1. Considerar los siguientes diagramas. En ambos casos, probar que si los dos triángulos conmutan, también conmuta el cuadrado.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "r"] & b \arrow[d, "s"] \\ c \arrow[r, "t"'] & d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & b \arrow[d, "s"] \arrow[dl, "r"] \\ c \arrow[r, "t"'] & d \end{tikzcd}$$

Solución

- Sabemos que $s \circ p = r$ y $t \circ q = r$ por lo tanto $s \circ p = r = t \circ q$, es decir que el cuadrado conmuta.
- Sabemos que $r \circ p = q$ y $t \circ r = s$ por lo tanto:

$$s \circ p = (t \circ r) \circ p = t \circ (r \circ p) = t \circ q$$

2. Sea P un conjunto ordenado. Mostrar que P puede considerarse como una categoría.

Solución Definimos:

- $ob\,\mathcal{P} = P$.
- $mor\,\mathcal{P} = \leq$.
- $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$.

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición*: La composición esta bien definida pues si (b, c) y (a, b) son morfismos, por transitividad también lo será su composición (a, c).
- *Morfismo identidad*: Para cada objeto a por reflexividad $(a, a) \in \leq$ por lo que $(a, a) \in mor\,\mathcal{P}$; a este morfismo lo llamaremos id_a resultando
  - $(a, b) \circ id_a = (a, b) \circ (a, a) = (a, b)$.
  - $id_a \circ (b, a) = (a, a) \circ (b, a) = (b, a)$.

- *Asociatividad*: Sean (a, b), (b, c) y (c, d) morfismos, por transitividad también son morfismos $\boxed{(a, c)}$, $\boxed{(b, d)}$ y (a, d) luego
    - $((c, d) \circ (b, c)) \circ (a, b) = \boxed{(b, d)} \circ (a, b) = (a, d)$.
    - $(c, d) \circ ((b, c) \circ (a, b)) = (c, d) \circ \boxed{(a, c)} = (a, d)$.

3. Verificar que un monoide M define una categoría con un único objeto cuyas flechas son los elementos de M.

Solución Definimos:

- $ob\,\mathcal{M} = \{*\}$.
- $mor\,\mathcal{M} = M$.
- $x \circ y = x + y$.

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición*: Por clausura de monoides, si x e y son morfismos, también lo será su composición $x + y$.
- *Morfismo identidad*: Para el único objeto $*$ existe el morfismo $0 = id_*$ de manera tal que
    - $x \circ id_* = x + 0 = x$.
    - $id_* \circ y = 0 + y = y$.
- *Asociatividad*: Para tres morfismos x, y, z (elementos de M) por clausura de monoide también son morfismos $\boxed{x + y}$ y $\boxed{y + z}$, luego

$$(x \circ y) \circ z = \left(\boxed{x + y}\right) + z = x + \left(\boxed{y + z}\right) = x \circ (y \circ z)$$

4. Dada una categoría $\mathcal{C}$, podemos definir $\mathcal{C}^{op}$ con los mismo objetos que $\mathcal{C}$ pero las flechas con sentido inverso, es decir, $ob\,\mathcal{C}^{op} = ob\,\mathcal{C}$ y $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Verificar que $\mathcal{C}^{op}$ es una categoría.

Solución Definamos:

- $mor\,\mathcal{C}^{op} = \{f_{op} : X \to Y / f : Y \to X \in mor\,\mathcal{C}\}$.
- $g_{op} \circ_{op} f_{op} = (f \circ g)_{op}$

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Buena definición*: Dadas $f_{op} : A \to B$ y $g_{op} : B \to C$ por definición existen en $\mathcal{C}$ los morfismos $f : B \to A$ y $g : C \to B$ luego es valida la composición $f \circ g$ y por definición $(f \circ g)_{op}$ es un morfismo de $\mathcal{C}^{op}$.
- *Morfismo identidad*: Para cada objeto X sabemos que existe id_X, luego $id_{X_{op}}$ es un morfismo de la categoría opuesta para el cual
  - $f_{op} \circ_{op} id_{X_{op}} = (id_X \circ f)_{op} = f_{op}$.
  - $id_{X_{op}} \circ_{op} h_{op} = (h \circ id_X)_{op} = h_{op}$.
- *Asociatividad*: Sean $f_{op} : A \to B$, $g_{op} : B \to C$ y $h_{op} : C \to D$, luego
  - $(h_{op} \circ_{op} g_{op}) \circ_{op} f_{op} = (g \circ h)_{op} \circ_{op} f_{op} = f \circ (g \circ h)$.
  - $h_{op} \circ_{op} (g_{op} \circ_{op} f_{op}) = h_{op} \circ_{op} (f \circ g)_{op} = (f \circ g) \circ h$.

5. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, se define $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ cuyos objetos son pares ordenados de la forma (C, D) con $C \in ob\,\mathcal{C}$, $D \in ob\,\mathcal{D}$ y además:

$$Hom_{\mathcal{C}\times D}\left((C, D), (C', D')\right) = Hom_{\mathcal{C}}(C, C') \times Hom_{\mathcal{C}}(D, D')$$

Verificar que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una categoría.

Solución Definimos:

- $ob\,\mathcal{C} \times \mathcal{D} = ob\,\mathcal{C} \times ob\,\mathcal{D}$.
- $(p, q) \circ_{\times} (f, g) = (p \circ f, q \circ g)$.

