

1. Sea  $F_n$  la sucesión de Fibonacci:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

a) Probar que:  $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$

b) Desarrollar formulas para las siguientes sumas:

1)  $\sum_{i=1}^n F_{2i-1}.$

2)  $\sum_{i=1}^n F_{2i}.$

### Soluciones

a)

■ Caso base  $n = 1$ :  $\sum_{i=1}^n F_i = F_1 = 1 = 2 - 1 = F_2 + F_1 - 1 = F_3 - 1.$

■ Caso inductivo  $n = k$ : Supongamos que  $\sum_{i=1}^k F_i = F_{k+2} - 1.$

Luego:  $\sum_{i=1}^{k+1} F_i = \sum_{i=1}^k F_i + F_{k+1} \underbrace{=}_{H.I.} F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = F_{k+3} - 1.$

b)

1) Observemos que:

■  $\sum_{i=1}^1 F_{2i-1} = F_1 = 1.$

■  $\sum_{i=1}^2 F_{2i-1} = F_1 + F_3 = 3 = F_4.$

■  $\sum_{i=1}^3 F_{2i-1} = F_1 + F_3 + F_5 = 8 = F_6.$

Probaremos entonces que:  $\sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}$ :

- Caso base  $n = 1$ : Trivial.
- Caso  $n = k$ : Supongamos que  $\sum_{i=1}^k F_{2i-1} = F_{2k}$ . Luego:

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_{2i-1} = \sum_{i=1}^k F_{2i-1} + F_{2(k+1)-1} \underbrace{=}_{H.I.} F_{2k} + F_{2k+1} = F_{2k+2} = F_{2(k+1)}$$

2) COMPLETAR.

2. Encontrar una fórmula para la siguiente sumatoria:  $\sum_{i=0}^n (a + bi)$ .

### Solución

$$\sum_{i=0}^n (a + bi) = \sum_{i=0}^n a + \sum_{i=0}^n bi = a \sum_{i=0}^n 1 + b \sum_{i=0}^n i = a(n+1) + b \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

3. ¿Cuales de los siguientes enunciados son verdaderos? Probar las respuestas:

- a)  $n^2 \in O(n^3)$ .
- b)  $n^2 \in \Omega(n^3)$ .
- c)  $2^n \in \Theta(2^{n+1})$ .
- d)  $n! \in \Theta[(n+1)!]$ .

### Soluciones

- a) Verdadero:  $0 \leq n^2 \leq cn^3 \iff 0 \leq 1 \leq cn$ . Basta tomar  $c = n_0 = 1$ .
- b) Falso:  $0 \leq cn^3 \leq n^2 \iff 0 \leq cn \leq 1 \iff 0 \leq n \leq 1/c$ . Para que esto ocurra,  $n$  debe estar acotado por una constante.
- c) Verdadero:  $0 \leq c_2 2^{n+1} \leq 2^n \leq c_1 2^{n+1} \iff 0 \leq c_2 2 \leq 1 \leq c_1 2 \iff 0 \leq c_2 \leq 1/2 \leq c_1$ . Basta tomar  $c_1 = c_2 = 1/2$ .
- d) Falso:  $0 \leq c(n+1)! \leq n! \iff 0 \leq c(n+1) \leq 1 \iff n \leq \frac{1}{c} - 1$ . Para que esto ocurra,  $n$  debe estar acotado por una constante.

4. Demostrar que  $f \in \Theta(g)$  si y solo si existen constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

### Solución

- $\Rightarrow$ : Por hipótesis  $f \in O(g)$  y  $f \in \Omega(g)$ ; y por definición tenemos:
  - $\forall n \geq n_2 : 0 \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ .
  - $\forall n \geq n_1 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n)$ .

Luego tomando  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  valen ambas desigualdades.

- $\Leftarrow$ : Por definición tenemos  $f \in O(g)$  y  $f \in \Omega(g)$ , luego  $f \in \Theta(g)$ .

5. Sean  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  asintoticamente no negativas y  $h(n) = f(n) + g(n)$ , demostrar que:

$$h(n) \in \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$$

**Solución** Como  $f$  y  $g$  son asintoticamente no negativas,  $\forall n > n_1 : f(n) \geq 0$  y  $\forall n > n_2 : g(n) \geq 0$ ; tomando  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  resulta  $h$  ser asintoticamente no negativa. Además, tomando  $c_1 = 2$  y  $c_2 = 1$ :

- $0 \leq f(n) + g(n) \leq c_1 \max\{f(n), g(n)\} \Rightarrow h \in O(\max\{f(n), g(n)\})$ .
- $0 \leq c_2 \max\{f(n), g(n)\} \leq \underbrace{f(n)}_{\geq 0} + \underbrace{g(n)}_{\geq 0} \Rightarrow h \in \Omega(\max\{f(n), g(n)\})$ .

6. Dadas  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , demostrar las siguientes propiedades de las notaciones asintóticas:

- a)  $O$  y  $\Omega$  son transitivas.
- b)  $f$  asintoticamente no negativa  $\Rightarrow f(n) \in \Theta[f(n)]$ .
- c)  $\Theta$  es simétrica.
- d)  $f(n) \in O[g(n)] \iff g(n) \in \Omega[f(n)]$ .
- e)  $f(n) \in O[g(n)] \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}^+ : kf(n) \in O[g(n)]$ .
- f)  $f(n) \in O[g(n)] \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}^+ : kf(n) \in \Omega[g(n)]$ .

