

1. En el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, considerar la relación

$$R = \{(0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 5), (3, 2), (3, 8), (4, 4), (4, 9), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 9), (6, 2), (6, 8), (7, 1), (7, 7), (7, 9)\}$$

a) Graficar R .

b) Determinar:

1) $R(0)$.

2) $R(\{1, 2, 3\})$.

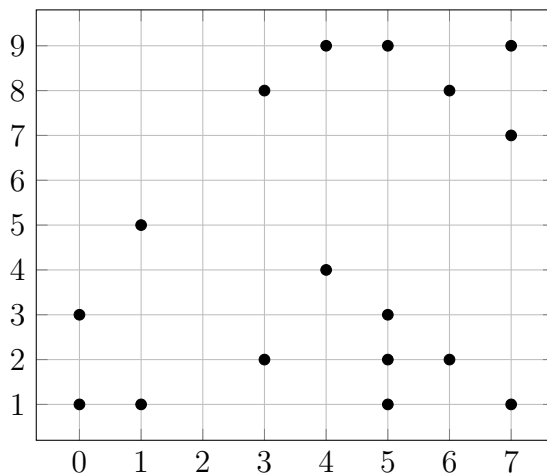
3) $R(A)$.

4) $R^{-1}(0)$.

5) $R^{-1}(\{1, 2, 3\})$.

6) $R^{-1}(A)$.

Soluciones



a)

b)

1) $R(0) = \{1, 3\}$.

2) $R(\{1, 2, 3\}) = \{1, 5, 2, 8\}$.

3) $R(A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$.

4) $R^{-1}(0) = \emptyset$.

5) $R^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{0, 1, 5, 7, 3\}$.

6) $R^{-1}(A) = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. Sean R y S relaciones sobre un conjunto A . Probar:

- a) $\text{dom}(R \cap S) \subseteq \text{dom}(R) \cap \text{dom}(S)$.
- b) $\text{dom}(R \cup S) = \text{dom}(R) \cup \text{dom}(S)$.
- c) $\text{dom}(R - S) \supseteq \text{dom}(R) - \text{dom}(S)$.
- d) $\text{im}(R \cap S) \subseteq \text{im}(R) \cap \text{im}(S)$.
- e) $\text{im}(R \cup S) \subseteq \text{im}(R) \cup \text{im}(S)$.
- f) $\text{im}(R - S) \supseteq \text{im}(R) - \text{im}(S)$.

Soluciones

$$\begin{array}{lcl}
 & & x \in \text{dom}(R \cap S) \\
 \Longleftrightarrow & & \langle \text{def. dom} \rangle \\
 & & \exists y / (x, y) \in R \cap S \\
 \Longleftrightarrow & & \langle \text{def. } \cap \rangle \\
 a) \quad & & \exists y / xRy \wedge xSy \\
 \Rightarrow & & \langle \text{def. dom} \rangle \\
 & & x \in \text{dom}(R) \wedge x \in \text{dom}(S) \\
 \Longleftrightarrow & & \langle \text{def. } \cap \rangle \\
 & & x \in \text{dom}(R) \cap \text{dom}(S)
 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lcl}
 & & x \in \text{dom}(R \cup S) \\
 \Longleftrightarrow & & \langle \text{def. dom} \rangle \\
 & & \exists y / (x, y) \in R \cup S \\
 \Longleftrightarrow & & \langle \text{def. } \cup \rangle \\
 \blacksquare & & \exists y / xRy \vee xSy \\
 \Rightarrow & & \langle \text{def. dom} \rangle \\
 & & x \in \text{dom}(R) \vee x \in \text{dom}(S) \\
 \Longleftrightarrow & & \langle \text{def. } \cup \rangle \\
 & & x \in \text{dom}(R) \cup \text{dom}(S)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{c}
\Longleftrightarrow \\
\Rightarrow \\
\Rightarrow \\
\Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow
\end{array}
\begin{array}{c}
x \in \text{dom}(R) \cup \text{dom}(S) \\
\langle \text{def}.\cup \rangle \\
x \in \text{dom}(R) \vee x \in \text{dom}(S) \\
\begin{array}{|c|c|}
\hline
\begin{array}{c}
\langle \text{Sup} \rangle \\
x \in \text{dom}(R) \\
\langle \text{def}.\text{dom} \rangle \\
\exists y/xRy \\
\langle i_\vee \rangle \\
\exists y/xRy \vee xSy
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\langle \text{Sup} \rangle \\
x \in \text{dom}(S) \\
\langle \text{def}.\text{dom} \rangle \\
\exists y/xSy \\
\langle i_\vee \rangle \\
\exists y/xRy \vee xSy
\end{array}
\end{array} \\
\exists y/xRy \vee xSy \\
\langle \text{def}.\cup \rangle \\
\exists y/(x, y) \in R \cup S \\
\langle \text{def}.\text{dom} \rangle \\
x \in \text{dom}(R \cup S)
\end{array}
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{c}
\Longleftrightarrow \\
\Rightarrow \\
\Rightarrow \\
\Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow
\end{array}
\begin{array}{c}
x \in \text{dom}(R) - \text{dom}(S) \\
\langle \text{def}.- \rangle \\
x \in \text{dom}(R) \wedge x \notin \text{dom}(S) \\
\langle \text{def}.\text{dom} \rangle \\
(\exists y/(x, y) \in R) \wedge (\forall z : (x, z) \notin S) \\
\langle z = y \rangle \\
\exists y/(x, y) \in R \wedge (x, y) \notin S \\
\langle \text{def}.- \rangle \\
\exists y/(x, y) \in R - S \\
\langle \text{def}.\text{dom} \rangle \\
x \in \text{dom}(R - S)
\end{array}
\end{array}$$

