

# Índice general

<b>I</b>	<b>Variables aleatorias discretas</b>	<b>3</b>
<b>1.</b>	<b>Distribución Binomial</b>	<b>4</b>
1.1.	Descripción . . . . .	4
1.1.1.	Características . . . . .	4
1.1.2.	Ejemplos . . . . .	5
1.1.2.1.	Lanzamiento de monedas . . . . .	5
1.1.2.2.	Apuestas a la ruleta . . . . .	6
1.2.	Condición de cierre . . . . .	6
1.3.	Esperanza . . . . .	7
1.4.	Variancia y desvío estándar . . . . .	7
<b>2.</b>	<b>Distribución Geométrica</b>	<b>8</b>
2.1.	Descripción . . . . .	8
2.1.1.	Características . . . . .	8
2.1.2.	Ejemplos . . . . .	8
2.2.	Condición de cierre . . . . .	8
2.3.	Esperanza . . . . .	8
2.4.	Variancia y desvío estándar . . . . .	8
<b>3.</b>	<b>Distribución Hipergeométrica</b>	<b>9</b>
3.1.	Descripción . . . . .	9
3.1.1.	Características . . . . .	9
3.1.2.	Ejemplos . . . . .	9
3.2.	Condición de cierre . . . . .	9
3.3.	Esperanza . . . . .	9
3.4.	Variancia y desvío estándar . . . . .	9

<b>4. Distribución de Pascal</b>	<b>10</b>
4.1. Descripción . . . . .	10
4.1.1. Características . . . . .	10
4.1.2. Ejemplos . . . . .	10
4.2. Condición de cierre . . . . .	10
4.3. Esperanza . . . . .	10
4.4. Variancia y desvió estándar . . . . .	10
<b>5. Distribución de Poisson</b>	<b>11</b>
5.1. Descripción . . . . .	11
5.1.1. Características . . . . .	11
5.1.2. Ejemplos . . . . .	11
5.2. Condición de cierre . . . . .	11
5.3. Esperanza . . . . .	11
5.4. Variancia y desvió estándar . . . . .	11
<b>6. Distribución Multinomial</b>	<b>12</b>
6.1. Descripción . . . . .	12
6.1.1. Características . . . . .	12
6.1.2. Ejemplos . . . . .	12
6.2. Condición de cierre . . . . .	12
6.3. Esperanza . . . . .	12
6.4. Variancia y desvió estándar . . . . .	12

# Parte I

## Variables aleatorias discretas

# Capítulo 1

## Distribución Binomial

### 1.1. Descripción

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de  $n$  ensayos de Bernoulli independientes entre sí, con una probabilidad fija  $p$  de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Es decir, sean  $\mathcal{E}$  un experimento,  $S$  el espacio muestral asociado a tal experimento y  $A$  un suceso del espacio con probabilidad  $p$ , entonces  $X$ : «Número de ocurrencias del suceso  $A$  en  $n$  repeticiones independientes de  $\mathcal{E}$ » es una variable aleatoria con distribución binomial.

$$X \sim B(n, p)$$

#### 1.1.1. Características

- $R_X = \{0, \dots, n\}$ .
- $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ .
- $X = \sum_{i=1}^n Y$  donde  $Y$  es la variable de Bernoulli  $Y(y) = \begin{cases} 1 & y = A \\ 0 & y = \overline{A} \end{cases}$ .

## 1.1.2. Ejemplos

### 1.1.2.1. Lanzamiento de monedas

$\mathcal{E}$ : «Se tira una moneda y se observa el resultado».

- $S = \{\odot, \otimes\}$ .  $\#S = 2$ .
- $A = \{\text{Salio cara}\}$ .  $\#A = 1$ .  $P(A) = \frac{1}{2}$ .
- $X$ : «Cantidad de caras en 3 repeticiones independientes de  $\mathcal{E}$ ».  $X \sim B(3, \frac{1}{2})$ .

- $X(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 Y(x_i) = Y(x_1) + Y(x_2) + Y(x_3)$ .

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| • $P(X = x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$ . | • $R_X = \{0, \dots, 3\}$ .          |
| • $X(\otimes, \otimes, \otimes) = 0$ .  | • $X(\odot, \otimes, \otimes) = 1$ . |
| • $X(\otimes, \otimes, \odot) = 1$ .  | • $X(\odot, \otimes, \odot) = 2$ .   |
| • $X(\otimes, \odot, \otimes) = 1$ .  | • $X(\odot, \odot, \otimes) = 2$ .   |
| • $X(\otimes, \odot, \odot) = 2$ .  | • $X(\odot, \odot, \odot) = 3$ .     |

1. ¿Cual es la probabilidad de que salgan 2 caras en 3 repeticiones del experimento?

a)  $P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ .

b) Probabilidad clásica:

- $S' = \{(x_1, x_2, x_3) / x_i \in S\}$ .  $\#S' = 2^3 = 8$ .
- $B = \{\text{Salieron exactamente 2 caras}\} = \{(\otimes, \odot, \odot), (\odot, \otimes, \odot), (\odot, \odot, \otimes)\}$ .
- $P(B) = \frac{\#B}{\#S'} = \frac{3}{8}$ .

