

---

**ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE PARIS-SACLAY**  
(Université Paris-Saclay)

---

**Compte rendu de TP**

Matière : *Automatique non-linéaire et Filtrage de Kalman*

---

---

**TP1 - Identification par Moindres Carrés**

**Nom de l'étudiant :** Gatien Séguy

**Établissement :** ENS Paris-Saclay (Département EEA)

**Encadrante :** Cécile Durieu

**Date :** 28 janvier 2026

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
I.1	Contexte et objectifs . . . . .	3
I.2	Problématique . . . . .	3
<b>II</b>	<b>Fondements théoriques</b>	<b>3</b>
II.1	Méthode du modèle (Output Error – OE) . . . . .	3
II.1.1	Préparation 1 : Analyse de la non-linéarité . . . . .	3
II.2	Méthode des moindres carrés (Equation Error – ARX) . . . . .	4
II.2.1	Préparation 2 : Formulation linéaire . . . . .	4
II.2.2	Analyse du biais de l'estimateur MC . . . . .	5
II.3	Moindres Carrés Récursifs (MCR) . . . . .	6
II.3.1	Algorithme de base . . . . .	6
II.3.2	MCR avec facteur d'oubli . . . . .	6
<b>III</b>	<b>Mise en œuvre expérimentale</b>	<b>6</b>
III.1	Processus étudié . . . . .	6
III.2	Signal d'entrée . . . . .	7
<b>IV</b>	<b>Manipulation 1 : Méthode des Moindres Carrés</b>	<b>8</b>
IV.1	Objectif . . . . .	8
IV.2	Résultats pour différents niveaux de bruit . . . . .	8
IV.2.1	Cas RSB = 100 (bruit faible) . . . . .	8
IV.2.2	Cas RSB = 10 (bruit modéré) . . . . .	9
IV.2.3	Cas RSB = 1 (bruit fort) . . . . .	10
IV.3	Résultats numériques . . . . .	11
IV.4	Étude statistique (Monte Carlo) . . . . .	11
IV.5	Convergence de l'estimateur . . . . .	13
IV.6	Bilan de la Manipulation 1 . . . . .	13
<b>V</b>	<b>Manipulation 2 : Moindres Carrés Récursifs avec facteur d'oubli</b>	<b>14</b>
V.1	Objectif . . . . .	14
V.2	MCR sur système stationnaire . . . . .	14
V.3	Système non stationnaire . . . . .	15
V.4	Influence du facteur d'oubli . . . . .	15
V.4.1	Cas $\lambda = 1$ (pas d'oubli) . . . . .	15
V.4.2	Cas $\lambda = 0.98$ (oubli faible) . . . . .	16
V.4.3	Cas $\lambda = 0.95$ (oubli modéré) . . . . .	16
V.4.4	Cas $\lambda = 0.90$ (oubli fort) . . . . .	16
V.5	Comparaison synthétique . . . . .	17
V.6	Étude statistique avec $\lambda = 0.95$ . . . . .	17

<b>V.7</b>	<b>Bilan de la Manipulation 2</b>	<b>18</b>
<b>VI</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>19</b>
<b>VI.1</b>	<b>Synthèse des résultats</b>	<b>19</b>
<b>VI.2</b>	<b>Limitations observées</b>	<b>20</b>

# I Introduction

## I.1 Contexte et objectifs

Ce TP porte sur l'**identification paramétrique** d'un système dynamique linéaire à temps discret. L'objectif est d'estimer les paramètres d'une fonction de transfert à partir de mesures entrée-sortie, en utilisant principalement la **méthode des moindres carrés (MC)**.

Le modèle recherché est une fonction de transfert à temps discret de la forme :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=n_k}^{n_b} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i}} \quad (1)$$

Le vecteur de paramètres à estimer est  $\boldsymbol{\theta} = (a_1 \dots a_{n_a} b_{n_k} \dots b_{n_b})^T$  de dimension  $n_a + n_b - n_k + 1$ .

## I.2 Problématique

L'identification par moindres carrés pose plusieurs questions fondamentales :

- Comment formuler le problème pour obtenir une solution analytique explicite ?
- Quel est l'effet du bruit de mesure sur l'estimation ?
- Comment adapter la méthode pour des systèmes dont les paramètres varient dans le temps ?

# II Fondements théoriques

## II.1 Méthode du modèle (Output Error – OE)

### II.1.1 Préparation 1 : Analyse de la non-linéarité

**Pourquoi l'erreur  $\varepsilon_n$  n'est pas linéaire en les paramètres ?** Dans la méthode du modèle (appelée aussi Output Error), l'erreur est définie par :

$$\varepsilon_n = s_n - s_n^{\text{mod}} \quad (2)$$

La sortie du modèle  $s_n^{\text{mod}}$  est obtenue par filtrage de l'entrée  $u_n$  par la fonction de transfert  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ . Dans le domaine temporel, cela correspond à l'équation de récurrence :

$$s_n^{\text{mod}} = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i s_{n-i}^{\text{mod}} + \sum_{i=n_k}^{n_b} b_i u_{n-i} \quad (3)$$

**Analyse de la non-linéarité :** La sortie  $s_n^{\text{mod}}$  dépend des valeurs passées  $s_{n-i}^{\text{mod}}$ , qui elles-mêmes dépendent des paramètres  $a_i$  de manière récursive. Par exemple, pour un système du premier ordre :

$$s_1^{\text{mod}} = b_1 u_0 \quad (4)$$

$$s_2^{\text{mod}} = -a_1 s_1^{\text{mod}} + b_1 u_1 = -a_1 b_1 u_0 + b_1 u_1 \quad (5)$$

$$s_3^{\text{mod}} = -a_1 s_2^{\text{mod}} + b_1 u_2 = a_1^2 b_1 u_0 - a_1 b_1 u_1 + b_1 u_2 \quad (6)$$

On voit apparaître des termes en  $a_1^2$ ,  $a_1 b_1$ , etc. La sortie est donc une **fondction polynomiale non linéaire** des paramètres.

**Conséquence sur l'estimation** Le critère quadratique  $J_k(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=1}^k \varepsilon_n^2$  est une fonction non convexe des paramètres. La condition d'optimalité  $\frac{\partial J_k}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$  conduit à un système d'équations non linéaires sans solution analytique. Il faut donc recourir à des **algorithmes itératifs** (gradient, Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt).

**Cas particulier linéaire** L'erreur est linéaire en les paramètres uniquement pour un **filtre FIR** (Finite Impulse Response), c'est-à-dire  $A(z) = 1$  (pas de pôles). Dans ce cas :

$$s_n^{\text{mod}} = \sum_{i=n_k}^{n_b} b_i u_{n-i} \quad (7)$$

est directement linéaire en  $\boldsymbol{\theta} = (b_{n_k}, \dots, b_{n_b})^\top$ .

## II.2 Méthode des moindres carrés (Equation Error – ARX)

### II.2.1 Préparation 2 : Formulation linéaire

**Expression de l'erreur et linéarité** La méthode des moindres carrés utilise un modèle série-parallèle où l'erreur est définie par :

$$e_n = s_n - \hat{s}_n^{\text{pred}} \quad (8)$$

La différence fondamentale avec la méthode du modèle est que la sortie prédictive utilise les **vraies sorties passées mesurées** (et non les sorties du modèle) :

$$\hat{s}_n^{\text{pred}} = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i s_{n-i} + \sum_{i=n_k}^{n_b} b_i u_{n-i} \quad (9)$$

L'erreur devient :

$$e_n = s_n + \sum_{i=1}^{n_a} a_i s_{n-i} - \sum_{i=n_k}^{n_b} b_i u_{n-i} = s_n - \boldsymbol{\varphi}_n^\top \boldsymbol{\theta} \quad (10)$$

avec le **vecteur de régression** :

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \begin{pmatrix} -s_{n-1} \\ \vdots \\ -s_{n-n_a} \\ u_{n-n_k} \\ \vdots \\ u_{n-n_b} \end{pmatrix} \quad (11)$$

L'erreur  $e_n$  est bien **linéaire en les paramètres  $\boldsymbol{\theta}$** .

**Formulation matricielle** En posant :

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1^\top \\ \boldsymbol{\varphi}_2^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_k^\top \end{pmatrix} \quad (12)$$

Le critère quadratique s'écrit :

$$J_k(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k \boldsymbol{\theta})^\top (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k \boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k \boldsymbol{\theta}\|^2 \quad (13)$$

**Solution explicite** La minimisation donne les **équations normales** :

$$\mathbf{C}_k^\top \mathbf{C}_k \boldsymbol{\theta} = \mathbf{C}_k^\top \mathbf{x}_k \quad (14)$$

D'où l'estimateur des moindres carrés :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = (\mathbf{C}_k^\top \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{C}_k^\top \mathbf{x}_k \quad (15)$$

### II.2.2 Analyse du biais de l'estimateur MC

**Origine du biais** Considérons le cas où la sortie mesurée est bruitée :  $s_n = s_n^0 + w_n$ , où  $s_n^0$  est la sortie non bruitée et  $w_n$  un bruit blanc centré de variance  $\sigma_w^2$ .

