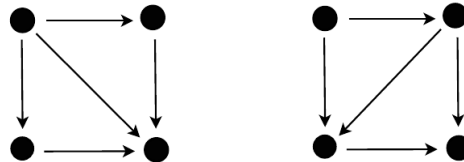


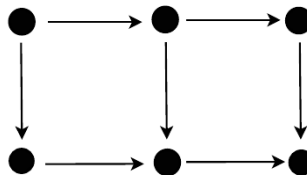


Práctica 4 Teoría de categorías

1. Considerar los siguientes diagramas. En ambos casos, probar que si los dos triángulos conmutan, también conmuta el cuadrado.



2. Sea X un conjunto ordenado. Mostrar que X puede considerarse como una categoría.
3. Verificar que un monoide M define una categoría con un único objeto cuyas flechas son los elementos de M .
4. Dada una categoría \mathcal{C} , podemos definir \mathcal{C}^{op} con los mismos objetos que \mathcal{C} pero las flechas con sentido inverso, es decir, $ob(\mathcal{C}^{op}) = ob(\mathcal{C})$ y $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Verificar que \mathcal{C}^{op} es una categoría.
5. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías. Se define $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ cuyos objetos son pares ordenados de la forma (C, D) con $C \in ob(\mathcal{C})$ y $D \in ob(\mathcal{D})$ y $Hom_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C, D), (C', D')) = Hom_{\mathcal{C}}(C, C') \times Hom_{\mathcal{D}}(D, D')$. Verificar que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una categoría.
6. Definamos C^{\rightarrow} como la categoría de las flechas de una categoría C , es decir, los objetos de C^{\rightarrow} son las flechas de C . Una flecha de C^{\rightarrow} de $f: A \rightarrow B$ en $g: D \rightarrow E$ es un par (a, b) de flechas de C tales $g \circ a = b \circ f$.
- a) Expresar las flechas de C^{\rightarrow} en términos de diagramas conmutativos.
- b) Probar que si en el diagrama los cuadrados conmutan, entonces también conmuta el rectángulo exterior.



- c) Utilizar b) para definir la composición en C^{\rightarrow} .
- d) Verificar que C^{\rightarrow} es una categoría.
7. Sean C una categoría y A un objeto de C . Definimos $C|A$ como la categoría cuyos objetos son las flechas f de C tales que $cod(f) = A$. Una flecha g en $C|A$ de $f: X \rightarrow A$ en $h: Y \rightarrow A$ es una flecha $g: X \rightarrow Y$ de C tal que $f = h \circ g$.
- a) Expresar las flechas de $C|A$ en términos de diagramas conmutativos.

- b) Verificar que $C|A$ es una categoría.
 - c) Si P es la categoría definida por un conjunto ordenado y $x \in P$, determinar $P|x$.
8. Probar que en **Set** los monomorfismos (epimorfismos) son exactamente las funciones inyectivas (resp. sobreyectivas).
9. Sean C una categoría y f, g flechas de C . Probar que
- a) Si f y g son monomorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.
 - b) Si $g \circ f$ es un monomorfismo, f también lo es.
 - c) Si f y g son epimorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.
 - d) Si $g \circ f$ es un epimorfismo, g también lo es.
 - e) Si f^{-1} es la inversa de f y g^{-1} es la inversa de g , entonces $f^{-1} \circ g^{-1}$ es la inversa de $g \circ f$.
10. Mostrar que una flecha de una categoría puede ser mono y epimorfismo y no isomorfismo.
11. Mostrar que una flecha de una categoría concreta puede ser epimorfismo y no sobreyectiva.
12. Mostrar que dos objetos terminales en una categoría son isomorfos. Por dualidad, ¿qué se puede decir de los objetos iniciales?
13. ¿Cuáles son los objetos iniciales y terminales en **Set** \times **Set**? ¿Cuáles en **Set** $^{\rightarrow}$?
14. Dar una categoría sin objetos iniciales. Dar una sin objetos finales. Dar una donde los objetos finales e iniciales coincidan.
15. Sea \mathcal{C} una categoría. Probar que si dos objetos admiten producto (coproducto), éste es único salvo isomorfismo.
16. Determinar objetos iniciales, objetos terminales, productos y coproductos en las siguientes categorías: un Poset P visto como categoría, **Poset**, **Set**, **Mon** y **Grp**.
17. Dar una categoría donde algún par de objetos carecen de producto.
18. Sea \mathcal{C} una categoría y sean A, B, C, D objetos de \mathcal{C} . Mostrar que en caso de existir $A \times B$, $C \times D$ y dos morfismos $f : A \rightarrow C$ y $g : B \rightarrow D$, entonces puede definirse un morfismo $f \times g : A \times B \rightarrow C \times D$.
19. Mostrar las siguientes identidades:
- a) $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id$
 - b) $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$
 - c) $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle$
 - d) $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k)$
 - e) $\langle [f, g], [h, k] \rangle = [\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle]$
20. Probar los siguientes isomorfismos:
- a) $A \times B \cong B \times A$

