

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE PARIS-SACLAY
(Université Paris-Saclay)

Compte rendu de TP

Matière : *Automatique non-linéaire et Filtrage de Kalman*

TP1 - Identification par Moindres Carrés

Nom de l'étudiant : Gatien Ségué & Maxime Degraeve
Établissement : ENS Paris-Saclay (Département EEA)
Encadrante : Jean-Pierre Barbot
Date : 29 janvier 2026

Table des matières

I	Introduction	3
I.1	Contexte et objectifs	3
I.2	Problématique	3
II	Fondements théoriques	3
II.1	Méthode du modèle (Output Error – OE)	3
II.1.1	Préparation 1 : Analyse de la non-linéarité	3
II.2	Méthode des moindres carrés (Equation Error – ARX)	4
II.2.1	Préparation 2 : Formulation linéaire	4
II.2.2	Analyse du biais de l'estimateur MC	5
II.3	Moindres Carrés Récursifs (MCR)	6
II.3.1	Algorithme de base	6
II.3.2	MCR avec facteur d'oubli	6
III	Mise en œuvre expérimentale	6
III.1	Processus étudié	6
III.2	Signal d'entrée	7
IV	Manipulation 1 : Méthode des Moindres Carrés	8
IV.1	Objectif	8
IV.2	Résultats pour différents niveaux de bruit	8
IV.2.1	Cas RSB = 100 (bruit faible)	8
IV.2.2	Cas RSB = 10 (bruit modéré)	9
IV.2.3	Cas RSB = 1 (bruit fort)	10
IV.3	Résultats numériques	11
IV.4	Étude statistique (Monte Carlo)	11
IV.5	Convergence de l'estimateur	12
IV.6	Bilan de la Manipulation 1	13
V	Manipulation 2 : Moindres Carrés Récursifs avec facteur d'oubli	13
V.1	Objectif	13
V.2	MCR sur système stationnaire	14
V.3	Système non stationnaire	15
V.4	Influence du facteur d'oubli	15
V.4.1	Cas $\lambda = 1$ (pas d'oubli)	15
V.4.2	Cas $\lambda = 0.98$ (oubli faible)	15
V.4.3	Cas $\lambda = 0.95$ (oubli modéré)	16
V.4.4	Cas $\lambda = 0.90$ (oubli fort)	16
V.5	Comparaison synthétique	17
V.6	Étude statistique avec $\lambda = 0.95$	17

V.7	Bilan de la Manipulation 2	18
VI	Conclusion générale	18
VI.1	Synthèse des résultats	18
VI.2	Limitations observées	19

I Introduction

I.1 Contexte et objectifs

Ce TP porte sur l'**identification paramétrique** d'un système dynamique linéaire à temps discret. L'objectif est d'estimer les paramètres d'une fonction de transfert à partir de mesures entrée-sortie, en utilisant principalement la **méthode des moindres carrés (MC)**.

Le modèle recherché est une fonction de transfert à temps discret de la forme :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=n_k}^{n_b} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i}} \quad (1)$$

Le vecteur de paramètres à estimer est $\theta = (a_1 \dots a_{n_a} b_{n_k} \dots b_{n_b})^T$ de dimension $n_a + n_b - n_k + 1$.

I.2 Problématique

L'identification par moindres carrés pose plusieurs questions fondamentales :

- Comment formuler le problème pour obtenir une solution analytique explicite ?
- Quel est l'effet du bruit de mesure sur l'estimation ?
- Comment adapter la méthode pour des systèmes dont les paramètres varient dans le temps ?

II Fondements théoriques

II.1 Méthode du modèle (Output Error – OE)

II.1.1 Préparation 1 : Analyse de la non-linéarité

Pourquoi l'erreur ε_n n'est pas linéaire en les paramètres ? Dans la méthode du modèle (appelée aussi Output Error), l'erreur est définie par :

$$\varepsilon_n = s_n - s_n^{\text{mod}} \quad (2)$$

La sortie du modèle s_n^{mod} est obtenue par filtrage de l'entrée u_n par la fonction de transfert $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$. Dans le domaine temporel, cela correspond à l'équation de récurrence :

$$s_n^{\text{mod}} = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i s_{n-i}^{\text{mod}} + \sum_{i=n_k}^{n_b} b_i u_{n-i} \quad (3)$$

Analyse de la non-linéarité : La sortie s_n^{mod} dépend des valeurs passées s_{n-i}^{mod} , qui elles-mêmes dépendent des paramètres a_i de manière récursive. Par exemple, pour un système du premier ordre :

$$s_1^{\text{mod}} = b_1 u_0 \quad (4)$$

$$s_2^{\text{mod}} = -a_1 s_1^{\text{mod}} + b_1 u_1 = -a_1 b_1 u_0 + b_1 u_1 \quad (5)$$

$$s_3^{\text{mod}} = -a_1 s_2^{\text{mod}} + b_1 u_2 = a_1^2 b_1 u_0 - a_1 b_1 u_1 + b_1 u_2 \quad (6)$$

On voit apparaître des termes en a_1^2 , $a_1 b_1$, etc. La sortie est donc une **fonction polynomiale non linéaire** des paramètres.

Conséquence sur l'estimation Le critère quadratique $J_k(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=1}^k \varepsilon_n^2$ est une fonction non convexe des paramètres. La condition d'optimalité $\frac{\partial J_k}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$ conduit à un système d'équations non linéaires sans solution analytique. Il faut donc recourir à des **algorithmes itératifs** (gradient, Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt).

Cas particulier linéaire L'erreur est linéaire en les paramètres uniquement pour un **filtre FIR** (Finite Impulse Response), c'est-à-dire $A(z) = 1$ (pas de pôles). Dans ce cas :

$$s_n^{\text{mod}} = \sum_{i=n_k}^{n_b} b_i u_{n-i} \quad (7)$$

est directement linéaire en $\boldsymbol{\theta} = (b_{n_k}, \dots, b_{n_b})^\top$.

II.2 Méthode des moindres carrés (Equation Error – ARX)

II.2.1 Préparation 2 : Formulation linéaire

Expression de l'erreur et linéarité La méthode des moindres carrés utilise un modèle **série-parallèle** où l'erreur est définie par :

$$e_n = s_n - \hat{s}_n^{\text{pred}} \quad (8)$$

La différence fondamentale avec la méthode du modèle est que la sortie prédite utilise les **vraies sorties passées mesurées** (et non les sorties du modèle) :

$$\hat{s}_n^{\text{pred}} = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i s_{n-i} + \sum_{i=n_k}^{n_b} b_i u_{n-i} \quad (9)$$

L'erreur devient :

$$e_n = s_n + \sum_{i=1}^{n_a} a_i s_{n-i} - \sum_{i=n_k}^{n_b} b_i u_{n-i} = s_n - \boldsymbol{\varphi}_n^\top \boldsymbol{\theta} \quad (10)$$

avec le **vecteur de régression** :

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \begin{pmatrix} -s_{n-1} \\ \vdots \\ -s_{n-n_a} \\ u_{n-n_k} \\ \vdots \\ u_{n-n_b} \end{pmatrix} \quad (11)$$

L'erreur e_n est bien **linéaire en les paramètres $\boldsymbol{\theta}$** .