Le vecteur de régression contient alors les sorties bruitées :

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \begin{pmatrix} -(s_{n-1}^0 + w_{n-1}) \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Le bruit  $w_n$  apparaît **simultanément** dans :

- Le vecteur  $\mathbf{x}_k$  (observation courante)
- La matrice  $\mathbf{C}_k$  (via les sorties passées dans le régresseur)

Cette corrélation entre le régresseur et le terme d'erreur viole l'hypothèse fondamentale des moindres carrés et introduit un **biais systématique**.

**Expression analytique du biais (cas du 1er ordre)** Pour un système du premier ordre  $H(z) = \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}}$  avec bruit de sortie additif, on peut montrer que :

$$E[\hat{a}] = a \cdot \frac{\text{Var}(s^0)}{\text{Var}(s^0) + \sigma_w^2} = a \cdot \frac{\text{RSB}}{\text{RSB} + 1} \quad (17)$$

où  $\text{RSB} = \frac{P_s}{P_w} = \frac{\text{Var}(s^0)}{\sigma_w^2}$  est le rapport signal sur bruit.

**Conséquence** :  $|E[\hat{a}]| < |a|$ , l'estimateur MC **sous-estime systématiquement** la valeur absolue du paramètre  $a$ . Ce phénomène est connu sous le nom de **biais de régression atténuée** (attenuation bias).

## II.3 Moindres Carrés Récursifs (MCR)

### II.3.1 Algorithme de base

L'algorithme MCR permet de mettre à jour l'estimation à chaque nouvelle mesure sans recalculer l'inverse de  $\mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k$  :

**Algorithm 1:** Moindres Carrés Récursifs

**Entrée:** Mesures  $(u_n, s_n)$ , estimation initiale  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ , matrice  $\mathbf{P}_0$

---

```

1 for n = 1, 2, ... do
2    $\mathbf{c}_n \leftarrow \begin{pmatrix} -s_{n-1} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$ ;                                // Vecteur de régression
3    $\mathbf{K}_n \leftarrow \frac{\mathbf{P}_{n-1} \mathbf{c}_n}{\mathbf{c}_n^T \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{c}_n + 1}$ ;                      // Gain
4    $\mathbf{P}_n \leftarrow \mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{K}_n \mathbf{c}_n^T \mathbf{P}_{n-1}$ ;          // Mise à jour de P
5    $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \leftarrow \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n-1} + \mathbf{K}_n (s_n - \mathbf{c}_n^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n-1})$ ;    // Mise à jour de  $\boldsymbol{\theta}$ 

```

---

### II.3.2 MCR avec facteur d'oubli

Pour les systèmes **non stationnaires** dont les paramètres varient dans le temps, on introduit un **facteur d'oubli**  $\lambda \in ]0, 1]$  :

$$J_k(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=1}^k \lambda^{k-n} e_n^2 \quad (18)$$

Les mesures anciennes sont pondérées exponentiellement moins que les mesures récentes. L'algorithme devient :

$$\mathbf{K}_n = \frac{\mathbf{P}_{n-1} \mathbf{c}_n}{\mathbf{c}_n^T \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{c}_n + \lambda} \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_n = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{K}_n \mathbf{c}_n^T \mathbf{P}_{n-1}) \quad (20)$$

Avec  $\lambda = 1$ , on retrouve les MC classiques (pas d'oubli). Pour  $\lambda < 1$ , les anciennes mesures sont progressivement "oubliées", ce qui permet le suivi de paramètres variables. La "mémoire effective" de l'estimateur est d'environ  $\frac{1}{1-\lambda}$  échantillons.

## III Mise en œuvre expérimentale

### III.1 Processus étudié

Le processus est un filtre linéaire analogique du 1<sup>er</sup> ordre :

$$H_a(p) = \frac{K_a}{1 + \tau p} \quad (21)$$

avec  $K_a = 1$  et  $\tau = 0.1$  s.

Sa fonction de transfert échantillonnée avec  $T_e = 0.1$  s est :

$$H(z) = \frac{bz^{-1}}{1 + az^{-1}} \quad (22)$$

avec :

$$\begin{cases} a = -e^{-T_e/\tau} = -e^{-1} \approx -0.3679 \\ b = K_a(1 + a) = 1 - e^{-1} \approx 0.6321 \end{cases} \quad (23)$$

Le pôle du système est  $z = -a = e^{-1} \approx 0.368$ , donc le système est **stable** (pôle à l'intérieur du cercle unité) avec une dynamique relativement rapide (constante de temps  $\approx 1$  échantillon).

## III.2 Signal d'entrée

Le signal d'entrée utilisé est un **chirp** (sinusoïde à fréquence variable) :

$$u(t) = \sin \left( 2\pi \left( f_{\min} + \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2T_{\max}} t \right) t \right) \quad (24)$$

avec  $f_{\min} = 0$  Hz et  $f_{\max} = 0.25F_e = 2.5$  Hz.

Le chirp est un signal **persistamment excitant** qui balaie toute la bande passante du système. Contrairement à une sinusoïde pure, il excite le système sur toute sa plage de fonctionnement fréquentiel, ce qui améliore la qualité de l'identification.

## IV Manipulation 1 : Méthode des Moindres Carrés

### IV.1 Objectif

L'objectif de cette manipulation est d'étudier expérimentalement :

1. L'effet du rapport signal sur bruit (RSB) sur la qualité de l'estimation
2. Le biais de l'estimateur MC en présence de bruit de sortie
3. Les propriétés statistiques de l'estimateur

### IV.2 Résultats pour différents niveaux de bruit

#### IV.2.1 Cas RSB = 100 (bruit faible)

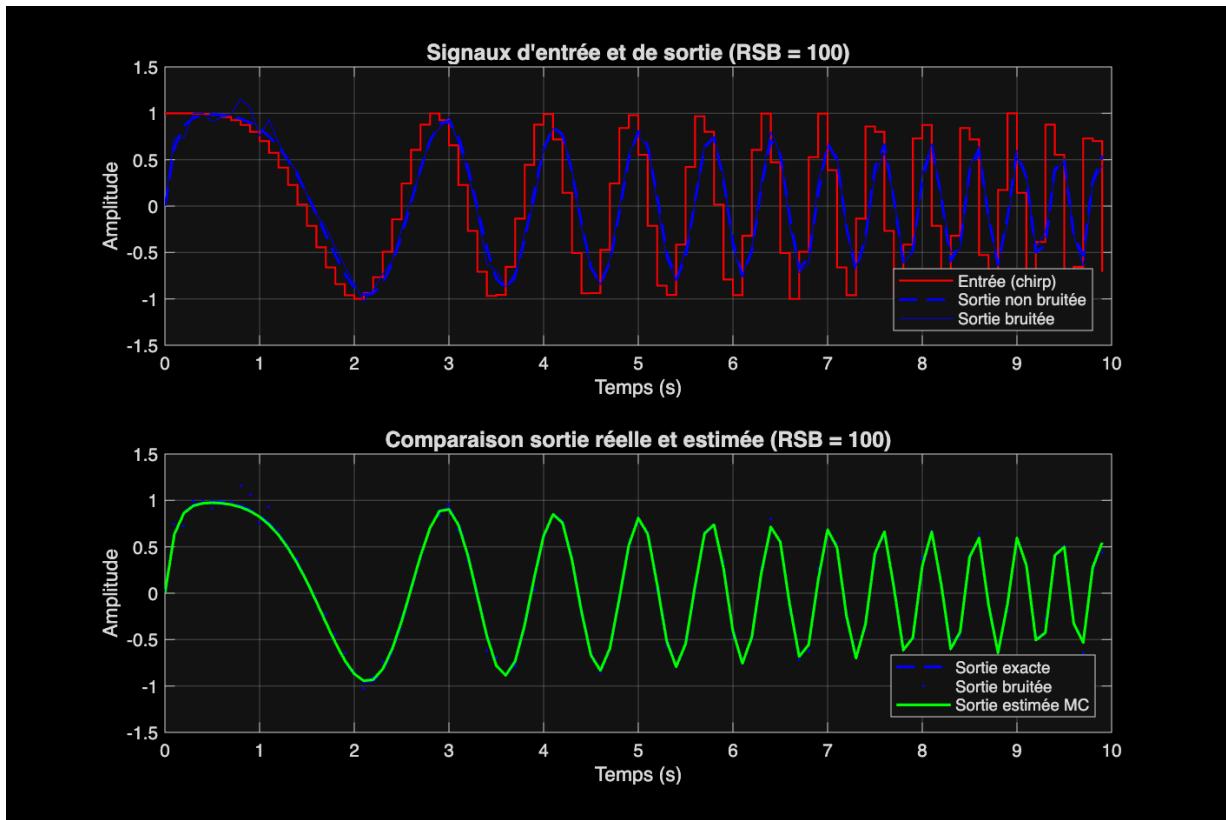


FIGURE 1 – Signaux et estimation MC pour RSB = 100

#### Analyse de la Figure 1 :

- **Graphique supérieur :** L'entrée chirp (rouge) montre la fréquence croissante caractéristique. La sortie non bruitée (bleu pointillé) et la sortie bruitée (bleu continu) sont **quasi-indiscernables**, ce qui confirme le faible niveau de bruit ( $\sigma_w \approx 0.01 \times$  amplitude du signal).
- **Graphique inférieur :** La sortie estimée par MC (vert) se superpose **parfaitement** à la sortie exacte. Les points bleus (mesures bruitées) montrent une dispersion négligeable autour de la courbe théorique.

