УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 25

Студент
Шмунк Андрей Александрович
P3108

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург, 2023 г.

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $1 < |x_1x_2x_5 - x_3x_4| \leq 4$ и неопределенное значение при $|x_1x_2x_5 - x_3x_4| = 2$.

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_1x_2x_5$	x_3x_4	$x_1x_2x_5$	x_3x_4	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
2	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	0	1	0	0	0	2	0	2	d
5	0	0	1	0	1	1	2	1	2	0
6	0	0	1	1	0	0	3	0	3	1
7	0	0	1	1	1	1	3	1	3	d
8	0	1	0	0	0	2	0	2	0	d
9	0	1	0	0	1	3	0	3	0	1
10	0	1	0	1	0	2	1	2	1	0
11	0	1	0	1	1	3	1	3	1	d
12	0	1	1	0	0	2	2	2	2	0
13	0	1	1	0	1	3	2	3	2	0
14	0	1	1	1	0	2	3	2	3	0
15	0	1	1	1	1	3	3	3	3	0
16	1	0	0	0	0	4	0	4	0	1
17	1	0	0	0	1	5	0	5	0	0
18	1	0	0	1	0	4	1	4	1	1
19	1	0	0	1	1	5	1	5	1	1
20	1	0	1	0	0	4	2	4	2	d
21	1	0	1	0	1	5	2	5	2	1
22	1	0	1	1	0	4	3	4	3	0
23	1	0	1	1	1	5	3	5	3	d
24	1	1	0	0	0	6	0	6	0	0
25	1	1	0	0	1	7	0	7	0	0
26	1	1	0	1	0	6	1	6	1	0
27	1	1	0	1	1	7	1	7	1	0
28	1	1	1	0	0	6	2	6	2	1
29	1	1	1	0	1	7	2	7	2	0
30	1	1	1	1	0	6	3	6	3	1
31	1	1	1	1	1	7	3	7	3	1

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,x_5 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5 \vee$$
$$\vee\, x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$
$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$
$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5)$$
$$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$
$$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$		
m_{16}	10000	✓
m_4	00100	✓
m_8	01000	✓
m_6	00110	✓
m_9	01001	✓
m_{18}	10010	✓
m_{20}	10100	✓
m_{19}	10011	✓
m_{21}	10101	✓
m_{28}	11100	✓
m_7	00111	✓
m_{11}	01011	✓
m_{30}	11110	✓
m_{23}	10111	✓
m_{31}	11111	✓

$K^1(f)$	
m_4-m_6	001X0
m_8-m_9	0100X
m_{16}-m_{18}	100X0
m_{16}-m_{20}	10X00
m_4-m_{20}	X0100
m_6-m_7	0011X
m_9-m_{11}	010X1
m_{18}-m_{19}	1001X
m_{20}-m_{21}	1010X
m_{20}-m_{28}	1X100
m_{21}-m_{23}	101X1
m_{19}-m_{23}	10X11
m_{28}-m_{30}	111X0
m_7-m_{23}	X0111
m_{30}-m_{31}	1111X
m_{23}-m_{31}	1X111

$Z(f)$
001X0
0100X
100X0
10X00
X0100
0011X
010X1
1001X
1010X
1X100
101X1
10X11
111X0
X0111
1111X
1X111

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы								
		0	0	1	1	1	1	1	1	1
		0	1	0	0	0	0	1	1	1
		1	0	0	0	0	1	1	1	1
		1	0	0	1	1	0	0	1	1
		0	1	0	0	1	1	0	0	1
		6	9	16	18	19	21	28	30	31
A	001X0	X								
B	0100X		X							
C	100X0			X	X					
D	10X00			X						
	~~X0100~~									
E	0011X	X								
F	010X1		X							
G	1001X				X	X				
H	1010X						X			
I	1X100							X		
J	101X1						X			
K	10X11					X				
L	111X0							X	X	
	~~X0111~~									
M	1111X								X	X
N	1X111									*X*