Veamos que en efecto, se trata de una categoría:

- *Morfismo identidad*: Para cada objeto $(C, D) \in ob\,\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ existen los objetos $C \in ob\,\mathcal{C}$ y $D \in ob\,\mathcal{D}$ y también los morfismos id_C e id_D, por lo que también existe el morfismo (id_C, id_D) para el cual
  - $(f, g) \circ_{\times} (id_C, id_D) = (f \circ id_C, g \circ id_D) = (f, g)$.
  - $(id_C, id_D) \circ_{\times} (f, g) = (id_C \circ f, id_D \circ g) = (f, g)$.

- *Asociatividad*: Sean $(f,g):(C_1,C_2)\to(D_1,D_2)$, $(p,q):(C_2,C_3)\to(D_2,D_3)$ y $(r,s):(C_3,C_4)\to(D_3,D_4)$, luego
    - $((r,s)\circ_\times(p,q))\circ_\times(f,g)=(r\circ p, s\circ q)\circ_\times(f,g)=(r\circ p\circ f, s\circ q\circ g)$.
    - $(r,s)\circ_\times((p,q)\circ_\times(f,g))=(r,s)\circ_\times(p\circ f, q\circ g)=(r\circ p\circ f, s\circ q\circ g)$.

6. Definamos $C^\to$ como la categoría de las flechas de una categoría C, es decir, los objetos de $C^\to$ son las flechas de C. Una flecha de $C^\to$ de $f:A\to B$ en $g:D\to E$ es un par (a,b) de flechas de C tales que $g\circ a=b\circ f$.

    a) Expresar las flechas de $C^\to$ en términos de diagramas conmutativos.

    b) Probar que si en el diagrama los cuadrados conmutan, entonces también conmuta el rectángulo exterior:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\mathrm{p}"] \arrow[d, "\mathrm{t}"'] & b \arrow[r, "\mathrm{q}"] \arrow[d, "\mathrm{u}"] & c \arrow[d, "\mathrm{v}"] \\ d \arrow[r, "\mathrm{r}"'] & e \arrow[r, "\mathrm{s}"'] & f \end{tikzcd}$$

    c) Utilizar el apartado anterior para definir la composición en $C^\to$.

    d) Verificar que $C^\to$ es una categoría.

Soluciones

a) El par (a,b) es una flecha de $C^\to$ si el siguiente diagrama conmuta en C:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{f}"] \arrow[d, "\mathrm{a}"'] & B \arrow[d, "\mathrm{b}"] \\ A' \arrow[r, "\mathrm{g}"'] & B' \end{tikzcd}$$

b) Sabemos que $u\circ p=r\circ t$ y $v\circ q=s\circ u$ y queremos ver si $v\circ(q\circ p)=s\circ(r\circ t)$. Por asociatividad en C $v\circ(q\circ p)=(v\circ q)\circ p$, es decir $v\circ(q\circ p)=(s\circ u)\circ p=s\circ(u\circ p)=s\circ(r\circ t)$.

c) Para (r,p) y (s,q) como en el diagrama, definimos $(s,q)\circ(r,p)$ como $(s\circ r, q\circ p)$.

d)

- Para cada $f : A \to B$ en $ob\, C^{\to}$ definimos $id_f = \big(id_{dom(f)}, id_{cod(f)}\big)$.
  - Observemos que id_f es una flecha de $C^{\to}$ pues el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_A"'] & B \arrow[d, "id_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

  - Sean $a : A \to A'$ y $b : B \to B'$ como en el diagrama, luego:

$$(a,b)\circ id_f = \big(a\circ id_{dom(f)}, b\circ id_{cod(f)}\big) = (a,b)$$

  - Análogamente sean $a : D \to A$ y $b : E \to B$, entonces:

$$id_f \circ (a,b) = \big(id_{dom(f)}\circ a, id_{cod(f)}\circ b\big) = (a,b)$$

- Sean (r,p), (s,q) y (x,w) como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "p"] \arrow[d, "t"'] & b \arrow[r, "q"] \arrow[d, "u"] & c \arrow[r, "w"] \arrow[d, "v"] & g \arrow[d, "y"] \\ d \arrow[r, "r"'] & e \arrow[r, "s"'] & f \arrow[r, "x"] & h \end{tikzcd}$$

$$((r,p)\circ(s,q))\circ(x,w) = (r\circ s, p\circ q)\circ(x,w) = ((r\circ s)\circ x, (p\circ q)\circ w) =$$

$$= (r\circ(s\circ x), p\circ(q\circ w)) = (r,p)\circ(s\circ x, q\circ w) = (r,p)\circ((s,q)\circ(x,w))$$

7. Sean C una categoría y A un objeto de C. Definimos $C|A$ como la categoría cuyos objetos son las flechas f de C tales que $cod\,(f) = A$. Una flecha g en $C|A$ de $f : X \to A$ en $h : Y \to A$ es una flecha $g : X \to Y$ de C tal que $f = h\circ g$.

a) Expresar las flechas de $C|A$ en términos de diagramas conmutativos.

b) Verificar que $C|A$ es una categoría.

c) Si P es la categoría definida por un conjunto ordenado y $x \in P$, determinar $P|x$.