- **Observation du comportement fréquentiel :** On note l'atténuation et le déphasage croissants de la sortie lorsque la fréquence d'entrée augmente, conformément au comportement passe-bas du système du 1<sup>er</sup> ordre.

#### IV.2.2 Cas RSB = 10 (bruit modéré)

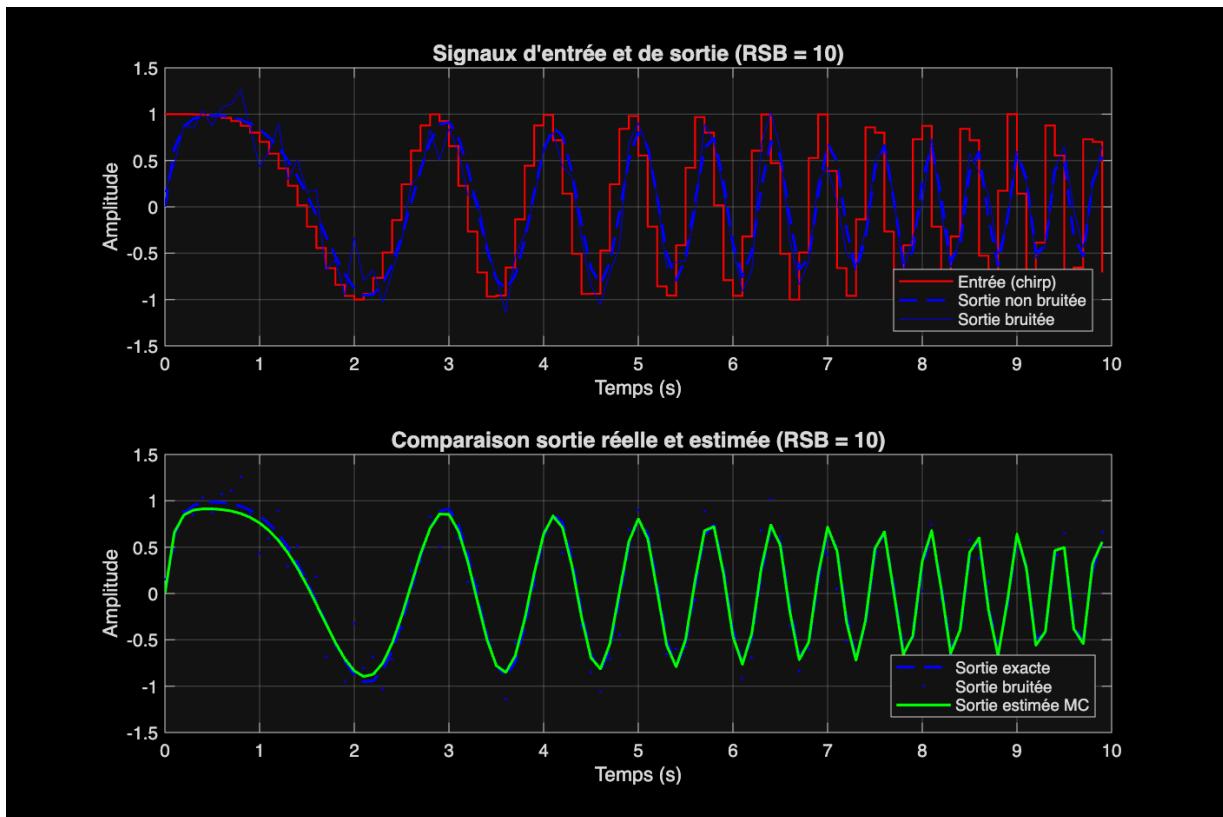


FIGURE 2 – Signaux et estimation MC pour RSB = 10

#### Analyse de la Figure 2 :

- **Graphique supérieur :** Le bruit devient **clairement visible** sur la sortie bruitée, avec une dispersion d'environ  $\pm 0.3$  autour de la sortie théorique. On observe des “outliers” particulièrement au début de la simulation (instants  $t < 1$  s).
- **Graphique inférieur :** Malgré le bruit significatif, l'estimation MC (vert) reste **très proche** de la sortie exacte. Cela démontre la capacité de la méthode à “filtrer” le bruit grâce à la redondance des mesures ( $N = 100$  échantillons).
- **Point critique :** On commence à percevoir une légère **différence d'amplitude** entre la sortie estimée et la sortie exacte, manifestation du biais de l'estimateur.

### IV.2.3 Cas RSB = 1 (bruit fort)

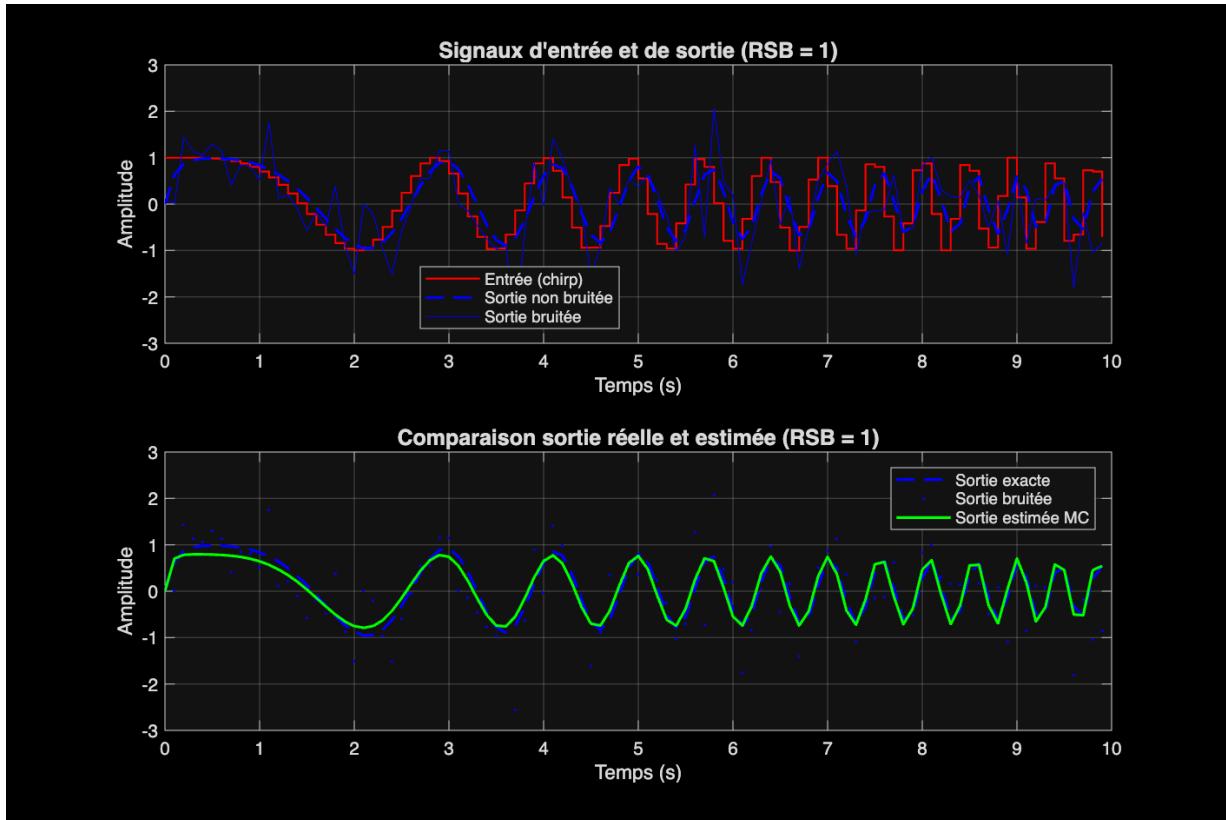


FIGURE 3 – Signaux et estimation MC pour RSB = 1

#### Analyse de la Figure 3 :

- **Changement d'échelle** : L'axe des ordonnées s'étend maintenant de  $-3$  à  $+3$  (contre  $\pm 1.5$  précédemment), reflétant l'amplitude du bruit ( $\sigma_w \approx$  amplitude du signal utile).
- **Graphique supérieur** : Le signal utile est **noyé dans le bruit**. La sortie bruitée (bleu) oscille de manière erratique, masquant presque complètement la forme sinusoïdale attendue.
- **Graphique inférieur – Observation cruciale** : La sortie estimée par MC (vert) présente une **amplitude systématiquement réduite** par rapport à la sortie exacte (bleu pointillé). Ce phénomène est particulièrement visible :
  - Aux basses fréquences ( $t < 3$  s) : l'amplitude estimée atteint  $\approx 0.7$  contre  $\approx 1.0$  pour l'exacte
  - Aux hautes fréquences ( $t > 7$  s) : l'amplitude estimée est  $\approx 0.4$  contre  $\approx 0.5$  pour l'exacte
- **Interprétation physique** : Cette sous-estimation de l'amplitude provient directement du biais sur  $\hat{a}$ . Puisque  $|\hat{a}| < |a|$ , le pôle estimé est plus éloigné du cercle unité, ce qui correspond à un système “plus amorti” avec un gain plus faible.

