TP 2 – ESTIMATION DE LA POSITION ET DE LA VITESSE D'UN MOBILE PAR FILTRAGE DE KALMAN

Un mobile se déplace en mouvement rectiligne quasi-uniforme et, à partir de la mesure bruitée de sa position, on cherche à estimer par filtrage de Kalman (FK) son état défini par sa position et sa vitesse. Après avoir mis en équation le système, le filtre de Kalman est mis en œuvre et illustré puis l'effet d'une sous et surestimation de la matrice de covariance des bruits est étudié.

I/ MODÈLE DU SYSTÈME

Les instants de mesure / d'observation t_k sont équirépartis : $t_k = kT$ avec $T > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. La position du mobile à l'instant t_k est notée d_k, sa vitesse v_k, son état $\mathbf{x}_k = (d_k\ v_k)^{\mathrm{T}}$ et la position mesurée y_k.

Pour la simulation du déplacement du mobile et la mise en équation on suppose que :

– l'accélération du mobile entre les instants consécutifs t_k et t_{k+1} est constante et notée γ_k,

– l'accélération γ_k a une amplitude aléatoire et, plus précisément, γ_k est un bruit blanc d'écart type σ_γ,

– le bruit d'observation w_k est additif, blanc et d'écart type σ_d,

– l'accélération et le bruit d'observation sont des signaux aléatoires décorrélés,

et aussi que :

– l'état initial est une variable aléatoire (VA) avec la position qui a une valeur moyenne nulle et la vitesse qui a une valeur moyenne égale à $v_0 = 1$ m/s,

– l'accélération $\gamma_{k\geq 0}$ et le bruit d'observation $w_{k\geq 0}$ sont décorrélés de l'état initial $\mathbf{x}_0$.

Les simulations seront effectuées avec les valeurs suivantes : $T = 1\ s$, $\sigma_\gamma = 0{,}01$ m/s^2 et $\sigma_d =$ 10 % de la distance moyenne parcourue entre deux acquisitions (soit 10 cm).

Préparation 1 :

– Mettre en équation le système à temps discret (TD) décrit précédemment et préciser l'expression de la matrice d'état et de la matrice d'observation ainsi que les moments d'ordre un et deux des bruits d'état et d'observation.

II/ ESTIMATION DE L'ÉTAT DU SYSTÈME

L'état est estimé par filtrage de Kalman.

Préparation 2 :

– Donner les équations du filtre de Kalman relatif au problème étudié.

– Soit $\hat{y}_{k/k-1}$ l'observation prédite à l'instant t_k. La différence $\left(y_k - \hat{y}_{k/k-1}\right)$ est appelée innovation (de l'observation) et son écart type est noté σ_k. La quantité $\delta_k = \left|y_k - \hat{y}_{k/k-1}\right|/\sigma_k$ est la distance de Mahalanobis de l'innovation. Dans le cas où toutes les grandeurs aléatoires sont gaussiennes, justifier pourquoi $\Pr[|\delta_k| < 3] \approx 0{,}99$. Comment interpréter une distance δ_k qui est régulièrement au-delà de 3 ?

– Expliciter σ_k en fonction des données du problème.

Manipulation :

– Lire attentivement les différentes parties du programme `exemple_FK` mis à disposition le jour du TP, les commenter et préciser l'objectif visé.

– Exécuter le programme pour :

- illustrer le fonctionnement du filtre de Kalman,
- étudier l'influence de la densité de probabilité (ddp) du bruit (gaussien ou uniforme),
- étudier l'influence de l'initialisation du filtre (état et matrice de covariance),
- étudier les conséquences des erreurs de modèle : matrice de covariance du bruit d'état ou du bruit d'observation utilisée pour la mise en œuvre du filtre de Kalman sous ou surestimée.

– Commenter les résultats obtenus et dresser une conclusion.