Soluciones

a) Si el siguiente diagrama conmuta en C, entonces g es una flecha de $C|A$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \\ Y \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

b)

- Dados dos morfismos $g : X \to Y$ y $p : Y \to Z$ en $C|A$ definimos la composición en $C|A$ como la composición en C y para cada objeto $f : X \to A$ definimos el morfismo $id_f = id_{dom(f)}$.
    - Observemos que $id_{dom}(f)$ es un morfismo de la categoría pues el siguiente diagrama conmuta:

      $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_f"'] & A \\ X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

    - Una flecha α que parte de f debe tener tipo $X \to Y$, luego $\alpha \circ id_f = \alpha$.
    - Una flecha β que llega a f debe tener tipo $W \to X$, luego $id_f \circ \beta = \beta$.

- Sean g, p, q como en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \\
Y \arrow[ur, "h"'] \arrow[d, "p"'] & \\
Z \arrow[uur, bend right, "q"] \arrow[r, "r"'] & W \arrow[uu, bend right, "s"']
\end{tikzcd}$$

  luego $(r \circ p) \circ g = r \circ (p \circ g)$ por asociatividad en C.

$c)$ COMPLETAR.

8. Probar que en Set los monomorfismos (epimorfismos) son exactamente las funciones inyectivas (respectivamente sobreyectivas).

Solución

-
    - $\boxed{\Rightarrow}$: Sea $f : B \to C$ un monomorfismo, luego para cualquier conjunto A y funciones $g, h : A \to B$ sabemos que:

    $$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

    Supongamos que f no es inyectiva, es decir que existen $b_1 \neq b_2 \in B$ tales que $f(b_1) = f(b_2)$. Definimos funciones constantes g, h tales que $g(x) = b_1$ y $h(x) = b_2$, luego:

    $$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(b_1) = f(b_2) = f(h(x)) = f \circ h(x)$$

    y como f es monomorfismo resulta $g = h$ lo cual es una contradicción pues $g(x) = b_1 \neq b_2 = h(x)$.

- $\boxed{\Leftarrow}$: Sea $f : B \to C$ una función inyectiva, luego sabemos que $f(b_1) = f(b_2) \iff b_1 = b_2$. Para $g, h : A \to B$ tales que $f \circ g = f \circ h$ resulta:

  $$f \circ g(x) = f \circ h(x) \iff f(g(x)) = f(h(x)) \iff g(x) = h(x)$$

▪

- $\boxed{\Rightarrow}$: Sea $f : A \to B$ un epimorfismo, luego para cualquier conjunto C y funciones $g, h : B \to C$ sabemos que:

  $$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

  Supongamos que f no es sobreyectiva, es decir que existe $b \in B$ tal que $f(x) \neq b$ (para cualquier x). Definimos g, h iguales salvo en b donde $g(b) = c_1$ y $h(b) = c_2$, luego:

  $$g \circ f(x) = g(f(x)) = h(f(x)) = h \circ f(x)$$

  y como f es un epimorfismo resulta $g = h$ lo cual es una contradicción.
- $\boxed{\Leftarrow}$: Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva y sean dos funciones $g, h : B \to C$ tales que $g \circ f = h \circ f$. Supongamos que $g \neq h$, luego existe $f(x) \in B$ tal que $g(f(x)) \neq h(f(x))$ lo cual es una contradicción pues:

  $$g \circ f(x) = h \circ f(x) \iff g(f(x)) = h(f(x))$$

9. Sean C una categoría y f, g flechas de C. Probar que:

   a) Si f y g son monomorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.

   b) Si $g \circ f$ es un monomorfismo, f también lo es.

   c) Si f y g son epimorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.

   d) Si $g \circ f$ es un epimorfismo, g también lo es.

   e) Si f^{-1} es la inversa de f y g^{-1} es la inversa de g, entonces $f^{-1} \circ g^{-1}$ es la inversa de $g \circ f$.

Soluciones Sean f, g, p, q, r, s como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "p"] \arrow[r, bend right, "q"'] & B \arrow[r, "f"] & C \arrow[r, "g"] & D \arrow[r, bend left, "r"] \arrow[r, bend right, "s"'] & E
\end{tikzcd}$$

a) Supongamos $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q$ luego por asociatividad resulta $g \circ (f \circ p) = g \circ (f \circ q)$ y como g es monomorfismo $f \circ p = f \circ q$. Nuevamente como f es monomorfismo tenemos $p = q$. En definitiva: $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q \Rightarrow p = q$, es decir, $g \circ f$ es monomorfismo.

b) Supongamos $f \circ p = f \circ q$, luego $g \circ (f \circ p) = g \circ (f \circ q)$ y por asociatividad $(g \circ f) \circ p = (g \circ f) \circ q$. Como $g \circ f$ es monomorfismo resulta $p = q$. En definitiva: $f \circ p = f \circ q \Rightarrow p = q$.

c) Supongamos $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f)$ luego por asociatividad resulta $(r \circ g) \circ f = (s \circ g) \circ f$ y como f es epimorfismo $r \circ g = s \circ g$. Nuevamente como g es epimorfismo tenemos $r = s$. En definitiva: $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f) \Rightarrow r = s$, es decir, $(g \circ f)$ es epimorfismo.

d) Supongamos $r \circ g = s \circ g$, luego $(r \circ g) \circ f = (s \circ g) \circ f$ y por asociatividad $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f)$. Como $g \circ f$ es epimorfismo resulta $r = s$. En definitiva: $r \circ g = s \circ g \Rightarrow r = s$.

e) Sabemos que:

- $f \circ f^{-1} = id_C$.
- $f^{-1} \circ f = id_B$.
- $g \circ g^{-1} = id_D$.
- $g^{-1} \circ g = id_C$.

