Вариант 24 Шишун Андрей Александрович

409909

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & -1 \\ 10 & -8 & -3 & 6 \\ -11 & 14 & 8 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$

1) разложением по второй строке

$$= (-1)^{2+1} \cdot 10 \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 14 & 8 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-8) \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -11 & 8 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot (-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -11 & 14 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -11 & 14 & 8 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -10\left(-14\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) -$$

$$-8\left(11\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right) +$$

$$+3\left(11\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 14\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) +$$

$$+6\left(11\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 14\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -10(238+56+11) - 8(-187+104+18) + 3(77+182+1) +$$

$$6(121+252-8) = -3050+520+780+2190 = 440$$

2) разложением по третьему столбцу

$$= (-1)^{3+1}\cdot(-4)\begin{vmatrix}10 & -8 & 6\\ -11 & 14 & -1\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot(-3)\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ -11 & 14 & -1\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3}\cdot 8\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 10 & -8 & 6\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix} + (-1)^{3+4}\cdot 3\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 10 & -8 & 6\\ -11 & 14 & -1\end{vmatrix} =$$

$$= -4\left(6\begin{vmatrix}-11 & 14\\ 3 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}10 & -8\\ 3 & 2\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}10 & -8\\ -11 & 14\end{vmatrix}\right) +$$

$$+ 3\left(-\begin{vmatrix}-11 & 14\\ 3 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}2 & 1\\ -11 & 14\end{vmatrix}\right) +$$

$$+ 8\left(-\begin{vmatrix}10 & -8\\ 3 & 2\end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}2 & 1\\ 10 & -8\end{vmatrix}\right) -$$

$$- 3\left(-\begin{vmatrix}10 & -8\\ -11 & 14\end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix}2 & 1\\ -11 & 14\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2 & 1\\ 10 & -8\end{vmatrix}\right) =$$

$$= -4(-384+44+260)+3(64+1+195)+8(-44-6-130)-3(-52-234+26) =$$

$$= 320+780-1440+780=440$$

3) методом Гаусса

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -4 & -1\\ 10 & -8 & -3 & 6\\ -11 & 14 & 8 & -1\\ 3 & 2 & 3 & 5\end{pmatrix} \overset{(2)-5(1)}{\sim} \begin{pmatrix}2 & 1 & -4 & -1\\ 0 & -13 & 17 & 11\\ -11 & 14 & 8 & -1\\ 3 & 2 & 3 & 5\end{pmatrix} \overset{(3)+5,5(1)}{\sim} \begin{pmatrix}2 & 1 & -4 & -1\\ 0 & -13 & 17 & 11\\ 0 & 19,5 & -14 & -6,5\\ 3 & 2 & 3 & 5\end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{(4)-1,5(1)}{\sim} \begin{pmatrix}2 & 1 & -4 & -1\\ 0 & -13 & 17 & 11\\ 0 & 19,5 & -14 & -6,5\\ 0 & 0,5 & 9 & 6,5\end{pmatrix} \overset{(3)+1,5(2)}{\sim} \begin{pmatrix}2 & 1 & -4 & -1\\ 0 & -13 & 17 & 11\\ 0 & 0 & 11,5 & 10\\ 0 & 0,5 & 9 & 6,5\end{pmatrix} \overset{(4)+\frac{1}{26}(2)}{\sim} \begin{pmatrix}2 & 1 & -4 & -1\\ 0 & -13 & 17 & 11\\ 0 & 0 & 11,5 & 10\\ 0 & 0 & \frac{251}{26} & \frac{90}{13}\end{pmatrix} \sim$$

$$(4)-\frac{251}{299}(3) \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & -13 & 17 & 11 \\ 0 & 0 & 11{,}5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{440}{299} \end{pmatrix}$$

Т.к. матрица треугольного вида, то ее определитель равен произведению чисел на главной диагонали

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & -1 \\ 10 & -8 & -3 & 6 \\ -11 & 14 & 8 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & -13 & 17 & 11 \\ 0 & 0 & 11{,}5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{440}{299} \end{vmatrix} = 2\cdot(-13)\cdot 11{,}5\cdot\left(-\frac{440}{299}\right) = 440$$

