

### Часть III. Третий уровень сложности

#### 3.16. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

**Задание 3.16.** Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме.

$$3.16.1. \frac{5-8i}{(1+9i)(5+7i)} - \frac{8-4i}{1-5i}.$$

$$3.16.3. \frac{-4-3i}{(1-8i)(5+7i)} - \frac{4-4i}{-1-8i}.$$

$$3.16.5. \frac{(4+9i)(-1-7i)}{6-5i} + \frac{-2-5i}{-2-3i}.$$

$$3.16.7. \frac{(-6+3i)(-8-4i)}{1-i} + \frac{-4-6i}{3+2i}.$$

$$3.16.9. \frac{1-i}{-9-5i} - \frac{2-3i}{2-3i}.$$

$$3.16.11. \frac{(1-8i)(4+9i)}{-3-i} + \frac{8+7i}{1+5i}.$$

$$3.16.13. \frac{9+7i}{(1-4i)(9-7i)} - \frac{1+5i}{9-8i}.$$

$$3.16.15. \frac{(1+4i)(7-5i)}{3-8i} + \frac{-2-7i}{3-2i}.$$

$$3.16.17. \frac{-2+5i}{3-5i} - \frac{-4-3i}{(9+5i)(-2-8i)}.$$

$$3.16.19. \frac{(-3-5i)(2+9i)}{5-i} + \frac{7-2i}{-3+5i}.$$

$$3.16.21. \frac{6-9i}{4-5i} - \frac{5+9i}{(1-4i)(-6-7i)}.$$

$$3.16.23. \frac{(2-3i)(-6+5i)}{1-i} + \frac{8-7i}{6+8i}.$$

$$3.16.25. \frac{3+7i}{-8-5i} - \frac{(-8+4i)(-1-7i)}{6+2i}.$$

$$3.16.27. \frac{(1-4i)(3+8i)}{6-i} + \frac{8+3i}{7+5i}.$$

$$3.16.29. \frac{1+6i}{2+8i} - \frac{-8+3i}{(1-i)(-3-4i)}.$$

$$3.16.31. \frac{8-6i}{6-i} + \frac{(2-4i)(-3+5i)}{-9+7i}.$$

$$3.16.33. \frac{8-6i}{-6-5i} - \frac{5+9i}{(5-3i)(-4-3i)}.$$

$$3.16.35. \frac{-2+5i}{-1-5i} + \frac{(-6-5i)(1+7i)}{-8+7i}.$$

$$3.16.2. \frac{(-2+8i)(3+8i)}{-5-i} + \frac{-2+9i}{1-3i}.$$

$$3.16.4. \frac{(1-7i)(4+9i)}{2-i} + \frac{3-3i}{-4+6i}.$$

$$3.16.6. \frac{-2+8i}{(1-3i)(-7-7i)} - \frac{1-4i}{-3-9i}.$$

$$3.16.8. \frac{(1-3i)(2-2i)}{5-3i} + \frac{3-7i}{8-2i}.$$

$$3.16.10. \frac{-2+3i}{(2-5i)(-3+5i)} - \frac{2+i}{3-6i}.$$

$$3.16.12. \frac{(-7+6i)(-1-7i)}{-4-5i} + \frac{1-2i}{1-8i}.$$

$$3.16.14. \frac{(7-2i)(4-4i)}{-6-i} + \frac{9-2i}{-1+2i}.$$

