Introduccion a la teoria de grafos

11 de diciembre de 2018

Índice general

Capítulo 1

Introduccion

1.1. Definiciones

1.1.1. Grafo simple

Un grafo G es una tupla $G = (V, E)$ donde:

- V es un conjunto finito, no vacio de vertices.
- E es un conjunto finito de aristas tal que $E \subseteq \{X \in \mathcal{P}(V) : |X| = 2\}$.

Si consideramos a las aristas como un conjunto E tal que $E \subseteq \{(x, y) \in V \times V : x \neq y\}$ diremos entonces que se trata de un grafo simple dirigido.

1.1.2. Multigrafo

Un multigrafo G es una terna $G = (V, E, f)$ donde:

- V es un conjunto finito, no vacio de vertices.
- E es un conjunto finito de aristas.
- f es una funcion $f : E \to \{X \in \mathcal{P}(V) : 1 \leq |X| \leq 2\}$.

Se tratara de un multigrafo dirigido si cambiamos el codominio de la funcion por el conjunto $\{(x, y) \in V \times V\}$.

Si ademas consideramos una funcion $w : E \to \mathbb{R}$ diremos que $G = (V, E, f, w)$ es un multigrafo ponderado (con pesos en las aristas) por la funcion w.

1.1.3. Terminologia

- Llamaremos orden de un grafo a $|V|$.
- Llamaremos tamaño de un grafo a $|E|$.
- Si $e \in E$ y $f(e) = \{a, b\}$ diremos que e es una arista incidente en a y b.
- Dos aristas son adyacentes si comparten un vertice en comun.
- Dos vertices son adyacentes si comparten una arista.
- Cuando una arista relaciona a un solo verticle, la llamaremos lazo.
- Dos o mas aristas son paralelas si relacionan el mismo par de vertices.
- Diremos que un grafo es simple, cuando no tiene lazos ni aristas paralelas.
- Llamaremos grado de un vertice a la cantidad de aristas que inciden en el y lo notaremos: $\delta(v) = n$.
- Diremos que un grafo es regular si todos sus vertices tienen el mismo grado.

1.1.4. Grafo bipartito

Un grafo $G = (V, E)$ se dice bipartito si existen V_1, V_2 tales que forman una particion de V y para cualquier arista $\{u, v\}$ resulta $u \in V_1$ y $v \in V_2$.

1.1.5. Grafo completo

Llamaremos grafo completo a un grafo simple en donde cada vertice comparte aristas con los demas. Es decir: $K_n = (V, E)$ donde $E = \{\{u, v\} : u, v \in V \wedge u \neq v\}$.

Notaremos con $K_{m,n} = (V, E)$ al grafo bipartito tal que $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ y $E = \{\{u, v\} : u \in V_1 \wedge v \in V_2\}$.

1.1.6. Grafo complementario

Dado un grafo $G = (V, E)$ donde $|V| = n$, el grafo complementario de G, al que notaremos $\overline{G}$, es el grafo $\overline{G} = (V, E')$; donde E' es el conjunto de aristas que estan en K_n pero no en G.

1.1.7. Subgrafo

Sea $G = (V, E)$; un grafo $G' = (V', E')$ es un subgrafo de G si:

- $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.
- Si $\{u', w'\} \in E'$ entonces $u', w' \in V'$.

1.1.8. Subgrafos inducidos

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $U \subseteq V$, el subgrafo inducido por U es el subgrafo $G' = (U, E')$ donde $E' = \{\{u, v\} \in E : u, v \in U\}$ es decir que E' consta de todas las aristas cuyos extremos pertenecen a U.

Notaremos con $G - v$ al subgrafo inducido por $V - \{v\}$.

Dado un conjunto $D \subseteq E$, el subgrafo inducido por D es el subgrafo $G' = (V', D)$ donde V' es el conjunto de vertices incididos por D.

Analogamente notaremos con $G - e$ al subgrafo inducido por $E - \{e\}$.

1.1.9. Matrices de representacion

1.1.9.1. Matriz de adyacencia

La matriz de adyacencia de un grafo $G = (V, E)$ se construye a partir de la matriz $0_{|V| \times |V|}$. Por cada arista que une a dos nodos, se suma 1 al valor que hay actualmente en la ubicación correspondiente de la matriz. Si tal arista es un bucle y el grafo es no dirigido, entonces se suma 2 en vez de 1.

Observacion Es posible obtener el grado de un vertice, sumando el renglon o columna correspondiente en su matriz de adyacencia.

1.1.9.2. Matriz de incidencia

Dado un grafo $G = (V, E)$, la matriz de incidencia de G es una matriz binaria de dimensiones $|V| \times |E|$ donde oor cada nodo unido por una arista, ponemos un uno (1) en el lugar correspondiente, y llenamos el resto de las ubicaciones con ceros (0).

1.2. Caminos, circuitos y ciclos

1.2.1. Definiciones

- Una *trayectoria* o *camino* (walk) de longitud n es una sucesion alternante de $n+1$ vertices y n aristas de la forma: $C = v_o, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$.
- Si $v_0 = v_n$ diremos que se trata de un camino *cerrado*. En caso contrario, es un camino *abierto*.
- Diremos que un camino es *simple* cuando no repite vertices.
- Llamaremos *circuito* (circuit) a un camino cerrado de longitud mayor a 0 donde no se repiten aristas.
- Un *circuito euleriano* es un circuito que contiene a todas las aristas. Llamaremos *grafo euleriano* a aquel que contenga un circuito euleriano.
- Si un camino abierto pasa por todas las aristas sin repetir ninguna, lo llamaremos *camino euleriano*.
- Diremos que un camino cerrado es un *ciclo hamiltoniano* si incluye a todos los vertices y no los repite (exceptuando el primero y ultimo). Llamaremos *grafo hamiltoniano* a aquel que contenga un ciclo hamiltoniano.

En resumen:

	Repite vertices	Repite aristas	Abierto/Cerrado
Camino (walk)	Si	Si	Ambos
Trail	Si	No	Ambos
Circuito (circuit)	Si	No	Cerrado
Path	No	No	Abierto
Circuito simple (cycle)	No	No	Cerrado

1.2.2. Grafo conexo

Un grafo es conexo si dados dos vertices cualesquiera u y w, existe un camino de u a w.

1.2.3. Componente conexa

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $v \in V$ definimos $[v] = \{u \in V : \exists \text{ uv-camino en } G\}$. Llamaremos componente conexa al subgrafo inducido por $[v]$.

Observacion Un grafo es conexo si y solo si tiene una sola componente conexa.

1.2.4. Punto de articulacion y puente

Un vertice v en un grafo conexo G es un punto de articulacion si la eliminacion de v y todas las aristas incidentes en el, aumenta la cantidad de componentes conexas de G.

