Решение типовых задач

1). Выполнить действия в алгебраической форме.

Основные формулы:

$$i^2=-1$$

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$$

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(b_1a_2+a_1b_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(b_1a_2-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

Пример: $\frac{(2+3i)(4-2i)}{4+2i}+i^{15}$

Решение:

$$i^{15}=i^{14}\times i=(i^2)^7\times i=(-1)^7\times i=-i$$

$$(2+3i)(4-2i)=8+12i-4i-6i^2=8+8i+6=14+8i$$

$$\frac{14+8i}{4+2i}=\frac{(14+8i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=\frac{64+32i-28i-16i^2}{16-4i^2}=\frac{64+4i+16}{16+4}=\frac{80+4i}{20}=4+\frac{1}{5}i$$

$$4+\frac{1}{5}i-i=4-\frac{4}{5}i$$

Ответ: $4-\frac{4}{5}i$

2). Вычислить в тригонометрической форме.

Основные формулы:

Запись комплексного числа в алгебраической форме: $z=a+ib$

Переход к тригонометрической форме записи:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$tg\varphi=\frac{b}{a},\varphi=arctg\frac{b}{a}$$

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Формула для извлечения корня n-ой степени:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$$

Пример: Вычислить $\sqrt[4]{-81}$

Решение:

$$z=-81+0i$$

$$r=\sqrt{(-81)^2+0^2}=81$$

$$tg\varphi=\frac{0}{-81}$$

$$\varphi=\pi$$

$$z=81(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{81}(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}),k=0,1,2,3.$$

Подставляя в найденный ответ значения k, получим в результате четыре корня.

$k=0,$

$$\varepsilon_1=\sqrt[4]{81}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=3(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$k=2,$

$$\varepsilon_2=3(\cos\frac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{4})=3(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=3(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$k=2,$

$$\varepsilon_3=3(\cos\frac{\pi+4\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{4})=3(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})=3(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$k=3,$

$$\varepsilon_3=3(\cos\frac{\pi+6\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{4})=3(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})=3(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Ответ: $\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{81}(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}),k=0,1,2,3.$

$$\varepsilon_1=\sqrt[4]{81}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=3(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon_2=3(\cos\frac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{4})=3(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=3(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\varepsilon_3=3(\cos\frac{\pi+4\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{4})=3(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})=3(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\varepsilon_4=3(\cos\frac{\pi+6\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{4})=3(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})=3(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

3). Разложить многочлен на неприводимые множители.

Пример: $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

Решение: Подберем корень данного многочлена. Корнем является один из делителей свободного члена. Варианты: $\pm 1, \pm 2$. Подстановкой убеждаемся, что $x_0=-1$ – корень:

$$(-1)^4 - (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 1 + 1 - 2 = 0$$

Поделим многочлен на $x-x_0$. Деление будет без остатка.

$$\begin{array}{r|l} \underline{\ }x^4-x^3-x^2-x-2 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^4+x^3} & x^3-2x^2+x-2 \\ \underline{\ }-2x^3-x^2-x-2 & \\ \underline{-2x^3-2x^2} & \\ \underline{\ }x^2-x-2 & \\ \underline{x^2+x} & \\ \underline{\ }-2x-2 & \\ \underline{-2x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

Полученный результат можно записать следующим образом:
$x^4-x^3-x^2-x-2=(x+1)(x^3-2x^2+x-2)$

Найдем корень многочлена x^3-2x^2+x-2. Варианты: $\pm 1, \pm 2$. Подстановкой убеждаемся, что $x_0=2$ – корень. Поделим многочлен на $x-x_0$ уголком.

$$\begin{array}{r|l} \underline{\ }x^3-2x^2+x-2 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-2x^2} & x^2+1 \\ \underline{\ }x-2 & \\ \underline{x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

У многочлена x^2+1 нет действительных корней. Найдем комплексные корни.

$$x^2+1=0$$
$$x^2=-1$$
$$x=\pm\sqrt{-1}$$
$$x=\pm i$$

тогда многочлен $x^2+1=(x+i)(x-i)$

Запишем конечный результат.

Ответ: $x^4-x^3-x^2-x-2=(x+1)(x-2)(x+i)(x-i)$

4). Пользуясь свойствами определителей вычислить.

