深度和法向量的非线性优化

1 几何模型

假设参考视角为R, $K\epsilon\boldsymbol{N}$为与参考视角相关的局部邻域视角，$\boldsymbol{P}_k$为该视角的投影矩阵。参考视角像素点(s,t)的初始深度值为$h(s,t)$,对应的三维空间中的射线的单位向量为$\vec{\boldsymbol{r}}_R(s,t)$，则该像素对应的三维空间中的点为

$$\boldsymbol{X}(s,t)=\boldsymbol{O}_R+h(s,t)\vec{\boldsymbol{r}}_R(s,t),$$

为了对像素像素点(s,t)处的深度和三维中的法向量进行优化，我们以该像素为中心创建一个$n\times n$大小的图像 patch，patch 对应三维空间中一个很小的平面。同时我们引入两个变量$h_s(s,t)$和$h_t(s,t)$来表示 patch 中每个像素点的三维坐标，则像素$(s+i,t+j)$对应的深度为$h(s+i,t+j)=h(s,t)+i*h_s(s,t)+j*h_t(s,t)$。

假设$(s+i,t+j)$处的射线方向近似为$\vec{\boldsymbol{r}}_R(s,t)$，则像素$(s+i,t+j)$对应的三维坐标为

$$\boldsymbol{X}(s+i,t+j)=\boldsymbol{O}_R+\vec{\boldsymbol{r}}_R(s,t)\big(h(s,t)+i*h_s(s,t)+j*h_t(s,t)\big)$$

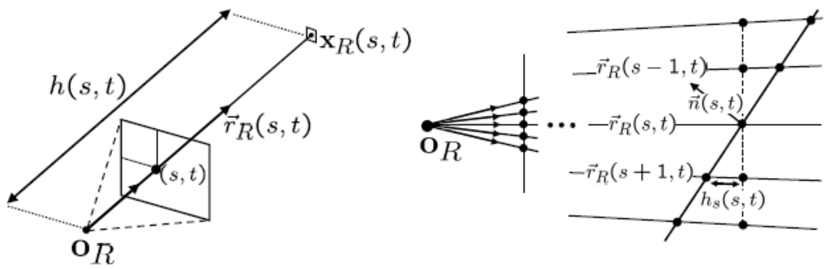

图 1 数学模型

2 光度模型 (Photometric model)

主要是对朗伯反射进行简单的假设，以提升颜色匹配的准确度。具体地，为邻域中每个视角K分配一个颜色尺度$\boldsymbol{c}_k=[c_k^r,c_k^g,c_k^b]^T\epsilon R^{3\times1}$,如果$h(s,t)$估计准确，那么应该应该有

$$\boldsymbol{I}_R(s+i,t+j)=\boldsymbol{c}_k\cdot\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{X}(s+i,t+j)))$$

对所有的邻域视角和所有的 patch 中的三维点成立，其中$\boldsymbol{I}_R(\cdot)$表示取

参考视角对应像素处的颜色(3 通道，故为向量)，$\boldsymbol{I}_k(\cdot)$表示取第k个视角中图像上对应像素处的颜色，运算符号 · 表示向量元素相乘。

结合几何模型和光度模型，我们给出深度值和法向量优化的数学模型为

$$E=\sum_{k\epsilon N}\sum_{i=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}\sum_{j=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}\left(\boldsymbol{I}_R(s+i,t+j)-\boldsymbol{c}_k\cdot\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{X}(s+i,t+j)))\right)^2,$$

为了书写方便，我们对公式中的符号进行简化，将$\boldsymbol{I}_R(s+i,t+j)$简化成$\boldsymbol{I}_R(i,j)$；将$\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{X}(s+i,t+j)))$简化成$\boldsymbol{I}_k(i,j)$；将$h_s(s,t)$和$h_t(s,t)$分别简化成$h_s$和$h_t$, 于是上述能量函数可以简化为

$$E=\sum_{ijk}(\boldsymbol{I}_R(i,j)-\boldsymbol{c}_k\cdot\boldsymbol{I}_k(i,j))^2$$

