

1. Probar que en el conjunto  $\{a, b\}$  hay tres órdenes posibles. ¿Y en  $\{a, b, c\}$  y  $\{a, b, c, d\}$ ?

**Solución** COMPLETAR.

2. En  $(\mathbb{N}, |)$ , donde  $|$  denota la relación «divide a»:
  - a) Verificar que  $(\mathbb{N}, |)$  es un conjunto ordenado.
  - b) ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?
  - c) Si  $S$  es el conjunto de los divisores de 60, graficar el conjunto ordenado inducido por  $|$  en  $S$ .

### Soluciones

a)

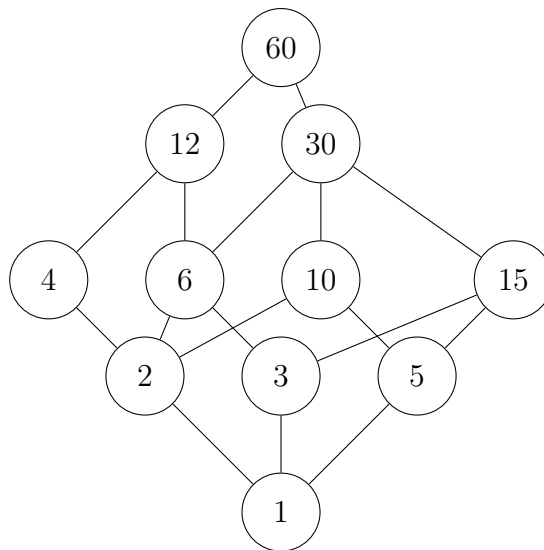
- Reflexividad: Sea  $n \in \mathbb{N}$ , luego  $n = n * 1 \iff n|n$ .
- Antisimetría: Sean  $n, m \in \mathbb{N}/n|m \wedge m|n$  luego  $n = m * c$  y  $m = n * k$ . Finalmente:

$$n = n * k * c \iff 1 = k * c \iff k = c = 1$$

por lo que  $n = m * 1 = m$ .

b) No lo es pues para cualquier par de primos  $p_1$  y  $p_2$  resulta:  $p_1 \parallel p_2$ .

c)



3. Yoneda Lemma: Probar que en un preorden  $(P, \preceq)$  vale:  $x \preceq y \iff \forall z : z \preceq x \Rightarrow z \preceq y$ .

### Solución

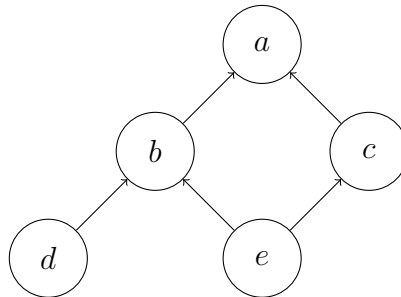
- $\Rightarrow$ : Sea  $z \preceq x$ , luego por transitividad:  $z \preceq x \preceq y$ .
  - $\Leftarrow$ : Por reflexividad tenemos  $x \preceq x$  y por hipótesis:  $x \preceq x \Rightarrow x \preceq y$ .
4. Sea  $A$  un conjunto arbitrario. Verificar que  $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$  es un conjunto ordenado. ¿Es también un conjunto totalmente ordenado?

### Solución

- Reflexividad: Sea  $X \in \mathcal{P}(A)$ , luego  $x \in X \Rightarrow x \in X$  por lo que  $X \subseteq X$ .
- Antisimetría: Sean  $X, Y \in \mathcal{P}(A)$  luego si  $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$  resulta  $X = Y$  por definición.
- Transitividad: Sean  $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A) / X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z$  luego  $x \in X \Rightarrow x \in Y \Rightarrow x \in Z$  por lo que  $X \subseteq Z$ .

No necesariamente es totalment ordenado. Por ejemplo para  $A = \{1, 2, 3\}$  resulta  $\{1, 2\} \parallel \{2, 3\}$ .

