1. En cada caso determinar si la sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge y en caso de ser convergente hallar su límite.

(a) $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$,

(b) $a_n = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n-1}$,

(c) $a_n = \frac{3n^2-n+4}{2n^2+1}$,

(d) $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$,

(e) $a_n = \frac{n!}{n^n}$,

(f) $a_n = \frac{n^p}{e^n}$, $p > 0$,

(g) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Soluciones

(a)

- Veamos que la sucesión es monótona decreciente:

$$\begin{aligned} & 1 \leq n \leq n+1 \\ \Longleftrightarrow\ & \langle x^\alpha \text{ estrictamente creciente } (\alpha > 0)\rangle \\ & 1^\alpha \leq n^\alpha \leq (n+1)^\alpha \\ \Longleftrightarrow\ & \langle {}^1\!/_x \text{ estrictamente decreciente } (x > 0)\rangle \\ & \frac{1}{1^\alpha} \geq \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}}_{a_n} \geq \underbrace{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}_{a_{n+1}} \end{aligned}$$

- Veamos que la sucesión es acotada inferiormente por 0. Supongamos existe $1 \leq n$ tal que $\frac{1}{n^\alpha} < 0$, luego:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^\alpha} < 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \left\langle \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}\left(x^{-1}\right)\right\rangle \\ & n^\alpha < 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \left\langle \sqrt[\alpha]{x} \text{ estrictamente creciente } (\alpha, x > 0)\right\rangle \\ & n = \sqrt[\alpha]{n^\alpha} < \sqrt[\alpha]{0} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \langle 1 \leq n\rangle \\ & 1 \leq 0 \end{aligned}$$

- Puesto que a_n es monótona decreciente y acotada inferiormente, entonces converge.

(b) Observemos que:

$$
\begin{aligned}
& a_n \\
= & \langle \text{definicion} \rangle \\
& \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n-1} \\
= & \langle \text{suma de fracciones} \rangle \\
& \frac{n}{n} - \frac{1}{n} - \frac{n}{n-1} \\
= & \langle \text{factor comun } n \rangle \\
& \frac{n}{n} - \frac{1}{n} - \frac{n}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} \\
= & \langle n \geq 1 \rangle \\
& 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{1-\frac{1}{n}}
\end{aligned}
$$

Sea $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ luego

$$\lim_{x\to\infty} 1 - \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0} - \overbrace{\frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}}^{\to 1} = 1 - 0 - 1 = 1$$

por lo que la sucesión converge a 1.

(c) Sean $f(x) = 3x^2 - x + 4$ y $g(x) = 2x^2 + 1$. Observemos que:

- $f'(x) = 6x - 1$.
- $g'(x) = 4x$.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x-1}{4x} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{6x}{4x}}^{\to 3/2} - \frac{1}{4x} =$

  $= \frac{3}{2} - \lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{1}{4x}}^{\to 0} = \frac{3}{2}.$

Luego como $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\overbrace{f(x)}^{\to\infty}}{\underbrace{g(x)}_{\to\infty}}$ por regla de L'Hopial resulta:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{3}{2}$$

por lo que a_n converge a $\frac{3}{2}$.

(d) Sean b_n la subsucesión de los números páres y c_n la subsucesión de los números impares. Tenemos que:

- $\lim_{n\to\infty} b_n = -1$.
- $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Puesto que una sucesión es convergente si y sólo si todas sus subsucesiones convergen al mimsmo límite, podemos concluir que a_n no es convergente.

(e) Sean $l_n = 0$ y $r_n = \frac{1}{n}$. Observemos que:

$$l_n = 0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} = r_n$$

puesto que cada factor de la expresión es positivo (por ser cociente de numeros positivos) y que cada factor es menor o igual a uno.

Resulta fácil ver que l_n y r_n convergen a 0 y por teorema del sandwitch a_n también lo hace.

(f) Sea $f(x) = \frac{x^p}{e^x}$ luego $f(x) = e^{\ln\left(\frac{x^p}{e^x}\right)} = e^{\ln(x^p)-\ln(e^x)} = e^{p\ln(x)-x}$. Observemos que:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{p\ln(x)}{x} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{p\ln(x)}{x} - \lim_{x\to\infty} 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{p\ln(x)}{x} - 1 =$$

$$= p \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to\infty}}{\underbrace{x}_{\to\infty}} - 1 \overset{LH}{=} p \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} - 1 = p \cdot 0 - 1 = -1$$

Ahora:

$$\lim_{x\to\infty} p\ln(x) - x = \lim_{x\to\infty} (p\ln(x) - x)\cdot\frac{x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{p\ln(x) - x}{x}\cdot x = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\left(\frac{p\ln(x)}{x} - 1\right)}_{\to -1}\cdot \underbrace{x}_{\to\infty} = -\infty$$

y finalmente $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\overbrace{p\ln(x) - x}^{\to-\infty}} = 0$ por lo que a_n converge a 0.

(g) Sea $f(x) = \sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\ln\left(n^{1/n}\right)} = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$, luego:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\ln(n)}^{\to\infty}}{\underbrace{n}_{\to\infty}} \overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

por lo que $\lim_{x\to\infty} f(x) = e^0 = 1$; luego la sucesión converge a 1.

2. En cada caso determinar si la serie converge o diverge y en caso de ser convergente hallar su límite.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{3}{2}\right)^n$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$.

Soluciones

(a) COMPLETAR.

(b) COMPLETAR.

(c) COMPLETAR.

(d) COMPLETAR.

(e) COMPLETAR.

(f) COMPLETAR.

(g) COMPLETAR.
(h) COMPLETAR.
(i) COMPLETAR.

3. Estudiar el carácter de las siguientes series en función de los valores posibles de los parámetros a y b. En cada caso utilizar alguno de los criterios de convergencia para justificar la respuesta.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n-1}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b|^n}{n(1+a^n)}$, $a > 1$, $|b| \neq a$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n+2)(n+a)5^n}$, $a > 0$.

Soluciones

(a) COMPLETAR.
(b) COMPLETAR.
(c) COMPLETAR.
(d) COMPLETAR.