d)

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{c}
\Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \\
\Rightarrow \\
\Longleftrightarrow
\end{array}
\begin{array}{c}
y \in \text{im}(R \cap S) \\
\langle \text{def}.\text{im} \rangle \\
\exists x/(x, y) \in R \cap S \\
\langle \text{def}.\cap \rangle \\
\exists x/(x, y) \in R \wedge (x, y) \in S \\
\langle \text{def}.\text{im} \rangle \\
y \in \text{im}(R) \wedge y \in \text{im}(S) \\
\langle \text{def}.\cap \rangle \\
y \in \text{im}(R) \cap \text{im}(S)
\end{array}
\end{array}$$

e)

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{c}
\Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \\
\Rightarrow \\
\Longleftrightarrow
\end{array}
\begin{array}{c}
y \in im(R \cup S) \\
\langle def.im \rangle \\
\exists x / (x, y) \in R \cup S \\
\langle def.\cup \rangle \\
\exists x / (x, y) \in R \vee (x, y) \in S \\
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c}
\langle Sup \rangle \\
\exists x / (x, y) \in R \\
\langle def.im \rangle \\
y \in im(R) \\
\langle i_{\vee} \rangle \\
y \in im(R) \vee y \in im(S)
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\langle Sup \rangle \\
\exists x / (x, y) \in S \\
\langle def.im \rangle \\
y \in im(S) \\
\langle i_{\vee} \rangle \\
y \in im(R) \vee y \in im(S)
\end{array}
\end{array} \\
y \in im(R) \vee y \in im(S) \\
\langle def.\cup \rangle \\
y \in im(R) \cup im(S)
\end{array}
\end{array}$$

f)

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{c}
\Longleftrightarrow \\
\Rightarrow \\
\Rightarrow \\
\Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow
\end{array}
\begin{array}{c}
y \in im(R) - im(S) \\
\langle def.- \rangle \\
y \in im(R) \wedge y \notin im(S) \\
\langle def.im \rangle \\
(\exists x / (x, y) \in R) \wedge (\forall z : (z, y) \notin S) \\
\langle z = y \rangle \\
\exists x / (x, y) \in R \wedge (x, y) \notin S \\
\langle def.- \rangle \\
\exists x / (x, y) \in R - S \\
\langle def.im \rangle \\
y \in im(R - S)
\end{array}
\end{array}$$

3. Sean $R \in \mathcal{P}(A \times B)$ y $S \in \mathcal{P}(B \times C)$ relaciones, construir una relacion $R \circ S \in \mathcal{P}(A \times C)$. Mostrar que esta construcción es asociativa.