Основные формулы:

Вычисление определителей второго и третьего порядка:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{12}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Свойства определителей:

1) определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы;
2) если у определителя строчка (столбец) равен нулю, то и сам определитель нулевой;
3) если в определителе поменять местами две строчки (столбца), то знак определителя поменяется;
4) если в определителе две одинаковых строчки (столбца), то он равен нулю;
5) если все элементы некоторой строки (столбца) умножить на некоторое число k, то сам определитель умножится на k;
6) определитель, содержащий две пропорциональные строки равен нулю;
7) если все элементы i-ой строки определителя представить в виде суммы двух слагаемых
$$a_{ij}=b_i+c_j$$
то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки кроме i-ой – такие же как и в заданном определителе, а i-ая строка (столбец) в одном из слагаемых состоит из элементов b_i, в другом – из элементов c_j;
8) если одна из строк (столбцов) определителя равна линейной комбинации его других строк (столбцов), то определитель равен нулю;
9) определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответственные элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Разложение определителя по i-ой строке (j-ому столбцу):

$$\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

где A_{ij}-алгебраические дополнения элемента a_{ij}.

Определение: дополнительным минором M_{ij} элемента a_{ij} называется минор порядка (n-1) получающийся после вычеркивания из определителя i-ой строки и j-ого столбца. Тогда

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

A_{ij}-алгебраические дополнения элемента a_{ij}.

Разложение определителя по i-ой строке (j-ому столбцу):

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

<u>Пример:</u> $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & -5 & 4 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 5 & -2 \\ -4 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

Для начала нужно выбрать такие две строки или столбца, чтобы при их сложении получалось наибольшее количество нулей. В нашем случае это первая и третья строки. Пользуясь девятым свойством определителя умножаем первую строчку на (-1) и складываем с третьей. Получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Произведем разложение определителя по третьей строке. В сумму будем включать только ненулевые элементы, т. к. перемножая ноль и его алгебраическое дополнение в результате получим нулевое слагаемое.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & - & 4 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+2} \times (-7) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \times 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 5 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Заметим, что степень у (-1) определяется номером строчки и столбца, на котором стоит выбранный элемент. В нашем случае элемент (-7) стоит на третьей строчке и во втором столбце, следовательно степень у (-1) будет 3+2.

В результате получилось, что мы понизили порядок определителя на один. Проведем необходимые преобразования и разложим полученные определители по первому столбцу. Первую строку умножим на (-3) и сложим со второй, затем ее же умножим на 2 и сложим с третьей и умножим на (-1) и сложим с четвертой строкой.

$$(-1) \times (-7) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} + (-1) \times 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

В первых столбцах полученных определителей получилось по одному ненулевому элементу, что значительно упрощает дальнейшее решение. Разложим данные определители по первому столбцу.

$$= 7 \times (-1)^{1+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} -4 & 1 & 9 \\ 3 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} - 4 \times (-1)^{1+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 1 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Полученные определители решаем по формуле вычисления определителя 3-го порядка.

$$14 \times ((-4) \times 6 \times 6 + 1 \times (-2) \times 2 + 9 \times 3 \times 0 - (9 \times 6 \times 2 + (-4) \times (-2) \times 0 + 1 \times 3 \times 6)) -$$
$$- 8 \times (2 \times 3 \times 6 + (-4) \times (-2) \times (-4) + 9 \times 1 \times 2 - (9 \times 3 \times (-4) + 2 \times (-2) \times 2 + (-4) \times 1 \times 6)) =$$
$$= 14 \times (-144 - 4 + 0 - (108 + 0 + 18)) - 8 \times (36 - 32 + 18 - (-108 - 8 - 24)) =$$
$$= 14 \times (-148 - 126) - 8 \times (22 + 140) = 14 \times (-274) - 8 \times 166 = -3836 - 1328 = -5164$$

5). Доказать совместность системы и решить ее
а) Методом Гаусса
б) Методом Крамера
в) Матричным методом

а) Методом Гаусса.

При решении системы методом Гаусса расширенная матрица системы приводится к треугольному виду. Обратным ходом находятся неизвестные. В матрице можно умножать строчку на число и складывать с другой строчкой, менять строчки местами, менять столбцы местами (при этом нужно переобозначить неизвестные).