2
$$\begin{cases} 4x+5y-2z=15 \\ 2x+y+3z=-5 \\ x-5y+7z=-30 \end{cases}$$

а)
$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} =$$
$$= 4(7+15)-5(14-3)-2(-10-1) = 55$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 15 & 5 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \\ -30 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -30 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -30 & -5 \end{vmatrix} =$$
$$= 15(7+15)-5(-35+90)-2(25+30) = -55$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 15 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & -30 & 7 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -30 & 7 \end{vmatrix} - 15\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -30 \end{vmatrix} =$$
$$= 4(-35+90)-15(14-3)-2(-60+5) = 165$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 15 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & -30 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -5 & -30 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -30 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} =$$
$$= 4(-30-25)-5(-60+5)+15(-10-1) = -110$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-55}{55} = -1 \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{165}{55} = 3 \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{110}{55} = -2$$

б) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & -2 & 15 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & 7 & -30 \end{array}\right) \overset{(2)-2(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & -2 & 15 \\ 0 & 11 & -11 & 55 \\ 1 & -5 & 7 & -30 \end{array}\right) \overset{(3)-\frac{1}{4}(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & -2 & 15 \\ 0 & 11 & -11 & 55 \\ 0 & -6{,}25 & 7{,}5 & -33{,}75 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{(3)+\frac{25}{44}(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & -2 & 15 \\ 0 & 11 & -11 & 55 \\ 0 & 0 & 1{,}25 & -2{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1{,}25 & -0{,}5 & 3{,}75 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$z = -2$ $\qquad y + 2 = 5$ $\qquad x + 3{,}75 + 1 = 3{,}75$

$\qquad y = 3$ $\qquad x = -1$

Проверка:

$4 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 - 2(-2) = -4 + 15 + 4 = 15$

$2(-1) + 3 + 3(-2) = -2 + 3 - 6 = -5$

$-1 - 5 \cdot 3 + 7(-2) = -1 - 15 - 14 = -30$

3 $A(3,2,-1)$ $B(-3,-1,1)$ $C(3,5,3)$, $D(3,3,0)$

$\overrightarrow{AB}, |\overrightarrow{AB}|, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \cos\varphi, \vec{b}, S_{\triangle ABC}, V_{ABCD}, h_D$ $-?$

$\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = -6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$

$\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k} - 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + 16} = 5$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-9 + 8}{35} = -\frac{1}{35}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-12-6)\vec{i} + (-24)\vec{j} + (-18)\vec{k} = -18\vec{i} + 24\vec{j} - 18\vec{k}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{324+576+324}}{2} = 6\sqrt{34}$$

$$5|\vec{AB}| - 7|\vec{AC}| \rightarrow \vec{b} = -30\vec{i} + 6\vec{j} + 38\vec{k}$$

$$\vec{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = \vec{j} + \vec{k}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -6 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left(-6\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{6}(-6(3-4)) = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1$$

$$h_D = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{6\sqrt{34}} = \frac{1}{2\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{34}}{68}$$

④ O – центр окружности, M – середина хорды

$O(-1;5)$ $M(1;4)$

$\vec{OA}, \vec{OB}$ – радиусы окружности $\rightarrow |\vec{OA}| = |\vec{OB}| \rightarrow \triangle OAB$ – р/б

т.к. $|\vec{AM}| = |\vec{MB}|$, $\triangle OAB$ – р/б $\rightarrow \vec{OM} \perp \vec{AB}$

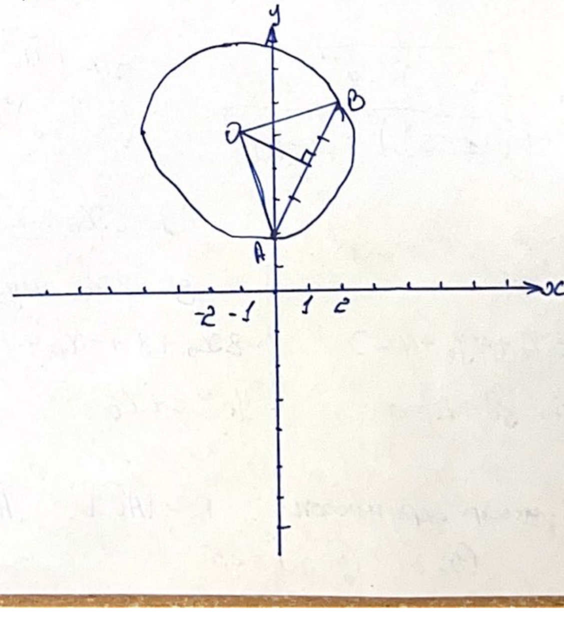
$\vec{OM} = (1+1; 4-5) = (2; -1)$, $\vec{OM}$ – вектор нормали

