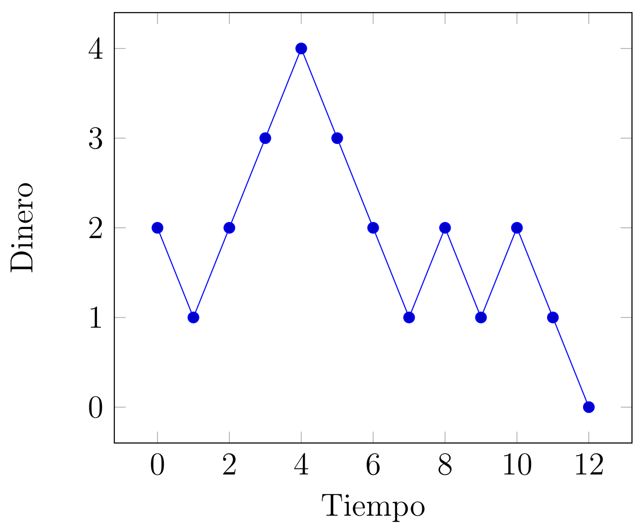
1. En cada ronda de un juego, un jugador gana \$1 con probabilidad p, o pierde \$1 con probabilidad $1-p$. El jugador comienza con $\$k$. El juego se detiene cuando el jugador pierde todo su dinero o gana un total de $\$n$, donde $n > k$. Las fortunas sucesivas del jugador forman una cadena de Markov en $\{0, \ldots, n\}$ con $X_0 = k$.

   a) Simular la ruina del jugador para una inversión inicial de \$2, jugando un juego justo.

   Solución

```
k = 2; n = 5; p = 0.5; q = 1 - p
gamblersruin <- function() {
  sim = k
  while (sum(sim) > 0 && sum(sim) < n + k) {
    if (rbinom(1, 1, p)) sim = append(sim, 1)
    else sim = append(sim, -1)
  }
  return (sim)
}
gamblersruin()
```



   b) Estimar la probabilidad de que el jugador llegue a la ruina antes de ganar \$5.

Solución Observemos que `sum(gamblersruin())` es 0 si llegó a la ruina, o 7 en caso contrario. Luego `sum(gamblersruin())/(n+k)` será 1 en caso de ganar. Podemos estimar la probabilidad simulando el proceso una gran cantidad de veces de la siguiente manera:

```
1 - mean(replicate(1000000, sum(gamblersruin())/(n+k)))
```

$$\boxed{0,714185}$$

c) Construir la matriz de transición para la cadena de Markov asociada. Estimar la probabilidad en a) calculando potencias altas de la matriz.

Solución

$$P = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

```
P <- matrix(c(1,0,0,0,0,0,0,0,
              q,0,p,0,0,0,0,0,
              0,q,0,p,0,0,0,0,
              0,0,q,0,p,0,0,0,
              0,0,0,q,0,p,0,0,
              0,0,0,0,q,0,p,0,
              0,0,0,0,0,q,0,p,
              0,0,0,0,0,0,0,1),
            nrow = 8, byrow = TRUE)

library(expm)
c(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) %*% (P %^% 10)
c(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) %*% (P %^% 100)
c(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) %*% (P %^% 1000)
```

$$\boxed{\begin{pmatrix}\mathbf{0,5488281} & 0 & 0,1279297 & 0 & 0,1513672 & 0 & 0,06445312 & 0,1074219\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\mathbf{0,714272} & 0 & \approx 0 & 0 & \approx 0 & 0 & \approx 0 & 0,2856991\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\mathbf{0,7142857} & 0 & \approx 0 & 0 & \approx 0 & 0 & \approx 0 & 0,2857143\end{pmatrix}}$$

d) Comparar los resultados con la probabilidad exacta.

$$\frac{n}{n+k} = \frac{5}{5+2} = \frac{5}{7} = 0,7142857$$

Podemos observar que para potencias altas de la matriz y para un gran numero de simulaciones, los resultados se aproximan a la probabilidad exacta.