RSB	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$ \Delta a $	$ \Delta b $	Erreur rel. $a$	Erreur rel. $b$
100	-0.3535	0.6375	0.0144	0.0054	3.9%	0.9%
10	-0.2826	0.6606	0.0853	0.0285	23.2%	4.5%
1	-0.1161	0.7030	0.2518	0.0709	68.4%	11.2%

TABLE 1 – Estimation des paramètres pour différents RSB (valeurs exactes :  $a = -0.3679$ ,  $b = 0.6321$ )

### IV.3 Résultats numériques

Observations quantitatives :

1. **Biais sur  $a$  :**  $\hat{a}$  est **toujours moins négatif** que  $a$ . Pour RSB=1,  $\hat{a} \approx -0.12$  au lieu de  $-0.37$ , soit une erreur de 68%.
2. **Biais sur  $b$  :**  $\hat{b}$  est **toujours surestimé**. Cette surestimation compense partiellement l'erreur sur  $a$  pour maintenir un gain statique proche de  $K = \frac{b}{1+a}$ .
3. **Rapport des erreurs :** Le paramètre  $a$  est **beaucoup plus affecté** que  $b$ . Cela s'explique par le fait que  $a$  multiplie les sorties passées bruitées dans le régresseur, alors que  $b$  multiplie les entrées (non bruitées).

### IV.4 Étude statistique (Monte Carlo)

Pour caractériser rigoureusement les propriétés statistiques de l'estimateur, nous avons effectué  $I = 500$  simulations indépendantes pour chaque niveau de RSB.

Analyse détaillée de la Figure 4 :

Ligne supérieure (paramètre  $a$ ) :

- **RSB = 100** : Distribution très concentrée (écart-type  $\sigma_a \approx 0.01$ ) centrée sur la valeur vraie. La ligne rouge (valeur exacte) et la ligne bleue (moyenne empirique) sont confondues.
- **RSB = 10** : Distribution plus étalée. On observe un **décalage visible** entre la moyenne (bleu,  $\approx -0.32$ ) et la valeur vraie (rouge,  $-0.368$ ). C'est la manifestation graphique du biais.
- **RSB = 5** : Le décalage s'accentue. La distribution s'étale de  $-0.45$  à  $-0.15$  environ.
- **RSB = 2** : Forte dispersion et biais important. La moyenne ( $\approx -0.22$ ) est très éloignée de la valeur vraie. Certaines estimations donnent même des valeurs proches de  $-0.1$ .

Ligne inférieure (paramètre  $b$ ) :

- Le paramètre  $b$  est **moins affecté** par le bruit car il n'est pas multiplié par les sorties bruitées dans le régresseur.
- On observe néanmoins une **surestimation systématique** : la moyenne (vert) est toujours à droite de la valeur vraie (rouge).
- La dispersion reste raisonnable même pour RSB = 2 (distribution entre 0.5 et 0.8).

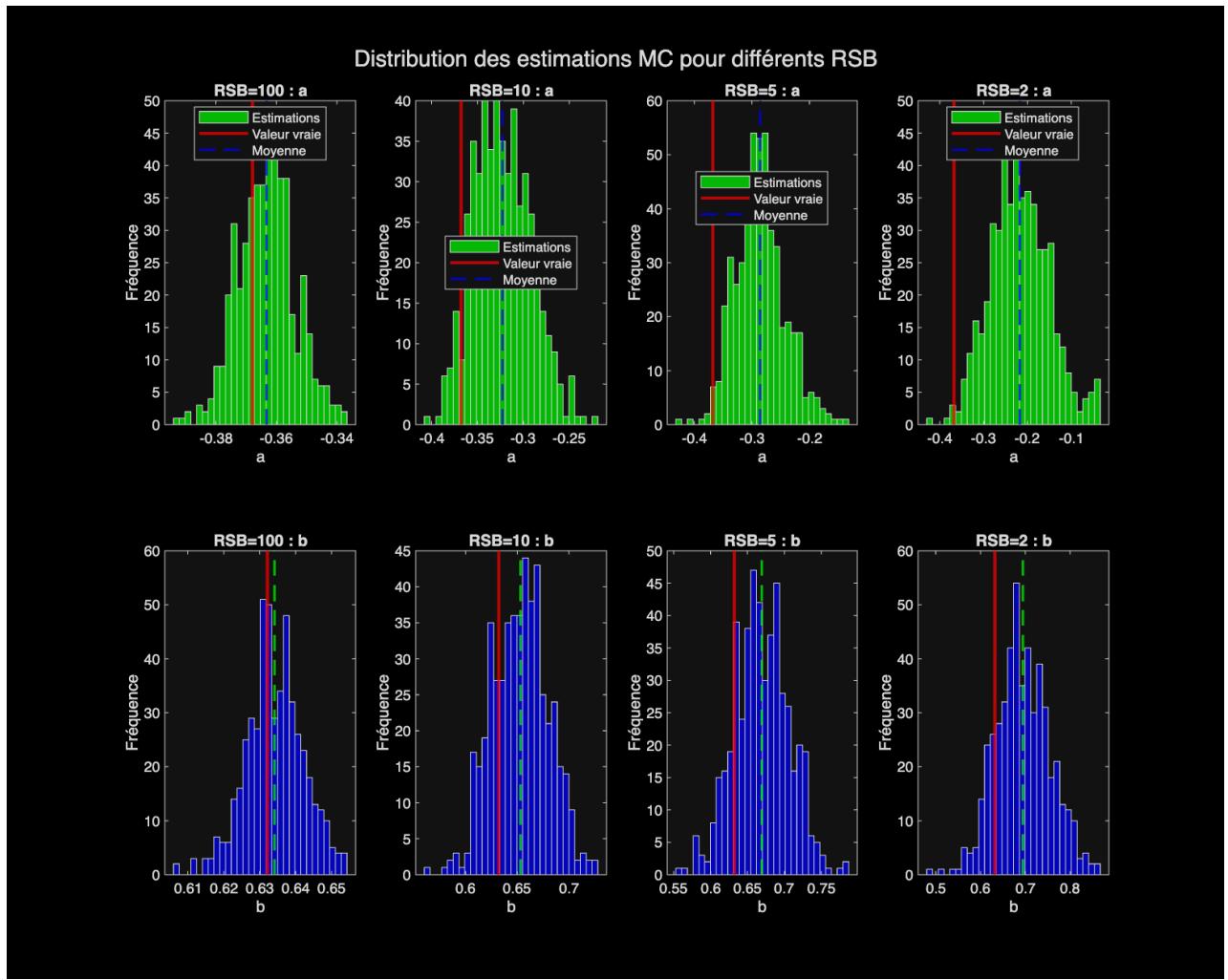


FIGURE 4 – Distribution des estimations MC pour différents RSB (500 simulations)

RSB	Biais $a$	$\sigma_a$	Biais $b$	$\sigma_b$
100	0.0046	0.0094	0.0020	0.0080
10	0.0450	0.0308	0.0210	0.0269
5	0.0821	0.0428	0.0372	0.0373
2	0.1503	0.0672	0.0625	0.0598

TABLE 2 – Statistiques de l'estimateur MC (500 simulations)

**Vérification de la formule théorique du biais :**

Pour  $RSB = 10$ , la formule prédit :

$$\text{Biais}(a) = |a| - |E[\hat{a}]| \approx |a| \cdot \frac{1}{RSB + 1} = 0.368 \times \frac{1}{11} \approx 0.033 \quad (25)$$

La valeur expérimentale est 0.045, en accord raisonnable avec la théorie (l'écart provient des effets de taille finie et de la non-stationnarité du chirp).

