Векторные пространства

Содержание

§1. Определение векторного пространства

Опр. 1.1. ***Векторным*** (***линейным***) ***пространством*** над полем $\mathbb{F}$ (например, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется множество V с операциями сложения и умножения на элементы поля $\mathbb{F}$, обладающими следующими свойствами (***аксиомами векторного пространства***):

1. Относительно сложения V есть абелева группа;
2. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ для любых $a, b \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$;
3. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in V$;
4. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in V$;
5. $1a = a$ для любого $a \in V$.

NtB. Элементы пространства V называются ***векторами***, поля $\mathbb{F}$ — ***скалярами*** или ***числами***. Векторные пространства над полем $\mathbb{R}$ называются ***вещественными***, над $\mathbb{C}$ — ***комплексными***.

NtB. Наличие противоположного элемента позволяет ввести операцию вычитания: $a - b := a + (-b)$.

Лемма 1.1. *Следствия аксиом векторного пространства (докажите их!):*

1. $\lambda 0 = 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{F}$ (здесь 0 — нулевой вектор);
2. $\lambda(-a) = \lambda a$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in V$;
3. $\lambda(a - b) = \lambda a - \lambda b$ для любых $\lambda \in \mathbb{F}$, $a, b \in V$;
4. $0a = 0$ для любого $a \in V$ (здесь 0 слева — скаляр, справа — вектор);
5. $(-1)a = -a$ для любого $a \in V$;
6. $(\lambda - \mu)a = \lambda a - \mu a$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in V$.

Пример 1.1. Примеры линейных пространств:

(a) Пространство $\{0\}$, состоящее только из нулевого вектора;

(б) Множество $\mathbb{F}^n$ столбцов высоты n с элементами из $\mathbb{F}$ относительно операций поэлементного сложения и умножения на числа — ***арифметическое*** или ***координатное*** пространство;

(в) Множество $F(X, \mathbb{F})$ всех функций на множестве X со значениями в поле $\mathbb{F}$ относительно операций поточечного сложения и умножения на числа;

(г) Множество $\mathbb{C}$ с привычными операциями можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{R}$;

(д) Геометрические векторы со стандартными операциями сложения и умножения на числа;

(е) Вещественные квадратные матрицы n-того порядка $M_n(\mathbb{R})$ относительно стандартных операций сложения и умножения на числа;

(ж) Вещественные многочлены $\mathbb{R}[x]$ с естественными операциями;

(з) Вещественные многочлены степени ровно n с естественными операциями не являются векторным пространством.

§2. Линейные комбинации и оболочки

Опр. 2.1. Выражение вида $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ $(\lambda_i \in \mathbb{F})$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $a_1, \ldots, a_n \in V$. Скаляры λ_i называются ***коэффициентами*** линейной комбинации. Говорят, что вектор b ***линейно выражается*** через векторы $a_1, \ldots, a_n$, если он равен некоторой их линейной комбинации.

Опр. 2.2. ***Линейной оболочкой*** подмножества $S \subseteq V$ называется множество всех векторов V, представимых в виде <u>конечных</u> линейных комбинаций элементов из S. Она обозначается $\langle S \rangle$. Говорят, что пространство V ***порождается*** множеством S, если $\langle S \rangle = V$

Пример 2.1. Примеры линейных оболочек:

(а) Линейная оболочка матричных единиц $E_{11}, \ldots, E_{nn} \in M_n(\mathbb{R})$ — множество диагональных матриц n-ного порядка;

(б) Линейная оболочка многочленов $1, x, x^2 \in \mathbb{R}[x]$ — все вещественные многочлены степени не выше второй;

(в) Пространство $\mathbb{R}[x]_3$ вещественных многочленов степени не выше 3 порождается, например, множеством $5x^3, x^3 - 7, 4x^2, 2x + 9, 3x, 2$.

Опр. 2.3. Линейная комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ $(\lambda_i \in \mathbb{F})$ векторов $a_1, \ldots, a_n \in V$ называется ***тривиальной***, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, и ***нетривиальной*** в противном случае.