найдем уравнение прямой через точку и вектор нормали

AB: $2(x-1) - 1(y-4) = 0$

$2x - 2 - y + 4 = 0$

$2x - y + 2 = 0$




Ответ: AB: $2x - y + 2 = 0$

⑤ уравнение плоскости через отрезки имеет вид: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$,

где $a=\frac{-D}{A}$, $b=\frac{-D}{B}$, $c=\frac{-D}{C}$

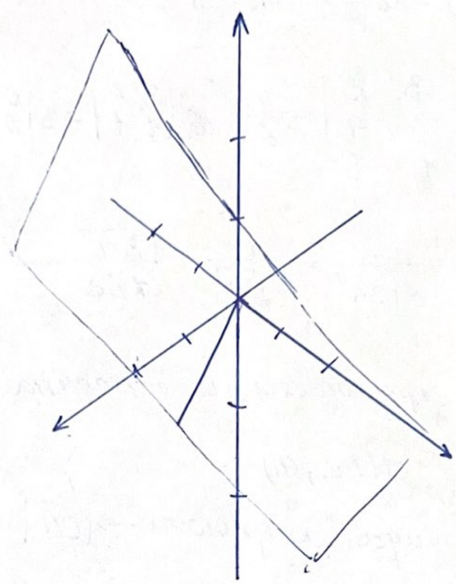
т.к. плоскость отсекает равные отрезки, то $a=b=c$ : $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1 \,|\cdot a$

$x+y+z=a$ подставим $M(-2,-3,1)$: $-2-3+1=a$ $a=-4$

$\vec{n}(1,1,1)$ $O(0,0,0)$ O-начало координат

Найдем уравнение прямой через точку и направляющий вектор

$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1} \rightarrow x=y=z$



⑥ $M(3;0)$ $N(-1;2)$

$x-y+2=0$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$|\vec{MO}|=|\vec{NO}|=R$

$|\vec{MO}|=\sqrt{(3-x_0)^2+y_0^2}$

$|\vec{NO}|=\sqrt{(-1-x_0)^2+(2-y_0)^2}$

т.к. $|\vec{MO}|=|\vec{NO}|$

$(3-x_0)^2+y_0^2 \; (-1-x_0)^2+(2-y_0)^2$

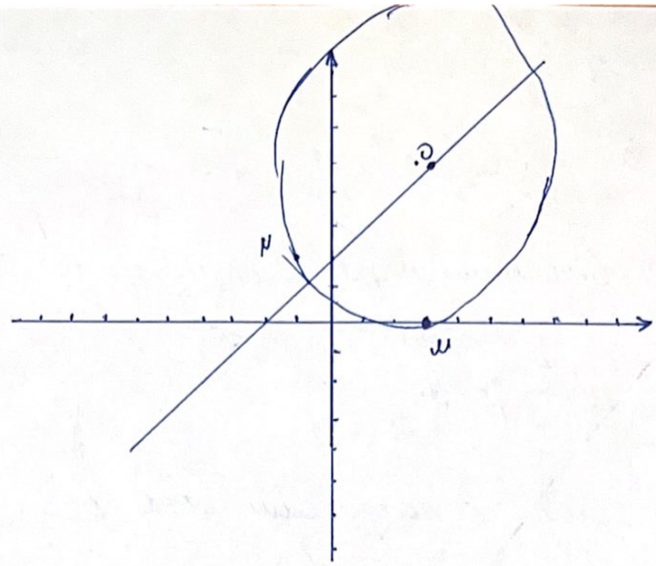
$9-6x_0+x_0^2+y_0^2=1+2x_0+x_0^2+4-4y_0+y_0^2$

