Espacios vectoriales. Primera parte.

1. Analizar si los siguientes conjunto con las operaciones definidas son un espacio vectorial:

   a) El conjunto de los numeros reales positivos ($\mathbb{R}^+$), con la suma y el producto por escalar usuales.

   b) El conjunto de los numeros reales positivos ($\mathbb{R}^+$), con la suma $x+y$ definida como xy y el producto cx como x^c.

   c) El conjunto de las funciones pares, con la suma y producto por escalares usuales.

   d) El conjunto de las funciones continuas, con el producto cf definido como $(cf)(x) = f(cx)$ y la suma habitual de funciones.

   e) El conjunto de las funciones reales biyectivas, con el producto por escalar habitual y la suma $f+g$ definida como $(f+g)(x) = f[g(x)]$.

   f) El conjunto de los polinomios a coeficientes reales de grado a lo sumo 3, incluido el polinomio nulo, con la suma y producto por escalar habituales.

   g) $\mathbb{R}^2$ con el producto por escalar habitual y la suma de $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ definida como $u + v = (u_1 + v_1 + 1, u_2 + v_2 + 1)$.

Soluciones

a) Dicho conjunto no es un espacio vectorial pues no respeta el axioma de clausura del producto por escalares. Por ejemplo, sean $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^+/\boldsymbol{v} = \mathbf{1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}/\alpha = -1$ entonces $\alpha\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{v} = \mathbf{-1} \notin \mathbb{R}^+$.

b) En efecto, veamos que verifica los axiomas de espacio vectorial:

- Clausura de la suma: Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^+$, luego $\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} \boldsymbol{v} = uv > 0$.
- Clausura del producto con escalares: Sean $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, luego:
$$\alpha\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{\alpha}} > 0$$
- Conmutatividad de la suma: Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^+$, luego:
$$\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} \boldsymbol{v} = uv = vu = \boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{u}$$

- Asociatividad de la suma: Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^+$, luego:

$$\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} (\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w}) = u\,(vw) = (uv)\,w = (\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} \boldsymbol{v}) \boldsymbol{+} \boldsymbol{w}$$

- Neutro de la suma: Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^+$, luego para $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{1} \in \mathbb{R}^+$ resulta:

$$\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{n} = v1 = v = \boldsymbol{v}$$

- Existencia del opuesto: Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^+$, luego para $\boldsymbol{o} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^+$ resulta:

$$\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{o} = v\frac{1}{v} = 1 = \boldsymbol{n}$$

- Asociatividad del producto con escalares: Sean $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, luego:

$$\alpha \boldsymbol{\cdot} (\beta \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v}) = \alpha \left(v^{\beta}\right) = v^{\beta^{\alpha}} = v^{\beta\alpha} = v^{\alpha\beta} = v^{\alpha^{\beta}} = \beta\,(v^{\alpha}) = \beta \boldsymbol{\cdot} (\alpha \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v})$$

- Neutro del producto con escalares: Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^+$, luego para el neutro multiplicativo de $\mathbb{R}$ resulta:

$$1 \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v} = v^1 = v = \boldsymbol{v}$$

- Distributividad del producto respecto de la suma de vectores: Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^+$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ luego:

$$\alpha \boldsymbol{\cdot} (\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} \boldsymbol{v}) = (uv)^{\alpha} = u^{\alpha} v^{\alpha} = \alpha \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{u} \boldsymbol{+} \alpha \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v}$$

- Distributividad del producto respecto de la suma de escalares: Sean $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^+$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ luego:

$$(\alpha + \beta) \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v} = v^{\alpha+\beta} = v^{\alpha} v^{\beta} = \alpha \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \beta \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v}$$

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

e) Dicho conjunto no es un espacio vectorial pues no respeta el axioma de clausura del producto por un escalar. Por ejemplo, sean $\boldsymbol{f} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}/\alpha = 0$ entonces $0 \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{f} = 0f\,(x) = 0$ que claramente no es inyectiva.

