ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE PARIS-SACLAY
(Université Paris-Saclay)

Compte rendu de TP

Matière : *Automatique non-linéaire et Filtrage de Kalman*

TP2 - Éstimation de la position et de la vitesse d'un mobile par filtrage de Kalman

Nom de l'étudiant : Gatien Séguy & Maxime Degraeve
Établissement : ENS Paris-Saclay (Département EEA)
Encadrante : Jean-Pierre Barbot

Date : 29 janvier 2026

Table des matières

I Introduction

Dans ce TP, on considère un mobile se déplaçant en mouvement rectiligne quasi-uniforme. L'objectif est d'estimer sa position et sa vitesse (constituant son état) à partir de la seule mesure bruitée de sa position. Le caractère "quasi-uniforme" du mouvement se traduit par une accélération non nulle mais de faible amplitude, modélisée comme un bruit blanc.

Ce problème est représentatif de nombreuses applications pratiques : suivi de cibles radar, localisation GPS, ou encore navigation de véhicules autonomes.

Les objectifs de ce travail pratique sont les suivants :
- Mettre en équation le système sous forme d'un modèle d'état à temps discret, en identifiant les matrices du système et les statistiques des bruits.
- Implémenter le filtre de Kalman et illustrer son fonctionnement sur des données simulées.
- Étudier l'influence de différents paramètres sur les performances du filtre : nature de la densité de probabilité des bruits, initialisation du filtre, et erreurs de modélisation sur les matrices de covariance.

On adopte les notations suivantes tout au long du CR (je prefère radoter pour pas me perdre dans les notations / indices) :
- $t_k = kT$: instants d'échantillonnage avec $T > 0$ la période d'échantillonnage
- d_k : position du mobile à l'instant t_k
- v_k : vitesse du mobile à l'instant t_k
- γ_k : accélération du mobile sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$
- $\mathbf{x}_k = (d_k \ v_k)^T$: vecteur d'état
- y_k : mesure de la position à l'instant t_k
- w_k : bruit de mesure
- σ_γ : écart-type de l'accélération ($\sigma_\gamma = 0{,}01$ m/s^2)
- σ_d : écart-type du bruit de mesure ($\sigma_d = 0{,}1$ m)

II Modèle du système

II.1 Préparation 1

II.1.1 Dynamique continue du système

On considère un mobile en mouvement rectiligne. Pour $t \geq kT$, les équations de la cinématique donnent :

$$\begin{cases} v(t) = v_k + \displaystyle\int_{kT}^{t} \gamma(\tau)\, d\tau \\ d(t) = d_k + \displaystyle\int_{kT}^{t} v(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

II.1.2 Discrétisation avec accélération constante par morceaux

Entre deux instants d'échantillonnage consécutifs, l'accélération est supposée constante : pour $t \in [kT, (k+1)T]$, on a $\gamma(t) = \gamma_k$.

En intégrant, on obtient l'évolution de la vitesse :

$$v(t) = v_k + \gamma_k(t - kT)$$

Puis, en intégrant la vitesse, on obtient l'évolution de la position :

$$d(t) = d_k + \int_{kT}^{t} [v_k + \gamma_k(\tau - kT)]\, d\tau = d_k + v_k(t - kT) + \frac{\gamma_k}{2}(t - kT)^2$$

II.1.3 Équations aux instants d'échantillonnage

En évaluant ces expressions à l'instant $t = (k+1)T$, on obtient les équations récurrentes :

$$\boxed{\begin{cases} d_{k+1} = d_k + v_k T + \dfrac{\gamma_k T^2}{2} \\ v_{k+1} = v_k + \gamma_k T \end{cases}}$$

II.1.4 Représentation d'état

En définissant le vecteur d'état $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} d_k \\ v_k \end{pmatrix}$, on peut écrire le système sous forme matricielle :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \gamma_k$$

Le bruit d'état est donc $\mathbf{b}_k = \mathbf{B}\gamma_k$ où γ_k est un bruit blanc de variance σ_γ^2.

II.1.5 Matrice de covariance du bruit d'état

La matrice de covariance du bruit d'état se calcule comme suit :

$$\mathbf{Q} = \mathbb{E}\left[\mathbf{b}_k \mathbf{b}_k^T\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{B}\gamma_k \gamma_k^T \mathbf{B}^T\right] = \mathbf{B}\,\mathbb{E}\left[\gamma_k^2\right]\mathbf{B}^T = \sigma_\gamma^2\,\mathbf{B}\mathbf{B}^T$$

En développant le produit $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$:

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T^4}{4} & \frac{T^3}{2} \\ \frac{T^3}{2} & T^2 \end{pmatrix}$$