$-8x_0+4y_0+4=0$

$\begin{cases}-8x_0+4y_0+4=0\\ x_0-y_0+2=0\end{cases}$ $\begin{cases}-8x_0+8+4x_0+4=0\\ y_0=2+x_0\end{cases}$ $\begin{cases}4x_0=12\\ y_0=2+x_0\end{cases}$ $\begin{cases}x_0=3\\ y_0=5\end{cases}$

$O(3;5)$-центр окружности $R=|\vec{MO}|$ $\vec{MO}=(0;5)$ $|\vec{MO}|=\sqrt{25}=5$

$(x-3)^2+(y-5)^2=25$




(7) $5x^2+5y^2+8xy+18\sqrt{2}x+18\sqrt{2}y+27=0$

$x=x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi$
$y=x_1\sin\varphi+y_1\sin\varphi$

$5(x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi)^2+5(x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi)^2+8(x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi)(x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi)+$
$+18\sqrt{2}(x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi)+18\sqrt{2}(x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi)+27=0$

$5(x_1^2\cos^2\varphi-2x_1y_1\sin\varphi\cos\varphi+y_1^2\sin^2\varphi)+5(x_1^2\sin^2+2x_1y_1\sin\varphi\cos\varphi+y_1^2\cos^2\varphi)+$
$+8(x_1^2\sin\varphi\cos\varphi-x_1y_1\sin^2\varphi+x_1y_1\cos^2\varphi-y_1^2\sin\varphi\cos\varphi)+18\sqrt{2}(x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi)+$
$+18\sqrt{2}(x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi)+27=0$

приравняем коэффициенты при $x_1y_1$ к нулю, получим:

$-10\sin\varphi\cos\varphi+10\sin\varphi\cos\varphi-8\sin^2\varphi+8\cos^2\varphi=0$

$8\sin^2\varphi=8\cos^2\varphi \quad |:8\cos^2\varphi \qquad tg^2\varphi=1$

$tg\,\varphi=\pm1 \rightarrow \sin\varphi=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\varphi=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

подставим значение синуса и косинуса в уравнение кривой

$5\left(x_1^2\cdot\frac{1}{2}-x_1y_1+y_1^2\cdot\frac{1}{2}\right)+5\left(x_1\cdot\frac{1}{2}+x_1y_1+y_1^2\cdot\frac{1}{2}\right)+8\left(x_1^2\cdot\frac{1}{2}-x_1y_1\cdot\frac{1}{2}-y_1^2\cdot\frac{1}{2}\right)+$

$+18\sqrt{2}\left(x_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-y_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+18\sqrt{2}\left(x_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+y_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+27=0$

$5x_1^2+4x_1^2+36x_1+5y_1^2-4y_1^2+27=0 \qquad 9x_1^2+36x_1+y^2+27=0 \qquad 9(x_1^2+4x_1)+y_1^2+27$

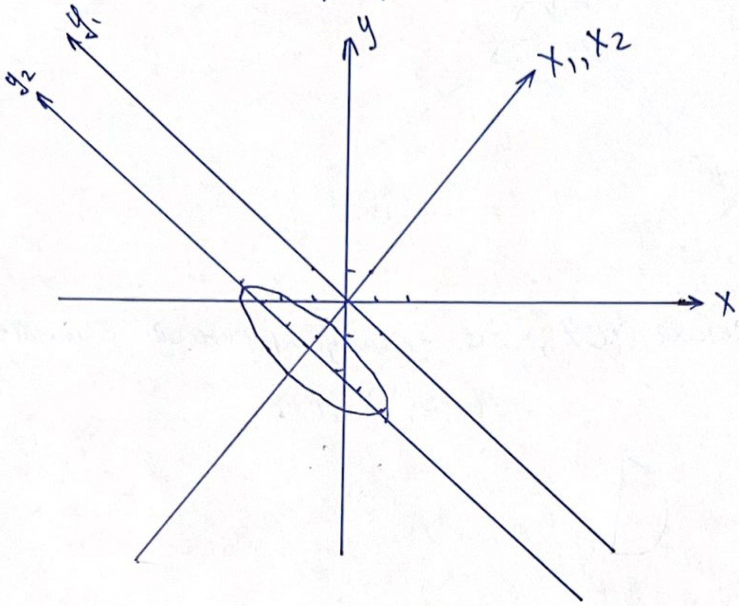
выделим полный квадрат: $9(x_1^2+2\cdot2\cdot x_1+4-4)+y_1^2+27=0$

