Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №6
Работа с системой компьютерной вёрстки $\TeX$
Вариант: 106

Выполнил:
Шмунк Андрей Александрович
Группа P3108
Проверил:
Доцент ПИиКТ, кандидат технических наук
Балакшин Павел Валерьевич

Санкт-Петербург, 2023

сообщено не позднее 1 августа 2000 года. Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу: 141700 *г.Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ.*

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует высылать работы по адресу: 252680 г.Киев, пр. Вернадского, д.36, Институт ме- таллофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: (044) 444-95-24.

Для учащихся из стран ближнего зарубежья возможно платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях ЗФТШ. Условия обучения для прошедших конкурсный прием будут сообщены дополнительно.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В зада- нии по физике: задачи 1 - 5 предназ- начены для учащихся седьмых клас- сов, 3—8 – для восьмых классов, 6 - 11 – для девятых классов, 10 - 16 - для десятых классов. В задании по математике: задачи 1—5 предназна- чены для учащихся седьмых классов, 2—8 – для восьмых классов, 5—11 – для девятых классов, 8 - 14 – для десятых классов. Номера классов указаны на текущий 1999/2000 учебный год.

Вступительное задание по математике

1. Дома Винни-Пуха и Пятачка находятся на расстоянии 1 км друг от друга. Однажды они одновременно вышли из своих домов, и каждый пошел в каком-то направлении по прямой. Винни-Пух проходил 3 км в час, а Пятачок – 4 км в час. Через некоторое время они встретились. Сколько времени могло продолжаться их путешествие? Укажите наибольшее и наименьшее время.

2. Внутри острого угла отмечена точка A. Найдите на сторонах угла точки B и C такие, чтобы периметр треугольника ABC был наимень- шим.

3. Имеются три сосуда емкостей 3л,3ли7л.Можноли,пользуясь этими сосудами, налить в большой сосуд ровно 5 л воды? Найдите все пятизначные числа вида

$2m57n = 2*10^4 + +m*10^3 + 4*10^2 + 7**10 + n$

(m и n - цифры, которые делятся на 15)

5. На плоскости даны три прямые a, b и c, не проходящие через одну точку. Постройте на прямых a и b точки A и B так, чтобы отрезок AB был перпендикулярен прямой c и де- лился этой прямой пополам.

6. Числа x, y, z – последовательные члены арифметической прогрессии, их сумма равна 21.Числах –1,y+1, z + 21 являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите числа x, y, z.

7. Решите уравнение

$$\sqrt{2-x} = |x-1| - 2$$

8.В корзине лежало не более 70 грибов. После разбора оказалось, что 52% из них – белые. Если отложить три самых маленьких гриба, то среди оставшихся будет ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?

9.Острый угол ABC ромба ABCD равен 60°. Окружность проходит через точку пересечения диагоналей ромба, касается прямой AB в точке B и пересекает сторону CD в точке E. Определите, в каком отношении точка E делит отрезок CD.

10.Множество A состоит из всех точек плоскости, координаты (x; y) которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (a+4)x + 4a \le a, \\ 3x + y - (2a+4) \le 0. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях параметра a множество A содержит отрезок [–2; –1] оси Ox.

11.Решите неравенство

$$\frac{10-3x+\sqrt{x^2+x-6}}{4-x} \ge 1$$

12.Точки K и L являются серединами боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC. Точка M расположена на медиане AL так, что AM:ML=13:12.Окружностьс центром в точке M касается прямой AC и пересекает прямую KL в точках P и Q. Найдите периметр треугольника ABC,еслиKL=10,PQ=4.

13.

$$\begin{cases} 17\cos 2x - 7 = 21\sin x * \cos 2y, \\ \cos x = \sqrt{3\sin x} * \cos y. \end{cases}$$

14.На координатной плоскости рассматривается фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты (a; b) которых таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} ax + by = 1, \\ 3x + ay = -1, \\ (a-1)x + (b+2) = -2. \end{cases}$$

имеет решение. Изобразите фигуру Φ и составьте уравнения всех прямых, каждая из которых проходит через точку (4; 3) и имеет с фигурой Φ единственную общую точку.