D'où la matrice de covariance du bruit d'état :

$$\boxed{\mathbf{Q} = \sigma_\gamma^2 \begin{pmatrix} \frac{T^4}{4} & \frac{T^3}{2} \\ \frac{T^3}{2} & T^2 \end{pmatrix}}$$

II.1.6 Équation d'observation

La mesure y_k correspond à la position bruitée du mobile :

$$y_k = d_k + w_k = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}_k + w_k$$

où w_k est un bruit blanc de variance σ_d^2.
La matrice de covariance du bruit d'observation est donc :

$$\boxed{R = \sigma_d^2}$$

II.1.7 Récapitulatif du modèle d'état

Le système à temps discret s'écrit sous la forme canonique :

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_k \\ y_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + w_k \end{cases}}$$

avec les matrices et les statistiques des bruits :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{b}_k] = \mathbf{0}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{b}_k \mathbf{b}_k^T] = \mathbf{Q}, \quad \mathbb{E}[w_k] = 0, \quad \mathbb{E}[w_k^2] = R$$

III Éstimation de l'état du système

III.1 Préparation 2

III.2 Manipulation

III.2.1 Structure generale du programme `exemple_FK.m`

Le programme principal `exemple_FK.m` est organise sous forme de menu interactif proposant huit options d'etude. Il est accompagne de trois fonctions auxiliaires :

- `nuage_n.m` : etude statistique avec bruits gaussiens
- `nuage_u.m` : etude statistique avec bruits uniformes
- `trace_ellipse_P.m` : trace d'ellipses de covariance

La premiere partie du programme definit les parametres du modele :

```
T = 1;                          % Periode d'echantillonnage
v_0 = 1; m_0 = [0;v_0];         % Etat initial moyen
P_0 = 100*I;                    % Covariance initiale

A = [1 T; 0 1];                 % Matrice d'etat
```

```
V = [T^2/2; T];               % Matrice du bruit d'etat
std_g = 0.01;                 % Ecart-type acceleration
Q = std_g^2*V*V';             % Covariance bruit d'etat

C = [1  0];                   % Matrice d'observation
std_w = 0.1*v_0*T;            % Ecart-type bruit de mesure
R = std_w^2;                  % Covariance bruit d'observation
```

Objectif : Definir le modele d'etat conformement aux equations de la preparation 1, avec les valeurs numeriques specifiees dans l'enonce ($T = 1$ s, $\sigma_\gamma = 0{,}01$ m/s^2, $\sigma_d = 0{,}1$ m).

Option 1 : Illustration du fonctionnement du filtre de Kalman
Cette option realise les etapes suivantes :

Simulation de la trajectoire reelle Generation d'une trajectoire de $k_{\max} = 20$ iterations avec :
- Bruits d'etat γ_k et d'observation w_k gaussiens
- Calcul des observations $y_k = d_k + w_k$
- Estimation naive de la vitesse par derivation : $\hat{v}_k = (y_k - y_{k-1})/T$

Implementation du filtre de Kalman

```
for k = 1:k_max-1
    x_pred(:,k+1) = A*x_est(:,k);                   % Prediction
    P = A*P*A' + Q;                                  % Covariance predite
    K = P*C'*inv(C*P*C' + R);                       % Gain de Kalman
    P = (I - K*C)*P;                                 % Covariance corrigee
    y_pred(k+1) = C*x_pred(:,k+1);                  % Observation predite
    x_est(:,k+1) = x_pred(:,k+1) + K*(y(k+1) - y_pred(k+1)); % Correction
end
```

Objectif : Illustrer visuellement le fonctionnement du filtre de Kalman en comparant l'etat reel, l'etat estime par FK et l'estimation naive (derivation). On observe que le FK fournit une estimation bien plus precise, notamment pour la vitesse.

Visualisation des ellipses de confiance Le programme trace les ellipses a 3σ (contenant 99% de la distribution gaussienne) illustrant :
- L'ellipse bleue : precision de l'estimation apres correction
- L'ellipse verte pointillee : precision de la prediction sans bruit d'etat
- L'ellipse verte : precision de la prediction avec bruit d'etat
- La bande jaune : incertitude de l'observation

Objectif : Visualiser geometriquement le compromis realise par le filtre entre prediction et observation.

Option 2 : Etude statistique avec bruits gaussiens
Cette option appelle la fonction `nuage_n` qui :

— Simule $N = 10000$ trajectoires independantes
— Calcule l'erreur d'estimation finale $\mathbf{x}_{k_{\max}} - \hat{\mathbf{x}}_{k_{\max}}$ pour chaque trajectoire
— Trace le nuage de points des erreurs et l'ellipse de covariance calculee par le FK
— Compare la covariance empirique avec la covariance theorique

Objectif : Valider statistiquement que la matrice de covariance $\mathbf{P}$ calculee par le filtre de Kalman correspond bien a la dispersion reelle des erreurs d'estimation.