f) COMPLETAR.

g) Dicho conjunto no es un espacio vectorial pues no respeta el axioma distributividad del producto respecto de la suma de escalares. Por ejemplo, sean $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ luego:

$$(\alpha + \beta) \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v} = ((\alpha + \beta)\, v_1, (\alpha + \beta)\, v_2) = (\alpha v_1 + \beta v_1, \alpha v_1 + \beta v_1)$$

pero

$$\alpha \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \beta \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2) \boldsymbol{+} (\beta v_1, \beta v_2) = (\alpha v_1 + \beta v_1 + 1, \alpha v_1 + \beta v_1 + 1)$$

2. Sea $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ un espacio vectorial. En particular sabemos que existe $\mathbf{0} \in V / \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in V$; y que para todo $\boldsymbol{x} \in V$ existe un vector $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ tal que $\boldsymbol{x} + \widetilde{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$. Demuestre los siguientes enunciados:

   a) Unicidad del neutro: si $\mathbf{0'} \in V$ es tal que $\mathbf{0'} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in V$, entonces $\mathbf{0'} = \mathbf{0}$.

   b) Unicidad del opuesto: dado $\boldsymbol{x} \in V$, si $\widetilde{\boldsymbol{x}}' \in V$ es tal que $\boldsymbol{x} + \widetilde{\boldsymbol{x}}' = \mathbf{0}$, entonces $\widetilde{\boldsymbol{x}}' = \widetilde{\boldsymbol{x}}$.

   c) Propiedad cancelativa: si $\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}$ entonces $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

   d) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

   e) $0 \cdot v = \mathbf{0}\ \forall v \in V$.

   f) $(-\alpha \cdot \boldsymbol{v}) = \alpha \cdot (-\boldsymbol{v})$, donde $-\boldsymbol{v}$ es el opuesto de $\boldsymbol{v}$, $\forall v \in V$.

   g) Si $\alpha \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ entonces $\alpha = 0$ o $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Soluciones

a) Por un lado $\mathbf{0} + \mathbf{0'} = \mathbf{0}$ y por otro $\mathbf{0} + \mathbf{0'} = \mathbf{0'}$, por lo que $\mathbf{0} = \mathbf{0'}$.

b) En efecto $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \widetilde{\boldsymbol{x}} + \mathbf{0} = \widetilde{\boldsymbol{x}} + \overbrace{\boldsymbol{x} + \widetilde{\boldsymbol{x}}'}^{\mathbf{0}} = \underbrace{\widetilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x}}_{\mathbf{0}} + \widetilde{\boldsymbol{x}}' = \widetilde{\boldsymbol{x}}'$.

c) COMPLETAR.

d) COMPLETAR.

e) COMPLETAR.

f) COMPLETAR.

g) COMPLETAR.

3. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son un subespacio de $\mathbb{R}^3$:

   a) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) con $b_1 = 0$.

   b) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) con $b_1 = 1$.

   c) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) con $b_1 b_2 b_3 = 0$.

   d) El conjunto formado por las 3-uplas (x, y, z) tal que $x+y-2x = 4$.

   e) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) que son combinacion lineal de $v = (1, 4, 0)$ y $w = (2, 2, 2)$.

   f) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) tal que $b_1+b_2+b_3 = 0$.

   g) El conjunto formado por las 3-uplas (b_1, b_2, b_3) que verifican $b_1 \leq b_2 \leq b_3$.