Formulation matricielle En posant :

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_k = \begin{pmatrix} \varphi_1^\top \\ \varphi_2^\top \\ \vdots \\ \varphi_k^\top \end{pmatrix} \quad (12)$$

Le critère quadratique s'écrit :

$$J_k(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k \boldsymbol{\theta})^\top (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k \boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k \boldsymbol{\theta}\|^2 \quad (13)$$

Solution explicite La minimisation donne les **équations normales** :

$$\mathbf{C}_k^\top \mathbf{C}_k \boldsymbol{\theta} = \mathbf{C}_k^\top \mathbf{x}_k \quad (14)$$

D'où l'estimateur des moindres carrés :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = (\mathbf{C}_k^\top \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{C}_k^\top \mathbf{x}_k \quad (15)$$

II.2.2 Analyse du biais de l'estimateur MC

Origine du biais Considérons le cas où la sortie mesurée est bruitée : $s_n = s_n^0 + w_n$, où s_n^0 est la sortie non bruitée et w_n un bruit blanc centré de variance σ_w^2 .

Le vecteur de régression contient alors les sorties bruitées :

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \begin{pmatrix} -(s_{n-1}^0 + w_{n-1}) \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Le bruit w_n apparaît **simultanément** dans :

- Le vecteur \mathbf{x}_k (observation courante)
- La matrice \mathbf{C}_k (via les sorties passées dans le régresseur)

Cette corrélation entre le régresseur et le terme d'erreur viole l'hypothèse fondamentale des moindres carrés et introduit un **biais systématique**.

Expression analytique du biais (cas du 1er ordre) Pour un système du premier ordre $H(z) = \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}}$ avec bruit de sortie additif, on peut montrer que :

$$E[\hat{a}] = a \cdot \frac{\text{Var}(s^0)}{\text{Var}(s^0) + \sigma_w^2} = a \cdot \frac{\text{RSB}}{\text{RSB} + 1} \quad (17)$$

où $\text{RSB} = \frac{P_s}{P_w} = \frac{\text{Var}(s^0)}{\sigma_w^2}$ est le rapport signal sur bruit.

Conséquence : $|E[\hat{a}]| < |a|$, l'estimateur MC **sous-estime systématiquement** la valeur absolue du paramètre a . Ce phénomène est connu sous le nom de **biais de régression atténuée** (attenuation bias).

II.3 Moindres Carrés Récursifs (MCR)

II.3.1 Algorithme de base

L'algorithme MCR permet de mettre à jour l'estimation à chaque nouvelle mesure sans recalculer l'inverse de $\mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k$:

Algorithm 1: Moindres Carrés Récursifs

Entrée: Mesures (u_n, s_n) , estimation initiale $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$, matrice \mathbf{P}_0

```

1 for  $n = 1, 2, \dots$  do
2    $\mathbf{c}_n \leftarrow \begin{pmatrix} -s_{n-1} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$  ; // Vecteur de régression
3    $\mathbf{K}_n \leftarrow \frac{\mathbf{P}_{n-1} \mathbf{c}_n}{\mathbf{c}_n^T \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{c}_n + 1}$  ; // Gain
4    $\mathbf{P}_n \leftarrow \mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{K}_n \mathbf{c}_n^T \mathbf{P}_{n-1}$  ; // Mise à jour de P
5    $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \leftarrow \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n-1} + \mathbf{K}_n (s_n - \mathbf{c}_n^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n-1})$  ; // Mise à jour de  $\theta$ 
```

II.3.2 MCR avec facteur d'oubli

Pour les systèmes **non stationnaires** dont les paramètres varient dans le temps, on introduit un **facteur d'oubli** $\lambda \in]0, 1]$:

$$J_k(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=1}^k \lambda^{k-n} e_n^2 \quad (18)$$

Les mesures anciennes sont pondérées exponentiellement moins que les mesures récentes. L'algorithme devient :

$$\mathbf{K}_n = \frac{\mathbf{P}_{n-1} \mathbf{c}_n}{\mathbf{c}_n^T \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{c}_n + \lambda} \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_n = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{K}_n \mathbf{c}_n^T \mathbf{P}_{n-1}) \quad (20)$$

Avec $\lambda = 1$, on retrouve les MC classiques (pas d'oubli). Pour $\lambda < 1$, les anciennes mesures sont progressivement “oubliées”, ce qui permet le suivi de paramètres variables. La “mémoire effective” de l'estimateur est d'environ $\frac{1}{1-\lambda}$ échantillons.

III Mise en œuvre expérimentale

III.1 Processus étudié

Le processus est un filtre linéaire analogique du 1^{er} ordre :

$$H_a(p) = \frac{K_a}{1 + \tau p} \quad (21)$$

avec $K_a = 1$ et $\tau = 0.1$ s.

Sa fonction de transfert échantillonnée avec $T_e = 0.1$ s est :

$$H(z) = \frac{bz^{-1}}{1 + az^{-1}} \quad (22)$$

avec :

$$\begin{cases} a = -e^{-T_e/\tau} = -e^{-1} \approx -0.3679 \\ b = K_a(1 + a) = 1 - e^{-1} \approx 0.6321 \end{cases} \quad (23)$$

Le pôle du système est $z = -a = e^{-1} \approx 0.368$, donc le système est **stable** (pôle à l'intérieur du cercle unité) avec une dynamique relativement rapide (constante de temps ≈ 1 échantillon).

III.2 Signal d'entrée

Le signal d'entrée utilisé est un **chirp** (sinusoïde à fréquence variable) :

$$u(t) = \sin \left(2\pi \left(f_{\min} + \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2T_{\max}} t \right) t \right) \quad (24)$$

avec $f_{\min} = 0$ Hz et $f_{\max} = 0.25F_e = 2.5$ Hz.

Le chirp est un signal **persistamment excitant** qui balaie toute la bande passante du système. Contrairement à une sinusoïde pure, il excite le système sur toute sa plage de fonctionnement fréquentiel, ce qui améliore la qualité de l'identification.

IV Manipulation 1 : Méthode des Moindres Carrés

IV.1 Objectif

L'objectif de cette manipulation est d'étudier expérimentalement :

1. L'effet du rapport signal sur bruit (RSB) sur la qualité de l'estimation
2. Le biais de l'estimateur MC en présence de bruit de sortie
3. Les propriétés statistiques de l'estimateur

IV.2 Résultats pour différents niveaux de bruit

IV.2.1 Cas $RSB = 100$ (bruit faible)

