

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE PARIS-SACLAY
(Université Paris-Saclay)

Compte rendu de TP

Matière : *Automatique non-linéaire et Filtrage de Kalman*

TP2 - Estimation de la position et de la vitesse d'un mobile par filtrage de Kalman

Nom de l'étudiant : Gatien Séguy & Maxime Degraeve
Établissement : ENS Paris-Saclay (Département EEA)
Encadrante : Jean-Pierre Barbot
Date : 29 janvier 2026

Table des matières

I	Introduction	2
II	Modèle du système	2
II.1	Préparation 1	2
II.1.1	Dynamique continue du système	2
II.1.2	Discrétisation avec accélération constante par morceaux	3
II.1.3	Équations aux instants d'échantillonnage	3
II.1.4	Représentation d'état	3
II.1.5	Matrice de covariance du bruit d'état	3
II.1.6	Équation d'observation	4
II.1.7	Récapitulatif du modèle d'état	4
III	Éstimation de l'état du système	4
III.1	Préparation 2	4
III.2	Manipulation	4
III.2.1	Structure generale du programme <code>exemple_FK.m</code>	4
III.2.2	Illustration du fonctionnement du filtre de Kalman	6
III.2.3	Description des autres options du programme	8

I Introduction

Dans ce TP, on considère un mobile se déplaçant en mouvement rectiligne quasi-uniforme. L'objectif est d'estimer sa position et sa vitesse (constituant son état) à partir de la seule mesure bruitée de sa position. Le caractère "quasi-uniforme" du mouvement se traduit par une accélération non nulle mais de faible amplitude, modélisée comme un bruit blanc.

Ce problème est représentatif de nombreuses applications pratiques : suivi de cibles radar, localisation GPS, ou encore navigation de véhicules autonomes.

Les objectifs de ce travail pratique sont les suivants :

- Mettre en équation le système sous forme d'un modèle d'état à temps discret, en identifiant les matrices du système et les statistiques des bruits.
- Implémenter le filtre de Kalman et illustrer son fonctionnement sur des données simulées.
- Étudier l'influence de différents paramètres sur les performances du filtre : nature de la densité de probabilité des bruits, initialisation du filtre, et erreurs de modélisation sur les matrices de covariance.

On adopte les notations suivantes tout au long du CR (je préfère radoter pour pas me perdre dans les notations / indices) :

- $t_k = kT$: instants d'échantillonnage avec $T > 0$ la période d'échantillonnage
- d_k : position du mobile à l'instant t_k
- v_k : vitesse du mobile à l'instant t_k
- γ_k : accélération du mobile sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$
- $\mathbf{x}_k = (d_k \ v_k)^T$: vecteur d'état
- y_k : mesure de la position à l'instant t_k
- w_k : bruit de mesure
- σ_γ : écart-type de l'accélération ($\sigma_\gamma = 0,01 \text{ m/s}^2$)
- σ_d : écart-type du bruit de mesure ($\sigma_d = 0,1 \text{ m}$)

II Modèle du système

II.1 Préparation 1

II.1.1 Dynamique continue du système

On considère un mobile en mouvement rectiligne. Pour $t \geq kT$, les équations de la cinématique donnent :

$$\begin{cases} v(t) = v_k + \int_{kT}^t \gamma(\tau) d\tau \\ d(t) = d_k + \int_{kT}^t v(\tau) d\tau \end{cases}$$

II.1.2 Discrétisation avec accélération constante par morceaux

Entre deux instants d'échantillonnage consécutifs, l'accélération est supposée constante : pour $t \in [kT, (k+1)T]$, on a $\gamma(t) = \gamma_k$.

