

**Automatique non linéaire et Filtre de Kalman**  
**2<sup>nde</sup> Partie : Filtre de Kalman**

**Travaux pratiques**

**2024-2025**

Cécile DURIEU

## Table des matières

<b>TP 1 – Identification avec la méthode des moindres carrés.....</b>	<b>1</b>
I/ Méthode du modèle .....	1
II/ Méthode des moindres carrés.....	2
III/ Mise en œuvre.....	3
<b>TP 2 – Estimation de la position et de la vitesse d'un mobile par filtrage de Kalman.....</b>	<b>4</b>
I/ Modèle du système.....	4
II/ Estimation de l'état du système .....	4

Pour que les travaux pratiques (TP) soient profitables, il est indispensable qu'ils soient considérés avec sérieux et attention, afin d'en tirer le plus grand profit et de constituer un complément de votre cours.

La préparation doit être effectuée avant le début de la séance de TP, qui a une durée de 2 heures, afin de se concentrer pendant la séance sur les simulations, leur exploitation et les commentaires. La préparation et le compte-rendu de manipulation seront effectués par binôme et remis à l'enseignant ou déposés sur la plateforme eCampus à la fin de la séance de TP.

## TP 1 – IDENTIFICATION AVEC LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Dans ce TP on s'intéresse à l'identification d'un processus avec la méthode des moindres carrés (MC). Les traitements étant numériques, le modèle est recherché sous la forme d'une fonction de transfert (FT) à temps discret (TD). On suppose que l'on dispose des signaux d'entrée et de sortie du processus.

La méthode des moindres carrés peut être appliquée avec un signal d'entrée quelconque, pourvu qu'il soit suffisamment riche, et elle fournit une expression explicite des paramètres, contrairement à la méthode du modèle. Un des autres avantages de la méthode des moindres carrés est qu'elle se prête bien à une utilisation en temps réel. Son principal inconvénient est que l'estimateur est biaisé. Des variantes, qui sortent du cadre de ce TP, existent pour pallier cet inconvénient.

La fonction de transfert du modèle du processus, que l'on suppose mono-entrée mono-sortie (SISO), est de la forme

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=n_k}^{n_b} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i}}. \quad (1)$$

Le vecteur de paramètres  $\Theta = (a_1 \dots a_{n_a} \ b_{n_k} \dots b_{n_b})^T$  est réel et de dimension  $n_a + n_b - n_k + 1$ .

Dans ce TP, on suppose qu'il n'y a pas d'erreur de structure de modèle et que la valeur du retard ( $n_k$ ), et du degré du numérateur ( $n_b$ ) et du dénominateur ( $n_a$ ) de la fonction de transfert sont connus. Les erreurs proviennent uniquement du bruit de mesure que l'on suppose additif (bruit de sortie).

La méthode des moindres carrés va être illustrée dans ce TP avec un filtre linéaire (FL) analogique du 1<sup>er</sup> ordre et les résultats comparés à ceux obtenus avec la méthode du modèle. Une identification récursive avec la méthode des moindres carrés est également étudiée afin de suivre en temps réel l'évolution des paramètres et, par exemple, adapter les coefficients d'un correcteur. Une telle approche est dite adaptative.

### I/ MÉTHODE DU MODÈLE

Une première approche pour l'identification consiste à chercher la valeur du vecteur de paramètres  $\Theta$  qui est telle que la sortie du modèle  $s_n^{\text{mod}}$  est la plus proche possible de celle du processus  $s_n$  (Figure 1). Le critère porte sur la différence  $\varepsilon_n = s_n - s_n^{\text{mod}}$ . Très souvent, un critère quadratique est considéré :  $J_k(\Theta) = \sum_{n=1}^k \varepsilon_n^2$ . Une telle approche, qui s'introduit naturellement, est appelée méthode du modèle ou encore méthode du modèle parallèle ou encore, dans un contexte stochastique, méthode à erreur de sortie (OE (output error), Figure 2). Si l'ordre du modèle n'est pas connu, il peut être ajusté en l'augmentant progressivement puis en calculant la valeur associée du critère et en retenant l'ordre qui convient le mieux, soit encore l'ordre qui conduit à une valeur du critère la plus petite possible pour une classe donnée d'entrées.

