Поле

Содержание

§1. Делимость в кольце

Опр. 1.1. **Делителем нуля** в кольце R называется всякий элемент $x \neq 0$, такой что
$$\exists\, y \neq 0: \quad xy = 0.$$

Пример 1.1. В кольце $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ делителями нуля являются элементы $\overline{2}$ и $\overline{3}$.

Опр. 1.2. **Областью целостности** называется кольцо, в котором нет делителей нуля.

Пример 1.2. Областями целостности являются кольца $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где p - простое.

Опр. 1.3. Элемент $z \neq 0$ называется **нильпотентом**, если
$$\exists n \in \mathbb{N}: \quad z^n = 0.$$

Пример 1.3. Всякий нильпотент является делителем нуля. Обратное, вообще говоря, не верно.

Опр. 1.4. **Обратимым элементом** кольца называется всякий элемент $u \in R$ такой что
$$\exists\, v \in R \quad u \cdot v = 1$$

NtB 1.1. В паре u, v оба элемента являются обратимыми.

Лемма 1.1. *Множество обратимых элементов кольца R образует мультипликативную группу, обозначаемую R^*.*

Опр. 1.5. **Полем** называется ненулевое кольцо, в котором каждый ненулевой элемент обратим.

§2. Поле комплексных чисел

Опр. 2.1. Комплексным числом называется элемент z декартова произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$z = (a, b), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

снабженного двумя бинарными операциями, *индуцированными* из $\mathbb{R}$:

- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$;
- $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$;

NtB 2.1. Для множества комплексных чисел имеется специальное обозначение:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

NtB 2.2. Имеет место свойство

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2.$$

Теорема 2.1. *Множество $\mathbb{C}$ имеет алгебраическую структуру поля.*

Алгебраическая форма

Опр. 2.2. Алгебраической формой комплексного числа $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ называется представление его в следующем виде:

$$z = a + ib,$$

где символ i называется **мнимой единицей** и обладает свойством $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$.

Опр. 2.3. Пусть $z = a + ib \in \mathbb{C}$ - комплексное число, тогда

- $\operatorname{Re} z \triangleq a$ называется **вещественной частью** числа z;
- $\operatorname{Im} z \triangleq b$ называется **мнимой частью** числа z;
- $\overline{z} = a - ib$ называется числом, **комплексно сопряженным** к z;
- $N(z) \triangleq z\overline{z} = a^2 + b^2$ называется **нормой** комплексного числа z;
- $|z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется **модулем** комплексного числа.

Тригонометрическая форма

Пример 2.1. Пару вещественных чисел (a, b), определяющих комплексное число z, можно интерпретировать как координаты некоторой точки на плоскости, которая называется *комплексной плоскостью.* Координаты на рассматриваемой плоскости - это *вещественная* Re и *мнимая* Im оси.

Опр. 2.4. Аргументом комплексного числа z (обозначается $\arg(z)$) называется направленный угол от оси Re до луча Oz, откладываемый против часовой стрелки с величиной, берущейся по модулю $2\pi k$.

Пример 2.2. Альтернативно паре (a, b) можно использовать пару (ρ, ψ), определяемую следующим образом:

$$a = \rho \cos \psi, \quad b = \rho \sin \psi,$$
$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|, \quad \cos \psi = a/|z|, \quad \sin \psi = b/|z|.$$

Пара (ρ, ψ) отвечает координатам точки z в *полярной системе координат.*

Опр. 2.5. Тригонометрической формой комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ называется представление его в следующем виде:

$$z = (\rho \cos \psi, \rho \sin \psi) = \rho(\cos \psi, \sin \psi).$$

Лемма 2.1. *Имеют место свойства:*

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Доказательство. Прямой проверкой убеждаемся, что

$$\rho_1(\cos \psi_1, \sin \psi_1) \cdot \rho_2(\cos \psi_2, \sin \psi_2) = \rho_1 \rho_2(\cos(\psi_1 + \psi_2), \sin(\psi_1 + \psi_2)).$$

$\square$

Теорема 2.2. *(Формула Муавра) Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$, тогда*

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg(z^n) = n \cdot \arg(z).$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n.

$\square$

§3. Поле рациональных дробей

NtB 3.1. Если K - область целостности, то $K[x]$ - также область целостности.

Опр. 3.1. Полем рациональных функций $K(t)$ называется множество *дробно-рациональных функций* (или дробей) следующего вида:

$$\frac{f(t)}{g(t)}, \quad f, g \in K[t], \quad g \neq 0.$$

Опр. 3.2. Дробь $f(t)/g(t)$ называется **правильной**, если $\deg f < \deg g$.

Теорема 3.1. *Пусть $g_1, g_2 \in K[t]$ - взаимно просты и $f/g_1 g_2 \in K(t)$ - правильная дробь. Тогда*

$$\exists\, f_1, f_2 \in K[t] : \quad \frac{f}{g_1 g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2},$$

так что обе дроби в сумме - правильные.

NtB 3.2. Сформулированная теорема может быть обобщена любое конечное число слагаемых по множителям знаменателя.