**Funtores**

1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Probar que $P_1 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $P_1(C, D) = C$ y $P_2 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ tal que $P_2(C, D) = D$ definen functores.

   **Solución** Completamos las definiciones: $P_1(f, g) = f$ y $P_2(f, g) = g$.

   - Sea $(C, D) \in ob\,\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ sabemos que $id_{(C,D)} = (id_C, id_D)$, luego:
     - $P_1\left(id_{(C,D)}\right) = id_C = id_{P_1(C,D)}$.
     - $P_2\left(id_{(C,D)}\right) = id_D = id_{P_2(C,D)}$.
   - Sean $(f, g) : (C_1, C_2) \to (D_1, D_2)$ y $(p, q) : (C_2, C_3) \to (D_2, D_3)$, luego:
     - $P_1((p, q) \circ (f, g)) = P_1(p \circ f, q \circ g) = p \circ f = P_1(p, q) \circ P_1(f, g)$.
     - $P_2((p, q) \circ (f, g)) = P_2(p \circ f, q \circ g) = q \circ g = P_2(p, q) \circ P_2(f, g)$.

2. Dado un conjunto $X$, definimos el conjunto $List(X)$ de la listas finitas de elementos de $X$. Probar que $List : Set \to Set$ es un funtor. Considerando ahora $List'(X)$ como un monoide, probar que $List' : Set \to Mon$ es un funtor. Determinar si $List'$ preserva productos. *Ayuda*: pensar en cual monoide es isomorfo a $List'(X)$ cuando $X$ es un conjunto con un solo elemento.

   **Solución**

   - Definimos $List(f : A \to B) = f' : \langle A\rangle \to \langle B\rangle$ tal que $f'\langle\rangle_A = \langle\rangle_B$ y $f'\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle f(a_1), \ldots, f(a_n)\rangle$.
     - Sea $X \in ob\,Set$, luego:
       - $List(id_X)\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle id_X(a_1), \ldots, id_X(a_n)\rangle = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle =$
         $= id_{\langle X\rangle}\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = id_{List(X)}\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$.
       - $List(id_X)\langle\rangle_X = \langle\rangle_X = id_{\langle X\rangle}\langle\rangle_X$.

       Podemos ver entonces que $List(id_X) = id_{List(X)}$.

- Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$, luego:
  - $List\,(g \circ f)\,\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle g \circ f\,(a_1)\,, \ldots, g \circ f\,(a_n)\rangle =$
    $= g'\,\langle f\,(a_1)\,, \ldots, f\,(a_n)\rangle = g'\,(f'\,\langle a_1, \ldots, a_n\rangle) =$
    $= (List\,(g) \circ List\,(f))\,\langle a_1, \ldots, a_n\rangle.$
  - $List\,(g \circ f)\,\langle\rangle_A = (g \circ f)'\,\langle\rangle_A = \langle\rangle_C = g'\,\langle\rangle_B =$
    $= g'\,(f'\,\langle\rangle_A) = (g' \circ f')\,\langle\rangle_A = (List\,(g) \circ List\,(f))\,\langle\rangle_A.$

  Podemos ver entonces que $List\,(g \circ f) = List\,(g) \circ List\,(f)$.

- Definimos $List'\,(X) = (\langle X\rangle\,, \langle\rangle_X\,, \oplus_X)$. Veamos que $List'\,(f : A \to B)$ es un morfismo de monoide:
  - $List'\,(f)\,\langle\rangle_A = \langle\rangle_B$.
  - $List'\,(f)\,(\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \oplus_A \langle a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}\rangle) =$
    $= List'\,(f)\,\langle a_1, \ldots, a_{n+m}\rangle = \langle f\,(a_1)\,, \ldots, f\,(a_{n+m})\rangle =$
    $= \langle f\,(a_1)\,, \ldots, f\,(a_n)\rangle \oplus_B \langle f\,(a_{n+1})\,, \ldots, f\,(a_{n+m})\rangle =$
    $= List'\,(f)\,\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \oplus_B List'\,(f)\,\langle a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}\rangle.$

3. Se ha visto que puede considerarse a un monoide como una categoría con un único objeto, ¿Qué es un funtor entre dos categorías de este tipo? ¿Y entre categorías formadas a partir de conjuntos ordenados?