$$3.16.16. \frac{1+5i}{1-6i} + \frac{-6+7i}{(2+5i)(-6-8i)}.$$

$$3.16.18. \frac{-2+5i}{(1-5i)(2-7i)} - \frac{1-3i}{-6-4i}.$$

$$3.16.20. \frac{8-i}{3-8i} + \frac{-2-7i}{(-5+4i)(6-2i)}.$$

$$3.16.22. \frac{1-9i}{(-2-6i)(8+3i)} - \frac{-7+i}{6-9i}.$$

$$3.16.24. \frac{7-i}{4+3i} + \frac{1-8i}{(6+5i)(-1+7i)}.$$

$$3.16.26. \frac{-1+7i}{(2-4i)(-3-8i)} - \frac{2-3i}{9+4i}.$$

$$3.16.28. \frac{-5-i}{4+5i} + \frac{(-5+4i)(6-2i)}{5+3i}.$$

$$3.16.30. \frac{-8+5i}{(-2-6i)(8-3i)} - \frac{-7-i}{1-4i}.$$

$$3.16.32. \frac{2-i}{4-7i} + \frac{-3+8i}{(-6+4i)(1-3i)}.$$

$$3.16.34. \frac{2-6i}{(-3-6i)(4+3i)} - \frac{9+i}{6+5i}.$$

$$3.16.36. \frac{5-i}{-6-7i} + \frac{-5+3i}{(-7+3i)(-4-8i)}.$$

#### 3.17. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

**Задание 3.17.** Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

$$3.17.1. \frac{(3+3i)^4 i^3}{(2-2i)^2 (3+\sqrt{3}i)^4}.$$

$$3.17.3. \frac{(4-4i)^2 i^7}{(2+2\sqrt{3}i)^3 (1+i)}.$$

$$3.17.2. \frac{(1-i)^2 i^5}{(2+2i)^3 (1+\sqrt{3}i)}.$$

$$3.17.4. \frac{(5-5i)^2 i^5}{(1+i)^3 (1+\sqrt{3}i)^2}.$$

$$\begin{aligned}
3.17.5. & \frac{(5\sqrt{3}-5i)^4 i^3}{(3+\sqrt{3}i)^3 (2+2\sqrt{3}i)^2} \cdot \\
3.17.7. & \frac{(5+5i)^4 i^4}{(7-7i)^3 (1-\sqrt{3}i)^3} \cdot \\
3.17.9. & \frac{(-2-2\sqrt{3}i)^7 i^4}{(-8-8i)^3 (-1+\sqrt{3}i)^3} \cdot \\
3.17.11. & \frac{(8\sqrt{3}-8i)^5 i^4}{(7-7i)^5 (-1+\sqrt{3}i)^2} \cdot \\
3.17.13. & \frac{(1-i)^4 (5+5i)^5}{i^2 (6+6\sqrt{3}i)^4} \cdot \\
3.17.15. & \frac{(2-2i)^4 (1-i)^2}{i^6 (-2+2\sqrt{3}i)^5} \cdot \\
3.17.17. & \frac{(-2+2i)^6 (-3-3i)^3}{i^9 (6-6\sqrt{3}i)^5} \cdot \\
3.17.19. & \frac{(-1+i)^4 (1-\sqrt{3}i)^3}{i^3 (6+6\sqrt{3}i)^3} \cdot \\
