Pablo Verdes

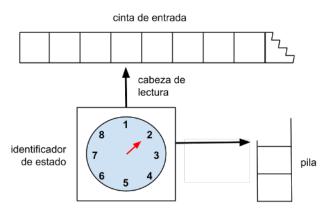
LCC

6 de junio de 2018

Introducción

- En la unidad anterior estudiamos los AEF y su poder de reconocimiento de lenguajes —en particular, sus límites.
- Allí, intentamos aumentar la capacidad de reconocimiento de los AEF introduciendo no determinismo en sus sistemas de transiciones.
- Sin embargo, encontramos que los AEFND reconocen el mismo conjunto de lenguajes que los AEF, esto es, el conjunto de los lenguajes regulares £3.
- En esta unidad estudiaremos una generalización de los AEFND, llamada autómatas de pila.
- El ingrediente principal en este tipo de autómatas es la presencia de una memoria (pila) donde se puede almacenar información a medida que se procesa una palabra de entrada.
- Recordemos que el problema de los AEF era que no podían 'recordar' la cantidad de símbolos leídos.

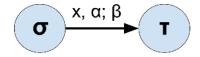
Introducción



Introducción

- Los símbolos que pueden almacenarse en esta pila constituyen un conjunto finito. Este conjunto puede incluir, o no:
 - los símbolos del alfabeto de la máquina
 - símbolos adicionales que la máquina utiliza como marcadores internos, por ej. para separar secciones que tengan interpretaciones distintas o para indicar que la pila está vacía (usualmente, el símbolo #).
- Las transiciones que ejecutan los AP deben ser variantes de la siguiente secuencia básica:
 - 1 leer un símbolo de la entrada
 - 2 extraer un símbolo de la pila
 - 3 insertar un símbolo en la pila
 - pasar a un nuevo estado

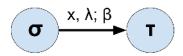
- A este proceso se lo representa con la notación $(\sigma, x, \alpha; \beta, \tau)$, donde:
 - $\triangleright \sigma$ es el estado actual
 - ▶ x es el símbolo del alfabeto que se lee en la entrada
 - ightharpoonup lpha es el símbolo que se extrae de la pila
 - lacktriangleright es el símbolo que se inserta en la pila
 - ightharpoonup estado al que pasa el autómata
- Gráficamente: arcos con etiquetas $x, \alpha; \beta$



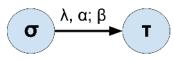
• Se obtienen variantes de este proceso básico de transición permitiendo que las transiciones lean, extraigan o inserten la cadena vacía.

Ejemplos:

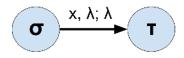
▶ En el estado σ : si se lee x de la entrada, no extraer nada de la pila, insertar β en la pila y pasar al estado τ .



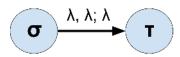
▶ En el estado σ : no leer nada de la entrada, extraer α de la pila, insertar β en la pila y pasar al estado τ .



- Ejemplos:
 - ▶ En el estado σ : si se lee x de la entrada, no extraer ni insertar nada en la pila y pasar al estado τ (este tipo de transición ignora la pila: se reduce al tipo de transición de un AEF).



▶ En el estado σ : no leer nada de la entrada, no extraer ni insertar nada en la pila y pasar al estado τ (transición espontánea).

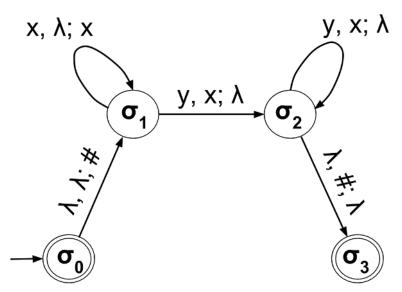


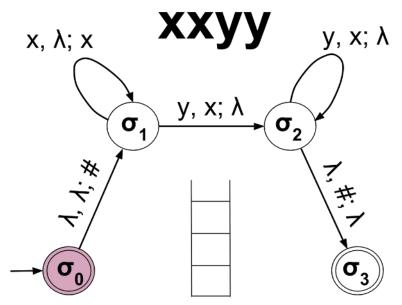
Definición: Un autómata de pila (AP) es una tupla