Сначала работаем с первой строкой, чтобы получить нули в первом столбце, затем со второй строкой, чтобы получить нули во втором столбце и то же самое с третьей строкой.

<u>Пример:</u> решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -9 \\ x - y + 3z = 2 \\ 3x - 6y - z = 25 \end{cases}$$

Преобразовываем расширенную матрицу данной системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \times(\text{-}1) \quad \times(\text{-}3) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \times(\text{-}4) \approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & -9\\0 & -3 & -2 & 11\\0 & 0 & -8 & 8\end{array}\right)$$

В результате получаем систему:

$$\begin{cases}x+2y+5z=-9\\-3y-2z=11\\-8z=8\end{cases}$$

Из последнего уравнения находим z=-1, подставляем во второе уравнение получаем

-3y+2=11

y=-3

Подставляем найденные z и y в первое уравнение и получаем

x-6-5=-9

x=2

<u>Ответ:</u> x=2 y=-3 z=-1

б)Методом Крамера:

Решение системы

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}$$

находится по формулам

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$y=\frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$z=\frac{\Delta_3}{\Delta}$$

где $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\b_2 & a_{22} & a_{23}\\b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\a_{21} & b_2 & a_{23}\\a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\a_{21} & a_{22} & b_2\\a_{31} & a_{32} & b3\end{vmatrix}$$

<u>Пример</u>: Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases}x+2y+5z=-9\\x-y+3z=2\\3x-6y-z=25\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\1 & -1 & 3\\3 & -6 & -1\end{vmatrix}=(1+18-30)-(-15-18-2)=-11+35=24$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-9 & 2 & 5\\2 & -1 & 3\\25 & -6 & -1\end{vmatrix}=(-9+150-60)-(-125+162-4)=81-33=48$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -9 & 5\\1 & 2 & 3\\3 & 25 & -1\end{vmatrix}=(-2-81+125)-(30+75+9)=42-114=-72$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & -9\\1 & -1 & 2\\3 & -6 & 25\end{vmatrix}=(-25+12+54)-(27-12+50)=41-65=-24$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{48}{24}=2$$

$$y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{72}{24}=-3$$

$$z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=-\frac{24}{24}=-1$$

<u>Ответ:</u> x=2 y=-3 z=-1

в) Матричным методом

Систему линейных уравнений можно записать в виде:

AX=B, (1)

Где $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

Домножим уравнение (1) на A^{-1} слева. Получим

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$

$$X=A^{-1}B$$

Значит, нашей задачей является найти A^{-1}(обратную матрицу) и перемножить ее с вектором B и мы получим вектор X, составляющие которого будут являться решением нашей системы.

<u>Формула для нахождения обратной матрицы.</u>

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^{*}$$

$$A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

где A_{ij} является алгебраическим дополнением к элементу a_{ij}.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

В нашем задании: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 1 & -1 & 3\\ 3 & -6 & -1\end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}-9\\ 2\\ 25\end{pmatrix}$

Найдем A^{*}:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -6 & -1\end{vmatrix}=(1+18)=19,$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-(-1-9)=10$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -6\end{vmatrix}=(-6+3)=-3$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 5\\ -6 & -1\end{vmatrix}=-(-2+30)=-28$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & -1\end{vmatrix}=(-1-15)=-16$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -6\end{vmatrix}=-(-6-6)=12$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix}=(6+5)=11$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(3-5)=2$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=(-1-2)=-3$

$A^{*}=\begin{pmatrix}19 & -28 & 11\\ 10 & -16 & 2\\ -3 & 12 & -3\end{pmatrix}$

$\Delta=|A|=24$

$A^{-1}=\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}19 & -28 & 11\\ 10 & -16 & 2\\ -3 & 12 & -3\end{pmatrix}$

Тогда, $X=A^{-1}B=\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}19 & -28 & 11\\ 10 & -16 & 2\\ -3 & 12 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9\\ 2\\ 25\end{pmatrix}=\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}-171-56+275=48\\ -90-32+50=-72\\ 27+24-75=-24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ -1\end{pmatrix}$

<u>Ответ:</u> x=2, y=-3, z=-1

б)Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной однородной системы.

<u>Определение:</u> система AX=B называется однородной если столбец свободных членов B=0.