## IV.5 Convergence de l'estimateur

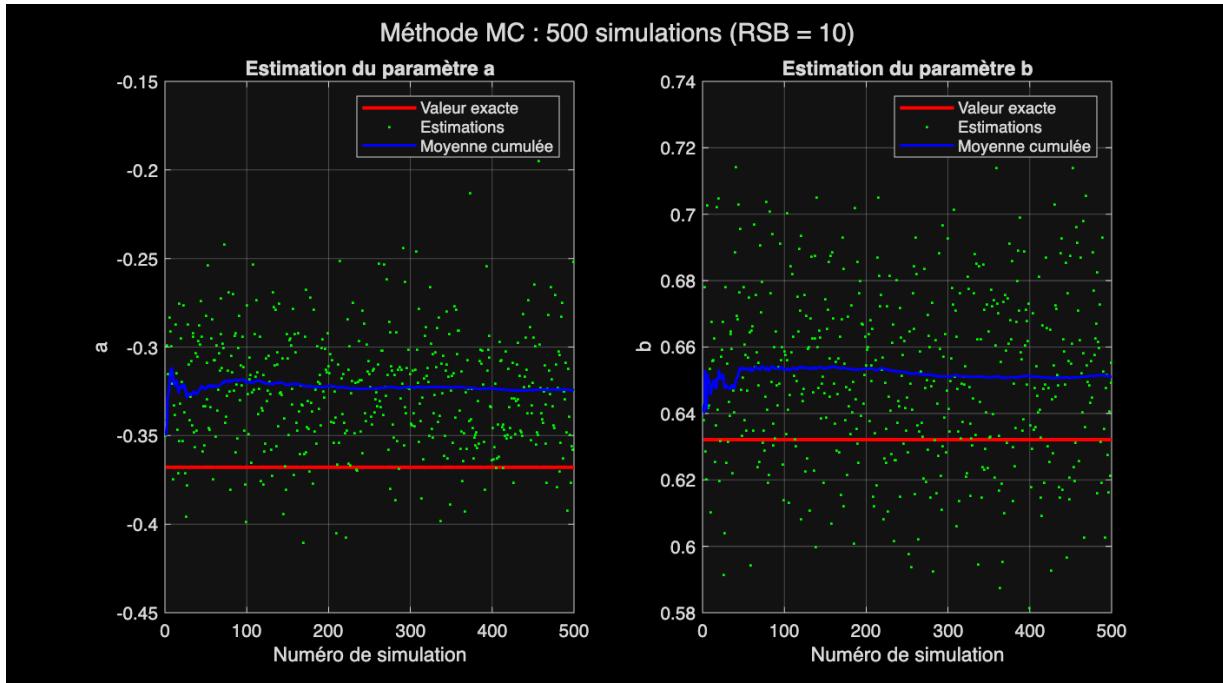


FIGURE 5 – Évolution des estimations sur 500 simulations (RSB = 10)

### Analyse de la Figure 5 :

- **Points verts** : Chaque point représente une estimation issue d'une réalisation indépendante du bruit. La dispersion illustre la variance de l'estimateur.
- **Ligne bleue (moyenne cumulée)** : Converge rapidement vers une valeur **stable mais biaisée**. Après environ 100 simulations, la moyenne cumulée ne varie quasiment plus.
- **Ligne rouge (valeur exacte)** : Reste constante et **distincte** de la moyenne cumulée, confirmant le caractère **systématique et non aléatoire** du biais.
- **Observation pour  $a$**  : La moyenne converge vers  $\approx -0.32$  au lieu de  $-0.368$ . L'écart ( $\approx 0.05$ ) correspond au biais théorique.
- **Observation pour  $b$**  : La moyenne converge vers  $\approx 0.65$  au lieu de  $0.632$ . La surestimation est plus faible en proportion.

## IV.6 Bilan de la Manipulation 1

Les résultats expérimentaux confirment que l'estimateur des moindres carrés est **biaisé** en présence de bruit de sortie. Le biais sur  $a$  suit approximativement la loi  $\frac{|a|}{RSB+1}$ , ce qui est cohérent avec la théorie. On note également que le paramètre  $a$  (partie autorégressive) est plus sensible au bruit que  $b$  (partie moyenne mobile), car  $a$  multiplie les sorties bruitées dans le régresseur. Enfin, le biais diminue lorsque le RSB augmente, ce qui confirme la consistance de l'estimateur.

## V Manipulation 2 : Moindres Carrés Récursifs avec facteur d'oubli

### V.1 Objectif

Cette manipulation étudie la capacité de l'algorithme MCR à :

1. Estimer les paramètres en ligne (temps réel)
2. Suivre des paramètres variables grâce au facteur d'oubli  $\lambda$

### V.2 MCR sur système stationnaire

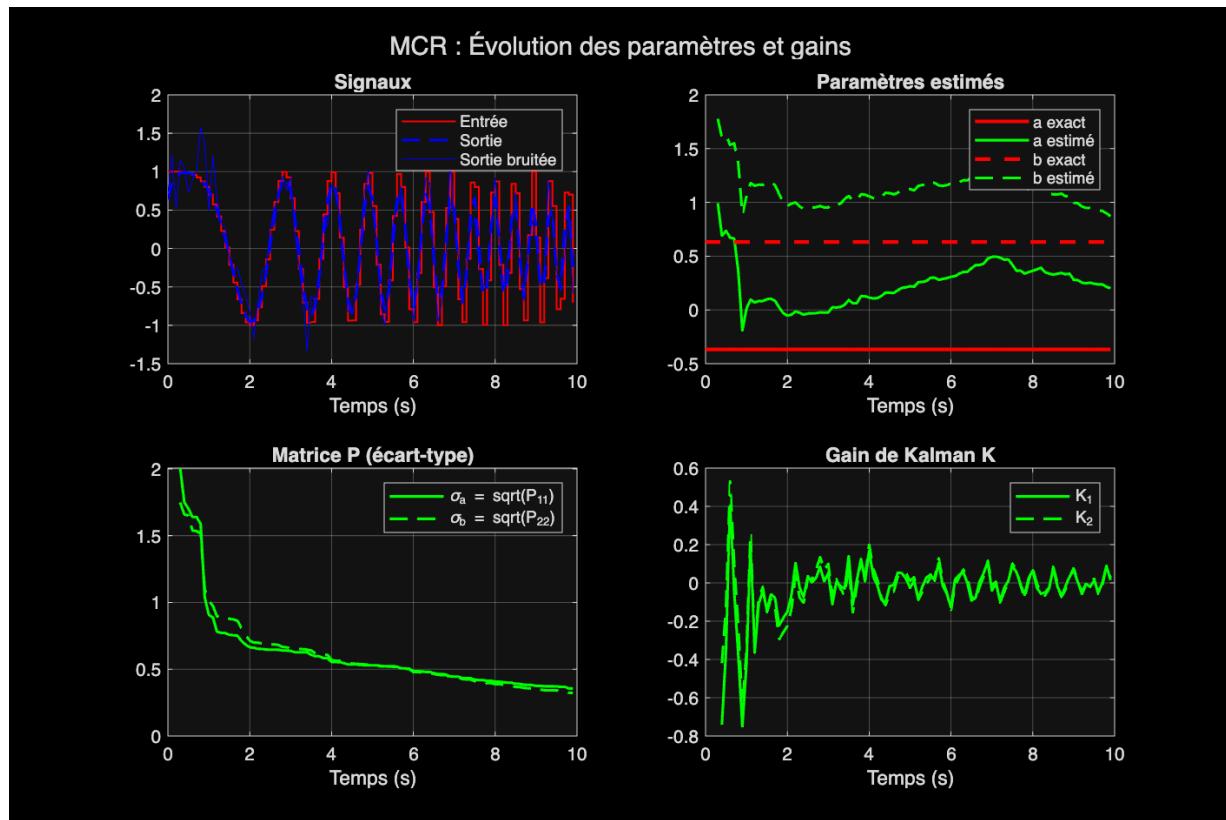


FIGURE 6 – MCR : évolution des paramètres, de la matrice P et du gain K

Analyse de la Figure 6 :

**Graphique supérieur gauche (Signaux) :** Identique aux manipulations précédentes, montre l'entrée chirp et la sortie bruitée.

**Graphique supérieur droit (Paramètres estimés) :**

- Les estimations partent de valeurs initiales arbitraires et convergent vers des valeurs **biaisées** (comme attendu avec la méthode MC).

## Identification par Moindres Carrés

- La convergence est rapide : environ 2-3 secondes pour atteindre le régime permanent.
- On observe les mêmes biais que dans la Manipulation 1 :  $\hat{a} > a$  (en valeur algébrique) et  $\hat{b} > b$ .

### Graphique inférieur gauche (Matrice P) :

- $\sqrt{P_{11}}$  et  $\sqrt{P_{22}}$  représentent les **écart-types estimés** des paramètres  $a$  et  $b$ .
- Décroissance rapide initialement (beaucoup d'information nouvelle).
- Convergence vers des valeurs faibles mais non nulles, reflétant l'incertitude résiduelle due au bruit.
- **Observation importante** : La décroissance n'est pas monotone mais présente des "paliers" correspondant aux zones de faible excitation du système.