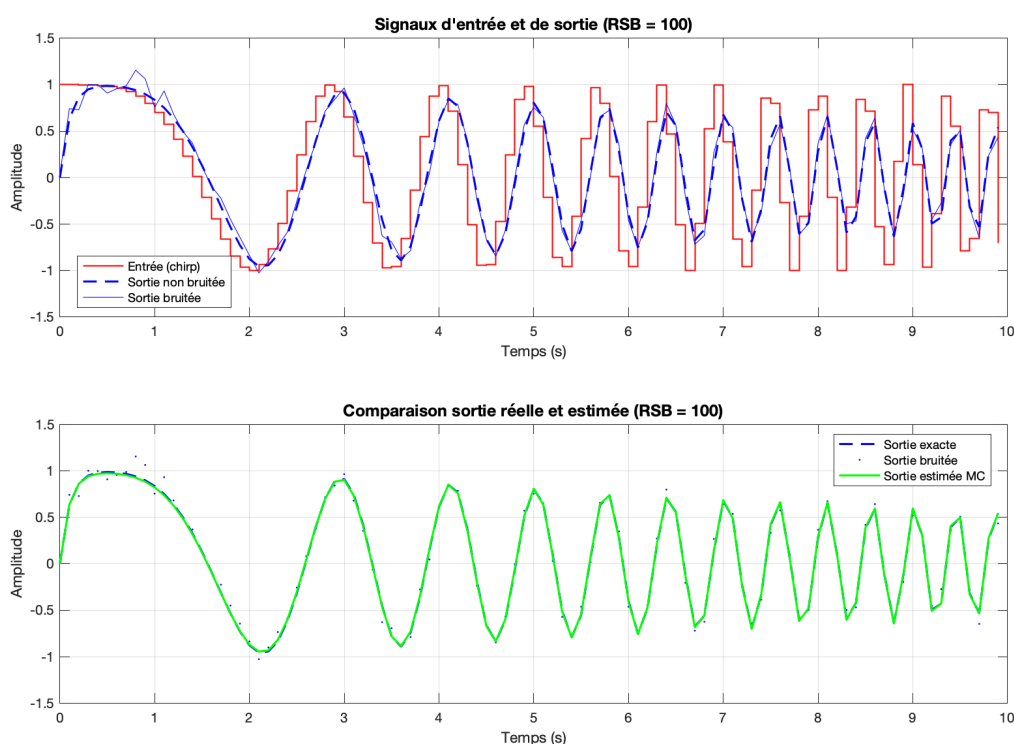


FIGURE 1 – Signaux et estimation MC pour $RSB = 100$

Analyse de la Figure 1 :

- **Graphique supérieur :** L'entrée chirp (rouge) montre la fréquence croissante caractéristique. La sortie non bruitée (bleu pointillé) et la sortie bruitée (bleu continu) sont **quasi-indiscernables**, ce qui confirme le faible niveau de bruit ($\sigma_w \approx 0.01 \times$ amplitude du signal).
- **Graphique inférieur :** La sortie estimée par MC (vert) se superpose **parfaitement** à la sortie exacte. Les points bleus (mesures bruitées) montrent une dispersion négligeable autour de la courbe théorique.

- **Observation du comportement fréquentiel** : On note l'atténuation et le déphasage croissants de la sortie lorsque la fréquence d'entrée augmente, conformément au comportement passe-bas du système du 1^{er} ordre.

IV.2.2 Cas $RSB = 10$ (bruit modéré)

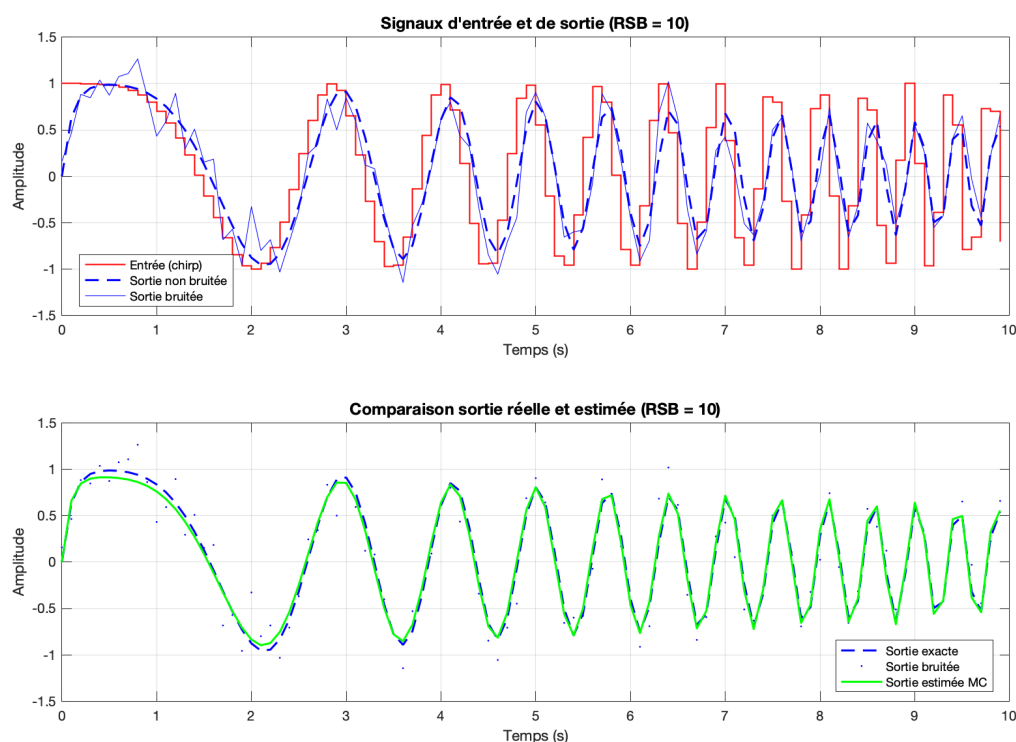


FIGURE 2 – Signaux et estimation MC pour $RSB = 10$

Analyse de la Figure 2 :

- **Graphique supérieur** : Le bruit devient **clairement visible** sur la sortie bruitée, avec une dispersion d'environ ± 0.3 autour de la sortie théorique. On observe des "outliers" particulièrement au début de la simulation (instants $t < 1$ s).
- **Graphique inférieur** : Malgré le bruit significatif, l'estimation MC (vert) reste **très proche** de la sortie exacte. Cela démontre la capacité de la méthode à "filtrer" le bruit grâce à la redondance des mesures ($N = 100$ échantillons).
- **Point critique** : On commence à percevoir une légère **différence d'amplitude** entre la sortie estimée et la sortie exacte, manifestation du biais de l'estimateur.

IV.2.3 Cas $RSB = 1$ (bruit fort)

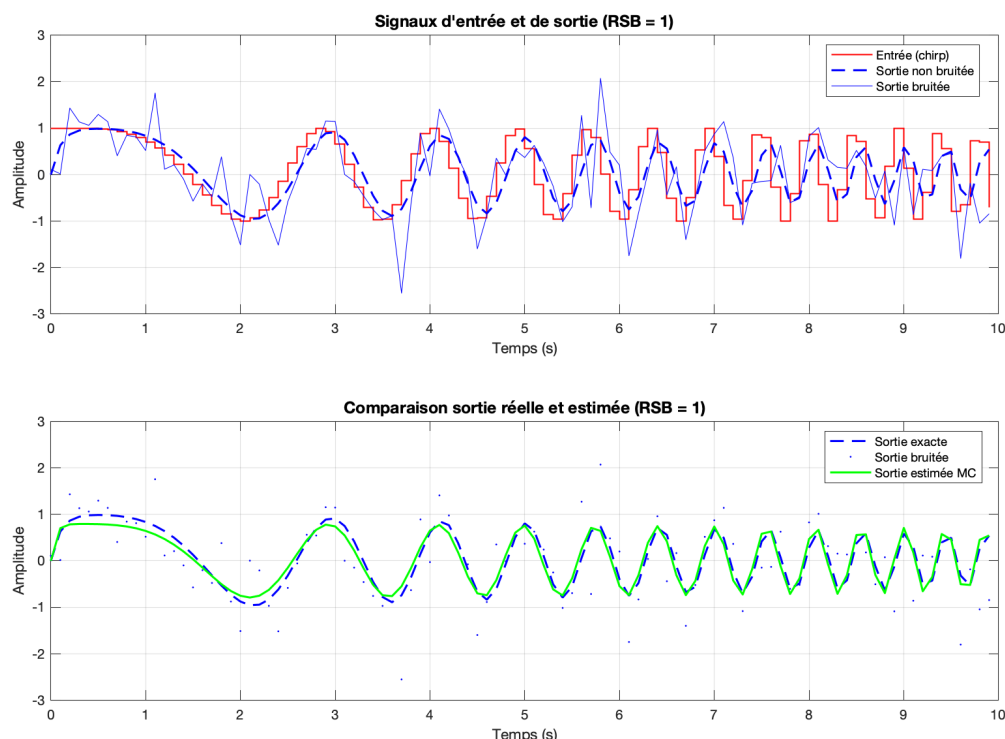


FIGURE 3 – Signaux et estimation MC pour $RSB = 1$

Analyse de la Figure 3 :

