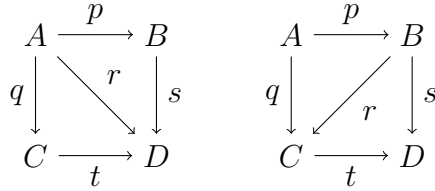


1. Considerar los siguientes diagramas. En ambos casos, probar que si los dos triángulos conmutan, también conmuta el cuadrado.



### Solución

- Sabemos que  $s \circ p = r$  y  $t \circ q = r$  por lo tanto  $s \circ p = r = t \circ q$ , es decir que el cuadrado conmuta.
- Sabemos que  $r \circ p = q$  y  $t \circ r = s$  por lo tanto:

$$s \circ p = (t \circ r) \circ p = t \circ (r \circ p) = t \circ q$$

2. Sea  $P$  un conjunto ordenado. Mostrar que  $P$  puede considerarse como una categoría.

### Solución Definimos:

- $ob \mathcal{P} = P$ .
- $mor \mathcal{P} = \leq$ .
- $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$ .

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición:* La composición está bien definida pues si  $(b, c)$  y  $(a, b)$  son morfismos, por transitividad también lo será su composición  $(a, c)$ .
- *Morfismo identidad:* Para cada objeto  $a$  por reflexividad  $(a, a) \in \leq$  por lo que  $(a, a) \in mor \mathcal{P}$ ; a este morfismo lo llamaremos  $id_a$  resultando
  - $(a, b) \circ id_a = (a, b) \circ (a, a) = (a, b)$ .
  - $id_a \circ (b, a) = (a, a) \circ (b, a) = (b, a)$ .

- *Asociatividad*: Sean  $(a, b)$ ,  $(b, c)$  y  $(c, d)$  morfismos, por transitividad también son morfismos  $\boxed{(a, c)}$ ,  $\boxed{(b, d)}$  y  $(a, d)$  luego
    - $((c, d) \circ (b, c)) \circ (a, b) = \boxed{(b, d)} \circ (a, b) = (a, d)$ .
    - $(c, d) \circ ((b, c) \circ (a, b)) = (c, d) \circ \boxed{(a, c)} = (a, d)$ .
3. Verificar que un monoide  $M$  define una categoría con un único objeto cuyas flechas son los elementos de  $M$ .

**Solución** Definimos:

- $ob \mathcal{M} = \{*\}$ .
- $mor \mathcal{M} = M$ .
- $x \circ y = x + y$ .

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición*: Por clausura de monoides, si  $x$  e  $y$  son morfismos, también lo será su composición  $x + y$ .
- *Morfismo identidad*: Para el único objeto  $*$  existe el morfismo  $0 = id_*$  de manera tal que
  - $x \circ id_* = x + 0 = x$ .
  - $id_* \circ y = 0 + y = y$ .
- *Asociatividad*: Para tres morfismos  $x, y, z$  (elementos de  $M$ ) por clausura de monoide también son morfismos  $\boxed{x + y}$  y  $\boxed{y + z}$ , luego

$$(x \circ y) \circ z = \left( \boxed{x + y} \right) + z = x + \left( \boxed{y + z} \right) = x \circ (y \circ z)$$

4. Dada una categoría  $\mathcal{C}$ , podemos definir  $\mathcal{C}^{op}$  con los mismo objetos que  $\mathcal{C}$  pero las flechas con sentido inverso, es decir,  $ob \mathcal{C}^{op} = ob \mathcal{C}$  y  $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ . Verificar que  $\mathcal{C}^{op}$  es una categoría.

**Solución** Definamos:

- $mor \mathcal{C}^{op} = \{f_{op} : X \rightarrow Y / f : Y \rightarrow X \in mor \mathcal{C}\}$ .
- $g_{op} \circ_{op} f_{op} = (f \circ g)_{op}$

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición:* Dadas  $f_{op} : A \rightarrow B$  y  $g_{op} : B \rightarrow C$  por definición existen en  $\mathcal{C}$  los morfismos  $f : B \rightarrow A$  y  $g : C \rightarrow B$  luego es válida la composición  $f \circ g$  y por definición  $(f \circ g)_{op}$  es un morfismo de  $\mathcal{C}^{op}$ .
- *Morfismo identidad:* Para cada objeto  $X$  sabemos que existe  $id_X$ , luego  $id_{X_{op}}$  es un morfismo de la categoría opuesta para el cual
  - $f_{op} \circ_{op} id_{X_{op}} = (id_X \circ f)_{op} = f_{op}$ .
  - $id_{X_{op}} \circ_{op} h_{op} = (h \circ id_X)_{op} = h_{op}$ .
- *Asociatividad:* Sean  $f_{op} : A \rightarrow B$ ,  $g_{op} : B \rightarrow C$  y  $h_{op} : C \rightarrow D$ , luego
  - $(h_{op} \circ_{op} g_{op}) \circ_{op} f_{op} = (g \circ h)_{op} \circ_{op} f_{op} = f \circ (g \circ h)$ .
  - $h_{op} \circ_{op} (g_{op} \circ_{op} f_{op}) = h_{op} \circ_{op} (f \circ g)_{op} = (f \circ g) \circ h$ .

5. Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  dos categorías, se define  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  cuyos objetos son pares ordenados de la forma  $(C, D)$  con  $C \in ob \mathcal{C}$ ,  $D \in ob \mathcal{D}$  y además:

$$Hom_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C, D), (C', D')) = Hom_{\mathcal{C}}(C, C') \times Hom_{\mathcal{D}}(D, D')$$

Verificar que  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  es una categoría.

**Solución** Definimos:

- $ob \mathcal{C} \times \mathcal{D} = ob \mathcal{C} \times ob \mathcal{D}$ .
- $(p, q) \circ_{\times} (f, g) = (p \circ f, q \circ g)$ .