2. ¿Cual es la probabilidad de que salgan al menos 2 caras en 3 repeticiones del experimento?

a)  $P(X \geq 2) = p(2) + p(3) = \frac{3}{8} + \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} = \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{4}{8}$ .

b) Probabilidad clásica:

- $C = \{\text{Salieron exactamente 3 caras}\} = \{(\odot, \odot, \odot)\}$ .  $\#C = 1$ .
- $D = \{\text{Salieron al menos 2 caras}\} = B \cup C$ .  $\#D = 3 + 1 = 4$ .
- $P(D) = \frac{\#D}{\#S'} = \frac{4}{8}$ .

**1.1.2.2. Apuestas a la ruleta**

$\mathcal{E}$ : «Se tira la bolilla y se observa el resultado».

- $S = \{0, \dots, 36\}$ .  $\#S = 37$ .
- $A = \{\text{Sale un numero negro}\}$ .  $\#A = 18$ .  $P(A) = \frac{18}{37}$ .
- $X$ : «Cantidad de números negros en 4 repeticiones independientes de  $\mathcal{E}$ ».  $X \sim B(4, \frac{18}{37})$ .
- $P(X = x) = \binom{4}{x} \left(\frac{18}{37}\right)^x \left(\frac{19}{37}\right)^{4-x}$ .  $R_X = \{0, \dots, 4\}$ .

1. ¿Cual es la probabilidad de que la mayoría sean negros?

$$a) P(X > 2) = p(3) + p(4) = \binom{4}{3} \left(\frac{18}{37}\right)^3 \left(\frac{19}{37}\right)^{4-3} + \binom{4}{4} \left(\frac{18}{37}\right)^4 \left(\frac{19}{37}\right)^{4-4} = \frac{16399584}{69343957} + \frac{104976}{1874161} \approx 0,2925.$$

b) Probabilidad clásica:

- $\#S' = 37^4 = 1874161$ .
- $B = \{\text{Hay exactamente 3 numeros negros}\}$ .  $\#B = 4 \cdot 19 \cdot 18^3 = 443232$ .
- $C = \{\text{Hay exactamente 4 numeros negros}\}$ .  $\#C = 18^4 = 104976$ .
- $D = \{\text{La mayoria son negros}\} = B \cup C$ .  $\#D = 548208$ .
- $P(D) = \frac{\#D}{\#S'} = \frac{548208}{1874161} \approx 0,2925$ .

**1.2. Condición de cierre**

1

$$\sum_{i \in R_X} P(X = i) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \underbrace{=}_1 (p+q)^n = 1^n = 1$$

---

<sup>1</sup>Teorema del binomio

### 1.3. Esperanza

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{i \in R_X} iP(X=i) = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \\
 &= \sum_{i=1}^n i \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^n \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} = \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n!}{i!(n-[i+1])!} p^{i+1} (1-p)^{n-(i+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} p p^i (1-p)^{n-i-1} = \\
 &= np \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} p^i (1-p)^{n-i-1} = np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-i-1} = \\
 &\underbrace{=}_{1} np [p + (1-p)]^{n-1} = np
 \end{aligned}$$

**Alternativa** Si  $X \sim B(n, p)$  podemos expresar a  $X$  como suma de  $n$  variables de Bernoulli  $Y_i$ , es decir:  $X = \sum_{i=1}^n Y_i$ . Luego:

$$E(X) = E\left[\sum_{i=1}^n Y_i\right] = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = \sum_{i=1}^n p = np$$

### 1.4. Variancia y desvío estándar

$$V(Y_i) = E(Y_i^2) - [E(Y_i)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$\begin{aligned}
 V(X) &= V\left[\sum_{i=1}^n Y_i\right] \underbrace{=}_{\text{independencia}} \sum_{i=1}^n V(Y_i) = \sum_{i=1}^n pq = npq \\
 \sigma_X &= \sqrt{npq}
 \end{aligned}$$

## Capítulo 2

### Distribución Geométrica

#### 2.1. Descripción

##### 2.1.1. Características

##### 2.1.2. Ejemplos

#### 2.2. Condición de cierre

#### 2.3. Esperanza

#### 2.4. Variancia y desvió estándar



## Capítulo 3

# Distribución Hipergeométrica

### 3.1. Descripción

#### 3.1.1. Características

#### 3.1.2. Ejemplos

### 3.2. Condición de cierre

### 3.3. Esperanza

### 3.4. Variancia y desvió estándar

# Capítulo 4

## Distribución de Pascal

### 4.1. Descripción

#### 4.1.1. Características

#### 4.1.2. Ejemplos

### 4.2. Condición de cierre

### 4.3. Esperanza

### 4.4. Variancia y desvió estándar

# Capítulo 5

## Distribución de Poisson

### 5.1. Descripción

#### 5.1.1. Características

#### 5.1.2. Ejemplos

### 5.2. Condición de cierre

### 5.3. Esperanza

### 5.4. Variancia y desvió estándar

# Capítulo 6

## Distribución Multinomial

### 6.1. Descripción

#### 6.1.1. Características

#### 6.1.2. Ejemplos

### 6.2. Condición de cierre

### 6.3. Esperanza

### 6.4. Variancia y desvió estándar