- **Changement d'échelle** : L'axe des ordonnées s'étend maintenant de -3 à $+3$ (contre ± 1.5 précédemment), reflétant l'amplitude du bruit ($\sigma_w \approx$ amplitude du signal utile).
- **Graphique supérieur** : Le signal utile est **noyé dans le bruit**. La sortie bruitée (bleu) oscille de manière erratique, masquant presque complètement la forme sinusoïdale attendue.
- **Graphique inférieur – Observation cruciale** : La sortie estimée par MC (vert) présente une **amplitude systématiquement réduite** par rapport à la sortie exacte (bleu pointillé). Ce phénomène est particulièrement visible :
 - Aux basses fréquences ($t < 3$ s) : l'amplitude estimée atteint ≈ 0.7 contre ≈ 1.0 pour l'exacte
 - Aux hautes fréquences ($t > 7$ s) : l'amplitude estimée est ≈ 0.4 contre ≈ 0.5 pour l'exacte
- **Interprétation physique** : Cette sous-estimation de l'amplitude provient directement du biais sur \hat{a} . Puisque $|\hat{a}| < |a|$, le pôle estimé est plus éloigné du cercle unité, ce qui correspond à un système “plus amorti” avec un gain plus faible.

Identification par Moindres Carrés

RSB	\hat{a}	\hat{b}	$ \Delta a $	$ \Delta b $	Erreur rel. a	Erreur rel. b
100	-0.3535	0.6375	0.0144	0.0054	3.9%	0.9%
10	-0.2826	0.6606	0.0853	0.0285	23.2%	4.5%
1	-0.1161	0.7030	0.2518	0.0709	68.4%	11.2%

TABLE 1 – Estimation des paramètres pour différents RSB (valeurs exactes : $a = -0.3679$, $b = 0.6321$)

IV.3 Résultats numériques

Observations quantitatives :

1. **Biais sur a :** \hat{a} est **toujours moins négatif** que a . Pour RSB=1, $\hat{a} \approx -0.12$ au lieu de -0.37 , soit une erreur de 68%.
2. **Biais sur b :** \hat{b} est **toujours surestimé**. Cette surestimation compense partiellement l'erreur sur a pour maintenir un gain statique proche de $K = \frac{b}{1+a}$.
3. **Rapport des erreurs :** Le paramètre a est **beaucoup plus affecté** que b . Cela s'explique par le fait que a multiplie les sorties passées bruitées dans le régresseur, alors que b multiplie les entrées (non bruitées).

IV.4 Étude statistique (Monte Carlo)

Pour caractériser rigoureusement les propriétés statistiques de l'estimateur, nous avons effectué $I = 500$ simulations indépendantes pour chaque niveau de RSB.

Analyse détaillée de la Figure 4 :

Ligne supérieure (paramètre a) :

- **RSB = 100 :** Distribution très concentrée (écart-type $\sigma_a \approx 0.01$) centrée sur la valeur vraie. La ligne rouge (valeur exacte) et la ligne bleue (moyenne empirique) sont confondues.
- **RSB = 10 :** Distribution plus étalée. On observe un **décalage visible** entre la moyenne (bleu, ≈ -0.32) et la valeur vraie (rouge, -0.368). C'est la manifestation graphique du biais.
- **RSB = 5 :** Le décalage s'accroît. La distribution s'étale de -0.45 à -0.15 environ.
- **RSB = 2 :** Forte dispersion et biais important. La moyenne (≈ -0.22) est très éloignée de la valeur vraie. Certaines estimations donnent même des valeurs proches de -0.1 .

Ligne inférieure (paramètre b) :

- Le paramètre b est **moins affecté** par le bruit car il n'est pas multiplié par les sorties bruitées dans le régresseur.
- On observe néanmoins une **surestimation systématique** : la moyenne (vert) est toujours à droite de la valeur vraie (rouge).
- La dispersion reste raisonnable même pour RSB = 2 (distribution entre 0.5 et 0.8).

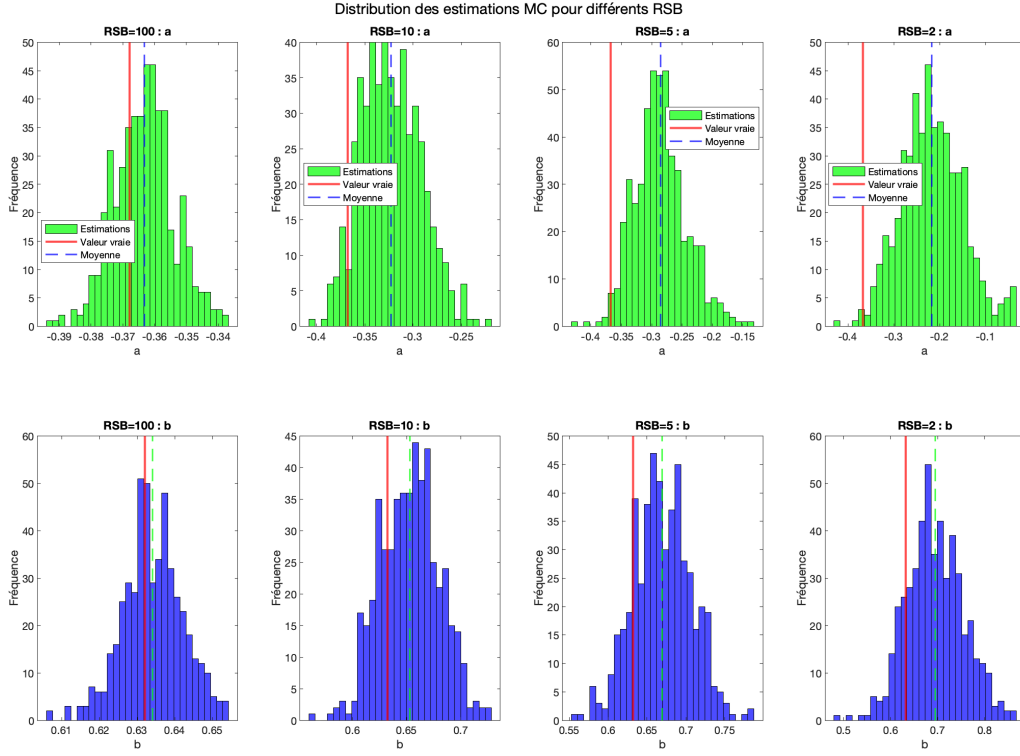


FIGURE 4 – Distribution des estimations MC pour différents RSB (500 simulations)

RSB	Biais a	σ_a	Biais b	σ_b
100	0.0046	0.0094	0.0020	0.0080
10	0.0450	0.0308	0.0210	0.0269
5	0.0821	0.0428	0.0372	0.0373
2	0.1503	0.0672	0.0625	0.0598

TABLE 2 – Statistiques de l'estimateur MC (500 simulations)

Vérification de la formule théorique du biais :

Pour RSB = 10, la formule prédit :

$$\text{Biais}(a) = |a| - |E[\hat{a}]| \approx |a| \cdot \frac{1}{\text{RSB} + 1} = 0.368 \times \frac{1}{11} \approx 0.033 \quad (25)$$

La valeur expérimentale est 0.045, en accord raisonnable avec la théorie (l'écart provient des effets de taille finie et de la non-stationnarité du chirp).