Solución Definimos $R \circ S$ tal que $(a, c) \in R \circ S \iff \exists b \in B / aRb \wedge bSc$. Mostraremos que $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$, donde $T \in \mathcal{P}(C \times D)$:

$$\begin{aligned}
& (a, d) \in (R \circ S) \circ T \\
\iff & \langle def.\circ \rangle \\
& \exists c \in C / a(R \circ S)c \wedge cTd \\
\iff & \langle def.\circ \rangle \\
& \exists c \in C, b \in B / (aRb \wedge bSc) \wedge cTd \\
\iff & \langle asoc.\wedge \rangle \\
& \exists c \in C, b \in B / aRb \wedge (bSc \wedge cTd) \\
\iff & \langle def.\circ \rangle \\
& \exists b \in B / aRb \wedge b(S \circ T)d \\
\iff & \langle def.\circ \rangle \\
& (a, d) \in R \circ (S \circ T)
\end{aligned}$$

4. Mostrar que $\mathcal{P}(A \times B)$ es «equivalente» a $A \rightarrow \mathcal{P}(B)$.

Solución Sea $f : \mathcal{P}(A \times B) \mapsto A \rightarrow \mathcal{P}(B)$ tal que $f(R)$ es una función que asigna a cada elemento $a \in A$ el conjunto $R(a)$. Veamos que esta función es biyectiva:

- Inyectividad: Sean $R, S \in \mathcal{P}(A \times B) / R \neq S$ luego existe un par (a, b) tal que pertenece a una relación y no a la otra. Supongamos sin perdida de generalidad que $(a, b) \in R \wedge (a, b) \notin S$, entonces $b \in f(R)(a)$ pero $b \notin f(S)(a)$; por lo que $f(R) \neq f(S)$.
- Sobreyectividad: Sea $g \in A \rightarrow \mathcal{P}(B)$, definimos $R \in \mathcal{P}(A \times B)$ tal que $aRb \iff b \in g(a)$. De esta manera, por definicion de f resultará $f(R) = g$.

5. Sean $R, S, S_1, S_2, T, T_1, T_2$ relaciones apropiadas. Probar:

- a) $R \subseteq R \circ R^{-1} \circ R$.
- b) $S_1 \subseteq S_2$ y $T_1 \subseteq T_2$ implica que $(S_1 \circ T_1) \subseteq (S_2 \circ T_2)$.
- c) $(R \circ S) \cap T \subseteq R \circ (S \cap (R^{-1} \circ T))$.

Soluciones

$$\begin{array}{lcl}
 & & (a, b) \in R \\
 \Rightarrow & & \langle def.^{-1} \rangle \\
 & & (b, a) \in R^{-1} \\
 \Rightarrow & & \langle def. \circ \rangle \\
 a) & & (a, a) \in R \circ R^{-1} \\
 \Rightarrow & & \langle i_{\wedge} \rangle \\
 & & a(R \circ R^{-1})a \wedge (a, b) \in R \\
 \Rightarrow & & \langle def. \circ \rangle \\
 & & (a, b) \in (R \circ R^{-1}) \circ R
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 & & (x, z) \in S_1 \circ T_1 \\
 \Rightarrow & & \langle def. \circ \rangle \\
 & & \exists y/x S_1 y \wedge y T_1 z \\
 b) & \Rightarrow & \langle Hip \rangle \\
 & & \exists y/x S_2 y \wedge y T_2 z \\
 \Rightarrow & & \langle def. \circ \rangle \\
 & & (x, z) \in S_2 \circ T_2
 \end{array}$$

c) COMPLETAR.

6. Sea $R \in \mathcal{P}(A^2)$. Probar:

- a) R es reflexiva si y solo si $\Delta_A \subseteq R$.
- b) R es simétrica si y solo si $R \subseteq R^{-1}$.
- c) R es antisimétrica si y solo si $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$.
- d) R es transitiva si y solo si $R \circ R \subseteq R$.