<u>Определение:</u> рангом расширенной матрицы называется максимальное число линейно независимых (ненулевых) строк.

Если ранг расширенной системы равен r, а число уравнений n, то число свободных неизвестных равно (n-r).

<u>Определение:</u> элементарными называются следующие преобразования:

1) умножение любой строки матрицы на число;
2) прибавление к любой строке матрицы другой строки умноженной на число;

<u>Теорема:</u> элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

При перемене местами двух строк или двух столбцов (при этом переобзначив переменные) ранг матрицы также остается неизменным.

<u>Пример:</u> Пусть дана однородная система линейных уравнений.

$$\begin{cases}3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0\\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0\\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0\end{cases}$$

определим ранг данной системы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -8 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2\\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 11 & -12 & 34 & -5\\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2\\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1\end{pmatrix}\ (-2)\ \ (-3)\approx$$

$$\approx\begin{pmatrix}1 & 11 & -12 & 34 & -5\\ 0 & -24 & 21 & -75 & 12\\ 0 & -32 & 28 & 100 & 16\end{pmatrix}(-\frac{4}{3})\approx\begin{pmatrix}1 & 11 & -12 & 34 & -5\\ 0 & -24 & 21 & -75 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Матрица A имеет ранг равный 2.Выбираем в матрице две линейно независимых строки и оставляем в системе лишь те уравнения, коэффициенты которых вошли в выбранные строки.

В этих уравнениях оставляем в левых частях такие две неизвестных, что определитель из коэффициентов при них отличен от нуля, а остальные неизвестные объявляем свободными и переносим в правые части уравнений.

Пусть x_3,x_4,x_5 –свободные неизвестные, тогда

$$\begin{cases}x_1+11x_2=12x_3-34x_4+5x_5\\ -24x_2=-21x_3+75x_4-12x_5\end{cases}$$

Из второго уравнения находим

$$x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5$$

Подставляя найденное значение x_2 в первое уравнение находим:

$$x_1 + \frac{77}{8}x_3 - \frac{275}{8}x_4 + \frac{11}{2}x_5 = 12x_3 - 34x_4 + 5x_5$$

$$x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5$$

Запишем общее однородное решение системы:

$$X_{o.o} = (\frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5; \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5; x_3; x_4; x_5)$$

Давая свободным неизвестным произвольные числовые значения, мы получаем все решения данной системы.

Пусть x_3=8, x_4=-8, x_5=2. Подставляя данные значения в общее однородное решение мы получим частное однородное решение:

$$X_{ч.о} = (15;33;8;-8;2)$$

<u>Определение:</u> Всякая максимально линейно независимая система решений однородной системы уравнений называется ее фундаментальной системой.

Если ранг матрицы равен r, а число неизвестных n, то всякая фундаментальная система решений системы состоит из n-r решений.

В нашем случае r=2, n=5, следовательно фундаментальная система решений (ФСР) будет состоять из 3-х линейно независимых векторов X_1, X_2, X_3. Чтобы составить ФСР мы должны задать такие значения свободным неизвестным, чтобы определитель из данных значений был ненулевой.

Зададим:

$$X_1: x_3 = 8, x_4 = 0, x_5 = 0$$

$$X_2: x_3 = 0, x_4 = 8, x_5 = 0$$

$$X_3: x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 2$$

На диагонали могут стоять любые элементы, мы подбираем наиболее удобные для нас. Все элементы, стоящие не на диагонали берем равные нулю. В результате мы получаем линейно независимую систему (так как определитель не равен нулю). Далее подставляем наши значения в общее однородное решение и строим ФСР.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X_1	19	7	8	0	0
X_2	3	-25	0	8	0
X_3	-1	1	0	0	2

Данная система решений будет являться базой для любого частного решения. Любой вектор, не входящий в данную систему векторов

будет являться линейной комбинацией из базисных векторов. Проведем иллюстрацию:

$$X_{ч.о.} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$$

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 33 \\ 8 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -25 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Получим систему:

$$\begin{cases} 19\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 15 \\ 7\alpha_1 - 25\alpha_2 + \alpha_3 = 33 \\ 8\alpha_1 = 8 \\ 8\alpha_2 = -8 \\ 2\alpha_3 = 2 \end{cases}$$

Отсюда,

$$\alpha_1 = 3$$

$$\alpha_2 = -1$$

$$\alpha_3 = 1$$

$$X_{ч.о.} = 3X_1 - X_2 + X_3$$

7). Образует ли линейное пространство данное множество.