   Soluciones

   a) En efecto el conjunto indicado es subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y ademas:
      - Se verifica la clausura de la suma: $(0, u_2, u_3) + (0, v_2, v_3) = (0, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.
      - Se verifica la clausura del producto por escalares: $\alpha\,(0, u_2, u_3) = (0, \alpha u_2, \alpha u_3)$.

   b) El conjunto indicado no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ pues no verifica la clausura de la suma: $(1, u_2, u_3) + (1, v_2, v_3) = (2, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.

   c) El conjunto indicado no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ pues no verifica la clausura de la suma: $(0, 2, 3) + (1, 0, 3) = (1, 2, 6)$.

   d) El conjunto indicado no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ pues no verifica la clausura del producto: $0\,(0, 0, -2) = (0, 0, 0)$.

   e) COMPLETAR.

   f) COMPLETAR.

   g) El conjunto indicado no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ pues no verifica la clausura del producto: $-1\,(1, 2, 3) = (-1, -2, -3)$.

4. Mostrar que las dos propiedades que definen un subespacio vectorial (i.e. que la suma sea cerrada en el conjunto y que el producto por escalar tambien lo sea) son propiedades independientes una de otra. Para ello buscar un conjunto que sea cerrado bajo la suma pero no bajo el producto por escalar y otro conjunto que cumpla lo contrario.

Solucion Sean $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ y $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \vee y = 0\}$.

- A es cerrado bajo la suma pues

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = \left(\overbrace{x_1 + x_2}^{>0}, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \right)$$

  y sin embargo no es cerrado bajo el producto pues $0\,(1,0,0) = (0,0,0)$.

- B es cerrado bajo el producto pues si $x = 0$ entonces $\alpha\,(x,y,z) = (0, \alpha y, \alpha z)$ o si $y = 0$ entonces $\alpha\,(x,y,z) = (\alpha x, 0, \alpha z)$ y sin embargo no es cerrado bajo la suma pues $(0,1,0) + (1,0,0) = (1,1,0)$.

5. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{n \times n}$:

   a) El conjunto de las matrices triangulares.

   b) El conjunto de las matrices singulares.

   c) El conjunto de las matrices simetricas.

   Soluciones

   a) Falso. En efecto $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   b) Falso. En efecto $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   c) COMPLETAR.

6. Sea $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sean U y W subespacios de V. Probar que

$$U + W = \{v \in V / v = u + w \wedge u \in U, w \in W\}$$

   es un subespacio de V.

Solucion Por definicion $(U+W) \subseteq V$. Veamos que satisface los axiomas de clausura:

- Sean $x = (u_1 + v_1) \in (U+W)$ y $y = (u_2 + v_2) \in (U+W)$ luego $x + y = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 = \underbrace{u_1 + u_2}_{\in U} + \underbrace{v_2 + v_2}_{\in V}$ por lo que $(x+y) \in (U+W)$.
- Sean $x = (u+v) \in (U+W)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ luego $\alpha x = \underbrace{\alpha u}_{\in U} + \underbrace{\alpha v}_{\in V}$ por lo que $(\alpha x) \in (U+W)$.

7. Sean
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   a) Describir un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a A y no a B.

   b) Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, ¿debe contener tambien a I?

Solucion

a) Si consideremos el subespacio $V = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$, es facil ver que $A \in V$ y $B \notin V$.

b) En efecto puesto que un espacio vectorial es cerrado bajo la suma y producto por escalares, si contiene a A y B tambien debe contener a $A + (-1)\,B = I$.

8. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soluciones

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : v = (\alpha + 2\beta) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : v = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{C}(B) = COMPLETAR$$

$$\mathcal{C}(C) = COMPLETAR$$

$$\mathcal{C}(D) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : v = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : v = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{C}(E) = COMPLETAR$$

9. ¿Para que vectores $b = (b_1, b_2, b_3)^t$ los siguientes sistemas tienen solucion?

$$S_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}}_{A_1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ y } S_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}}_{A_2} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Soluciones Notese que S_i es una combinacion lineal de las columnas de A_i, es decir que buscamos que $b \in \mathcal{C}(A_i)$.

$$\mathcal{C}(A_1) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{C}(A_2) = COMPLETAR$$

10. Dadas $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, probar que el espacio columna de AB esta contenido en el espacio columna de A. Dar un ejemplo donde dicha contencion sea estricta.

