1. En cada caso determinar si la sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge y en caso de ser convergente hallar su límite.

(a) $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$,

(b) $a_n = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n-1}$,

(c) $a_n = \frac{3n^2-n+4}{2n^2+1}$,

(d) $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$,

(e) $a_n = \frac{n!}{n^n}$,

(f) $a_n = \frac{n^p}{e^n}$, $p > 0$,

(g) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Soluciones

(a)

- Veamos que la sucesión es monótona decreciente:

$$\begin{aligned} & 1 \leq n \leq n+1 \\ \Longleftrightarrow\ & \langle x^\alpha \text{ estrictamente creciente } (\alpha > 0)\rangle \\ & 1^\alpha \leq n^\alpha \leq (n+1)^\alpha \\ \Longleftrightarrow\ & \langle {}^1\!/\!_x \text{ estrictamente decreciente } (x > 0)\rangle \\ & \frac{1}{1^\alpha} \geq \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}}_{a_n} \geq \underbrace{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}_{a_{n+1}} \end{aligned}$$

- Veamos que la sucesión es acotada inferiormente por 0. Supongamos existe $1 \leq n$ tal que $\frac{1}{n^\alpha} < 0$, luego:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^\alpha} < 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \left\langle \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}\left(x^{-1}\right)\right\rangle \\ & n^\alpha < 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \left\langle \sqrt[\alpha]{x} \text{ estrictamente creciente } (\alpha, x > 0)\right\rangle \\ & n = \sqrt[\alpha]{n^\alpha} < \sqrt[\alpha]{0} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \langle 1 \leq n\rangle \\ & 1 \leq 0 \end{aligned}$$

- Puesto que a_n es monótona decreciente y acotada inferiormente, entonces converge.

(b) Observemos que:

$$\begin{aligned}
& a_n \\
= & \langle \text{definicion} \rangle \\
& \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n-1} \\
= & \langle \text{suma de fracciones} \rangle \\
& \frac{n}{n} - \frac{1}{n} - \frac{n}{n-1} \\
= & \langle \text{factor comun } n \rangle \\
& \frac{n}{n} - \frac{1}{n} - \frac{n}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} \\
= & \langle n \geq 1 \rangle \\
& 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{1-\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Sea $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ luego

$$\lim_{x\to\infty} 1 - \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0} - \overbrace{\frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}}^{\to 1} = 1 - 0 - 1 = 1$$

por lo que la sucesión converge a 1.

(c) Sean $f(x) = 3x^2 - x + 4$ y $g(x) = 2x^2 + 1$. Observemos que:

- $f'(x) = 6x - 1$.
- $g'(x) = 4x$.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x-1}{4x} = \lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{6x}{4x}}^{\to 3/2} - \frac{1}{4x} =$

  $= \frac{3}{2} - \lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{1}{4x}}^{\to 0} = \frac{3}{2}$.

Luego como $\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{f(x)}^{\to\infty}}{\underbrace{g(x)}_{\to\infty}}$ por regla de L'Hopial resulta:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{3}{2}$$

por lo que a_n converge a $\frac{3}{2}$.

(d) Sean b_n la subsucesión de los números páres y c_n la subsucesión de los números impares. Tenemos que:

- $\lim_{n\to\infty} b_n = -1$.
- $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Puesto que una sucesión es convergente si y sólo si todas sus subsucesiones convergen al mimsmo límite, podemos concluir que a_n no es convergente.

(e) Sean $l_n = 0$ y $r_n = \frac{1}{n}$. Observemos que:

$$l_n = 0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} = r_n$$

puesto que cada factor de la expresión es positivo (por ser cociente de numeros positivos) y que cada factor es menor o igual a uno.

Resulta fácil ver que l_n y r_n convergen a 0 y por teorema del sandwitch a_n también lo hace.

(f) Sea $f(x) = \frac{x^p}{e^x}$ luego $f(x) = e^{\ln\left(\frac{x^p}{e^x}\right)} = e^{\ln(x^p)-\ln(e^x)} = e^{p\ln(x)-x}$. Observemos que:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{p\ln(x)}{x} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{p\ln(x)}{x} - \lim_{x\to\infty} 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{p\ln(x)}{x} - 1 =$$

$$= p \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to\infty}}{\underbrace{x}_{\to\infty}} - 1 \overset{LH}{=} p \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} - 1 = p \cdot 0 - 1 = -1$$

Ahora:

$$\lim_{x\to\infty} p\ln(x) - x = \lim_{x\to\infty} (p\ln(x) - x)\cdot\frac{x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{p\ln(x) - x}{x}\cdot x = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\left(\frac{p\ln(x)}{x} - 1\right)}_{\to -1}\cdot \underbrace{x}_{\to\infty} = -\infty$$

y finalmente $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\overbrace{p\ln(x) - x}^{\to -\infty}} = 0$ por lo que a_n converge a 0.

(g) Sea $f(x) = \sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\ln\left(n^{1/n}\right)} = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$, luego:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\ln(n)}^{\to\infty}}{\underbrace{n}_{\to\infty}} \overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

por lo que $\lim_{x\to\infty} f(x) = e^0 = 1$; luego la sucesión converge a 1.

2. En cada caso determinar si la serie converge o diverge y en caso de ser convergente hallar su límite.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{3}{2}\right)^n$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$.

Soluciones

(a) Sea $b_n = \frac{1}{n}$, observemos que $b_n - b_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$; luego podemos reescribir a la serie como una serie telescópica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$$

Calculemos ahora el límite de b_n:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{n}_{\to\infty}} = 0$$

Podemos concluir entonces que la serie converge a $b_1 - 0 = 1$.