2. En aplicaciones de seguridad informática, un *honeypot* (o sistema trampa) es una herramienta dispuesta en una red o sistema informático para ser el objetivo de un posible ataque informático, y así poder detectarlo y obtener información del mismo y del atacante. Los datos del *honeypot* son estudiados utilizando cadenas de Markov.

   Se obtienen datos desde una base de datos central y se observan ataques contra cuatro puertos de computadoras -80, 135, 139 y 445- durante un año. Los estados de la cadena de Markov son los cuatro puertos y se incluye un nodo indicando que ningún puerto está siendo atacado (NA). Los datos se monitorean semanalmente y el puerto más atacado durante la semana es guardado. La matriz de transición para la cadena estimada para los ataques semanales es la siguiente:

$$\begin{array}{c} 80 \\ 135 \\ 139 \\ 145 \\ NA \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8/13 & 3/13 & 1/13 & 1/13 \\ 1/16 & 3/16 & 3/8 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/11 & 4/11 & 5/11 & 1/11 \\ 0 & 1/8 & 1/2 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 80 & \;135 & \;139 & \;145 & \;NA \end{matrix} \end{array}$$

   La distribución inicial es $a = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

   a) Después de dos semanas, ¿cúales son los puertos con más y menos probabilidad de ser atacados?

Solución

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 8/13 & 3/13 & 1/13 & 1/13\\ 1/16 & 3/16 & 3/8 & 1/4 & 1/8\\ 0 & 1/11 & 4/11 & 5/11 & 1/11\\ 0 & 1/8 & 1/2 & 1/8 & 1/4\end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{208} & \frac{13045}{29744} & \frac{4387}{14872} & \frac{2225}{14872} & \frac{1523}{14872}\\ \frac{3}{128} & \frac{4101}{18304} & \frac{3087}{9152} & \frac{2173}{9152} & \frac{1627}{9152}\\ \frac{1}{44} & \frac{2225}{12584} & \frac{579}{1573} & \frac{3975}{12584} & \frac{733}{6292}\\ \frac{1}{32} & \frac{61}{286} & \frac{885}{2288} & \frac{1019}{4576} & \frac{167}{1144}\end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix}\mathbf{\frac{1}{32}} & \frac{61}{286} & \mathbf{\frac{885}{2288}} & \frac{1019}{4576} & \frac{167}{1144}\end{pmatrix}}$$

El puerto con mas probabilidad de ser atacado es el 139 (con probabilidad aproximada $0,3868$) y el de menor probabilidad es el 80 (con probabilidad $0,03125$).

b) Encontrar la distribución límite (si es que existe) de los puertos atacados. Justificar.

Solución

```
states = c("80", "135", "139", "145", "NA")
P <- matrix(c(0,    0,    0,    0,    1,
              0,    8/13, 3/13, 1/13, 1/13,
              1/16, 3/16, 3/8,  1/4,  1/8,
              0,    1/11, 4/11, 5/11, 1/11,
              0,    1/8,  1/2,  1/8,  1/4),
            nrow = 5, byrow = TRUE)

library(markovchain)
P <- new("markovchain", states, TRUE, P)
is.irreducible(P) && period(P) == 1
```

Como la cadena de Markov es irreducible y aperiodica entonces `steadyStates(P)` nos indica la distribución límite:

$$\boxed{\begin{pmatrix}0,021 & 0,266 & 0,343 & 0,227 & 0,140\end{pmatrix}}$$

3. Dans et al. (2012) estudian el comportamiento de delfines en presencia deembarcaciones turísticas en la Patagonia Argentina. Para ello postulan un modelo de cadena de Markov, con espacio de estados conformado por las 5 actividades primarias de los delfines: socializar (s), viajar (t), merodear (m), alimentarse (f), descansar (r), obteniendo la siguiente matriz de transición:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} s \\ t \\ m \\ f \\ r \end{array} & \begin{pmatrix} 0,84 & 0,11 & 0,01 & 0,04 & 0,00 \\ 0,03 & 0,80 & 0,04 & 0,10 & 0,03 \\ 0,01 & 0,15 & 0,70 & 0,07 & 0,07 \\ 0,03 & 0,19 & 0,02 & 0,75 & 0,01 \\ 0,03 & 0,09 & 0,05 & 0,00 & 0,83 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccccc} s & t & m & f & r \end{array} \end{array}$$

   a) Clasificar los estados.

