Complementos de Matematica II

10 de septiembre de 2019

Índice general

Parte I

Teoría del orden y Grupos

Capítulo 1

Relaciones

1.1. Definiciones

1.1.1. Relación

Una relación R entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Para notar que un elemento $a \in A$ se relaciona con otro elemento $b \in B$ escribimos aRb o $(a, b) \in R$.

1.1.2. Relación funcional

Diremos que una relacion $R \subseteq A \times B$ es una relación funcional si:

$$aRb \wedge aRc \Rightarrow b = c$$

Llamaremos dominio de la relación al conjunto $dom\,(R) = \{a \in A | \exists b \in B : aRb\}$.

Diremos que el conjunto $im\,(R) = \{b \in B | \exists a \in A : aRb\}$ es la imagen de R.

Cuando $dom\,(R) = A$ diremos que R es una función.

1.1.3. Relación inversa

Si R es una relación entre A y B se define la relación inversa R^{-1} entre B y A como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : aRb\}$$

1.1.4. Union, intersección y diferencia

Sean R y S relaciones entre A y B llamamos union de R y S a la relación $R \cup S$.

Analogamente podemos considerar las relaciones $R \cap S$ y $R - S$.

1.1.5. Composición

Dada una relación R entre A y B, y otra relacion S entre B y C; definimos la relación:

$$S \circ R = \{(a, b) \in A \times C | \exists b \in b : aRb \wedge bSc\}$$

1.1.6. Restricción

Sean R una relación de A en B, $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$, llamaremos restricción de R a $A' \times B'$ a la relación:

$$R|_{A' \times B'} = \{(a, b) \in A' \times B' : aRb\}$$

Si $f : A \to B$ es una función entonces $f|_{A'} = f|_{A' \times B}$.

1.2. Clasificación de relaciones

1.2.1. Propiedades

Sea R una relación de A en A, diremos que R es:

Reflexiva si $\forall a \in A : aRa$.

Simétrica si $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$.

Antisimétrica si $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$.

Transitiva si $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

1.2.2. Relación de equivalencia

Si R es una relación en A reflexiva, simétrica y transitiva diremos que R es una relación de equivalencia.

- Llamaremos clase de equivalencia de $a \in A$ y lo notaremos $\overline{a}$ al conjunto:
$$\overline{a} = \{b \in A : aRb\}$$

- A la siguiente partición de A la llamaremos conjunto cociente:
$$A/R = \{\overline{a} : a \in A\}$$

- La función $\pi : A \to A/R$ definida por $\pi(a) = \overline{a}$ es llamada proyección al cociente.

- Para cualquier función $f : A \to B$ llamaremos nucelo de f a la siguiente relación de equivalencia:
$$ker(f) = \{(a, a') : f(a) = f(a')\}$$

1.3. Teoremas

1.3.1. Invertibilidad de relaciones funcionales

Enunciado Sea f una relación funcional de A en B, entonces f^{-1} es relación funcional si y solo si f es inyectiva.

Demostración

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sean a, a', b tales que $f(a) = b$ y $f(a') = b$ luego $f^{-1}(b) = a$ y $f^{-1}(b) = a'$ y como f^{-1} es funcional resulta $a = a'$.

- $\boxed{\Leftarrow}$: Sean a, a', b tales que $f^{-1}(b) = a$ y $f^{-1}(b) = a'$ luego $f(a) = b$ y $f(a') = b$ y como f es inyectiva resulta $a = a'$.

1.3.2. Composición de funciones

Enunciado Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones, entonces $g \circ f$ es una función.

Demostración Dado $a \in A$ sabemos que existe un único $b \in B$ tal que $f(a) = b$ pues f es una función.

Por la misma razón, para dicho elemento b existe un único elemento $c \in C$ tal que $g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a) = c$.

Hemos visto que dado $a \in A$ existe un único elemento $c \in C$ tal que $g \circ f(a) = c$, es decir $g \circ f$ es una función.

1.3.3. Herencia de propiedades

Enunciado Sean R una relación de A en B, $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$, entonces si R es reflexiva tambien lo será $R|_{A' \times B'}$. También ocurre lo mismo si R es simétrica, antisimétrica o transitiva.

Demostración EJERCICIO.

1.3.4. Biyectividad entre relaciones de equivalencia y particiones

Enunciado Si R es una relación de equivalencia en A entonces A/R es una partición de A y además, dada una particion $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ la relación definida por $a \sim b \iff \exists X \in P : a, b \in X$ es una relación de equivalencia.

Demostración EJERCICIO.

1.3.5. Teorema de factorización

Enunciado Si $\sim$ es una relación de equivalencia en A y $f : A \to B$ es una función tal que $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$, entonces existe una única función $\widetilde{f} : A/\sim \to B$ tal que $f = \widetilde{f} \circ \pi$.

Demostración EJERCICIO. Definir $f(\overline{a}) = f(a)$ y probar que esta definición no depende del representante elegido.

Capítulo 2

Conjuntos ordenados

Capítulo 3

Retículos

Capítulo 4

Grupos

Parte II

Teoría de categorias