### Graphique inférieur droit (Gain de Kalman K) :

- Le gain  $K$  oscille autour de zéro après la phase transitoire.
- L'amplitude des oscillations décroît, indiquant que l'algorithme "fait de moins en moins confiance" aux nouvelles mesures.
- Les pics correspondent aux instants où l'erreur de prédiction est importante.

## V.3 Système non stationnaire

Pour tester le suivi de paramètres variables, on considère un système dont les paramètres changent **brusquement** à  $t = 25$  s :

	$K_a$	$\tau$ (s)	$a$	$b$
$t < 25$ s	1.0	0.10	-0.3679	0.6321
$t \geq 25$ s	0.8	0.08	-0.2865	0.5707

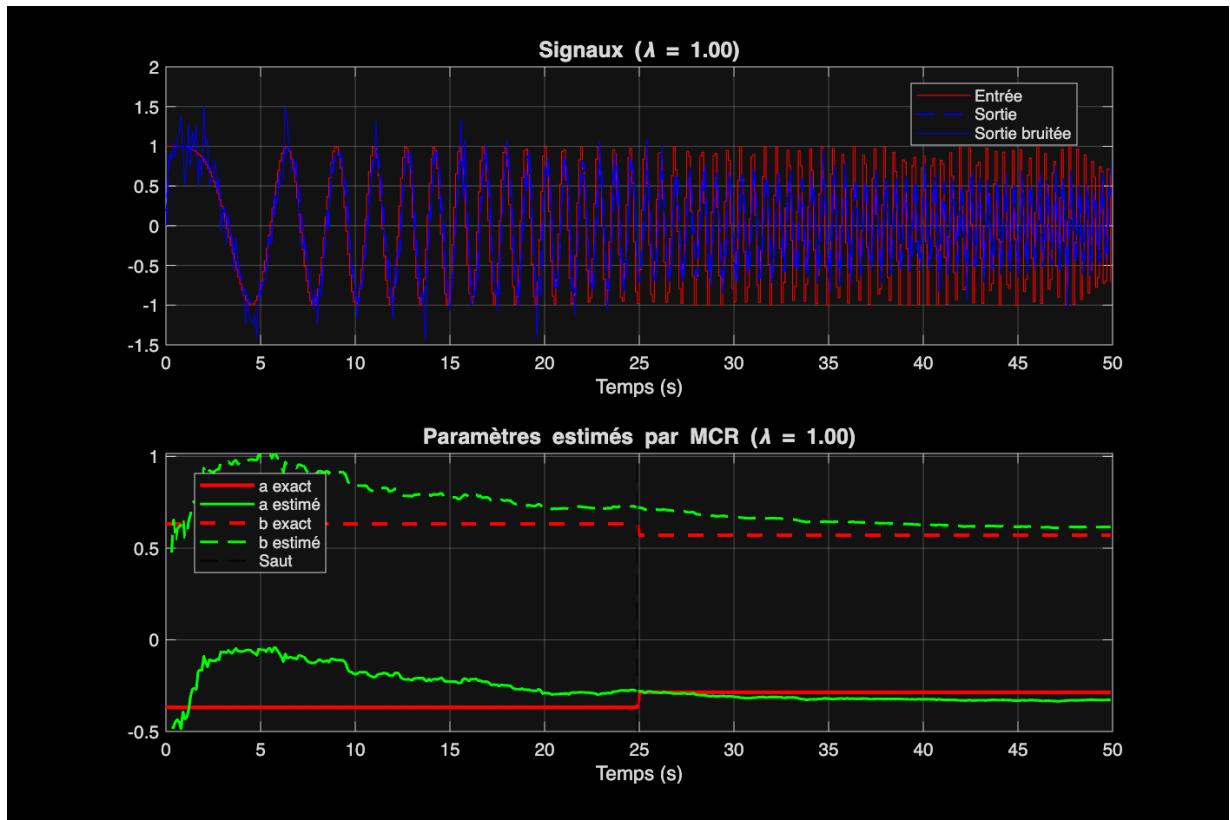
TABLE 3 – Paramètres du système non stationnaire

## V.4 Influence du facteur d'oubli

### V.4.1 Cas $\lambda = 1$ (pas d'oubli)

#### Analyse de la Figure 7 :

- **Avant le saut** ( $t < 25$  s) : L'estimateur converge vers une valeur biaisée, comme attendu.
- **Après le saut** ( $t \geq 25$  s) : Les paramètres vrais (rouge) changent brusquement, mais les estimations (vert) restent **quasiment constantes**.
- **Explication** : Avec  $\lambda = 1$ , la matrice  $\mathbf{P}$  a convergé vers des valeurs très faibles. Le gain  $\mathbf{K}$  est donc négligeable et les nouvelles mesures n'ont presque plus d'influence sur l'estimation.
- L'algorithme MCR sans oubli est donc **inadapté** aux systèmes non stationnaires.

FIGURE 7 – MCR avec  $\lambda = 1$  : pas de suivi après le saut

#### V.4.2 Cas $\lambda = 0.98$ (oubli faible)

**Analyse de la Figure 8 :**

- La mémoire effective est  $\frac{1}{1-0.98} = 50$  échantillons, soit 5 secondes.
- Après le saut, on observe un **début de convergence** vers les nouvelles valeurs, mais le suivi est **lent** et incomplet sur la durée de la simulation.
- L'estimation reste plus bruitée qu'avec  $\lambda = 1$ , ce qui est le prix à payer pour la réactivité.

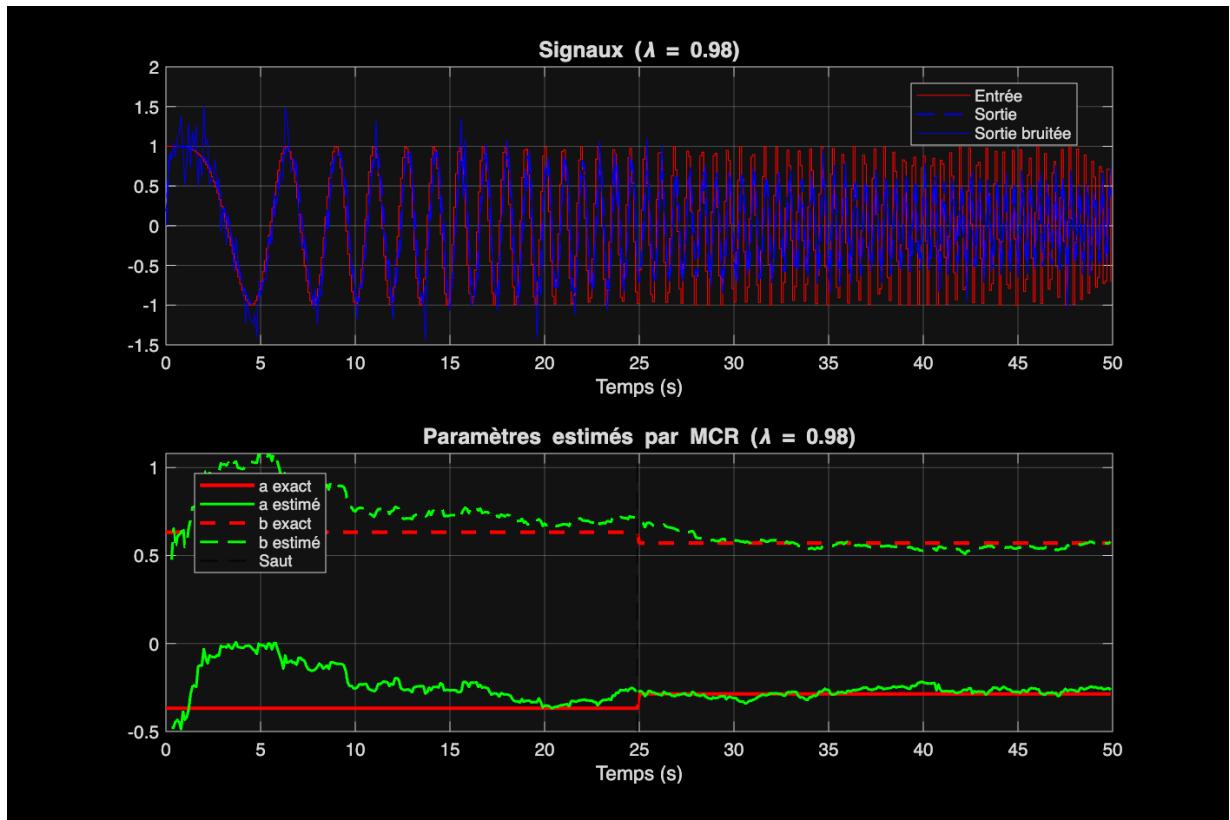
#### V.4.3 Cas $\lambda = 0.95$ (oubli modéré)

**Analyse de la Figure 9 :**

- La mémoire effective est  $\frac{1}{1-0.95} = 20$  échantillons, soit 2 secondes.
- **Détection du saut** : Clairement visible sur les courbes d'estimation. L'algorithme réagit rapidement au changement de paramètres.
- **Convergence** : Après environ 5-10 secondes post-saut, les estimations se stabilisent autour des nouvelles valeurs (avec le biais habituel).
- **Compromis bruit/réactivité** : Les oscillations sont présentes mais restent raisonnables.