Опр. 2.4. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ называются ***линейно зависимыми***, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, и ***линейно независимыми*** в противном случае.

NtB. Понятие ***системы векторов*** отличается от понятия множества векторов следующим:

1. Векторы системы занумерованы (если не менять сами векторы, но поменять лишь их нумерацию, получим уже другую систему);
2. Среди них могут быть равные.

Может быть ***пустая система***, состоящая из пустого множества векторов.

Пример 2.2. Примеры линейной зависимости:

(а) Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой;

(б) Система, состоящая из двух векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы пропорциональны;

(в) Три геометрических векторы линейной зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны;

(г) Векторы 1, x, $x^2 \in \mathbb{R}[x]$ линейно независимы, векторы 2, $3x$, $5 + x \in \mathbb{R}[x]$ линейно независимы.

Лемма 2.1. *Свойтсва линейно (не)зависимых систем:*

1. *Система векторов линейно зависима тогда и только тогда,когда один из этих столбцов есть линейная комбинация остальных;*
2. *Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то вся система линейно зависима;*
3. *Если система векторов линейно независима, то любая её подсистема тоже линейно независима.*

§3. Базис и размерность

Опр. 3.1. Система векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq V$ называется ***базисом*** векторного пространства V, если каждый вектор $a \in V$ единственным образом выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Коэффициенты этого выражения называются ***координатами*** вектора a в данном базисе.

NtB. Переход от вектора к его координатам в некотором базисе позволяет вместо изначального пространства рассматривать соответствующее координатное пространство.

Пример 3.1. Примеры базисов:

(а) Любые два неколлинеарных вектора составляют базис пространства геометрических векторов плоскости;

(б) Единичные столбцы $(1, 0, \ldots, 0)^T$, $(0, 1, \ldots, 0)^T$, …, $(0, 0, \ldots, 1)^T$ составляют базис пространства $\mathbb{F}^n$;

(в) Система $\{1, i\}$ является базисом $\mathbb{C}$ как векторного пространства над $\mathbb{R}$. Координатами комплексного числа в данном базисе являются его вещественная и мнимая части;

(г) Стандартные матричные единицы E_{ij} образуют базис пространства $M_n(\mathbb{R})$;

(д) Система $\{x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1\}$ — базис пространства $\mathbb{R}[x]_n$ вещественных многочленов степени не выше n.

Лемма 3.1. *Набор векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, порождающий векторное пространство V, является базисом тогда и только тогда, когда он линейной независим.*

Доказательство. Если $\sum \lambda_i e_i = 0$ и не все λ_i нулевые, то любой вектор $x = \sum x_i e_i$ допускает <u>другое</u> выражение $x = \sum (x_i + \lambda_i) e_i$ через векторы e_i. Обратно, если $x = \sum x_i e_i = \sum \widetilde{x}_i e_i$ — два различных представления одного вектора, то, перенося правую часть в середину, получаем линейную зависимость $\sum (x_i - \widetilde{x}_i) = 0$. $\square$

NtB. В силу данной леммы можно переформулировать определение базиса следующим образом: ***базисом*** векторного пространства V называется всякая линейно независимая система, порождающая пространство V.

NtB. Не во всяком векторном пространстве существует базис в смысле данного выше определения. Вообще, если в пространстве существует базис из n векторов, то и любой другой базис этого пространства тоже содержит n векторов. Число элементов произвольного базиса (если он существует) в V называется ***размерностью*** пространства V и обозначается $\dim V$. В пространстве $\{0\}$ базисом по определению является пустая система (то есть его размерность равна нулю). Если базиса в смысле данного вышего определения не существует, то можно считать, что $\dim V = \infty$. Если $\dim V < \infty$, то пространство называется ***конечномерным***.

Теорема 3.1. ***(свойство монотонности размерности)*** *Любое подпространство U конечномерного пространства V тоже конечномерно, причём $\dim U \leqslant \dim V$. Более того, если $U \neq V$, то неравенство строгое.*