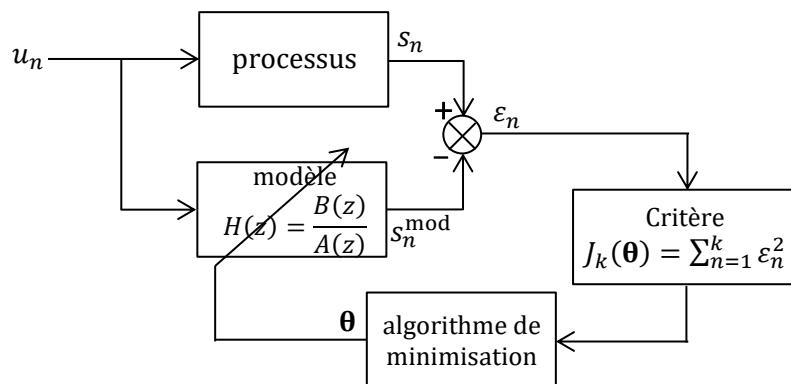


Figure 1 – Identification avec la méthode du modèle

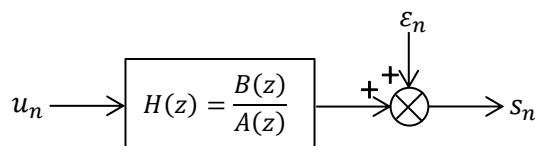


Figure 2 – Modèle à erreur de sortie

### Préparation 1 :

- Préciser pourquoi, dans le cas général :
  - la méthode du modèle conduit à une erreur  $\varepsilon_n$  qui n'est pas linéaire en les paramètres (NLP),
  - on n'obtient pas une expression explicite de  $\hat{\Theta}_k$ , valeur de  $\Theta$  qui minimise le critère quadratique  $J_k(\Theta)$ ,
  - un algorithme itératif d'optimisation doit être mis en œuvre.
- Dans quel cas particulier l'erreur est-elle linéaire en les paramètres (LP), ? Quelle est la nature du filtre correspondant et à quoi correspond le paramètre  $\Theta$  ?

## II/ MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Pour faciliter l'estimation du vecteur de paramètres une variante consiste à considérer le modèle série-parallèle représenté sur la figure 3.a. Cette méthode porte encore le nom de méthode des moindres carrés ou encore, dans un contexte stochastique, modèle ARX (modèle autorégressif à entrée exogène) ou méthode d'erreur d'équation (Figure 4).

