

# Матрицы и определители

## Содержание

§1	Определение матрицы	1
§2	Действия с матрицами	2
§3	Определитель матрицы	3

## §1. Определение матрицы

**NtB 1.1.** Матрица является одним самых важных объектов линейной алгебры. В курсе мы встретимся с разными интерпретациями этого математического объекта и дадим ему целый ряд определений. Начнем с самого простого...

**Опр. 1.1.** **Матрицей** с коэффициентами из поля  $\mathbb{K}$  называется прямоугольная таблица следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где числа  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  называются **коэффициентами** матрицы. Упорядоченную совокупность элементов с фиксированным первым индексом  $i_0$  называют *строкой* матрицы с номером  $i_0$ . Упорядоченную совокупность элементов с фиксированным вторым индексом  $j_0$  называют *столбцом* матрицы с номером  $j_0$ .

**NtB 1.2.** Таким образом, у представленной выше матрицы имеется  $m$  строк и  $n$  столбцов. Матрица называется *квадратной*, если число ее строк равно числу столбцов.

**NtB 1.3.** Используемые обозначения для матриц:

$$A_{m \times n}, \quad B_{s \times t}, \dots \quad \|a_{ij}\|_{i=1 \dots m}^{j=1 \dots n}, \dots$$

**Пример 1.1.** Примеры матриц:

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{1 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## §2. Действия с матрицами

**NtB 2.1.** Будем обозначать множество  $m \times n$  матриц через  $Mat_{\mathbb{K}}(m, n)$ . Определим на этом множестве некоторые операции:

(а) Сложение: если  $A = \|a_{ij}\|$ ,  $B = \|b_{ij}\|$  и  $C = \|c_{ij}\|$ , тогда

$$C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

(б) Умножение на число: если  $A = \|a_{ij}\|$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  и  $D = \|d_{ij}\|$ , тогда

$$D = \lambda \cdot A \quad \Leftrightarrow \quad d_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}.$$

**Лемма 2.1.** *Операция сложения индуцирует на множестве  $Mat_{\mathbb{K}}(m, n)$  структуру коммутативной группы.*

**NtB 2.2.** Операция умножения на число не является внутренней операцией на  $Mat_{\mathbb{K}}(m, n)$ , она называется *внешней*. Структуры с внешними операциями мы рассмотрим позже, а пока будем просто ее использовать.

(в) Умножение матриц: пусть  $A \in Mat_{\mathbb{K}}(m, p)$ ,  $B \in Mat_{\mathbb{K}}(p, n)$  и  $C \in Mat_{\mathbb{K}}(m, n)$ , тогда

$$C = A \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

**NtB 2.3.** Таким образом, перемножить можно только такие матрицы, у число столбцов у первого сомножителя которых, совпадает с числом строк второго сомножителя. В результате получается матрица, число строк которой совпадает с числом строк первого сомножителя, а число столбцов - с числом столбцов второго.

**NtB 2.4.** Умножение матриц не коммутативно и определено на матрицах из различных множеств  $Mat$ . Чтобы сделать умножение внутренней операцией на данном множестве, необходимо рассматривать только квадратные матрицы.

**Лемма 2.2.** *Множество квадратных матриц, наделенное операциями сложения и умножения, имеет структуру кольца, единицей которого является матрица*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

(г) Транспонирование: пусть  $A \in Mat_{\mathbb{K}}(m, n)$ , тогда  $A^T \in Mat_{\mathbb{K}}(n, m)$ :

$$A^T = \|\tilde{a}_{i,j}\| : \quad \tilde{a}_{ij} = a_{ji}$$

**NtB 2.5.** Независимо от размеров матрицы, произведения  $A^T \cdot A$  и  $A \cdot A^T$  существуют всегда, хотя, конечно, могут не совпадать.

### §3. Определитель матрицы

**NtB 3.1.** Вводимое здесь понятие является крайне важной характеристикой матрицы. Подробное определение и обсуждение свойств мы проведем в дальнейшем, а в этой лекции лишь упомянем только самые необходимые.

**Опр. 3.1.** **Определителем** квадратной матрицы  $A$  называется число  $|A|$ , которое ставится ей в соответствие следующим образом:

1. Если  $A_{1 \times 1} = (a)$ , тогда  $|A| = a$ ;
2. Если  $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , тогда  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ;
3. Если  $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , тогда  $|A|$  можно получить *разложением по первой строке*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

**NtB 3.2.** Аналогичным образом можно вычислять определители матриц больших размеров, но нам пока будет достаточно приведенных формул.

**NtB 3.3.** Часто для определителя матрицы  $A$  используют обозначение  $\det A$ .

**Лемма 3.1.** *Приведем (пока) без доказательства некоторые интересные свойства определителя. В частности, определитель матрицы*

- *не изменится, если*
  - *матрицу транспонировать;*
  - *прибавить к одной строке другую, умножив на любое число;*
- *окажется равным нулю, если*
  - *присутствует нулевая строка;*
  - *некоторые строки пропорциональны;*
- *умножится*
  - *на  $(-1)$  если поменять любые две строки местами;*
  - *на число  $\lambda$ , если на это число умножить некоторую строку.*

*Важно!*

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$