**Solución**

- Sean $(A, e_A, \oplus_A)$ y $(B, e_B, \oplus_B)$ dos monoides; $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las respectivas categorías asociadas y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor. Sabemos que $F\,(*_A) = *_B$ y que:
  - $F\,(id_{*_A}) = id_{F(A)}$, es decir $F\,(e_A) = e_B$.
  - $F\,(a \circ a') = F\,(a) \circ F\,(a')$, es decir $F\,(a \oplus_A a') = F\,(a) \oplus_B F\,(a')$.

  Vemos entonces que $F$ es un morfismo de monoides.

- Sean $(P, \leq_P)$ y $(Q, \leq_Q)$ dos posets; $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ las respectivas categorías asociadas y $F : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ un functor. Sabemos que:
  - $F\,(id_x) = id_{F(x)}$, es decir $F\,(x, x) = (F\,(x)\,, F\,(x))$; lo que significa que si $x \leq_P x$ entonces $F\,(x) \leq_Q F\,(x)$.
  - $F\,((y, z) \circ (x, y)) = F\,(y, z) \circ F\,(x, y)$, lo que significa que si $x \leq_P z$ entonces $F\,(x) \leq_Q F\,(z)$.

  Vemos entonces que $F$ es un morfismo de posets.

4. Dados dos funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, definir un funtor que componga ambos. ¿Es posible definir una categoría cuyos objetos sean las categorías y sus flechas sean los funtores entre estas?

   **Solución** Definimos $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ donde $G \circ F\,(C) = G\,(F\,(C))$ y $G \circ F\,(f) = G\,(F\,(f))$. Veamos que efectivamente se trata de un functor:

   - Sea $C \in ob\,\mathcal{C}$ tal que $F\,(C) = D$ y $G\,(D) = E$, luego:

     $$G \circ F\,(id_C) = G\,(F\,(id_C)) = G\left(id_{F(C)}\right) = G\,(id_D) = id_{G(D)} = id_E = id_{G \circ F(C)}$$

   - Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ morfismos de $\mathcal{C}$ tales que $F\,(f) = f' : X' \to Y'$ y $F\,(g) = g' : Y' \to Z'$, luego:

     $$G \circ F\,(g \circ f) = G\,(F\,(g) \circ F\,(f)) = G\,(g' \circ f') =$$

     $$= G\,(g') \circ G\,(f') = (G \circ F)\,(g) \circ (G \circ F)\,(f)$$

5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos, coproductos y exponenciales; y $A \in ob\,\mathcal{C}$. Probar que las siguientes aplicaciones pueden extenderse con estructura funtorial:

   *a*) $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tal que $\Delta\,(B) = (B, B)$.
   *b*) $- \times A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $(- \times A)\,(B) = B \times A$.
   *c*) $-^A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\left(-^A\right)(B) = B^A$.
   *d*) $-^A \times A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\left(-^A \times A\right)(B) = B^A \times A$.
   *e*) $\Pi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\Pi\,(B, C) = B \times C$.
   *f*) $\Sigma : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\Sigma\,(B, C) = B + C$.
   *g*) $A^- : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $(A^-)\,(B) = A^B$ y es contravariante en los morfismos.
   *h*) $A^{A^-} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\left(A^{A^-}\right)(B) = A^{A^B}$.

**Soluciones**

*a*) Definimos $\Delta(f) = (f, f)$. Veamos que $\Delta$ es un functor:

- $\Delta(id_X) = (id_X, id_X) = id_{(X,X)} = id_{\Delta(X)}$.
- Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ luego $\Delta(g \circ f) = (g \circ f, g \circ f) = (g, g) \circ (f, f) = \Delta(g) \circ \Delta(f)$.

*b*) Definimos $(- \times A)(f : X \to Y) = f \times id_A : X \times A \to Y \times A$. Veamos que $- \times A$ es un functor:

- $(- \times A)(id_X) = id_X \times id_A = id_{X \times A} = id_{(-\times A)(X)}$.
- Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ luego $(- \times A)(g \circ f) = (g \circ f) \times id_A = (g \times id_A) \circ (f \times id_A) = (- \times A)(g) \circ (- \times A)(f)$.

