Proyecto Analisis Matematico

Series de Fourier

Alumno: Jorge Gael López Figueras

Profesor: Jorge Aguilar Guzman

10 de diciembre del 2023

Índice

Introducción

En el trabajo presente veremos un algoritmo realizado en python en donde el usario introduzca una función ya sea a trozos o una sola , despues el prograama calculara una función mediante la teoría de la serie de Fourier que explicaremos en breve.

Finalmente el usuario ingresara el numero de periodos que desea que se impriman en pantalla tanto la función introducida por el mismo , como la función aproximada por la serie de Fourier .

Esto comparara la funcion orginal y la función generada por la serie de Fourier mediante una grafíca, para comprobar la aproximación de las series de Fourier para cualquier función periodíca continua.

Conceptos Basicos

Operaciones basicas

Las operaciones básicas necesarias para la representación y procesamiento de funciones en el dominio del tiempo son:

1. Suma de funciones: dos funciones $f1(t)$ y $f2(t)$ son sumadas para obtener una tercera función $g(t) = f_1(t) + f_2(t)$.
2. Multiplicación por una constante: una función $f(t)$ se multiplica por un factor de escalamiento α para obtener la función $g(t) = \alpha * f(t)$
3. Desplazamiento en el tiempo: una función $f(t)$ se atrasa por un factor de desplazamiento τ para obtener $f(t - \tau)$ y se adelanta por τ para obtener $f(t + \tau)$
4. Reflexión en el tiempo: la variable de tiempo de una función $f(t)$ se niega para obtener la función reflejada $f(-t)$.

Funciones periódicas

En primer lugar es necesario definir el concepto de función periódica como aquella cuyos valores se repiten a intervalos regulares, el tiempo entre las sucesivas repeticiones es lo que se conoce como período. Matemáticamente, podemos decir que una función temporal es periódica cuando se cumple la siguiente relación:

$$f(t) = f(t + T)$$

para todo valor de t. La constante mínima que satisface la anterior relación es denominada período (T) que, en el caso de funciones temporales, se expresa en segundos. A la parte de la función que abarca un tiempo equivalente a un período T se le denomina ciclo,por decirlo en palabras simple el período también se puede definir como el tiempo transcurrido entre dos puntos equivalentes de una funcion.

Definicion 1. *Definimos la frecuencia como la inversa del período, o sea, como el número de ciclos por segundo:*

$$fr = \tfrac{1}{T} \text{ (Su unidad es el Hercio (Hz))}$$

Suponemos que inciclo equivale a 2π radianes, entonces la frecuencia angular denotada por ω, se define como la razón de cambio del desplazamiento angular θ durante la oscilación (o rotación),en rad/s o en 1/s:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = 2\pi * f = \frac{2\pi}{T}$$

Ejemplo de funciones de Periodo T:

Figura 1.4: Funciones periódicas: (a) $f(t) = (10 \cos t)^2$ y (b) $f(t) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$.

En el ejemplo anterior podemos ver que la figura (a) tiene un periodo de π y que la figura (b) un periodo de 24π

Teoría Series De Fourier

Contexto

Contexto historico: Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matemático francés, publicó en 1822 publicó la obra Teoría analítica del calor. En ella dedujo una ecuación en derivadas parciales para describir la evolución de la temperatura en un cuerpo sólido y dio un método para resolverla que hoy en día se siguen aprendiendo en las carreras de ciencias e ingenierías. En uno de los pasos de su método, Fourier afirmaba que toda función periódica que son las funciones que repiten su valor cada cierto intervalo podía escribirse como una serie de funciones ondulatorias: senos y cosenos. Además, aportó la expresión exacta de los coeficientes de la serie los valores que multiplican a cada seno y coseno–. Actualmente esta representación se conoce como serie de Fourier de una función.

Ahora por lo tanto con lo antes visto podemos decir que cualquien función periodica $f(t)$ puede descomponer en suma de funciones simples, sinusoidales, cuya frecuencia es múltiplo de la función periódica. Esto es, dicha función se puede descomponer en una serie armónica infinita y la expresamos como :

Definicion 2. *Sea $f(t)$ una funcion definida a trozos con periodo T en el invertalo $[a, b]$, se puede expresar como la serie armómica infinita respectivamente de la siguiente manera:*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_n cos(n * t * \frac{2\pi}{T}) + \sum_{i=1}^{\infty} b_n sen(n * t * \frac{2\pi}{T})$$

Veamos que para el calculo de los coeficientes a_0, a_n y b_n se emplean las siguientes formulas:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_a^b f(t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(t) cos(n * t * \frac{2\pi}{T})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(t) sen(n * t * \frac{2\pi}{T})$$

Convergencia puntual de la serie de Fourier

Un teorema importante sobre la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función f, que cubre la mayoría de las situaciones en las que se encuentran las funciones a considerar en las aplicaciones, es el que exponemos después de la siguiente definición.