Analogamente, un puente es una arista que al ser eliminada incrementa el numero de componentes conexas.

1.2.5. Distancia y diametro

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, la distancia entre los vertices u y v (que notaremos $dist\,(u, v)$) es la longitud de la ruta mas corta de u a v.

El diametro de dicho grafo es $d\,(G) = \max\{dist\,(u, v)\,/u, v \in V\}$.

1.2.6. Algoritmo de la ruta mas corta (Dijkstra)

Entrada Un grafo ponderado $G = (V, E, w)$, y dos vertices distinguidos a y z.

Salida La longitud del camino mas corto de a a z.

Algoritmo

```
dijkstra(G,a,z):
        L[a] = 0; # Etiquetas iniciales
        for each x in V-a: L[x] = infinity; # Etiquetas iniciales
        T = V; # Etiquetas no definitivas
        while z in T:
                v = x in T | L[x] is minimum;
                T = T - v;
                for each x in T | {x, v} in E:
                        L[x] = min(L[x], L[v] + w(v,x));
        return L[z];
```

1.3. Teoremas

1.3.1. Lema del apreton de manos

Enunciado

1. $2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v)$.

2. La cantidad de nodos de grado impar es par.

Demostracion

1. Lo probaremos por induccion en la cantidad de aristas:

   - Caso base $|E| = 0$: Para cualquier grafo sin aristas resultara: $\sum_{v \in V} \delta(v) = 0 = 2 \cdot 0$.
   - Caso inductivo $|E| = k$: Supongamos que para cualquier grafo $G = (V, E)$ con k aristas resulta $2k = \sum_{v \in V} \delta(v)$. Consideremos el grafo $G' = (V', E')$ al que se le agrega la arista $\{x, y\}$. Resultara entonces $|E'| = k + 1$.

     - Si x e y no estan en V entonces:

       $$\sum_{v \in V'} \delta(v) = \sum_{v \in V} \delta(v) + \delta(x) + \delta(y) = 2k + 2 = 2(k+1) = 2|E'|$$

     - Si $x \in V$ y $y \notin V$ entonces:

       $$\sum_{v \in V'} \delta(v) = \sum_{v \in V} \delta(v) + \underbrace{1}_{x} + \delta(y) = 2k + 2 = 2(k+1) = 2|E'|$$

     - Si ambos estan en V:

       $$\sum_{v \in V'} \delta(v) = \sum_{v \in V} \delta(v) + \underbrace{1}_{x} + \underbrace{1}_{y} = 2k + 2 = 2(k+1) = 2|E'|$$

   Observacion Tambien hay que tener en cuenta posibles vertices aislados cuyos grados no interfieren en la expresion.

2. $2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V_i} \delta(v) + \underbrace{\sum_{v \in V_p} \delta(v)}_{\text{par}}$ luego $\sum_{v \in V_i} \delta(v)$ es par por lo que $|V_i|$ tambien.

1.3.2. Cantidad de aristas minima en un grafo conexo

Enunciado En todo grafo conexo $|E| \geq |V| - 1$.

Demostracion Lo probaremos por induccion en la cantidad de vertices:

- Caso base $|V| = 1$: Resulta trivial que $|E| \geq 0 \geq |V| - 1 = 0$.
- Caso inductivo $|V| = k$: Supongamos que para todo grafo conexo $G = (V, E)$ con k vertices resulta $|E| \geq k - 1$.

  Para cualquier grafo $G' = (V', E')$ conexo con $k + 1$ vertices tambien necesitamos agregar al menos $n \geq 1$ aristas para conservar la conexidad. Sumando en la desigualdad de la hipotesis inductiva tenemos:

  $$|E'| = |E| + n \geq k - 1 + 1 = (k + 1) - 1 = |V'| - 1$$

1.3.3. Teorema de la matriz de adyacencia

Enunciado El elemento a_{ij} de A^k (matriz de adyacencia) es el numero de caminos distintos de longitud k, de v_i a v_j en un grafo simple.

Demostracion EJERCICIO.

1.3.4. Teorema de existencia de circuito euleriano

Enunciado Un grafo $G = (V, E)$ sin vertices aislados tiene un circuito euleriano si y solo si es conexo y todos los vertices son de grado par.

Demostracion

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sea $C = v_0, \ldots, v_0$ el circuito euleriano del grafo.
  - Consideremos un par de vertices distintos u y v. Como G no tiene vertices aislados han de ser incididos por alguna arista, y esta ha de pertenecer a C (por ser C euleriano). Ahora podemos afirmar que existe un camino de u a v; a saber, la parte del circuito que los une, por lo que G es conexo.
  - En cada $v_i \in C$, inciden dos aristas diferentes (por ser C un cilco) y como C es euleriano sabemos que incluye a todas las aristas del grafo, por lo que cualquier vertice del grafo sera contribuido en su grado, de a pares.
- $\boxed{\Leftarrow}$:
  - Como G es conexo, no tiene vertices aislados.
  - Sea $W = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$ un camino que no repite aristas (trail) de longitud maxima en G. Todas las aristas incidentes en v_n estan en W pues de lo contrario no seria de longitud maxima. Ademas $v_0 = v_n$ (W es un ciclo) pues de lo contrario, si v_n aparece k veces en W su grado sera $2\,(k-1)+1$ lo cual contradice nuestra hipotesis.

    Supongamos que W no es euleriano, es decir: $\exists e \in E / e \notin W$. Como G es conexo, uno de los extremos de $e = \{v_i, v\}$ estara en W (supongamos v_i). Por lo tanto el trail $v, e, v_i, e_{i+1}, \ldots, v_n, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i$ tiene mayor longitud que W. Contradiccion. Luego W es un ciclo euleriano.

1.3.5. Corolario

Enunciado Un grafo G sin vertices aislados tiene un camino euleriano de u a w si y solo si es conexo y u y w son los unicos vertices de grado impar.

Demostracion

- $\boxed{\Rightarrow}$:
  - Si un vertice v de grado impar esta al comienzo de un camino euleriano, restaran por recorrerse una cantidad par de aristas en v, de manera que cada vez que se vuelva a v se debera salir, impidiendo de esta manera que v tambien sea el final.
  - Si un vertice v de grado impar no esta al comienzo de un camino euleriano entonces debe estar al final pues se puede entrar y salir de el $2n$ veces y la ultima vez no se podra salir.
  - Como cada vertice de grado impar debe ser inicio o fin, no puede haber mas de dos.
  - Ademas como no hay vertices aislados, un camino euleriano alcanza todos los vertices, por lo tanto es conexo.
- $\boxed{\Leftarrow}$:
  - Como el grafo es conexo, no tiene vertices aislados.
  - Agreguemos temporalmente una arista $\{u, w\}$. El grafo resultante tiene todos sus vertices de grado par, luego existe un circuito euleriano. Si eliminamos dicha arista del circuito, obtenemos un camino euleriano entre u y w.