   Solución

```r
states = c("s", "t", "m", "f", "r")
P <- matrix(c(0.84, 0.11, 0.01, 0.04, 0.00,
              0.03, 0.80, 0.04, 0.10, 0.03,
              0.01, 0.15, 0.70, 0.07, 0.07,
              0.03, 0.19, 0.02, 0.75, 0.01,
              0.03, 0.09, 0.05, 0.00, 0.83),
            nrow = 5, byrow = TRUE)

library(markovchain)
P <- new("markovchain", states, TRUE, P)
summary(P)
period(P)
```

   - Estados recurrentes: $\{s, t, m, f, r\}$.
   - Estados transitorios: $\emptyset$.
   - Estados absorventes: $\emptyset$.
   - Cadena irreducible aperiódica.

b) Estimar la distribución a largo plazo de la actividad de los delfines.

Solución

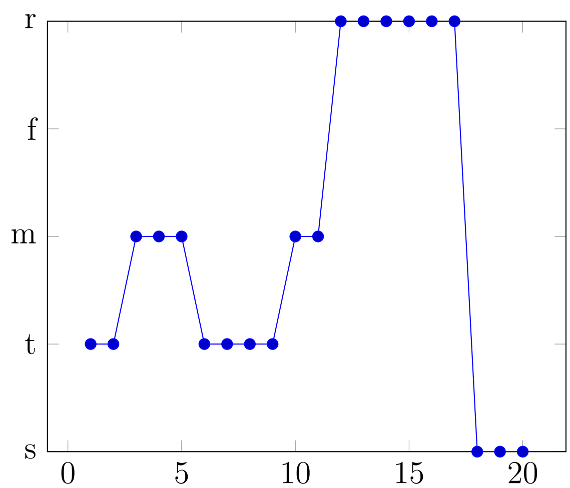
```
steadyStates(P)
```

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0,147 & 0,414 & 0,095 & 0,216 & 0,125 \end{pmatrix}}$$

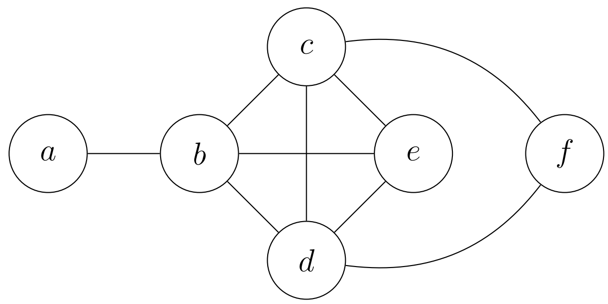
c) Simular y graficar una trayectoria de dicho proceso.

Solución

```
rmarkovchain(19, P, "t")
```



4. Simular 50 pasos de caminata aleatoria en el grafo correspondiente a la siguiente figura:



   a) Repetir la simulación 10 veces. ¿Cuántas terminaron en el vértice c?

   Solución

```
states = c("a", "b", "c", "d", "e", "f")
P <- matrix(c(0,   1,   0,   0,   0,   0,
              1/4, 0,   1/4, 1/4, 1/4, 0,
              0,   1/4, 0,   1/4, 1/4, 1/4,
              0,   1/4, 1/4, 0,   1/4, 1/4,
              0,   1/3, 1/3, 1/3, 0,   0,
              0,   0,   1/2, 1/2, 0,   0)
            , nrow = 6, byrow = TRUE)

library(markovchain)
P <- new("markovchain", states, TRUE, P)

steps = 50; sims = 10; count = 0
walks <- replicate(sims, rmarkovchain(steps, P, "a"))
for (i in 1:sims) {
    if (walks[steps, i] == "c") count = count + 1
}
count
```

   Terminaron en «c», tres de diez simulaciones.

   b) Comparar con el resultado exacto de la probabilidad a largo plazo de visitar a c.

