

Группа Р3208

К работе допущен _____

Студент Шмунк Андрей Александрович

Работа выполнена 22.09.2024

Преподаватель Сорокина Е.К.

Отчет принят _____

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1.01

Исследование распределения случайной величины

1. Цель работы.

Исследовать распределения случайной величины на примере многократных измерений длины определённых предметов.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

1. Провести многократные измерения длины определенных предметов.
2. Построить гистограмму распределения результатов измерения.
3. Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки.
4. Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же, как и у экспериментального распределения средним значением.

3. Объект исследования.

Случайная величина – результат измерений длин листьев на кустарнике, растущем возле дома.

4. Метод экспериментального исследования.

Многократное прямое измерение длин определенных предметов и проверка закономерностей распределения значений этой случайной величины.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

- $\langle l \rangle_N = \frac{1}{N} (l_1 + l_2 + \dots + l_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_i$ – среднее арифметическое всех результатов измерений.
- $\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (l_i - \langle l \rangle_N)^2}$ – выборочное среднеквадратичное отклонение.
- $\rho_{max} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$ – максимальное значение плотности распределения.
- $\sigma_{\langle l \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (l_i - \langle l \rangle_N)^2}$ – среднеквадратичное отклонение среднего значения.
- $\rho(l) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(l - \langle l \rangle)^2}{2\sigma^2}\right)$ – нормальное распределение, описываемое функцией Гаусса.
- $\Delta l = l_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle l \rangle}$ – доверительный интервал.

6. Измерительные приборы.

№ п/п	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Линейка	Аналоговый	0-15 см	0.05см

7. Схема установки.

Кустарник и линейка, с ценой деления не более 0.1 см. Длина листов кустарника многократно измеряется при помощи линейки.

8. Результаты прямых измерений и их обработки.

Таблица 1. Результаты прямых измерений.

№	$l_i, \text{ см}$	$l_i - \langle l \rangle_N, \text{ см}$	$(l_i - \langle l \rangle_N)^2, \text{ см}^2$
1	8,0	1,22	1,49
2	6,5	-0,28	0,08
3	8,5	1,72	2,96
4	5,5	-1,28	1,64
5	6,0	-0,78	0,61
6	3,5	-3,28	10,76
7	7,0	0,22	0,05
8	9,0	2,22	4,93
9	5,0	-1,78	3,17
10	4,0	-2,78	7,73
11	4,5	-2,28	5,20
12	5,2	-1,58	2,50
13	11,0	4,22	17,81
14	1,5	-5,28	27,88
15	2,0	-4,78	22,85
16	4,3	-2,48	6,15
17	10,0	3,22	10,37
18	12,0	5,22	27,25
19	10,5	3,72	13,84
20	7,5	0,72	0,52
21	2,3	-4,48	20,07
22	5,6	-1,18	1,39
23	12,5	5,72	32,72
24	3,5	-3,28	10,76
25	6,7	-0,08	0,01
26	4,0	-2,78	7,73
27	9,8	3,02	9,12
28	5,6	-1,18	1,39
29	4,3	-2,48	6,15
30	7,5	0,72	0,52
31	8,9	2,12	4,49
32	2,5	-4,28	18,32
33	11,2	4,42	19,53
34	13,0	6,22	38,69
35	3,5	-3,28	10,76
36	4,5	-2,28	5,20

37	5,6	-1,18	1,39
38	1,9	-4,88	23,82
39	2,5	-4,28	18,32
40	2,7	-4,08	16,65
41	5,6	-1,18	1,39
42	7,8	1,02	1,04
43	9,2	2,42	5,86
44	10,3	3,52	12,39
45	3,4	-3,38	11,43
46	5,6	-1,18	1,39
47	7,4	0,62	0,38
48	8,9	2,12	4,49
49	5,8	-0,98	0,96
50	9,3	2,52	6,35
51	5,6	-1,18	1,39
52	1,5	-5,28	27,88
53	2,8	-3,98	15,84
54	4,5	-2,28	5,20
55	4,8	-1,98	3,92
56	3,4	-3,38	11,43
57	5,0	-1,78	3,17
58	9,0	2,22	4,93
59	3,0	-3,78	14,29
60	6,0	-0,78	0,61
61	6,7	-0,08	0,01
62	8,0	1,22	1,49
63	4,7	-2,08	4,33
64	6,7	-0,08	0,01
65	5,0	-1,78	3,17
66	10,0	3,22	10,37
67	10,5	3,72	13,84
68	12,0	5,22	27,25
69	12,5	5,72	32,72
70	10,5	3,72	13,84
71	4,7	-2,08	4,33
72	5,4	-1,38	1,90
73	6,5	-0,28	0,08
74	4,0	-2,78	7,73
75	7,8	1,02	1,04
76	8,0	1,22	1,49
77	9,1	2,32	5,38
78	10,0	3,22	10,37
79	3,6	-3,18	10,11
80	15,0	8,22	67,57
81	13,5	6,72	45,16
82	6,7	-0,08	0,01
83	8,9	2,12	4,49
84	6,0	-0,78	0,61