Ядро покрытия:

$$T = \{\}$$

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$Y = (A \vee E)\ (B \vee F)\ (C \vee D)\ (C \vee G)\ (G \vee K)\ (H \vee J)\ (I \vee L)\ (L \vee M)\ (M \vee N)$

Приведем выражение в ДНФ:

$Y = A\,B\,C\,G\,H\,I\,M \vee A\,B\,C\,G\,H\,L\,M \vee A\,B\,C\,G\,H\,L\,N \vee A\,B\,C\,G\,I\,J\,M \vee A\,B\,C\,G\,J\,L\,M \vee A\,B\,C\,G\,J\,L\,N \vee A\,B\,C\,H\,I\,K\,M \vee A\,B\,C\,H\,K\,L\,M \vee A\,B\,C\,H\,K\,L\,N \vee$ ... (термы высших рангов)

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ B \\ C \\ G \\ H \\ I \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \\ 001X0 \\ 0100X \\ 100X0 \\ 1001X \\ 1010X \\ 1X100 \\ 1111X \end{Bmatrix} \quad C_2 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ B \\ C \\ G \\ H \\ L \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \\ 001X0 \\ 0100X \\ 100X0 \\ 1001X \\ 1010X \\ 111X0 \\ 1111X \end{Bmatrix} \quad C_3 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ B \\ C \\ G \\ H \\ L \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \\ 001X0 \\ 0100X \\ 100X0 \\ 1001X \\ 1010X \\ 111X0 \\ 1X111 \end{Bmatrix}$$

$$S_1^a = 28 \quad S_1^b = 35 \qquad S_2^a = 28 \quad S_2^b = 35 \qquad S_3^a = 28 \quad S_3^b = 35$$

$$C_4 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ B \\ C \\ G \\ I \\ J \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \\ 001X0 \\ 0100X \\ 100X0 \\ 1001X \\ 1X100 \\ 101X1 \\ 1111X \end{Bmatrix} \quad C_5 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ B \\ C \\ G \\ J \\ L \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \\ 001X0 \\ 0100X \\ 100X0 \\ 1001X \\ 101X1 \\ 111X0 \\ 1111X \end{Bmatrix} \quad C_6 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ B \\ C \\ G \\ J \\ L \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \\ 001X0 \\ 0100X \\ 100X0 \\ 1001X \\ 101X1 \\ 111X0 \\ 1X111 \end{Bmatrix}$$

$$S_4^a = 28 \quad S_4^b = 35 \qquad S_5^a = 28 \quad S_5^b = 35 \qquad S_6^a = 28 \quad S_6^b = 35$$

$$C_7 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ B \\ C \\ H \\ I \\ K \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \\ 001X0 \\ 0100X \\ 100X0 \\ 1010X \\ 1X100 \\ 10X11 \\ 1111X \end{Bmatrix} \quad C_8 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ B \\ C \\ H \\ K \\ L \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \\ 001X0 \\ 0100X \\ 100X0 \\ 1010X \\ 10X11 \\ 111X0 \\ 1111X \end{Bmatrix} \quad C_9 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ B \\ C \\ H \\ K \\ L \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \\ 001X0 \\ 0100X \\ 100X0 \\ 1010X \\ 10X11 \\ 111X0 \\ 1X111 \end{Bmatrix}$$

$$S_7^a = 28 \quad S_7^b = 35 \qquad S_8^a = 28 \quad S_8^b = 35 \qquad S_9^a = 28 \quad S_9^b = 35$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 001X0 \\ 0100X \\ 100X0 \\ 1001X \\ 1010X \\ 1X100 \\ 1111X \end{Bmatrix}$$

$$S^a = 28 \quad S^b = 35$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4$$

Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ

$x_1 = 0$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00				
01	d		d	1
11				
10	d	1	d	

$x_1 = 1$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00	1		1	1
01	d	1	d	
11	1		1	1
10				