Solucion Sean A_k, B_k, C_k las columnas de A, B y $C = AB$, luego la k-esima columna de C es una combinacion lineal de las columnas de A con los coeficientes de B_k: $AB = \begin{bmatrix} | & | & | \\ AB_1 & \dots & AB_p \\ | & | & | \end{bmatrix}$. Es decir:

$$C_k = b_{1k} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{A_1} + b_{2k} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}}_{A_2} + \ldots + b_{nk} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{A_n}$$

por lo que $C_k \in \mathcal{C}(A)$.

Sea $x \in \mathcal{C}(C)$ luego $x = \alpha_1 C_1 + \ldots + \alpha_p C_p$ y como cada $C_i \in \mathcal{C}(A)$ por ser combinacion de las columnas de A, esta nueva combinacion tambien pertenece.

11. ¿Cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{\infty}$?

    a) $\{x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\infty} : |\{i \in \mathbb{N}/x_i \neq 0\}| \in \mathbb{N}_0\}$.
    b) $\{x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\infty} : \exists i_0 \in \mathbb{N}/x_i = 0, \forall i \geq i_0\}$.
    c) $\{x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\infty} : x_i \geq x_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}\}$.

Soluciones COMPLETAR.

Espacios vectoriales. Segunda parte.

12. Probar el siguiente enunciado: Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset V$ subespacios. Luego $V = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ si y solo si se verifican las siguientes condiciones:

    a) $V = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$.
    b) $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{0\}$.

    Encontrar un contraejemplo para demostrar que este resultado no puede extenderse a m subespacios.

Solucion

- $\boxed{\Rightarrow}$: Por definicion de suma directa $V = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$. Ademas como $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son espacios vectoriales resulta que $0 \in \mathcal{U}_1$ y $0 \in \mathcal{U}_2$ por lo que $0 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

  Supongamos existe un vector $u \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 / u \neq 0$. Como $u \in V$ existen unicos $u_1 \in \mathcal{U}_1$ y $u_2 \in \mathcal{U}_2$ tales que $u = u_1 + u_2$. Sin embargo $u = \underbrace{0}_{\in \mathcal{U}_1} + \underbrace{u}_{\in \mathcal{U}_2}$ y tambien $u = \underbrace{u}_{\in \mathcal{U}_1} + \underbrace{0}_{\in \mathcal{U}_2}$. Contradiccion.
- $\boxed{\Leftarrow}$: Sabemos que $V = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$. Sea $v \in V$ y supongamos existen $u_1, \widehat{u_1} \in \mathcal{U}_1$ y $u_2, \widehat{u_2} \in \mathcal{U}_2$ tales que $v = u_1 + u_2 = \widehat{u_1} + \widehat{u_2}$ luego $\underbrace{u_1 - \widehat{u_1}}_{\in \mathcal{U}_1} = \underbrace{\widehat{u_2} - u_2}_{\in \mathcal{U}_2}$ y por nuestra otra hipotesis resulta $u_1 - \widehat{u_1} = 0 \iff u_1 = \widehat{u_1}$ y analogamente $u_2 = \widehat{u_2}$.
- Sean $\mathcal{U}_1 = \langle \{(1,0,0)\} \rangle, \mathcal{U}_2 = \langle \{(1,1,0)\} \rangle, \mathcal{U}_3 = \langle \{(1,2,0)\} \rangle$, luego es facil ver que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3 = \{0\}$ pero $(1,2,0) = 1u_3 = 2u_2 - u_1$.

