarrow \alpha \in A$ (pues $Y \subseteq A$).

14. *Knaster-Tarski*. Sea $(L, \sqsubseteq)$ un retículo completo y $f : L \to L$ una función monótona. Probar que el mínimo punto fijo de f es $y = \bigwedge D$ donde $D = \{x \in L | f(x) \sqsubseteq x\}$.

Solución

- Veamos que y es punto fijo, es decir que $f(y) = y$ o lo que es lo mismo: $f(y) \sqsubseteq y$ y $y \sqsubseteq f(y)$.
    - $\boxed{f(y) \sqsubseteq y}$: Sea $x \in D$ luego por definición $f(x) \sqsubseteq x$. Como y es cota inferior de D resulta $y \sqsubseteq x$ y como f es monotona $f(y) \sqsubseteq f(x)$. Ahora por transitividad $f(y) \sqsubseteq x$, es decir que $f(y)$ también es cota inferior de D y como y es la mayor de las cotas inferores de D resulta $f(y) \sqsubseteq y$.
    - $\boxed{y \sqsubseteq f(y)}$: Sabemos que y es cota inferior de D, es decir $\forall x \in D : y \sqsubseteq x$ y como f es monotona resulta $f(y) \sqsubseteq f(x)$ por lo que $f(y)$ también es cota inferior de D; pero y es la menor de ellas luego $y \sqsubseteq f(y)$.
- Resta ver que y es el menor de los puntos fijos. Como todos los puntos fijos estan en D, debemos ver que: $\forall x \in D : y \sqsubseteq x$, lo cual se deduce sabiendo que y es cota inferior de D.

15. Aplicar el resultado del ejercicio anterior para definir el conjunto inductivo de los números pares P como el mínimo punto fijo de una función monótona, donde P se define como el menor conjunto para el cual:

    - $0 \in P$.
    - Si $n \in P$, entonces $n + 2 \in P$.

    Solución COMPLETAR.

16. Sea $(P, \leq)$ un orden total. Probar que P es un retículo distributivo.

    Solución

    - Veamos que $(P, \leq)$ es un retículo: Sean $x \leq y$, claramente x es cota inferior de $\{x, y\}$. Ademas debe ser la mayor, pues si existe otra cota inferior h mayor a x tendríamos $h \leq x$ (por ser cota inferior) y $x \leq h$ (por ser mayor) por lo que $h = x$. Analogamente para el supremo.

- Veamos que es distributivo: Hemos visto que en un orden total, el infimo es el mínimo. Sean $x \leq y \leq z$ luego:

$$x \vee (y \wedge z) = x \vee y = y = y \wedge z = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

17. *Retículo completo*. Sea $(P, \leq)$ un orden. Probar que si todo subconjunto de P tiene supremo, entonces todo subconjunto de P tiene ínfimo.

    Solución COMPLETAR.

18. Un *álgebra de Boole* es un retículo acotado distributivo con complementos.

    a) Dar un ejemplo de álgebra de Bool de los retículos vistos en clase.

    b) Probar que $O_n = (\{x \in \mathbb{N} : x|n\}, |)$ es un álgebra de Boole si n es producto de factores primos distintos.

    c) Enunciar y probar la ley de De Morgan para las álgebras de Boole.

    d) Si $(L, \leq)$ es un álgebra de Boole, entonces para $x, y \in L$ si $x \leq y$ entonces $\overline{y} \leq \overline{x}$.

    e) Si $(L, \leq), (L', \leq')$ son álgebras de Boole, entoneces todo isomorfismo de conjuntos ordenados de L en L' preserva complementos.

    f) Sean $(L, \leq), (L', \leq')$ álgebras de Boole. Construir un orden para $L \times L'$ y probar que es un álgebra de Boole.

    Soluciones

    a) Sea P un conjunto, entonces $(\mathcal{P}(P), \cup, \cap, \emptyset, P)$ es un algebra de boole.

    b) COMPLETAR.

    c) Vease ejercicio 10c.

    d) Sean $x \leq y$, luego $x \vee y = y$ y por leyes de De Morgan:

    $$\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{y} \iff \overline{y} \wedge \overline{x} = \overline{y} \iff \overline{y} \leq \overline{x}$$

    e) COMPLETAR.

    f) COMPLETAR.