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 001X0 \\ 0100X \\ 100X0 \\ 1001X \\ 1010X \\ 1X100 \\ 1111X \end{Bmatrix}$$

$S^a = 28$
$S^b = 35$

$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4$$

Определение МКНФ

$x_1 = 0$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	d	0	d	
11	0	0	0	0
10	d		d	0

$x_1 = 1$

x_2x_3 \ x_4x_5	00	01	11	10
00		0		
01	d		d	0
11		0		
10	0	0	0	0

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 000XX \\ 01XX0 \\ 0X1X1 \\ 110XX \\ X0001 \\ 101X0 \\ 11X01 \end{Bmatrix}$$

$S^a = 24$
$S^b = 31$

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_5)\,(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)\,(x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_5)\,(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_5} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4 \quad S_Q = 35 \quad \tau = 2$

Декомпозиция невозможна

$f = x_1\,x_3\,\overline{x_4}\,(\overline{x_2} \vee \overline{x_5}) \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,(x_4 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4 \quad S_Q = 29 \quad \tau = 3$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\ (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_5)\ (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5})\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)\ (x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\ (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_5)\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \qquad S_Q = 31 \quad \tau = 2$$

Декомпозиция невозможна

$$f = (x_2 \vee x_3 \vee x_1\ (x_4 \vee \overline{x_5}))\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\ (x_4 \vee \overline{x_5}))\ (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_5)\ (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5})\ (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_5) \qquad S_Q = 29 \quad \tau = 4$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1\, x_3\, \overline{x_4}\ (\overline{x_2} \vee \overline{x_5}) \vee x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_3}\ (x_4 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1}\, \overline{x_2}\, x_3\, \overline{x_5} \vee \overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3}\, \overline{x_4} \vee x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \quad (S_Q = 29, \tau = 3)$$

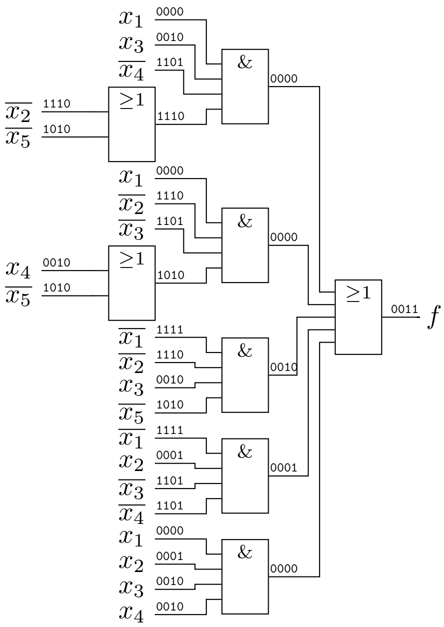
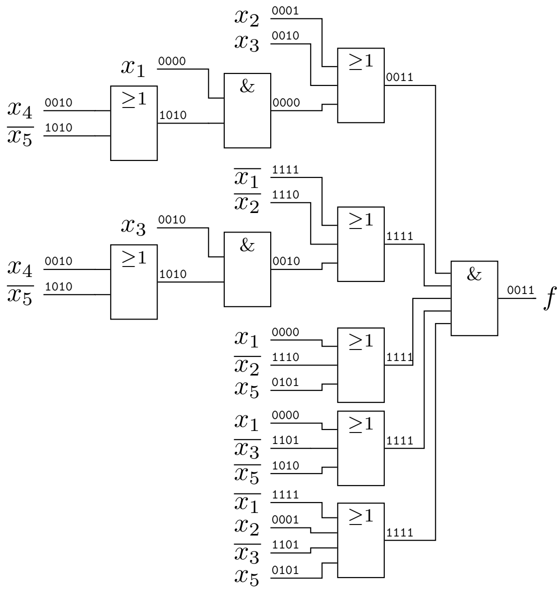


