Вариант 6 Шимук Андрей Александрович
409909

(1) $\frac{(1-3i)(1+3i)}{-i(3+i)}-2i^{18}=\frac{1-9i^2}{-3i-i^2}+2=\frac{10}{1-3i}+2=\frac{10+2-6i}{1-3i}=$

$=\frac{12-6i}{1-3i}=\frac{(12-6i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{12+30i-18i^2}{1-9i^2}=\frac{12+18+30i}{1+9}=$

$=\frac{30i+30}{10}=3i+3$

(2) $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}i}$

$z=1+\sqrt{3}i$ $\quad tg\,\varphi=\frac{\sqrt{3}}{1}$ $\quad \varphi=\frac{\pi}{3}$ $\quad r=\sqrt{1+3}=2$

$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4}\right),\ k=0,1,2,3$

$k=0:$

$\varepsilon_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$k=1:$

$\varepsilon_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

$k=2:$

$\varepsilon_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$

$k=3:$

$\varepsilon_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

(3) $x^4+x^3-4x^2+2x-12$

по схеме Горнера

	1	1	-4	2	-12
2	1	3	2	6	0

$(x-2)(x^3+3x^2+2x+6)$

	1	3	2	6
-3	1	0	2	0

$(x-2)(x+3)(x^2+2)$

$x^2+2=0$

$x^2=-2$

$x=\pm\sqrt{-2}$

$x=\pm\sqrt{2}\sqrt{-1}$

$x=\pm\sqrt{2}\,i$

$x^4+x^3-4x^2+2x-12=(x-2)(x+3)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$

4) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & -5 & 2 & -5 \\ -3 & 5 & -7 & -3 & -9 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 & -4 \\ 7 & 8 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \overset{\substack{(1)+2(2)\\(3)+(2)\\(4)+(2)}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 14 & -19 & -4 & -23 \\ -3 & 5 & -7 & -3 & -9 \\ 0 & 13 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -11 & 0 & -13 \\ 7 & 8 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ (3) столбец + (2) столбец, (4) столбец − (1) столбец, (5) столбец − 3(1) столбец $=$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 14 & -5 & -4 & -23 \\ -3 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 8 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & -13 \\ 7 & 8 & 6 & -4 & -26 \end{vmatrix} \overset{(5)-2(4)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 14 & -5 & -4 & -23 \\ -3 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 8 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & -13 \\ 7 & -14 & 6 & -4 & 0 \end{vmatrix} =$$

(2) столбец + 2(1) столбец

$$= \begin{vmatrix} 0 & 14 & -5 & -4 & -23 \\ -3 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 8 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & -13 \\ 7 & 0 & 6 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 14 & -5 & -4 & -23 \\ 13 & 8 & 1 & -7 \\ 11 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 14 & -5 & -4 & -23 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 13 & 8 & 1 & -7 \\ 11 & 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\left(11\begin{vmatrix} -5 & -4 & -23 \\ 8 & 1 & -7 \\ 6 & -4 & 0 \end{vmatrix} + 13\begin{vmatrix} 14 & -5 & -4 \\ 13 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix}\right) + 7\left(\begin{vmatrix} -5 & -4 & -23 \\ 8 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 14 & -4 & -23 \\ 13 & 1 & -7 \\ 11 & 0 & -13 \end{vmatrix}\right) =$$

$= 3\left(11(168+736+138+140)+13(-448-312-260-84)\right)+$

$+7\left(-13\begin{vmatrix}-5 & -4\\ 8 & 1\end{vmatrix}-2(-182+308+253-676)\right)=$

$= 3\left(11\cdot 1182+13\cdot(-1104)+7(-13\cdot 27-2\cdot(-297)\right)=$

$= 3\cdot(-1350)+7\cdot 243 = -2349$

5 $\begin{cases} 2x+y+z=7\\ x+2y+z=8\\ x+y+2z=9 \end{cases}$

$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ приведем к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \overset{(2)-(3)}{\sim} \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \overset{(3)-\frac{1}{2}(1)}{\sim} \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0{,}5 & 1{,}5\end{pmatrix} \overset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\sim} \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$r=3$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 1 & 7\\ 1 & 2 & 1 & 8\\ 1 & 1 & 2 & 9\end{array}\right) \overset{(2)-(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 1 & 7\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 9\end{array}\right) \overset{(3)-\frac{1}{2}(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 1 & 7\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0{,}5 & 1{,}5 & 5{,}5\end{array}\right) \sim$$

$$\overset{(3)-\frac{1}{2}(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 1 & 7\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 6\end{array}\right) \quad r=3$$

система совместна

Методом Гаусса:

$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 1 & 7\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 6\end{array}\right)$ $2z=6$, $z=3$ $\quad$ $y-3=-1$, $y=2$ $\quad$ $2x+3+2=7$, $2x=2$, $x=1$

методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 1 = 4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 21 - 7 - 10 = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 14 - 7 + 1 = 8$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 1 - 7 = 12$$

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ $\quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ $\quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

$x = \frac{4}{4}$ $\quad y = \frac{8}{4}$ $\quad z = \frac{12}{4}$

$x = 1$ $\quad y = 2$ $\quad z = 3$

в матричном виде.

