МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Учебный год 2023/2024
Курс 1, семестр 1
Дисциплина Математический анализ

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1
Множества

Вариант №7

Выполнили:
Чусовлянов Максим P3107
Кулешова Екатерина P3115
Никитин Леонид P3116
Шмунк Андрей P3108

Санкт-Петербург, 2023

Содержание

Задания

Задание 1.1

Перечислите элементы множества
$L = \{x\colon x = 2(n + 1),\ n -$ неотрицательное целое число и $n \le 3\}$.

Решение

$L = \{x\colon x = 2(n + 1),\ n -$ неотрицательное целое число и $n \le 3\} =$
$= \{2; 4; 6; 8\}$

Задание 1.2

Опишите множество при помощи характеристического
свойства: $M = \{$Множество чисел $1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ \ldots\}$.

Решение

$M = \{x\colon x = 1 + 4n,\ n \in Z$ и $n \ge 0\}$

Задание 1.3

Эквивалентны ли следующие множества $A = \{x\colon 2^{\frac{5x-1}{5x+2}} = 4\}$ и
$B = \{y\colon y^2 + 2y + 1 = 0\}$.

Решение

Рассмотрим множество $A = \{x\colon 2^{\frac{5x-1}{5x+2}} = 4\}$.
Решим показательное уравнение $2^{\frac{5x-1}{5x+2}} = 4$:
$2^{\frac{5x-1}{5x+2}} = 2^2$;
$\frac{5x-1}{5x+2} = 2$;
$10x + 4 = 5x - 1$;
$5x = -5$;
$x = -1$;
Таким образом $A = \{x\colon 2^{\frac{5x-1}{5x+2}} = 4\} = \{-1\}$.

Рассмотрим множество $B = \{y\colon y^2 + 2y + 1 = 0\}$.
Решим квадратное уравнение $y^2 + 2y + 1 = 0$:
$(y + 1)^2 = 0$;
$y + 1 = 0$;

$y =- 1$.

Таким образом $B = \{y: y^2 + 2y + 1 = 0\} = \{- 1\}$.

Т.к $\{- 1\} = \{- 1\}$, то множества $A = \{x: 2^{\frac{5x-1}{5x+2}} = 4\}$ и $B = \{y: y^2 + 2y + 1 = 0\}$ являются эквивалентными.

Задание 1.4

Даны множества $U = \{- 3; - 2; - 1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$,
$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$, $C = \{- 3; - 2; - 1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.
Найти: $A \setminus C$, $A \setminus \overline{B}$, $B \setminus C$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{C} \cup A$, $\overline{A} \cup B$, $B \cap \overline{A}$, $A \cup B \cup C$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \setminus B) \cup C$, $(\overline{A} \setminus B) \cup C$, $(\overline{A} \cup B) \cap \overline{C}$, $(A \cup B) \setminus (\overline{A} \cap C)$, $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $(C \cup A) \setminus (C \cap A)$, $(A \cup B) \cap (A \cap C)$, $\overline{A \cup B \cup C}$, $\overline{C} \cup (B \setminus A)$, $A \oplus C$, $(A \setminus B) \oplus (A \setminus C)$, $(\overline{A} \setminus B) \oplus (B \setminus A)$.

Решение

$A \setminus C = \{5; 6; 7\}$
$A \setminus \overline{B} = \{3; 4; 5; 6; 7\}$
$B \setminus C = \{5; 6; 7\}$
$\overline{A \cup B} = \{- 3; - 2; - 1\}$
$\overline{C} \cup A = A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$
$\overline{A} \cup B = \{- 3; - 2; - 1; 3; 4; 5; 6; 7\}$
$B \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup B \cup C = \{- 3; - 2; - 1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$
$(A \cup B) \cap C = \{- 3; - 2; - 1; 0; 1; 2; 3; 4\}$
$(A \setminus B) \cup C = \{- 3; - 2; - 1; 0; 1; 2; 3; 4\}$
$(\overline{A} \setminus B) \cup C = \{- 3; - 2; - 1; 0; 1; 2; 3; 4\}$
$(\overline{A} \cup B) \cap \overline{C} = \{5; 6; 7\}$
$(A \cup B) \setminus (\overline{A} \cap C) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$
$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{0; 1; 2; 5; 6; 7\}$
$(C \cup A) \setminus (C \cap A) = \{- 3; - 2; - 1; 5; 6; 7\}$
$(A \cup B) \cap (A \cap C) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$
$\overline{A \cup B \cup C} = \emptyset$
$\overline{C} \cup (B \setminus A) = \{5; 6; 7\}$
$A \oplus C = \{- 3; - 2; - 1; 5; 6; 7\}$
$(A \setminus B) \oplus (A \setminus C) = \{0; 1; 2; 5; 6; 7\}$
$(\overline{A} \setminus B) \oplus (B \setminus A) = \emptyset$

Задание 1.5

Опишите множество, соответствующее закрашенной части диаграммы Венна.