85	3,1	-3,68	13,54
86	4,0	-2,78	7,73
87	5,8	-0,98	0,96
88	4,6	-2,18	4,75
89	7,0	0,22	0,05
90	3,8	-2,98	8,88
91	8,0	1,22	1,49
92	5,7	-1,08	1,17
93	6,7	-0,08	0,01
94	10,9	4,12	16,97
95	11,4	4,62	21,34
96	5,0	-1,78	3,17
97	6,7	-0,08	0,01
98	10,9	4,12	16,97
99	11,4	4,62	21,34
100	4,5	-2,28	5,20
101	11,0	4,22	17,81
	$\langle l \rangle_N = 6,78 \text{ см}$	$\sum_{i=1}^N (l_i - \langle l \rangle_N) = 0 \text{ см}$	$\sigma_N = 3,09 \text{ см}$ $\rho_{\max} = 0,13 \text{ см}^{-1}$

9. Расчет результатов косвенных измерений.

- $\langle l \rangle_N = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{101} l_i N_i = 6,78 \text{ см}$
- $\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{101-1} \sum_{i=1}^{101} (l_i - 6,78)^2} = 3,09 \text{ см}$
- $\rho_{\max} = \frac{1}{3,098\sqrt{2\pi}} = 0,13 \text{ см}^{-1}$
- $\sigma_{\langle l \rangle} = \sqrt{\frac{1}{101 \cdot 100} \sum_{i=1}^{101} (l_i - 6,78)^2} = 0,31 \text{ см}$
- $l_{\min} = 1,5 \text{ см}, l_{\max} = 15 \text{ см}, \sqrt{N} \approx 10$ — тогда для построения гистограммы возьмем 10 интервалов $\Delta l = 1,35 \text{ см}$

Таблица 2. Данные для построения гистограммы.

Границы интервалов, см	ΔN	$\frac{\Delta N}{N \Delta l}, \text{ см}^{-1}$	$l, \text{ см}$	$\rho, \text{ см}^{-1}$
1,50	9	0,07	2,18	0,04
2,85				
2,85	13	0,10	3,53	0,07
4,20				
4,20	17	0,12	4,88	0,11
5,55				
5,55	20	0,15	6,23	0,13
6,90				

6,90	11	0,08	7,58	0,12
8,25				
8,25	9	0,07	8,93	0,10
9,60				
9,60	10	0,07	10,28	0,07
10,95				
10,95	7	0,05	11,63	0,034
12,30				
12,30	4	0,03	12,975	0,02
13,65				
13,65	1	0,01	14,325	0,01
15,00				

Рассчитаем значения для первого интервала:

В диапазон [1,50;2,85] попадает 9 значений, $\Delta N=9$

$$\frac{\Delta N}{N\Delta l} = \frac{9}{1,35 * 101} \approx 0,07 \text{ см}^{-1}$$

$$l=(1,50+2,85)/2 \approx 2,18 \text{ см}$$

$$\rho(2,18) = \frac{1}{3,09\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(2,18 - 6,78)^2}{2 * 3,09^2}\right) \approx 0,04$$

Аналогично с остальными интервалами.

Таблица 3. Стандартные доверительные интервалы

	Интервал, см		ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	P
	от	до			
$\langle l \rangle_N \pm \sigma$	3,69	9,88	6,00	0,06	0,62
$\langle l \rangle_N \pm 2\sigma$	0,59	12,97	12,00	0,12	0,97
$\langle l \rangle_N \pm 3\sigma$	-2,50	16,07	16,00	0,16	1,00

Рассчитаем для интервала [3,69,9,88]

$$\Delta N = 6; \frac{\Delta N}{N} = \frac{6}{101} \approx 0,6; N_{12}=63; P = \frac{N_{12}}{N} = \frac{63}{101} \approx 0,62$$

Аналогично с остальными интервалами.

