

# Прямая на плоскости

## Содержание

§1 Аналитическая геометрия	1
§2 Прямая на плоскости: векторные уравнения	2
§3 Прямая на плоскости: уравнения в координатах	2
§4 Взаимное расположение прямых на плоскости	3

## §1. Аналитическая геометрия

Основной объект любой геометрической задачи - точка.

**№1.** Каждой точке плоскости  $\mathbb{R}^2$  (пространства  $\mathbb{R}^3$ ) можно поставить в соответствие два (три) вещественных числа  $P \leftrightarrow (x_P, y_P)$  ( $P \leftrightarrow (x_P, y_P, z_P)$ ) в некоторой системе координат.

Наибольший интерес представляют множества точек, объединенные некоторым свойством. Такие множества будем называть **геометрическими местами точек**. Перечислим некоторые из них:

- (а) Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух заданных точек, определяет **прямую** в  $\mathbb{R}^2$ .
- (б) Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух заданных точек, определяет **плоскость** в  $\mathbb{R}^3$ .
- (в) Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от трех заданных точек, не лежащих на одной прямой, определяет **прямую** в  $\mathbb{R}^3$ .

## Задачи аналитической геометрии

- (а) Описание геометрического места точек аналитическим выражением или их совокупностью;
- (б) Нахождение ГМТ, удовлетворяющих заданным условиям;
- (в) Нахождение пересечения ГМТ;
- (г) Отыскание и описание свойств ГМТ;
- (д) Отыскание инвариантных (геометрических) свойств ГМТ;
- (е) Преобразование систем координат и их аналитическое описание;
- (ж) Преобразование уравнений ГМТ при преобразованиях координат.

## §2. Прямая на плоскости: векторные уравнения

- (а) Уравнение прямой по определению

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|,$$

где  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор произвольной точки прямой, а  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  - радиус-векторы точек, от которых равноудалены точки прямой. Равносильное этому уравнение:

$$\left( \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \right) = 0$$

- (б) Векторное параметрическое уравнение прямой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{s},$$

где  $\mathbf{r}_0$  - радиус-вектор опорной точки, принадлежащей прямой, а  $\mathbf{s}$  - направляющий вектор прямой.

- (в) Векторное уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$$

- (г) Нормальное векторное уравнение прямой

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = -$$

где  $\mathbf{n}$  - вектор нормали к прямой.

## §3. Прямая на плоскости: уравнения в координатах

Зафиксируем некоторую декартову прямоугольную систему координат, в которой

$$\mathbf{r} = (x, y) \quad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0) \quad \mathbf{s} = (s_x, s_y) \quad \mathbf{n} = (A, B)$$

В данных обозначениях можно получить следующие уравнения прямой на плоскости, выраженные как аналитические соотношения между координатами:

- (а) Координатные параметрические уравнения прямой на плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot s_x \\ y = y_0 + t \cdot s_y \end{cases}$$

- (б) Каноническое уравнение прямой на плоскости

$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y}$$

(в) Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

(г) Общее уравнение прямой на плоскости

$$Ax + By + C = 0$$

(д) Нормальное уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

(е) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = kx + b,$$

где  $k = s_y/s_x$  - угловой коэффициент, а  $b = y_0 - kx_0$ .

(ж) Уравнение в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где  $a = -C/A$  и  $b = -C/B$ .

(з) Уравнение с прицельным параметром

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta = p,$$

где  $\cos \alpha = \frac{A}{|\mathbf{n}|}$ ,  $\cos \beta = \frac{B}{|\mathbf{n}|}$  - направляющие косинусы прямой, а  $p = (\mathbf{r}_0, \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}_0|})$  - прицельный параметр прямой.

## §4. Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть прямые заданы векторными параметрическими (или нормальными) векторными уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + t_1 \mathbf{s}_1 & (\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) &= (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1) \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 + t_2 \mathbf{s}_2 & (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) &= (\mathbf{r}_2, \mathbf{n}_2) \end{aligned}$$

(а) Для параллельных прямых выполняются следующие условия

$$(1) \quad \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n}_1 = \alpha \mathbf{n}_2$$

$$(2) \quad \mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{s}_1 = \alpha \mathbf{s}_2$$

$$(3) \quad \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{s}_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{n}_1, \mathbf{s}_2) = 0$$

- (б) При совпадении прямых (частный случай параллельности) дополнительно выполняется

$$\mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \parallel (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

- (в) Пересечение прямых гарантирует выполнение следующего условия

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{s}_2) \neq 0, \quad (\mathbf{n}_2, \mathbf{s}_1) \neq 0$$

- (г) В случае ортогональных прямых (частный случай пересекающихся прямых) можно утверждать, что

$$\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{n}_2 \parallel \mathbf{s}_1$$