*c*) Sabemos que el morfismo $\left(-^A\right)(f : X \to Y)$ debe tener tipo $X^A \to Y^A$, proponemos entonces $\left(-^A\right)(f) = \overline{f \circ \varepsilon_{AX}}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & X^A \arrow[d, dashed, "\exists!"', "\overline{f \circ \varepsilon_{AX}}"] & X^A \times A \arrow[ll, bend right, "\varepsilon_{AX}"'] \\
Y & Y^A & Y^A \times A \arrow[ll, bend left, "\varepsilon_{AY}"]
\end{tikzcd}$$

- $\left(-^A\right)(id_X) = \overline{id_X \circ \varepsilon_{AX}} = \overline{\varepsilon_{AX}} = id_{X^A} = id_{\overline{\varepsilon_{AX}}} = id_{\overline{id_X \circ \varepsilon_{AX}}} = id_{(-^A)(X)}$.
- Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ luego:

$$\left(-^A\right)(g \circ f) = \overline{(g \circ f) \circ \varepsilon_{AX}} = \overline{\varepsilon_{AZ} \circ \left(\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \times id_A\right) \circ \left(\overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A\right)} =$$

$$= \overline{\varepsilon_{AZ} \circ \left(\left(\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \circ \overline{f \circ \varepsilon_{AX}}\right) \times id_A\right)} = \left(\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \circ \overline{f \circ \varepsilon_{AX}}\right) =$$

$$= \left(\overline{g \circ \varepsilon_{AY}} \times id_A\right) \circ \left(\overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A\right) = \left(-^A\right)(g) \circ \left(-^A\right)(f)$$

*d*) Observemos que $\left(-^{A} \times A\right) = (- \times A) \circ \left(-^{A}\right)$, luego también es funtor por ser composición de functores.

*e*) Definimos $\Pi\left(a : A \to A', b : B \to B'\right) = a \times b$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "a"'] & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "a \times b"] & B \arrow[d, "b"] \\ A' & A' \times B' & B' \end{tikzcd}$$

- $\Pi\left(id_{(X,Y)}\right) = \Pi\left(id_X, id_Y\right) = id_X \times id_Y = id_{X \times Y} = id_{\Pi(X,Y)}$.
- Sean $f := (a : A \to A', b : B \to B')$ y $g := (a' : A' \to A'', b' : B' \to B'')$, luego:

$$\Pi\left(g \circ f\right) = \Pi\left(a' \circ a, b' \circ b\right) = \left(a' \circ a\right) \times \left(b' \circ b\right) =$$

$$= \left(a' \times b'\right) \circ \left(a \times b\right) = \Pi\left(a', b'\right) \circ \Pi\left(a, b\right) = \Pi\left(g\right) \circ \Pi\left(f\right)$$

*f*) COMPLETAR.

*g*) COMPLETAR.

*h*) COMPLETAR.

6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña, para cada objeto $X$ de $\mathcal{C}$ definimos $HOM\left(X, -\right) : \mathcal{C} \to Set$ donde $HOM\left(X, -\right)\left(Y\right) = Hom\left(X, Y\right)$ y $HOM\left(X, -\right)\left(f\right) = Hom\left(X, f\right) = \lambda g.f \circ g$. Probar que $HOM\left(X, -\right)$ es efectivamente un funtor para cada $X$. Definir análogamente un funtor $HOM'\left(-, X\right)$.

**Solución** Observemos que para un morfismo $f : Y \to Z$, el funtor nos devuelve en $Set$ una función de alto orden que dada otra función de $X$ en $Y$, nos devuelve una función de $X$ en $Z$:

$$\begin{aligned} HOM\left(X, -\right)\left(f\right) : Hom\left(X, Y\right) &\to Hom\left(X, Z\right) \\ g : X \to Y &\mapsto f \circ g : X \to Z \end{aligned}$$

- $HOM\,(X,-)\,(id_A) = \lambda\,(g : X \to A)\,.id_A \circ g = \lambda\,(g : X \to A)\,.g = id_{Hom(X,A)} = id_{HOM(X,-)(A)}$.
- Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ luego:

$$HOM\,(X,-)\,(g \circ f) = \lambda\,(a : X \to A)\,.g \circ f \circ a =$$

$$= (\lambda\,(b : X \to B)\,.g \circ b) \circ (\lambda\,(a : X \to A)\,.f \circ a) =$$

$$= HOM\,(X,-)\,(g) \circ HOM\,(X,-)\,(f)$$

7. Si $f : A \to B$ en $Set$, entonces definimos $f^{-1}\,(X) = \{a \in A : f\,(a) \in X\}$ donde $X \subseteq B$. Probar que $I : Set \to Set$ es un funtor contravariante, llevando: $I\,(A) = \mathcal{P}\,(A)$ y $I\,(f) = f^{-1}$.

   **Solución** COMPLETAR.

8. Dado un semigurpo $(S, \cdot)$, podemos construir un monoide $(S', \cdot')$ donde $S' = S \uplus \{e\}$, $(0,x) \cdot' (0,y) = (0, x \cdot y)$ y $(1,e) \cdot' x = x = x \cdot' (1,e)$. Utilizando esta construcción, definir un funtor $F : Sem \to Mon$ y probar que es un monomorfismo en $Cat$.