En intégrant, on obtient l'évolution de la vitesse :

$$v(t) = v_k + \gamma_k(t - kT)$$

Puis, en intégrant la vitesse, on obtient l'évolution de la position :

$$d(t) = d_k + \int_{kT}^t [v_k + \gamma_k(\tau - kT)] d\tau = d_k + v_k(t - kT) + \frac{\gamma_k}{2}(t - kT)^2$$

II.1.3 Équations aux instants d'échantillonnage

En évaluant ces expressions à l'instant $t = (k+1)T$, on obtient les équations récurrentes :

$$\begin{cases} d_{k+1} = d_k + v_k T + \frac{\gamma_k T^2}{2} \\ v_{k+1} = v_k + \gamma_k T \end{cases}$$

II.1.4 Représentation d'état

En définissant le vecteur d'état $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} d_k \\ v_k \end{pmatrix}$, on peut écrire le système sous forme matricielle :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \gamma_k$$

Le bruit d'état est donc $\mathbf{b}_k = \mathbf{B}\gamma_k$ où γ_k est un bruit blanc de variance σ_γ^2 .

II.1.5 Matrice de covariance du bruit d'état

La matrice de covariance du bruit d'état se calcule comme suit :

$$\mathbf{Q} = \mathbb{E} [\mathbf{b}_k \mathbf{b}_k^T] = \mathbb{E} [\mathbf{B} \gamma_k \gamma_k^T \mathbf{B}^T] = \mathbf{B} \mathbb{E} [\gamma_k^2] \mathbf{B}^T = \sigma_\gamma^2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T$$

En développant le produit $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$:

$$\mathbf{B} \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{T^4}{4} & \frac{T^3}{2} \\ \frac{T^3}{2} & T^2 \end{pmatrix}$$

D'où la matrice de covariance du bruit d'état :

$$\mathbf{Q} = \sigma_\gamma^2 \begin{pmatrix} \frac{T^4}{4} & \frac{T^3}{2} \\ \frac{T^3}{2} & T^2 \end{pmatrix}$$

II.1.6 Équation d'observation

La mesure y_k correspond à la position bruitée du mobile :

$$y_k = d_k + w_k = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}_k + w_k$$

où w_k est un bruit blanc de variance σ_d^2 .

La matrice de covariance du bruit d'observation est donc :

$$R = \sigma_d^2$$

II.1.7 Récapitulatif du modèle d'état

Le système à temps discret s'écrit sous la forme canonique :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_k \\ y_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + w_k \end{cases}$$

avec les matrices et les statistiques des bruits :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{b}_k] = \mathbf{0}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{b}_k \mathbf{b}_k^T] = \mathbf{Q}, \quad \mathbb{E}[w_k] = 0, \quad \mathbb{E}[w_k^2] = R$$

III Estimation de l'état du système

III.1 Préparation 2

III.2 Manipulation

III.2.1 Structure generale du programme exemple_FK.m

Le programme principal `exemple_FK.m` est organisé sous forme de menu interactif proposant huit options d'étude. Il est accompagné de trois fonctions auxiliaires :

- `nuage_n.m` : étude statistique avec bruits gaussiens
- `nuage_u.m` : étude statistique avec bruits uniformes
- `trace_ellipse_P.m` : trace d'ellipses de covariance

Initialisation et modèle du système La première partie du programme définit les paramètres du modèle conformément à la préparation 1 :

```

1 T = 1; % Periode d'échantillonnage (s)
2 v_0 = 1; m_0 = [0; v_0]; % Etat initial moyen
3 P_0 = 100*I; % Covariance initiale
```

Filtrage de Kalman

```

4
5 A = [1 T; 0 1];           % Matrice d'état
6 V = [T^2/2; T];          % Matrice du bruit d'état
7 std_g = 0.01;             % Ecart-type accélération (m/s^2)
8 Q = std_g^2*V*V';         % Covariance bruit d'état
9
10 C = [1 0];               % Matrice d'observation
11 std_w = 0.1*v_0*T;        % Ecart-type bruit de mesure (m)
12 R = std_w^2;              % Covariance bruit d'observation

```

Options du menu Le programme propose huit options d'étude :