1.3.6. Correctitud del algoritmo de Dijkstra

Enunciado El algoritmo de Dijkstra determina de manera correcta la longitud de un az-camino en un grafo G.

Demostracion Sea i la cantidad de veces que se ejecuta la linea 7 del algoritmo, probaremos por induccion que $L[v]$ es la longitud de la ruta mas corta de a a v. Puesto que el algoritmo devuelev $L[z]$, esto implica que el algoritmo es correcto.

- Caso base $i = 1$: Antes de que la linea se ejecute por primera vez, $L[a] = 0$ y $L[x] = \infty$ para cualquier otro x. Luego resultara $v = a$ y $L[v] = 0$ siendo esta la longitud minima de un aa-camino.

- Caso inductivo $i = n$: Supongamos que para $k \in \{1, \ldots, n\}$ la k-esima vez que se ejecuta la linea 7, $L[v]$ es la minima longitud de un av-camino.

  - Veamos que si existe una trayectoria del vertice a otro vertice w cuya longitud es menor a $L[v]$, entonces $w \notin T$. Supongamos que esto no fuera asi ($w \in T$) y sean: C el camino mas corto de a a w, x el vertice de dicho camino mas cercano a a dentro de T, y u el predecesor de x en C. /* PREGUNTAR Entonces $u \notin T$ */ por lo que ya se habia seleccionado en una iteracion anterior del ciclo while y por hipotesis inductiva $L[u]$ es la longitud mas corta de un au-camino. Ahora $L[x] \leq L[u] + w(u, x) \leq C < L[v]$. Pero esta desigualdad muestra que v no es el vertice en T con $L[v]$ minimo pues $L[x]$ es menor. Contradiccion.

  - Si hubiera un av-camino de logitud menor a $L[v]$ entonces $v \notin T$ (por el apartado anterior) lo cual es una contradiccion pues se eligio a v dentro del conjunto T. Luego $L[v]$ es longitud minima.

1.3.7. Teorema de Ore

Enunciado Sea $G = (V, E)$ un grafo simple sin lazos, con $n = |V| \geq 3$. Si $\delta(u) + \delta(v) \geq n$ para cualquier par de vertices no adyacentes, entonecs G es hamiltoneano.

Demostracion Supongamos que existen grafos que cumplen las hipotesis, pero no son hamiltoneanos y sea $G = (V, E)$ (con $n = |V|$) el que mas aristas tiene de entre todos ellos.

Sabemos que G no es K_n (pues este es hamiltoneano) luego existen vertices no adyacentes v_1 y v_n; y ademas $G + \{v_1, v_n\}$ es hamiltoneano (pues de lo contrario G no tendria cantidad de aristas maxima). Sea $C = v_n, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n$ el ciclo hamiltoneano de $G + \{v_1, v_n\}$, luego $C' = v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n$ es un camino hamiltoneano en G.

Puesto que $\delta(v_1)+\delta(v_n) \geq n$, por el principio del palomar existe $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ tal que v_i es adyacente a v_1 y v_{i-1} es adyacente a v_n pero entonces el ciclo $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_i, v_1$ es un ciclo hamiltoneano.

1.3.8. Corolario

Enunciado Sea $G = (V, E)$ un grafo simple sin lazos, con $n = |V| \geq 3$, y $|E| = \binom{n-1}{2} + 2$ entonces G es hamiltoneano.

Demostracion Sean $a, b \in V / e = \{a, b\} \notin E$ y H el subgrafo de G inducido por $V - \{a, b\}$. Tenemos entonces que:

- $|V(H)| = n - 2$.
- $|E(H)| \leq |K_{n-2}| = \binom{n-2}{2}$.
- $|E| = |E(H)| + \delta(a) + \delta(b)$.

Luego $\binom{n-1}{2} + 2 = |E(H)| + \delta(a) + \delta(b) \leq \binom{n-2}{2} + \delta(a) + \delta(b)$ de donde:

$$\delta(a) + \delta(b) \geq \binom{n-1}{2} + 2 - \binom{n-2}{2} = \ldots = n$$

y por el teorema de Ore, G es hamiltoneano.

1.3.9. Teorema de Dirac

Enunciado Sea $G = (V, E)$ un grafo simple sin lazos, con $n = |V| \geq 3$. Si $\delta(u) \geq n/2$ para cualquier vertice, entonces G es hamiltoneano.

Demostracion Veamos que G satisface las hipotesis del teorema de Ore. Sean u y v vertices no adyacentes, entonces $\delta(u) + \delta(v) \geq 2(n/2) = n$ y por el teorema de Ore, G es hamiltoneano.

Capítulo 2

Planaridad y coloreo

2.1. Planaridad

2.1.1. Definiciones

2.1.1.1. Grafos isomorfos

Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos, se dice que G y G' son isomorfos si existen biyecciones $f : V \to V'$ y $g : E \to E'$ tales que dados $v \in V$ y $e \in E$; e incide en v si y solo si $g(e)$ incide en $f(v)$.

2.1.1.2. Invariantes

Una propiedad que un grafo G comparte con todo otro grafo G' que sea isomorfo a el, se llama invariante. Son invariantes las siguientes propiedades:

- Numero de vertices.
- Numero de aristas.
- Componentes conexas.
- Ciclo eulereano.
- Ciclo hamiltoneano.
- Bipartito.
- m vertices de grado n.
- m ciclos de longitud n.

2.1.1.3. Subdivision elemental y reduccion en serie

Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que $e = \{u, v\} \in E$, el grafo G' obtenido por subdivision elementaria de e es el grafo $G' = (V \cup \{w\}, [E - \{e\}] \cup \{\{u, w\}, \{w, v\}\})$ donde $w \notin V$.

Si un grafo G tiene un vertice v de grado 2 y aristas $\{v, u\}$ y $\{v, w\}$ con $u \neq w$, se dice que dichas aristas estan en serie. La reduccion de una serie consiste en eliminar el vertice v del grafo G y sustituir las dos aristas indicentes por la arista $\{u, w\}$. Se dice que el grafo obtenido G' se obtiene de G al reducir una serie.

2.1.1.4. Grafos homeomorfos

Dos grafos G y G' se dicen homeomorfos si son isomorfos o pueden obtenerse de un mismo grafo por subdivisiones elementales de aristas.

En forma equivalente, G y G' se dicen homeomorfos si son isomorfos o pueden obtenerse de un mismo grafo por reducciones en serie.

2.1.1.5. Grafo plano

Un grafo G se dice plano o planar, si es posible dibujarlo en el plano sin que se crucen las aristas.