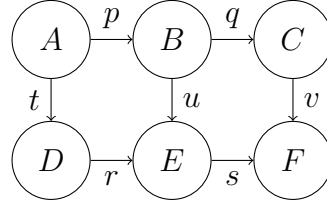
Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Morfismo identidad:* Para cada objeto  $(C, D) \in ob \mathcal{C} \times \mathcal{D}$  existen los objetos  $C \in ob \mathcal{C}$  y  $D \in ob \mathcal{D}$  y también los morfismos  $id_C$  e  $id_D$ , por lo que también existe el morfismo  $(id_C, id_D)$  para el cual
  - $(f, g) \circ_{\times} (id_C, id_D) = (f \circ id_C, g \circ id_D) = (f, g)$ .
  - $(id_C, id_D) \circ_{\times} (f, g) = (id_C \circ f, id_D \circ g) = (f, g)$ .

- *Asociatividad*: Sean  $(f, g) : (C_1, C_2) \rightarrow (D_1, D_2)$ ,  $(p, q) : (C_2, C_3) \rightarrow (D_2, D_3)$  y  $(r, s) : (C_3, C_4) \rightarrow (D_3, D_4)$ , luego
  - $((r, s) \circ_{\times} (p, q)) \circ_{\times} (f, g) = (r \circ p, s \circ q) \circ_{\times} (f, g) = (r \circ p \circ f, s \circ q \circ g)$ .
  - $(r, s) \circ_{\times} ((p, q) \circ_{\times} (f, g)) = (r, s) \circ_{\times} (p \circ f, q \circ g) = (r \circ p \circ f, s \circ q \circ g)$ .

6. Definamos  $\mathcal{C}^{\rightarrow}$  como la categoría de las flechas de una categoría  $\mathcal{C}$ , es decir, los objetos de  $\mathcal{C}^{\rightarrow}$  son las flechas de  $\mathcal{C}$ . Una flecha de  $\mathcal{C}^{\rightarrow}$  de  $f : A \rightarrow B$  en  $g : D \rightarrow E$  es un par  $(a, b)$  de flechas de  $\mathcal{C}$  tales que  $g \circ a = b \circ f$ .

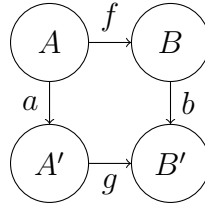
- a) Expresar las flechas de  $\mathcal{C}^{\rightarrow}$  en términos de diagramas conmutativos.
- b) Probar que si en el diagrama los cuadrados conmutan, entonces también conmuta el rectángulo exterior:



- c) Utilizar el apartado anterior para definir la composición en  $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ .
- d) Verificar que  $\mathcal{C}^{\rightarrow}$  es una categoría.

## Soluciones

- a) El par  $(a, b)$  es una flecha de  $\mathcal{C}^{\rightarrow}$  si el siguiente diagrama conmuta en  $\mathcal{C}$ :

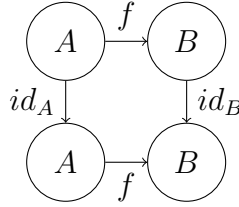


- b) Sabemos que  $u \circ p = r \circ t$  y  $v \circ q = s \circ u$  y queremos ver si  $v \circ (q \circ p) = s \circ (r \circ t)$ . Por asociatividad en  $\mathcal{C}$   $v \circ (q \circ p) = (v \circ q) \circ p$ , es decir  $v \circ (q \circ p) = (s \circ u) \circ p = s \circ (u \circ p) = s \circ (r \circ t)$ .

c) Para  $(r, p)$  y  $(s, q)$  como en el diagrama, definimos  $(s, q) \circ (r, p)$  como  $(s \circ r, q \circ p)$ .

d)

- Para cada  $f : A \rightarrow B$  en  $ob \mathcal{C}^{\rightarrow}$  definimos  $id_f = (id_{dom(f)}, id_{cod(f)})$ .
  - Observemos que  $id_f$  es una flecha de  $\mathcal{C}^{\rightarrow}$  pues el siguiente diagrama conmuta:



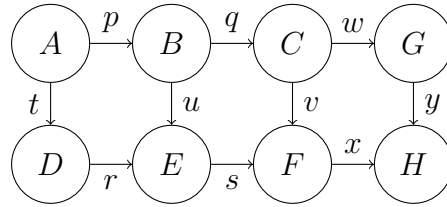
- Sean  $a : A \rightarrow A'$  y  $b : B \rightarrow B'$  como en el diagrama, luego:

$$(a, b) \circ id_f = (a \circ id_{dom(f)}, b \circ id_{cod(f)}) = (a, b)$$

- Análogamente sean  $a : A' \rightarrow A$  y  $b : B' \rightarrow B$ , entonces:

$$id_f \circ (a, b) = (id_{dom(f)} \circ a, id_{cod(f)} \circ b) = (a, b)$$

- Sean  $(r, p)$ ,  $(s, q)$  y  $(x, w)$  como en el siguiente diagrama:



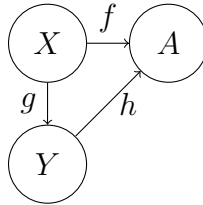
$$\begin{aligned} ((r, p) \circ (s, q)) \circ (x, w) &= (r \circ s, p \circ q) \circ (x, w) = ((r \circ s) \circ x, (p \circ q) \circ w) = \\ &= (r \circ (s \circ x), p \circ (q \circ w)) = (r, p) \circ (s \circ x, q \circ w) = (r, p) \circ ((s, q) \circ (x, w)) \end{aligned}$$

7. Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $A$  un objeto de  $\mathcal{C}$ . Definimos  $\mathcal{C}|A$  como la categoría cuyos objetos son las flechas  $f$  de  $\mathcal{C}$  tales que  $cod(f) = A$ . Una flecha  $g$  en  $\mathcal{C}|A$  de  $f : X \rightarrow A$  en  $h : Y \rightarrow A$  es una flecha  $g : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  tal que  $f = h \circ g$ .

- a) Expresar las flechas de  $\mathcal{C}|A$  en términos de diagramas conmutativos.
- b) Verificar que  $\mathcal{C}|A$  es una categoría.
- c) Si  $P$  es la categoría definida por un conjunto ordenado y  $x \in P$ , determinar  $P|x$ .

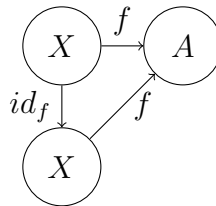
### Soluciones

- a) Si el siguiente diagrama conmuta en  $\mathcal{C}$ , entonces  $g$  es una flecha de  $\mathcal{C}|A$ .