5. Sea  $V = \{a, b, c, d, e\}$ . El grafo dirigido de la siguiente figura define un orden en  $V$  de la siguiente manera:  $x \preceq y \iff x = y$  o existe un  $xy$ -camino dirigido.



a) Insertar el símbolo correcto ( $\preceq, \succeq, \parallel$ ) entre cada par de elementos:

$$1) \quad a \quad e .$$

$$3) \quad d \quad a .$$

$$2) \quad b \quad c .$$

$$4) \quad c \quad d .$$

b) ¿Es un conjunto totalmente ordenado? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

### Soluciones

a)

$$1) \quad a \succeq e .$$

$$3) \quad d \preceq a .$$

$$2) \quad b \parallel c .$$

$$4) \quad c \parallel d .$$

b)

- No es totalmente ordenado pues existen elementos que no son comparables.
- $a$  es elemento máximo. No existe elemento mínimo.
- $d$  y  $e$  son minimales.  $a$  es maximal.

6. Sean  $(P, \preceq)$  un conjunto ordenado,  $X$  un conjunto, y  $f : X \rightarrow P$  una función. Se define la relación  $H$  sobre elementos de  $X$  como  $xHx' \iff f(x) \preceq f(x')$ . ¿Que tipo de relación es  $H$ ? Dar condiciones para que  $H$  sea un conjunto ordenado.

### Solución

- Reflexividad:  $x \in X \Rightarrow f(x) \in P \Rightarrow f(x) \preceq f(x) \iff xHx$ .
- Transitividad: Sean  $x, y, z \in X/xHy \wedge yHz$  luego:

$$f(x) \preceq f(y) \wedge f(y) \preceq f(z) \Rightarrow f(x) \preceq f(z) \iff xHz$$

- Antisimetría: Si agregamos la hipótesis de que  $f$  sea inyectiva, entonces si  $xHy \wedge yHx$  resultara:

$$f(x) \preceq f(y) \wedge f(y) \preceq f(x) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

7. En  $(Prop, D)$ , donde  $Prop$  son las fórmulas del cálculo proposicional y  $\phi D \psi \iff \{\phi\} \vdash \psi$ :

- Verificar si  $(Prop, D)$  es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.
- ¿La relación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?

### Soluciones

- COMPLETAR.
- COMPLETAR.

8. En  $(Prop, I)$ , donde  $\phi I \psi \iff \emptyset \vdash \phi \Rightarrow \psi$ .

- Verificar si  $(Prop, I)$  es un conjunto ordenado. En caso de no serlo, clasificarlo.
- ¿La relación es total? ¿Tiene elemento máximo y/o mínimo? ¿Tiene elementos maximales y/o minimales?
- Explique el nexo entre esta relación y la del ejercicio anterior.

### Soluciones

- COMPLETAR.
- COMPLETAR.
- COMPLETAR.

9. Sea  $(P, \preceq)$  un preorden. Construir un conjunto ordenado  $(P/\sim, \sqsubseteq)$ , donde  $x \sim y$  si y solo si  $x \preceq y$  y  $y \preceq x$ , tal que  $\pi : P \rightarrow P/\sim$  sea monótona.

Aplicar esta construcción a la relación  $(Prop, D)$  del ejercicio anterior. Para este caso particular, la construcción se llama «álgebra de Lindenbaum-Tarski».

**Solución** COMPLETAR.

10. Probar que:

- a) Si  $R$  define un orden en el conjunto  $V$ , entonces  $R^{-1}$  también define un orden en  $V$ , llamado «orden inverso».
- b) Si  $R$  define un orden total en el conjunto  $V$ , entonces  $R^{-1}$  también define un orden total en  $V$ .
- c) Si  $(A, \preceq)$  es un orden no total, puede existir un  $S \subseteq A$  tal que  $(S, \preceq)$  es un orden total.

**Soluciones**

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.

11. Sea  $(P, \preceq)$  un preorden. Probar que si existe un elemento máximo, entonces todos los maximales son máximos.

**Solución** COMPLETAR.

12. Sean  $(A, \preceq_1)$  y  $(A, \preceq_2)$  dos conjuntos ordenados (con el mismo conjunto subyacente).

- a) ¿Define  $\preceq_1 \cap \preceq_2$  un orden en  $A$ ?
- b) ¿Define  $\preceq_1 \cup \preceq_2$  un orden en  $A$ ?

**Soluciones**

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.