IV.5 Convergence de l'estimateur

Analyse de la Figure 5 :

- **Points verts** : Chaque point représente une estimation issue d'une réalisation indépendante du bruit. La dispersion illustre la variance de l'estimateur.

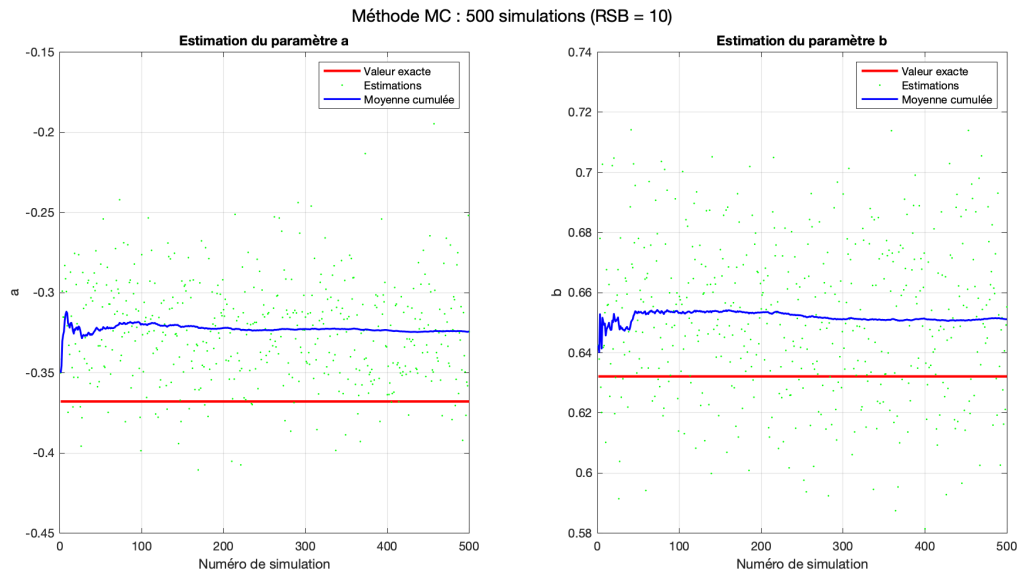


FIGURE 5 – Évolution des estimations sur 500 simulations (RSB = 10)

- **Ligne bleue (moyenne cumulée) :** Converge rapidement vers une valeur **stable mais biaisée**. Après environ 100 simulations, la moyenne cumulée ne varie quasiment plus.
- **Ligne rouge (valeur exacte) :** Reste constante et **distincte** de la moyenne cumulée, confirmant le caractère **systématique et non aléatoire** du biais.
- **Observation pour a :** La moyenne converge vers ≈ -0.32 au lieu de -0.368 . L'écart (≈ 0.05) correspond au biais théorique.
- **Observation pour b :** La moyenne converge vers ≈ 0.65 au lieu de 0.632 . La surestimation est plus faible en proportion.

IV.6 Bilan de la Manipulation 1

Les résultats expérimentaux confirment que l'estimateur des moindres carrés est **biaisé** en présence de bruit de sortie. Le biais sur a suit approximativement la loi $\frac{|a|}{\text{RSB}+1}$, ce qui est cohérent avec la théorie. On note également que le paramètre a (partie autorégressive) est plus sensible au bruit que b (partie moyenne mobile), car a multiplie les sorties bruitées dans le régresseur. Enfin, le biais diminue lorsque le RSB augmente, ce qui confirme la consistance de l'estimateur.

V Manipulation 2 : Moindres Carrés Récursifs avec facteur d'oubli

V.1 Objectif

Cette manipulation étudie la capacité de l'algorithme MCR à :

1. Estimer les paramètres en ligne (temps réel)

- Suivre des paramètres variables grâce au facteur d'oubli λ

V.2 MCR sur système stationnaire

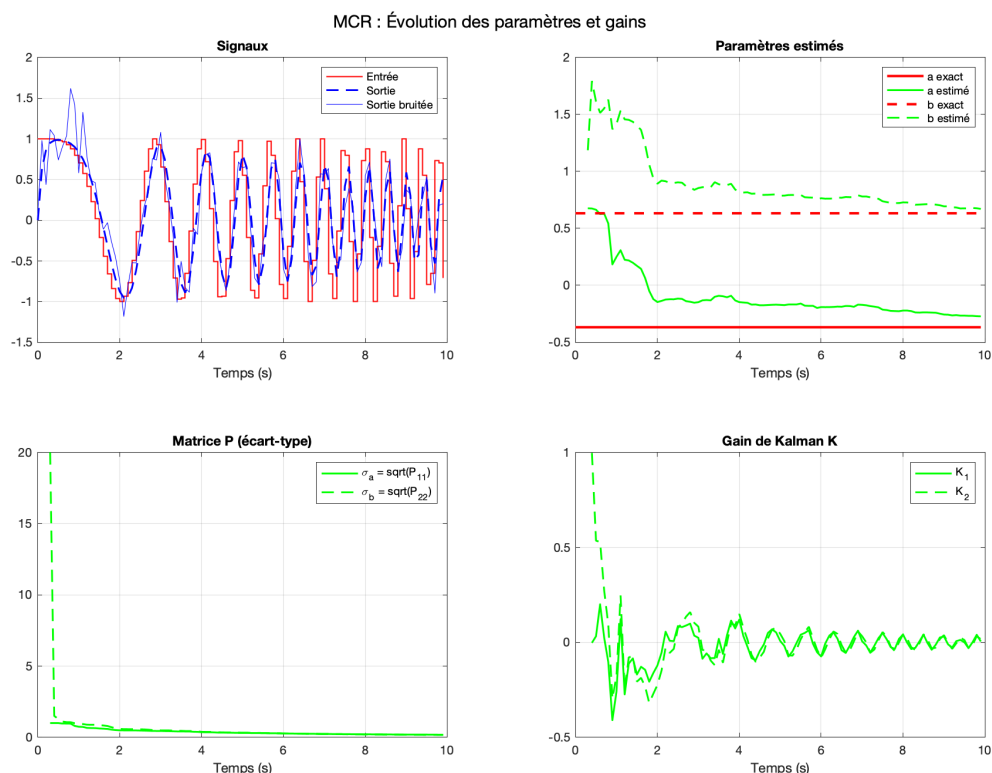


FIGURE 6 – MCR : évolution des paramètres, de la matrice P et du gain K

Analyse de la Figure 6 :

Graphique supérieur gauche (Signaux) : Identique aux manipulations précédentes, montre l'entrée chirp et la sortie bruitée.