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_2 \vee x_3 \vee x_1\ (x_4 \vee \overline{x_5}))\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\ (x_4 \vee \overline{x_5}))\ (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_5)\ (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5})\ (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_5) \quad (S_Q = 29, \tau = 4)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_1\, x_3\, \overline{x_4}\, \overline{x_2\, x_5}}\ \overline{x_1\, \overline{x_2}\, \overline{x_3}\, \overline{\overline{x_4}\, x_5}}\ \overline{\overline{x_1}\, \overline{x_2}\, x_3\, \overline{x_5}}\ \overline{\overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3}\, \overline{x_4}}\ \overline{x_1\, x_2\, x_3\, x_4}} \quad (S_Q = 37, \tau = 6)$$

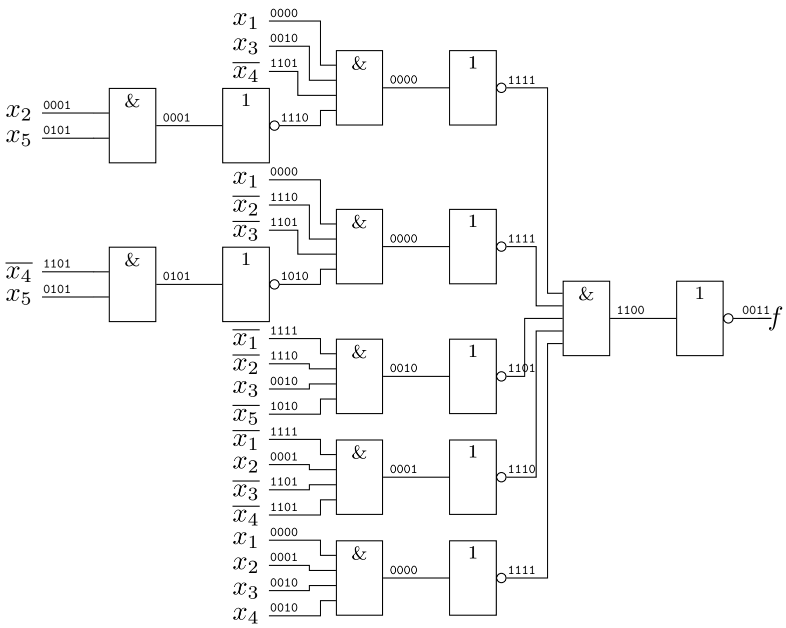
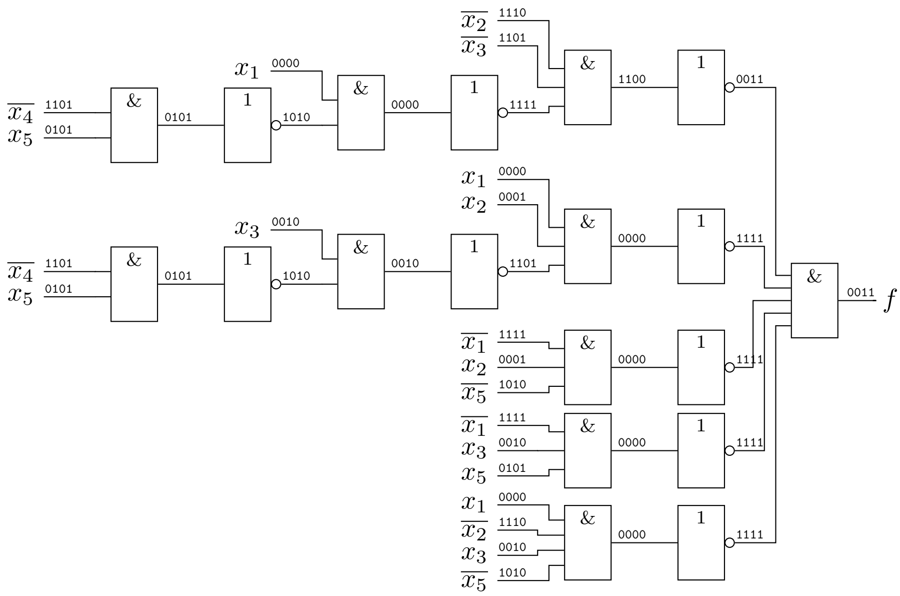


