

## Funtores

- Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  dos categorías. Probar que  $P_1 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $P_1(C, D) = C$  y  $P_2 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $P_2(C, D) = D$  definen funtores.

**Solución** Completamos las definiciones:  $P_1(f, g) = f$  y  $P_2(f, g) = g$ .

- Sea  $(C, D) \in \text{ob } \mathcal{C} \times \mathcal{D}$  sabemos que  $\text{id}_{(C,D)} = (\text{id}_C, \text{id}_D)$ , luego:
  - $P_1(\text{id}_{(C,D)}) = \text{id}_C = \text{id}_{P_1(C,D)}$ .
  - $P_2(\text{id}_{(C,D)}) = \text{id}_D = \text{id}_{P_2(C,D)}$ .
- Sean  $(f, g) : (C_1, C_2) \rightarrow (D_1, D_2)$  y  $(p, q) : (C_2, C_3) \rightarrow (D_2, D_3)$ , luego:
  - $P_1((p, q) \circ (f, g)) = P_1(p \circ f, q \circ g) = p \circ f = P_1(p, q) \circ P_1(f, g)$ .
  - $P_2((p, q) \circ (f, g)) = P_2(p \circ f, q \circ g) = q \circ g = P_2(p, q) \circ P_2(f, g)$ .

- Dado un conjunto  $X$ , definimos el conjunto  $\text{List}(X)$  de la listas finitas de elementos de  $X$ . Probar que  $\text{List} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$  es un funtor. Considerando ahora  $\text{List}'(X)$  como un monoide, probar que  $\text{List}' : \text{Set} \rightarrow \text{Mon}$  es un funtor. Determinar si  $\text{List}'$  preserva productos. *Ayuda:* pensar en cual monoide es isomorfo a  $\text{List}'(X)$  cuando  $X$  es un conjunto con un solo elemento.

## Solución

- Definimos  $\text{List}(f : A \rightarrow B) = f' : \langle A \rangle \rightarrow \langle B \rangle$  tal que  $f' \langle \rangle_A = \langle \rangle_B$  y  $f' \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle$ .
    - Sea  $X \in \text{ob } \text{Set}$ , luego:
      - $\text{List}(\text{id}_X) \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle \text{id}_X(a_1), \dots, \text{id}_X(a_n) \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .
      - $\text{id}_{\text{List}(X)} \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \text{id}_{\langle X \rangle} \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .
      - $\text{List}(\text{id}_X) \langle \rangle_X = \langle \rangle_X = \text{id}_{\langle X \rangle} \langle \rangle_X$ .
- Podemos ver entonces que  $\text{List}(\text{id}_X) = \text{id}_{\text{List}(X)}$ .

- Sean  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ , luego:
  - $List(g \circ f) \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle g \circ f(a_1), \dots, g \circ f(a_n) \rangle$ .
  - $(List(g) \circ List(f)) \langle a_1, \dots, a_n \rangle = g' (f' \langle a_1, \dots, a_n \rangle) = g' \langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle = \langle g \circ f(a_1), \dots, g \circ f(a_n) \rangle$ .

Podemos ver entonces que  $List(g \circ f) = List(g) \circ List(f)$ .

- Definimos  $List'(X) = (\langle X \rangle, \langle \rangle_X, ++_X)$ . Veamos que  $List'(f : A \rightarrow B)$  es un morfismo de monoide:

- $List'(f) \langle \rangle_A = \langle \rangle_B$ .
- $List'(f) \langle a_1, \dots, a_n \rangle ++_A \langle a_{n+1}, \dots, a_{n+m} \rangle = List'(f) \langle a_1, \dots, a_{n+m} \rangle = \langle f(a_1), \dots, f(a_{n+m}) \rangle$ .
- $List'(f) \langle a_1, \dots, a_n \rangle ++_B List'(f) \langle a_{n+1}, \dots, a_{n+m} \rangle = \langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle ++_B \langle f(a_{n+1}), \dots, f(a_{n+m}) \rangle = \langle f(a_1), \dots, f(a_{n+m}) \rangle$

3. Se ha visto que puede considerarse a un monoide como una categoría con un único objeto, ¿Qué es un funtor entre dos categorías de este tipo? ¿Y entre categorías formadas a partir de conjuntos ordenados?