#### V.4.4 Cas $\lambda = 0.90$ (oubli fort)

**Analyse de la Figure 10 :**

FIGURE 8 – MCR avec  $\lambda = 0.98$  : suivi lent

- La mémoire effective est  $\frac{1}{1-0.98} = 10$  échantillons, soit 1 seconde.
- **Réactivité excellente** : Le saut est détecté quasi-instantanément.
- **Inconvénient majeur** : Les estimations sont très bruitées avec des oscillations d'amplitude importante (pics jusqu'à 1.4 pour  $b$  dont la vraie valeur est 0.63).
- On note qu'un  $\lambda$  trop petit peut conduire à une divergence numérique de  $\mathbf{P}$  dans certaines conditions (mauvais conditionnement, faible excitation).

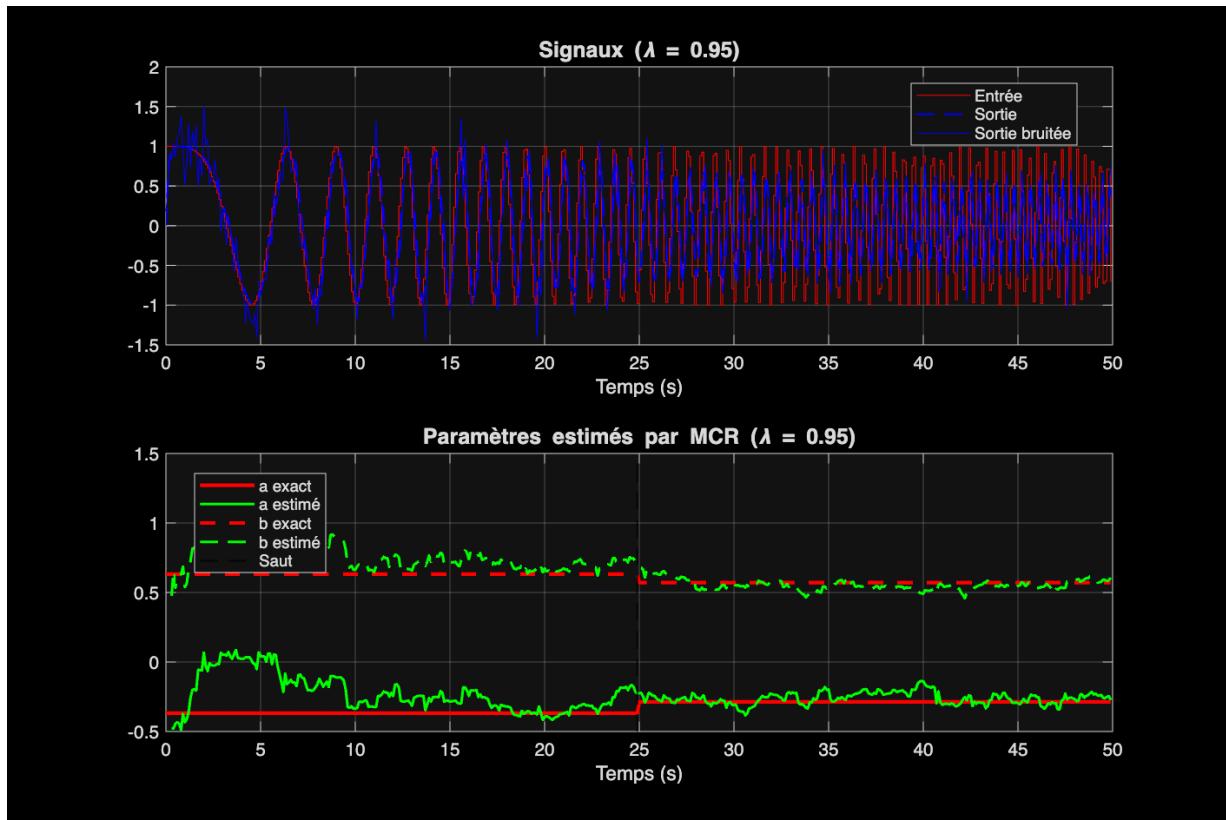
## V.5 Comparaison synthétique

$\lambda$	Mémoire effective	Réactivité	Niveau de bruit
1.00	$\infty$	Nulle	Minimal
0.98	50 échantillons	Faible	Faible
0.95	20 échantillons	Bonne	Modéré
0.90	10 échantillons	Excellente	Élevé

TABLE 4 – Synthèse de l'influence de  $\lambda$ 

## V.6 Étude statistique avec $\lambda = 0.95$

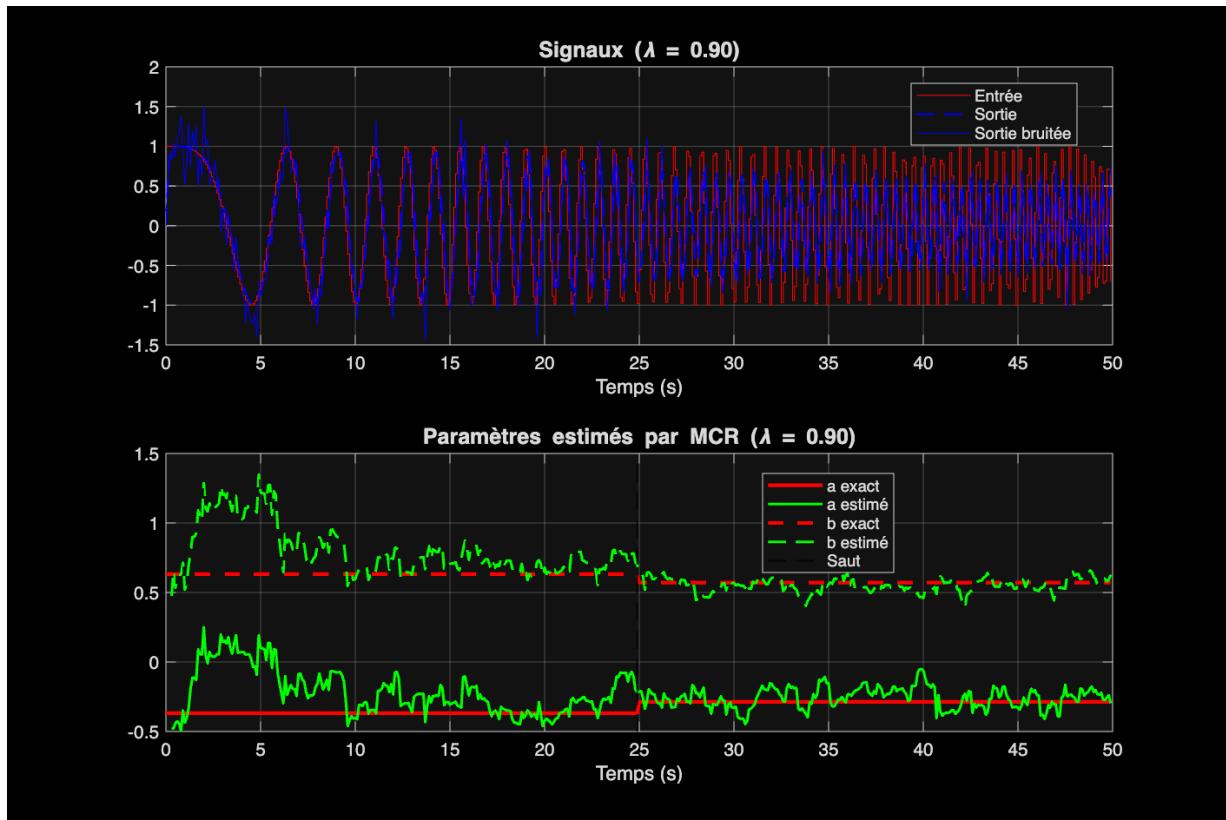
Analyse de la Figure 12 :

FIGURE 9 – MCR avec  $\lambda = 0.95$  : bon compromis

- Les 50 courbes vertes représentent les trajectoires d'estimation pour 50 réalisations indépendantes du bruit.
- **Phase transitoire ( $t < 10$  s)** : Grande dispersion des estimations, certaines trajectoires s'écartent fortement de la valeur vraie (jusqu'à  $a \approx 1$  ou  $b \approx 2$ ).
- **Régime permanent avant saut ( $10 < t < 25$  s)** : Les trajectoires se regroupent autour de la valeur vraie (avec biais), formant un “faisceau” relativement étroit.
- **Après le saut ( $t > 25$  s) :**
  - Nouvelle phase de transitoire avec dispersion accrue
  - Convergence progressive vers les nouvelles valeurs des paramètres
  - Le “faisceau” se resserre à nouveau après environ 10 secondes
- **Observation importante** : La valeur vraie (rouge) reste bien à l'intérieur du faisceau de trajectoires, ce qui valide la capacité de l'algorithme à suivre les paramètres.