13. Para cada uno de los siguientes conjuntos determinar si es un subespacio de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ o explique por que no lo es:

    a) $A = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

    b) $B = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$.

    c) $C = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$.

    d) El conjunto de funciones constantes

    e) $E = \{\alpha + \beta sen(x) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Soluciones

a) No lo es pues no respera la clausura del producto por un escalar: Sea $f(x) = -1$, luego $-f(x) = 1$.

b) En efecto, veamos que respeta las propiedades de clausura:

- Sean $f, g \in A$ luego $f + g(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$.
- $\alpha f(0) = \alpha 0 = 0$.

c) Analogo.

d) En efecto, veamos que respeta las propiedades de clausura:

- Sean $f, g \in D / f(x) = c, g(x) = k$ luego $f + g(x) = f(x) + g(x) = k + c$.
- $\alpha f(x) = \alpha c$.

e) COMPLETAR.

14. Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{U}$ es cerrado bajo la multiplicacion por escalares pero no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Dar un ejemplo de un subespacio no vacio de $\mathcal{U}$.

    Solucion Sea $\mathcal{U} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$. Es facil ver que es cerrado bajo el producto por escalares y no es subespacio pues $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin \mathcal{U}$.

    Luego $V = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ es claramente un subespacio de $\mathcal{U}$.

15. Sea $\mathbb{K}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$, y sea $\mathcal{U}$ el subespacio de $\mathbb{K}[x]$ dado por $\mathcal{U} = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{K}\}$. Encontrar un subespacio $\mathcal{W}$ de $\mathbb{K}[x]$ tal que $\mathbb{K}[x] = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

    Solucion Sea $\mathcal{W} = \left\{ a_0 + a_1 x + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \sum_{i \in \mathbb{N}_{\geq 6}} a_i x^i : a_i \in \mathbb{K} \right\}$ es facil ver que $\mathbb{K}[x] = \mathcal{U} + \mathcal{W}$ y ademas por igualdad de polinomios se puede ver que $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{0\}$.

16. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y sean W_1, W_2, W_3 subespacios de V. Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

    a) Si $V = W_1 + W_3 = W_2 + W_3$ luego $W_1 = W_2$.

    b) Si $V = W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3$ luego $W_1 = W_2$.

    Soluciones Sean $V = \mathbb{R}^2, W_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}^2\}, W_2 = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}^2\}$ y $W_3 = \{(z,z) : z \in \mathbb{R}^2\}$. Claramente $W_1 \neq W_2$ y ademas:

    a) $W_1 + W_3 = V$ pues,

    - $W_1 + W_3 = \{u + v \in \mathbb{R}^2 : u \in W_1, v \in W_3\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
    - Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ luego para $u = (a-b, 0) \in W_1$ y $v = (b,b) \in W_3$ resulta $(a,b) = u + v \in W_1 + W_3$, es decir $\mathbb{R}^2 \subseteq W_1 + W_3$.

b) Por el item anterior $W_1 + W_3 = V$ y como $W_1 \cap W_3 = \{(0,0)\}$; y por el ejercicio 12 resulta $V = W_1 \oplus W_3$.

17. Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$ matrices tales que $AB = 0$. Demostrar que el espacio columna de B esta contenido en el espacio nulo de A. ¿Que sucede con el espacio fila de A y el espacio nulo de B^t?

Solucion Sean A_i, B_i las columnas de A y B, luego:

- $\mathcal{C}(B) = \{x \in \mathbb{K}^n : x = \alpha_1 B_1 + \ldots + \alpha_p B_p, \alpha_i \in \mathbb{K}\}$
- $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$

Dado $x \in \mathcal{C}(B)$ resulta $x = B\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$, luego $AB\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} = 0$ por lo que $x \in \mathcal{N}(A)$.

Notemos que $AB = 0 = 0^t = (AB)^t = B^t A^t$. Dado $x \in \mathcal{F}(A) \iff x \in \mathcal{C}(A^t)$ es decir $x = A^t\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$, luego $B^t A^t\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix} = 0$ por lo que $x \in \mathcal{N}(B^t)$.

18. Sean W_1, W_2 subespacios de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es subespacio de V si y solo si $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$. Comparar con el ejercicio 6 de la primera parte de la practica.