Graphique supérieur droit (Paramètres estimés) :

- Les estimations partent de valeurs initiales arbitraires et convergent vers des valeurs **biaisées** (comme attendu avec la méthode MC).
- La convergence est rapide : environ 2-3 secondes pour atteindre le régime permanent.
- On observe les mêmes biais que dans la Manipulation 1 : $\hat{a} > a$ (en valeur algébrique) et $\hat{b} > b$.

Graphique inférieur gauche (Matrice P) :

- $\sqrt{P_{11}}$ et $\sqrt{P_{22}}$ représentent les **écarts-types estimés** des paramètres a et b .
- Décroissance rapide initialement (beaucoup d'information nouvelle).

- Convergence vers des valeurs faibles mais non nulles, reflétant l’incertitude résiduelle due au bruit.
- **Observation importante** : La décroissance n’est pas monotone mais présente des “paliers” correspondant aux zones de faible excitation du système.

Graphique inférieur droit (Gain de Kalman K) :

- Le gain K oscille autour de zéro après la phase transitoire.
- L’amplitude des oscillations décroît, indiquant que l’algorithme “fait de moins en moins confiance” aux nouvelles mesures.
- Les pics correspondent aux instants où l’erreur de prédiction est importante.

V.3 Système non stationnaire

Pour tester le suivi de paramètres variables, on considère un système dont les paramètres changent **brusquement** à $t = 25$ s :

	K_a	τ (s)	a	b
$t < 25$ s	1.0	0.10	−0.3679	0.6321
$t \geq 25$ s	0.8	0.08	−0.2865	0.5707

TABLE 3 – Paramètres du système non stationnaire

V.4 Influence du facteur d’oubli

V.4.1 Cas $\lambda = 1$ (pas d’oubli)

Analyse de la Figure 7 :

- **Avant le saut** ($t < 25$ s) : L’estimateur converge vers une valeur biaisée, comme attendu.
- **Après le saut** ($t \geq 25$ s) : Les paramètres vrais (rouge) changent brusquement, mais les estimations (vert) restent **quasiment constantes**.
- **Explication** : Avec $\lambda = 1$, la matrice \mathbf{P} a convergé vers des valeurs très faibles. Le gain \mathbf{K} est donc négligeable et les nouvelles mesures n’ont presque plus d’influence sur l’estimation.
- L’algorithme MCR sans oubli est donc **inadapté** aux systèmes non stationnaires.

V.4.2 Cas $\lambda = 0.98$ (oubli faible)

Analyse de la Figure 8 :

- La mémoire effective est $\frac{1}{1-0.98} = 50$ échantillons, soit 5 secondes.
- Après le saut, on observe un **début de convergence** vers les nouvelles valeurs, mais le suivi est **lent** et incomplet sur la durée de la simulation.
- L’estimation reste plus bruitée qu’avec $\lambda = 1$, ce qui est le prix à payer pour la réactivité.

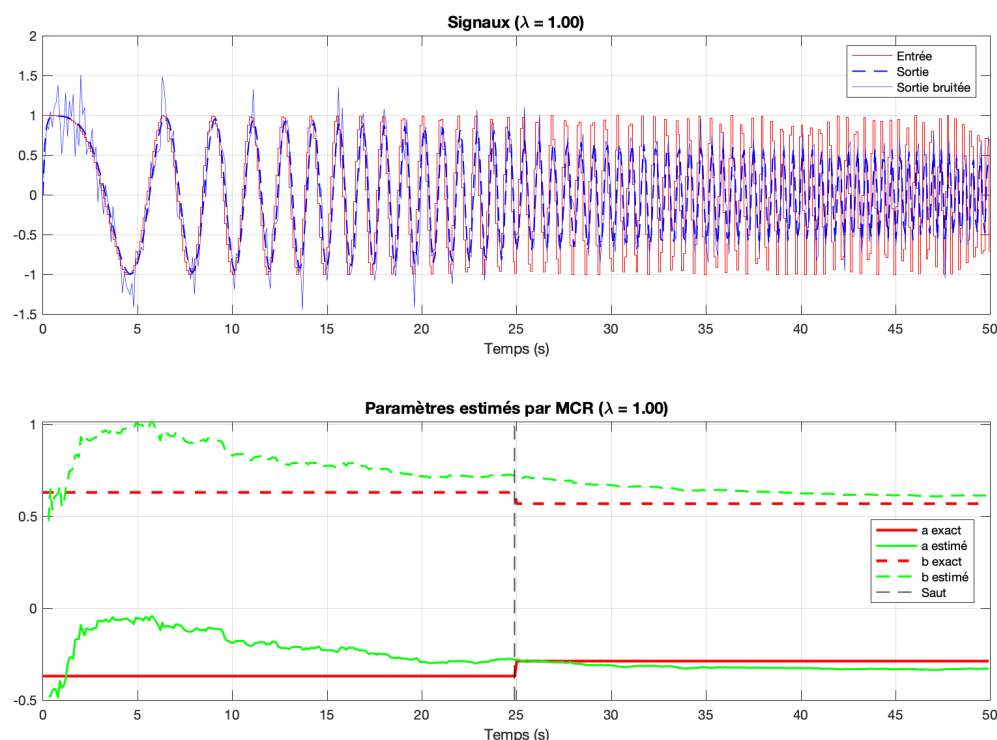


FIGURE 7 – MCR avec $\lambda = 1$: pas de suivi après le saut

V.4.3 Cas $\lambda = 0.95$ (oubli modéré)

Analyse de la Figure 9 :

- La mémoire effective est $\frac{1}{1-0.95} = 20$ échantillons, soit 2 secondes.
- **Détection du saut** : Clairement visible sur les courbes d'estimation. L'algorithme réagit rapidement au changement de paramètres.
- **Convergence** : Après environ 5-10 secondes post-saut, les estimations se stabilisent autour des nouvelles valeurs (avec le biais habituel).
- **Compromis bruit/réactivité** : Les oscillations sont présentes mais restent raisonnables.

V.4.4 Cas $\lambda = 0.90$ (oubli fort)

Analyse de la Figure 10 :

- La mémoire effective est $\frac{1}{1-0.90} = 10$ échantillons, soit 1 seconde.
- **Réactivité excellente** : Le saut est détecté quasi-instantanément.
- **Inconvénient majeur** : Les estimations sont **très bruitées** avec des oscillations d'amplitude importante (pics jusqu'à 1.4 pour b dont la vraie valeur est 0.63).
- On note qu'un λ trop petit peut conduire à une divergence numérique de \mathbf{P} dans certaines conditions (mauvais conditionnement, faible excitation).