Определение: множество V называется линейным пространством, если в нем определены операции сложения (если $a \in V, b \in V \Rightarrow (a+b) \in V$) и умножения на число α (если $a \in V \Rightarrow \alpha a \in V$), и введенные операции удовлетворяют аксиомам:

1) $a+b=b+a$
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$
3) $\exists 0 : a + 0 = a$
4) $\exists -a : a + (-a) = 0$
5) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$
6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
7) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
8) $1 \times a = a$

Пример 1: будет ли являться линейным пространством множество матриц размером m×n?

Решение: Пусть множество V составляют матрицы размером m×n они будут являться линейным пространством, так как на данном множестве введена операция сложения : если матрицу A∈ V сложить с матрицей B∈ V, то мы получим матрицу C размером m×n, которая тоже принадлежит множеству V; и операция умножения на число: если матрицу A∈ V умножить на число α, то получим матрицу D, которая также принадлежит множеству V. И так как элементы матрицы –это действительные числа, следовательно данное множество будет удовлетворять основным аксиомам.

Пример 2: Будет ли являться линейным пространством множество многочленов пятой степени?

Решение: Данное множество не будет составлять линейное пространство, так как можно подобрать пару таких многочленов, сумма которых не будет давать многочлен пятой степени:

$f_1(x) = 4x^5 + 3x^3 - x + 5$

$f_2(x) = -4x^5 - 3x^4 + x^2 + x - 6$

$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x) = -3x^4 + 3x^3 + x^2 - 1$

Полученный многочлен является многочленом четвертой степени

Для того чтобы доказать что множество не является линейным пространством достаточно привести хотя бы один пример, опровергающий определение.

8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c).

Определение: Базисом является максимальная система линейно независимых векторов.

Пример: Найти разложение вектора d по базису (a, b, c).

$$\vec{d} = (-9,2,25), \vec{a} = (1,1,3), \vec{b} = (2,-1,-6), \vec{c} = (5,3,-1)$$

В нашем случае система состоит из трех векторов (a, b, c), которые составляют базис. Значит любой вектор будет являться линейной комбинацией из данной системы векторов. Вектор d должен линейно зависеть от заданной тройки векторов. Пользуясь определением можно записать в виде формулы:

$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

Подставляя наши значения получим:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\-1\\-6\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\2\\25\end{pmatrix}$$

что можно записать в виде системы:

$$\begin{cases}\alpha + 2\beta + 5\gamma = -9\\ \alpha - \beta + 3\gamma = 2\\ 3\alpha - 6\beta - \gamma = 25\end{cases}$$

Решим данную систему методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\1 & -1 & 3\\3 & -6 & -1\end{vmatrix} = (1+18-30) - (-15-18-2) = -11+35 = 24$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix}-9 & 2 & 5\\2 & -1 & 3\\25 & -6 & -1\end{vmatrix} = (-9+150-60) - (-125+162-4) = 81-33 = 48$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}1 & -9 & 5\\1 & 2 & 3\\3 & 25 & -1\end{vmatrix} = (-2-81+125) - (30+75+9) = 42-114 = -72$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix}1 & 2 & -9\\1 & -1 & 2\\3 & -6 & 25\end{vmatrix} = (-25+12+54) - (27-12+50) = 41-65 = -24$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{48}{24} = 2$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{72}{24} = -3$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{24}{24} = -1$$

Ответ: $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$

10). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

Определение: многочлен n-ой степени $|A - \lambda E|$ называется характеристическим многочленом матрицы A, а его корни называются характеристическими корнями (собственными числами) матрицы A.

Определение: вектор X называется собственным вектором, если выполняется следующее равенство:

$$\lambda A = \lambda X$$
$$X \neq 0$$

где λ - собственные числа матрицы A.

