Системы координат

Содержание

§1. Системы координат

Опр. 1.1. Метод координат - это подход, позволяющий установить соответствие между геометрическими объектами (точками) и алгебраическими объектами (числами), а также описать их свойства и отношения между ними с помощью аналитических соотношений.

Опр. 1.2. Координатная линия - непрерывная линия без самопересечений, каждой точке которой ставится в соответствие действительное число.

Опр. 1.3. Координатной осью α называют ориентированную прямую, имеющую начало отсчета O и снабженную масштабом E. При этом любой точке P координатной оси ставится в соответствие вещественное число x, называемое координатой точки:

$$P \in \alpha \qquad \leftrightarrow \qquad x \in \mathbb{R}$$

NtB. Координатные оси на плоскости (в пространстве) в совокупности образуют систему координат.

Опр. 1.4. Прямолинейной системой координат на плоскости (в пространстве) называется система из двух (трех) разнонаправленных координатных осей, имеющих общее начало.

NtB. На плоскости каждой точке ставится в соответствие пара вещественных чисел.

$$\forall P \qquad \leftrightarrow \qquad (x_P, y_P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

В пространстве каждой точке ставится в соответствие тройка вещественных чисел.

$$\forall P \qquad \leftrightarrow \qquad (x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$$

Опр. 1.5. Линией уровня на плоскости называется любая прямая, параллельная одной из координатных осей.

Опр. 1.6. Поверхностью уровня в пространстве называется любая плоскость, параллельная одной из координатных плоскостей.

Опр. 1.7. Прямоугольной системой координат называется такая система, в которой угол между каждой парой координатных осей является прямым. Если на координатных осях выбран одинаковый масштаб, то такая система называется декартовой прямоугольной системой координат.

Опр. 1.8. Полярной системой координат называется такая система координат, в которой каждой точке соответствует полярный радиус r - расстояние от начала координат (полюс), и полярный угол ϕ, который отсчитывается от луча, выходяшего из начала координат (полярная ось), против часовой стрелки.

NtB. Пару полярных координат (r, ϕ) можно перевести в декартовы координаты (x, y) при помощи тригонометрических функций, полагая, что полярная ось совпадает с положительным направлением оси Ox

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

§2. Векторы

Опр. 2.1. Направленным отрезком, или связанным вектором, назовем отрезок, однозначным образом определяемый точками, которые назовет началом и концом направленного отрезка.

Пример 2.1. Радиус-вектором точки A называется направленный отрезок, проведенный из начала координат в точку A.

Опр. 2.2. Направленные отрезки будем называть **коллинеарными**, если они лежат на параллельных прямых.

Опр. 2.3. Направленные отрезки будем называть **компланарными**, если они лежат на параллельных плоскостях.

NtB. Любые два направленных отрезка являются компланарными.

Опр. 2.4. Модулем направленного отрезка **AB** будем называть длину отрезка AB.

Опр. 2.5. Отношением эквивалентности $\sim$ на множестве M называется отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Опр. 2.6. Класс эквивалентности элемента $a \in M$ - это подмножество множества M, в котором все элементы эквивалентны a.

Опр. 2.7. Направленные отрезки будем называть **эквивалентными**, если они сонаправлены и их модули равны.

Опр. 2.8. Свободным вектором, или просто вектором, называется класс эквивалентности направленных отрезков.

§3. Действия с векторами

Рассмотрим два свободных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. От произвольной точки A отложим направленный отрезок $\mathbf{AB}$, являющийся изображением свободного вектора $\mathbf{a}$, а от точки B отложим вектор $\mathbf{BC}$, принадлежащий $\mathbf{b}$.

Опр. 3.1. Суммой векторов a и **b** называется вектор $\mathbf{c}$, являющийся классом эквивалентности направленного отрезка $\mathbf{AC}$, начало которого совпадает с началом вектора $\mathbf{AB}$, а конец - с концом вектора $\mathbf{BC}$.

Свойства суммы векторов

(а) Коммутативность сложения: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;

(б) Ассоциативность сложения: $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$;

(в) Наличие нулевого вектора: $\exists \mathbf{0} : \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$;

(г) Наличие противоположного вектора: $\forall \mathbf{a}\ \exists(-\mathbf{a})\colon \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Опр. 3.2. Произведением вектора $\mathbf{a}$ на скаляр λ называется вектор $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ такой, что

(а) $|\mathbf{b}| = |\lambda||\mathbf{a}|$

(б) $\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b}$

(в) $\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$

(г) $\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}$

Свойства умножения на скаляр

(а) Ассоциативность умножения на скаляр: $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$;

(б) Наличие единицы: $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$;

(в) Дистрибутивность: $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

Опр. 3.3. Ортом вектора $\mathbf{a}$ называется вектор $\mathbf{a}_0$ такой, что

$$\mathbf{a}_0 \upuparrows \mathbf{a} \qquad |\mathbf{a}_0| = 1$$

§4. Базис

Опр. 4.1. Пусть $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ - набор векторов и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ - набор вещественных чисел. Выражение вида

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mathbf{a}_i$$

называется линейной комбинацией векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Опр. 4.2. Базисом на плоскости (в пространстве) называется упорядоченный набор векторов таких, что любой вектор плоскости (пространства) может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации этих векторов.

NtB. Определим базис в различных пространствах:

(а) На прямой линии базисом является любой ненулевой вектор;

(б) На плоскости базисом является любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов;

(в) В трехмерном пространстве базис - упорядоченная тройка любых некомпланарных векторов;

NtB. Орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ осей декартовой прямоугольной системы координат образуют базис пространства. Следовательно радиус-вектор любой точки A может быть разложен по базису

$$\mathbf{r}_A = x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k},$$

где x_A, y_A и z_A - координаты точки в данной системе координат.