2.1 优化颜色尺度

可以通过最小二乘的方法对$\boldsymbol{c}_k$直接进行求解。

对E求关于$\boldsymbol{c}_k$的导数

$$\frac{\partial E}{\partial c_k^r}=-\sum_{ij}\boldsymbol{I}_k^r(i,j)\boldsymbol{I}_R^r(i,j)+c_k^r\sum_{ij}(\boldsymbol{I}_k^r(i,j))^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_k^g}=-\sum_{ij}\boldsymbol{I}_k^g(i,j)\boldsymbol{I}_R^g(i,j)+c_k^g\sum_{ij}(\boldsymbol{I}_k^g(i,j))^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_k^b}=-\sum_{ij}\boldsymbol{I}_k^b(i,j)\boldsymbol{I}_R^b(i,j)+c_k^b\sum_{ij}(\boldsymbol{I}_k^b(i,j))^2$$

分别令上述三个偏导数为零，可以得到以下表达式

$$c_k^r=\frac{\sum_{ij}\boldsymbol{I}_k^r(i,j)\boldsymbol{I}_R^r(i,j)}{\sum_{ij}(\boldsymbol{I}_k^r(i,j))^2}$$

$$c_k^g=\frac{\sum_{ij}\boldsymbol{I}_k^g(i,j)\boldsymbol{I}_R^g(i,j)}{\sum_{ij}(\boldsymbol{g}(i,j))^2}$$

$$c_k^b=\frac{\sum_{ij}\boldsymbol{I}_k^b(i,j)\boldsymbol{I}_R^b(i,j)}{\sum_{ij}(\boldsymbol{I}_k^b(i,j))^2}$$

即

$$\boldsymbol{c}_k=\left[\frac{\sum_{ij}\boldsymbol{I}_k^r(i,j)\boldsymbol{I}_R^r(i,j)}{\sum_{ij}\left(\boldsymbol{I}_k^r(i,j)\right)^2},\frac{\sum_{ij}\boldsymbol{I}_k^g(i,j)\boldsymbol{I}_R^g(i,j)}{\sum_{ij}\left(\boldsymbol{g}(i,j)\right)^2},\frac{\sum_{ij}\boldsymbol{I}_k^b(i,j)\boldsymbol{I}_R^b(i,j)}{\sum_{ij}(\boldsymbol{I}_k^b(i,j))^2}\right]^T$$

其中$\boldsymbol{I}_R^r(i,j)$, $\boldsymbol{I}_R^g(i,j)$, $\boldsymbol{I}_R^b(i,j)$ 分别表示是那个颜色通道。

2.2 优化$h(s,t), h_s$和h_t

通过梯度下降的方法可以快速进行求解。首先引入$\boldsymbol{I}_R(i,j)$关于$h(s,t), h_s$和h_t的线性表达为

$$\boldsymbol{I}_R(i,j) \approx \boldsymbol{c}_k \cdot \boldsymbol{I}_k\left(\boldsymbol{P}_k\big(\boldsymbol{O}_R + \vec{\boldsymbol{r}}_R(s,t)(h(s,t) + i * h_s + j * h_t)\big)\right) + \boldsymbol{c}_k$$

$$\cdot \frac{\partial \boldsymbol{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)}(dh(s,t) + i * dh_s + j * dh_t)$$

$$= \boldsymbol{c}_k \cdot \boldsymbol{I}_k(i,j) + \boldsymbol{c}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)}(dh(s,t) + i * dh_s + j * dh_t)$$

由此我们可以重新得到关于能量函数E的表达如下

$$E = \sum_{ijk}(\boldsymbol{I}_R(i,j) - \boldsymbol{c}_k \cdot \boldsymbol{I}_k(i,j) + \boldsymbol{c}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)}(dh(s,t) + i * dh_s + j * dh_t))^2$$