Пример: Найти собственные числа и собственные вектора матрицы

$$A = \begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\1 & 3 & -2\\-1 & -3 & 4\end{pmatrix}$$

Найдем характеристический многочлен $|A - \lambda E|$ матрицы A. На практике вычитаем из диагональных элементов λ. Получим:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix}6-\lambda & 0 & 0\\1 & 3-\lambda & -2\\-1 & -3 & 4-\lambda\end{pmatrix}$$

Найдем определитель данной матрицы и вычислим его разложением по первой строке.

$$\left|A-\lambda E\right| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\times(6-\lambda)\times\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)\times((3-\lambda)\times(4-\lambda)-$$

$$-(-2)\times(-3)) = (6-\lambda)\times(12-4\lambda-3\lambda+\lambda^2-6) = (6-\lambda)\times(\lambda^2-7\lambda+6) = 0$$

$$(6-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda = 6$$

$$\lambda^2-7\lambda+6=0$$

$$\lambda=6, \lambda=1$$

В результате мы получили следующие собственные числа:

$$\lambda_{1,2}=6$$

$$\lambda_3=1$$

Найдем соответствующие им собственные вектора.

По определению собственного значения и собственного вектора

$$AX=\lambda X$$

$$AX-\lambda X=0$$

$$(A-\lambda E)X=0$$

Найдем собственный вектор для

$$\lambda_{1,2}=6$$

$$A-6\times E = \begin{pmatrix} 6-6 & 0 & 0 \\ 1 & 3-6 & -2 \\ -1 & -3 & 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} =$$

Воспользуемся методом Гаусса для определения ранга полученной матрицы. Для этого проведем следующие преобразования: сложим вторую и третью строчку.

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Умножив полученную матрицу с вектором $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ получим систему:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -6x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Ранг данной системы равен 2, а количество неизвестных три, следовательно должна быть одна свободная неизвестная. Обозначим за свободную неизвестную x_3. Из второго уравнения выражаем x_2 через свободную неизвестную:

$$-6x_2 = 4x_3$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_3$$

Полученное значение x_2 подставляем в первое уравнение.

$$x_1 - 3\times(-\frac{2}{3}x_3) - 2x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Проверка: x_3-свободная неизвестная. Пусть $x_3=3$, тогда $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

По определению собственного значения собственного вектора:

$$AX=\lambda X$$

Подставим в определение найденное собственное число и собственный вектор.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}} \times \underset{X}{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} = \underset{\lambda}{6} \times \underset{X}{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Теперь найдем собственный вектор для

$$\lambda_3=1$$

$$A-1\times E = \begin{pmatrix} 6-1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-1 & -2 \\ -1 & -3 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} =$$

Воспользуемся методом Гаусса для определения ранга данной матрицы. Для этого поменяем местами первую и третью строчки. Затем полученную первую строчку сложим со второй и умножив на 5 сложим с третьей строчкой.

$$= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -15 & 15 \end{pmatrix} =$$

Перемножив полученную матрицу с вектором X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ получим систему:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ \quad -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Ранг данной системы равен двум а число неизвестных трем следовательно одну неизвестную объявляем свободной (пусть это будет x_3). Выразим из второго уравнения x_2 через x_3 и подставим в первое уравнение

$x_2= x_3$

$- x_1 - 3x_3+3x_3=0$

$x_1=0$

$$\text{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Проверка: x_3-свободная неизвестная. Пусть $x_3=2$, тогда $\text{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

По определению собственного значения собственного вектора:

$$AX = \lambda X$$

Подставим в определение найденные собственное число и собственный вектор:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}} \underset{\times X}{\times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}} \underset{=}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underset{\lambda \times X}{1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Ответ:

$$\lambda_{1,2} = 6, \ \text{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1, \ \text{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Вариант 1

1). Выполнить действия в алгебраической форме:

$$\frac{2-2\sqrt{3}i}{1+i\sqrt{3}}i$$

2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[6]{1+\sqrt{3}i}$$

3). Разложить многочлен $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12$ на неприводимые множители.

4). Пользуясь свойствами определителей вычислить

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -5 & 4 & 5 \\ 9 & -3 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 4 & 2 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & -2 & 8 & 3 \\ -4 & -3 & 4 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x - y - 4z = 7 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

и решить ее

а) методом Гаусса,

б) методом Крамера,

в) в матричном виде.