### Solución

- Sean  $(A, e_A, \oplus_A)$  y  $(B, e_B, \oplus_B)$  dos monoides;  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  las respectivas categorías asociadas y  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtor. Sabemos que  $F(*_A) = *_B$  y que:
  - $F(id_{*_A}) = id_{F(*_A)}$ , es decir  $F(e_A) = e_B$ .
  - $F(a \circ a') = F(a) \circ F(a')$ , es decir  $F(a \oplus_A a') = F(a) \oplus_B F(a')$ .

Vemos entonces que  $F$  es un morfismo de monoides.

- Sean  $(P, \leq_P)$  y  $(Q, \leq_Q)$  dos posets;  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  las respectivas categorías asociadas y  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  un funtor. Sabemos que:
  - $F(id_x) = id_{F(x)}$ , es decir  $F(x, x) = (F(x), F(x))$ ; lo que significa que si  $x \leq_P x$  entonces  $F(x) \leq_Q F(x)$ .
  - $F((y, z) \circ (x, y)) = F(y, z) \circ F(x, y)$ , lo que significa que si  $x \leq_P z$  entonces  $F(x) \leq_Q F(z)$ .

Vemos entonces que  $F$  es un morfismo de posets.

4. Dados dos funtores  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ , definir un funtor que componga ambos. ¿Es posible definir una categoría cuyos objetos sean las categorías y sus flechas sean los funtores entre estas?

**Solución** Definimos  $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  donde  $G \circ F(C) = G(F(C))$  y  $G \circ F(f) = G(F(f))$ . Veamos que efectivamente se trata de un funtor:

- Sea  $C \in \text{ob } \mathcal{C}$  tal que  $F(C) = D$  y  $G(D) = E$ , luego:

$$G \circ F(id_C) = G(F(id_C)) = G(id_{F(C)}) = G(id_D) = id_{G(D)} = id_E = id_{G \circ F(C)}$$

- Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  morfismos de  $\mathcal{C}$  tales que  $F(f) = f' : X' \rightarrow Y'$  y  $F(g) = g' : Y' \rightarrow Z'$ , luego:

$$\begin{aligned} G \circ F(g \circ f) &= G(F(g) \circ F(f)) = G(g' \circ f') = \\ &= G(g') \circ G(f') = (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f) \end{aligned}$$

5. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con productos, coproductos y exponenciales; y  $A \in \text{ob } \mathcal{C}$ . Probar que las siguientes aplicaciones pueden extenderse con estructura funtorial:

- a)  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  tal que  $\Delta(B) = (B, B)$ .
- b)  $- \times A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $(- \times A)(B) = B \times A$ .
- c)  $-^A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $(-^A)(B) = B^A$ .
- d)  $-^A \times A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $(-^A \times A)(B) = B^A \times A$ .
- e)  $\Pi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $\Pi(B, C) = B \times C$ .
- f)  $\Sigma : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $\Sigma(B, C) = B + C$ .
- g)  $A^- : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $(A^-)(B) = A^B$  y es contravariante en los morfismos.
- h)  $A^{A^-} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $(A^{A^-})(B) = A^{A^B}$ .

### Soluciones

- a) Definimos  $\Delta(f) = (f, f)$ . Veamos que  $\Delta$  es un funtor:
  - $\Delta(id_X) = (id_X, id_X) = id_{(X, X)} = id_{\Delta(X)}$ .

- Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  luego  $\Delta(g \circ f) = (g \circ f, g \circ f) = (g, g) \circ (f, f) = \Delta(g) \circ \Delta(f)$ .

b) Definimos  $(- \times A)(f : X \rightarrow Y) = f \times id_A : X \times A \rightarrow Y \times A$ .  
Veamos que  $- \times A$  es un functor:

- $(- \times A)(id_X) = id_X \times id_A = id_{X \times A} = id_{(- \times A)(X)}$ .
- Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  luego  $(- \times A)(g \circ f) = (g \circ f) \times id_A = (g \times id_A) \circ (f \times id_A) = (- \times A)(g) \circ (- \times A)(f)$ .

c) COMPLETAR.

d) Sabemos que el morfismo  $(-^A \times A)(f : X \rightarrow Y)$  debe tener tipo  $X^A \times A \rightarrow Y^A \times A$ , proponemos entonces  $(-^A \times A)(f) = \overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \varepsilon_{AX} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 X & & X^A & & X^A \times A \\
 f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A \\
 Y & & Y^A & & Y^A \times A \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & & \varepsilon_{AY} & & 
 \end{array}$$

- $(-^A \times A)(id_X) = \overline{id_X \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A = \overline{\varepsilon_{AX}} \times id_A = id_{X^A} \times id_A = id_{X^A \times A} = id_{(-^A \times A)(X)}$ .
- Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  luego:

$$\begin{aligned}
 (-^A \times A)(g \circ f) &= \overline{(g \circ f) \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A = \\
 &= \overline{\varepsilon_{AZ} \circ (\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \times id_A) \circ (\overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A)} \times id_A = \\
 &= \overline{\varepsilon_{AZ} \circ ((\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \circ \overline{f \circ \varepsilon_{AX}}) \times id_A)} \times id_A = \\
 &= (\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \circ \overline{f \circ \varepsilon_{AX}}) \times id_A = (\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \circ \overline{f \circ \varepsilon_{AX}}) \times (id_A \circ id_A) = \\
 &= (\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \times id_A) \circ (\overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A) = (-^A \times A)(g) \circ (-^A \times A)(f)
 \end{aligned}$$

e) COMPLETAR.

f) COMPLETAR.

g) COMPLETAR.

h) COMPLETAR.

6. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría localmente pequeña, para cada objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$  definimos  $HOM(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow Set$  donde  $HOM(X, -)(Y) = Hom(X, Y)$  y  $HOM(X, -)(f) = Hom(X, f) = \lambda g. f \circ g$ . Probar que  $HOM(X, -)$  es efectivamente un funtor para cada  $X$ . Definir análogamente un funtor  $HOM'(-, X)$ .

**Solución** COMPLETAR.

7. Si  $f : A \rightarrow B$  en  $Set$ , entonces definimos  $f^{-1}(X) = \{a \in A : f(a) \in X\}$  donde  $X \subseteq B$ . Probar que  $I : Set \rightarrow Set$  es un funtor contravariante, llevando:  $I(A) = \mathcal{P}(A)$  y  $I(f) = f^{-1}$ .

**Solución** COMPLETAR.

8. Dado un semigrupo  $(S, \cdot)$ , podemos construir un monoide  $(S', \cdot')$  donde  $S' = S \uplus \{e\}$ ,  $(0, x) \cdot' (0, y) = (0, x \cdot y)$  y  $(1, e) \cdot' x = x = x \cdot' (1, e)$ . Utilizando esta construcción, definir un funtor  $F : Sem \rightarrow Mon$  y probar que es un monomorfismo en  $Cat$ .

**Solución** COMPLETAR.

9. Probar o refutar: sea  $\mathcal{C}$  una categoría con productos, y  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  un funtor, entonces siempre existe un único morfismo  $F(A \times B) \rightarrow FA \times FB$ .

**Solución** COMPLETAR.

10. Sea  $U : Mon \rightarrow Set$  el funtor que olvida la estructura de monoide. Definimos además  $U^2 : Mon \rightarrow Set$  que en objetos actúa llevando  $(X, \otimes, e) \mapsto X \times X$ . Probar que a  $U^2$  se lo puede dotar de estructura functorial.

**Solución** COMPLETAR.

## Transformaciones naturales

11. Dada dos categorías  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ , probar que todo funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es naturalmente isomorfo a si mismo, es decir, existe un isomorfismo natural  $id_F : F \rightarrow F$ .