3.17.21. & \frac{(-3-3i)^5 (-1-\sqrt{3}i)^3}{i^7 (\sqrt{3}+i)^{10}} \cdot \\
3.17.23. & \frac{(1+i)^8 (2-2\sqrt{3}i)^4}{i^7 (-\sqrt{3}+3i)^5} \cdot \\
3.17.25. & \frac{(3-3i)^4 (-1-\sqrt{3}i)^3}{i^9 (-\sqrt{3}+3i)^4} \cdot \\
3.17.27. & \frac{(\sqrt{3}-i)^7 (-1-\sqrt{3}i)^6}{i^4 (-4+4i)^4} \cdot \\
3.17.29. & \frac{(-3+3i)^4 (1-\sqrt{3}i)^3}{i^8 (-\sqrt{3}+i)^7} \cdot \\
3.17.31. & \frac{(3+3i)^2 (1+\sqrt{3}i)^3}{i^8 (-\sqrt{3}+i)^4} \cdot \\
3.17.33. & \frac{(1-i)^5 (-2+2\sqrt{3}i)^3}{i^5 (-\sqrt{3}+i)^7} \cdot \\
3.17.35. & \frac{(-2+2i)^6 (-\sqrt{3}-i)^4}{i^6 (-\sqrt{3}+3i)^5} \cdot \\
3.17.6. & \frac{(6-6i)^4 i^5}{(-7-7i)^3 (1+\sqrt{3}i)^3} \cdot \\
3.17.8. & \frac{(\sqrt{3}-i)^4 i^8}{(4-4i)^3 (1+i)^3} \cdot \\
3.17.10. & \frac{(-1-i)^4 i^5}{(2-2i)^3 (1+\sqrt{3}i)^3} \cdot \\
3.17.12. & \frac{(6+6i)^3 i^5}{(9-9i)^2 (1+\sqrt{3}i)^4} \cdot \\
3.17.14. & \frac{(1+i)^3 (5-5i)^2}{i^3 (6+6\sqrt{3}i)^2} \cdot \\
3.17.16. & \frac{(-9+9i)^3 (-5-5i)^2}{i^8 (3\sqrt{3}+3i)^7} \cdot \\
3.17.18. & \frac{(-3+3i)^7 (5\sqrt{3}-5i)^2}{i^4 (5+5i)^6} \cdot \\
3.17.20. & \frac{(-2+2i)^9 (1+\sqrt{3}i)^2}{i^4 (7-7i)^4} \cdot \\
3.17.22. & \frac{(1-i)^4 (1-\sqrt{3}i)^5}{i^8 (\sqrt{3}+3i)^5} \cdot \\
3.17.24. & \frac{(-1+i)^5 (2-2\sqrt{3}i)^3}{i^5 (-\sqrt{3}-i)^5} \cdot \\
3.17.26. & \frac{(1-\sqrt{3}i)^5 (-\sqrt{3}-i)^3}{i^5 (1+i)^4} \cdot \\
3.17.28. & \frac{(3-3i)^4 (1-\sqrt{3}i)^3}{i^7 (-2\sqrt{3}+2i)^5} \cdot \\
3.17.30. & \frac{(1-i)^4 (1-\sqrt{3}i)^3}{i^9 (-\sqrt{3}+3i)^6} \cdot \\
3.17.32. & \frac{(-2+2i)^3 (1-\sqrt{3}i)^5}{i^8 (-\sqrt{3}-3i)^4} \cdot \\
3.17.34. & \frac{(1-i)^4 (1-\sqrt{3}i)^8}{i^9 (-\sqrt{3}-3i)^5} \cdot \\
3.17.36. & \frac{(2-2i)^5 (1-\sqrt{3}i)^4}{i^4 (-\sqrt{3}+i)^7} \cdot
\end{aligned}$$

