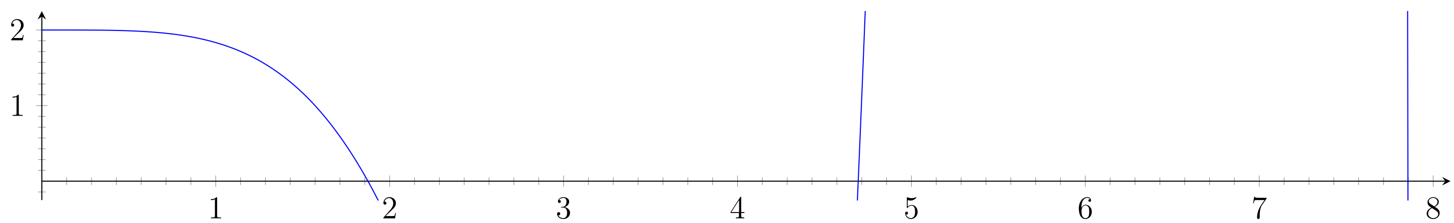
1. Determine gráficamente valores aproximados de las primeras tres raíces positivas de la función $f(x) = \cos(x)\cosh(x) + 1$. Recordar que $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

   Solución



   - $f\left(1 + \frac{6}{7} + 0,01\right) \approx 0,0327524$.
   - $f\left(4 + \frac{5}{7} - 0,02\right) \approx 0,010440$.
   - $f\left(7 + \frac{6}{7} - 0,00234\right) \approx -0,0586$.

2. Usando el método de la bisección, hallar todas las raíces de las siguientes ecuaciones con una presición de 10^{-2}:

   (a) $\sin(x) = x^2/2$,

   (b) $e^{-x} = x^4$,

   (c) $\log(x) = x - 1$.

   Soluciones

```
function y = a(x)
    y = sin(x) - x^2 / 2
endfunction
function y = b(x)
    y = exp(-x) - x^4
endfunction
function y = c(x)
    y = log10(x) - x + 1
endfunction
```

```
function r = biseccion(f, a, b, e)
    c = (a + b) / 2
    if b - c <= e then
        r = c
    else
        if f(b)*f(c) <= 0 then
            r = biseccion(f, c, b, e)
        else
            r = biseccion(f, a, c, e)
        end
    end
endfunction

printf("%f\n", biseccion(a, -1, 1, 10^-2))
printf("%f\n", biseccion(a, 1.4, 1.5, 10^-2))
printf("%f\n", biseccion(b, -1.5, -1.4, 10^-2))
printf("%f\n", biseccion(b, 0.8, 0.9, 10^-2))
printf("%f\n", biseccion(c, 0.1, 0.2, 10^-2))
printf("%f\n", biseccion(c, 0.8, 1.1, 10^-2))
```

(a) $r_1 \approx 0,007813$; $r_2 \approx 1,406250$.

(b) $r_1 \approx -1,431250$; $r_2 \approx 0,818750$.

(c) $r_1 \approx 0,131250$; $r_2 \approx 0,996875$.

3. Aplicar el método de la secante para hallar la raíz no nula de $f(x) = x^2/4 - \sin(x)$.

Solución

```
function y = f(x)
    y = x^2 / 4 - sin(x)
endfunction
```

```
function r = secante(f, xn1, xn, e)
    if abs(xn - xn1) <= e then
        r = xn1
    else
        numerador = xn - xn1
        denominador = f(xn) - f(xn1)
        sig = xn - f(xn) * (numerador / denominador)
        r = secante(f, xn, sig, e)
    end
endfunction

printf("%f\n", secante(f, -0.1, 0.1, 0.01))
printf("%f\n", secante(f, 1.3, 1.5, 0.01))
```

$r_1 \approx 0,002504$; $r_2 \approx 1,934653$.

4. ¿Qué se obtiene al aplicar reiteradamente a un valor cualquiera la función coseno?

   Solución COMPLETAR.

5. Consideramos la iteración $x_{k+1} = 2^{x_k - 1}$ para resolver la ecuación $2x = 2^x$. Determinar para que valores iniciales x_0 la iteración converge y en ese caso, cual es el límite.

   Solución

```
function b = ej5(x)
    b = 2*x == 2^x
endfunction

function xk1 = g(xk)
    xk1 = 2^(xk - 1)
endfunction
```

```
function r = fijo(ecuacion, g, xk)
    if ecuacion(xk) then
        r = xk
    else
        r = fijo(ecuacion, g, g(xk))
    end
endfunction
```

- Para $b \leq 1$ resulta:

$$\begin{aligned} & x \leq 1 \\ \iff & x \leq 0 + 1 \\ \iff & x \leq \log_2(1) + 1 \\ \iff & x - 1 \leq \log_2(1) \\ \iff & 2^{x-1} \leq 1 = b \\ \iff & g(x) \leq b \end{aligned}$$

- Para $a \leq 1$ resulta:

$$\begin{aligned} & 1 \leq x \\ \iff & 1 + \log_2(a) \leq x \\ \iff & \log_2(a) \leq x - 1 \\ \iff & a \leq 2^{x-1} \\ \iff & a \leq g(x) \end{aligned}$$

- De las dos condiciones anteriores sabemos que $a \leq x_k \leq b \Rightarrow a \leq g(x_k) \leq b$.
- Ahora, observemos que para $x \in [a, b]$ resulta

$$g'(x) = \ln(2) \cdot 2^{x-1} = \underbrace{\ln(2)}_{\leq 1} \cdot \underbrace{g(x)}_{\leq 1} \leq 1$$

  luego $\lambda = \sup_{x \in [a,b]} |g'(x)| \leq 1$

- Finalmente por el teorema de condición suficiente de convergencia sabemos que para cualquier $x_0 \in [a, b]$, la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a $\alpha = 1$.