Observaciones

- K_n es plano para $n \leq 4$ y no lo es para $n \geq 5$.
- Todo subgrafo de un grafo plano tambien es plano.

2.1.2. Teoremas

2.1.2.1. Teorema

Enunciado Los grafos G y G' son isomorfos si y solo si, para algun orden de sus vertices, sus matrices de adyacencia son iguales.

Demostracion EJERCICIO.

2.1.2.2. Isomorfismos de grafos simples

Enunciado Dos grafos simples $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son isomorfos si y solo si existe una biyeccion $f : V \to V'$ tal que $\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'$.

Demostracion EJERCICIO.

2.1.2.3. Teorema de Kuratowski

Un grafo G es planar si y solo si no contiene un subgrafo homeomorfo a K_5 o $K_{3,3}$.

2.1.2.4. Formula de Euler

Enunciado Dada una representacion plana de un grafo conexo $G = (V, E)$ con $|V| = v$, $|E| = e$ y r regiones delimitadas en el plano por la representacion, se tiene que $v - e + r = 2$.

Demostracion Lo demostraremos por induccion en el numero de aristas:

- Caso base $e = 0$: Como G es conexo, ha de tratarse de K_1. Tenemos entonces $v - e + r = 1 - 0 + 1 = 2$.
- Caso inductivo $e = k$: Supongamos que para todo grafo planar conexo con $e < k$ aristas resulta $v - e + r = 2$. Sea G un grafo con k aristas.
    - Si G no contiene ciclos, sea a una arista incidente en un vertice x tal que $\delta(x) = 1$. El grafo $G' = G - x$ tiene la misma cantidad de regiones, un vertice menos y una arista menos, luego por hipotesis inductiva $v - e + r = 2 \iff (v - 1) - (e - 1) + r = 2$.
    - En caso contrario, sean C el ciclo de G y a una arista de C. Observemos que el grafo $G - a$ sigue siendo conexo pues hemos removido una arista que formaba parte de un ciclo. Ademas el numero de regiones se ha decrementado en uno pues la region que quedaba delimitada dentro del ciclo se ha unido a la region de afuera. Ahora podemos afirmar por hipotesis inductiva que $v - e + r = 2 \iff v - (e - 1) + (r - 1) = 2$.

2.1.2.5. Corolario

Enunciado Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, simple y plano con $|V| = v$, $|E| = e$ y r regiones; entonces $3r \leq 2e$ y $e \leq 3v - 6$.

Demostracion Como cada ciclo tiene al menos tres aristas, sabemos que cada cara esta rodeada de al menos tres aristas; entonces el numero de aristas que acotan las caras es $3r$. Ademas cada arista toca como maximo dos caras, por lo tanto $2e \geq 3r = 3(e - v + 2) \iff e \leq 3v - 6$.

2.1.2.6. Cota de grado minimo

Enunciado En todo grafo G simple planar, existe un vertice $v/\delta(v) \leq 5$.

Demostracion Supongamos que todo vertice tiene grado mayor o igual a 6. Por el lema del apreton de manos tenemos $2e = \sum_{v \in V} \delta(v) \Rightarrow 2e \geq 6v$ por lo que $3v \leq e$ y ademas por el corolario anterior $e \leq 3v - 6$. Sumando ambas desigualdades: $3v + e \leq e + 3v - 6 \iff 0 \leq -6$. Absurdo.

2.2. Coloreo

2.2.1. Definiciones

2.2.1.1. Grafo dual

Dada una representacion plana de un grafo plano G que determina las regiones $R_1, \ldots, R_r$, definimos un grafo dual G^* tomando $V(G^*) = \{R_1, \ldots, R_r\}$ y $E(G^*)$ en correspondencia biunivoca con $E(G)$ de manera que si $e \in E(G)$ es frontera de R_i y R_j (con i no necesariamente distinto a j) entonces se corresponde con $e^* \in E(G^*)$ donde $e^* = \{R_i, R_j\}$.

2.2.1.2. Coloreo

Sea $k \in \mathbb{N}$, un k-coloreo propio de un grafo $G = (V, E)$ es una funcion $f : V \to C$ donde $|C| = k$ y tal que si $\{v_i, v_j\} \in E$ entonces $f(v_i) \neq f(v_j)$.

2.2.1.3. Clase de color

Dado un coloreo de G, $f : V \to C$, la clase de color de $c \in C$ es $\{v \in V : f(v) = f(c)\}$.

Observacion Una clase de color es un conjunto independiente.

2.2.1.4. Numero cromatico

El numero cromatico de un grafo simple G es el minimo k/G es k-coloreable. Notaremos a este numero como $\chi(G) = k$.

Diremos ademas que un grafo G es k-color critico si $\chi(G) = k$ y para cualquier subgrafo propio G' resulta $\chi(G') < k$.

2.2.1.5. Conjuntos independientes y cliques

Dado un grafo $G = (V, E)$, llamaremos conjunto estable o independiente, a un subconjunto $S \subseteq V$ tal que $\{u, v\} \notin E$, para cualquier par de vertices de S.

Una clique de un grafo $G = (V, E)$ es un conjunto $Q \subseteq V/Q$ induce un subgrafo completo.

2.2.1.6. Estabilidad

Llamaremos estabilidad del grafo, o numero de independencia al numero $\alpha(G) := \text{máx}\{|U| : U \subseteq V(G) \wedge U \text{ es independiente}\}$.

2.2.1.7. Numero de clique

El numero de clique de un grafo G es $\omega(G) = \text{máx}\{|Q| : Q \subseteq V(G) \wedge G \text{ es una clique}\}$.

2.2.2. Teoremas y algoritmos

2.2.2.1. Algoritmo de coloreo

Entrada Un grafo simple $G = (V, E)$ con vertices ordenados $v_1, \ldots, v_n$.

Salida Un k-coloreo de G, donde $k = \text{máx}\{\delta(v) : v \in V\} + 1$.

Algoritmo

```
colors(G):
        colores = [1..k];
        for i = 1 to n:
                vadyacentes = [v in V | {v, vi} in E];
                cadyacentes = [f[vj] | vj in vadyacentes];
                f[i] = minimum [c in colores | c not in cadyacentes];
        return f;
```

Nota Se puede deducir que $\chi(G) \leq k$.

2.2.2.2. Conexidad del grafo dual

Enunciado Si G es un grafo plano, entonces G^* es conexo.

Demostracion EJERCICIO.

2.2.2.3. Planaridad del grafo dual

Enunciado Si G es un grafo plano, entonces $\exists G^*/G^*$ es plano. Mas aun: si G es conexo entonces $G^{**} \simeq G$.

Demostracion EJERCICIO.

2.2.2.4. Teorema de los cinco colores

Enunciado Todo grafo simple y planar es 5-coloreable.

Demostracion Haremos la demostracion por induccion sobre el numero de vertices n.