donde $\Delta_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

Soluciones

a)

$$\begin{array}{lcl}
 & & x \in \Delta_A \\
 \Leftrightarrow & & \langle def. \Delta_A \rangle \\
 \blacksquare & & x = (a, a) \text{ p. a. } a \in A \\
 \Leftrightarrow & & \langle R.\text{reflexiva} \rangle \\
 & & x \in R
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
& & a \in A \\
\Longleftrightarrow & & \langle \text{def.} \Delta_A \rangle \\
& & (a, a) \in \Delta_A \\
\Rightarrow & & \langle \Delta_A \subseteq R \rangle \\
\blacksquare & & (a, a) \in R \\
\Rightarrow & & \langle \text{sup} \rangle \\
& & (a, a) \in R \wedge (a, a) \notin R \\
\Rightarrow & & \langle \text{absurdo} \rangle \\
& & R \text{ es reflexiva}
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lcl}
& & aRb \\
\Rightarrow & & \langle R \text{ simétrica} \rangle \\
\blacksquare & & bRa \\
\Rightarrow & & \langle \text{def.} R^{-1} \rangle \\
& & aR^{-1}b
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
& & aRb \\
\Rightarrow & & \langle R \subseteq R^{-1} \rangle \\
\blacksquare & & aR^{-1}b \\
\Rightarrow & & \langle \text{def.} R^{-1} \rangle \\
& & bRa
\end{array}$$

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

7. Sean R y S relaciones sobre un conjunto A . Determinar la validez de los siguientes enunciados:

- Si R y S son reflexivas, entonces $R \cap S$ también lo es.
- Si R y S son reflexivas, entonces $R \cup S$ también lo es.
- Si R y S son simétricas, entonces $R \cap S$ también lo es.
- Si R y S son simétricas, entonces $R \cup S$ también lo es.
- Si R y S son antisimétricas, entonces $R \cap S$ también lo es.
- Si R y S son antisimétricas, entonces $R \cup S$ también lo es.
- Si R y S son transitivas, entonces $R \cap S$ también lo es.

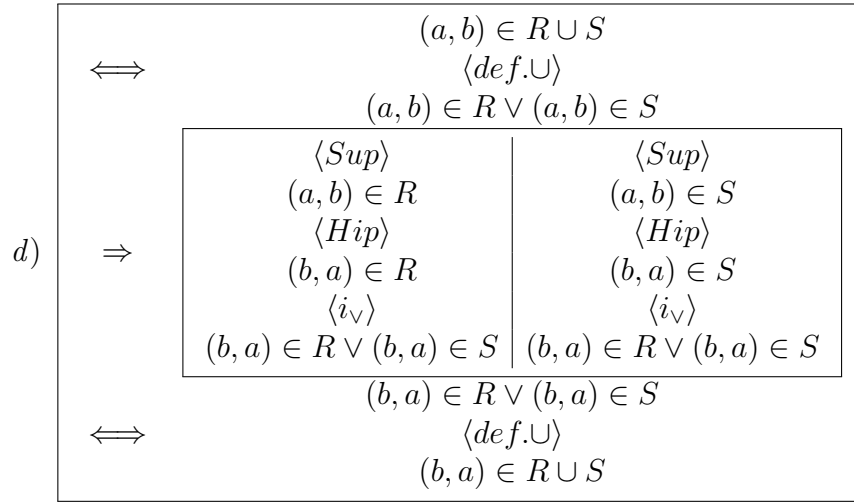
- h) Si R y S son transitivas, entonces $R \cup S$ tambien lo es.
- i) Si R es ? (simétrica, antisimétrica, transitiva), entonces R^{-1} tambien lo es.

Soluciones

$$\begin{array}{l}
 a) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a \in A \\ \langle Hip \rangle \\ aRa \wedge aSa \end{array} \\
 \quad \quad \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \langle def.\cap \rangle \\ (a, a) \in R \cap S \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 b) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a \in A \\ \langle Hip \rangle \\ aRa \\ \langle i_{\vee} \rangle \\ aRa \vee aSa \end{array} \\
 \quad \quad \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \langle def.\cup \rangle \\ (a, a) \in R \cup S \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 c) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} (a, b) \in R \cap S \\ \langle def.\cap \rangle \\ aRb \wedge aSb \end{array} \\
 \quad \quad \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \langle Hip \rangle \\ bRa \wedge bSa \end{array} \\
 \quad \quad \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \langle def.\cap \rangle \\ (b, a) \in R \cap S \end{array}
 \end{array}$$



- e) COMPLETAR.
f) Falso: $R = \{(a, b)\}, S = \{(b, a)\}$.
g) COMPLETAR.
h) Falso: $R = \{(a, b)\}, S = \{(b, c)\}$.
i) COMPLETAR.

8. Sea A un conjunto con n elementos. ¿Cuántas relaciones hay en A ?
¿Cuántas relaciones tales que $R(A) = A$ hay en A ? ¿Cuántas relaciones reflexivas hay en A ?