6. Convertir la ecuación $x^2 - 5 = 0$ en el problema de punto fijo $x = x + c\,(x^2 - 5) := g\,(x)$, con c constante positiva. Elegir un valor adecuado de c que asegure la convergencia de $x_{n+1} = x_n + c\,(x_n^2 - 5)$ a $z = -\sqrt{5}$.

   Solución COMPLETAR.

7. Dada la profundidad h y el período T de una ola, su longitud de onda l surge de la relación de dispersión $w^2 = g \cdot d \cdot \tanh\,(h \cdot d)$, donde $w = {}^{2\pi}/_{T}$ es una pulsación, g es la aceleración de la gravedad, y $d = {}^{2\pi}/_{l}$ es el número de onda. Conociendo $g = 9,8\frac{m}{s^2}$ y $h = 4m$, se desea calcular cuál es la longitud de onda correspondiente a una ola con $T = 5s$. Construir un algoritmo en Scilab que efectúe los siguientes calculos:

   (a) Utilizar un método de punto fijo para calcular la solución con un dígito de presición, partiendo de $d = 1$.

   (b) Utilizar el método de Newton para calcular la solución con 4 dígitos de presicion, partiendo del resultado obtenido en el ítem anterior.

   Soluciones

   (a) COMPLETAR.

   (b) COMPLETAR.

8. Se requiere calcular la solución de la ecuación $e^x = 3x$, usando iteración simple con diferentes funciones de iteración:

   (a) $g_1\,(x) = {}^{e^x}/_{3}$,

   (b) $g_2\,(x) = \frac{e^x - x}{2}$,

   (c) $g_3\,(x) = \log\,(3x)$,

   (d) $g_4\,(x) = e^x - 2x$.

   ¿Cuáles son útiles?

Solución

(a) COMPLETAR.

(b) COMPLETAR.

(c) COMPLETAR.

(d) COMPLETAR.

9. Efectuar cinco iteraciones del método de Newton para el siguiente sistema:

$$0 = 1 + x^2 - y^2 + e^x \cos(y)$$
$$0 = 2xy + e^x \sin(y)$$

utilizando como valor inicial $x_0 = -1$ y $y_0 = 4$.

Solución

```
function z = ej9(v)
    x = v(1)
    y = v(2)
    fx = 1 + x^2 - y^2 + exp(x) * cos(y)
    fy = 2*x*y + exp(x) * sin(y)
    z = [fx; fy]
endfunction

function r = newton(f, xn, n)
    if n == 0 then
        r = xn
    else
        j = numderivative(f, xn)^-1
        xn1 = xn - j * f(xn)
        r = newton(f, xn1, n - 1)
    end
endfunction

printf("%f\n", newton(ej9, [-1; 4], 5))
```

$x \approx -0,293163; y \approx 1.172660.$

10. Resolver el sistema

$$0 = x^2 + xy^3 - 9$$
$$0 = 3x^2y - 4 - y^3$$

usando el método de Newton para cada uno de los siguientes valores iniciales:

(a) $(1,2;2,5)$

(b) $(-2;2,5)$

(c) $(-1,2;-2,5)$

(d) $(2,-2,5)$

Soluciones

```
function z = ej10(v)
    x = v(1)
    y = v(2)
    fx = x^2 + x*y^3 - 9
    fy = 3*x^2*y - 4 - y^3
    z = [fx; fy]
endfunction

printf("%f\n", newton(ej10, [1.2; 2.5], 5)); printf("\n")
printf("%f\n", newton(ej10, [-2; 2.5], 10)); printf("\n")
printf("%f\n", newton(ej10, [-1.2; 2.5], 20)); printf("\n")
printf("%f\n", newton(ej10, [2; -2.5], 20)); printf("\n")
```

(a) $x \approx 1,336355; y \approx 1,754235.$

(b) $x \approx -0,901266; y \approx -2,086588.$

(c) $x \approx -0,901266; y \approx -2,086588.$

(d) $x \approx -3,001625; y \approx 0,148108.$

11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2$, una función definida en el dominio bidimiensional. Las siguientes condiciones son suficientes para un mínimop local estricto de f:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right] = 0$ (gradiente nulo),
- matriz hessiana $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$ definida positiva.

Se desea hallar los valores de x_1 y x_2 que minimizan la función

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2^2 + e^{2x_1^2 + x_2^2}$$

(a) COMPLETAR.

(b) COMPLETAR.

Soluciones

(a) COMPLETAR.

(b) Corroborar que el punto hallado en el item anterior es un mínimo (local) de f verificando el cumplimiento de la segunda condición.

12. La presión requerida para sumergir un objeto grande y pesado en un terreno suave y homógeneo que se encuentra sobre una base dura, puede predecirse a partir de la presión requerida para sumergir objetos más pequeños en el mismo suelo.

En particular la presion p necesaria para sumergir una lámina circular de radio r una distancia d en un terreno suave, donde la base dura yace a una distancia $D > d$, puede aproximarse por una ecuación de la forma

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r$$

donde $k_i, i = 1, 2, 3$ dependen de d, pero no de r.

(a) COMPLETAR.

(b) Usando los cálculos realizados en el apartado anterior, predecir el radio mínimo de una lámina circular que deberá sostener una carga de 500 libras sumergiéndose menos de 1 pie.

Soluciones

(a) COMPLETAR.

(b) COMPLETAR.