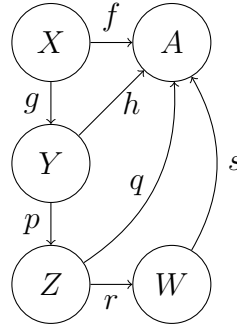
b)

- Dados dos morfismos  $g : X \rightarrow Y$  y  $p : Y \rightarrow Z$  en  $\mathcal{C}|A$  definimos la composición en  $\mathcal{C}|A$  como la composición en  $\mathcal{C}$  y para cada objeto  $f : X \rightarrow A$  definimos el morfismo  $id_f = id_{dom(f)}$ .
  - Observemos que  $id_{dom(f)}$  es un morfismo de la categoría pues el siguiente diagrama conmuta:



- Una flecha  $\alpha$  que parte de  $f$  debe tener tipo  $X \rightarrow Y$ , luego  $\alpha \circ id_f = \alpha$ .
- Una flecha  $\beta$  que llega a  $f$  debe tener tipo  $W \rightarrow X$ , luego  $id_f \circ \beta = \beta$ .

- Sean  $g, p, q$  como en el siguiente diagrama conmutativo:



luego  $(r \circ p) \circ g = r \circ (p \circ g)$  por asociatividad en  $\mathcal{C}$ .

c) COMPLETAR.

- Probar que en  $Set$  los monomorfismos (epimorfismos) son exactamente las funciones inyectivas (respectivamente sobreyectivas).

### Solución

■

- $\Rightarrow$ : Sea  $f : B \rightarrow C$  un monomorfismo, luego para cualquier conjunto  $A$  y funciones  $g, h : A \rightarrow B$  sabemos que:

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

Supongamos que  $f$  no es inyectiva, es decir que existen  $b_1 \neq b_2 \in B$  tales que  $f(b_1) = f(b_2)$ . Definimos funciones constantes  $g, h$  tales que  $g(x) = b_1$  y  $h(x) = b_2$ , luego:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(b_1) = f(b_2) = f(h(x)) = f \circ h(x)$$

y como  $f$  es monomorfismo resulta  $g = h$  lo cual es una contradicción pues  $g(x) = b_1 \neq b_2 = h(x)$ .

- $\boxed{\Leftarrow}$ : Sea  $f : B \rightarrow C$  una función inyectiva, luego sabemos que  $f(b_1) = f(b_2) \iff b_1 = b_2$ . Para  $g, h : A \rightarrow B$  tales que  $f \circ g = f \circ h$  resulta:

$$f \circ g(x) = f \circ h(x) \iff f(g(x)) = f(h(x)) \iff g(x) = h(x)$$

■

- $\boxed{\Rightarrow}$ : Sea  $f : A \rightarrow B$  un epimorfismo, luego para cualquier conjunto  $C$  y funciones  $g, h : B \rightarrow C$  sabemos que:

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

Supongamos que  $f$  no es sobreyectiva, es decir que existe  $b \in B$  tal que  $f(x) \neq b$  (para cualquier  $x$ ). Definimos  $g, h$  iguales salvo en  $b$  donde  $g(b) = c_1$  y  $h(b) = c_2$ , luego:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = h(f(x)) = h \circ f(x)$$

y como  $f$  es un epimorfismo resulta  $g = h$  lo cual es una contradicción.

- $\boxed{\Leftarrow}$ : Sea  $f : A \rightarrow B$  una función sobreyectiva y sean dos funciones  $g, h : B \rightarrow C$  tales que  $g \circ f = h \circ f$ . Supongamos que  $g \neq h$ , luego existe  $f(x) \in B$  tal que  $g(f(x)) \neq h(f(x))$  lo cual es una contradicción pues:

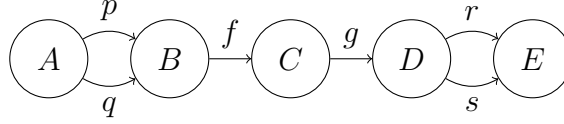
$$g \circ f(x) = h \circ f(x) \iff g(f(x)) = h(f(x))$$

9. Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $f, g$  flechas de  $\mathcal{C}$ . Probar que:

- Si  $f$  y  $g$  son monomorfismos, entonces  $g \circ f$  también lo es.
- Si  $g \circ f$  es un monomorfismo,  $f$  también lo es.
- Si  $f$  y  $g$  son epimorfismos, entonces  $g \circ f$  también lo es.
- Si  $g \circ f$  es un epimorfismo,  $g$  también lo es.
- Si  $f^{-1}$  es la inversa de  $f$  y  $g^{-1}$  es la inversa de  $g$ , entonces  $f^{-1} \circ g^{-1}$  es la inversa de  $g \circ f$ .



**Soluciones** Sean  $f, g, p, q, r, s$  como en el siguiente diagrama:



- a) Supongamos  $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q$  luego por asociatividad resulta  $g \circ (f \circ p) = g \circ (f \circ q)$  y como  $g$  es monomorfismo  $f \circ p = f \circ q$ . Nuevamente como  $f$  es monomorfismo tenemos  $p = q$ . En definitiva:  $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q \Rightarrow p = q$ , es decir,  $g \circ f$  es monomorfismo.
- b) Supongamos  $f \circ p = f \circ q$ , luego  $g \circ (f \circ p) = g \circ (f \circ q)$  y por asociatividad  $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q$ . Como  $g \circ f$  es monomorfismo resulta  $p = q$ . En definitiva:  $f \circ p = f \circ q \Rightarrow p = q$ .
- c) Supongamos  $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f)$  luego por asociatividad resulta  $(r \circ g) \circ f = (s \circ g) \circ f$  y como  $f$  es epimorfismo  $r \circ g = s \circ g$ . Nuevamente como  $g$  es epimorfismo tenemos  $r = s$ . En definitiva:  $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f) \Rightarrow r = s$ , es decir,  $(g \circ f)$  es epimorfismo.
- d) Supongamos  $r \circ g = s \circ g$ , luego  $(r \circ g) \circ f = (s \circ g) \circ f$  y por asociatividad  $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f)$ . Como  $g \circ f$  es epimorfismo resulta  $r = s$ . En definitiva:  $r \circ g = s \circ g \Rightarrow r = s$ .
- e) Sabemos que:

$$\begin{array}{ll}
 \blacksquare f \circ f^{-1} = id_C. & \blacksquare g \circ g^{-1} = id_D. \\
 \blacksquare f^{-1} \circ f = id_B. & \blacksquare g^{-1} \circ g = id_C.
 \end{array}$$

