Шлунк Андрей Александрович
409909

Вариант 6

①

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad -3A = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -3 \\ 9 & 0 & -6 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 6+4-1 & -9-2 & -3+4 \\ 8+2 & -12+4 & -4 \\ 10+16+2 & -15+4 & -5+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 1 \\ 10 & -8 & -4 \\ 28 & -11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A^T - 3A = \begin{pmatrix} 9-6 & -11-6 & 1-3 \\ 10+9 & -8+0 & -4-6 \\ 28+3 & -11-6 & 11+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -17 & -2 \\ 19 & -8 & -10 \\ 31 & -17 & 11 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & -17 & -2 \\ 19 & -8 & -10 \\ 31 & -17 & 11 \end{pmatrix}$

②

$$\begin{cases} 10x + y + z = -7 \\ x - y - z = -4 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 20 - 3 + 5 = 22$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -14 - 1 - 7 = -22$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & -7 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 + 21 + 13 = 44$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 70 - 13 - 35 = 22$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$x = \frac{-22}{22} = -1 \qquad y = \frac{44}{22} = 2 \qquad z = \frac{22}{22} = 1$$

Методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 & | & -7 \\ 1 & -1 & -1 & | & -4 \\ 2 & 3 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & -4 \\ 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 10 & 1 & 1 & | & -7 \end{pmatrix} \overset{(2)-2(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 5 & 3 & | & 13 \\ 10 & 1 & 1 & | & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{(3)-10(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 5 & 3 & | & 13 \\ 0 & 11 & 11 & | & 33 \end{pmatrix} \overset{(3)-2,2(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 5 & 3 & | & 13 \\ 0 & 0 & 4,4 & | & 4,4 \end{pmatrix}$$

$$z = 1 \qquad 5y + 3 = 13 \qquad x - 2 - 1 = -4$$
$$\qquad \qquad 5y = 10 \qquad \quad x = -1$$
$$\qquad \qquad y = 2$$

$$A \cdot X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$\det A = 22$ (из метода Крамера)

$\det A \neq 0 \rightarrow$ имеется обратная матрица

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -28$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 8 & -28 \\ 0 & 11 & -11 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*T}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & 8 & 11 \\ 5 & -28 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 0 \\ -3/22 & 4/11 & 1/2 \\ 5/22 & -14/11 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/11 & 1/11 & 0 \\ -3/22 & 4/11 & 1/2 \\ 5/22 & -14/11 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{11} - \frac{4}{11} \\ -\frac{21}{22} - \frac{16}{11} + \frac{5}{2} \\ -\frac{35}{22} + \frac{56}{11} - \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = -1 \qquad y = 2 \qquad z = 1$$

③
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y - z = 3 \\ 4x + y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$ приведем к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{(2)-2(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \overset{(3)-4(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix} \overset{(3)-(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r = 2$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 2 & -1 & -1 & | & 3 \\ 4 & 3 & 5 & | & 5 \end{pmatrix}$$ приведем к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 2 & -1 & -1 & | & 3 \\ 4 & 3 & 5 & | & 5 \end{pmatrix} \overset{(2)-2(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -5 & -7 & | & 1 \\ 4 & 3 & 5 & | & 5 \end{pmatrix} \overset{(3)-4(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -5 & -7 & | & 1 \\ 0 & -5 & -7 & | & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{(3)-(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -5 & -7 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r = 2$$

Система совместна

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -5 & -7 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+0,4(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,2 & | & 1,4 \\ 0 & -5 & -7 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,2 & | & 1,4 \\ 0 & 1 & 1,4 & | & -0,2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$x = 1,4 - 0,2 z$

$y = -0,2 - 1,4 z$