# Índice general

# Parte I

# Variables aleatorias discretas

# Capítulo 1

# Distribución Binomial

## 1.1. Descripción

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de $n$ ensayos de Bernoulli independientes entre sí, con una probabilidad fija $p$ de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Es decir, sean $\mathcal{E}$ un experimento, $S$ el espacio muestral asociado a tal experimento y $A$ un suceso del espacio con probabilidad $p$, entonces $X$: «Numero de ocurrencias del suceso $A$ en $n$ repeticiones independientes de $\mathcal{E}$» es una variable aleatoria con distribución binomial.

$$X \sim B\left(n, p\right)$$

### 1.1.1. Características

- $R_X = \{0, \ldots, n\}$.
- $P\left(X = x\right) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$.
- $X = \sum_{i=1}^{n} Y$ donde $Y$ es la variable de Bernoulli $Y\left(y\right) = \begin{cases} 1 & y = A \\ 0 & y = \overline{A} \end{cases}$.

### 1.1.2. Ejemplos

#### 1.1.2.1. Lanzamiento de monedas

$\mathcal{E}$: «Se tira una moneda y se observa el resultado».

- $S = \{\odot, \otimes\}$. $\#S = 2$.
- $A = \{\text{Salio cara}\}$. $\#A = 1$. $P(A) = \frac{1}{2}$.
- $X$: «Cantidad de caras en 3 repeticiones independientes de $\mathcal{E}$». $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$.
- $X(x_1, x_2, x_3) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} Y(x_i) = Y(x_1) + Y(x_2) + Y(x_3)$.
    - $P(X = x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$.
    - $X(\otimes, \otimes, \otimes) = 0$.
    - $X(\otimes, \otimes, \odot) = 1$.
    - $X(\otimes, \odot, \otimes) = 1$.
    - $X(\otimes, \odot, \odot) = 2$.
    - $R_X = \{0, \ldots, 3\}$.
    - $X(\odot, \otimes, \otimes) = 1$.
    - $X(\odot, \otimes, \odot) = 2$.
    - $X(\odot, \odot, \otimes) = 2$.
    - $X(\odot, \odot, \odot) = 3$.

1. ¿Cual es la probabilidad de que salgan 2 caras en 3 repeticiones del experimento?
    a) $P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.
    b) Probabilidad clásica:
        - $S' = \{(x_1, x_2, x_3) / x_i \in S\}$. $\#S' = 2^3 = 8$.
        - $B = \{\text{Salieron exactamente 2 caras}\} = \{(\otimes, \odot, \odot), (\odot, \otimes, \odot), (\odot, \odot, \otimes)\}$.
        - $P(B) = \frac{\#B}{\#S'} = \frac{3}{8}$.
2. ¿Cual es la probabilidad de que salgan al menos 2 caras en 3 repeticiones del experimento?
    a) $P(X \geq 2) = p(2) + p(3) = \frac{3}{8} + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} = \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{4}{8}$.
    b) Probabilidad clásica:
        - $C = \{\text{Salieron exactamente 3 caras}\} = \{(\odot, \odot, \odot)\}$. $\#C = 1$.
        - $D = \{\text{Salieron al menos 2 caras}\} = B \cup C$. $\#D = 3 + 1 = 4$.
        - $P(D) = \frac{\#D}{\#S'} = \frac{4}{8}$.

#### 1.1.2.2. Apuestas a la ruleta

$\mathcal{E}$: «Se tira la bolilla y se observa el resultado».

- $S = \{0, \ldots, 36\}$. $\#S = 37$.
- $A = \{\text{Sale un numero negro}\}$. $\#A = 18$. $P(A) = \frac{18}{37}$.
- $X$: «Cantidad de números negros en 4 repeticiones independientes de $\mathcal{E}$». $X \sim B\left(4, \frac{18}{37}\right)$.
- $P(X = x) = \binom{4}{x}\left(\frac{18}{37}\right)^x\left(\frac{19}{37}\right)^{4-x}$. $R_X = \{0, \ldots, 4\}$.

1. ¿Cual es la probabilidad de que la mayoría sean negros?
   a) $P(X > 2) = p(3) + p(4) = \binom{4}{3}\left(\frac{18}{37}\right)^3\left(\frac{19}{37}\right)^{4-3} + \binom{4}{4}\left(\frac{18}{37}\right)^4\left(\frac{19}{37}\right)^{4-4} = \frac{16399584}{69343957} + \frac{104976}{1874161} \approx 0,2925$.
   b) Probabilidad clásica:
      - $\#S' = 37^4 = 1874161$.
      - $B = \{\text{Hay exactamente 3 numeros negros}\}$. $\#B = 4 \cdot 19 \cdot 18^3 = 443232$.
      - $C = \{\text{Hay exactamente 4 numeros negros}\}$. $\#C = 18^4 = 104976$.
      - $D = \{\text{La mayoria son negros}\} = B \cup C$. $\#D = 548208$.
      - $P(D) = \frac{\#D}{\#S'} = \frac{548208}{1874161} \approx 0,2925$.

## 1.2. Condición de cierre

[1]

$$\sum_{i \in R_X} P(X = i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \underbrace{=}_{1} (p+q)^n = 1^n = 1$$

[1] Teorema del binomio

## 1.3. Esperanza

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i\in R_X} iP(X=i) = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\frac{n!}{i!\,(n-i)!}p^i(1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}p^i(1-p)^{n-i} = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{n!}{i!\,(n-[i+1])!}p^{i+1}(1-p)^{n-(i+1)} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{n(n-1)!}{i!\,(n-i-1)!}pp^i(1-p)^{n-i-1} = \\
&= np\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{i!\,(n-i-1)!}p^i(1-p)^{n-i-1} = np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{n-i-1} = \\
&\underbrace{=}_{1} np\,[p+(1-p)]^{n-1} = np
\end{aligned}
$$

**Alternativa** Si $X \sim B(n,p)$ podemos expresar a $X$ como suma de $n$ variables de Bernoulli $Y_i$, es decir: $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Luego:

$$
E(X) = E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np
$$

## 1.4. Variancia y desvió estándar

$$
V(Y_i) = E\left(Y_i^2\right) - \left[E(Y_i)^2\right] = p - p^2 = p(1-p) = pq
$$

$$
V(X) = V\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] \underbrace{=}_{} \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq
$$

$$
\sigma_X = \sqrt{npq}
$$

# Capítulo 2

# Distribución Geométrica

## 2.1. Descripción

### 2.1.1. Características

### 2.1.2. Ejemplos

## 2.2. Condición de cierre

## 2.3. Esperanza

## 2.4. Variancia y desvió estándar

# Capítulo 3

# Distribución Hipergeométrica

## 3.1. Descripción

### 3.1.1. Características

### 3.1.2. Ejemplos

## 3.2. Condición de cierre

## 3.3. Esperanza

## 3.4. Variancia y desvió estándar

# Capítulo 4

# Distribución de Pascal

## 4.1. Descripción

### 4.1.1. Características

### 4.1.2. Ejemplos

## 4.2. Condición de cierre

## 4.3. Esperanza

## 4.4. Variancia y desvió estándar

# Capítulo 5

# Distribución de Poisson

## 5.1. Descripción

### 5.1.1. Características

### 5.1.2. Ejemplos

## 5.2. Condición de cierre

## 5.3. Esperanza

## 5.4. Variancia y desvió estándar

# Capítulo 6

# Distribución Multinomial

## 6.1. Descripción

### 6.1.1. Características

### 6.1.2. Ejemplos

## 6.2. Condición de cierre

## 6.3. Esperanza

## 6.4. Variancia y desvió estándar