**Solución** Sea  $X \in ob \mathcal{C}$ , definimos  $id_{F_X} = id_{F(X)}$ . Es fácil ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & F(A) & \xrightarrow{id_{F_A}} & F(A) \\
 f \downarrow & & F(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\
 B & & F(B) & \xrightarrow{id_{F_B}} & F(B)
 \end{array}$$

12. Considere el funtor  $List : Set \rightarrow Set$ . Mostrar que puede construirse un isomorfismo natural  $REV : List \rightarrow List$  tal que  $REV_X$  es la función que invierte las palabras de  $List(X)$ . ¿Se puede hacer lo mismo con el funtor  $List' : Set \rightarrow Mon$ ?

**Solución** Para ver que es transformación natural debemos ver si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & List(A) & \xrightarrow{REV_A} & List(A) \\
 f \downarrow & & List(f) \downarrow & & \downarrow List(f) \\
 B & & List(B) & \xrightarrow{REV_B} & List(B)
 \end{array}$$

- $(REV_B \circ List(f)) \langle a_1, \dots, a_n \rangle = REV_B \langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle = \langle f(a_n), \dots, f(a_1) \rangle$ .
- $(List(f) \circ REV_A) \langle a_1, \dots, a_n \rangle = List(f) \langle a_n, \dots, a_1 \rangle = \langle f(a_n), \dots, f(a_1) \rangle$ .

Solo nos resta ver que es un isomorfismo:

$$REV_X \circ REV_X \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \iff REV_X \circ REV_X = id_{List(X)}$$

13. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con productos y exponenciales; y  $A$  un objeto de la misma. Definir una transformación natural  $\eta : (-^A \times A) \rightarrow id_{\mathcal{C}}$ .

**Solución** Sean  $X, Y \in ob \mathcal{C}$  y  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de la categoría, luego sabemos que  $(-^A \times A)(X) = X^A \times A$  y  $(-^A \times A)(f) = \overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \varepsilon_{AX} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 id_{\mathcal{C}}(X) = X & & X^A & & X^A \times A = (-^A \times A)(X) \\
 & \downarrow f & \downarrow & & \downarrow \overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A = (-^A \times A)(f) \\
 id_{\mathcal{C}}(Y) = Y & & Y^A & & Y^A \times A = (-^A \times A)(Y) \\
 & \nwarrow & & \swarrow & \\
 & & \varepsilon_{AY} & & 
 \end{array}$$

Del diagrama anterior podemos deducir que  $\eta_X = \varepsilon_{AX}$ .

14. Sea  $\mathcal{C}$  una C.C.C. y  $A$  un objeto de la misma. Definir una transformación natural  $\eta : Id \rightarrow A^A$ , y probar que efectivamente es una transformación natural. *Ayuda*: puede ser útil probar los siguientes lemas:

- $curry(f) \circ g = curry(f \circ (g \times id))$ .
- $swap \circ (h \times i) = (i \times h) \circ swap$ .

donde  $swap$  es el isomorfismo que conmuta los factores de un producto.

**Solución** COMPLETAR.

15. Probar o refutar: sea  $U : Grp \rightarrow Set$  el funtor forgetful de grupos, entonces toda transformación natural  $\eta : U \rightarrow U$  es un isomorfismo natural.

**Solución** Para  $(G, \oplus, e_G)$  definimos  $\eta_G : G \rightarrow G$  constante igual a  $e_G$ . Veamos que es una transformación natural:

Sea  $f : G_1 \rightarrow G_2$ , por ser morfismo de grupos sabemos que  $f(e_{G_1}) = e_{G_2}$ , luego  $\eta_{G_2} \circ U(f)(x) = e_{G_2} = U(f)(e_{G_1}) = U(f) \circ \eta_{G_1}(x)$

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & & U(G_1) & \xrightarrow{\eta_{G_1}} & U(G_1) \\ f \downarrow & & U(f) \downarrow & & \downarrow U(f) \\ G_2 & & U(G_2) & \xrightarrow{\eta_{G_2}} & U(G_2) \end{array}$$

Observemos que en  $Set$  el único isomorfismo entre  $X$  y  $X$  es  $id_X$ , luego  $\eta$  no es isomorfismo natural.