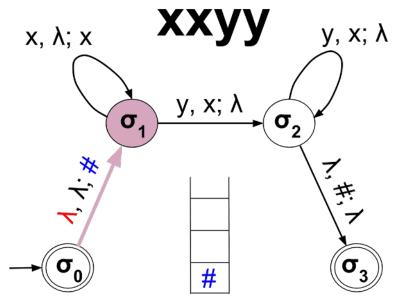
$$A = (S, \Sigma, \Gamma, T, \sigma, Ac)$$

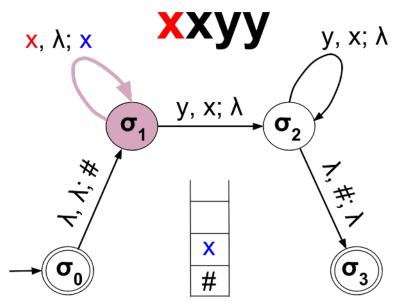
donde:

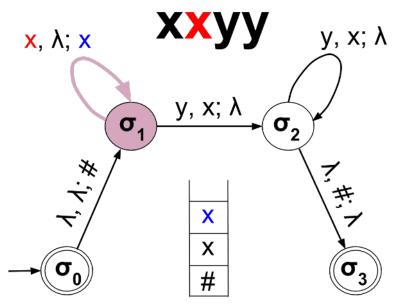
- *S* es un conjunto finito de **estados**
- ullet Es un conjunto finito de símbolos de entrada
- Γ es un conjunto finito de símbolos de pila
- $T \subseteq S \times (\Sigma \cup {\lambda}) \times (\Gamma \cup {\lambda}) \times (\Gamma \cup {\lambda}) \times S$ es una relación de transición
- $\sigma \in S$ es el **estado inicial**
- $Ac \subseteq S$ es un conjunto de **estados de aceptación**

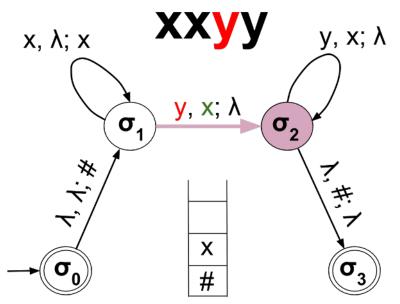


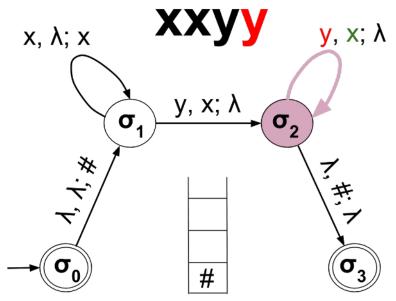


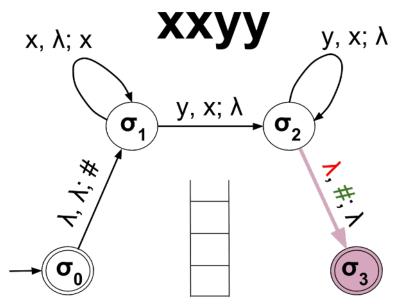












- **Definición:** Una configuración de un autómata de pila $A = (S, \Sigma, \Gamma, T, \sigma, Ac)$ es un elemento de $C_A = S \times \Sigma^* \times \Gamma^*$.
- La idea es que una configuración (σ_k, w, ω) indica que el autómata A está en el estado σ_k , le falta leer la cadena w de la entrada, y el contenido completo de la pila (de arriba hacia abajo) es ω . Esta información es suficiente para predecir lo que ocurrirá en el futuro.
- **Definición:** Para un AP $A = (S, \Sigma, \Gamma, T, \sigma, Ac)$, la relación lleva en un paso $\Rightarrow_A \subseteq \mathcal{C}_A \times \mathcal{C}_A$ se define de la siguiente manera:

$$(\sigma_k, xw, \alpha\omega) \Rightarrow_A (\sigma_j, w, \beta\omega)$$
 sii $(\sigma_k, x, \alpha; \beta, \sigma_j) \in T$

- **Definición:** La relación lleva en uno o más pasos \Rightarrow_A^* se define recursivamente a partir de la relación lleva en un paso \Rightarrow_A de manera análoga a lo ya hecho para la función de transición f de los AEF.
- No usaremos el subíndice A cuando sea obvio del contexto.