1. **Illustration du fonctionnement du FK** : simulation d'une trajectoire et comparaison des estimations
2. **Etude statistique (bruits gaussiens)** : validation Monte-Carlo avec $N = 10000$ trajectoires
3. **Effet de la ddp (bruits uniformes)** : vérification de la robustesse aux bruits non-gaussiens
4. **Effet de l'état initial** : convergence avec initialisation erronée
5. **Effet de la covariance initiale** : influence de \mathbf{P}_0
6. **Effet de l'erreur sur \mathbf{Q}** : conséquences d'une erreur sur la covariance du bruit d'état
7. **Effet de l'erreur sur \mathbf{R}** : conséquences d'une erreur sur la covariance du bruit d'observation
8. **Test de cohérence** : distance de Mahalanobis de l'innovation

Implementation du filtre de Kalman Le cœur du programme est la boucle du filtre de Kalman :

```

1 for k = 1:k_max-1
2   % Prediction
3   x_pred(:,k+1) = A*x_est(:,k);
4   P = A*P*A' + Q;
5
6   % Gain de Kalman
7   K = P*C'*inv(C*P*C' + R);
8
9   % Correction
10  P = (I - K*C)*P;
11  y_pred(k+1) = C*x_pred(:,k+1);
12  x_est(:,k+1) = x_pred(:,k+1) + K*(y(k+1) - y_pred(k+1));
13 end

```

Fonctions auxiliaires

- `trace_ellipse_P(Centre, P, couleur)` : trace une ellipse de covariance par diagonalisation de \mathbf{P}
- `nuage_n(...)` : etude Monte-Carlo avec bruits gaussiens (`randn`)
- `nuage_u(...)` : etude Monte-Carlo avec bruits uniformes (`rand`)

III.2.2 Illustration du fonctionnement du filtre de Kalman

Cette section presente les resultats de l'option 1 du programme.

Protocole experimental On simule une trajectoire de $k_{\max} = 20$ iterations avec :

- Bruits d'état γ_k et d'observation w_k gaussiens
- Etat initial : $d_0 = 0$ m, $v_0 = 1$ m/s
- Comparaison de trois methodes d'estimation :
 - Etat exact (reference)
 - Estimation par filtre de Kalman
 - Estimation naive : observation directe pour la position, derivation numerique pour la vitesse ($\hat{v}_k = (y_k - y_{k-1})/T$)

Comparaison des estimations La figure 1 compare les trois approches.

Observations :

- **Position** : l'estimation FK (bleu) suit fidelement la position exacte (rouge), avec une precision comparable a l'observation directe (magenta).
- **Vitesse** : le FK (bleu) fournit une estimation stable et proche de la vitesse exacte, alors que la derivee des observations (magenta) est tres bruitée avec des oscillations de l'ordre de $\pm 0,3$ m/s.

Analyse des erreurs d'estimation La figure 2 presente l'evolution des erreurs d'estimation.

Observations :

- L'erreur de position du FK est du meme ordre de grandeur que l'erreur d'observation ($\approx \pm 0,15$ m).
- L'erreur de vitesse du FK ($\approx \pm 0,1$ m/s) est **4 fois plus faible** que celle de la derivee ($\approx \pm 0,4$ m/s).

Validation de la covariance calculee par le filtre La figure 3 montre que l'erreur d'estimation reste contenue dans les bornes a $\pm 3\sigma$ calculees par le FK.

Observations :

- L'erreur reste dans l'intervalle $[-3\sigma, +3\sigma]$ tout au long de la simulation.
- Les bornes convergent rapidement : apres environ 5 iterations, la covariance atteint son regime permanent.
- Cela valide la **coherence du filtre** : la matrice \mathbf{P} calculee represente bien l'incertitude reelle.