b) $A \times 1 \cong A$

c) $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$

¿Cuáles son los enunciados duales?

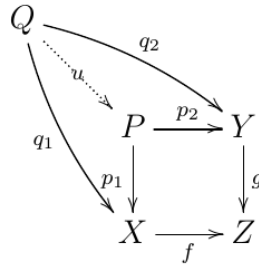
21. Probar que si dos morfismos $f, g: X \rightarrow Y$ admiten ecualizador (coecualizador), éste es único salvo isomorfismo.

22. Encontrar el ecualizador en **Set**.

23. Sean $f, g: X \rightarrow Y$ dos morfismos en **Set**. Probar que el coecualizador de f y g es el cociente de Y por la relación de equivalencia $y \equiv z$ si y sólo si existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ y $z = g(x)$ o bien $y = g(x)$ y $z = f(x)$.

24. Probar que en una categoría \mathcal{C} todo ecualizador e es monomorfismo. Mostrar que si además e es epimorfismo, entonces se tiene un isomorfismo.

25. El pullback de dos morfismos $f: X \rightarrow Z$ y $g: Y \rightarrow Z$ consiste en un objeto P junto con dos morfismos $p_1: P \rightarrow X$, $p_2: P \rightarrow Y$ tal que $f \circ p_1 = g \circ p_2$, y además si existe otro objeto Q con dos morfismos $q_1: Q \rightarrow X$, $q_2: Q \rightarrow Y$ tal que $f \circ q_1 = g \circ q_2$, entonces existe un único morfismo $u: Q \rightarrow P$ tal que $p_1 \circ u = q_1$ y $p_2 \circ u = q_2$. A continuación, un diagrama que muestra la situación:



Probar que el pullback de dos morfismos, si existe, es único salvo isomorfismo.

26. Encontrar el pull-back en **Set**.

27. Sea \mathcal{C} una categoría con exponenciales,

a) Probar $\text{curry}(\text{eval}_{A,B}) = \text{id}_{B^A}$.

b) Dado un morfismo $f: B \rightarrow C$, construir un morfismo $B^A \rightarrow C^A$.

c) Dado un morfismo $f: A \rightarrow C^B$, construir un morfismo $\text{uncurry}(f): A \times B \rightarrow C$.

d) Probar $\text{uncurry}(\text{curry}(f)) = f$ y $\text{curry}(\text{uncurry}(f)) = f$.

28. Sea \mathcal{C} una CCC y sean A, B objetos de \mathcal{C} . Probar:

a) B^A es único salvo isomorfismo.

b) $1^A \cong 1$.

c) $B^1 \cong B$.

29. Hallar los exponenciales en **Set**.

30. Demostrar que un álgebra de Boole es una CCC.

31. En una categoría con coproductos y objeto final, podemos definir los booleanos como el objeto $Bool = 1 + 1$. En este caso, a i_1 le llamamos *true* y a i_2 le llamamos *false*. Escribir un morfismo $not : Bool \rightarrow Bool$ tal que

$$not \circ true = false$$

$$not \circ false = true$$

Suponiendo que la categoría tiene exponenciales, ¿puede escribir un morfismo $and : Bool \times Bool \rightarrow Bool$ que se comporte como la conjunción?