Ahora:

$$\begin{array}{ll}
 \blacksquare (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_B \circ g^{-1} = id_D. \\
 \blacksquare (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_C \circ f = id_B.
 \end{array}$$

10. Mostrar que una flecha de una categoría puede ser monomorfismo y epimorfismo y no isomorfismo.

**Solución** Consideremos en  $Mon$  el morfismo  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $f(n) = n$ . Observemos que  $n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$ .

- Monomorfismo: Sean  $g, h : M \rightarrow \mathbb{N}_0$  morfismos tales que  $f \circ g = f \circ h$  y supongamos existe  $m \in M$  tal que  $g(m) \neq h(m)$ , luego:

$$f \circ g(m) = f \circ h(m) \iff f(g(m)) = f(h(m))$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $f$  es monomorfismo.

- Epimorfismo: Sean  $g, h : \mathbb{Z} \rightarrow M$  morfismos tales que  $g \circ f = h \circ f$  y supongamos existe  $z \in \mathbb{Z}$  tal que  $g(z) \neq h(z)$ , luego:

$$g \circ f(z) = h \circ f(z) \iff g(f(z)) = h(f(z))$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $f$  es epimorfismo.

- Isomorfismo: Supongamos que existe  $f^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$  tal que  $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{Z}}$  y  $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{N}_0}$ . En particular para  $n \geq 0$  sabemos que  $f^{-1}(n) = n$ , luego:

$$0 = f^{-1}(0) = f^{-1}(-n + n) = f(-n)^{-1} + f(n)^{-1} = f(-n)^{-1} + n$$

por lo que  $f(-n)^{-1} = -n$  lo cual es absurdo ya que  $-n \notin \mathbb{N}_0$ . Por lo tanto  $f$  no es isomorfismo.

11. Mostrar que una flecha de una categoría concreta puede ser epimorfismo y no sobreyectiva.

**Solución** La misma función del ejercicio anterior cumple dichas características.

12. Mostrar que dos objetos terminales en una categoría son isomorfos. Por dualidad: ¿qué se puede decir de los objetos iniciales?

**Solución** Sean  $1$  y  $1'$  dos elementos terminales de una categoría. Por ser  $1$  terminal, existe un único morfismo  $f : 1' \rightarrow 1$  y análogamente existe un único morfismo  $g : 1 \rightarrow 1'$ . Como  $1'$  es terminal existe un único morfismo de  $1$  en  $1'$  luego  $f \circ g : 1 \rightarrow 1$  debe ser  $id_1$ . Análogamente para  $g \circ f$ .

Dos objetos iniciales en una categoría son isomorfos.

13. ¿Cuáles son los objetos iniciales y terminales en  $Set \times Set$ ? ¿Cuáles en  $Set^{\rightarrow}$ ?

### Solución

- $Set \times Set$ :
    - Iniciales:  $(\emptyset, \emptyset)$ .
    - Terminales:  $(\{x\}, \{y\})$ .
  - $Set^{\rightarrow}$ :
    - Iniciales:  $0 : \emptyset \rightarrow \emptyset$ .
    - Terminales:  $f : \{x\} \rightarrow \{y\}$ .
14. Dar una categoría sin objetos iniciales. Dar una sin objetos finales. Dar una donde los objetos finales e iniciales coincidan.

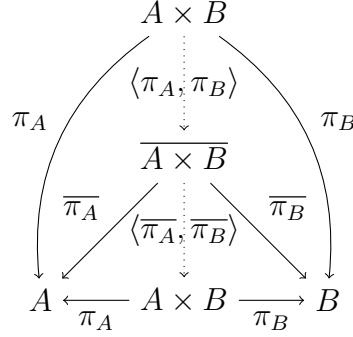
### Solución

- La categoría del poset  $(\mathbb{Z}^-, \leq)$  no tiene objetos iniciales (mínimos).
  - La categoría del poset  $(\mathbb{Z}^+, \leq)$  no tiene objetos finales (máximos).
  - El monoide trivial es una categoría cuyo único objeto es final e inicial.
15. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Probar que si dos objetos admiten producto (co-producto), éste es único salvo isomorfismo.

**Solución** Sean  $A$  y  $B$  dos objetos con productos  $A \times B$  (con proyecciones  $\pi_A$  y  $\pi_B$ ) y  $\overline{A} \times \overline{B}$  (con proyecciones  $\overline{\pi}_A$  y  $\overline{\pi}_B$ ).

Como  $A \times B$  es producto sabemos que para cualquier objeto  $C$  y par de funciones  $f : C \rightarrow A$  y  $g : C \rightarrow B$  (en particular para  $\overline{A} \times \overline{B}$  y sus proyecciones) existe un único morfismo  $\langle \overline{\pi}_A, \overline{\pi}_B \rangle : \overline{A} \times \overline{B} \rightarrow A \times B$  tal que  $\pi_A \circ \langle \overline{\pi}_A, \overline{\pi}_B \rangle = \overline{\pi}_A$  y  $\pi_B \circ \langle \overline{\pi}_A, \overline{\pi}_B \rangle = \overline{\pi}_B$ .

Análogamente existe un único morfismo  $\langle \pi_A, \pi_B \rangle : A \times B \rightarrow \overline{A} \times \overline{B}$  tal que  $\overline{\pi}_A \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_A$  y  $\overline{\pi}_B \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_B$ .