   **Solución** COMPLETAR.

9. Probar o refutar: sea $C$ una categoría con productos, y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un functor, entonces siempre existe un único morfismo $F\,(A \times B) \to FA \times FB$.

   **Solución** COMPLETAR.

10. Sea $U : Mon \to Set$ el functor que olvida la estructura de monoide. Definimos además $U^2 : Mon \to Set$ que en objetos actúa llevando $(X, \otimes, e) \mapsto X \times X$. Probar que a $U^2$ se lo puede dotar de estructura functorial.

    **Solución** COMPLETAR.

**Transformaciones naturales**

11. Dada dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, probar que todo funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es naturalmente isomorfo a si mismo, es decir, existe un isomorfismo natural $id_F : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} F$.

    **Solución** Sea $X \in ob\mathcal{C}$, definimos $id_{F_X} = id_{F(X)}$. Es fácil ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "id_{F_A}"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ B & F(B) \arrow[r, "id_{F_B}"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

12. Considere el funtor $List : Set \to Set$. Mostrar que puede construirse un isomorfismo natural $REV : List \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} List$ tal que $REV_X$ es la función que invierte las palabras de $List\,(X)$. ¿Se puede hacer lo mismo con el funtor $List' : Set \to Mon$?

    **Solución** Para ver que es transformación natural debemos ver si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & List(A) \arrow[r, "REV_A"] \arrow[d, "List(f)"'] & List(A) \arrow[d, "List(f)"] \\ B & List(B) \arrow[r, "REV_B"'] & List(B) \end{tikzcd}$$

- $(REV_B \circ List\,(f))\,\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = REV_B\,\langle f\,(a_1)\,, \ldots, f\,(a_n) \rangle = \langle f\,(a_n)\,, \ldots, f\,(a_1) \rangle$.
- $(List\,(f) \circ REV_A)\,\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = List\,(f)\,\langle a_n, \ldots, a_1 \rangle = \langle f\,(a_n)\,, \ldots, f\,(a_1) \rangle$.

Solo nos resta ver que es un isomorfismo:

$$REV_X \circ REV_X\,\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \iff REV_X \circ REV_X = id_{List(X)}$$

13. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos y exponenciales; y $A$ un objeto de la misma. Definir una transformación natural $\eta : \left(-^A \times A\right) \dot{\longrightarrow} id_{\mathcal{C}}$.

    **Solución** Sean $X, Y \in ob\,\mathcal{C}$ y $f : X \to Y$ un morfismo de la categoría, luego sabemos que $\left(-^A \times A\right)(X) = X^A \times A$ y $\left(-^A \times A\right)(f) = \overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A$.

$$\begin{tikzcd}
id_{\mathcal{C}}(X) = X \arrow[d, "f"'] & X^A \arrow[d, dashed] & X^A \times A = \left(-^A \times A\right)(X) \arrow[ll, bend right, "\varepsilon_{AX}"'] \arrow[d, "\overline{f \circ \varepsilon_{AX}} \times id_A = \left(-^A \times A\right)(f)"] \\
id_{\mathcal{C}}(Y) = Y & Y^A & Y^A \times A = \left(-^A \times A\right)(Y) \arrow[ll, bend left, "\varepsilon_{AY}"]
\end{tikzcd}$$

    Del diagrama anterior podemos deducir que $\eta_X = \varepsilon_{AX}$.

14. Sea $\mathcal{C}$ una C.C.C. y $A$ un objeto de la misma. Definir una transformación natural $\eta : Id \dot{\longrightarrow} A^{A^-}$, y probar que efectivamente es una transformación natural. *Ayuda*: puede ser útil probar los siguientes lemas:

    - $curry\,(f) \circ g = curry\,(f \circ (g \times id))$.
    - $swap \circ (h \times i) = (i \times h) \circ swap$.

    donde *swap* es el isomorfismo que conmuta los factores de un producto.

    **Solución** COMPLETAR.

15. Probar o refutar: sea $U : Grp \to Set$ el funtor forgetful de grupos, entonces toda transformación natural $\eta : U \dot{\longrightarrow} U$ es un isomorfismo natural.