• **Definición:** Sea $A = (S, \Sigma, \Gamma, T, \sigma, Ac)$ un AP. El lenguaje aceptado por A es el conjunto

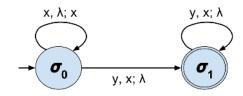
$$\mathcal{AC}(A) = \{ w \in \Sigma^* \mid (\sigma, w, \lambda) \Rightarrow^* (\tau, \lambda, \omega), \ \omega \in \Gamma^*, \ \tau \in Ac \}$$

- Es decir, una cadena w será aceptada por un AP si, arrancando desde su estado inicial y con la pila vacía, es posible que el autómata llegue a un estado de aceptación después de leer toda la cadena.
- Nótese que esto no quiere decir que la máquina deba llegar a un estado de aceptación al leer el último caracter de w. ¿Por qué?
- Porque después de leer el último caracter de la entrada, el AP podría ejecutar varias transiciones de la forma $(\sigma_k, \lambda, \alpha; \beta, \sigma_i)$, cambiando de estado (y tal vez operando sobre la pila, por ejemplo para vaciarla) pero sin leer ningún caracter de la entrada.

- Consideremos un autómata de pila que sólo tiene transiciones del tipo $(\sigma_k, x, \lambda; \lambda, \sigma_j)$ con $x \neq \lambda$.
- Los pasos de este tipo ignoran que la máquina tiene una pila. Sólo dependen del estado y símbolo de entrada actuales.
- Vemos entonces que los AEFND son un caso particular de AP.
- Por lo tanto, los lenguajes regulares son un subconjunto de los lenguajes aceptados por los AP: $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{AC}(AP)$.
- Más aún, acabamos de ver que el lenguaje $\{x^ny^n\mid n\in\mathbb{N}_0\}$ es aceptado por un AP, y como por el lema del bombeo sabemos que no es regular, concluimos que $\mathcal{L}_3\subset\mathcal{AC}(AP)$.
- Veamos otro ejemplo.



• Ejemplo:



$$\mathcal{AC}(A) = \{xy, \ x^n y, \ x^n y^k \ \text{si} \ k \le n\} = \{x^n y^k \mid n, k \in \mathbb{N}, k \le n\}$$

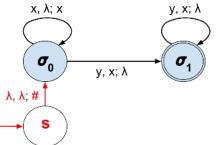
- Obs. que si k < n el autómata no vacía su pila.
- Si quisiéramos componer AP, por ej. para concatenar lenguajes, necesitaríamos que al llegar al estado de aceptación del primer AP la pila estuviera vacía.
- Veamos que siempre se puede retocar un AP de manera de aceptar el mismo lenguaje pero vaciando su pila.

Teorema: Para cada $A \in AP$, existe $A' \in AP$ que vacía su pila y tal que $\mathcal{AC}(A') = \mathcal{AC}(A)$.

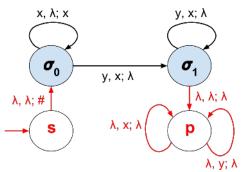
D/ Sea $A = (S, \Sigma, \Gamma, T, \sigma, Ac)$ un AP.

La idea para construir A' es la siguiente:

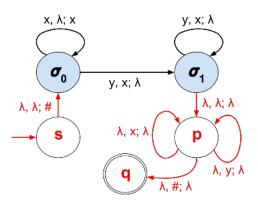
• El estado inicial de A deja de serlo. Introducimos un nuevo estado inicial y una transición del nuevo al anterior que lo único que hace es insertar en la pila un marcador # (sup. que $\# \notin \Gamma$).