Option 3 : Effet de la densite de probabilite (bruits uniformes)

La fonction `nuage_u` realise la meme etude statistique mais avec des bruits uniformes (au lieu de gaussiens) :

```
g = std_g*(rand(1,k_max) - 0.5)*2*sqrt(3);  % Bruit uniforme
w = std_w*(rand(1,k_max) - 0.5)*2*sqrt(3);  % meme variance que
    gaussien
```

Objectif : Verifier que le filtre de Kalman reste performant meme lorsque les bruits ne sont pas gaussiens. Le facteur $2\sqrt{3}$ assure que la variance du bruit uniforme est identique a celle du bruit gaussien.

Option 4 : Effet de l'etat initial

Comparaison de deux initialisations differentes :
— Initialisation 1 : $\hat{\mathbf{x}}_0 = (0, 1)^T$ (etat initial reel)
— Initialisation 2 : $\hat{\mathbf{x}}_0 = (0, 0)^T$ (vitesse initiale erronee)

Objectif : Montrer que le filtre de Kalman converge vers l'etat reel meme avec une initialisation erronee, grace a l'apport d'information des observations successives.

Option 5 : Effet de la covariance initiale

Comparaison de trois valeurs de covariance initiale :
— $\mathbf{P}_0$: valeur nominale
— $100 \times \mathbf{P}_0$: grande incertitude initiale (surestimation)
— $0{,}01 \times \mathbf{P}_0$: faible incertitude initiale (sous-estimation)

Objectif : Etudier l'influence de $\mathbf{P}_0$ sur la convergence du filtre. Une surestimation de $\mathbf{P}_0$ donne plus de poids aux observations et accelere la convergence. Une sous-estimation peut ralentir la convergence car le filtre "fait trop confiance" a sa prediction.

Option 6 : Effet de l'erreur sur la covariance du bruit d'etat $\mathbf{Q}$

Comparaison de trois valeurs de $\mathbf{Q}$ utilisees dans le filtre :
— $\mathbf{Q}$: valeur correcte
— $10 \times \mathbf{Q}$: surestimation du bruit d'etat
— $0{,}1 \times \mathbf{Q}$: sous-estimation du bruit d'etat

Objectif : Analyser les consequences d'une erreur de modelisation sur $\mathbf{Q}$:
— **Surestimation** ($10\mathbf{Q}$) : le filtre accorde plus de poids aux observations, l'estimation est plus bruitee mais suit mieux les variations.

— **Sous-estimation** (0,1$\mathbf{Q}$) : le filtre fait trop confiance au modele, l'estimation est plus lisse mais peut presenter un biais.

Option 7 : Effet de l'erreur sur la covariance du bruit d'observation R
Comparaison de trois valeurs de R utilisees dans le filtre :
— R : valeur correcte
— $10 \times R$: surestimation du bruit d'observation
— $0{,}1 \times R$: sous-estimation du bruit d'observation
Objectif : Analyser les consequences d'une erreur de modelisation sur R :
— **Surestimation** ($10R$) : le filtre accorde moins de poids aux observations, l'estimation est plus lisse mais peut diverger.
— **Sous-estimation** ($0{,}1R$) : le filtre fait trop confiance aux mesures, l'estimation suit le bruit d'observation.

Option 8 : Test de coherence (distance de Mahalanobis)
Cette option calcule la distance de Mahalanobis de l'innovation :

$$\delta_k = \frac{|y_k - \hat{y}_{k|k-1}|}{\sigma_k}$$

ou $\sigma_k = \sqrt{\mathbf{C}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T + R}$ est l'ecart-type de l'innovation.

Objectif : Fournir un indicateur de coherence du filtre. Si le modele est correct et les bruits gaussiens, on doit avoir $\Pr[|\delta_k| < 3] \approx 0{,}99$. Une distance regulierement superieure a 3 indique une incoherence entre le modele utilise par le filtre et le systeme reel (erreur sur $\mathbf{Q}$ ou R).

III.2.2 Fonctions auxiliaires

Fonction `trace_ellipse_P` Trace une ellipse de covariance definie par son centre et sa matrice $\mathbf{P}$:
— Diagonalisation de $\mathbf{P}$ pour obtenir les axes principaux
— Parametrage de l'ellipse : $\mathbf{x} = \text{Centre} + \mathbf{R}\sqrt{\mathbf{D}}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$

Fonctions `nuage_n` et `nuage_u` Realisent une etude Monte-Carlo avec N trajectoires pour valider statistiquement les performances du filtre. La difference reside dans la generation des bruits : gaussiens (`randn`) ou uniformes (`rand`).