$A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$X = A^{-1} \cdot B$

$\det A = 4$ (из метода Крамера)

$\det A \neq 0 \rightarrow$ имеется обратная матрица

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*T}$

$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,75 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 0,75 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,75 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 \cdot 7 - 0,25 \cdot 8 - 0,25 \cdot 9 \\ -0,25 \cdot 7 + 0,75 \cdot 8 - 0,25 \cdot 9 \\ -0,25 \cdot 7 - 0,25 \cdot 8 + 0,75 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3$

6 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

определим ранг системы

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-0,4(3)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -0,2 & 2,6 & -0,2 & 0,8 \\ 5 & -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-\frac{5}{3}(1)}$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -0{,}2 & 2{,}6 & -0{,}2 & 0{,}8 \\ 0 & -1/3 & 13/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix} \overset{(3)-\frac{5}{3}(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -0{,}2 & 2{,}6 & -0{,}2 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r = 2$

x_3, x_4, x_5 - свободные неизвестные

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ -0{,}2x_2 + 2{,}6x_3 - 0{,}2x_4 + 0{,}8x_5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - 3x_1 = -2x_3 - x_4 + x_5 \\ 0{,}2x_2 = 2{,}6x_3 - 0{,}2x_4 + 0{,}8x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 = -15x_3 - 3x_5 \\ x_2 = 13x_3 - x_4 + 4x_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 5x_3 + x_5 \\ x_2 = 13x_3 - x_4 + 4x_5 \end{cases}$$

$$X_{0.0} = (5x_3 + x_5 ; 13x_3 - x_4 + 4x_5 ; x_3 ; x_4 ; x_5)$$

Пусть $x_3 = 1 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 3$

$$X_{4.0} = (8; 23; 1; 2; 3)$$

Зададим $X_1 : x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$

$X_2 : x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$

$X_3 : x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X_1	5	13	1	0	0
X_2	0	-1	0	1	0
X_3	1	4	0	0	1

7. Данное множество не будет составлять линейное пространство т.к. можно подобрать пару таких многочленов, сумма которых не будет давать многочлен шестой степени.

$f_1(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^3 - 1$

$f_2(x) = -x^6 + 5x^5 + 3x^4 - x^3$

$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x) = 5x^5 + x^3 - 1$

⑧ $\vec{d}=(4,0,-1)$ $\vec{a}=(2,-1,3)$ $\vec{b}=(1,0,-1)$ $\vec{c}=(0,-1,2)$

$$\vec{d}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}+\gamma\cdot\vec{c}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=4\\-\alpha-\gamma=0\\3\alpha-\beta+2\gamma=-1\end{cases}$$

решим методом Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&0\\-1&0&-1\\3&-1&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&-1\\-1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1&-1\\3&2\end{vmatrix}=-2-1=-3$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}4&1&0\\0&0&-1\\-1&-1&2\end{vmatrix}=+1\cdot\begin{vmatrix}4&1\\-1&-1\end{vmatrix}=-3$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&4&0\\-1&0&-1\\3&-1&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&-1\\-1&2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-1&-1\\3&2\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&4\\-1&0&0\\3&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4\\-1&-1\end{vmatrix}=3$$

$$\alpha=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-3}{-3}=1$$

$$\beta=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-6}{-3}=2$$

$$\gamma=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{3}{-3}=-1$$

$$\vec{d}=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$$

9 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$

$A-\lambda E=\begin{pmatrix}3-\lambda & 2 & -1\\ 0 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{pmatrix}$

$|A-\lambda E| = (3-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2-1) =$

$= (3-\lambda)(3-4\lambda+\lambda^2)=0$

$\lambda^2-4\lambda+3=0$ $\qquad$ $3-\lambda=0$ $\qquad \to \lambda_1=1 \quad \lambda_{2,3}=3$

$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=3$ $\qquad$ $\lambda_3=3$

$\lambda_{2,3}=3$

$A-3E=\begin{pmatrix}3-3 & 2 & -1\\ 0 & 2-3 & -1\\ 0 & -1 & 2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

методом Гаусса

$\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\quad r=2 \quad n=3$

x_1 - свободная неизвестная

$\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}2x_2-x_3=0\\ -x_2-x_3=0\end{cases} \quad \begin{cases}2x_2+x_2=0\\ x_3=-x_2\end{cases} \quad \begin{cases}x_2=0\\ x_3=0\end{cases}$

$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

Проверка: Пусть $x_1=1$, тогда $X=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

$A \times X = \lambda \times X$

$\lambda_1 = 1$

$$A - E = \begin{pmatrix} 3-1 & 2 & -1 \\ 0 & 2-1 & -1 \\ 0 & -1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)+(2)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r=2 \quad n=3$$

x_3 - свободная неизвестная

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}5x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Проверка: Пусть $x_3 = 2$, тогда $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}} \times \underset{X}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underset{\lambda \cdot X}{1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Ответ: $\lambda_1 = 1 \quad X = \begin{pmatrix} -0{,}5x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\lambda_{2,3} = 3 \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$