### 3.18. Решение биквадратных уравнений

на множестве комплексных чисел

**Задание 3.18.** Решить уравнения на множестве комплексных чисел.

$$\begin{aligned}
3.18.1. & x^4 - 4x^2 + 5 = 0. & 3.18.2. & x^4 + 4x^2 + 8 = 0. \\
3.18.3. & x^4 + 4x^2 + 20 = 0. & 3.18.4. & x^4 - 4x^2 + 29 = 0. \\
3.18.5. & x^4 + 6x^2 + 10 = 0. & 3.18.6. & x^4 - 6x^2 + 13 = 0. \\
3.18.7. & x^4 + 6x^2 + 18 = 0. & 3.18.8. & x^4 + 6x^2 + 25 = 0. \\
3.18.9. & x^4 - 2x^2 + 2 = 0. & 3.18.10. & x^4 + 2x^2 + 5 = 0. \\
3.18.11. & x^4 - 2x^2 + 10 = 0. & 3.18.12. & x^4 + 2x^2 + 17 = 0.
\end{aligned}$$

- |                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 3.18.13. $x^4 + 8x^2 + 17 = 0$ .  | 3.18.14. $x^4 - 8x^2 + 20 = 0$ .  |
| 3.18.15. $x^4 - 8x^2 + 25 = 0$ .  | 3.18.16. $x^4 + 8x^2 + 32 = 0$ .  |
| 3.18.17. $x^4 - 10x^2 + 26 = 0$ . | 3.18.18. $x^4 + 10x^2 + 29 = 0$ . |
| 3.18.19. $x^4 - 10x^2 + 34 = 0$ . | 3.18.20. $x^4 + 10x^2 + 41 = 0$ . |
| 3.18.21. $x^4 + 10x^2 + 50 = 0$ . | 3.18.22. $x^4 + 10x^2 + 61 = 0$ . |
| 3.18.23. $x^4 - 4x^2 + 40 = 0$ .  | 3.18.24. $x^4 + 4x^2 + 53 = 0$ .  |
| 3.18.25. $x^4 + 6x^2 + 34 = 0$ .  | 3.18.26. $x^4 - 6x^2 + 45 = 0$ .  |
| 3.18.27. $x^4 + 6x^2 + 58 = 0$ .  | 3.18.28. $x^4 + 2x^2 + 26 = 0$ .  |
| 3.18.29. $x^4 - 2x^2 + 37 = 0$ .  | 3.18.30. $x^4 + 2x^2 + 50 = 0$ .  |
| 3.18.31. $x^4 + 8x^2 + 41 = 0$ .  | 3.18.32. $x^4 - 8x^2 + 65 = 0$ .  |
| 3.18.33. $x^4 + 12x^2 + 37 = 0$ . | 3.18.34. $x^4 - 12x^2 + 40 = 0$ . |
| 3.18.35. $x^4 + 12x^2 + 45 = 0$ . | 3.18.36. $x^4 + 12x^2 + 52 = 0$ . |

### 3.19. Построение областей в комплексной плоскости

**Задание 3.19.** В комплексной плоскости построить область, заданную условиями.

- 3.19.1.  $|z - i| \leq 1$ .
- 3.19.2.  $|z + 1| \geq 1, \operatorname{Re} z \geq -1$ .
- 3.19.3.  $|z + i| \leq 2$ .
- 3.19.4.  $|z - 2| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq 0$ .
- 3.19.5.  $|\operatorname{Re} z| \leq 3$ .
- 3.19.6.  $|\operatorname{Re} z| \leq 1, |\operatorname{Im} z| \leq 1$ .
- 3.19.7.  $|z| \leq 2, \operatorname{Re} z \geq 0$ .
- 3.19.8.  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$ .
- 3.19.9.  $|z + i| \geq 1$ .
- 3.19.10.  $|z + 2| \geq 3$ .
- 3.19.11.  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{6}$ .
- 3.19.12.  $|z - 3| \geq 1, \operatorname{Im} z \geq 0$ .
- 3.19.13.  $|z| = 5, |\arg z| \leq \frac{\pi}{3}$ .
- 3.19.14.  $|z - 1| \leq 1$ .
- 3.19.15.  $|z| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 0$ .
- 3.19.16.  $|z - 1 - i| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 1$ .
- 3.19.17.  $|z - 2| \leq 1, \operatorname{Im} z \leq 0$ .
- 3.19.18.  $|z + 1| \geq 1, \operatorname{Re} z \leq -1$ .
- 3.19.19.  $|z + 2| \leq 2, \operatorname{Im} z \leq 0$ .
- 3.19.20.  $|z + i| \geq 1, \operatorname{Re} z \geq 0$ .
- 3.19.21.  $|z + i| \geq 1, \operatorname{Re} z \leq 0$ .
- 3.19.22.  $|z - 3| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 3$ .
- 3.19.23.  $|z + i| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq -1$ .
- 3.19.24.  $|z - 1| \leq 2, \operatorname{Re} z \geq 2$ .
- 3.19.25.  $|z - 3| \leq 3, \operatorname{Im} z \leq 0$ .

$$3.19.26. |z + 1 - i| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq 1.$$

$$3.19.27. \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$3.19.28. |z + i| \leq 1, \operatorname{Im} z \leq -1.$$

$$3.19.29. |z - i| \geq 1, \operatorname{Im} z \geq 1.$$

$$3.19.30. |z| \geq 2, \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi.$$

$$3.19.31. \operatorname{Re} z \geq 1, \operatorname{Im} z \geq 1.$$

$$3.19.32. |z + i| \geq 1, \operatorname{Im} z \geq -1.$$

$$3.19.33. |z - 1| \leq 2, \operatorname{Re} z \leq 2.$$

$$3.19.34. |z| = 2, |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$3.19.35. |z + 3| \leq 1, \operatorname{Re} z \leq -3.$$

$$3.19.36. |z + i| \geq 1, \operatorname{Im} z \leq -1.$$

## 2.20. Разные задачи повышенной сложности

### Задание 2.20.

$$3.20.1. \text{Вычислить } i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}.$$