Solución

```
steadyStates(P)
```

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0,555 & 0,222 & \mathbf{0,222} & 0,222 & 0,166 & 0,111 \end{pmatrix}}$$

A medida que aumentemos el numero de simulaciones, mas se aproximará el resultado a $0,222$.

5. Hay k canciones en el reproductor de música de María. El reproductor está seteado en un modo *shuffle*, en el cual las canciones se eligen aleatoriamente de forma uniforme con reemplazo; por lo tanto las repeticiones de canciones es posible.

   Sea X_n el número de canciones no repetidas que han sido escuchadas después de la n-ésima reproducción.

   a) Mostrar que $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cadena de Markov y determinar la matriz de transición.

   Solución

   - $T = \mathbb{N}$ es infinito numerable.
   - $E = \{0, \ldots, k\}$ es discreto.
   - Sean $B_0 = 0$ y $B_n = \begin{cases} 1 & \text{Si la n-esima cancion no es repetida} \\ 0 & \text{Si la n-esima cancion es repetida} \end{cases}$,

   luego $X_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} B_i$. Ahora:

$$\boxed{P\left(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i\right)} =$$

$$= P\left(X_n + B_{n+1} = j | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i\right) =$$

$$= P\left(i + B_{n+1} = j | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i\right) =$$

$$= P\left(B_{n+1} = j - i | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i\right) = P\left(B_{n+1} = j - i\right) =$$

$$= \frac{P\left(B_{n+1} = j - i\right) P\left(X_n = i\right)}{P\left(X_n = i\right)} = \frac{P\left(B_{n+1} = j - i, X_n = i\right)}{P\left(X_n = i\right)} =$$

$$= \frac{P\left(X_{n+1} = j, X_n = i\right)}{P\left(X_n = i\right)} = \boxed{P\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right)}$$

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ k-2 \\ k-1 \\ k \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & \frac{k-1}{k} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{k} & \frac{k-2}{k} & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \frac{k-2}{k} & \frac{2}{k} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{k-1}{k} & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si María tiene cuatro canciones en su reproductor de música, encontrar la probabilidad de que todas las canciones sean escuchadas después de 6 reproducciones.

Solución

```
k = 4; states = c("0", 1:4)
P <- matrix(c(0, 1,   0,       0,       0,
              0, 1/k, (k-1)/k, 0,       0,
              0, 0,   2/k,     (k-2)/k, 0,
              0, 0,   0,       3/k,     (k-3)/4,
              0, 0,   0,       0,       1),
            nrow = k+1, byrow = TRUE)

library(expm)
c(1, 0, 0, 0, 0) %*% (P %^% 6)
```

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0,0009 & 0,0908 & 0,5273 & \mathbf{0,3808} \end{pmatrix}}$$

6. Se tiran 5 dados y se ponen a un lado aquellos que mostraron un 6. Los restantes se lanzan nuevamente y se repite el procedimiento, poniendo a un lado aquellos dados que muestran un 6, y así sucesivamente.

   Sea X_n el número de dados en los que salió 6 después de n tiradas.

a) Describir la matriz de transición P para la cadena de Markov.

Solución Definimos Y_e: «Numero de dados que muestran un 6, de un total de e», luego $Y_e \sim Bi\left(e, \frac{1}{6}\right)$. Sea $p_e(y) = P(Y_e = y)$, entonces:

$$
\begin{array}{c c}
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
p_5(0) & p_5(1) & p_5(2) & p_5(3) & p_5(4) & p_5(5) \\
0 & p_4(0) & p_4(1) & p_4(2) & p_4(3) & p_4(4) \\
0 & 0 & p_3(0) & p_3(1) & p_3(2) & p_3(3) \\
0 & 0 & 0 & p_2(0) & p_2(1) & p_2(2) \\
0 & 0 & 0 & 0 & p_1(0) & p_1(1) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \approx \\
& \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}
\end{array}
$$

$$
\approx \begin{pmatrix}
0,4018 & 0,4018 & 0,1607 & 0,0321 & 0,0032 & 0,0001 \\
0 & 0,4822 & 0,3858 & 0,1157 & 0,0154 & 0,0007 \\
0 & 0 & 0,5787 & 0,3472 & 0,0694 & 0,0046 \\
0 & 0 & 0 & 0,6944 & 0,2777 & 0,0277 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0,8333 & 0,1666 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

b) Encontrar la probabilidad de obtener todos 6 en tres jugadas.