10. Расчет погрешностей измерений (для прямых и косвенных измерений).

Рассчитаем случайную погрешность:

$$\overline{\Delta x} = t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{(l)} \approx 1,98 \cdot 0,31 = 0,61; t_{\alpha,N} \approx 2,01;$$

Рассчитаем абсолютную погрешность с учетом погрешности прибора:

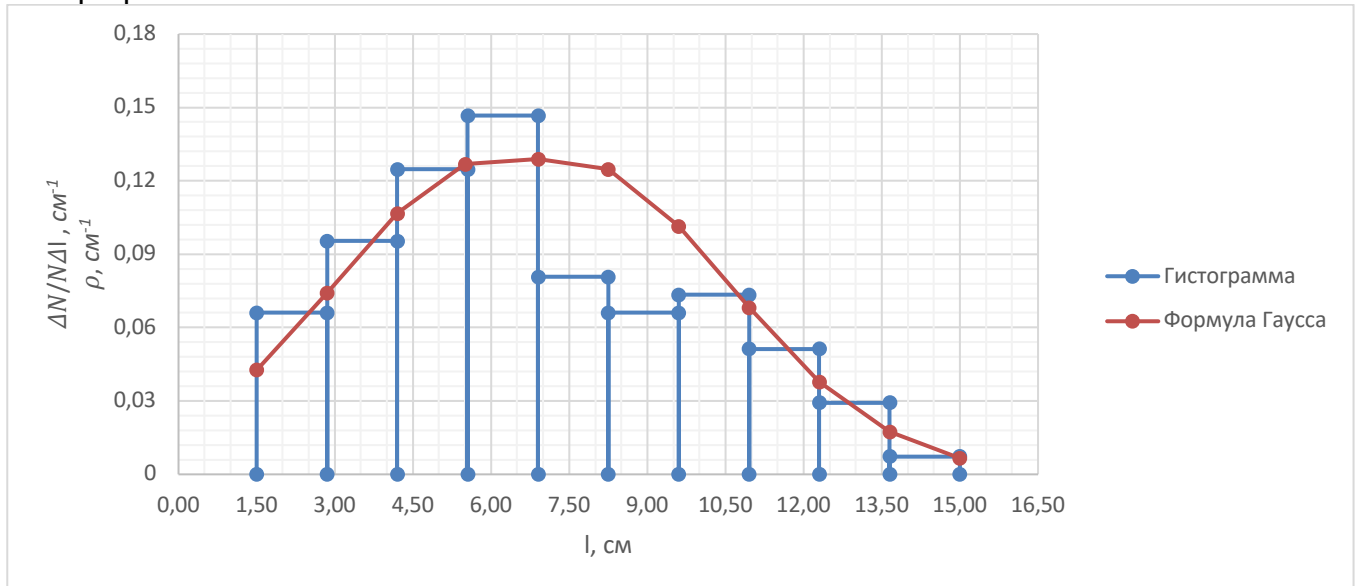
$$\Delta_{ux} = 0,05 \text{ см};$$

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x)^2 + \left(\frac{2}{3} \Delta_{ux}\right)^2} \approx 0,61 \text{ см}$$

Рассчитаем относительную погрешность измерения:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% = 9,02 \%$$

11. Графики.



12. Окончательные результаты.

$$l = (6,78 \pm 0,67) \text{ см } \varepsilon_l = 9,02\% \alpha = 0,95$$

13. Выводы и анализ результатов работы.

Было исследовано распределение случайной величины на примере многократных замеров длины, получена выборка из 101 измерения. Результаты прямых измерений, данные для построения гистограммы, стандартные доверительные интервалы были занесены в соответствующие таблицы. После заполнения таблиц была построена гистограмма и функция Гаусса.

При сравнении гистограммы с графиком функции Гаусса - распределения случайной величины (при таких же начальных параметрах) – было отмечено сходство этих графиков. Сравнение вероятностей для стандартных интервалов с табличными значениями подтверждает случайность распределения. Работа позволила ознакомиться с законом распределения случайной величины и подробно его изучить.