Sabemos que entre  $A \times B$  y  $A \times B$  existe un único morfismo  $f$  tal que  $\pi_A \circ f = \pi_A$  y  $\pi_B \circ f = \pi_B$ . Veamos que  $\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle$  cumple estas propiedades:

$$\pi_A \circ (\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle) = (\pi_A \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle) \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \overline{\pi_A} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_A$$

$$\pi_B \circ (\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle) = (\pi_B \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle) \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \overline{\pi_B} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_B$$

Como  $id_{A \times B}$  también cumple dichas propiedades, entonces debe ser  $id_{A \times B} = \langle \pi_A, \pi_B \rangle \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle$ . Análogamente  $\langle \pi_A, \pi_B \rangle \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle = id_{A \times B}$ .

16. Sea  $P$  un poset. Determina objetos iniciales, objetos terminales, productos y coproductos en las siguientes categorías:

- Poset*.
- Set*.
- Mon*.
- Grp*.

### Soluciones

- Poset*:

- Iniciales:  $0 = (\emptyset, \emptyset)$ .
- Terminales:  $1 = (\{x\}, \Delta)$ .
- Productos:  $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B) = ((A \times B, \leq_A \wedge \leq_B), fst, snd)$ .
- Coproductos:  $A + B = \text{COMPLETAR}$ .

b) *Set*:

- Iniciales:  $0 = \emptyset$ .
- Terminales:  $1 = \{x\}$ .
- Productos:  $A \times B = (A \times B, fst, snd)$ .
- Coproductos:  $A + B = (A \uplus B, \times \{0\}, \times \{1\})$ .

c) *Mon*:

- Iniciales:  $0 = (\{e\}, \oplus)$
- Terminales:  $1 = 0$ .
- Productos:  $(A, \oplus) \times (B, \otimes) = ((A \times B, (\oplus, \otimes)), fst, snd)$ .
- Coproductos:  $(A, \oplus) + (B, \otimes) = ((, ), , )$  COMPLETAR.

d) *Grp*:

- Iniciales:  $0 = (\{e\}, \oplus)$
- Terminales:  $1 = 0$ .
- Productos:  $(A, \oplus) \times (B, \otimes) = ((, ), , )$  COMPLETAR.
- Coproductos:  $(A, \oplus) + (B, \otimes) = ((, ), , )$  COMPLETAR.

17. Dar una categoría donde algún par de objetos carecen de producto.

**Solución** Recordemos que en un poset el producto de dos elementos es el ínfimo, luego en  $(\{x, y\}, \Delta)$  no hay productos.

18. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y sean  $A, B, C, D$  objetos de  $\mathcal{C}$ . Mostrar que en caso de existir  $A \times B, C \times D$  y dos morfismos  $f : A \rightarrow C$  y  $g : B \rightarrow D$ , entonces puede definirse un morfismo  $f \times g : A \times B \rightarrow C \times D$ .

**Solución**

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\
 f \downarrow & & \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle \downarrow & & \downarrow g \\
 C & \xleftarrow{\pi_3} & C \times D & \xrightarrow{\pi_4} & D
 \end{array}$$

Dicho morfismo existe pues lo garantiza la propiedad universal de  $C \times D$ .

19. Mostrar las siguientes identidades:

- a)  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id.$
- b)  $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h.$
- c)  $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle.$
- d)  $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k).$
- e)  $\langle [f, g], [h, k] \rangle = [\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle].$

### Soluciones

- a) Sabemos que  $\langle \pi_A, \pi_B \rangle$  es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \times B & & \\
 & \swarrow \pi_A & \downarrow \langle \pi_A, \pi_B \rangle & \searrow \pi_B & \\
 A & \xleftarrow{\pi_A} & A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B
 \end{array}$$

Observemos que  $id$  hace conmutar el diagrama pues  $\pi_B \circ id = \pi_B$  y  $\pi_A \circ id = \pi_A$ ; y como solo existe un morfismo con esa propiedad, debe ser  $id = \langle \pi_A, \pi_B \rangle$ .

- b) Sabemos que  $\langle f, g \rangle$  es el único morfismo que hace conmutar el diagrama interior:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & & \downarrow h & & \\
 & & D & & \\
 & \swarrow f & \downarrow \langle f, g \rangle & \searrow g & \\
 A & \xleftarrow{\pi_A} & A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B
 \end{array}$$

Además sabemos que el único morfismo que hace conmutar el diagrama exterior es  $\langle f \circ h, g \circ h \rangle$ . Veamos entonces que  $\langle f, g \rangle \circ h$  también conmuta el diagrama exterior:

- $\pi_B \circ (\langle f, g \rangle \circ h) = (\pi_B \circ \langle f, g \rangle) \circ h = g \circ h.$
- $\pi_A \circ (\langle f, g \rangle \circ h) = (\pi_A \circ \langle f, g \rangle) \circ h = f \circ h.$

- c) COMPLETAR.  
d) COMPLETAR.  
e) COMPLETAR.

20. Probar los siguientes isomorfismos:

- a)  $A \times B \cong B \times A.$   
b)  $A \times 1 \cong A.$   
c)  $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C.$   
d) ¿Cuales son los enunciados duales?

### Soluciones

- a) Sean  $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$  y  $(B \times A, \pi_3, \pi_4)$  dos productos. Como  $A \times B$  es producto sabemos que existe un único morfismo  $\langle \pi_4, \pi_3 \rangle$  entre  $B \times A$  y  $A \times B$  tal que  $\pi_1 \circ \langle \pi_4, \pi_3 \rangle = \pi_4$  y  $\pi_2 \circ \langle \pi_4, \pi_3 \rangle = \pi_3$ .

Análogamente un único morfismo  $\langle \pi_2, \pi_1 \rangle$  entre  $A \times B$  y  $B \times A$  tal que  $\pi_3 \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle = \pi_2$  y  $\pi_4 \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle = \pi_1$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & B \times A & \\
 \pi_4 \swarrow & \vdots & \searrow \pi_3 \\
 A \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} B
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & A \times B & \\
 \pi_2 \swarrow & \vdots & \searrow \pi_1 \\
 B \xleftarrow{\pi_3} & B \times A & \xrightarrow{\pi_4} A
 \end{array}$$

También sabemos que existe un único morfismo entre  $A \times B$  y si mismo que hace conmutar el diagrama, por lo que este debe ser el morfismo identidad. Análogamente para  $B \times A$ .