- Casos base $n \leq 5$: Como maximo tenemos cinco vertices, luego podemos pintar uno de cada color.

- Caso inductivo $n = k$: Supongamos que todo grafo simple plano con k vertices es 5-coloreable. Sea $G = (V, E)$ tal que $|V| = k+1$, luego por la cota del grado minimo sabemos que $\exists v \in V/\delta(v) \leq 5$. Si consideramos $G' = G - v$ sabemos por hipotesis inductiva que G' es 5-coloreable. Sea f dicho coloreo.

- Caso $\delta(v) \leq 4$: Como los vecinos de v tienen a lo sumo 4 colores distintos, siempre nos sobra un color para extender el coloreo de G' a un 5-coloreo de G, utilizando el color restante para v.
- Caso $\delta(v) = 5$:
  - Si para los vecinos de v, f asigna a lo sumo 4 colores distintos, de igual manera que en el caso anterior podemos extender dicho coloreo a G.
  - Sean $v_1, \ldots, v_5$ los vertices adyacentes a v y supongamos $f(v_i) = i$.
    - Consideremos el subrafo de G' inducido por los vertices de color 1 o 3, es decir que cada arista conecta un vertice de color 1 con otro de color 3. Si v_1 y v_3 se encuentran en diferentes componentes conexas, definimos un coloreo f' donde intercambiamos los colores 1 y 3 en la componente de v_1. Ahora, los vecinos de v no estan pintados de color 1, pudiendo extender f' a un 5-coloreo de G.
    - De lo contrario consideremos el subrafo de G' inducido por los vertices de color 2 o 4. Los vertices v_2 y v_4 han de estar en diferentes componentes conexas pues en otro caso, G no seria plano ya que el ciclo $v_1, \ldots, v_3, v, v_1$ intersecaria al camino $v_2, \ldots, v_4$. Esto nos permite aplicar un razonamiento analogo al anterior para 5-colorear a G.

2.2.2.5. Teorema de los cuatro colores

Todo grafo plano simple se puede pintar con cuatro colores.

2.2.2.6. Relacion entre vertices, numero cromatco y estabilidad

Enunciado Para todo grafo simple G vale que: $|V(G)| \leq \alpha(G)\chi(G)$.

Demostracion Sea f un coloreo optimo de G con colores $C = \{1, \ldots, \chi(G)\}$, como f induce una particion de los nodos en conjuntos independientes, resulta:

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |[i]| \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) = \chi(G)\,\alpha(G)$$

2.2.2.7. Relacion entre numero de clique y numero cromatico

Enunciado Dado un grafo simple G vale que $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Demostracion Sea $S \subseteq V / |S| = \omega(S)$, como todos los vertices de S son adyacentes, necesitamos $\omega(S)$ colores para pintar solo esos vertices, de donde sigue el resultado.

2.2.2.8. Relacion entre independencia y clique

Enunciado Como cada subconjunto de G es estable si y solo si es una clique en $\overline{G}$, entonces $\alpha(G) = \omega\left(\overline{G}\right)$ y $\omega(G) = \alpha\left(\overline{G}\right)$.

Demostracion EJERCICIO.

Capítulo 3

Arboles

3.1. Definiciones

3.1.1. Arbol

Un grafo $G = (V, E)$ se deonmina arbol, si es conexo y aciclico.

3.1.2. Bosque

Un grafo $G = (V, E)$ se denomina bosque si es aciclico.

3.1.3. Arbol con raiz

Un arbol con raiz es un arbol con uno nodo distinguido, llamado raiz.

3.1.4. Terminologia

Sean $T = (V, E)$ un arbol con raiz v_0 y $C = v_0, \ldots, v_n$ un camino simple en T.

- Nivel: Llamaremos nivel de un nodo $v \in V$ a la longitud del unico v_0v-camino simple en T.
- Altura: La altura de T es la longitud maxima de un v_0v-camino simple en T.
- Padre: Llamaremos padre de v_i a v_{i-1}.

- Ancestros: Diremos que $v_0, \ldots, v_{i-1}$ son ancestros de v_i.
- Hijo: v_i es hijo de v_{i-1}.
- Descendiente: Si $u \in V$ es ancestro de $v \in V$ diremos tambien que v es descendiente de u.
- Hermanos: Si u y v son hijos de w, entonces u y v se llaman hermanos.
- Hoja: Si v no tiene hijos, diremos que v es una hoja.
- Vertice interno: Aquellos vertices que no sean hojas se los llama vertices internos.
- Subarbol: Un subarbol con raiz x es el arbol $T' = (V', E')$ tal que $V' = \{x\} \cup \{v \in V : x \text{ es ancestro de } v\}$ y $E' = \{e \in E : e \text{ pertenece a algun } xv\text{-camino con } v \in V'\}$
- Excentricidad: La exentricidad de un vertice v es la longitud maxima de un camino simple que alli comienza.
- Centro: Un vertice v es un centro si su excentricidad es minima.
- Radio: Excentricidad del centro.

3.1.5. Arbol de expansion

Dado un grafo G, un arbol de expansion (o arbol generador) de G es un subgrafo T tal que $V(T) = V(G)$ y T es un arbol.

Si G es un grafo con pesos en las aristas, un arbol de expansion minimo es un arbol de expansion con peso minimo.

3.1.6. Arbol n-ario

Un arbol con raiz T es n-ario (con $n \geq 2$) si cada vertice interno tiene a lo sumo n hijos.

Un arbol n-ario se dice completo si cada vertice interno tiene exactamente n hijos.

Diremos que T es equilibrado si cada hoja tiene nivel a o $a - 1$, donde a es la altura del arbol.

Diremos que T esta balanceado si para cada vertice v, las alturas de los subarboles izquierdo y derecho difieren a lo sumo en 1. La altura de un arbol vacio se define como -1.

3.2. Algoritmos

3.2.1. Busqueda a lo ancho

Entrada Un grafo $G = (V, E)$ con vertices ordenados $v_1, \ldots, v_n$.

Salida Un arbol de expansion.

Algoritmo

```
bfs(G):
        S[0] = v1;
        V' = [v1];
        E' = [];
        while len(V) != len(E') + 1: # faltan aristas
                for each x in S:
                        for each y in V - V':
                                if {x,y} in E:
                                        E' = E' ++ [{x, y}];
                                        V' = V' ++ [y];
                S = sort(sons(S));
        return (V', E');
```

3.2.2. Busqueda en profundidad

Entrada Un grafo $G = (V, E)$ con vertices ordenados $v_1, \ldots, v_n$.

Salida Un arbol de expansion.