13. Probar que el conjunto de todos los elementos maximales (minimales) de un conjunto ordenado, es una anticadena.

**Solución** COMPLETAR.

14. Considerar el conjunto de los enteros positivos  $\mathbb{Z}^+$  y el de los enteros negativos  $\mathbb{Z}^-$  con sus órdenes usuales. Probar que  $\mathbb{Z}^+ \not\cong \mathbb{Z}^-$ .

**Solución** COMPLETAR.

15. Sea  $(A, \preceq)$  un conjunto ordenado. Para todo elemento  $a \in A$  definamos

$$S(a) = \{x \in A : x \preceq a\}$$

Si  $\mathcal{A} = \{S(a) : a \in A\}$ , ordenado por la inclusión, demostrar que  $A \simeq \mathcal{A}$ .

**Solución** COMPLETAR.

16. Sean  $(X, \preceq_X)$  y  $(Y, \preceq_Y)$  dos conjuntos ordenados

- a) Dar un ejemplo de conjuntos  $(X, \preceq_X)$  y  $(Y, \preceq_Y)$  y una función  $f : X \rightarrow Y$  que sea sobreyectiva y preserve el orden pero que no sea un isomorfismo de conjuntos ordenados.
- b) Probar que son equivalentes:
  - 1)  $X$  e  $Y$  son isomorfos.
  - 2) Existe  $f : X \rightarrow Y$  sobreyectiva tal que  $f(a) \preceq_Y f(b)$  si y solo si  $a \preceq_X b$ .
  - 3) Existen  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  homomorfismos de conjuntos ordenados tales que  $f \circ g = id_Y$  y  $g \circ f = id_X$ .
- c) Mostrar que  $(X \rightarrow Y, \preceq_{X \rightarrow Y})$  es un conjunto ordenado, donde  $X \rightarrow Y$  representa las funciones entre  $(X, \preceq_X)$  y  $(Y, \preceq_Y)$ , y el orden está definido por  $f \preceq_{X \rightarrow Y} g$  si y solo si  $\forall x : f(x) \preceq_Y g(x)$ .
- d) Mostrar que  $(X \times Y, \preceq_{X \times Y})$  es un conjunto ordenado, donde  $(x, y) \preceq_{X \times Y} (x', y')$  si y solo si  $x \preceq_X x'$  y  $y \preceq_Y y'$ .

### Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b)
  - 1) COMPLETAR.
  - 2) COMPLETAR.
  - 3) COMPLETAR.
- c) COMPLETAR.
- d) COMPLETAR.

17. Sean  $(X, \preceq_X)$  y  $(Y, \preceq_Y)$  dos conjuntos ordenados. Una «conexión Galois» es un par de funciones  $(f_*, f^*)$  con  $f_* : X \rightarrow Y$  y  $f^* : Y \rightarrow X$  tales que para todos  $x \in X$  e  $y \in Y$  vale:

$$f_*(x) \preceq_Y y \iff x \preceq_X f^*(y)$$

- a) Probar que si  $f_* : X \rightarrow Y$  es un isomorfismo, entonces  $(f_*, f_*^{-1})$  es una conexión de Galois.
- b) Dada una función  $A \rightarrow B$ , probar que se puede construir una conexión de Galois entre el conjunto potencia de  $A$  y el de  $B$  utilizando los operadores que calculan la imagen de  $f$  sobre un subconjunto de  $A$  y la imagen inversa de  $f$  sobre un subconjunto de  $B$ .
- c) Considerando los órdenes usuales sobre  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Q}_0^+$ , encontrar  $f^*$  tal que  $(f_*, f^*)$  sea una conexión Galois donde  $f_* : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_0^+$  es la inclusión.
- d) Dada una conexión Galois  $(f_*, f^*)$  entre  $X$  e  $Y$ , probar que para todo  $x \in X, y \in Y$  vale  $x \preceq_X f^*(f_*(x))$  y  $f_*(f^*(y)) \preceq_Y y$ .
- e) Dada una conexión de Galois  $(f_*, f^*)$  entre  $X$  e  $Y$ , probar que  $f_*$  y  $f^*$  son monótonas.

### Soluciones

- a) COMPLETAR.
- b) COMPLETAR.

*c)* COMPLETAR.

*d)* COMPLETAR.

18. Probar que la relación de isomorfismo entre conjuntos ordenados es una relación de equivalencia.

**Solución** COMPLETAR.