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_1\,\overline{\overline{\overline{x_4}\,x_5}}}}\;\overline{x_1\,x_2\,\overline{x_3\,\overline{\overline{\overline{x_4}\,x_5}}}}\;\overline{\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_5}}\;\overline{\overline{x_1}\,x_3\,x_5}\;\overline{x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_5}} \quad (S_Q = 38, \tau = 7)$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{x_1\,\overline{\overline{x_3\,\overline{\overline{\overline{x_4}\,\overline{x_2\,x_5}}\;\overline{x_2\,x_4}}}}\;\overline{\overline{x_2}\,\overline{\overline{\overline{\overline{x_3}\,\overline{\overline{x_4}\,x_5}}}}}}}\;\overline{\overline{x_1}\,\overline{\overline{\overline{x_2}\,\overline{\overline{\overline{x_3\,\overline{x_5}}}}}\;\overline{x_2\,\overline{\overline{\overline{x_3}\,\overline{x_4}}}}}}} \quad (S_Q = 40, \tau = 7)$$

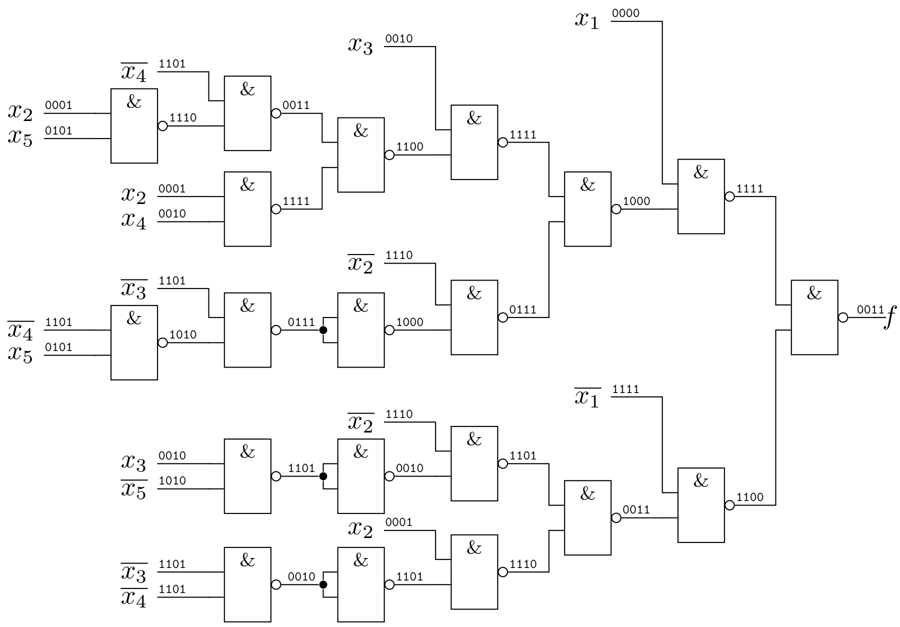


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{x_2}\,\overline{\overline{\overline{x_3}\,\overline{x_1\,\overline{\overline{x_4}\,x_5}}}\;\overline{x_1\,\overline{\overline{x_3\,\overline{x_5}}}}}}\;\overline{\overline{\overline{\overline{x_1}\,\overline{\overline{x_2\,\overline{x_5}}\;\overline{x_3\,x_5}}}\;\overline{x_1\,\overline{\overline{x_2\,\overline{x_3\,\overline{\overline{x_4}\,x_5}}}}}}}}} \quad (S_Q = 42, \tau = 9)$$