Como el morfismo identidad es el único morfismo entre  $A \times B$  y si mismo que hace conmutar el diagrama y  $\langle \pi_4, \pi_3 \rangle \circ \langle \pi_2, \pi_1 \rangle$  también tiene esta propiedad, entonces se trata del mismo morfismo. Análogamente para  $B \times A$ .

- b) Por ser  $A \times 1$  producto y 1 elemento terminal, sabemos que existen los siguientes morfismos:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & \swarrow id_A & \vdots & \searrow g & \\
 A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times 1 & \xrightarrow{\pi_2} & 1
 \end{array}$$

donde  $\boxed{\pi_1 \circ \langle id_A, g \rangle = id_A}$ .

Ademas observemos que:

- $\pi_1 \circ (\langle id_A, g \rangle \circ \pi_1) = (\pi_1 \circ \langle id_A, g \rangle) \circ \pi_1 = id_A \circ \pi_1 = \pi_1$
- $\pi_2 \circ (\langle id_A, g \rangle \circ \pi_1) = \pi_2$

por lo que  $\boxed{\langle id_A, g \rangle \circ \pi_1 = id_{A \times 1}}$ .

- c) COMPLETAR.

d)

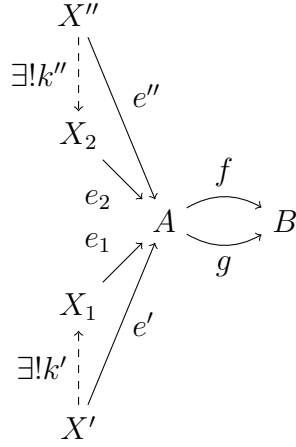
- $A + B \cong B + A$ .
- $A + 0 \cong A$ .
- $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ .

21. Probar que si dos morfismos  $f, g : X \rightarrow Y$  admiten egalizador (coegalizador), éste es único salvo isomorfismo.

**Solución** Sean  $e_1 : X_1 \rightarrow A$  y  $e_2 : X_2 \rightarrow A$  dos ecualizadores de  $f, g : A \rightarrow B$ , luego sabemos:

- a)  $f \circ e_1 = g \circ e_1$ .
- b)  $f \circ e_2 = g \circ e_2$ .
- c)  $\forall e' : X' \rightarrow A$  para el cual  $f \circ e' = g \circ e'$  existe un único  $k' : X' \rightarrow X_1$  tal que  $e_1 \circ k' = e'$ .
- d)  $\forall e'' : X'' \rightarrow A$  para el cual  $f \circ e'' = g \circ e''$  existe un único morfismo  $k'' : X'' \rightarrow X_2$  tal que  $e_2 \circ k'' = e''$ .





Por  $c$ ), sabemos que para  $e' = e_2$  existe un único  $k' : X_2 \rightarrow X_1$  tal que  $e_1 \circ k' = e_2$  y análogamente por  $d$ ), existe un único  $k'' : X_1 \rightarrow X_2$  tal que  $e_2 \circ k'' = e_1$ . Tenemos entonces:

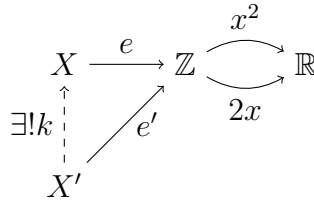
$$e_2 = e_1 \circ k' = e_2 \circ (k'' \circ k)' \Rightarrow k'' \circ k' = id_{X_2}$$

$$e_1 = e_2 \circ k'' = e_1 \circ (k' \circ k'') \Rightarrow k' \circ k'' = id_{X_1}$$

por lo que ambos ecualizadores son isomorfismos.

22. Encontrar el ecualizador en  $Set$ .

**Solución** Veamos primero un ejemplo:



Observemos el conjunto de valores para los cuales  $f = g$ :  $X = \{0, 2\}$ , luego el morfismo  $e(x) = x$  cumple trivialmente la conmutatividad.

Consideremos además  $e' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $e'(2x) = 2$  y  $e'(2x + 1) = 0$ , es evidente que este morfismo también conmuta el diagrama.

Intentemos definir un morfismo  $k : \mathbb{N} \rightarrow X$  tal que  $e \circ k = e'$ , es decir:  $e(k(x)) = e'(x) \iff k(x) = e'(x)$ , por lo que esta es la única forma de definirlo.

En definitiva el ecualizador de dos funciones  $f, g : A \rightarrow B$  es:

$$e : \{a \in A : f(a) = g(a)\} \hookrightarrow B$$

23. Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos morfismos en  $Set$ . Probar que el coegalizador de  $f$  y  $g$  es el cociente de  $Y$  por la relación de equivalencia  $y \equiv z$  si y sólo si existe  $x \in X$  tal que  $y = f(x)$  y  $z = g(x)$  o bien  $y = g(x)$  y  $z = f(x)$ .

**Solución** COMPLETAR.

24. Probar que en una categoría  $\mathcal{C}$  todo ecualizador  $e$  es un monomorfismo. Mostrar que si además  $e$  es epimorfismo, entonces se tiene un isomorfismo.

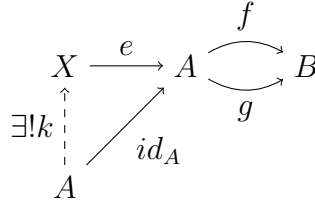
**Solución** Sea  $e : X \rightarrow A$  ecualizador de  $f, g : A \rightarrow B$ , luego  $f \circ e = g \circ e$ . Consideremos además dos morfismos  $k', k'' : X' \rightarrow X$  para los cuales  $e \circ k' = e \circ k''$ :

$$\begin{array}{ccccc} & X & \xrightarrow{e} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} & B \\ & \uparrow \scriptstyle k' & & & & \\ & X' & \uparrow \scriptstyle k'' & & & \end{array}$$

Si definimos  $e' := e \circ k'$  tenemos que  $\boxed{f \circ e'} = f \circ e \circ k' = g \circ e \circ k' = \boxed{g \circ e'}$  lo que implica por propiedad universal de ecualizadores que  $k'$  es el único morfismo para el cual  $e \circ k' = e'$ , sin embargo también ocurre que  $e \circ k'' = e'$ ; luego  $k'$  y  $k''$  deben ser el mismo morfismo, de donde concluimos que  $e$  es monomorfismo.