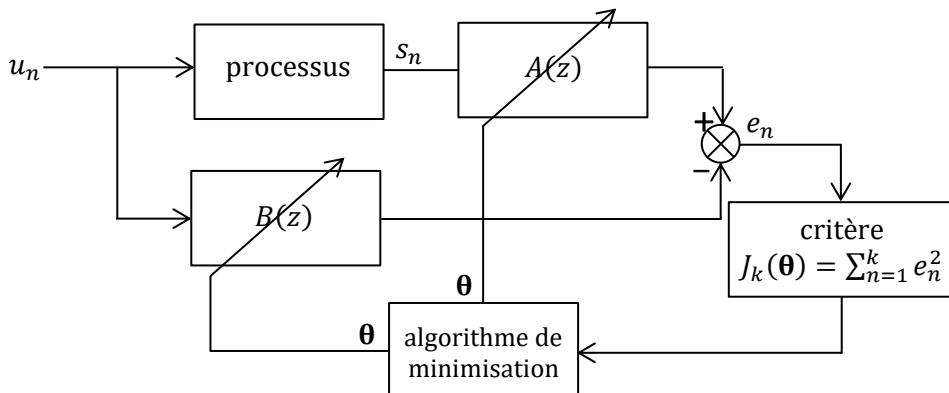


Figure 3.a – Version Modèle série-parallèle

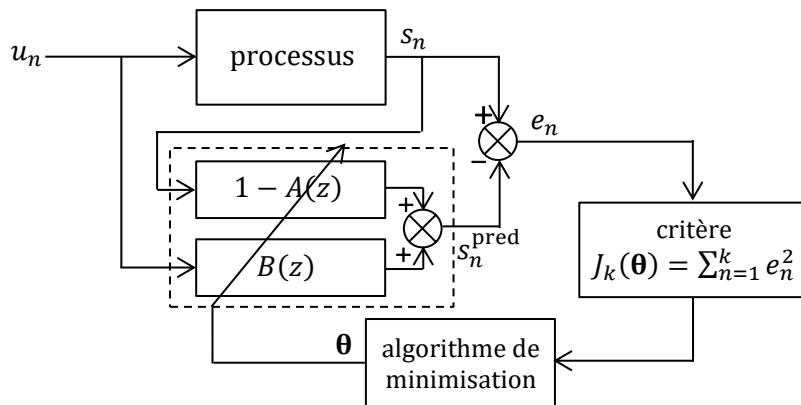


Figure 3.b – Version Modèle de prédiction

Figure 3 – Identification avec la méthode des moindres carrés

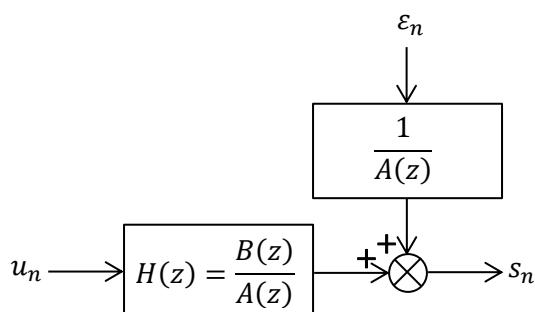


Figure 4 – Modèle ARX

Une expression explicite de  $\hat{\Theta}_k$ , valeur de  $\Theta$  minimisant le critère quadratique  $J_k(\Theta)$ , peut être

obtenue cependant l'estimateur est biaisé. Cette valeur peut être utilisée pour initialiser l'algorithme de minimisation avec la méthode du modèle.

#### Préparation 2 :

- Expliciter l'erreur  $e_n$  (Figure 3.a) et vérifier qu'elle est linéaire en les paramètres.
- Vérifier que cette méthode revient à minimiser l'erreur de prédiction (Figure 3.b).
- Mettre le critère quadratique sous la forme  $J_k(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k \boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k \boldsymbol{\theta})$  où  $\mathbf{x}_k$  et  $\mathbf{C}_k$  seront exprimés en fonction de l'entrée et de la sortie du processus :  $u_l$  et  $s_l$  avec  $l \leq k$ .
- Expliciter  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J_k(\boldsymbol{\theta})$  en fonction de  $\mathbf{x}_k$  et  $\mathbf{C}_k$ .
- Comment se répercute le bruit de sortie (bruit additif en sortie) sur l'estimateur ?

### III/ MISE EN OEUVRE

#### III.1/ Processus

Le processus étudié est un filtre linéaire analogique stable du 1<sup>er</sup> ordre de fonction de transfert

$$H_a(p) = \frac{K}{1 + \tau p}. \quad (2)$$

On suppose que le signal d'entrée est échantillonné et bloqué, et le signal de sortie est échantillonné aux instants de blocage. On note  $T_e$  la période d'échantillonnage. La fonction de transfert du processus échantillonné correspondant est

$$H_n(z) = \frac{bz^{-1}}{1 + az^{-1}} \quad (3)$$

où

$$\begin{cases} a = -e^{-T_e/\tau}, \\ b = K(1 + a). \end{cases} \quad (4)$$

On rappelle que l'on ne s'intéresse pas dans ce TP aux erreurs de modèle.

#### III.2/ Méthode des moindres carrés

##### Préparation 3 :

- Écrire un programme qui, sous Matlab™, calcule la réponse du processus échantillonné à une entrée donnée quelconque (par exemple, un chirp ou un signal en crête), bruite éventuellement la sortie, et estime le vecteur de paramètres avec la méthode des moindres carrés globale.
- Tester le bon fonctionnement du programme.
- Comparer les résultats obtenus avec ceux donnés par la fonction `arx` de Matlab™.

##### Manipulation 1 :

- Analyser et commenter le programme `iden` mis à disposition le jour du TP.
- Étudier l'effet du bruit sur la qualité de l'estimateur obtenu avec la méthode des moindres carrés.
- Comparer la méthode des moindres carrés à la méthode du modèle.
- Dresser une conclusion.

#### III.3/ Méthode des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli

On considère maintenant le cas où les paramètres du processus varient plus ou moins rapidement. Le processus n'est donc plus stationnaire.

##### Manipulation 2 :

- Discuter de la qualité de l'estimateur des moindres carrés récursifs (MCR) avec facteur d'oubli.
- Dresser une conclusion.