Ahora:

- $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_D$.
- $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ f = id_B$.

10. Mostrar que una flecha de una categoría puede ser monomorfismo y epimorfismo y no isomorfismo.

Solución Consideremos en Mon el morfismo $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ tal que $f(n) = n$. Observemos que $n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$.

- Monomorfismo: Sean $g, h : M \to \mathbb{N}_0$ morfismos tales que $f \circ g = f \circ h$ y supongamos existe $m \in M$ tal que $g(m) \neq h(m)$, luego:

$$f \circ g(m) = f \circ h(m) \iff f(g(m)) = f(h(m))$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto f es monomorfismo.

- Epimorfismo: Sean $g, h : \mathbb{Z} \to M$ morfismos tales que $g \circ f = h \circ f$ y supongamos existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $g(z) \neq h(z)$, luego:

$$g \circ f(z) = h \circ f(z) \iff g(f(z)) = h(f(z))$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto f es epimorfismo.

- Isomorfismo: Supongamos que existe $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ tal que $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{Z}}$ y $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{N}_0}$. En particular para $n \geq 0$ sabemos que $f^{-1}(n) = n$, luego:

$$0 = f^{-1}(0) = f^{-1}(-n + n) = f(-n)^{-1} + f(n)^{-1} = f(-n)^{-1} + n$$

por lo que $f(-n)^{-1} = -n$ lo cual es absurdo ya que $-n \notin \mathbb{N}_0$. Por lo tanto f no es isomorfismo.

11. Mostrar que una flecha de una categoría concreta puede ser epimorfismo y no sobreyectiva.

Solución La misma función del ejercicio anterior cumple dichas características.

12. Mostrar que dos objetos terminales en una categoría son isomorfos. Por dualidad: ¿qué se puede decir de los objetos iniciales?

Solución Sean 1 y $1'$ dos elementos terminales de una categoría. Por ser 1 terminal, existe un único morfismo $f : 1 \to 1'$ y análogamente existe un único morfismo $g : 1' \to 1$. Como $1'$ es terminal existe un único morfismo de $1'$ en $1'$ luego $f \circ g : 1' \to 1'$ debe ser $id_{1'}$. Análogamente para $g \circ f$.

Dos objetos iniciales en una categoría son isomorfos.

13. ¿Cuales son los objetos iniciales y terminales en $Set \times Set$? ¿Cuáles en $Set^{\rightarrow}$?

Solución

- $Set \times Set$:
  - Iniciales: $(\emptyset, \emptyset)$.
  - Terminales: $(\{x\}, \{y\})$.
- $Set^{\rightarrow}$:
  - Iniciales: $0 : \emptyset \rightarrow \emptyset$.
  - Terminales: $f : \{x\} \rightarrow \{y\}$.

14. Dar una categoría sin objetos iniciales. Dar una sin objetos finales. Dar una donde los objetos finales e iniciales coincidan.

Solución

- La categoría del poset $(\mathbb{Z}^-, \leq)$ no tiene objetos iniciales.
- La categoría del poset $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ no tiene objetos finales.
- El monoide trivial es una categoría cuyo único objeto es final e inicial.

15. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Probar que si dos objetos admiten producto (coproducto), éste es único salvo isomorfismo.

Solución Sean A y B dos objetos con productos $A \times B$ (con proyecciones π_A y π_B) y $\overline{A \times B}$ (con proyecciones $\overline{\pi_A}$ y $\overline{\pi_B}$).

Como $A \times B$ es producto sabemos que para cualquier objeto C y par de funciones $f : C \rightarrow A$ y $g : C \rightarrow B$ (en particular para $\overline{A \times B}$ y sus proyecciones) existe un único morfismo $\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle : \overline{A \times B} \rightarrow A \times B$ tal que $\pi_A \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle = \overline{\pi_A}$ y $\pi_B \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle = \overline{\pi_B}$.

Análogamente existe un único morfismo $\langle \pi_A, \pi_B \rangle : A \times B \rightarrow \overline{A \times B}$ tal que $\overline{\pi_A} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_A$ y $\overline{\pi_B} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_B$.

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[d, dotted, "\langle \pi_A, \pi_B \rangle"] \arrow[ddl, bend right, "\pi_A"'] \arrow[ddr, bend left, "\pi_B"] & \\
 & \overline{A \times B} \arrow[dl, "\overline{\pi_A}"'] \arrow[dr, "\overline{\pi_B}"] \arrow[d, dotted, "\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Sabemos que entre $A \times B$ y $A \times B$ existe un único morfismo f tal que $\pi_A \circ f = \pi_A$ y $\pi_B \circ f = \pi_B$. Veamos que $\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle$ cumple estas propiedades:

$$\pi_A \circ (\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle) = (\pi_A \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle) \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \overline{\pi_A} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_A$$

$$\pi_B \circ (\langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle) = (\pi_B \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle) \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \overline{\pi_B} \circ \langle \pi_A, \pi_B \rangle = \pi_B$$

Como $id_{A \times B}$ también cumple dichas propiedades, entonces debe ser $id_{A \times B} = \langle \pi_A, \pi_B \rangle \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle$. Análogamente $\langle \pi_A, \pi_B \rangle \circ \langle \overline{\pi_A}, \overline{\pi_B} \rangle = id_{\overline{A \times B}}$.