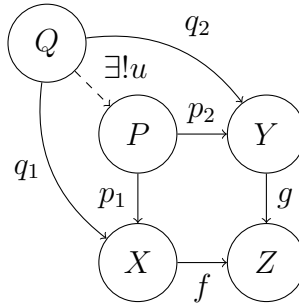
Supongamos que además de monomorfismo también es epimorfismo, luego como  $f \circ e = g \circ e$  resulta  $f = g$ .

Si también consideramos que  $f \circ id_A = f = g = g \circ id_A$ , sabemos que existe un único morfismo  $k : A \rightarrow X$  tal que  $e \circ k = id_A$ .



Como  $\boxed{e \circ id_X} = e = id_A \circ e = (e \circ k) \circ e = \boxed{e \circ (k \circ e)}$  y  $e$  es monomorfismo, resulta  $k \circ e = id_X$ .

25. El *pullback* de dos morfismos  $f : X \rightarrow Z$  y  $g : Y \rightarrow Z$  consiste en un objeto  $P$  junto con dos morfismos  $p_1 : P \rightarrow X$ ,  $p_2 : P \rightarrow Y$  tal que  $f \circ p_1 = g \circ p_2$ , y además si existe otro objeto  $Q$  con dos morfismos  $q_1 : Q \rightarrow X$ ,  $q_2 : Q \rightarrow Y$  tal que  $f \circ q_1 = g \circ q_2$ , entonces existe un único morfismo  $u : Q \rightarrow P$  tal que  $p_1 \circ u = q_1$  y  $p_2 \circ u = q_2$ . A continuación, un diagrama que muestra la situación:



Probar que el pullback de dos morfismos, si existe, es único salvo isomorfismo.

**Solución** COMPLETAR.

26. Encontrar el pull-back en  $Set$ .

**Solución**  $P = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$ ,  $p_1 = fst$ ,  $p_2 = snd$ .

27. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con exponenciales.

- a) Probar  $curry(eval_{AB}) = id_{B^A}$ .
- b) Dado un morfismo  $f : B \rightarrow C$ , construir un morfismo  $B^S \rightarrow C^S$ .
- c) Dado un morfismo  $f : S \rightarrow C^B$ , construir un morfismo  $uncurry(f) : S \times B \rightarrow C$ .
- d) Probar  $uncurry(curry(f)) = f$  y  $curry(uncurry(f)) = f$ .

### Soluciones

- a) Como  $B^A$  es un exponencial, sabemos que para cualquier morfismo  $g : C \times A \rightarrow B$  (en particular para  $\varepsilon$ ) existe un único morfismo  $\tilde{\varepsilon} : B^A \rightarrow B^A$  tal que  $\varepsilon \circ (\tilde{\varepsilon} \times id_A) = \varepsilon$ :

$$\begin{array}{ccc} \exists! \tilde{\varepsilon} : B^A & B^A \times A & \xrightarrow{\varepsilon} B \\ & \uparrow \tilde{\varepsilon} \times id_A & \nearrow \varepsilon \\ & B^A \times A & \end{array}$$

Puesto que  $id_{B^A}$  también tiene esa propiedad, entonces  $\tilde{\varepsilon} = id_{B^A}$ :

$$\begin{array}{ccccc} B^A & \xleftarrow{\pi_1} & B^A \times A & \xrightarrow{\pi_2} & A \\ id_{B^A} \downarrow & & id_{B^A} \times id_A \downarrow & & id_A \downarrow \\ B^A & \xleftarrow{\pi_1} & B^A \times A & \xrightarrow{\pi_2} & A \\ & & \downarrow \varepsilon & & \\ & & B & & \end{array}$$

Nótese que  $id_{B^A} \times id_A = \langle id_{B^A} \circ \pi_1, id_A \circ \pi_2 \rangle = \langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id_{B^A \times A}$ .

b)

$$\begin{array}{ccc}
 & C^S & C^S \times S \xrightarrow{\varepsilon_{SC}} C \\
 \widetilde{f \circ \varepsilon_{SB}} \uparrow & & \nearrow f \circ \varepsilon_{SB} \\
 B^S & & B^S \times S
 \end{array}$$

c) Por ser  $C^B \times B$  un producto existe  $f \times id_B$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 S & \xleftarrow{\pi_3} & S \times B & & \\
 f \downarrow & & \exists! \downarrow & \searrow \pi_4 & \\
 C^B & \xleftarrow{\pi_1} & C^B \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\
 & & \downarrow \varepsilon & & \\
 & & C & & 
 \end{array}$$

luego  $uncurry(f) := \varepsilon \circ (f \times id_B) : S \times B \rightarrow C$ .

d)

- Sean  $f : S \rightarrow C^B$ , y  $h := uncurry(f) = \varepsilon \circ (f \times id_B)$ . Como  $C^B$  es exponencial entonces para  $uncurry(f)$  existe un único morfismo  $\tilde{h} : S \rightarrow C^B$  para el cual  $\varepsilon \circ (\tilde{h} \times id_B) = h$  y como también  $\varepsilon \circ (f \times id_B) = h$  entonces  $\tilde{h} \times id_B = f \times id_B$  por lo que  $\tilde{h} = f$ , es decir:  $curry(uncurry(f)) = f$ .
- Sea  $f : S \times B \rightarrow C$ . Como  $C^B$  es exponencial entonces para  $f$  existe un único morfismo  $\tilde{f} : S \rightarrow C^B$  para el cual  $\varepsilon \circ (\tilde{f} \times id_B) = f$ , luego  $uncurry(\tilde{f}) = \varepsilon \circ (\tilde{f} \times id_B) = f$ .

28. Sea  $\mathcal{C}$  una CCC y sean  $A, B$  objetos de  $\mathcal{C}$ . Probar:

- a)  $B^A$  es único salvo isomorfismo.
- b)  $1^A \cong 1$ .
- c)  $B^1 \cong B$ .

## Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) Por ser  $1$  un objeto terminal, sabemos que existe un único morfismo  $f : 1 \times A \rightarrow 1$  y otro  $g : 1^A \rightarrow 1$ ; además por ser  $1^A$  exponencial, sabemos que existe un único morfismo  $\tilde{f} : 1 \rightarrow 1^A$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & 1^A & \\ \exists! \tilde{f} \nearrow & & \searrow \exists! g \\ & 1 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & 1^A \times A & \xrightarrow{\exists! \varepsilon} 1 \\ \tilde{f} \times id_A \uparrow & & \nearrow \exists! f \\ & 1 \times A & \end{array}$$

Observemos que  $g \circ \tilde{f} : 1 \rightarrow 1$  y el único morfismo de este tipo es  $id_1$ . COMPLETAR.

- c) COMPLETAR.

29. Hallar los exponenciales en *Set*.

**Solución**  $B^A = Hom(A, B)$ .

30. Demostrar que un álgebra de Boole es una CCC.

**Solución** Un álgebra de Boole es un retículo acotado distributivo con complementos. Consideremos entonces la categoría inducida por el poset.

- En dicha categoría el producto corresponde al ínfimo, luego por ser retículo existe el producto para cualquier par de elementos.
- Por ser acotado tiene mínimo y máximo luego en la categoría corresponden al objeto inicial y terminal.

Veremos ahora que  $B^A = \overline{A} \vee B$ :

$$\begin{array}{ccc} \overline{A} \vee B & & (\overline{A} \vee B) \wedge A \xrightarrow{\varepsilon} B \\ \tilde{g} \uparrow & & \uparrow f \nearrow g \\ C & & C \wedge A \end{array}$$

- Observemos que:

$$\begin{aligned} (\bar{A} \vee B) \wedge A \leq B &\iff (\bar{A} \wedge A) \vee (B \wedge A) \leq B \iff \\ &\iff 0 \vee (B \wedge A) \leq B \iff B \wedge A \leq B \end{aligned}$$

lo cual vale, por lo que existe  $\varepsilon$ .

- Sea  $C \wedge A \leq B \iff \boxed{(C \wedge A) \vee B} = B$ , luego:

$$\begin{aligned} C \vee (\bar{A} \vee B) &= (C \wedge 1) \vee (\bar{A} \vee B) = (C \wedge (A \vee \bar{A})) \vee (\bar{A} \vee B) = \\ &= (C \wedge A) \vee (C \wedge \bar{A}) \vee \bar{A} \vee B = \boxed{(C \wedge A) \vee B} \vee (C \wedge \bar{A}) \vee \bar{A} = \\ &= B \vee ((C \wedge \bar{A}) \vee \bar{A}) = B \vee \bar{A} = \bar{A} \vee B \end{aligned}$$

por lo que  $C \leq \bar{A} \vee B$ , es decir que existe  $\tilde{g}$ . Además es única pues es un morfismo de la categoría de un poset.

- Finalmente  $C \wedge A \leq (\bar{A} \vee B) \wedge A \iff C \leq \bar{A} \vee B$  lo cual vale por el punto anterior, es decir que  $f$  existe.

31. En una categoría con coproductos y objeto final, podemos definir los booleanos como el objeto  $Bool = 1 + 1$ . En este caso, a  $i_1$  le llamamos *true* y a  $i_2$  le llamamos *false*. Escribimos un morfismo  $not : Bool \rightarrow Bool$  tal que:

$$not \circ true = false$$

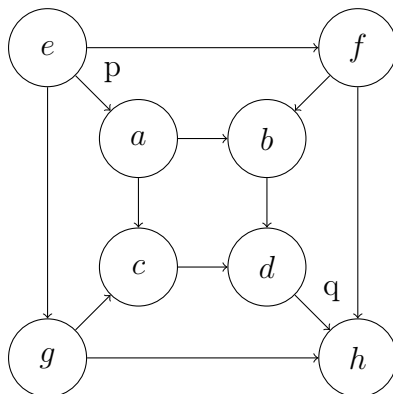
$$not \circ false = true$$

Suponiendo que la categoría tiene exponenciales: ¿puede escribir un morfismo  $and : Bool \times Bool \rightarrow Bool$  que se comporte como la conjunción?

**Solución** COMPLETAR.

## Ejercicios adicionales

1. Considerar que en el siguiente diagrama los 4 trapecios conmutan.



Probar que:

- a) Si el cuadrado interno conmuta, también lo hace el cuadrado externo.
- b) Si  $p$  es epimorfismo y  $q$  es monomorfismo, entonces si el cuadrado externo conmuta, también lo hace el cuadrado interno.

### Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.

2. Sea  $\mathcal{C}$  con 0. Verificar que si un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{C}$  admite núcleo (conúcleo), éste es único salvo isomorfismo.

**Solución** COMPLETAR.

3. Sean  $\mathcal{C}$  una categoría con 0 y  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Probar que  $p : Y \rightarrow C$  es un conúcleo de  $f$  en  $\mathcal{C}$  si y solo si  $p^{op}$  es un núcleo de  $f^{op}$  en  $\mathcal{C}^{op}$ .



**Solución** COMPLETAR.

4. Sean  $\mathcal{C}$  un categoría con 0 y  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ . Probar que  $\ker(f)$  ( $\operatorname{coker}(f)$ ) coincida con el igualizador (coequalizador) de  $f$  y 0.

**Solución** COMPLETAR.

5. Un  $\omega CPO$  es un conjunto ordenado con mínimo (notado  $\perp$ ) tal que toda cadena ascendente numerable  $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \dots$  (que notamos  $\{a_i\}_{i=0}^\infty$ ) tiene un supremo  $\sqcup \{a_i\}_{i=0}^\infty$ . Una función monótona entre dos  $\omega CPO$  es continua si  $f(\sqcup \{a_i\}_{i=0}^\infty) = \sqcup \{f(a_i)\}_{i=0}^\infty$  para toda cadena ascendente numerable  $\{a_i\}_{i=0}^\infty$ .
- a) Probar que podemos armar una categoría cuyos objetos son  $\omega CPO$  y cuyas flechas son funciones continuas.
  - b) ¿Esta categoría tiene productos? En caso afirmativo, describirlos.  
¿Y coproductos?

**Soluciones**

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.