## V.7 Bilan de la Manipulation 2

L'algorithme MCR permet l'estimation **en ligne** des paramètres. Sans facteur d'oubli ( $\lambda = 1$ ), l'algorithme ne peut pas suivre les variations de paramètres car la matrice  $\mathbf{P}$  converge vers zéro. Le facteur d'oubli  $\lambda$  contrôle le compromis entre réactivité et sensibilité au bruit :  $\lambda = 0.95$  offre un bon équilibre dans notre cas. Le choix optimal de  $\lambda$  dépend de la vitesse de variation des paramètres et du niveau de bruit.

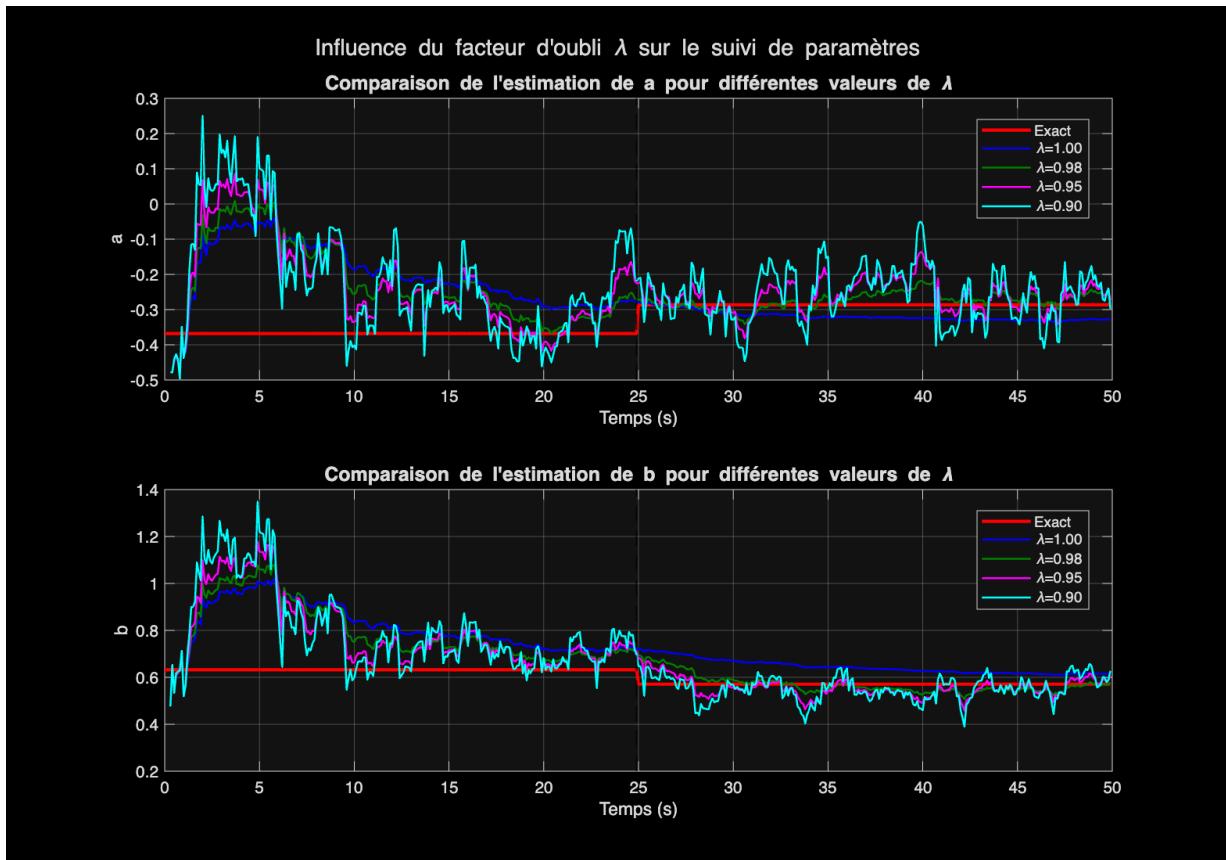
FIGURE 10 – MCR avec  $\lambda = 0.90$  : suivi rapide mais bruité

## VI Conclusion générale

### VI.1 Synthèse des résultats

Ce TP a permis d'étudier en profondeur la méthode des moindres carrés pour l'identification de systèmes dynamiques :

- Aspect théorique :** La méthode MC fournit une solution analytique explicite grâce à la linéarité de l'erreur de prédiction en les paramètres, contrairement à la méthode du modèle (OE) qui nécessite des algorithmes itératifs.
- Biais de l'estimateur :** En présence de bruit de sortie, l'estimateur MC est biaisé. Ce biais est inhérent à la corrélation entre le régresseur et le bruit, et il diminue quand le RSB augmente.
- Version récursive :** L'algorithme MCR permet l'estimation en temps réel avec une complexité constante par itération.
- Suivi de paramètres :** Le facteur d'oubli  $\lambda$  est essentiel pour les systèmes non stationnaires, permettant d'adapter la réactivité de l'estimateur.

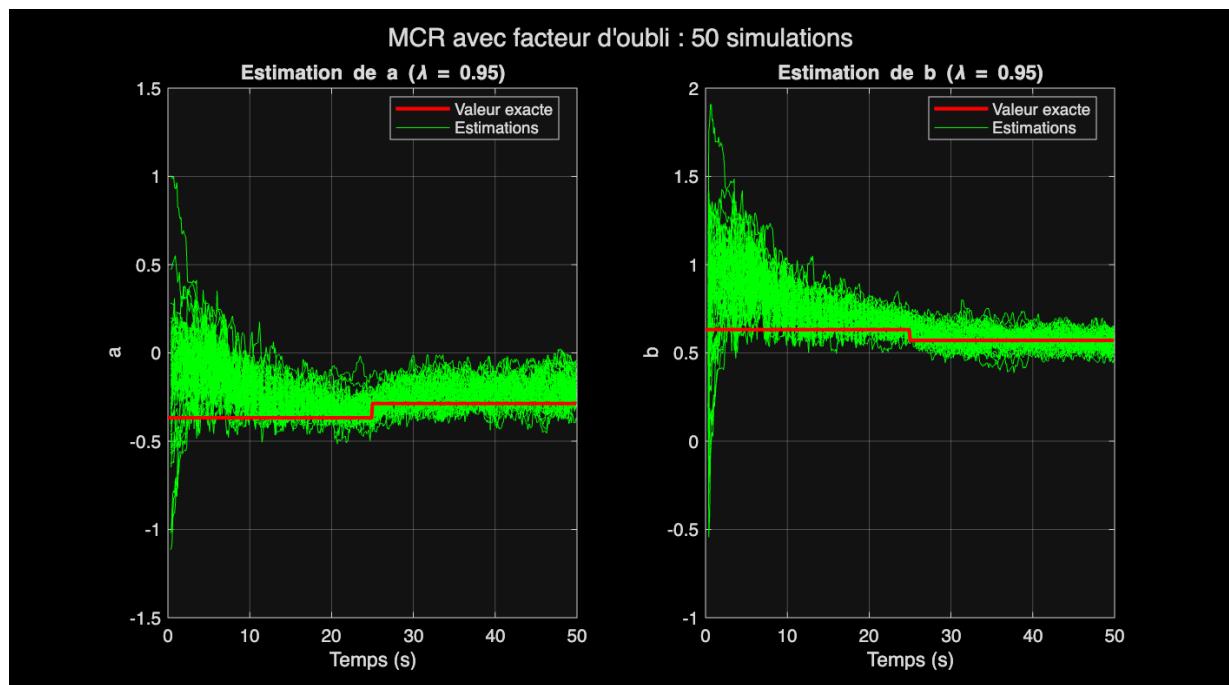
FIGURE 11 – Comparaison des différentes valeurs de  $\lambda$ 

## VI.2 Limitations observées

Le principal inconvénient de la méthode des moindres carrés est le **biais** en présence de bruit de sortie. Pour y remédier, d'autres méthodes existent comme les variables instrumentales ou la méthode du modèle (OE).

Concernant le choix de  $\lambda$  dans l'algorithme MCR, il dépend fortement de l'application : un système à paramètres rapidement variables nécessite un  $\lambda$  plus faible, au prix d'une estimation plus bruitée.

Enfin, les concepts d'estimation récursive étudiés ici constituent une introduction naturelle au **filtre de Kalman** pour l'estimation d'état de systèmes dynamiques.

FIGURE 12 – MCR avec  $\lambda = 0.95$  : 50 réalisations superposées