Algoritmo

```
dfs(G):
        w = v1;
        V' = [v1];
        E' = [];
        while len(V) != len(E') + 1: # faltan aristas
                while exist {w, vk} | vk not in V':
                        k = minimum such that {w, vk} not in V';
                        E' = E' ++ [{w, vk}];
                        V' = V' ++ [vk];
                        w = vk;
                w = fahter(w); # retroceso
        return (V', E');
```

3.2.3. Algoritmo de Prim

Entrada Un grafo ponderado $G = (V, E, w)$ con vertices $v_1, \ldots, v_n$.

Salida Un arbol de expansion minimo.

Algoritmo

```
prim(G):
        for i in [2..n]: v[i] = false;
        v[1] = true;
        E' = [];
        for i in [1..n-1]: # se agregan n-1 aristas
                min = infinity;
                for j in [1..n]:
                        if v[j]:
                                for k in [1..n]:
                                        if not (v[k] && w(j,k) < min):
                                                add_vertex = k;
                                                e = {j, k};
                                                min = w(j,k);
                v[add_vertex] = true;
                E' = E' ++ [e];
        return (V,E');
```

3.2.4. Algoritmo de Kruskal

Entrada Un grafo ponderado $G = (V, E, w)$ con vertices $v_1, \ldots, v_n$.

Salida Un arbol de expansion minimo.

Algoritmo

```
kruskal(G):
        E' = [];
        while len(E') - 1 != len(V):
                min = infinity;
                for each e in E:
                        if cycles(V, E' ++ [e]) == 0 && w(e) < min:
                                min = w(e);
                                add_edge = e;
                E' = E' ++ [e];
        return (V,E');
```

3.3. Teoremas

3.3.1. Minima cantidad de hojas

Enunciado Sea $G = (V, E)$ un arbol con $|V| \geq 2$ entonces G tiene como minimo 2 hojas.

Demostracion Sea $C = v_0, v_1, \ldots, v_k$ el $v_0 v_k$-camino simple de maxima longitud en G. Por definicion G no contiene ciclos, luego $v_0 \neq vk$ y ademas $\delta(v_0) = \delta(v_k) = 1$ pues de lo contrario C no seria de longitud maxima. Por lo tanto v_0 y v_k son dos hojas distintas de G.

3.3.2. Definiciones equivalentes

Enunciado Las siguientes definiciones son equivalentes:

1. G es conexo y no tiene ciclos.
2. G no tiene ciclos y $|V| = |E| + 1$.
3. G es conexo y $|V| = |E| + 1$.
4. Existe un unico camino simple entre cualquier par de vertices.

Demostracion

- $\boxed{1 \Rightarrow 2}$: Por hipotesis ya sabemos que es aciclico. Mostraremos por induccion en la cantidad de vertices que todo grafo conexo y aciclico tiene $|V| = |E| + 1$:
  - Caso base $|V| = 1$: Tenemos $1 = 0 + 1$.
  - Caso inductivo $|V| = k$: Supongamos que para cualquier grafo conexo y aciclico G con $|V| \leq k$ vertices resulta $|V| = |E| + 1$.

    Sea G' un grafo conexo y aciclico con $k+1$ vertices, luego el grafo $G = G' - h$ (donde h es una hoja) verifica la hipotesis inductiva, y ademas tiene $|V'| - 1$ vertices y $|E'| - 1$ aristas, por lo tanto: $|V'| - 1 = |E'| - 1 + 1 \iff |V'| = |E'| + 1$.

- $\boxed{2 \Rightarrow 1}$: Por hipotesis ya sabemos que es aciclico. Supongamos que no sea conexo y tenga n componentes conexas $G_1, \ldots, G_n$. Cada G_i es conexa y aciclica luego por $1 \Rightarrow 2$ tenemos que $|V_i| = |E_i| + 1$, luego:

$$|V| = \sum_{i=1}^{n} |V_i| = \sum_{i=1}^{n} (|E_i| + 1) = n + \sum_{i=1}^{n} |E_i| = n + |E|$$

  y como $n \geq 1$ resulta $|V| - n < |V| - 1 \iff |E| < |V| - 1$ lo cual contradice la hipotesis.

- $\boxed{1 \Rightarrow 3}$: Por hipotesis G no tiene ciclos y por $1 \Rightarrow 2$ resulta $|V| = |E| + 1$.

- $\boxed{3 \Rightarrow 1}$: Por hipotesis G es conexo. Supongamos que G tiene un ciclo C y sea e una arista de C. Consideremos el grafo $G' = G - e$. Como hemos removido a e dentro de un ciclo, el grafo G' sigue siendo conexo y ademas $|V(G')| = |E(G')|$ pero como G' es conexo deberia ser $|E| \geq |V| - 1$. Contradiccion.

- $\boxed{1 \Rightarrow 4}$: Como G es conexo sabemos que existe un camino entre cualquier par de vertices y por lo tanto tambien un camino simple. Supongamos que existen dos uw-caminos simples diferentes: $C = u, b_1, b_2, \ldots, b_n, w$ y $C' = u, v_1, v_2, \ldots, v_m, w$ luego $u, b_1, \ldots, b_n, w, v_m, \ldots, v_1, u$ es un ciclo. Contradiccion.

- $\boxed{4 \Rightarrow 1}$: Por definicion G es conexo. Ademas supongamos que G tiene un ciclo, luego tambien tiene un ciclo simple $v_0, v_1, \ldots, v_n, v_0$ pero entonces v_0, v_1 y $v_0, v_n, \ldots, v_1$ serian dos caminos simples diferentes entre v_0 y v_1; por lo que G es aciclico.

3.3.3. Formula de Cayley

La cantidad de arboles con n vertices es n^{n-2}.

3.3.4. Arboles de expansion y conexidad

Enunciado Un grafo G tiene un arbol de expansion si y solo si G es conexo.

Demostracion

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sea T el arbol de expansion de G. Entre cualquier par de vertices de T hay un camino, y como T tiene todos los vertices de G, ese mismo camino esta en G.

- $\boxed{\Leftarrow}$: Si G es aciclico, ya es un arbol. Si no, quitamos aristas de todos los ciclos hasta que G sea aciclico. Como hemos quitado aristas de ciclos, el grafo resultante sigue siendo conexo y por lo tanto un arbol.

3.3.5. Correctitud del algoritmo de Prim

Enunciado El algoritmo de Prim es correcto, es decir, al terminar el algoritmo T es un arbol de expansion minima.

Demostracion Definimos T_i como el subgrafo inducido por E' luego de la i-esima iteracion del ciclo for (lineas 5-15) y T_0 como el grafo sin aristas cuyo unico vertice es v_1. Probaremos por induccion en las repeticiones del ciclo, que T_i esta contenido en algun arbol de expansion minima.

- Caso base $i = 0$: Como T_0 es un vertice solo, esta contenido en todo arbol de expansion minima.