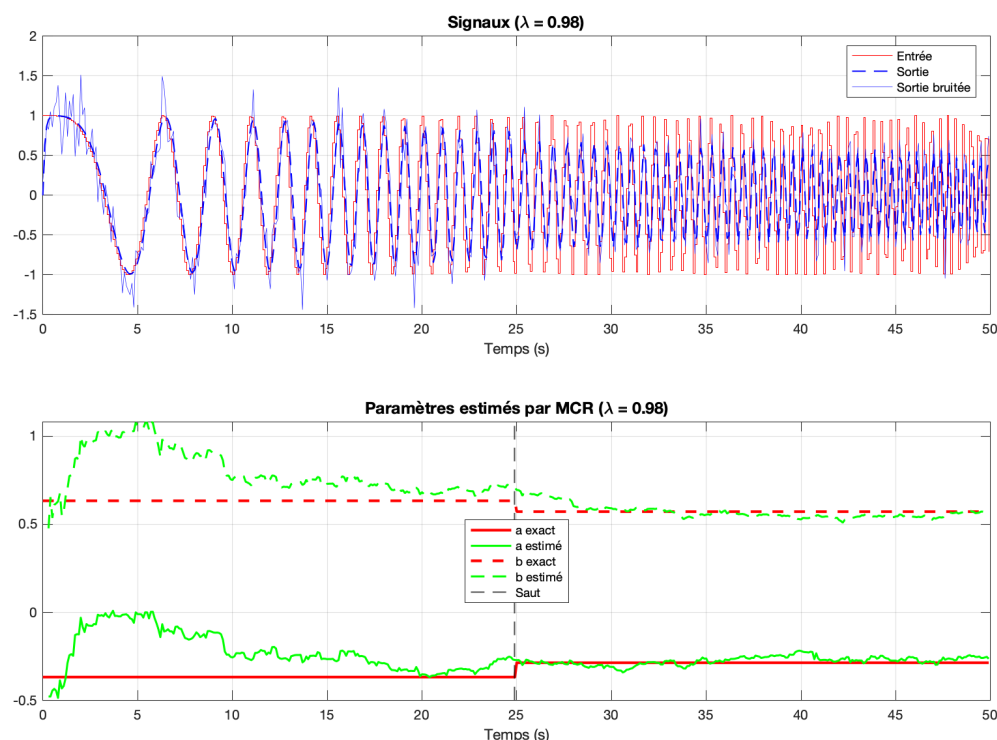


FIGURE 8 – MCR avec $\lambda = 0.98$: suivi lent

V.5 Comparaison synthétique

λ	Mémoire effective	Réactivité	Niveau de bruit
1.00	∞	Nulle	Minimal
0.98	50 échantillons	Faible	Faible
0.95	20 échantillons	Bonne	Modéré
0.90	10 échantillons	Excellente	Élevé

TABLE 4 – Synthèse de l'influence de λ

V.6 Étude statistique avec $\lambda = 0.95$

Analyse de la Figure 12 :

- Les 50 courbes vertes représentent les trajectoires d'estimation pour 50 réalisations indépendantes du bruit.
- **Phase transitoire** ($t < 10$ s) : Grande dispersion des estimations, certaines trajectoires s'écartent fortement de la valeur vraie (jusqu'à $a \approx 1$ ou $b \approx 2$).
- **Régime permanent avant saut** ($10 < t < 25$ s) : Les trajectoires se regroupent autour de la valeur vraie (avec biais), formant un "faisceau" relativement étroit.
- **Après le saut** ($t > 25$ s) :

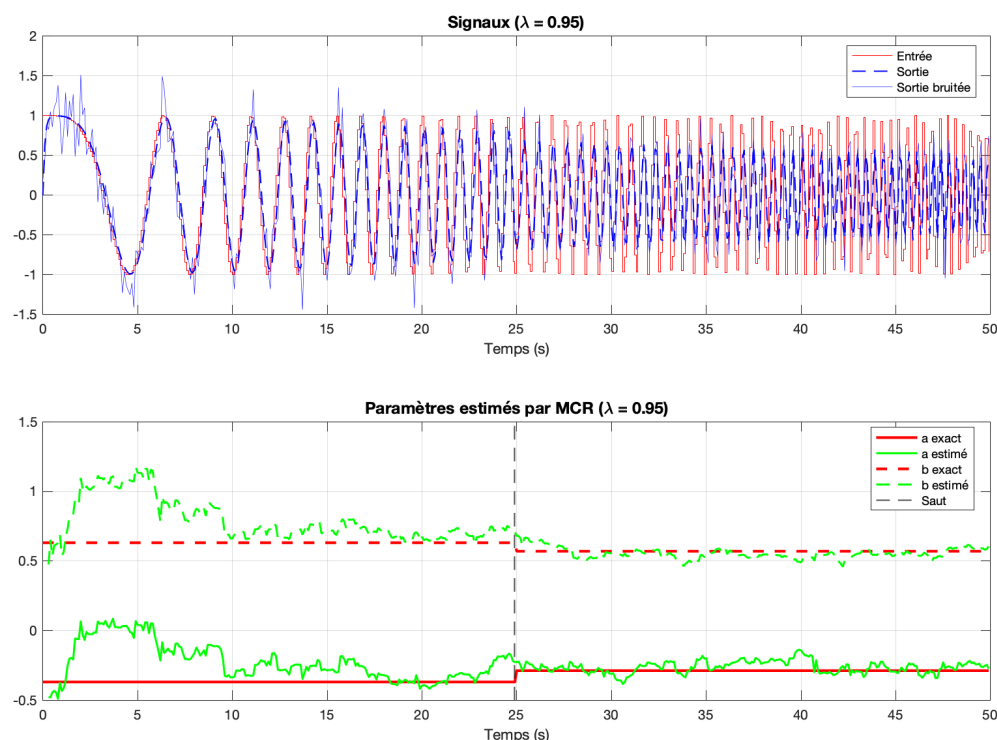


FIGURE 9 – MCR avec $\lambda = 0.95$: bon compromis

- Nouvelle phase de transitoire avec dispersion accrue
- Convergence progressive vers les nouvelles valeurs des paramètres
- Le “faisceau” se resserre à nouveau après environ 10 secondes
- **Observation importante** : La valeur vraie (rouge) reste bien à l’intérieur du faisceau de trajectoires, ce qui valide la capacité de l’algorithme à suivre les paramètres.

V.7 Bilan de la Manipulation 2

L’algorithme MCR permet l’estimation **en ligne** des paramètres. Sans facteur d’oubli ($\lambda = 1$), l’algorithme ne peut pas suivre les variations de paramètres car la matrice \mathbf{P} converge vers zéro. Le facteur d’oubli λ contrôle le compromis entre réactivité et sensibilité au bruit : $\lambda = 0.95$ offre un bon équilibre dans notre cas. Le choix optimal de λ dépend de la vitesse de variation des paramètres et du niveau de bruit.

VI Conclusion générale

VI.1 Synthèse des résultats

Ce TP a permis d’étudier en profondeur la méthode des moindres carrés pour l’identification de systèmes dynamiques :