- Los estados de aceptación de *A* dejan de serlo. Introducimos un nuevo estado, *p*, junto con las transiciones que permiten a la máquina pasar de cada uno de los antiguos estados de aceptación al nuevo estado *p* sin leer, extraer o insertar un símbolo.
- Vaciamos la pila sin salir del estado p introduciendo transiciones de la forma $p \xrightarrow{\lambda, x; \lambda} p$ para cada x en $\Gamma \{\#\}$.



• Agregamos un nuevo (y único) estado de aceptación q y la transición $p \xrightarrow{\lambda, \#; \lambda} q$ que borra el marcador #, vaciando completamente la pila.



• A continuación, formalizamos estas ideas.

Dado $A = (S, \Sigma, \Gamma, T, \sigma, Ac)$, definimos $A' = (S', \Sigma, \Gamma', T', \sigma', Ac')$ donde:

- $S' = S \cup \{s, p, q\}$, donde $s, p, q \notin S$
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{\#\}$, donde $\# \notin \Gamma$
- $\sigma' = s$
- $Ac' = \{q\}$

0

$$T' = T \cup \{(s, \lambda, \lambda; \#, \sigma)\}$$
 (1)

$$\cup \{(\tau,\lambda,\lambda;\lambda,p) \mid \tau \in Ac\}$$
 (2)

$$\cup \{(p, \lambda, \alpha; \lambda, p) \mid \alpha \in \Gamma - \{\#\}\}$$
 (3)

$$\cup \{(p,\lambda,\#;\lambda,q)\} \tag{4}$$

Ahora debemos mostrar que

$$AC(A) = AC(A').$$

1 Veamos que $\mathcal{AC}(A) \subseteq \mathcal{AC}(A')$:

Sea $\alpha \in \mathcal{AC}(A)$. Sabemos que, partiendo del estado inicial σ con la pila vacía, α nos lleva en uno o más pasos a un estado de aceptación. En términos de configuraciones, podemos entonces escribir:

$$(\sigma, \alpha, \lambda) \Rightarrow^* (\tau, \lambda, \gamma)$$
 donde $\tau \in Ac, \gamma \in \Gamma^*$

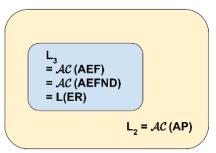
Por lo tanto, en A' tenemos la derivación:

$$(s, \alpha, \lambda) \Rightarrow^{(1)} (\sigma, \alpha, \#) \Rightarrow^{*} (\tau, \lambda, \gamma \#) \Rightarrow^{(2)} (p, \lambda, \gamma \#)$$
$$\Rightarrow^{(3)*} (p, \lambda, \#) \Rightarrow^{(4)} (q, \lambda, \lambda)$$

Como $q \in Ac'$, se tiene $\alpha \in \mathcal{AC}(A')$. Obs. que la pila queda vacía.

2 El caso $\mathcal{AC}(A) \supseteq \mathcal{AC}(A')$ se demuestra análogamente.

- **Teorema 1:** Sea G una gramática independiente de contexto. Entonces existe un autómata de pila A tal que $L(G) = \mathcal{AC}(A)$. **D/** ver Brookshear, pág. 85.
- **Teorema 2:** Sea A un autómata de pila. Entonces existe una gramática independiente de contexto G tal que $L(G) = \mathcal{AC}(A)$. **D**/ ver Brookshear, pág. 90.



- ¿Existen lenguajes fuera de \mathcal{L}_2 ? La respuesta es si.
- Un ejemplo es $\{a^nb^nc^n\mid n\in\mathbb{N}\}$. Para demostrarlo usaremos el:
- **Lema de bombeo:** Sea $L \in \mathcal{L}_2$. Si L es infinito existe $\alpha \in L$ de la forma $\alpha = xuyvz$, donde $uv \neq \lambda$, tal que $xu^nyv^nz \in L \ \forall n \in \mathbb{N}$.