$9(x_1+2)-36+y_1^2+27=0$

$9(x_1+2)^2+y_1^2-9=0$ $\qquad$ $9(x_1+2)^2+y_1^2=9 \;|:9$

$\frac{(x_1+2)^2}{1}+\frac{y_1^2}{9}=1$ выполним параллельный перенос

$\begin{cases} x_2=x_1+2 \\ y_2=y_1 \end{cases}$

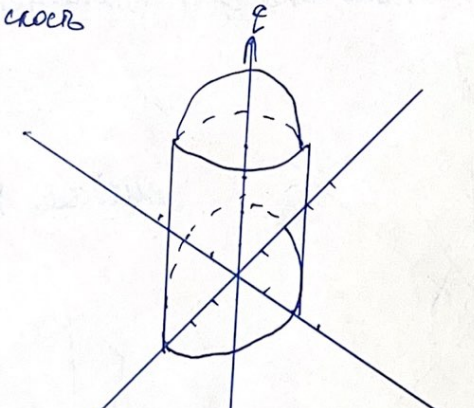



(8) a) $x^2+y^2=4$ – окружность, центр $(0;0)$, $R=2$, в пространстве цилиндр

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}+4$ заметим, что это верхняя половина сферы с $r=2$

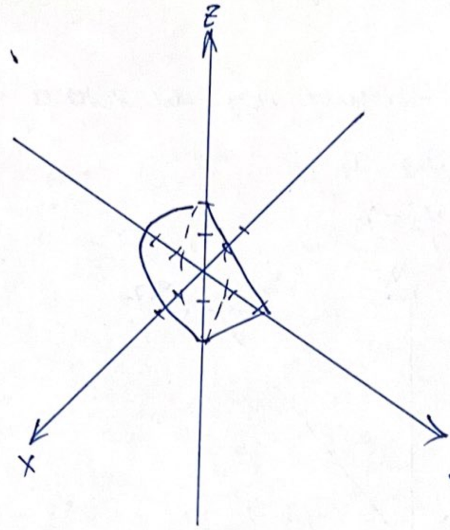
и смещением на 4 ↑

$z=0$ – плоскость $\qquad$ сечение $XOZ$ $x \neq 0$




б) $y = -\sqrt{4-x^2-z^2}$ - левая половина сферы с центром $(0;0;0)$, $r=2$

$y = -\sqrt{x^2+z^2}+2$ - конус с вершиной в точке $(0;2;0)$, вытянутый вдоль $Oy$

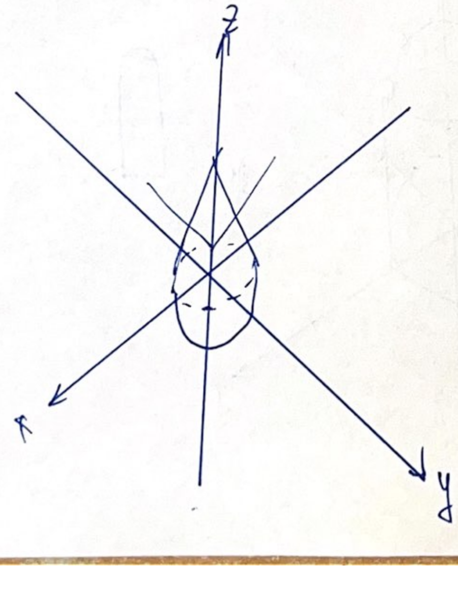



сечение $XOZ$, $x \geq 0$ - полуокружность с центром $(0;0;0)$, $r=2$

в) $z = -\sqrt{2}+\sqrt{x^2+y^2+1}$ конус с центром в точке $(0,0,-\sqrt{2}+1)$ вытянут против $Oz$

$z = 1-x^2-y^2$ конус с центром в точке $(0;0;1)$, вытянут вдоль $Oz$

$z = -1-\sqrt{2-x^2-y^2}$ нижняя половина сферы, смещение $1\downarrow$, $r=\sqrt{2}$




сечение $XOZ$, $x \geq 0$