- Caso inductivo $i = k$: Supongamos que $T_k = (V, E_k)$ esta contenido en algun arbol de expansion minima T'. El algoritmo selecciona una arista $\{p, q\}$ de peso minimo tal que $p \in V \wedge q \notin V$ y la agrega a T_k para producir T_{k+1}.

  - Si $\{p, q\}$ esta en T', entonces T_{k+1} esa contenida en dicho arbol.
  - De lo contrario, $T' + \{p, q\}$ contiene un ciclo C. Elijamos de ese ciclo otra arista $\{x, y\} \neq \{p, q\}$ con $x \in V$ y $y \notin V$, luego $w(x, y) \geq w(p, q)$; pues de lo contrario el algoritmo no hubiera elegido a $\{p, q\}$.

    Observemos que el grafo $T'' = [T' + \{p, q\}] - \{x, y\}$ tiene peso menor o igual a T' y como T' es de peso minimo, T'' resulta ser un arbol de expansion minima que contiene a T_{k+1}.

3.3.6. Correctitud del algoritmo de Kruskal

COMPLETAR.

3.3.7. Cantidad maxima de hojas

Enunciado Sea T un arbol n-ario con h hojas y altura a; entonces: $h \leq n^a$.

Demostracion Lo demostraremos por induccion en la altura.

- Caso base $a = 0$: El arbol consiste en un solo vertice, luego $1 \leq n^0 = 1$.
- Caso inductivo $a = k$: Supongamos que para todo arbol de altura menor o igual a k se cumple la desigualdad y sea T un arbol de altura $k + 1$ con h hojas.

  Supongamos que la raiz tiene hijos $v_1, \ldots, v_m$ (con $m \leq n$) y sean T_i el subarbol con raiz en v_i, con altura $a_i \leq k$ y h_i vertices terminales. Por hipotesis inductiva para cada T_i resulta $h_i \leq n^{a_i}$. Como $h = h_1 + \ldots + h_m$ obtenemos:

  $$h = \sum_{i=1}^{m} h_i \leq \sum_{i=1}^{m} n^{a_i} \leq \sum_{i=1}^{m} n^k = mn^k \leq nn^k = n^{k+1}$$

3.3.8. Propiedades de los arboles completos

Enunciado Sea T un arbol n-ario completo con h hojas, i vertices internos, v vertices en total y altura a; entonces:

1. $v = ni + 1$.
2. $h = (n - 1)\, i + 1$.
3. $a \leq h - 1$.

Demostracion

1. Los vertices de T consisten en los vertices que son hijos de alguien y los que no. Existe un solo vertice que no es hijo, la raiz. Como hay i vertices internos, cada uno con n hijos entonces el numero total de vertices es $ni + 1$.
2. Como $h = v - i$ entonces $h = ni + 1 - i = (n - 1)\, i + 1$.
3. COMPLETAR.

Capítulo 4

Flujos en redes y emparejamientos

4.1. Redes

4.1.1. Red de transporte

Una red de transporte es un grafo dirigido simple $G = (V, E)$, con pesos no negativos en las aristas tal que:

- Existe un vertice «a» (al que llamaremos origen), que no tiene aristas de entrada.
- Existe un vertice «z», (al que llamaremos destino) que no tiene aristas de salida.

4.1.2. Flujo

Un flujo sobre una red G, es una funcion $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ tal que:

1. Para cualquier vertice v (excepto a y z) resulta: $\displaystyle\sum_{(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{(v,u)\in E} f(v,u)$.
2. Para cualquier arista resulta: $f(u,v) \leq w(u,v)$.

Observacion A veces se dice tambien que f es un flujo si satisface la propiedad de conservacion de flujo(1); y que es un flujo factible si satisface ambas condiciones.

4.1.3. Valor de flujo

El valor de un flujo f es $val\left(f\right)=\sum_{(a,u)\in E} f\left(a,u\right)$.

Observacion Como $val\left(f\right)\leq\underbrace{\sum_{(u,z)\in E} w\left(u,z\right)}_{(1)}$ y $val\left(f\right)\leq\underbrace{\sum_{(a,u)\in E} w\left(a,u\right)}_{(2)}$ entonces $val\left(v\right)\leq\text{mín}\left\{(1),(2)\right\}$.

4.1.4. Corte

Sea $G=(V,E,w)$ una red y dado $P\subset V/a\in P\wedge z\notin P$, llamaremos az-corte al siguiente conjunto:

$$\left(P,\overline{P}\right)=\left\{(u,v)\in E:u\in P\wedge v\in\overline{P}\right\}\cup\left\{(u,v)\in E:u\in\overline{P}\wedge v\in P\right\}$$

La capacidad de corte de $\left(P,\overline{P}\right)$ es $w\left(P,\overline{P}\right)=\sum_{(u,v)\in\left(P,\overline{P}\right)/u\in P} w\left(u,v\right)$.

4.1.5. Algoritmo de Ford-Fulkerson

1. Partimos de un flujo inicial cualquiera.

2. Etiquetamos la fuente con $(-,\infty)$.

3. A cualquier vertice x adyacente a la fuente, lo etiquetamos asi:

   - Si $w\left(a,x\right)-f\left(a,x\right)>0$, definimos $\Delta\left(x\right)=w\left(a,x\right)-f\left(a,x\right)$ y etiquetamos el vertice x con $\left(a^{+},\Delta\left(x\right)\right)$.
   - Si $w\left(a,x\right)-f\left(a,x\right)=0$, dejamos el vertice sin etiquetar.

4. Mientras exista un vertice $x\neq a$ que este etiquetado, y una arista (x,y) tal que y no este etiquetado; etiquetamos el vertice y como sigue:

   - Si $w\left(x,y\right)-f\left(x,y\right)>0$, definimos $\Delta\left(y\right)=\text{mín}\left\{\Delta\left(x\right),w\left(x,y\right)-f\left(x,y\right)\right\}$ y etiquetamos el vertice y con $\left(x^{+},\Delta\left(y\right)\right)$.
   - Si $w\left(x,y\right)-f\left(x,y\right)=0$, dejamos el vertice sin etiquetar.

5. De forma analoga, mientras exista un vertice $x \neq a$ que este etiquetado, y una arista (y, x) tal que y no este etiquetado; etiquetamos el vertice y como sigue:
   - Si $f(y, x) > 0$, etiquetamos el vertice como $(x^-, \Delta(y))$, donde $\Delta(y) = \text{mín}\{\Delta(x), f(y, x)\}$.
   - Si $f(x, y) = 0$, dejamos el vertice sin etiquetar.
6. Al finalizar el proceso de etiquetado pueden ocurrir dos cosas:
   - Si el vertice z no esta etiquetado, entonces se ha logrado el flujo maximo.
   - De lo contrario, sea $(y^+, \Delta(z))$ la etiqueta de z, entonces redefinimos $f(y, z)$ como $f(y, z) + \Delta(z)$. Ahora consideremos la etiqueta del vertice y:
     - $(x^+, \Delta(y))$: Incrementamos en forma analoga el flujo $f(x, y)$ redefiniendolo como $f(x, y) + \Delta(z)$.
     - $(x^-, \Delta(y))$: Decrementamos en forma analoga el flujo $f(x, y)$ redefiniendolo como $f(x, y) - \Delta(z)$.