6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 0 \\ 12x_1 - 11x_2 - x_3 - 34x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

7). Будет ли являться линейным пространством множество всех дробных чисел.

8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c).

$\vec{d} = (-2,11,-2)$, $\vec{a} = (1,2,-3)$, $\vec{b} = (3,-3,-2)$, $\vec{c} = (-1,4,2)$

9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\frac{(1-3i)(1+3i)}{3+i}+2i^{17}$$

2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[6]{\sqrt{3}+i}$$

3). Разложить многочлен $x^4+4x^3+8x^2+20x+15$ на неприводимые множители.

4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & -9 & -4 & 4 \\ 5 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & -5 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -5 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=-1 \\ x+y+3z=1 \\ 4x-y-6z=1 \end{cases}$$

и решить ее

а) методом Гаусса,

б) методом Крамера,

в) в матричном виде.

6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+2x_4-8x_5=0 \\ 2x_1-2x_2+2x_3-7x_4-3x_5=0 \\ 5x_1-11x_2-x_3-34x_4+12x_5=0 \end{cases}$$

7). Образуют ли линейное пространство множество целых чисел?

8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c).

$$\vec{d}=(1,-2,-1), \vec{a}=(0,-1,2), \vec{b}=(1,0,-1), \vec{c}=(1,2,1)$$

9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i}-(1+i\sqrt{3})$$

2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{2+2\sqrt{3}i}$$

3). Разложить многочлен $x^4+x^3+3x^2+5x-10$ на неприводимые множители.

4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ 5 & 7 & -2 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 3 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} 6x+2y-z=2 \\ 4x-y+3z=-3 \\ 3x+2y-2z=3 \end{cases}$$

и решить ее

а) методом Гаусса,

б) методом Крамера,

в) в матричном виде.

6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0 \\ 2x_1-x_2-5x_3+x_4+3x_5=0 \\ x_1+3x_2-x_3-6x_4-x_5=0 \end{cases}$$

7). Образует ли линейное пространство множество всех функций, принимающих отрицательное значение?

8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c).

$$\vec{d}=(3,-2,0), \vec{a}=(-3,1,0), \vec{b}=(2,-1,0), \vec{c}=(1,2,1)$$

9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\left(\frac{1+i}{1-2i}-\frac{2}{5}(2+i)\right)$$

2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[5]{1+i}$$

3). Разложить многочлен $x^4-x^3+x^2-3x-6$ на неприводимые множители.

4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ -6 & -4 & -7 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} x-3y+z=9 \\ 2x+4y+3z=-3 \\ 2x-y+2z=3 \end{cases}$$

и решить ее

а) методом Гаусса,

б) методом Крамера,

в) в матричном виде.

6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4-2x_5=0 \\ 3x_x+3x_2-4x_3-x_4=0 \end{cases}$$

7). Образует ли линейное пространство множество векторов на плоскости?

8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c).

$$\vec{d}=(6,1,0),\vec{a}=(2,-1,1),\vec{b}=(0,1,-2),\vec{c}=(3,1,-1)$$

9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\left(\frac{(4-i)^2}{i^5}-8i^3(2-i^{13})\right)$$

2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{3+\sqrt{3}i}$$

3). Разложить многочлен $x^4-4x^3+8x^2-20x+15$ на неприводимые множители.

4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & -2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ -4 & 9 & 3 & -7 & 5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=13 \\ x+y+z=6 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$$

и решить ее

а) методом Гаусса,

б) методом Крамера,

в) в матричном виде.

6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+4x_5=0 \\ x_1-2x_2-3x_3+x_4+2x_5=0 \\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4+3x_5=0 \end{cases}$$

7). Образуют ли линейное пространство множество всех отрицательных чисел?

8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c).

$$\vec{d}=(2,-1,4),\vec{a}=(1,0,2),\vec{b}=(3,-3,4),\vec{c}=(0,1,1)$$

9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\left(\frac{(1-3i)(1+3i)}{-i(3+i)}-2i^{18}\right)$$

2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}$$

3). Разложить многочлен $x^4+x^3-4x^2+2x-12$ на неприводимые множители.

4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & -5 & 2 & -5 \\ -3 & 5 & -7 & -3 & -9 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 & -4 \\ 7 & 8 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$$

и решить ее

а) методом Гаусса,

б) методом Крамера,

в) в матричном виде.