Вступительное задание по физике

1.Автомобиль первую треть пути ехал со скоростью v1 = 30 км/ч, оставшуюся часть пути он ехал со скоростью, в два раза большей средней скорости на всем пути. Найдите скорость автомобиля на второй части пути.

3.Труба массой m = 100 кг лежит на земле. Какую минимальную силу F надо приложить к концу трубы, чтобы его приподнять?

3.С вертолета сфотографирован пароход, идущий по озеру курсом на север. На фотографии (рис.1) запе-

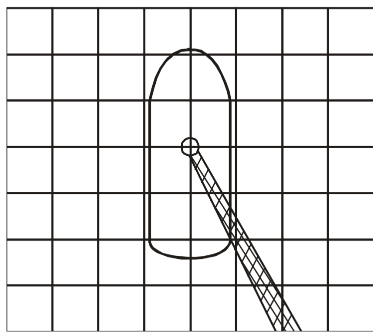

Рис. 1

чатлен шлейф дыма от парохода. Определите по фотографии скорость па- рохода, если съемка проводилась при юго-западном ветре, скорость которого v=5м/с.

4.В два цилиндрических сообщающихся сосуда наливают ртуть. Площадь сечения одного из сосудов вдвое больше площади сечения другого. Широкий сосуд доливают водой до края. На какую высоту h поднимется при этом уровень ртути в другом со- суде? Первоначально уровень ртути был на расстоянии l от верхнего края сосуда. Плотности ртути и воды 0 известны.

5.В сосуде с водой плавает кусок льда, удерживаемый нитью (рис.2). Сила натяжения нити F = 10 Н. На

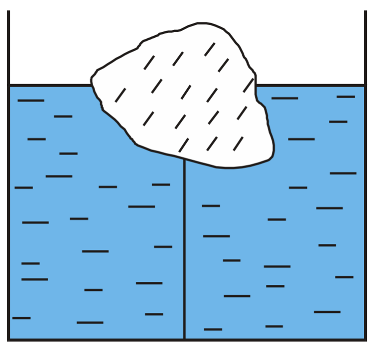

Рис. 2

Странные игроки

Б.ФРЕНКИН

Парадоксы турнирных таблиц Спортивные турниры служат источником множества логических задач. Даже при простой схеме проведения легко возникают необычные ситуации.

Пример. *Тридцать три богатыря устроили соревнования по борьбе. Каждый боролся с каждым один раз. Победа давала 1 очко, поражение – 0, ничьих не было. Один богатырь выступил странно. Он победил всех, кто в итоге набрал больше очков, чем он, и проиграл всем, кто набрал меньше, чем он. Равного с ним коли- чества очков не набрал никто. Докажите, что странный богатырь занял место не выше тринадцатого и не ниже двадцать первого.*

Решение. Предположим, что странный богатырь занял место выше тринадцатого. Количество тех, кто набрал меньше очков, превышает двадцать. Рассмотрим их поединки между собой. Каждый из них провел не менее 20 поединков. Кто-то выиграл не менее половины этих поединков и, следовательно, набрал в них не менее 10 очков. Кроме того, он победил странного – значит, всего получил не менее 11 очков. Странный богатырь набрал больше его, т.е. не менее 12 очков. Но странный победил только тех, кто выше его в турнирной таблице – следовательно, их не менее 12, и странный не мог занять место выше тринадцатого.

Поменяем теперь результаты всех матчей на противоположные. Условия задачи по-прежнему выполняются, а последовательность занятых мест изменилась на об- ратную. Странный богатырь занял теперь место не выше тринадцатого. Остается заметить, что при 33 участниках двадцать первое место – это тринадцатое с конца.

На любом турнире возможен странный участник вроде такого богатыря. Изучим эту ситуацию подробнее: в ней кроется немало интересного.