16. Sea P un poset. Determina objetos iniciales, objetos terminales, productos y coproductos en las siguientes categorías:

    a) *Poset*.
    b) *Set*.
    c) *Mon*.
    d) *Grp*.

Soluciones

a) *Poset*:

- Iniciales: $0 = (\emptyset, \emptyset)$.
- Terminales: $1 = (\{x\}, \Delta)$.
- Productos: $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B) = ((A \times B, \leq_A \wedge \leq_B), fst, snd)$.
- Coproductos: $A + B =$ COMPLETAR.

b) *Set*:

   - Iniciales: $0 = \emptyset$.
   - Terminales: $1 = \{x\}$.
   - Productos: $A \times B = (A \times B, fst, snd)$.
   - Coproductos: $A + B = (A \uplus B, \times \{0\}, \times \{1\})$.

c) *Mon*:

   - Iniciales: $0 = (\{e\}, \oplus)$
   - Terminales: $1 = 0$.
   - Productos: $(A, \oplus) \times (B, \otimes) = ((A \times B,), ,)$ COMPLETAR.
   - Coproductos: $(A, \oplus) + (B, \otimes) = ((,), ,)$ COMPLETAR.

d) *Grp*:

   - Iniciales: $0 = (\{e\}, \oplus)$
   - Terminales: $1 = 0$.
   - Productos: $(A, \oplus) \times (B, \otimes) = ((,), ,)$ COMPLETAR.
   - Coproductos: $(A, \oplus) + (B, \otimes) = ((,), ,)$ COMPLETAR.

17. Dar una categoría donde algún par de objetos carecen de producto.

    Solución $(\mathbb{Q}, \leq)$.

18. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean A, B, C, D objetos de $\mathcal{C}$. Mostrar que en caso de existir $A \times B$, $C \times D$ y dos morfismos $f : A \to C$ y $g : B \to D$, entonces puede definirse un morfismo $f \times g : A \times B \to C \times D$.

    Solución

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, dashed, "{\langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle}"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C & C \times D \arrow[l, "\pi_3"] \arrow[r, "\pi_4"'] & D \end{tikzcd}$$

    Dicho morfismo existe pues lo garantiza la propiedad universal de $C \times D$.

19. Mostrar las siguientes identidades:

   a) $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id$.
   b) $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$.
   c) $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle$.
   d) $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k)$.
   e) $\langle [f, g], [h, k] \rangle = [\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle]$.

Soluciones

a) Sabemos que $\langle \pi_A, \pi_B \rangle$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, dashed, "\langle \pi_A, \pi_B \rangle"] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Observemos que id hace conmutar el diagrama pues $\pi_B \circ id = \pi_B$ y $\pi_A \circ id = \pi_A$; y como solo existe un morfismo con esa propiedad, debe ser $id = \langle \pi_A, \pi_B \rangle$.

b) Sabemos que $\langle f, g \rangle$ es el único morfismo que hace conmutar el diagrama interior:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "h"] & \\ & D \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f, g \rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Además sabemos que el único morfismo que hace conmutar el diagrama exterior es $\langle f \circ h, g \circ h\rangle$. Veamos entonces que $\langle f, g\rangle$ también conmuta el diagrama exterior:

- $\pi_B \circ (\langle f, g\rangle \circ h) = (\pi_B \circ \langle f, g\rangle) \circ h = g \circ h$.
- $\pi_A \circ (\langle f, g\rangle \circ h) = (\pi_A \circ \langle f, g\rangle) \circ h = f \circ h$.

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

e) COMPLETAR.

20. Probar los siguientes isomorfismos:

a) $A \times B \cong B \times A$.

b) $A \times 1 \cong A$.

c) $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$.

d) ¿Cuales son los enunciados duales?

Soluciones

a) Sean $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ y $(B \times A, \pi_3, \pi_4)$ dos productos. Como $A \times B$ es producto sabemos que existe un único morfismo $\langle \pi_4, \pi_3\rangle$ entre $B \times A$ y $A \times B$ tal que $\pi_1 \circ \langle \pi_4, \pi_3\rangle = \pi_4$ y $\pi_2 \circ \langle \pi_4, \pi_3\rangle = \pi_3$.

Análogamente un único morfismo $\langle \pi_2, \pi_1\rangle$ entre $A \times B$ y $B \times A$ tal que $\pi_3 \circ \langle \pi_2, \pi_1\rangle = \pi_2$ y $\pi_4 \circ \langle \pi_2, \pi_1\rangle = \pi_1$:

$$
\begin{tikzcd}
 & B \times A \arrow[dl, "\pi_4"'] \arrow[d, dashed, "\langle \pi_4, \pi_3\rangle"] \arrow[dr, "\pi_3"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[d, dashed, "\langle \pi_2, \pi_1\rangle"] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\
B & B \times A \arrow[l, "\pi_3"] \arrow[r, "\pi_4"'] & A
\end{tikzcd}
$$

También sabemos que existe un único morfismo entre $A \times B$ y si mismo que hace conmutar el diagrama, por lo que este debe ser el morfismo identidad. Análogamente para $B \times A$.