Solución

```
p = 1/6
P <- matrix(c(
    dbinom(0,5,p), dbinom(1,5,p), dbinom(2,5,p), dbinom(3,5,p), dbinom(4,5,p), dbinom(5,5,p),
    0,             dbinom(0,4,p), dbinom(1,4,p), dbinom(2,4,p), dbinom(3,4,p), dbinom(4,4,p),
    0,             0,             dbinom(0,3,p), dbinom(1,3,p), dbinom(2,3,p), dbinom(3,3,p),
    0,             0,             0,             dbinom(0,2,p), dbinom(1,2,p), dbinom(2,2,p),
    0,             0,             0,             0,             dbinom(0,1,p), dbinom(1,1,p),
    0,             0,             0,             0,             0,             1),
    nrow = 6, byrow = TRUE)

library(expm)
c(1, 0, 0, 0, 0, 0) %*% (P %^% 3)
```

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0,06490547 & 0,2362559 & 0,3439886 & 0,2504237 & 0,09115423 & 0,\mathbf{01327206} \end{pmatrix}}$$

c) ¿Cómo se espera que sea P^{100}? Confirmar la respuesta utilizando R.

Solución Naturalmente, despues de muchas tiradas esperamos haber retirado todos los dados, es decir:

$$P^{100} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
P %^% 100
```

$$\boxed{\begin{pmatrix} \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & 0,9999999 \\ 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & 1 \\ 0 & 0 & \approx 0 & \approx 0 & \approx 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \approx 0 & \approx 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \approx 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

7. Considerar la caminata aleatoria en $\{0, \ldots, k\}$, la cual se mueve a la izquierda o a la derecha con probabilidades p y q, respectivamente. Si el proceso está en 0, transiciona a 1 en el siguiente paso. Si el proceso está en k, transiciona a $k-1$ en el siguiente paso. Esto se llama *caminata aleatoria con límites reflectantes.*

   Asumir que $k = 3$, $q = \frac{1}{4}$, $p = \frac{3}{4}$ y la distribucion inicial es uniforme.

   a) Calcular la matriz de transición.

   Solución

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 \\ 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \end{array}$$

b) Encontrar $P(X_7 = 1 | X_0 = 3, X_2 = 2, X_4 = 2)$.

Solución Observemos que si $X_0 = 3$ entonces $X_1 = 2$ (pues $P(X_1 = 2|X_0 = 3) = 1$), luego $P(X_2 = 2|X_1 = 2) = 0$ y en consecuencia $P(X_0 = 3, X_2 = 2, X_4 = 2) = 0$. Puesto que el suceso condicionante tiene probabilida 0, resulta:

$$P(X_7 = 1|X_0 = 3, X_2 = 2, X_4 = 2) = 0$$

c) Encontrar $P(X_3 = 1, X_5 = 3)$.

Solución

- $\pi_0 P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{15}{16} & 0 & \frac{1}{16} \\ \frac{45}{64} & 0 & \frac{19}{64} & 0 \\ 0 & \frac{57}{64} & 0 & \frac{7}{64} \\ \frac{9}{16} & 0 & \frac{7}{16} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{81}{256} & \frac{117}{256} & \frac{47}{256} & \frac{11}{256} \end{pmatrix}$
- $P(X_3 = 1, X_5 = 3) = (\pi_0 P^3)(1) P^2(1,3) = \frac{117}{256} \sum_{k \in E} P(1,k) P(k,3) =$
  $= \frac{117}{256} [P(1,0) P(0,3) + P(1,1) P(1,3) + P(1,2) P(2,3) + P(1,3) P(3,3)] =$
  $= \frac{117}{256} [p \cdot 0 + 0 \cdot 0 + q \cdot q + 0 \cdot 0] = \frac{117}{256} q^2 = \frac{117}{256} \frac{1}{16} = \boxed{\frac{117}{4096}} \approx 0,0285$

8. Los administradores de datos de una universidad desarrollaron un modelo markoviano para simular los índices de graduación en la institución. Los estudiantes pueden ab andonar, repetir un año o pasar al año siguiente. Todos tienen un 3 % de chance de repetir el año. Aquellos que se encuentran en primer o segundo año, tienen una chance del 6 % de abandonar. Para estudiantes de tercer y cuarto año, el índice de abandono es de 4 %.

   a) Clasificar los estados.

   Solución

   - Estados recurrentes: $\emptyset$.
   - Estados transitorios: $\{1, 2, 3, 4\}$.
   - Estados absorventes: $\{\boxslash, \boxtimes\}$.

b) Establecer la matriz de transición de un paso.

Solución

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \text{☑} \\ \boxtimes \end{array} &
\begin{pmatrix}
\frac{3}{100} & \frac{91}{100} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{100} \\
0 & \frac{3}{100} & \frac{91}{100} & 0 & 0 & \frac{6}{100} \\
0 & 0 & \frac{3}{100} & \frac{93}{100} & 0 & \frac{4}{100} \\
0 & 0 & 0 & \frac{3}{100} & \frac{93}{100} & \frac{4}{100} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \\
& \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \text{☑} & \boxtimes \end{array}
\end{array}
$$

c) Determinar el número promedio de años que un estudiante que ingresa en primer año permanece en la institución antes de abandonar o recibirse.

Solución