    **Solución** Para $(G, \oplus, e_G)$ definimos $\eta_G : G \to G$ constante igual a $e_G$. Veamos que es una transformación natural:

    Sea $f : G_1 \to G_2$, por ser morfismo de grupos sabemos que $f\left(e_{G_1}\right) = e_{G_2}$, luego $\eta_{G_2} \circ U\,(f)\,(x) = e_{G_2} = U\,(f)\left(e_{G_1}\right) = U\,(f) \circ \eta_{G_1}\,(x)$

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[d, "f"'] & U(G_1) \arrow[r, "\eta_{G_1}"] \arrow[d, "U(f)"'] & U(G_1) \arrow[d, "U(f)"] \\
G_2 & U(G_2) \arrow[r, "\eta_{G_2}"'] & U(G_2)
\end{tikzcd}$$

Observemos que en $Set$ el único isomorfismo entre $X$ y $X$ es $id_X$, luego $\eta$ no es isomorfismo natural.

16. Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, mostrar que los funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ forman una categoría con las transformaciones naturales como flechas. A esta categoría se la nota $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

    **Solución** COMPLETAR.

17. Probar que $Cat$ es una C.C.C.

    **Solución** COMPLETAR.

18. Dada una categoría pequeña $\mathcal{C}$, mostrar que las categorías $\mathcal{C}^2$ y $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ son isomorfas en $Cat$.

    **Solución** COMPLETAR.

**Adjunciones**

19. Definir una adjunción entre el functor $List' : Set \to Mon$ y el functor olvido $U : Mon \to Set$. Dado un conjunto de símbolos $\Sigma$ y la función constante $f : \Sigma \to U(\mathbb{N}_0)$ tal que $f(x) = 1$, explicar el morfismo de monoides asociado $\widetilde{f} : List(\Sigma) \to \mathbb{N}_0$.

    **Solución** COMPLETAR.

20. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos. Dar una relación de adjunción entre $\Pi$ y $\Delta$. Dar un resultado analogo respecto al functor $\Sigma(X,Y) = X + Y$ cuando $\mathcal{C}$ tiene coproductos.

**Solución** COMPLETAR.

21. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y un objeto $A$ de $\mathcal{C}$, probar que $- \times A \dashv -^A$.

    **Solución** COMPLETAR.

22. Construir la unidad de adjunción a partir de la counidad de adjunción.

    **Solución** COMPLETAR.

23. COMPLETAR.

    *a*) COMPLETAR.

    *b*) COMPLETAR.

    **Soluciones**

    *a*) COMPLETAR.

    *b*) COMPLETAR.

24. Explicar qué es una adjunción en el caso de que las categorías en cuestión sean conjuntos ordenados vistos como categorías.

    **Solución** COMPLETAR.

**Monadas**

25. COMPLETAR.

    **Solución** COMPLETAR.

26. COMPLETAR.

    **Solución** COMPLETAR.

27. COMPLETAR.

**Solución** COMPLETAR.

28. COMPLETAR.

    **Solución** COMPLETAR.

29. COMPLETAR.

    **Solución** COMPLETAR.

30. COMPLETAR.

    **Solución** COMPLETAR.

31. COMPLETAR.

    **Solución** COMPLETAR.

### Lema de Yoneda

32. Enunciar y probar el lema de Yoneda para functores contravariantes.

    **Solución** COMPLETAR.

### Ejercicios adicionales

1. Definimos la asignación $Fr : Set \to Mon$ tal que $Fr(X) = X^*$ [1] y $Fr(f)(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)$. Usando el funtor $U : Mon \to Set$ que se olvida de la estructura de monoide, consideramos $i : X \to U(Fr(X))$ la función que lleva un elemento $x$ de $X$ a la palabra $x$.

    *a*) Probar que $Fr$ es un funtor.

[1] $X^*$ es el monoide de las palabras sobre el alfabeto $X$ con la concatenación como operación. Puede pensar en las palabras de $X$ como las listas de elementos de $X$.

*b*) Probar que dado $f : X \to U(M)$ en $Set$ donde $M$ es un monoide, puedo construir una única $\overline{f} : Fr(X) \to M$ en $Mon$ tal que $U\left(\overline{f}\right) \circ i = f$ en $Set$[2].

*c*) ¿A cuál monoide es isomorfo $Fr(X)$ donde $X$ es un conjunto de un solo elemento?

*d*) ¿Este funtor preserva productos?

**Soluciones**

*a*) COMPLETAR.

*b*) COMPLETAR.

*c*) COMPLETAR.

*d*) COMPLETAR.

[2]Cuando un monoide como $Fr(X)$ satisface esta propiedad, decimos que es el monoide libre sobre $X$.