   Continuamos estre proceso de regreso al origen, borramos todas las etiquetas y volvemos al punto 2.

4.1.6. Integridad de flujo

Enunciado Dada una red $G = (V, E, w)$ y cualquier flujo f se tiene: $val(f) = \sum\limits_{(u,z)\in E} f(u, z)$.

Demostracion Sea $P \subset V / a \in P \wedge z \notin P$, por la propiedad de conservacion de flujo vale el siguiente resultado:

$$val\,(f) = \sum_{(a,x)\in E} f\,(a,x) - \overbrace{\sum_{(x,a)\in E} f\,(x,a)}^{0} = \left[\sum_{v\in P\wedge x\in V} f\,(v,x)\right] - \left[\sum_{v\in P\wedge x\in V} f\,(x,v)\right] =$$

$$= \left[\underbrace{\sum_{v\in P\wedge x\in P} f\,(v,x)}_{(*)} + \sum_{v\in P\wedge x\in \overline{P}} f\,(v,x)\right] - \left[\underbrace{\sum_{v\in P\wedge x\in P} f\,(x,v)}_{(*)} + \sum_{v\in P\wedge x\in \overline{P}} f\,(x,v)\right] =$$

$$= \sum_{v\in P\wedge x\in \overline{P}} f\,(v,x) - \sum_{v\in \overline{P}\wedge x\in P} f\,(v,x)$$

En particular para $P = V - \{z\}$ resulta:

$$val\,(f) = \sum_{v\in P\wedge x\in \overline{P}} f\,(v,x) - \sum_{v\in \overline{P}\wedge x\in P} f\,(v,x) = \sum_{(u,z)\in E} f\,(u,z) - 0$$

4.1.7. Teorema

Enunciado Si f es un flujo factible en la red $G = (V,E,w)$ y $\left(P,\overline{P}\right)$ es un az-corte, entonces $val\,(f) \leq w\left(P,\overline{P}\right)$.

Demostracion Sabemos que el flujo de una arista esta acotado por su capacidad, luego $\sum_{v\in P\wedge x\in \overline{P}} f\,(v,x) \leq w\left(P,\overline{P}\right)$ y por el teorema anterior:

$$val\,(f) = \sum_{v\in P\wedge x\in \overline{P}} f\,(v,x) - \sum_{v\in \overline{P}\wedge x\in P} f\,(v,x) \leq \sum_{v\in P\wedge x\in \overline{P}} f\,(v,x) \leq w\left(P,\overline{P}\right)$$

4.1.8. Flujo maximo, corte minimo

Dada una red G, se verifica:

1. Existe f^* flujo factible y un az-corte $\left(P^*, \overline{P^*}\right)$ tal que $val\left(f^*\right) = w\left(P^*, \overline{P^*}\right)$ y como consecuencia del teorema anterior, f^* es un flujo maximo y $\left(P^*, \overline{P^*}\right)$ un corte minimo.

2. Si f es un flujo factible y (P, P^*) un az-corte, entonces ambos son optimos si y solo si:

   - $f\left(u, v\right) = w\left(u, v\right)$ para $\left(u, v\right) \in \left(P, \overline{P}\right)$ con $u \in P$.
   - $f\left(u, v\right) = 0$ para $\left(u, v\right) \in \left(P, \overline{P}\right)$ con $u \in \overline{P}$.

4.2. Emparejamientos

4.2.1. Definiciones

- Un matching (emparejamiento) en un grafo $G = (V, E)$ es un conjunto de aristas $M \subseteq E$ tales que cualquier par de aristas diferentes no son adyacentes.

- Diremos que M es un matching maximal si no existe otro matching $M'/M \subset M'$.

- Un matching perfecto o completo es un matching que cubre todos los vertices del grafo.

4.2.2. Camino alternante y aumentante

Un camino M-alternante en un grafo G es un camino cuyas aristas estan alternadas en M y $\overline{M}$.

Un camino M-aumentante es un camino M-alternante cuyos primer y ultimo vertice no son incididos por ninguna arista de M.

4.2.3. Lema de Berge

Enunciado Un matching M en un grafo G es maximal si y solo si G no tiene caminos M-aumentantes.

Demostracion Probaremos el contrareciproco: G tiene un matching mayor que M si y solo si G tiene un camino M-aumentante.

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sea M' un matching mayor que M. Observemos que el subgrafo G' inducido por $D = (M - M') \cup (M' - M)$ consiste exclusivamente ciclos de longitud par y caminos. De hecho cada vertice en G' puede ser incidido a lo sumo por dos aristas (una de M y otra de M') y los grafos en los que todo vertice tiene grado a lo sumo 2 consisten solo de cilcos, caminos y vertices aislados. Mas aun, como cada camino alterna sus aristas entre los matchings M y M', un ciclo debera tener longitud par.

  Como M' es mayor que M, G' debe contener una componete que tiene mas aristas de M' que de M. Dicha componente es un camino que empieza y termina con una arista de M', por lo que es un camino M-aumentante.

- $\boxed{\Leftarrow}$: Si G tiene un camino M-aumentante C, podemos usar dicho camino para crear un matching M' mayor. Basta tomar $M' = (M - C) \cup (C - M)$.

4.2.4. Teorema de Matrimonio de Hall

Enunciado Sea G un grafo dirigido bipartito con conjuntos de vertices V y W en los que las aristas estan dirigidas de los vertices en V a los vertices de W. Existe un matching completo en G si y solo si $|S| \leq |N(S)|$ para todo $S \subseteq V$; donde $N(X)$ denota al conjunto de vertices adyacentes a los de X.

Demostracion

- $\boxed{\Rightarrow}$: Como existe un matching perfecto, cada subconjunto $S \subseteq V$ debera tener al menos $|S|$ vecinos (aquellos a donde los llevan las aristas del matching).

4.2.5. Teorema de Tutte

Un grafo $G = (V, E)$ tiene un matching perfecto si y solo si para cada subconjunto $U \subseteq V$, el subgrafo inducido por $V - U$ tiene a lo sumo $|U|$ componentes conexas con un numero impar de vertices.

Bibliografía

[1] Richard Johnsonbaugh. *Matematicas Discretas*.

[2] Ralph Grimaldi. *Matematicas Discretas y Combinatoria*.