Trabajo Práctico
Fractal

R-222 Arquitectura del Computador

Introducción

El objetivo de este trabajo es que el alumno aprenda los detalles del uso del coprocesador de coma flotante de x86 y realize una pequeña aplicación que utilize sus instrucciones para escribir un BMP con una imágen fractal generada a partir de ecuaciones iteradas.

Fractales y Ecuaciones iteradas

Muchos sistemas físicos presentan comportamientos similares a diferentes escalas de observación. En los años 60, el matemático Benoît Mandelbrot utilizó el adjetivo *fractal* para describir objetos cuya geometría no puede ser caracterizada por una dimensión entera. Una de los principales atractivos de la *geometría fractal* es su habilidad para describir la forma irregular (*rugosidad*) de los objetos presentes en la naturaleza, habilidad que no posee la geometría euclidiana.

Los fractales son considerados objetos *autosimilares*. Esto quiere decir que el objeto entero es similar a una de sus partes, si se aumenta la escala de la parte. La autosimilaridad es definida como una propiedad donde un subconjunto del objeto, al ser magnificado al tamaño del objeto, es indistinguible de este último. Formalmente, un conjunto fractal es un conjunto para el cual su dimensión de Hausdorff es mayor que su dimensión Topológica [1, 2].

Las *ecuaciones iteradas* (IFS: iterated function systems) proveen un método para obtener objetos autosimilares por construcción. Las mismas pueden pensarse como una máquina (MRCM: Multiple Reduction Copy Machine) que se realimenta con su salida. Por medio de un conjunto de ecuaciones, un objeto inicial es transformado múltiples veces, produciendo una salida, la cual será la entrada a una nueva iteración de la máquina. En la Figura 1 pueden observarse las primeras iteraciones de una máquina con estas características. En la Figura, distintas imágenes sufren las mismas transformaciones, expresadas por medio de ecuaciones de traslación, escala y rotación sobre la imagen original. Puede observarse que las imágenes resultado de este proceso son muy similares luego de pocas iteraciones. La imagen resultante es llamada *atractor* (debido a que dada cualquier imagen de entrada, el resultado es el mismo), y sólo depende de las ecuaciones que producen las transformaciones [3].

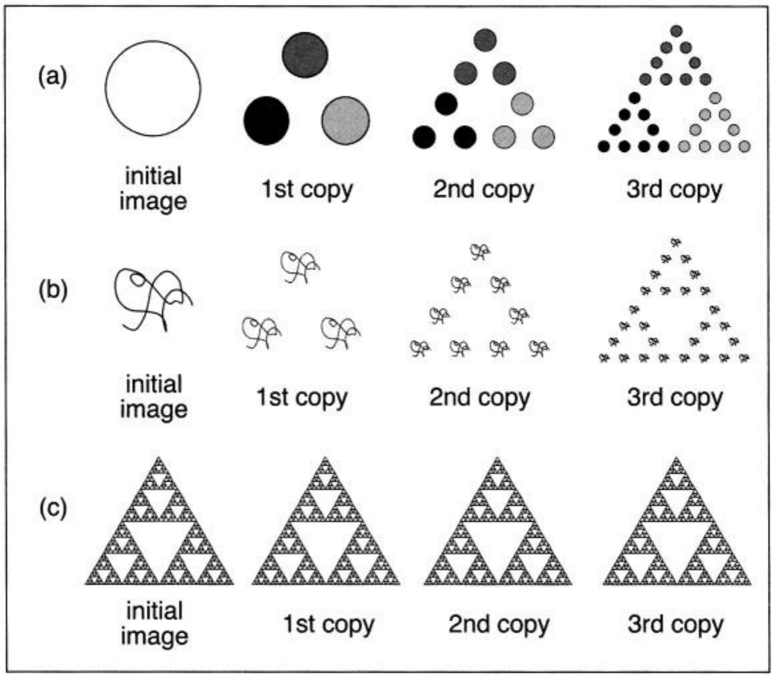

Figura 1: Iteraciones de una máquina MRCM

Metodología

Para realizar el trabajo el alumno debe resolver los siguientes puntos:

- Diseñar e implementar una manera de leer ecuaciones iteradas. Un ejemplo del formato para leerlas es:

```
3 180000
0.85 0.04 0 -0.04 0.85 1.6 0
0.2 -0.26 0 0.23 0.22 1.6 0
-0.15 0.28 0 0.26 0.24 0.44 0
```

  Los primeros dos números representan la cantidad de ecuaciones iteradas y la cantidad de iteraciones a realizar. Luego cada linea tiene los coeficientes de cada ecuación. Por ejemplo, la primera ecuación es la siguiente:

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & -0{,}4 \\ 0{,}04 & 0{,}85 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \end{bmatrix}$$

El siguiente algoritmo utiliza un sistema de ecuaciones iteradas para producir una imágen fractal:

1. Empezar con un punto (x, y) aleatorio
2. Seleccionar una ecuación iterada alteatoriamente (todas las ecuaciones son equiprobables)
3. Aplicar la transformación de coordenadas definida en la ecuación seleccionada.
4. Marcar el pixel correspondiente.
5. Retornal al paso 2, hasta que se cumplan el número de iteraciones.

- Diseñar e implementar una algoritmo para aplicar estas ecuaciones iteradas, obteniendo una secuencia de puntos en el plano.
- Diseñar e implementar una manera de escribir un archivo BMP respetando las especificaciones de dicho formato.
- Desarrollar un programa assembler que lea un archivo con el formato adecuado de ecuación iterada por stdin, itere con las ecuaciones y escriba un BMP con la imágen por stdout.

Para probar el resultado, se proveerán tres conjuntos de ecuaciones iteradas. Dichos archivos se encuentran adjuntos en este archivo PDF:

- Ecuaciones_1
- Ecuaciones_2
- Ecuaciones_3

Características adicionales

El alumno puede extender el trabajo (opcionalmente) con las siguientes mejoras:

- Agregar e implementar un parámetro más en los sistemas de ecuaciones que represente un coeficiente de escalado de la imágen fractal.
- Agregar e implementar uso de ecuaciones con probabilidades definidas en los archivos de entrada.

Entrega del Trabajo

El código del trabajo será evaluado por la cátedra. El alumno debe entregar un informe de al menos dos páginas incluyendo datos académicos (integrantes del grupo, legajos, fechas) y reportando problemas y soluciones encontradas durante la realización del trabajo y posibles extensiones al mismo.

Material y Referencias

Referencias

[1] Benoit B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freedman and Co., New York, 1983.

[2] R. Lopes and N. Betrouni. Fractal and multifractal analysis: A review. *Medical Image Analysis*, 13(4):634–649, August 2009.

[3] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut JÃ$\frac{1}{4}$rgens, and Dietmar Saupe. *Chaos and fractals - new frontiers of science (2. ed.)*. Springer, 2004.