

---

**ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE PARIS-SACLAY**  
(Université Paris-Saclay)

---

**Compte rendu de TP**

Matière : *Automatique non-linéaire et Filtrage de Kalman*

---

---

**TP2 - Éstimation de la position et de la vitesse  
d'un mobile par filtrage de Kalman**

Nom de l'étudiant : Gatien Séguy & Maxime Degraeve

Établissement : ENS Paris-Saclay (Département EEA)

Encadrante : Jean-Pierre Barbot

Date : 29 janvier 2026

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Modèle du système</b>	<b>2</b>
<b>II.1</b>	<b>Préparation 1</b>	<b>2</b>
II.1.1	Dynamique continue du système	2
II.1.2	Discrétisation avec accélération constante par morceaux	3
II.1.3	Équations aux instants d'échantillonnage	3
II.1.4	Représentation d'état	3
II.1.5	Matrice de covariance du bruit d'état	3
II.1.6	Équation d'observation	4
II.1.7	Récapitulatif du modèle d'état	4
<b>III</b>	<b>Éstimation de l'état du système</b>	<b>4</b>
<b>III.1</b>	<b>Préparation 2</b>	<b>4</b>
<b>III.2</b>	<b>Manipulation</b>	<b>4</b>

## I Introduction

Dans ce TP, on considère un mobile se déplaçant en mouvement rectiligne quasi-uniforme. L'objectif est d'estimer sa position et sa vitesse (constituant son état) à partir de la seule mesure bruitée de sa position. Le caractère "quasi-uniforme" du mouvement se traduit par une accélération non nulle mais de faible amplitude, modélisée comme un bruit blanc.

Ce problème est représentatif de nombreuses applications pratiques : suivi de cibles radar, localisation GPS, ou encore navigation de véhicules autonomes.

Les objectifs de ce travail pratique sont les suivants :

- Mettre en équation le système sous forme d'un modèle d'état à temps discret, en identifiant les matrices du système et les statistiques des bruits.
- Implémenter le filtre de Kalman et illustrer son fonctionnement sur des données simulées.
- Étudier l'influence de différents paramètres sur les performances du filtre : nature de la densité de probabilité des bruits, initialisation du filtre, et erreurs de modélisation sur les matrices de covariance.

On adopte les notations suivantes tout au long du CR (je préfère radoter pour pas me perdre dans les notations / indices) :

- $t_k = kT$  : instants d'échantillonnage avec  $T > 0$  la période d'échantillonnage
- $d_k$  : position du mobile à l'instant  $t_k$
- $v_k$  : vitesse du mobile à l'instant  $t_k$
- $\gamma_k$  : accélération du mobile sur l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$
- $\mathbf{x}_k = (d_k \ v_k)^T$  : vecteur d'état
- $y_k$  : mesure de la position à l'instant  $t_k$
- $w_k$  : bruit de mesure
- $\sigma_\gamma$  : écart-type de l'accélération ( $\sigma_\gamma = 0,01 \text{ m/s}^2$ )
- $\sigma_d$  : écart-type du bruit de mesure ( $\sigma_d = 0,1 \text{ m}$ )

## II Modèle du système

### II.1 Préparation 1

#### II.1.1 Dynamique continue du système

On considère un mobile en mouvement rectiligne. Pour  $t \geq kT$ , les équations de la cinématique donnent :

$$\begin{cases} v(t) = v_k + \int_{kT}^t \gamma(\tau) d\tau \\ d(t) = d_k + \int_{kT}^t v(\tau) d\tau \end{cases}$$

### II.1.2 Discrétisation avec accélération constante par morceaux

Entre deux instants d'échantillonnage consécutifs, l'accélération est supposée constante : pour  $t \in [kT, (k+1)T]$ , on a  $\gamma(t) = \gamma_k$ .

En intégrant, on obtient l'évolution de la vitesse :

$$v(t) = v_k + \gamma_k(t - kT)$$

Puis, en intégrant la vitesse, on obtient l'évolution de la position :

$$d(t) = d_k + \int_{kT}^t [v_k + \gamma_k(\tau - kT)] d\tau = d_k + v_k(t - kT) + \frac{\gamma_k}{2}(t - kT)^2$$

### II.1.3 Équations aux instants d'échantillonnage

En évaluant ces expressions à l'instant  $t = (k+1)T$ , on obtient les équations récurrentes :

$$\begin{cases} d_{k+1} = d_k + v_k T + \frac{\gamma_k T^2}{2} \\ v_{k+1} = v_k + \gamma_k T \end{cases}$$

### II.1.4 Représentation d'état

En définissant le vecteur d'état  $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} d_k \\ v_k \end{pmatrix}$ , on peut écrire le système sous forme matricielle :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \gamma_k$$

Le bruit d'état est donc  $\mathbf{b}_k = \mathbf{B}\gamma_k$  où  $\gamma_k$  est un bruit blanc de variance  $\sigma_\gamma^2$ .

### II.1.5 Matrice de covariance du bruit d'état

La matrice de covariance du bruit d'état se calcule comme suit :

$$\mathbf{Q} = \mathbb{E} [\mathbf{b}_k \mathbf{b}_k^T] = \mathbb{E} [\mathbf{B} \gamma_k \gamma_k^T \mathbf{B}^T] = \mathbf{B} \mathbb{E} [\gamma_k^2] \mathbf{B}^T = \sigma_\gamma^2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T$$

En développant le produit  $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$  :

$$\mathbf{B} \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T^4}{4} & \frac{T^3}{2} \\ \frac{T^3}{2} & T^2 \end{pmatrix}$$

D'où la matrice de covariance du bruit d'état :

$$\mathbf{Q} = \sigma_\gamma^2 \begin{pmatrix} \frac{T^4}{4} & \frac{T^3}{2} \\ \frac{T^3}{2} & T^2 \end{pmatrix}$$

### II.1.6 Équation d'observation

La mesure  $y_k$  correspond à la position bruitée du mobile :

$$y_k = d_k + w_k = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}_k + w_k$$

où  $w_k$  est un bruit blanc de variance  $\sigma_d^2$ .

La matrice de covariance du bruit d'observation est donc :

$$R = \sigma_d^2$$

### II.1.7 Récapitulatif du modèle d'état

Le système à temps discret s'écrit sous la forme canonique :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_k \\ y_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + w_k \end{cases}$$

avec les matrices et les statistiques des bruits :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{b}_k] = \mathbf{0}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{b}_k \mathbf{b}_k^T] = \mathbf{Q}, \quad \mathbb{E}[w_k] = 0, \quad \mathbb{E}[w_k^2] = R$$

## III Estimation de l'état du système

### III.1 Préparation 2

### III.2 Manipulation