Complementos de Matematica II

15 de septiembre de 2019

Índice general

Parte I

Teoría del orden y Grupos

Capítulo 1

Relaciones

1.1. Definiciones

1.1.1. Relación

Una relación R entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Para notar que un elemento $a \in A$ se relaciona con otro elemento $b \in B$ escribimos aRb o $(a, b) \in R$.

1.1.2. Relación funcional

Diremos que una relacion $R \subseteq A \times B$ es una relación funcional si:

$$aRb \wedge aRc \Rightarrow b = c$$

Llamaremos dominio de la relación al conjunto $dom\,(R) = \{a \in A | \exists b \in B : aRb\}$.

Diremos que el conjunto $im\,(R) = \{b \in B | \exists a \in A : aRb\}$ es la imagen de R.

Cuando $dom\,(R) = A$ diremos que R es una función.

1.1.3. Relación inversa

Si R es una relación entre A y B se define la relación inversa R^{-1} entre B y A como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : aRb\}$$

1.1.4. Union, intersección y diferencia

Sean R y S relaciones entre A y B llamamos union de R y S a la relación $R \cup S$.

Analogamente podemos considerar las relaciones $R \cap S$ y $R - S$.

1.1.5. Composición

Dada una relación R entre A y B, y otra relacion S entre B y C; definimos la relación:

$$S \circ R = \{(a, b) \in A \times C | \exists b \in b : aRb \wedge bSc\}$$

1.1.6. Restricción

Sean R una relación de A en B, $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$, llamaremos restricción de R a $A' \times B'$ a la relación:

$$R|_{A' \times B'} = \{(a, b) \in A' \times B' : aRb\}$$

Si $f : A \to B$ es una función entonces $f|_{A'} = f|_{A' \times B}$.

1.2. Clasificación de relaciones

1.2.1. Propiedades

Sea R una relación de A en A, diremos que R es:

Reflexiva si $\forall a \in A : aRa$.

Simétrica si $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$.

Antisimétrica si $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$.

Transitiva si $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

1.2.2. Relación de equivalencia

Si R es una relación en A reflexiva, simétrica y transitiva diremos que R es una relación de equivalencia.

- Llamaremos clase de equivalencia de $a \in A$ y lo notaremos $\overline{a}$ al conjunto:
$$\overline{a} = \{b \in A : aRb\}$$

- A la siguiente partición de A la llamaremos conjunto cociente:
$$A/R = \{\overline{a} : a \in A\}$$

- La función $\pi : A \to A/R$ definida por $\pi(a) = \overline{a}$ es llamada proyección al cociente.

- Para cualquier función $f : A \to B$ llamaremos nucelo de f a la siguiente relación de equivalencia:
$$ker(f) = \{(a, a') : f(a) = f(a')\}$$

Observación Cuando definimos una función sobre el conjunto cociente de una relación de equivalencia, debemos prestar atención a la forma en la que lo hacemos. Consideremos a modo de ejemplo la siguiente función sobre el cociente de la relación de equivalencia modulo 5:

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & & \overline{x} & \to & f(\overline{x}) = x \end{array}$$

Esta función no esta bien definida, o mas precisamente, f no es una función. En efecto $f\left(\overline{0}\right) = 0$ y $f\left(\overline{5}\right) = 5$ pero $\overline{0} = \overline{5}$ por lo cual existe un elemento del dominio con dos imagenes diferentes.

Debemos entonces, cada vez que definimos una función sobre clases de equivalencia asegurarnos de que si $x \sim y$ entonces $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$, de ser asi diremos que f tiene una buena definición.

1.3. Teoremas

1.3.1. Invertibilidad de relaciones funcionales

Enunciado Sea f una relación funcional de A en B, entonces f^{-1} es relación funcional si y solo si f es inyectiva.

Demostración

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sean a, a', b tales que $f(a) = b$ y $f(a') = b$ luego $f^{-1}(b) = a$ y $f^{-1}(b) = a'$ y como f^{-1} es funcional resulta $a = a'$.
- $\boxed{\Leftarrow}$: Sean a, a', b tales que $f^{-1}(b) = a$ y $f^{-1}(b) = a'$ luego $f(a) = b$ y $f(a') = b$ y como f es inyectiva resulta $a = a'$.

1.3.2. Composición de funciones

Enunciado Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones, entonces $g \circ f$ es una función.

Demostración Dado $a \in A$ sabemos que existe un único $b \in B$ tal que $f(a) = b$ pues f es una función.

Por la misma razón, para dicho elemento b existe un único elemento $c \in C$ tal que $g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a) = c$.

Hemos visto que dado $a \in A$ existe un único elemento $c \in C$ tal que $g \circ f(a) = c$, es decir $g \circ f$ es una función.

1.3.3. Herencia de propiedades

Enunciado Sean R una relación de A en B, $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$, entonces si R es reflexiva tambien lo será $R|_{A' \times B'}$. También ocurre lo mismo si R es simétrica, antisimétrica o transitiva.

Demostración EJERCICIO.

1.3.4. Biyectividad entre relaciones de equivalencia y particiones

Enunciado Si R es una relación de equivalencia en A entonces A/R es una partición de A y además, dada una particion $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ la relación definida por $a \sim b \iff \exists X \in P : a, b \in X$ es una relación de equivalencia.

Demostración EJERCICIO.

1.3.5. Teorema de factorización

Enunciado Si $\sim$ es una relación de equivalencia en A y $f : A \to B$ es una función tal que $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$, entonces existe una única función $\widetilde{f} : A/\sim \to B$ tal que $f = \widetilde{f} \circ \pi$.

Demostración EJERCICIO. Definir $f(\overline{a}) = f(a)$ y probar que esta definición no depende del representante elegido.

Capítulo 2

Conjuntos ordenados

2.1. Preordenes

2.1.1. Definiciones

Una relación $\preceq$ en A es un preorden si es reflexiva y transitiva.

Diremos que un elemento a es

maximal si $\forall x : a \preceq x \Rightarrow x \preceq a$.

minimal si $\forall x : x \preceq a \Rightarrow a \preceq x$.

máximo si $\forall x : x \preceq a$.

mínimo si $\forall x : a \preceq x$.

cota superior de $B \subseteq A$ si $\forall b \in B : b \preceq a$.

cota inferior de $B \subseteq A$ si $\forall b \in B : a \preceq b$.

supremo de $B \subseteq A$ si $a \in \text{mín}\{c \in A : c \text{ es cota superior de } B\}$.

ínfimo de $B \subseteq A$ si $a \in \text{máx}\{c \in A : c \text{ es cota superior de } B\}$.

2.1.2. Orden inverso

Si $(A, \preceq)$ es un conjunto preordenado, el orden inverso $\succeq$ se define como $a \succeq b \iff b \preceq a$, resultando este un preorden donde todas las definiciones se dualizan:

- a es elemento maximal en $(A, \preceq) \iff a$ es elemento minimal en $(A, \succeq)$.
- a es cota superior en $(A, \preceq) \iff a$ es cota inferior en $(A, \succeq)$.
- a es supremo en $(A, \preceq) \iff a$ es ínfimo en $(A, \succeq)$.

2.1.3. Teorema de extremos en preordenes

Enunciado Sea $\preceq$ un preorden sobre un conjunto A, luego las siguientes proposiciones son validas:

- Si $M \in A$ es un elemento máximo, entonces también es maximal.
- Si $m \in A$ es un elemento mínimo, entonces también es minimal.

Demostración EJERCICIO.

2.2. Relación de orden

Capítulo 3

Retículos

Capítulo 4

Grupos

Parte II

Teoría de categorias