16. Dadas dos categorías  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ , mostrar que los funtores de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$  forman una categoría con las transformaciones naturales como flechas. A esta categoría se la nota  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ .

**Solución** COMPLETAR.

17. Probar que  $Cat$  es una C.C.C.

**Solución** COMPLETAR.

18. Dada una categoría pequeña  $\mathcal{C}$ , mostrar que las categorías  $\mathcal{C}^2$  y  $\mathcal{C}^{\rightarrow}$  son isomorfas en  $Cat$ .

**Solución** COMPLETAR.

## Adjunciones

19. Definir una adjunción entre el functor  $List' : Set \rightarrow Mon$  y el functor olvido  $U : Mon \rightarrow Set$ . Dado un conjunto de símbolos  $\Sigma$  y la función constante  $f : \Sigma \rightarrow U(\mathbb{N}_0)$  tal que  $f(x) = 1$ , explicar el morfismo de monoides asociado  $\tilde{f} : List(\Sigma) \rightarrow \mathbb{N}_0$ .



**Solución** COMPLETAR.

20. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con productos. Dar una relación de adjunción entre  $\Pi$  y  $\Delta$ . Dar un resultado analogo respecto al functor  $\Sigma(X, Y) = X + Y$  cuando  $\mathcal{C}$  tiene coproductos.

**Solución** COMPLETAR.

21. Dada una categoría  $\mathcal{C}$  y un objeto  $A$  de  $\mathcal{C}$ , probar que  $- \times A \dashv -^A$ .

**Solución** COMPLETAR.

22. Construir la unidad de adjunción a partir de la counidad de adjunción.

**Solución** COMPLETAR.

23. COMPLETAR.

*a)* COMPLETAR.

*b)* COMPLETAR.

**Soluciones**

*a)* COMPLETAR.

*b)* COMPLETAR.

24. Explicar qué es una adjunción en el caso de que las categorías en cuestión sean conjuntos ordenados vistos como categorías.

**Solución** COMPLETAR.

**Monadas**

25. COMPLETAR.

**Solución** COMPLETAR.

26. COMPLETAR.

**Solución** COMPLETAR.

27. COMPLETAR.

**Solución** COMPLETAR.

28. COMPLETAR.

**Solución** COMPLETAR.

29. COMPLETAR.

**Solución** COMPLETAR.

30. COMPLETAR.

**Solución** COMPLETAR.

31. COMPLETAR.

**Solución** COMPLETAR.

### Lema de Yoneda

32. Enunciar y probar el lema de Yoneda para funtores contravariantes.

**Solución** COMPLETAR.

### Ejercicios adicionales

1. Definimos la asignación  $Fr : Set \rightarrow Mon$  tal que  $Fr(X) = X^{* \ 1}$  y  $Fr(f)(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)$ . Usando el funtor  $U : Mon \rightarrow Set$  que se olvida de la estructura de monoide, consideramos  $i : X \rightarrow U(Fr(X))$  la función que lleva un elemento  $x$  de  $X$  a la palabra  $x$ .

---

<sup>1</sup> $X^*$  es el monoide de las palabras sobre el alfabeto  $X$  con la concatenación como operación. Puede pensar en las palabras de  $X$  como las listas de elementos de  $X$ .

- a) Probar que  $Fr$  es un funtor.
- b) Probar que dado  $f : X \rightarrow U(M)$  en  $Set$  donde  $M$  es un monoide, puedo construir una única  $\bar{f} : Fr(X) \rightarrow M$  en  $Mon$  tal que  $U(\bar{f}) \circ i = f$  en  $Set^2$ .
- c) ¿A cuál monoide es isomorfo  $Fr(X)$  donde  $X$  es un conjunto de un solo elemento?
- d) ¿Este funtor preserva productos?

### Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.
- d) COMPLETAR.

---

<sup>2</sup>Cuando un monoide como  $Fr(X)$  satisface esta propiedad, decimos que es el monoide libre sobre  $X$ .