Definicion 3. *Se dice que una funcion f es monotona por tramos en un intervalos [a,b] , si existe una particion a=*$x_0, x_1 < x_2 < .... < x_n = b$ *en el intervalo (a,b)*

de modo que una funcion f es mononotona en cada subintervao (x_{i-1}, x_i)

Teorema 1. *Si la funcion f es acotada y monotona a tramos en el intervalo [0,T], y periodica de periodo T, entonces la serie de Fourier de f es convergente en cada punto x de* $\boldsymbol{R}$*, y su suma es :*

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$$

donde $[f(x^+), f(x^-)]$ *denotan respectivamente los límites por la derecha y por la izquierda de f en x , es decir :*

$$f(x^+) = \lim_{h \to 0^+} f(x+h)$$

y igualmente

$$f(x^-) = \lim_{h \to 0^+} f(x-h)$$

Un vector v con componentes $(v_1, ..., v_n)$ en la base estandar puede ser escrito de manera diferente con una base ortonormal b_k utilazando:

$$v = \sum_k b_k < v, b_k >$$

La formula anterior puede ser generalizada a funciones, dodne el producto interno entre dos funciones se convierte en una integral.

Definicion 4. *Si f y $g \in C(T)$, entonces el producto interno de f y g se define como:*

$$< f, g >= \frac{1}{T} \int_0 T f(x) g(x)$$

y en general puede ser escrita como:

$$f = \sum_k b_k < f, b_k >$$

para el cualquier conjunto de funcione de base b_k

la serie de Fourier la podemos ver como una forma escribirla usando la base $b_k = f_k \cup g_k$, donde:

$$f_k = cos(\frac{2\pi kx}{T}) \text{ y } g(x) = sen(\frac{2\pi kx}{T})$$

escribiendo el cambio de base con estas funciones, cualquier funcion se puede descomponer en la serie de Fourer:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(\frac{2\pi kx}{T}) + b_k sen(\frac{2\pi kx}{T})$$

donde los coeficientes a_0, a_k y b_k estan definidos por el producto interno.

Ejemplos

Veremos algunos ejemplos que podran ser ingresados en el algoritmo realizado para ponerlo a prueba:

Ejemplo 1.

$$f(t) = \begin{cases} x & si \quad -3 \leq t \leq -1 \\ \\ -1 & si \quad -1 < t \leq 1 \end{cases}$$

Veamos que el periodo de la funcion es igual a T=4 ya que la función este definida a repetirse en ese valor. y el intervalo en que esta definida es de -3 a 1

Ahora veamos como se expresa a_0*,an,bn y la serie armónica infinita:*

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_{-3}^{1} f(t) = \frac{2}{4} \int_{-3}^{-1} t + \frac{2}{4} \int_{-1}^{1} -1$$

$$a_n = \frac{2}{4} \int_{-3}^{1} f(t)cos(n * t * \frac{2\pi}{4}) =$$

$$a_n = \frac{2}{4} \int_{-3}^{-1} t * cos(n * t * \frac{2\pi}{4}) + \frac{2}{4} \int_{-1}^{1} -1 * cos(n * t * \frac{2\pi}{4})$$

$$b_n = \frac{2}{4} \int_{-3}^{1} f(t)sen(n * t * \frac{2\pi}{4}) =$$

$$b_n = \frac{2}{4} \int_{-3}^{-1} t * sen(n * t * \frac{2\pi}{4}) + \frac{2}{4} \int_{-1}^{1} -1 * sen(n * t * \frac{2\pi}{4})$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_n cos(n * t * \frac{2\pi}{4}) + \sum_{i=1}^{\infty} b_n sen(n * t * \frac{2\pi}{4})$$

Ejemplo 2.

f(t)= t donde $-1 \leq t \leq 2$

Veamos que el periodo de la funcion es igual a T=3 ya que la funcion esta definida en el intervalo -2 a 1

Ahora veamos como se expresa a_0*, an, bn y la serie armónica infinita:*

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_{-1}^{2} f(t) = \frac{2}{3}\int_{-1}^{2} t$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_{-1}^{2} t * cos(n * t * \frac{2\pi}{3})$$

$$b_n = \frac{2}{3}\int_{-1}^{2} t * sen(n * t * \frac{2\pi}{3})$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_n cos(n * t * \frac{2\pi}{3}) + \sum_{i=1}^{\infty} b_n sen(n * t * \frac{2\pi}{3})$$

Finalmente aqui dejo un enlace hacia colab con el codigo : ProyectoTercerParcial.py

Bibliografia

- Murray, R. (1976). Analis de Fourier (1.a ed.). Libros-McGraw-Hill.
- Prieto Curiel, R. 2008. Análisis de Fourier: Teoría y Práctica. .
- Dr. Wilfrido Gómez Flores , R . 2022, Introducion al analisis de Fourier (3.a ed) Cinvestav