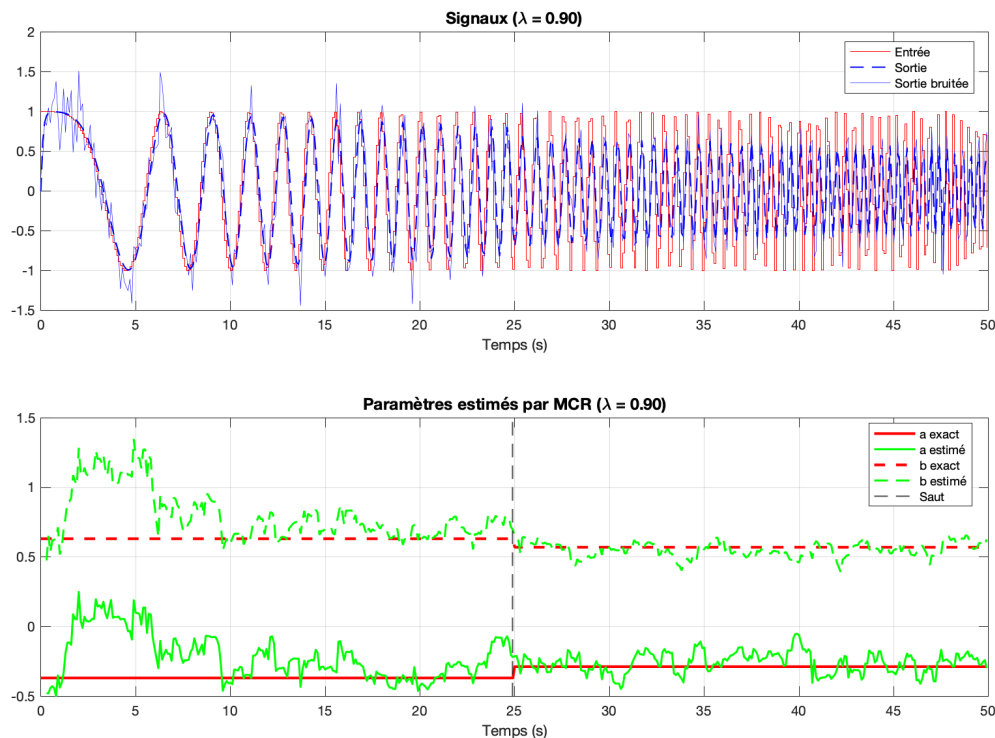


FIGURE 10 – MCR avec $\lambda = 0.90$: suivi rapide mais bruité

1. **Aspect théorique** : La méthode MC fournit une solution analytique explicite grâce à la linéarité de l'erreur de prédiction en les paramètres, contrairement à la méthode du modèle (OE) qui nécessite des algorithmes itératifs.
2. **Biais de l'estimateur** : En présence de bruit de sortie, l'estimateur MC est biaisé. Ce biais est inhérent à la corrélation entre le régresseur et le bruit, et il diminue quand le RSB augmente.
3. **Version récursive** : L'algorithme MCR permet l'estimation en temps réel avec une complexité constante par itération.
4. **Suivi de paramètres** : Le facteur d'oubli λ est essentiel pour les systèmes non stationnaires, permettant d'adapter la réactivité de l'estimateur.

VI.2 Limitations observées

Le principal inconvénient de la méthode des moindres carrés est le **biais** en présence de bruit de sortie. Pour y remédier, d'autres méthodes existent comme les variables instrumentales ou la méthode du modèle (OE).

Concernant le choix de λ dans l'algorithme MCR, il dépend fortement de l'application : un système à paramètres rapidement variables nécessite un λ plus faible, au prix d'une estimation plus bruitée.

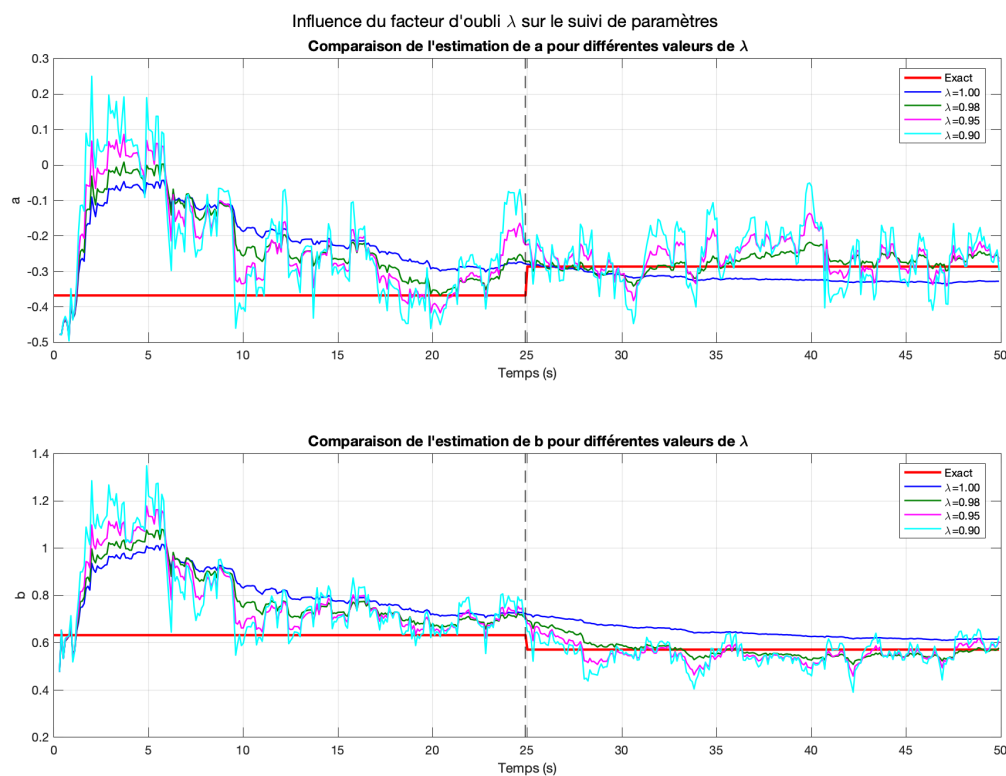


FIGURE 11 – Comparaison des différentes valeurs de λ

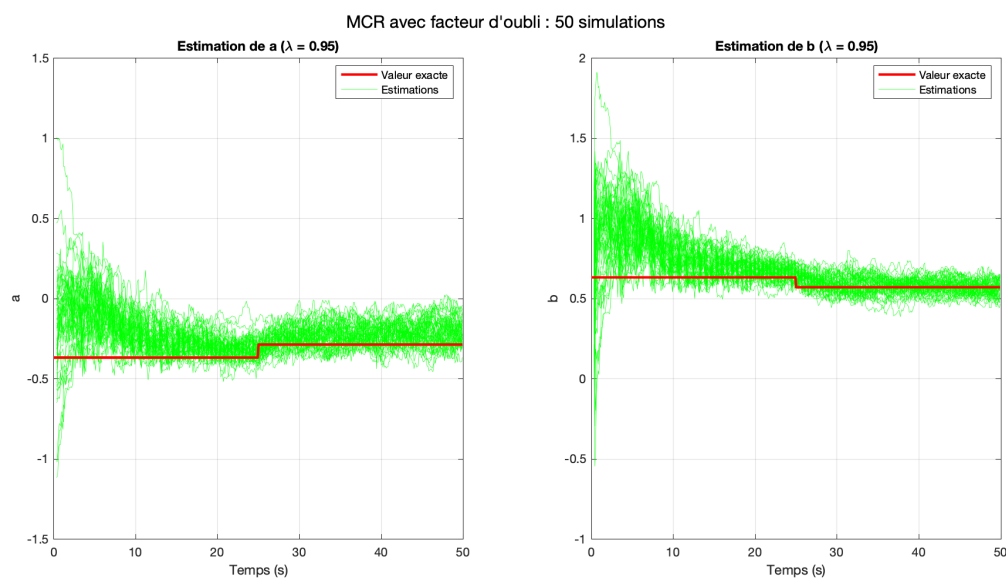


FIGURE 12 – MCR avec $\lambda = 0.95$: 50 réalisations superposées

Enfin, les concepts d'estimation récursive étudiés ici constituent une introduction naturelle

Identification par Moindres Carrés

au **filtre de Kalman** pour l'estimation d'état de systèmes dynamiques.