```
states = c("1", 2:4, "Recibido", "Abandono")
P <- matrix(c(3/100, 91/100, 0,      0,      0,      6/100,
              0,     3/100,  91/100, 0,      0,      6/100,
              0,     0,      3/100,  93/100, 0,      4/100,
              0,     0,      0,      3/100,  93/100, 4/100,
              0,     0,      0,      0,      1,      0,
              0,     0,      0,      0,      0,      1),
            nrow = 6, byrow = TRUE)

library(markovchain)
P <- new("markovchain", states, TRUE, P)
```

9. El modelo Wright-Fisher describe la evolución de una población fija de k genes. Los genes pueden ser de uno de dos tipos, llamados alelos: A o a.

   Sea X_n el número de alelos A en la población en el momento n, donde el tiempo se mide por generaciones. Bajo este modelo, el número de alelos A en el momento $n+1$ se obtiene muestreando con reemplazo desde la población de genes en el momento n. Por lo tanto, habiendo i alelos de tipo A en el momento n, el número de alelos A en el momento $n+1$ tiene una distribución binomial con parámetros k y $p = \frac{i}{k}$.

Esto resulta en una cadena de Markov con matriz de transición definida por:

$$P_{ij} = \binom{k}{j} \left(\frac{i}{k}\right)^j \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-j}$$

para $0 \leq i, j \leq k$.

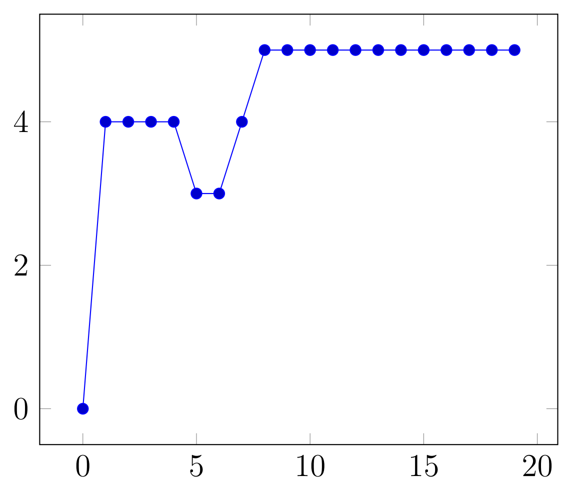
a) Simular este proceso para algún valor de k.

Solución