Como el morfismo identidad es el único morfismo entre $A \times B$ y si mismo que hace conmutar el diagrama y $\langle \pi_4, \pi_3\rangle \circ \langle \pi_2, \pi_1\rangle$ también tiene esta propiedad, entonces se trata del mismo morfismo. Análogamente para $B \times A$.

b) Por ser $A \times 1$ producto y 1 elemento terminal, sabemos que existen los siguientes morfismos:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "id_A"'] \arrow[d, dashed, "\langle id_A, g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times 1 \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & 1
\end{tikzcd}$$

donde $\boxed{\pi_1 \circ \langle id_A, g\rangle = id_A}$.

Ademas observemos que:

- $\pi_1 \circ (\langle id_A, g\rangle \circ \pi_1) = (\pi_1 \circ \langle id_A, g\rangle) \circ \pi_1 = id_A \circ \pi_1 = \pi_1$
- $\pi_2 \circ (\langle id_A, g\rangle \circ \pi_1) = \pi_2$

por lo que $\boxed{\langle id_A, g\rangle \circ \pi_1 = id_{A\times 1}}$.

c) COMPLETAR.

d)

- $A + B \cong B + A$.
- $A + 0 \cong A$.
- $A + (B + C) \cong (A + B) + C$.

21. Probar que si dos morfismos $f, g : X \to Y$ admiten egalizador (coegalizador), éste es único salvo isomorfismo.

Solución Sean $e_1 : X_1 \to A$ y $e_2 : X_2 \to A$ dos ecualizadores de $f, g : A \to B$, luego sabemos:

a) $f \circ e_1 = g \circ e_1$.

b) $f \circ e_2 = g \circ e_2$.

c) $\forall e' : X' \to A$ para el cual $f \circ e' = g \circ e'$ existe un único $k' : X' \to X_1$ tal que $e_1 \circ k' = e'$.

d) $\forall e'' : X'' \to A$ para el cual $f \circ e'' = g \circ e''$ existe un único morfismo $k'' : X'' \to X_2$ tal que $e_2 \circ k'' = e''$.

$$
\begin{tikzcd}
X'' \arrow[d, dashed, "\exists! k''"'] \arrow[ddr, "e''"] & & \\
X_2 \arrow[dr, "e_2"'] & & \\
& A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \\
X_1 \arrow[ur, "e_1"] & & \\
X' \arrow[u, dashed, "\exists! k'"] \arrow[uur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Por c), sabemos que para $e' = e_2$ existe un único $k' : X_2 \to X_1$ tal que $e_1 \circ k' = e_2$ y análogamente por d), existe un único $k'' : X_1 \to X_2$ tal que $e_2 \circ k'' = e_1$. Tenemos entonces:

$$e_2 = e_1 \circ k' = e_2 \circ (k'' \circ k)' \Rightarrow k'' \circ k' = id_{X_2}$$

$$e_1 = e_2 \circ k'' = e_1 \circ (k' \circ k'') \Rightarrow k' \circ k'' = id_{X_1}$$

por lo que ambos ecualizadores son isomorfismos.

22. Encontrar el ecualizador en Set.

Solución Veamos primero un ejemplo:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] & \mathbb{Z} \arrow[r, bend left, "x^2"] \arrow[r, bend right, "2x"'] & \mathbb{R} \\
X' \arrow[u, dashed, "\exists! k"] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Observemos el conjunto de valores para los cuales $f = g$: $X = \{0, 2\}$, luego el morfismo $e(x) = x$ cumple trivialmente la conmutatividad.

Consideremos además $e' : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que $e'(2x) = 2$ y $e'(2x+1) = 0$, es evidente que este morfismo también conmuta el diagrama.

Intentemos definir un morfismo $k : \mathbb{N} \to X$ tal que $e \circ k = e'$, es decir: $e\left(k\left(x\right)\right) = e'\left(x\right) \iff k\left(x\right) = e'\left(x\right)$, por lo que esta es la única forma de definirlo.

En definitiva el ecualizador de dos funciones $f, g : A \to B$ es:

$$e : \left\{a \in A : f\left(a\right) = g\left(a\right)\right\} \hookrightarrow B$$

23. Sean $f, g : X \to Y$ dos morfismos en Set. Probar que el coegalizador de f y g es el cociente de Y por la relación de equivalencia $y \equiv z$ si y sólo si existe $x \in X$ tal que $y = f\left(x\right)$ y $z = g\left(x\right)$ o bien $y = g\left(x\right)$ y $z = f\left(x\right)$.

    Solución COMPLETAR.

24. Probar que en una categoría $\mathcal{C}$ todo ecualizador e es un monomorfismo. Mostrar que si además e es epimorfismo, entonces se tiene un isomorfismo.