D/ Sea $L \in \mathcal{L}_2$ dado. Sabemos que existe una gramática independiente de contexto $G = (N, T, P, \sigma)$ tal que L(G) = L. Informalmente, la idea de la demostración es la siguiente:

- ightharpoonup L infinito $\Rightarrow L$ contiene palabras de longitud arbitrariamente grande
- ▶ Palabras largas requieren derivaciones largas (de muchos pasos).
- ▶ Si la palabra es suficientemente larga, en algún momento forzosamente tendremos que volver a aplicar alguna de las reglas de producción.
- ▶ La aparición de ese bucle es el que permite bombear caracteres.

4□ > 4ⓓ > 4ಠ > 4ಠ > □ ■ 900

Sea m el número máximo de símbolos de $N \cup T$ que aparecen en el lado derecho de las reglas de producción de G: $m = max\{|\delta|, A \rightarrow \delta \in P\}$.

Obs. que m es la mayor cantidad de símbolos por los que se puede reemplazar un no terminal. Por lo tanto, al aplicar i reglas de producción cualesquiera, la longitud de la cadena resultante es a lo sumo m^i .

Llamemos k a la cantidad de símbolos no terminales de G: k = |N|.

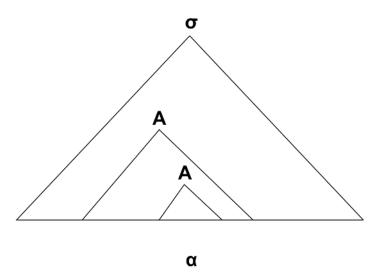
Sea $\alpha \in L$ una cadena tal que $|\alpha| > m^k$, que existe pues L es infinito.

¿Cuántas veces se deben aplicar las reglas de producción para derivar α ? Llamémoslo i.

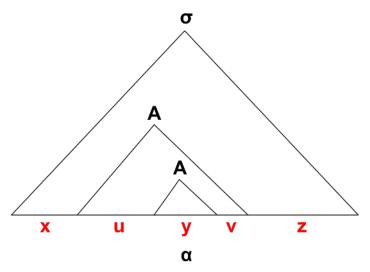
 $m^i \ge |\alpha| > m^k \implies i > k$, es decir, para formar α debieron aplicarse más de k reglas de producción (debieron expandirse más de k no terminales).

Como hay k no terminales, por lo menos uno debió expandirse 2 veces. Llamémoslo A.

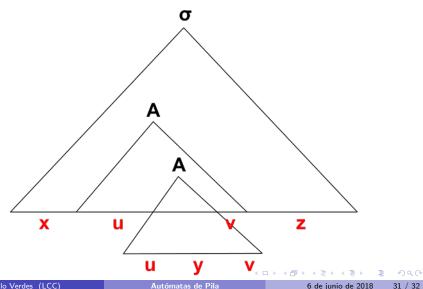
Representando esquemáticamente la derivación de α como un árbol:



Representando esquemáticamente la derivación de α como un árbol:



Representando esquemáticamente la derivación de α como un árbol:



Corolario: $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \not\in \mathcal{L}_2$

D/ Por el absurdo, supongamos que $L \in \mathcal{L}_2$.

- Como L es infinito, podemos aplicar el lema de bombeo y concluir que existe una cadena $xuyvz \in L$ tal que $xu^nyv^nz \in L \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- $uv \neq \lambda$. Sin perder generalidad, supongamos que sea $u \neq \lambda$.
- Hay 2 posibilidades:
 - u está formado por un sólo símbolo (a, b ó c): al bombearlo se obtiene una palabra que no mantiene la igualdad entre exponentes y por lo tanto ∉ L
 - ② u está formado por más de un símbolo (por ej., u = aab ó abbbbbcc): al bombearlo se obtiene una palabra que altera el orden de los símbolos y por lo tanto $\notin L$
- Absurdo, luego $L \not\in \mathcal{L}_2$.