Solución COMPLETAR.

9. Analizar si las siguientes relaciones son o no relaciones de equivalencia:

- a) En \mathbb{Z} , la relación $aRb \iff a - b$ es par.
b) En $\{f : A \rightarrow B\}$ las relaciones siguientes:
1) $fRg \iff f(A) \subseteq g(A)$.
2) $fRg \iff f(A) = g(A)$.
3) $fRg \iff f^{-1}(A) = g^{-1}(A)$.
c) Isomorfismo de grafos.

Soluciones

a)

- Reflexividad: Sea $x \in \mathbb{Z}$, luego $x - x = 0 = 2 \cdot 0$ por lo que xRx .
- Simetría: Sean $x, y/xRy$, luego $x - y = 2 \cdot k \iff y - x = 2 \cdot -k$, por lo que yRx .
- Transitividad: Sean $x, y, z/xRy \wedge yRz$, luego $x - y = 2 \cdot k$ y $y - z = 2 \cdot k'$. Ahora:

$$x - z = 2k + y - (y - 2k') = 2k - 2k' = 2(k - k')$$

por lo que xRz .

b)

- 1) Falso: Para $f = \{(a, b), (b, b)\}, g = \{(a, b), (b, a)\}$ resulta $(f, g) \in R$ pero $(g, f) \notin R$.
- 2) Verdadero: COMPLETAR.
- 3) Verdadero: COMPLETAR.

c) COMPLETAR.

10. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la siguiente relación:

$$(a, b) R (c, d) \iff a + d = c + b$$

- a) Probar que R es una relación de equivalencia.
- b) Mostrar en un esquema la clase de equivalencia de $(1, 1)$ definida por R .

Soluciones

a)

- Reflexividad: Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ luego $(x, y) R (x, y) \iff x + y = y + x$, lo cual vale.
- Simetría: Sea $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ luego $(a, b) R (c, d) \iff a + d = c + b = a + d \iff (c, d) R (a, b)$.

- Transitividad: Si $(a, b) R (c, d)$ y $(c, d) R (e, f)$ entonces $a+d = c+b$ y $c+f = e+d$. Luego:

$$\begin{aligned} a+d = c+b &\iff a+f+d = c+f+b \iff a+f+d = e+d+b \iff \\ &\iff a+f = e+b \iff (a, b) R (e, f) \end{aligned}$$

$$b) (1, 1) R (c, d) \iff 1+d = c+1 \iff d = c.$$

$$\overline{(1, 1)} = \{(x, x) / x \in \mathbb{R}\}$$

11. Dada $f : A \rightarrow B$, probar que $\ker(f)$ es una relación de equivalencia sobre A , donde:

$$\ker(f) = \{(a, a') / a, a' \in A, f(a) = f(a')\}$$

Solución

- Reflexividad: Sea $a \in A$, luego $f(a) = f(a)$ por lo que $(a, a) \in \ker(f)$.
- Simetría: Sean $a, a' \in A$ tales que $(a, a') \in \ker(f)$ luego $f(a) = f(a') \Rightarrow f(a') = f(a) \Rightarrow (a', a) \in \ker(f)$.
- Transitividad: Sean $x, y, z / xKy \wedge yKz$, luego $f(x) = f(y) = f(z) \Rightarrow (x, z) \in \ker(f)$.

12. Sea $par : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}$ la función que toma valor «True» en los pares y «False» en los impares. Calcular $\mathbb{N}/\ker(par)$.

Solución

- $\ker(par) = \{(a, a') \in \mathbb{N}^2 / par(a) = par(a')\}$.
- $\mathbb{N}/\ker(par) = \{\{(a, a') \in \mathbb{P}^2\}, \{(a, a') \in \mathbb{I}^2\}\}$.

13. Dar una definicion de $\ker(f)$ en términos de f , la composición y la inversa de relaciones; y sin usar pertenencia ni comprensión de conjuntos.

Solución COMPLETAR.

14. Dada una funcion $f : A \rightarrow B$ y una relación de equivalencia $R \subseteq \ker(f)$, probar que existen $h : A \rightarrow A/R$ y $g : A/R \rightarrow B$ tal que $f = g \circ h$.

Solución COMPLETAR.