6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2-2x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3-x_4+2x_5=0 \\ 5x_1-2x_2+x_3-2x_4+3x_5=0 \end{cases}$$

7). Образуют ли линейное пространство множество многочленов шестой степени?

8). Найти разложение вектора базису (a, b, c).

$$\vec{d}=(4,0,-1),\vec{a}=(2,-1,3),\vec{b}=(1,0,-1),\vec{c}=(0,-1,2)$$

9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\left(i\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}+i^{18}\right)$$

2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{4+4\sqrt{3}i}$$

3). Разложить многочлен $x^4+3x^3+5x^2+9x+6$ на неприводимые множители.

4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & 5 & -3 \\ 7 & 4 & -9 & 6 & 4 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} x+2y-2z=0 \\ 2x-3y-3z=2 \\ -x+y+3z=2 \end{cases}$$

и решить ее

а) методом Гаусса,

б) методом Крамера,

в) в матричном виде.

6). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0 \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x \end{cases}$$

7). Образуют ли линейное пространство множество векторов с целыми координатами?

8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c).

$$\vec{d}=(7,-7,-1),\vec{a}=(1,-2,1),\vec{b}=(0,1,-3),\vec{c}=(2,1,0)$$

9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^9}$$

$$\sqrt[5]{i}$$

2). Разложить многочлен $x^4+x^3-3x^2+3x-18$ на неприводимые множители.

3). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & -2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & 5 \\ -1 & -4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

4). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} 2x-3y+2z=1 \\ 5x+2y-4z=3 \\ -3x+4y-z=0 \end{cases}$$

и решить ее
а) методом Гаусса,
б) методом Крамера,
в) в матричном виде.

5). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5=0 \\ 3x_1-x_3-5x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2-2x_3-3x_4=0 \end{cases}$$

6). Образует ли линейное пространство множество векторов с дробными коэффициентами?

7). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c).

$$\vec{d}=(3,-3,5), \vec{a}=(0,2,5), \vec{b}=(1,-1,1), \vec{c}=(2,0,-1)$$

8). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы А.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\frac{(-2+i)^2}{1+i}i-(0{,}3+0{,}1i)$$

2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{27}$$

2). Разложить многочлен $x^4-x^3-4x^2-2x-12$ на неприводимые множители.

3). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} -9 & 7 & 6 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 5 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

4). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x-3y+4z=11 \\ -3x-2y+2z=-2 \end{cases}$$

и решить ее
а) методом Гаусса,
б) методом Крамера,
в) в матричном виде.

5). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0 \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4-2x_5=0 \\ 2x_1+x_2+5x_3-2x_4-x_5=0 \end{cases}$$

6). Образует ли линейное пространство множество многочленов с целыми коэффициентами?

7). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c).

$$\vec{d}=(2,-7,3), \vec{a}=(5,-3,4), \vec{b}=(1,-2,3), \vec{c}=(1,-1,4)$$

8) Найти собственные числа и собственные векторы матрицы А.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

1). Выполнить действия в алгебраической форме.

$$\frac{(-1+i)^2}{2i^{15}}-\frac{(1+i)}{(2-i)}$$

2). Вычислить в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{16}$$

3). Разложить многочлен $x^4+x^3+3x^2+5x-10$ на неприводимые множители.

4). Пользуясь свойствами определителей вычислить:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -4 & -2 \\ -6 & 5 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

5). Доказать совместность системы:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y+2z=-3 \\ -3x+2y+3z=-4 \end{cases}$$

и решить ее

а) методом Гаусса,

б) методом Крамера,

в) в матричном виде.

5). Найти общее решение, частное решение и фундаментальную систему решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0 \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0 \end{cases}$$

7). Образует ли линейное пространство множество многочленов с дробными коэффициентами?

8). Найти разложение вектора d по базису (a, b, c).

$\vec{d}=(2,1,0)$, $\vec{a}=(1,2,-3)$, $\vec{b}=(5,-4,3)$, $\vec{c}=(1,3,-5)$

9). Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Список литературы

1. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1966.
2. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. – М.: Наука, 1978.
3. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемешев.– М.: Наука, 2000.
4. Курс высшей алгебры / А. Г . Курош. –М.: Наука, 1971.