

1. Las listas finitas pueden especificarse como un TAD con los constructores:

- **Nil**: Construye una lista vacía.
- **Cons**: Agrega un elemento a la lista.

y las siguientes operaciones:

- **null**: Nos dice si la lista es vacía o no.
- **head**: Devuelve el primer elemento de la lista.
- **tail**: Devuelve todos los elementos de la lista menos el primero.

- a) Dar una especificación algebraica del TAD listas finitas.
- b) Dar una especificación tomando como modelo las secuencias.
- c) Asumiendo que a es un tipo con igualdad, especificar una función $\text{inL} :: \text{List } a \rightarrow a \rightarrow \text{Bool}$ tal que $\text{inL } xs \ x \equiv \text{True}$ si y solo si x es un elemento de xs .
- d) Especificar una función que elimina todas las ocurrencias de un elemento dado.

Soluciones

	TAD List ($a :: \text{Set}$) where	
	<pre> import Bool Nil :: List a Cons :: a -> List a -> List a null :: List a -> Bool </pre>	
a)	<pre> head :: List a -> a tail :: List a -> List a </pre>	
	<pre> null Nil ≡ True null (Cons x xs) ≡ False head (Cons x xs) ≡ x tail (Cons x xs) ≡ xs </pre>	

	<code>Nil</code>	$\equiv \langle \rangle$
	<code>Cons</code> $(x \langle x_1, \dots, x_n \rangle)$	$\equiv \langle x, x_1, \dots, x_n \rangle$
b)	<code>null</code> $\langle \rangle$	$\equiv \text{True}$
	<code>null</code> $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$	$\equiv \text{False}$ (si $n > 0$)
	<code>head</code> $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$	$\equiv x_1$
	<code>tail</code> $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$	$\equiv \langle x_2, \dots, x_n \rangle$
c)	<code>inL Nil x</code>	$\equiv \text{False}$
	<code>inL (Cons x xs) y</code>	$\equiv \text{if } x == y \text{ then True else inL xs y}$
d)	<code>delete Nil x</code>	$\equiv \text{Nil}$
	<code>delete (Cons x xs) y</code>	$\equiv \text{if } x == y \text{ then delete xs y}$ $\quad \text{else Cons x (delete xs y)}$

2. Dado el TAD pilas, con las siguientes operaciones:

- **Empty**: Construye una pila inicialmente vacía.
- **Push**: Agrega un elemento al tope de la pila.
- **isEmpty**: Devuelve verdadero si su argumento es una pila vacía, falso en caso contrario.
- **top**: Devuelve el elemento que se encuentra al tope de la pila.
- **pop**: Saca el elemento que se encuentra al tope de la pila.

Dar una especificación algebraica del TAD pilas y una especificación tomando como modelo las secuencias.

Soluciones

	TAD <code>Stack</code> (<code>a :: Set</code>) where	
	<code>import Bool</code>	
	<code>Empty :: Stack a</code>	
	<code>Push :: a -> Stack a -> Stack a</code>	
	<code>isEmpty :: Stack a -> Bool</code>	
▪	<code>top :: Stack a -> a</code>	
	<code>pop :: Stack a -> Stack a</code>	
	<code>isEmpty Empty</code>	$\equiv \text{True}$
	<code>isEmpty (Push x xs)</code>	$\equiv \text{False}$
	<code>top (Push x xs)</code>	$\equiv x$
	<code>pop (Push x xs)</code>	$\equiv xs$

Empty	$\equiv \langle \rangle$
Push $(x \langle x_1, \dots, x_n \rangle)$	$\equiv \langle x, x_1, \dots, x_n \rangle$
isEmpty $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$	$\equiv \text{False}$ (si $n > 0$)
	$\equiv \text{True}$ (si $n = 0$)
top $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$	$\equiv x_1$
pop $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$	$\equiv \langle x_2, \dots, x_n \rangle$

3. Asumiendo que a es un tipo con igualdad, completar la siguiente especificación algebraica del TAD conjunto.

TAD Conjunto ($a :: \text{Set}$) where
<pre> import Bool Vacío :: Conjunto a Insertar :: a -> Conjunto a -> Conjunto a borrar :: a -> Conjunto a -> Conjunto a esVacío :: Conjunto a -> Bool union :: Conjunto a -> Conjunto a -> Conjunto a interseccion :: Conjunto a -> Conjunto a -> Conjunto a resta :: Conjunto a -> Conjunto a -> Conjunto a </pre>

¿Que pasaría si se agregase una función **choose** :: **Conjunto** a -> a, tal que **choose** (insertar x c) \equiv x?