- $\boxed{\Rightarrow}$: Supongamos lo contrario, es decir que $W_1 \not\subset W_2$ y $W_2 \not\subset W_1$. Esto quiere decir que $\exists u \in W_1 / u \notin W_2$ y $\exists v \in W_2 / u \notin W_1$.

  Consideremos ahora el vector $u + v \in W_1 \cup W_2$, luego $u + v \in W_1$ o $u + v \in W_2$.

  - Si $u + v \in W_1$ entonces por existencia del opuesto y clausura bajo la suma $u + v - u = u \in W_1$. Contradiccion.
  - Analogamente para $u + v \in W_1$.
- $\boxed{\Leftarrow}$: Trivial pues si $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$ entonces $W_1 \cup W_2 = W_1$ o $W_1 \cup W_2 = W_2$.

19. Considere el espacio vectorial V de todas las funciones con dominio y codominio igual a $\mathbb{R}$ (con la suma y producto por escalares usuales).

    Sean $V_i = \{f \in V : f \text{ es una funcion impar}\}$ y $V_p = \{f \in V : f \text{ es una funcion par}\}$. Probar que:

    a) V_i y V_p son subespacios de V.

    b) $V_i + V_p = V$.

    c) $V_i \cap V_p = \{0\}$.

    Solucion COMPLETAR.

20. En el espacio vectorial de las matrices reales de orden 3, describir el subespacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

    Solucion COMPLETAR.

21. Sea $\langle S \rangle$ el subespacio generado por un subconjunto S de V. Demostrar las siguientes propiedades:

    a) Si $S \subset T$, entonces $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$.

    b) $S \subset \langle S \rangle$.

    c) Si $S \subset T$ y T es un subespacio de V, entonces $\langle S \rangle \subset T$. Es decir que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.

    d) S es un subespacio de V si y solo si $\langle S \rangle = S$.

    e) Si $\langle S \rangle = \mathcal{U}$, entonces $\langle \mathcal{U} \rangle = \mathcal{U}$.

    f) Sea $W \subset V$ entonces,

        1) $\langle S \cap W \rangle \subset \langle S \rangle \cap \langle W \rangle$.

        2) $\langle S \cup W \rangle \subset \langle S \rangle + \langle W \rangle$.

    g) Valen las contenciones inversas en los items a y f.

Soluciones

a) Sea $s \in \langle S \rangle$ luego $s = \sum_{v \in S} \alpha_v v$ y como $v \in S \Rightarrow v \in T$ resulta $s \in \langle T \rangle$.

b) Sea $s \in S$ luego $s = 1s + \sum_{v \in S - \{s\}} 0v$ por lo que resulta $s \in \langle S \rangle$.

c) Sea $s \in \langle S \rangle$ luego $s = \sum_{v \in S} \alpha_v v$ y como $v \in S \Rightarrow v \in T$ y T respeta los axiomas de clausura, entonces $s \in T$.

d) COMPLETAR.

e) COMPLETAR.

f) COMPLETAR.

g) COMPLETAR.

22. Describir el menor subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Soluciones

a)
$$\left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{K} \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \alpha, \beta \in \mathbb{K} \right\}$$

b)
$$\left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{K} \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \alpha \in \mathbb{K} \right\}$$

c) COMPLETAR.

23. Sea V el espacio vectorial de los polinomios en $\mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual a 3. Considere los siguientes polinomios:

   - $p_1(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4.$
   - $p_2(x) = 2x^3 + 5x^2 + 11x + 8.$
   - $p_3(x) = x^2 + 5x.$
   - $p_4(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x + 12.$
   - $p_5(x) = x^3 + 3x^2 + 8x + 3.$

   Para $j \in \{4, 5\}$ determinar si $p_j \in \langle\{p_1, p_2, p_3\}\rangle$.