Итак, странный участник кругового турнира характеризуется тем, что он выиграл у всех, кто набрал больше очков, чем он, и проиграл всем, кто набрал меньше. С теми, кто выступил наравне с ним, такой игрок мог сыграть как угодно. Подразумевается, что турнир проходит в один круг, причем победа дает одно очко, ничья – половину, поражение – ноль.

Число участников турнира далее обозначаем N. Результат игрока – это сумма очков, которую он набрал. Однако такое определение странного игрока имеет некий изъян. А именно, пусть все участники турнира получили поровну. Тогда для каждого из них отсутствуют и набравшие больше, и набравшие меньше. Формально мы можем считать всех игроков странными. Но это само по себе странно, особенно в такой тривиальной ситуации. Поэтому в дальнейшем всегда предполагается, что *не все участники турнира набрали одинаковое количество очков.* При этом считается допустимым, если никто не на- брал больше очков, чем странный игрок. Точно так же ему не запрещается разделить и последнее место.

Где искать странных?

Представьте себе таблицу результатов турнира. Где в ней могут располагать- ся странные игроки? Для начала дока- жем следующий факт:

Задача 1. *Все странные участники имеют одинаковое количество очков.*

Решение. Пусть А и Б – странные, причем А набрал больше очков, чем Б. Тогда А проиграл Б. Очевидно, А сыграл с каким-то третьим игроком (и не с одним) лучше, чем с ним сыграл Б. Но если такой игрок В набрал меньше очков, чем А, то В выиграл у А (по определению странного игрока). Если же В набрал не меньше очков, чем А, то В набрал больше, чем Б, и тогда Б (как странный) выиграл у В. Значит, А ни с кем не сыграл лучше, чем Б, в противоречии с предыдущим.

Если игрок получил столько же очков, сколько и странные, но сам не является странным, то назовем его *средним.* Тех, кто набрал больше, будем называть *сильными*, а тех, кто набрал меньше, – *слабыми.*

В какой же части турнирной таблицы располагаются странные? Например: Задача 2. а) Может ли странный игрок разделить первое место? А пос- леднее? б) Могут ли на первом или последнем месте находиться только странные?

Решение. а) Пусть в турнире шесть участников (см. таблицу). Первые трое сыграли между собой вничью, четвертый с пятым – также вничью, причем проиграли первым троим, а шестой выиграл у первых трех и проиграл четвертому и пятому. Тогда шестой разделил первое место с первыми тремя игроками и при этом является странным.

	1	2	3	4	5	6
1		$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$	1 : 0	1 : 0	0 : 1
2	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$	1 : 0	1 : 0	0 : 1
3	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$		1 : 0	1 : 0	0 : 1
4	0 : 1	0 : 1	0 : 1		$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$	1 : 0
5	0 : 1	0 : 1	0 : 1	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$		1 : 0
6	1 : 0	1 : 0	1 : 0	0 : 1	0 : 1	

Чтобы поместить странного игрока на последнее место, поменяем все результаты на противоположные.

б) Пусть первое место полностью при- надлежит странным, и их число равно M. Любой из них проиграл всем, кто не делит первое место, и поэтому набрал не более M – 1 очков. Игрок, не находящийся на первом месте, выиграл у всех странных и потому получил результат не меньше M, что противоречит предыдущему. Значит, первое место не может принадлежать только странным.

Для последнего места рассуждение аналогичное.

Мы видели, что все странные на- бирают одинаковое количество очков. И не нужно знать исход каждого матча, чтобы определить это количе- ство: **Задача 3.** *Известны результаты всех игроков. Известно также, что на турнире были странные участни- ки. Как определить, сколько очков они набрали?*

Решение этой задачи, а также задач 4, 5 и 7 см. в конце журнала.

Обычных – всегда большинство. Но не всегда подавляющее

Сколько же может быть на турнире странных участников? Ясно, что все одновременно такими не бывают. Бо- лее точно:

Задача 4. *а) Число странных всегда не больше [N/2] — 1. Докажите это.*