(b) Sea $b_n = \frac{1}{n}$, observemos que $b_n - b_{n+2} = \frac{2}{n(n+2)}$ y además:

$$b_n - b_{n+2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= b_n - b_{n+2} + b_{n+1} - b_{n+1} = b_n + b_{n+1} - (b_{n+1} + b_{n+2})$$

Sea entonces $c_n = b_n + b_{n+1}$ podemos reescribir a la serie original como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,(b_n - b_{n+2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,(c_n - c_{n+1})$$

Como $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$ podemos concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (b_n + b_{n+1}) = 0 + 0 = 0$$

Por propiedad de linealidad y propiedad telescópica la serie converge a:

$$\frac{1}{2}\,(c_1 - 0) = \frac{1}{2}\,(b_1 + b_2) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

(c) Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \cdot \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}} = 1 \neq 0$$

luego por el teorema de condicion necesaria para la convergencia, la serie diverge.

(d)

- Convergencia: Observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Además $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ es monotona decreciente y como $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{2^n}_{\to\infty}} = 0$ por el criterio de Libniz la serie converge.

- Suma: Observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

y como $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ es una serie geométrica de razón menor a 1 resulta que la serie original converge a

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3/2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

(e) Observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{3}{2}\right)^n = 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = 3\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

y por aparecer una serie geometrica de razón mayor a 1, la serie original no converge.

(f) Observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{2^n+1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

luego como $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right) = 1 \neq 0$ por el teorema de condición necesaria para la convergencia, la serie diverge.

(g) Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3} = \frac{A(2n+3)+B(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$n = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 = A(-1+3) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$
$$n = -\frac{3}{2} \Rightarrow 1 = B(-3+1) \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1/2}{2n+1} - \frac{1/2}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

Sea entonces $b_n = \frac{1}{2n+1}$ podemos reescribir la serie como:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$$

y por propiedad telescopica la serie converge a

$$\frac{1}{2}\left(b_1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{6}$$

(h) Observemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$

y por ser series geométricas de razón menor a uno la serie converge a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-{}^{1}\!/_{2}}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-{}^{1}\!/_{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{{}^{1}\!/_{2}}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{{}^{2}\!/_{3}}\right)=1-\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

(i) Consideremos $n \geq 3$, luego

$$\frac{n!}{2^n}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}{2\cdot 2\cdot 2\cdot\dots\cdot 2}\geq\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\dots\cdot 1=\frac{1}{2}$$

por lo que $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n}\neq 0$ y la serie diverge el por teorema de condicion necesaria para la convergencia.

3. Estudiar el carácter de las siguientes series en función de los valores posibles de los parámetros a y b. En cada caso utilizar alguno de los criterios de convergencia para justificar la respuesta.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^n-1}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b|^n}{n(1+a^n)}$, $a>1$, $|b|\neq a$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(n+2)(n+a)5^n}$, $a>0$.

Soluciones

(a) Observemos que $\frac{1}{3^n+1}>0$ luego:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3^{n+1}+1}}{\frac{1}{3^n+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3^n+1}{3^{n+1}+1}\overset{LH}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{n3^{n-1}}{(n+1)\,3^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{n}{(n+1)\,3}\overset{LH}{=}$$

$$\overset{LH}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Como $\frac{1}{3}<1$, por el criterio del cociente la serie converge.

(b) Observemos que $0<\left(\frac{4}{3}\right)^n<\frac{4^n}{3^n-1}$ y que $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ diverge por ser una geométrica de razón mayor a 1.
Sean $a_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n$ y $b_n=\frac{4^n}{3^n-1}$, como $a_n\leq 1\cdot b_n$ y a_n diverge, entonces por el criterio de comparación, la serie diverge.

(c)

- Consideremos $|b|>a>1$: La serie diverge. COMPLETAR.

- Consideremos $|b| < a$: Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|b|^n}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|b|}{a} = \frac{|b|}{a} < 1$$

por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b|^n}{a^n}$ converge como consecuencia del criterio de la raiz.
Sean $a_n = \frac{|b|^n}{n(1+a^n)}$ y $b_n = \frac{|b|^n}{a^n}$, como $a_n \leq 1 \cdot b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces por el criterio de comparación, la serie original converge.

(d)

- Consideremos $a \leq 5$: Observemos que $\frac{1}{n^2} \leq 1 \cdot \frac{1}{2^n}$ (para $n \geq 1$) y que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge (serie geométrica) luego por el criterio de comparación también converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
Además como

$$\frac{a^n}{(n+2)(n+a)5^n} = \frac{1}{(n+2)(n+a)\left(\frac{5}{a}\right)^n} < \frac{1}{n^2}$$

nuevamente por el criterio de comparación, la serie original converge.
- Consideremos $a > 5$: Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1+2)(n+1+a)5^{n+1}}}{\frac{a^n}{(n+2)(n+a)5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}(n+2)(n+a)5^n}{(n+1+2)(n+1+a)5^{n+1}a^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a(n+2)(n+a)}{(n+3)(n+1+a)5} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(n^2+na+2n+2a)}{5n^2+5n+5na+15n+15+15a} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{an^2+na^2+2n+2a}{5n^2+5n+5na+15n+15+15a} \stackrel{LH}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2an+a^2+2a}{10n+5+5a+15} \stackrel{LH}{=}$$

$$\stackrel{LH}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2a}{10} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{5} > 1$$

luego por el criterio del cociente, la serie diverge.