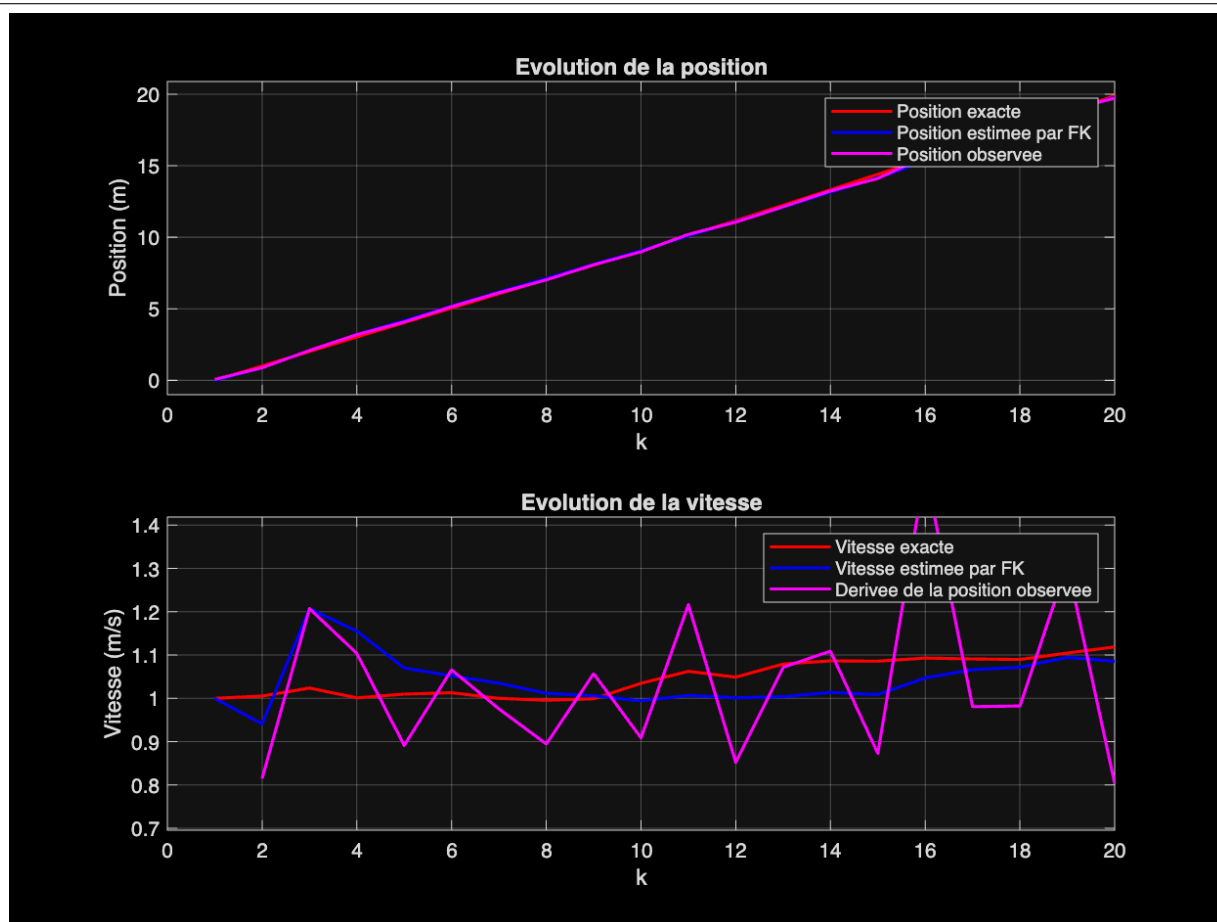


FIGURE 1 – Comparaison de l'état exact, de l'estimation par FK et des observations

Conclusion Le filtre de Kalman fournit une estimation optimale de l'état du mobile :

- La position estimée est aussi précise que la mesure directe.
- La vitesse estimée est bien meilleure que l'estimation naïve par dérivation.
- La matrice de covariance \mathbf{P} est cohérente avec la dispersion réelle des erreurs.