Решение

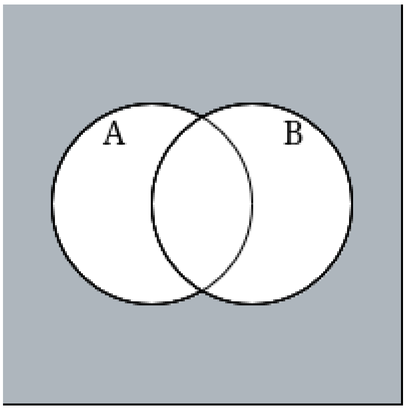
$((A \cap B) \cup (A \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$

Задание 1.6

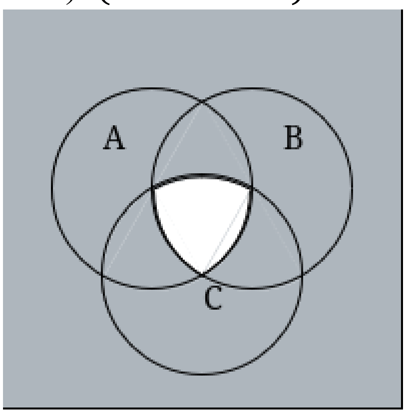
Для каждого из приведенных ниже множеств используйте диаграммы Венна и заштрихуйте те ее части, которые изображают заданные множества: $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cap B \cap C)}$

Решение

1) $\overline{A} \cap \overline{B}$



2) $\overline{(A \cap B \cap C)}$



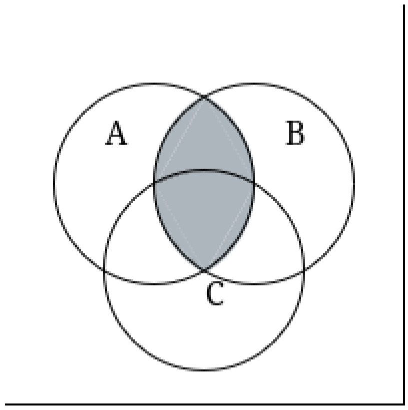
Задание 1.7

С помощью диаграммы Венна проверьте справедливость соотношения $C \setminus (A \cap B) = (A \setminus C)$

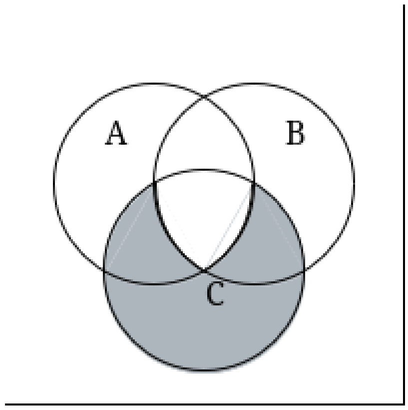
Решение

С помощью диаграммы Венна построим множество $C \setminus (A \cap B)$.

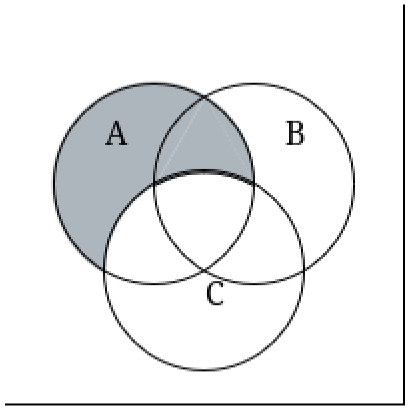
1) $A \cap B$



2) $C \setminus (A \cap B)$



С помощью диаграммы Венна построим множество $A \setminus C$.



Таким образом $C \setminus (A \cap B) \neq (A \setminus C)$.

Задание 1.8

Докажите тождество $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$, используя свойства операций.

Решение

Используя выражение для разности $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ имеем:
$A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)}$

Используя закон де Моргана $\overline{(B \cup C)} = \overline{B} \cap \overline{C}$ получаем:
$A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$

Используем ассоциативность операций:
$A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$

Снова используем выражение для разности:
$(A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = (A \setminus B) \cap \overline{C}$

Таким образом тождество $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$ доказано.

Задание 1.9

Используя формулу включений-исключений, решите задачу. В группе 20 студентов. После медицинского осмотра 14 студентов был направлены на дополнительное обследование к терапевту, 6 – к окулисту, 5 – к неврологу. К терапевту и окулисту были направлены 3 студента, к терапевту и неврологу – 3, к окулисту и неврологу – 2. Сколько студентов было направлено к терапевту, окулисту и неврологу?