   Soluciones Es facil ver que $p_4 = 3p_1 + 0p_2 + 0p_3$ luego $p_4 \in \langle\{p_1, p_2, p_3\}\rangle$. Nos preguntamos ahora si existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 / p_5 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 11 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 11 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 0 & 3 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

   y como $0\alpha_3 = -1$ concluimos que no existen.

24. Analizar si los siguientes vectores son linealmente independientes:

   a) $(1,1,0,0)\,;(1,0,1,0)\,;(0,0,1,1)\,;(0,1,0,1)$.
   b) $(1,1,0)\,;(1,0,0)\,;(0,1,1)\,;(x,y,z)$ para x, y, z cualesquiera.

   Soluciones

   a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Los vectores no son linealmente independientes pues podemos escribir a 0 como $-1(1,1,0,0)+1(1,0,1,0)-1(0,0,1,1)+1(0,1,0,1)$.

b) Claramente para $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ resulta $0 = 1\,(1, 0, 0) + 0\,(1, 0, 0) + 0\,(0, 1, 1) - 1\,(x, y, z)$, luego no son linealmente independientes.

25. Sea $P = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z - t = 0\}$. Verificar que P es un espacio vectorial y hallar 3 vectores linealmente independientes en P.

Solucion En efecto, sean $u = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in P$, $v = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in P$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Luego:

- Sabemos que $x_1 - 2y_1 + z_1 - t_1 = 0$ y $x_2 - 2y_2 + z_2 - t_2 = 0$ y sumando ambas ecuaciones: $(x_1 + x_2) - 2\,(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) - (t_1 + t_2) = 0$ por lo que $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2) \in P$.
- $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1, \alpha t_1) \in P$ pues multiplicando ambos lados por α obtenemos $(\alpha x_1) - 2\,(\alpha y_1) + (\alpha z_1) - (\alpha t_1) = 0$.
- Sean $a = (1, 0, 0, 1)$, $b = (0, 0, 1, 1)$ y $c = (1, 1, 1, 0)$. Estos vectores son linealmente independientes pues $\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ como puede observarse tras resolverse el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

26. Probar que:

a) Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es linealmente dependiente.

b) Si S es linealmente independiente entonces T es linealmente independiente $\forall T \subseteq S$.

c) Si S es linealmente dependiente entonces T es linealmente dependiente $\forall T \subseteq S$.

Soluciones

a) En efecto $0 = \alpha 0 + \sum_{v \in V-\{0\}} 0v$ para cualquier $\alpha \neq 0$.

b) Supongamos lo contrario, es decir existe $T \subseteq S$ tal que T es linealmente dependiente. Luego existen escalares α_v no todos nulos tales que $0 = \sum_{v \in T} \alpha_v v$. Luego como $v \in T \Rightarrow v \in S$ podemos tomar la combinacion lineal $\sum_{v \in T} \alpha_v v + \sum_{v \in S-T} 0v = 0$ en S. Contradiccion.

c) Sabemos existen escalares α_v no todos nulos tales que $0 = \sum_{v \in T} \alpha_v v$. Luego como $v \in T \Rightarrow v \in S$ podemos tomar la combinacion lineal $\sum_{v \in T} \alpha_v v + \sum_{v \in S-T} 0v = 0$ en S.

27. Si $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente, probar que $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ tambien lo es.

Solucion En efecto $0 = \alpha_1 (v_1 + v_2) + \alpha_2 (v_1 + v_3) + \alpha_3 (v_2 + v_3) = \alpha_1 v_1 + \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_1 + \alpha_2 v_3 + \alpha_3 v_2 + \alpha_3 v_3 = (\alpha_1 + \alpha_2) v_1 + (\alpha_1 + \alpha_3) v_2 + (\alpha_2 + \alpha_3) v_3$ y como V es linealmente independiente resulta $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ y $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$ por lo que resolviendo el sistema obtenemos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Espacios vectoriales. Tercera parte.

1. Encontrar una base y las dimensiones de:

   a) El espacio V de las matrices simetricas de orden 3.

   b) El espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times4}$.

   c) El espacio V de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman 0.