    Solución Sea $e : X \to A$ ecualizador de $f, g : A \to B$, luego $f \circ e = g \circ e$. Consideremos ademas dos morfismos $k', k'' : X' \to X$ para los cuales $e \circ k' = e \circ k''$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \\ X' \arrow[u, bend left, "k'"] \arrow[u, bend right, "k''"'] & & \end{tikzcd}$$

    Si definimos $e' := e \circ k'$ tenemos que $\boxed{f \circ e'} = f \circ e \circ k' = g \circ e \circ k' = \boxed{g \circ e'}$ lo que implica por propiedad universal de ecualizadores que k' es el único morfismo para el cual $e \circ k' = e'$, sin embargo también ocurre que $e \circ k'' = e'$; luego k' y k'' deben ser el mismo morfismo, de donde concluimos que e es monomorfismo.

Supongamos que ademas de monomorfismo también es epimorfismo, luego como $f \circ e = g \circ e$ resulta $f = g$.

Si también consideramos que $f \circ id_A = f = g = g \circ id_A$, sabemos que existe un único morfismo $k : A \to X$ tal que $e \circ k = id_A$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \\
A \arrow[u, dashed, "\exists ! k"] \arrow[ur, "id_A"'] & &
\end{tikzcd}$$

Como $\boxed{e \circ id_X} = e = id_A \circ e = (e \circ k) \circ e = \boxed{e \circ (k \circ e)}$ y e es monomorfismo, resulta $k \circ e = id_X$.

25. El *pullback* de dos morfismos $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$ consiste en un objeto P junto con dos morfismos $p_1 : P \to X$, $p_2 : P \to Y$ tal que $f \circ p_1 = g \circ p_2$, y además si existe otro objeto Q con dos morfismos $q_1 : Q \to X$, $q_2 : Q \to Y$ tal que $f \circ q_1 = g \circ q_2$, entonces existe un único morfismo $u : Q \to P$ tal que $p_1 \circ u = q_1$ y $p_2 \circ u = q_2$. A continuación, un diagrama que muestra la situación:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "\exists ! u"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Probar que el pullback de dos morfismos, si existe, es único salvo isomorfismo.

Solución COMPLETAR.

26. Encontrar el pull-back en *Set*.

Solución $P = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$, $p1 = fst$, $p2 = snd$.

27. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con exponenciales.

    a) Probar $curry\,(eval_{A,B}) = id_{B^A}$.

    b) Dado un morfismo $f : B \to C$, construir un morfismo $B^A \to C^A$.

    c) Dado un morfismo $f : A \to C^B$, construir un morfismo $uncurry\,(f) : A \times B \to C$.

    d) Probar $uncurry\,(curry\,(f)) = f$ y $curry\,(uncurry\,(f)) = f$.

    Soluciones

    a) COMPLETAR.

    b) COMPLETAR.

    c) COMPLETAR.

    d) COMPLETAR.

28. Sea $\mathcal{C}$ una CCC y sean A, B objetos de $\mathcal{C}$. Probar:

    a) B^A es único salvo isomorfismo.

    b) $1^A \cong 1$.

    c) $B^1 \cong B$.

    Soluciones

    a) COMPLETAR.

    b) COMPLETAR.

    c) COMPLETAR.

29. Hallar los exponenciales en Set.

    Solución COMPLETAR.

30. Demostrar que un álgebra de Boole es una CCC.

Solución COMPLETAR.

31. En una categoría con coproductos y objeto final, podemos definir los booleanos como el objeto $Bool = 1 + 1$. En este caso, a i_1 le llamamos $true$ y a i_2 le llamamos $false$. Escribimos un morfismo $not : Bool \to Bool$ tal que:

$$not \circ true = false$$

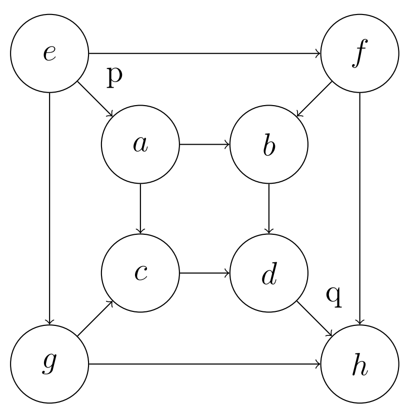
$$not \circ false = true$$

Suponiendo que la categoría tiene exponenciales: ¿puede escribir un morfismo $and : Bool \times Bool \to Bool$ que se comporte como la conjunción?

Solución COMPLETAR.

Ejercicios adicionales

1. Considerar que en el siguiente diagrama los 4 trapecios conmutan.



Probar que:

a) Si el cuadrado interno conmuta, también lo hace el cuadrado externo.

b) Si p es epimorfismo y q es monomorfismo, entonces si el cuadrado externo conmuta, también lo hace el cuadrado interno.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

2. Sean C y D dos categorías. Se define $C \times D$ de la siguiente manera: los objetos de $C \times D$ son de la forma (A, B) para $A \in C$ y $B \in D$ y las flechas $(f, g) : (A, B) \to (A', B')$ donde $f : A \to A' \in C$ y $g : B \to B' \in D$.

   a) Verificar que $C \times D$ es una categoría.

   b) Probar que $P_1 : C \times D \to C$, $P_1(A, B) = A$ y $P_2 : C \times D \to D$, $P_2(A, B) = B$, definen functores.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

3. Dados dos funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, definir un funtor que componga ambos. ¿Es posible definir una categoría cuyos objetos sean las categorías y sus flechas sean los funtores entre estas?

Solución COMPLETAR.