Решение

Условие данной задачи некорректно, так как такой ситуации быть не может. Докажем это:

Пусть:
A - множество направленных к терапевту, |A| = 14;
B - направленные к окулисту, |B| = 6;
C - направленные к неврологу , |C| = 5.
$|A \cap B| = 3$; $|A \cap C| = 3$; $|B \cap C| = 2$; $|A \cap B \cap C| - ?$.
Заметим, что $|A \cap B \cap C| \leq 2,$ т. к $|B \cap C| = 2.$

Применим формулу включения и исключения:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|;$
$20 = 14 + 6 + 5 - 3 - 3 - 2 + |A \cap B \cap C|$
$20 - 17 = |A \cap B \cap C|$; $|A \cap B \cap C| = 3.$

Получили противоречие, т.к $|A \cap B \cap C| \leq 2.$

Например, задача может быть решена в случае если: |C| = 6 или $|A \cap B| = 2$ или $|A \cap C| = 2.$ Предположим что |C|= 6, тогда:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|;$
$20 = 14 + 6 + 6 - 3 - 3 - 2 + |A \cap B \cap C|;$
$20 - 18 = |A \cap B \cap C|$; $|A \cap B \cap C| = 2.$

Ответ: 2

Задание 1.10

Используя формулу включений-исключений, решите задачу. Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на 11, ни на 7, ни на 9, ни на 3?

Решение

Если число делится на 9, то оно делится и на 3. Значит число 9 можно опустить в условии задачи.

Пусть A, B, C – множества целых положительных чисел, не превосходящих 1000, делящихся нацело на 3, 7, и 11 соответственно. Тогда $A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C$ - множества целых положительных чисел, не превосходящих 10000, делящихся нацело на 21 = 3 * 7, 33 = 3 * 11, 77 = 7 * 11 и 231 = 3 * 7 * 11 соответственно.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + \\ + |A \cap B \cap C| = \left[\frac{10000}{3}\right] + \left[\frac{10000}{7}\right] + \left[\frac{10000}{11}\right] - \left[\frac{10000}{21}\right] - \left[\frac{10000}{33}\right] - \left[\frac{10000}{77}\right] + \\ + \left[\frac{10000}{231}\right] = 3333 + 1428 + 909 - 476 - 303 - 129 + 43 = 4805.$$

Следовательно, количество целых положительных чисел, не превосходящих 10000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 3, 7, 9 и 11, равно 10000 – 4805 = 5195.

Ответ: 5195 целых положительных чисел, не превосходящих 10000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 3, 7, 9, 11.

Задание 1.11

Методом математической индукции доказать, что при $n \in N$: $5^n + 2 * 3^n + 5$ кратно 8

Решение

1) Пусть n = 1, тогда $5 + 2 * 3 + 5 = 16 \equiv 0 \, mod \, 8$
2) Пусть при n: $5^n + 2 * 3^n + 5 \equiv 0 \, mod \, 8$
3) При k = (n + 1): $5^{n+1} + 2 * 3^{n+1} + 5$. Отнимем от выражения $5^n + 2 * 3^n + 5 \equiv 0 \, mod \, 8$ (кратное 8). Получим $5^{n+1} - 5^n + 2 * 3^{n+1} - 2 * 3^n = 5^n(5 - 1) + 2 * 3^n(3 - 1) =$ $= 4 * 5^n + 4 * 3^n = 4 * (5^n + 3^n) \equiv 0 \, mod \, 8$ (т.к сумма двух нечетных чисел

кратна 2). Значит при k = (n + 1) выражение кратно 8

Получаем что выражение кратно 8 при любом $n \in N$.

Задание 1.12

Доказать, что при любом $n \in N$ выполняется равенство:
$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})...(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$

Решение

1) При n=2: $1 - \frac{1}{4} = \frac{2+1}{2*2} = \frac{3}{4}$ − верное равенство
2) При n: $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})...(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$
3) При k=n+1: $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})...(1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$
   $\frac{n+1}{2n} * (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+2}{2(n+1)}$
   $\frac{n+1}{2n} * \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$
   $\frac{n+1}{2n} * \frac{n*(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$ сократим произведение дробей:
   $\frac{1}{2} * \frac{(n+2)}{(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}$
   $\frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}$ − верное тождество, значит при k=(n+1) выполняется равенство.

Получаем что при любом $n \in N$ выполняется равенство:
$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})...(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$.

Вывод

В ходе проделанной расчётно-графической работы, мы применили на практике знания, полученные при изучении теории Множеств, а именно: описывали множества при помощи характеристических свойств; доказывали эквивалентность множеств; использовали диаграммы Венна для доказательства тождеств; решали задачи при помощи формулы включений-исключений и математической индукции.

Оценочный лист

Вклад каждого исполнителя по 5-балльной шкале:

Чусовлянов Максим P3107 - 5 баллов
Кулешова Екатерина P3115 - 4 балла
Никитин Леонид P3116 - 5 баллов
Шмунк Андрей P3108 - 3 балла