Soluciones

a) Sea

$$B=\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\right\}$$

Para demostrar que es una base debemos ver que B es linealmente independiente y que genera el espacio.

- $\langle B\rangle$ genera el espacio: En efecto sea $v\in V$ luego

$$v=\begin{bmatrix}a&x&z\\x&b&y\\z&y&c\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}+$$
$$+x\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

- B es linealmente independiente: $a\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+$ $c\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}++x\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}a&x&z\\x&b&y\\z&y&c\end{bmatrix}=0\Rightarrow a=b=c=x=y=z=0.$
- $dim\,(V)=|B|=6.$

b) $\mathcal{N}\,(I)=\{x\in\mathbb{R}^4 : Ix=0\}=\{0\}$, luego el espacio no tiene base.

c) Sea $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$. Para demostrar que es una base debemos ver que B es linealmente independiente y que genera el espacio.

- $\langle B\rangle$ genera el espacio: Sea $v \in V/v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ luego $a = -b - c - d$

  por lo que $v = \begin{bmatrix} -b-c-d \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = -b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - d \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

- B es linealmente independiente: $a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} =$

  $\begin{bmatrix} a+b+c \\ -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -c = -b = -a = 0.$

- $dim\,(V) = |B| = 3.$

2. Sea $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base para un espacio vectorial V.

   a) Demostrar que $B_2 = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ tambien es una base.

   b) Hallar la matriz de cambio de base $A/\,[v]_{B_1} = A\,[v]_{B_2}$.

Soluciones

a) Notese que $dim\,(V) = |B_1| = |B_2| = 3$, luego nos bastara con ver que B_2 es linealmente independiente. En efecto:

$$\alpha_1 (v_1) + \alpha_2 (v_1 + v_2) + \alpha_3 (v_1 + v_2 + v_3) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\, v_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)\, v_2 + (\alpha_3)\, v_3$$

y como B_1 es linealmente independiente debe ser $0 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_3$. Resolviendo el sistema obtenemos: $\alpha_i = 0$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Sea $V = \left\{ \sum_{i=0}^{2} a_i x^i / a_i \in \mathbb{R} \right\}$ y $B_1 = \{1, x, x^2\}$ base estandar de V.

   a) Probar que $B_2 = \left\{x-1, 1, (x-1)^2\right\}$ es otra base de V.

   b) Hallar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

   c) Utilizar lo obtenido en el item anterior y determinar $[p]_{B_2}$ donde $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$. ¿Cuales son las coordenadas de p en la base $B_3 = \left\{1, (x-1)^2, x-1\right\}$?

Soluciones

   a) COMPLETAR.

   b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

4. Hallar la matriz de cambio de base de:

   a) La base estandar de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a la base:

$$B' = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{v_4} \right\}$$

   Determinar $[A]_{B'}$ para $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   b) La base $\{1, x, -1 + 2x^2, -3x + 4x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ a la base $\left\{1, -\frac{1}{2} + x, -x + x^2, \frac{1}{4} - \frac{3}{2}x^2 + x^3\right\}$.

Soluciones

a) Asumiendo $B = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{b_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{b_4} \right\}$ como base estandar, notemos que $b_1 = 0v_1 - 1v_2 + 0v_3 + 0v_4$, $b_2 = 1v_1 + 1v_2 + 0v_3 + 0v_4$, $b_3 = 0v_1 - 2v_2 - 1v_3 + 0v_4$ y $b_4 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{5}{4}v_2 + \frac{3}{4}v_3 + \frac{1}{4}v_4$. Luego la matriz de cambio de base es $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

b) COMPLETAR.

5. En el espacio $\mathbb{R}^2$ se considera la base estandar B. Si $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, ¿existe una base B' tal que A sea la matriz de cambio de base de B a B'? De existir, hallar dicha base.

Solucion En efecto, dicha base es $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.