4. Si $f : A \to B$ en Set, entonces definimos $f^{-1}(X) = \{a \in A : f(a) \in X\}$ donde $X \subseteq B$. Probar que $I : Set \to Set$ es un funtor contravariante, llevando: $I(A) = \mathcal{P}(A)$ y $I(f) = f^{-1}$.

Solución COMPLETAR.

5. Se ha visto que puede considerarse a un monoide como una categoría con un único objeto, ¿Qué es un funtor entre dos categorías de este tipo? ¿Y entre categorías formadas a partir de conjuntos ordenados?

Solución COMPLETAR.

6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, para cada objeto X de $\mathcal{C}$ definimos $Hom\left(X,-\right) : \mathcal{C} \to Set$ donde $Hom\left(X,Y\right) = \mathcal{C}\left(X,Y\right)$ y $Hom\left(X,f\right)\left(g\right) = f \circ g$. Probar que $Hom\left(X,-\right)$ es efectivamente un funtor para cada X. Definir análogamente un funtor $Hom\left(-,X\right)$.

Solución COMPLETAR.

7. Dado un semigurpo $\left(S,\cdot\right)$, podemos construir un monoide $\left(S',\cdot'\right)$ donde $S' = S \cup \{e\}$, $\left(0,x\right) \cdot' \left(0,y\right) = \left(0,x \cdot y\right)$ y $\left(1,e\right) \cdot' x = x = x \cdot' \left(1,e\right)$. Utilizando esta construcción, definir un funtor $F : Sem \to Mon$ y probar que es un monomorfismo en Cat.

Solución COMPLETAR.

8. Definimos la asignación $Fr : Set \to Mon$ tal que $Fr\left(X\right) = X^*$ [1] y $Fr\left(f\right)\left(x_1 x_2 \cdots x_n\right) = f\left(x_1\right) f\left(x_2\right) \cdots f\left(x_n\right)$. Usando el funtor $U : Mon \to Set$ que se olvida de la estructura de monoide, consideramos $i : X \to U\left(Fr\left(X\right)\right)$ la función que lleva un elemento x de X a la palabra x.

   a) Probar que Fr es un funtor.

   b) Probar que dado $f : X \to U\left(M\right)$ en Set donde M es un monoide, puedo construir una única $\overline{f} : Fr\left(X\right) \to M$ en Mon tal que $U\left(\overline{f}\right) \circ i = f$ en Set[2].

   c) ¿A cuál monoide es isomorfo $Fr\left(X\right)$ donde X es un conjunto de un solo elemento?

   d) ¿Este funtor preserva productos?

[1] X^* es el monoide de las palabras sobre el alfabeto X con la concatenación como operación. Puede pensar en las palabras de X como las listas de elementos de X.

[2] Cuando un monoide como $Fr\left(X\right)$ satisface esta propiedad, decimos que es el monoide libre sobre X.

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

9. Sea $\mathcal{C}$ con 0. Verificar que si un morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ admite núcleo (conúcleo), éste es único salvo isomorfismo.

Solución COMPLETAR.

10. Sean $\mathcal{C}$ una categoría con 0 y $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Probar que $p : Y \to C$ es un conúcleo de f en $\mathcal{C}$ si y solo si p^{op} es un núcleo de f^{op} en $\mathcal{C}^{op}$.

Solución COMPLETAR.

11. Sean $\mathcal{C}$ un categoría con 0 y $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Probar que $ker\,(f)\,(coker\,(f))$ coincice con el egalizador (coegalizador) de f y 0.

Solución COMPLETAR.

12. Sean x e y elementos de un conjunto ordenado P. ¿Cuál sería el producto de x e y considerando P como una categoría?

Solución COMPLETAR.

13. Sean P y Q conjuntos ordenados. ¿Cuál es el coproducto de P y Q en $Poset$?

Solución COMPLETAR.

14. ¿Grp tiene productos? ¿Tiene coproductos? ¿Tiene objeto inicial? ¿Tiene objeto final? ¿Y Mon?

Solución COMPLETAR.

15. Un ωCPO es un conjunto ordenado con mínimo (notado $\perp$) tal que toda cadena ascendente numerable $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \cdots$ (que notamos $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ tiene un supremo $\sqcup \{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Una función monótona entre dos ωCPO es continua si $f\left(\sqcup \{a_i\}_{i=0}^{\infty}\right) = \sqcup \{f\left(a_i\right)\}_{i=0}^{\infty}$ para toda cadena ascendente numerable $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$.

    a) Probar que podemos armar una categoría cuyos objetos son ωCPO y cuyas flechas son funciones continuas.

    b) ¿Esta categoría tiene productos? En caso afirmativo, describirlos. ¿Y coproductos?

Soluciones

a) COMPLETAR.

b) COMPLETAR.

16. Probar o refutar: sea C una categoría con productos, y $F : C \to C$ un functor, entonces siempre existe un único morfismo $F\left(A \times B\right) \to FA \times FB$.

Solución COMPLETAR.

17. Sea $U : Mon \to Set$ el functor que olvida la estructura de monoide. Definimos además $U^2 : Mon \to Set$ que en objetos lleva $(X, \otimes, e) \mapsto X \times X$. Probar que a U^2 se lo puede denotar de estructura functorial.

Solución COMPLETAR.