```
k = 5; states = c("0", 1:k);
P <- matrix(ncol = k+1, nrow = k+1)

for (i in 0:k) {
  for (j in 0:k) {
    P[i+1,j+1] = dbinom(j,k,i/k)
  }
}

library(markovchain)
P <- new("markovchain", states, TRUE, P)
rmarkovchain(19, P, "0")
```



b) Observar que valor toma P_{00} y P_{kk}.

Solución $P_{00} = 1$, $P_{kk} = 1$.

c) Cuando la cadena progresa, la población, en algún momento, termina con todos alelos a (estado 0) o todos alelos A (estado k). Determinar cuál es la probabilidad de que la población evolucione al estado k.

Solución Observemos que la cadena no es irreducible pues los estados 0 y k son absorventes por el punto anterior, por lo tanto no existe distribución límite.

Aproximaremos entonces la probabilidad para cada estado inicial, a partir de potencias altas de la matriz de transición:

```
(P^10000)[,k+1]
```

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,8 & 1 \end{pmatrix}}$$

10. El día de la elección, las personas participaron en un centro de votaciones de acuerdo con un proceso de Poisson. El promedio, 100 votantes llegan cada hora.

    a) Si 150 personas arribaron durante la primer hora, ¿qué probabilidad hay de que al menos 350 votantes arriban antes de las 3 horas?

    Solución Sea N_t: «Cantidad de personas que arribaron en el intervalo $[0, t)$», luego $N_t \sim Po\,(100)$.

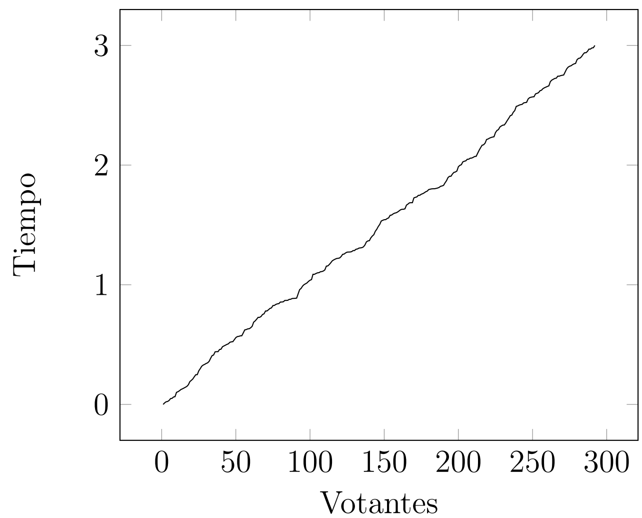
    $$P\,(N_3 \geq 350 | N_1 = 150) = P\,(N_3 - N_1 \geq 350 - 150) =$$
    $$P\,(N_2 \geq 200) \approx^{1} \boxed{0.5094}$$

    b) Simular dicho proceso y graficar una trayectoria.

[1] https://keisan.casio.com/exec/system/1180573179

Solución

```
lambda = 100; t = 3
votantes = rpois(1, t * lambda)
tiempos = c(0, runif(votantes, 0, t))
plot(sort(tiempos))
```

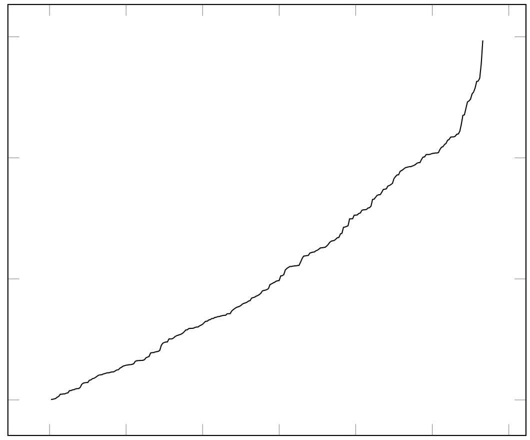


c) Considerar la variable aleatoria: tiempo entre arribos. Obtener los valores a través de simulación y graficar. Determinar qué distribución tiene el tiempo entre arribos de votantes.

Solución

```
for (i in 1:length(tiempos)-1) {
  tiempos [i] = abs(tiempos[i + 1] - tiempos[i])
}

plot(sort(tiempos))
```



De lo observado en la gráfica inferimos que la variable tiene distribución exponencial.