Solución

<code>insertar x (insertar y c)</code>	\equiv <code>insertar y (insertar x c)</code>
<code>insertar x (insertar x c)</code>	\equiv <code>insertar x c</code>
<code>borrar x Vacio</code>	\equiv <code>Vacio</code>
<code>borrar x (insertar y c)</code>	\equiv <code>if x == y</code> \quad <code>then borrar x c</code> \quad <code>else insertar y (borrar x c)</code>
<code>esVacio Vacio</code>	\equiv <code>True</code>
<code>esVacio (insertar x xs)</code>	\equiv <code>False</code>
<code>union c Vacio</code>	\equiv <code>c</code>
<code>union c (insertar x c')</code>	\equiv <code>union (insertar x c) c'</code>
<code>in x Vacio</code>	\equiv <code>False</code>
<code>in x (insertar y c)</code>	\equiv <code>if x == y then True</code> \quad <code>else in x c</code>
<code>interseccion c Vacio</code>	\equiv <code>Vacio</code>
<code>interseccion c (insertar x c')</code>	\equiv <code>if x in c</code> \quad <code>then insertar x (interseccion c c')</code> \quad <code>else interseccion c c'</code>
<code>resta c Vacio</code>	\equiv <code>c</code>
<code>resta c (insertar x c')</code>	\equiv <code>resta (borrar x c) c'</code>
<code>inL (Cons x xs) y</code>	\equiv <code>if x == y then True else inL xs y</code>

4. El TAD *priority queue* es una cola en la cual cada elemento tiene asociado un valor que es su prioridad (a dos elementos distintos le corresponden prioridades distintas). Los valores que definen la prioridad de los elementos pertenecen a un conjunto ordenado. Las siguientes son las operaciones soportadas por este TAD:

- **Vacia**: Construye una priority queue vacía.
- **Poner**: Agrega un elemento a una priority queue con una prioridad dada.
- **primero**: Devuelve el elemento con mayor prioridad de una priority queue.
- **sacar**: Elimina de una priority queue el elemento con mayor prioridad.
- **esVacia**: Determina si una priority queue es vacía.
- **union**: Une dos priority queues.

Dar una especificación algebraica del TAD priority queue y una especificación tomando como modelo los conjuntos.

Soluciones

TAD PQueue ($a :: \text{Set}$) where	
import Bool , Nat Vacia :: PQueue a Poner :: a -> Nat -> PQueue a -> PQueue a primero :: PQueue a -> a sacar :: PQueue a -> PQueue a esVacia :: PQueue a -> Bool union :: PQueue a -> PQueue a	
poner x p (poner y p c) poner x p (poner y q c) primero (Poner x p Vacia) primero (Poner x p (Poner y q c))	\equiv poner x p c \equiv poner y q (poner x p c) \equiv x \equiv if p > q then primero (Poner x p c) else primero (Poner y q c)
sacar (Poner x p Vacia) sacar (Poner x p (Poner y q c))	\equiv Vacia \equiv if p > q then Poner y q (sacar (Poner x p c)) else Poner x p (sacar (Poner y q c))
esVacia Vacia esVacia (Poner x p c) union Vacia q union (Poner x p c) q	\equiv True \equiv False \equiv q \equiv Poner x p (union c q)
Vacia Poner (x p C) primero C = $\{(x_1, p_1), \dots, (x_n, p_n)\}$ sacar C = $\{(x_1, p_1), \dots, (x_n, p_n)\}$ esVacia $\{(x_1, p_1), \dots, (x_n, p_n)\}$ union A = $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ B	$\equiv \{\}$ $\equiv \{(x, p)\} \cup \{(a, b) \in C / b \neq p\}$ $\equiv (x_i, p_i)$ donde $p_i = \text{máx} \{p_1, \dots, p_n\}$ $\equiv \{(x_i, p_i) \in C / p_i \neq \text{máx} \{p_1, \dots, p_n\}\}$ \equiv False (si $n > 0$) \equiv True (si $n = 0$) $\equiv A \cup \{(x, y) \in B / y \notin \{b_1, \dots, b_n\}\}$