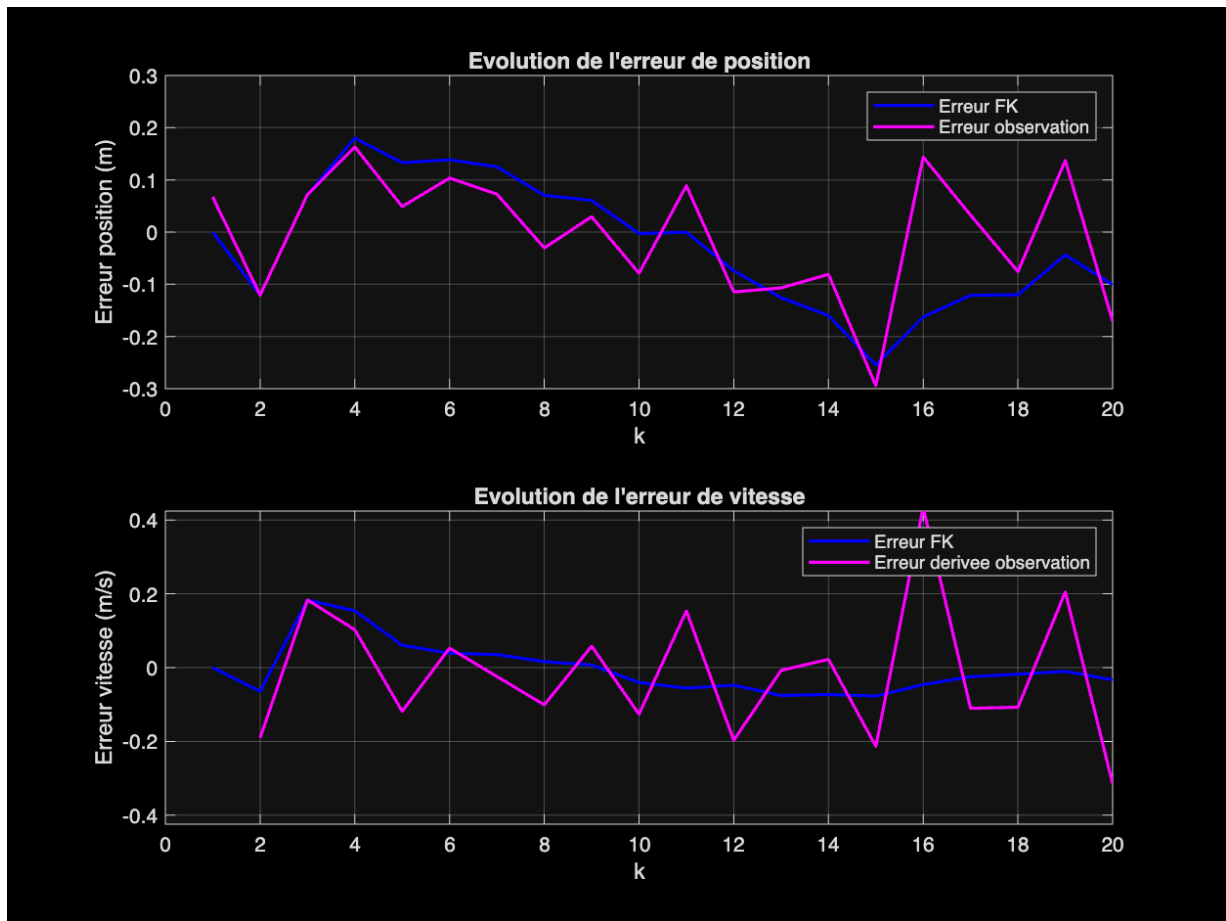


FIGURE 2 – Evolution des erreurs d'estimation de position et de vitesse

III.2.3 Description des autres options du programme

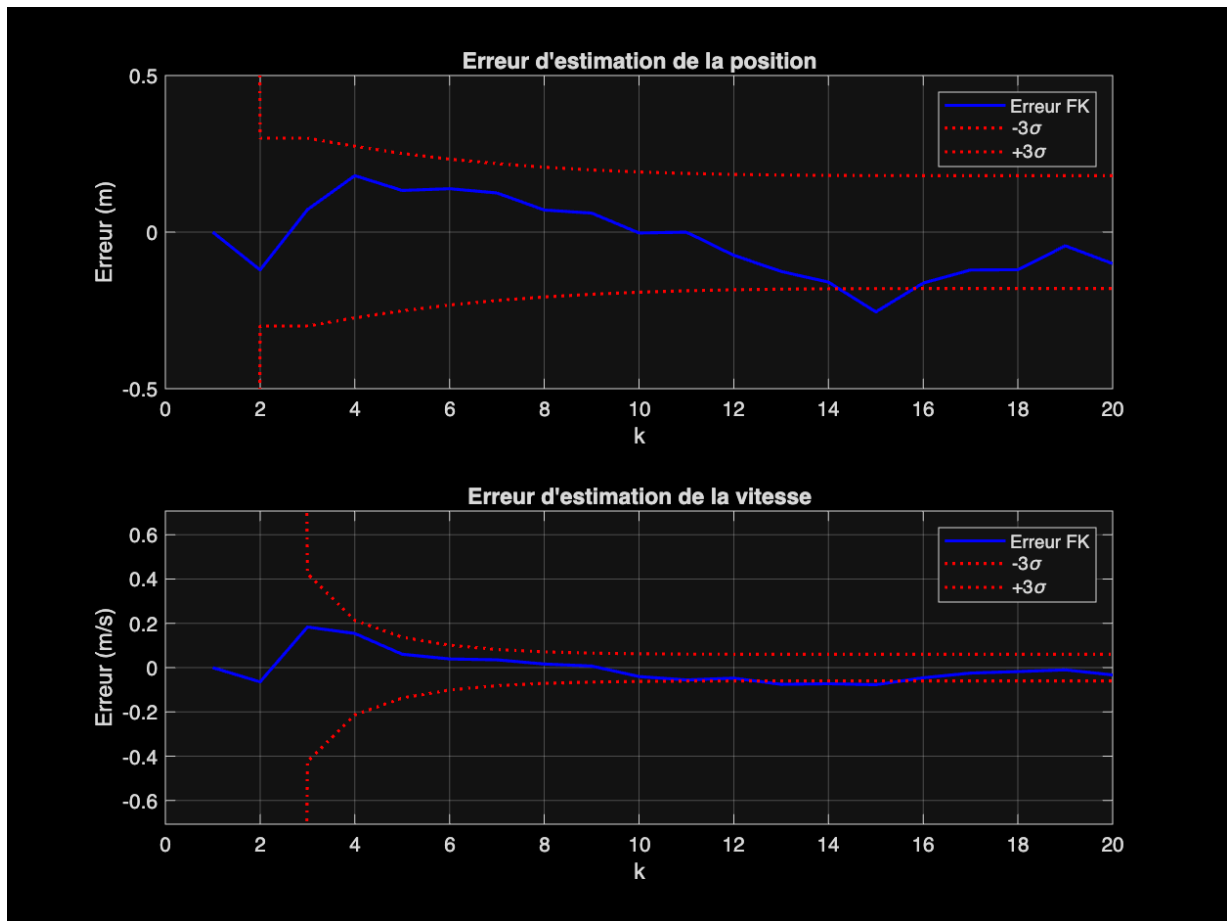
Option 2 : Etude statistique avec bruits gaussiens **Objectif :** Valider statistiquement que \mathbf{P} correspond à la dispersion réelle des erreurs via $N = 10000$ simulations Monte-Carlo.

Option 3 : Effet de la ddp (bruits uniformes) **Objectif :** Vérifier la robustesse du FK avec des bruits non-gaussiens (uniformes de même variance).

Option 4 : Effet de l'état initial **Objectif :** Montrer la convergence du FK même avec une initialisation erronée ($\hat{\mathbf{x}}_0 = (0, 0)^T$ au lieu de $(0, 1)^T$).

Option 5 : Effet de la covariance initiale **Objectif :** Étudier l'influence de \mathbf{P}_0 (nominal, $\times 100$, $\times 0,01$) sur la convergence.

Option 6 : Effet de l'erreur sur Q **Objectif :** Analyser les conséquences d'une sur/sous-estimation de la covariance du bruit d'état.

FIGURE 3 – Erreur d'estimation avec les bornes à 3σ calculées par le FK

Option 7 : Effet de l'erreur sur R **Objectif :** Analyser les conséquences d'une sur/sous-estimation de la covariance du bruit d'observation.

Option 8 : Test de cohérence **Objectif :** Utiliser la distance de Mahalanobis $\delta_k = |y_k - \hat{y}_{k|k-1}|/\sigma_k$ comme indicateur de cohérence du filtre. Si $\delta_k > 3$ régulièrement, cela indique une erreur de modélisation.