$$3.20.2. \text{Вычислить } \frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{1023}}.$$

$$3.20.3. \text{Вычислить } 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{1526}.$$

$$3.20.4. \text{Вычислить } 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{259}.$$

$$3.20.5. \text{Вычислить } i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{100}.$$

$$3.20.6. \text{Решить уравнение } z^2 - 6|z| + 8 = 0.$$

$$3.20.7. \text{Решить уравнение } z^2 + 8|z| - 9 = 0.$$

$$3.20.8. \text{Решить уравнение } |z| - 3z = -12i.$$

$$3.20.9. \text{Решить уравнение } z^2 + |z| = 0.$$

$$3.20.10. \text{Решить уравнение } (z + 1)^n = z^n.$$

$$3.20.11. \text{Решить уравнение } \left(\frac{z}{2} - 1\right)^n = 1.$$

$$3.20.12. \text{Решить уравнение } z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

$$3.20.13. \text{Решить уравнение } 32z^5 + 16z^4 + 8z^3 + 4z^2 + 2z + 1 = 0.$$

$$3.20.14. \text{Представить в тригонометрической форме число } \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}.$$

$$3.20.15. \text{Представить в тригонометрической форме число } \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}.$$

$$3.20.16. \text{Представить в тригонометрической форме число } \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{6}.$$

$$3.20.17. \text{Представить в тригонометрической форме число } 4 \cos \frac{3\pi}{4} - \left(5 \sin \frac{3\pi}{4}\right) i.$$

**3.20.18.** Представить в тригонометрической форме число  $\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$ .

**3.20.19.** Представить в тригонометрической форме число  $\cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2}$ .

**3.20.20.** Представить в тригонометрической форме число  $\sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5}$ .

**3.20.21.** Представить в тригонометрической форме число  $1 + \sin \alpha + i \cos \alpha$ .

**3.20.22.** Представить в тригонометрической форме число  $\sin 1^0 + i \cos 1^0$ .

**3.20.23.** Вычислить суммы  $A = \cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos 99\alpha$ ,  $B = \sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \dots + \sin 99\alpha$ .

**3.20.24.** Вычислить сумму  $A = 1 - \cos 2\alpha + \cos 4\alpha - \cos 6\alpha + \dots + \cos 40\alpha$ .

**3.20.25.** Вычислить суммы  $A = \cos \alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \dots + \cos(2n-1)\alpha$ ,  $B = \sin \alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \dots + \sin(2n-1)\alpha$ .

**3.20.26.** Найти наименьшее значение  $|z|$ , если  $z = 2 \sin \alpha + i \cos \alpha$ .

**3.20.27.** Найти число с наибольшим модулем среди комплексных чисел  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z + 3 - 4i| = 3$ .

**3.20.28.** Как изменится модуль и аргумент комплексного числа в результате умножения этого числа на  $2i$ .

**3.20.29.** Представить число  $z = \sqrt{3}e^{\frac{2\pi}{3}i}$  в алгебраической форме.

**3.20.30.** Вычислить приближённо с точностью до сотых  $\cos 5i$ .

**3.20.31.** Изобразить на комплексной плоскости множество чисел  $z$  таких, что  $|z + 3| \leq |z - 7|$ .

**3.20.32.** Изобразить на комплексной плоскости множество чисел  $z$  таких, что  $\frac{|z+5|}{|z-7|} \leq 1$ .

**3.20.33.** Изобразить на комплексной плоскости множество чисел  $z$  таких, что  $\operatorname{Re} \left( \frac{1}{z} \right) \leq \frac{1}{6}$ .

**3.20.34.** Изобразить на комплексной плоскости множество чисел  $z$  таких, что  $-\frac{1}{4} < \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) < \frac{1}{2}$ .

**3.20.35.** Изобразить на комплексной плоскости множество чисел  $z$  таких, что  $-\frac{1}{4} \leq \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) - \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) \leq -\frac{1}{8}$ .

**3.20.36.** Изобразить на комплексной плоскости множество чисел  $z$  таких, что  $\operatorname{Im} \left( \frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{2}$ .