## Soluciones

a)

- Sean  $f, g, h$  tales que  $f \in O(g)$  y  $g \in O(h)$ , sabemos que existen  $c_1, c_2, n_1, n_2$  tales que:

- $\forall n \geq n_1 : 0 \leq f(n) \leq c_1 g(n).$

- $\forall n \geq n_2 : 0 \leq g(n) \leq c_2 h(n).$

Luego tomando  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  valen ambas desigualdades, por lo tanto:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c_1 g(n) \leq \underbrace{c_1 c_2}_c h(n) \Rightarrow f \in O(h)$$

- Análogo.

b) Sabemos que existe  $n_0 / \forall n \geq n_0 : f(n) \geq 0$ , luego tomando  $c = 1$  resultan:

- $\forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c f(n) \Rightarrow f \in O(f)$

- $\forall n \geq n_0 : 0 \leq c f(n) \leq f(n) \Rightarrow f \in \Omega(f)$

c) Sean  $f, g / f \in \Theta(g)$ , luego existen  $n_0, c_1, c_2$  tal que:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

luego, dividiendo por  $c_1$  y por  $c_2$ :

- $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n) \Rightarrow g \in O(f).$

- $\forall n \geq n_0 : 0 \leq \frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \Rightarrow g \in \Omega(f).$

d)

- $\boxed{\Rightarrow}$ : Sabemos que existen  $n_0, c$  tales que  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c g(n)$  y dividiendo por  $c$  resulta:

$$0 \leq \frac{1}{c} f(n) \leq g(n) \Rightarrow g \in \Omega(f)$$

- $\boxed{\Leftarrow}$ : Sabemos que existen  $n_0, c$  tales que  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq c f(n) \leq g(n)$  y dividiendo por  $c$  resulta:

$$0 \leq f(n) \leq \frac{1}{c} g(n) \Rightarrow f \in O(g)$$

- e) Puesto que  $f(n) \in O[g(n)]$  sabemos que existen  $n_0, c$  tales que  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n)$ . Sea  $k \in \mathbb{R}^+$ , luego multiplicando por  $k$  en la inecuación anterior obtenemos:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq kf(n) \leq kcg(n)$$

es decir,  $kf \in O(g)$ .

f) Análogo.

7. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  constantes,  $b$  positivo, probar que:

- a)  $(n+a)^b \in \Theta(n^b)$ .  
b)  $b^n \in \Theta(b^{n+a})$ .

### Soluciones

a)

$$\blacksquare \boxed{(n+a)^b \in O(n^b)} : \text{Sea } n_0 > a \text{ luego: } \forall n \geq n_0 : 0 \leq (n+a)^b \leq (2n)^b = 2^b n^b.$$

$$\blacksquare \boxed{(n+a)^b \in \Omega(n^b)} :$$

- Caso  $a \geq 0$ : Sea  $n_0 \geq 0$  luego:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq a \iff 0 \leq n \leq n+a \iff 0 \leq n^b \leq (n+a)^b$$

- Caso  $a \leq 0$ : Sea  $n_0 \geq -2a \iff -n_0 \leq 2a \iff -n_0/2 \leq a$ , luego  $\forall n \geq n_0$ :

$$-\frac{n}{2} \leq a \iff n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \leq n+a \iff \left(\frac{n}{2}\right)^b = \frac{1}{2^b} n^b \leq (n+a)^b$$

b)

- $0 \leq b^n \leq b^n = (1/b^a) b^a b^n = (1/b^a) b^{n+a}$ .
- $0 \leq (1/b^a) b^{n+a} \leq (1/b^a) b^{n+a} = b^n$ .

8. Demostrar que dadas dos funciones  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  asintoticamente no negativas, y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k$  con  $k \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $f(n) \in \Theta[g(n)]$ .

**Solución** COMPLETAR.

9. Encontrar dos funciones  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$  tal que  $f(n) \notin O[g(n)]$  y  $g(n) \notin O[f(n)]$ . Probar la respuesta.

**Solución** Sean  $f(x) = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$  y  $g(x) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar} \\ n^2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$ .

- Supongamos  $f(n) \in O[g(n)]$ , luego existen  $n_0$  y  $c$  tales que:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

En particular para  $n$  impar  $0 \leq n^2 \leq cn \iff 0 \leq n \leq c$ .  
Absurdo.

- Análogo.

10. Probar usando propiedades aritméticas que  $\sum_{i=1}^n i^k \in \Theta(n^{k+1})$  para  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

**Solución**

- $\sum_{i=1}^n i^k = 1^k + 2^k + \dots + n^k \leq n^k + \dots + n^k = nn^k = n^{k+1}$ .
- $\sum_{i=1}^n i^k = 1^k + \dots + \left(\frac{n}{2}\right)^k + \dots + n^k \geq \left(\frac{n}{2}\right)^k + \dots + n^k \geq \left(\frac{n}{2}\right)^k + \dots + \left(\frac{n}{2}\right)^k = \left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n}{2}\right)^k = \left(\frac{n}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) n^{k+1}$