5. Agregar a la siguiente definición del TAD árboles balanceados, una especificación para las operaciones `size` y `expose`:

```
TAD BalT (a :: Ordered Set) where
import Maybe, Nat, Tupla2
Empty :: BalT a
join :: BalT a -> Maybe a -> BalT a -> BalT a
size :: BalT a -> Nat
expose :: BalT a -> Maybe (BalT a, a, BalT a)
```

- La operación `join` toma un árbol `l`, un elemento opcional y un árbol `r`. Si `l` y `r` son árboles de búsqueda balanceados tales que todos los elementos de `l` sean menores que todos los elementos de `r` y el elemento opcional es más grande que los de `l` y menor que los de `r`, entonces `join` crea un nuevo árbol de búsqueda balanceado.
- Las operaciones `Empty` y `size` son obvias.
- La operación `expose` toma un árbol `t` y nos da `Nothing` si el árbol está vacío, y en otro caso nos devuelve un árbol izquierdo, un elemento raíz y un árbol derecho de un árbol de búsqueda que contiene todos los elementos de `t`.

Notar que `join` no es simplemente un constructor sino que tiene que realizar cierto trabajo para devolver un árbol balanceado. Debido a esto es conveniente especificar `expose` por casos sobre su resultado.

Solución

```
size Empty           ≡ 0
size (join l Nothing r) ≡ size l + size r
size (join l (Just x) r) ≡ size l + size r + 1
expose t             ≡ case (expose t) of
                        Nothing -> t = Empty
                        Just (l, x, r) -> t = join l (Just x) r
```

6. Demostrar que $(\text{uncurry zip}) \cdot \text{unzip} \equiv \text{id}$, siendo:

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip [] ys          = []
zip (x:xs) []      = []
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs ys

unzip :: [(a,b)] -> ([a], [b])
unzip []          = ([], [])
unzip ((x,y):ps) = (x:xs, y:ys)
                  where (xs,ys) = unzip ps

uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
uncurry f p = f (fst p) (snd p)

(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> a -> c
(.) f = \p -> f (fst p) (snd p)
```

Solución

- Caso base []:
$$\begin{aligned} & ((\text{uncurry zip}) \cdot \text{unzip}) [] \\ & \equiv \langle \text{def.}\circ \rangle \\ & (\text{uncurry zip}) (\text{unzip } []) \\ & \equiv \langle \text{def.unzip.1} \rangle \\ & (\text{uncurry zip}) ([], []) \\ & \equiv \langle \text{def.uncurry} \rangle \\ & \text{zip } (\text{fst } ([], [])) (\text{snd } ([], [])) \\ & \equiv \langle \text{def.fst}; \text{def.snd} \rangle \\ & \text{zip } [] [] \\ & \equiv \langle \text{def.zip.1} \rangle \\ & [] \\ & \equiv \langle \text{def.id} \rangle \\ & \text{id } [] \end{aligned}$$

- Caso inductivo $(x,y):ps$:

$$\begin{aligned}
 & ((uncurry\ zip) \ .\ unzip) ((x,y):ps) \\
 & \equiv \langle def.\circ \rangle \\
 & (uncurry\ zip) (unzip ((x,y):ps)) \\
 & \equiv \langle def.unzip.2 \rangle \\
 & (uncurry\ zip) (x:xs, y:ys) \text{ where } (xs, ys) = unzip\ ps \\
 & \equiv \langle def.uncurry; def.fst; def.snd \rangle \\
 & zip\ (x:xs)\ (y:ys) \text{ where } (xs, ys) = unzip\ ps \\
 & \equiv \langle def.zip.3; def.where \rangle \\
 & (x,y) : zip\ (unzip\ ps) \\
 & \equiv \langle def.\circ; H.I.; def.id \rangle \\
 & (x,y):ps \\
 & \equiv \langle def.id \rangle \\
 & id\ ((x,y):ps)
 \end{aligned}$$

7. Demostrar que $sum\ xs \leq length\ xs * max1\ xs$, sabiendo que xs es una lista de números naturales y que $max1$ y sum se definen como:

```

max1 :: Ord a => [a] -> a
max1 []      = 0
max1 (x:xs) = x `max` max1 xs

```

```

sum :: Num a => [a] -> a
sum []      = 0
sum (x:xs) = x + sum xs

```

```

length :: [a] -> Int
length []      = 0
length (x:xs) = 1 + length xs

```


Solución

- Caso base []:

`sum []`
 $\equiv \langle def.sum.1 \rangle$
`0`
 $\equiv \langle def.* \rangle$
`0 * 0`
 $\leq \langle prop. \leq \rangle$
`0 * 0`
 $\equiv \langle def.length.1; def.maxl.1 \rangle$
`length [] * maxl []`

- Caso inductivo `x:xs`:

`sum (x:xs)`
 $\equiv \langle def.sum.2 \rangle$
`x + sum xs`
 $\leq \langle H.I. \rangle$
`x + (length xs * maxl xs)`
 \leq
`x + (x `max` maxl xs) * (length xs)`
 \leq
`(x `max` maxl xs) + (x `max` maxl xs) * (length xs)`
 $\equiv \langle prop.* \rangle$
`(1 + length xs) * (x `max` maxl xs)`
 $\equiv \langle def.length.2 + def.maxl.2 \rangle$
`length (x:xs) * maxl (x:xs)`

8. Dado el siguiente tipo de datos: `data Arbol a = Hoja a | Nodo a (Arbol a) (Arbol a)`

- a) Dar el tipo y definir la función `size` que calcula la cantidad de elementos que contiene un `Arbol a`.
- b) Demostrar la validez de la siguiente propiedad: $\forall t \in (\text{Arbol } a) \exists k \in \mathbb{N} / \text{size } t = 2k + 1$.
- c) Dar el tipo y definir la función `mirror` que dado un árbol devuelve su árbol espejo.
- d) Demostrar la validez de la siguiente propiedad: $(\text{mirror} \circ \text{mirror}) \equiv \text{id}$
- e) Considerando las siguientes funciones:

```
hojas :: Arbol a -> Int
hojas (Hoja x)          = 1
hojas (Nodo x t1 t2) = hojas t1 + hojas t2
altura :: Arbol a -> Int
altura (Hoja x)          = 1
altura (Nodo x t1 t2) = 1 + (altura t1 `max` altura t2)
```

Demostrar que para todo árbol finito `t` se cumple que `hojas t < 2 ^ (altura t)`

Soluciones

- a)

```
size :: Arbol a -> Int
size (Hoja _)          = 1
size (Nodo _ l r) = 1 + size l + size r
```

b)

- Caso base `Hoja x`:

```
size (Hoja x)
≡ <def.size.1>
1
≡ <k = 0>
2k + 1
```

- Caso inductivo **Nodo** x l r:

```
size (Nodo _ l r)
≡ ⟨def.size.2⟩
1 + size l + size r
≡ ⟨H.I.⟩
1 + (2k'+1) + (2k''+1)
≡ ⟨k = k' + k'' + 1⟩
2k+1
```

c) **mirror** :: **Arbol** a -> **Arbol** a
mirror (**Hoja** x) = **Hoja** x
mirror (**Nodo** x l r) = **Nodo** x (**mirror** r) (**mirror** l)

d)

- Caso base **Hoja** x:

```
(mirror . mirror) (Hoja x)
≡ ⟨def.o⟩
mirror (mirror (Hoja x))
≡ ⟨def.mirror.1; def.mirror.1⟩
Hoja x
≡ ⟨def.id⟩
id (Hoja x)
```

- Caso inductivo **Nodo** x l r:

```
(mirror . mirror) Nodo x l r
≡ ⟨def.o⟩
mirror (mirror (Nodo x l r))
≡ ⟨def.mirror.2⟩
mirror (Nodo x (mirror r) (mirror l))
≡ ⟨def.mirror.2⟩
Nodo x (mirror (mirror l)) (mirror (mirror r))
≡ ⟨def.o⟩
Nodo x ((mirror . mirror) l) ((mirror . mirror) r)
≡ ⟨H.I.; def.id⟩
Nodo x l r
≡ ⟨def.id⟩
id (Nodo x l r)
```

e)

- Caso base **Hoja** x :

$\text{hojas } (\text{Hoja } x)$
 $\equiv \langle \text{def.hojas.1} \rangle$
 1
 $<$
 2^1
 $\equiv \langle \text{def.altura.1} \rangle$
 $2^{(\text{altura } (\text{Hoja } x))}$

- Caso inductivo **Nodo** $x \text{ l } r$:

$\text{hojas } (\text{Nodo } x \text{ l } r)$
 $\equiv \langle \text{def.hojas.2} \rangle$
 $\text{hojas } l + \text{hojas } r$
 $< \langle H.I. \rangle$
 $2^{(\text{altura } l)} + 2^{(\text{altura } r)}$
 $<$
 $2 * 2^{(\text{altura } l \text{ `max` altura } r)}$
 \equiv
 $2^{(1 + (\text{altura } l \text{ `max` altura } r))}$
 $\equiv \langle \text{def.altura.2} \rangle$
 $2^{(\text{altura } (\text{Nodo } x \text{ l } r))}$

9. Dadas las siguientes definiciones:

```
data AGTree a = Node a [AGTree a]
ponerProfs n (Node x xs) = Node n (map (ponerProfs (n+1)) xs)
```

- Definir una función **alturaAGT** que calcule la altura de un **AGTree**.
- Definir una función **maxAGT** que dado un **AGTree** de enteros devuelva su mayor elemento.
- Demostrar que $\text{alturaAGT} \equiv \text{maxAGT} \cdot (\text{ponerProfs } 1)$.

Soluciones

a) `alturaAGT (Node _ []) = 1`
`alturaAGT (Node _ xs) = 1 + maximum (map alturaAGT xs)`

b) `maxAGT (Node x []) = x`
`maxAGT (Node x xs) = max x (maximum (map maxAGT xs))`

c)

- Caso base `Node x []`:
`alturaAGT (Node x [])`
 $\equiv \langle \text{def. alturaAGT.1} \rangle$
`1`
 $\equiv \langle \text{def. maxAGT.1} \rangle$
`maxAGT (Node 1 [])`
 $\equiv \langle \text{def. map.1} \rangle$
`maxAGT (Node 1 (map (ponerProfs 2) []))`
 $\equiv \langle \text{def.o; def. ponerProfs} \rangle$
`(maxAGT . (ponerProfs 1)) Node x []`
- Caso inductivo `Node x (y:ys)`: COMPLETAR.

10. Dadas las siguientes definiciones:

```
data Tree a = Leaf a | Node a (Tree a) (Tree a)

flatten (Leaf x)      = [x]
flatten (Node x l r) = flatten l ++ [x] ++ flatten r

mapTree f (Leaf x)    = Leaf (f x)
mapTree f (Node x l r) = Node (f x) (mapTree f l) (mapTree f r)

demostrar que (map f) . flatten  $\equiv$  flatten . (mapTree f).
```

Solución COMPLETAR.

11. Dada la siguiente definición,

```
join []      = xs
join (xs:xss) = xs ++ join xss
```

demostrar:

- a) `join` \equiv `concat` . (`map id`)
- b) `join` . `join` \equiv `join` . (`map join`)

Soluciones

- a) COMPLETAR.
 - b) COMPLETAR.
12. Dadas las funciones `insert :: Ord a => a -> Bin a -> Bin a`, que agrega un elemento a un *BST* dado, y `inorder :: Ord a => Bin a -> [a]`, que realiza un recorrido *inorder* sobre un *BST*, dadas en clase de teoría, probar las siguientes propiedades sobre las funciones:
- a) Si t es un *BST*, entonces `insert x t` es un *BST*.
 - b) Si t es *BST*, entonces `inorder t` es una lista ordenada.

Soluciones

- a) COMPLETAR.
 - b) COMPLETAR.
13. Dadas las definición de funciones que implementan *leftist heaps*, dadas en clase, probar que si `l1` y `l2` son leftist heaps, entonces `merge l1 l2` es un leftist heap.

Solución COMPLETAR.

14. Dar el principio de inducción estructural para el siguiente tipo de datos:
- ```
data F = Zero | One F | Two (Bool -> F)
```

**Solución** COMPLETAR.