令$\boldsymbol{b}_{ijk} = \boldsymbol{I}_R(i,j) - \boldsymbol{c}_k \cdot \boldsymbol{I}_k(i,j)$，$\nabla \boldsymbol{x} = [dh(s,t), dh_s, dh_t]^T$，

$\boldsymbol{A}_{ijk} = \left(\boldsymbol{c}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)}\right)\begin{bmatrix}1\\ i\\ j\end{bmatrix}^T$，则上式可以表达为

$$E = \sum_{ijk}(\boldsymbol{A}_{ijk}\nabla \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_{ijk})^2$$

求E关于$\boldsymbol{x}$的梯度，可以得到

$$\frac{\partial E}{\partial \nabla \boldsymbol{x}} = \sum_{ijk}\boldsymbol{A}_{ijk}^T(\boldsymbol{A}_{ijk}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_{ijk})$$

令$\frac{\partial E}{\partial \nabla \boldsymbol{x}} = 0$可以得到

$$(\sum_{ijk}\boldsymbol{A}_{ijk}^T\boldsymbol{A}_{ijk})\nabla \boldsymbol{x} + \sum_{ijk}\boldsymbol{A}_{ijk}^T\boldsymbol{b}_{ijk}) = \boldsymbol{0}$$

令$\boldsymbol{A} = \sum_{ijk}\boldsymbol{A}_{ijk}^T\boldsymbol{A}_{ijk}, \boldsymbol{b} = \sum_{ijk}\boldsymbol{A}_{ijk}^T\boldsymbol{b}_{ijk}$，则有

$$\nabla \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

梯度下降优化过程为：

a）给定初始值$\boldsymbol{x} = [h(s,t), h_s, h_t]^T$

b）求解梯度$\nabla \boldsymbol{x}$

c）更新$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \nabla \boldsymbol{x}$

d)重复 b） 和 c)操作，直到收敛。

补充：

$$\boldsymbol{A}_{ijk}=\left(\boldsymbol{c}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)}\right)\begin{bmatrix}1\\ i\\ j\end{bmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{A}_{ijk}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}_{ijk}=\begin{bmatrix}1\\ i\\ j\end{bmatrix}\left(\boldsymbol{c}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)}\right)^T\left(\boldsymbol{c}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)}\right)\begin{bmatrix}1\\ i\\ j\end{bmatrix}^T=\left\|\boldsymbol{c}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)}\right\|^2\begin{bmatrix}1, & i, & j\\ i, & i^2, & ij\\ j, & ij, & j^2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{ijk}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{b}_{ijk}=\begin{bmatrix}1\\ i\\ j\end{bmatrix}\left(\boldsymbol{c}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)}\right)^T\left(\boldsymbol{I}_R(i,j)-\boldsymbol{c}_k\ \cdot\boldsymbol{I}_k(i,j)\right)=s_{ijk}\begin{bmatrix}1\\ i\\ j\end{bmatrix},$$

其中$s_{ijk}=\left(\boldsymbol{c}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)}\right)^T\left(\boldsymbol{I}_R(i,j)-\boldsymbol{c}_k\ \cdot\boldsymbol{I}_k(i,j)\right)$是标量。

因此可以得到

$$\boldsymbol{A}=\sum_{ijk}\boldsymbol{A}_{ijk}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}_{ijk}=\sum_{ijk}\left\|\boldsymbol{c}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)}\right\|^2\begin{bmatrix}1, & i, & j\\ i, & i^2, & ij\\ j, & ij, & j^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}=\sum_{ijk}\boldsymbol{A}_{ijk}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{b}_{ijk}=\sum_{ijk}\left(\boldsymbol{c}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{I}_k(i,j)}{\partial h(s,t)}\right)^T\left(\boldsymbol{I}_R(i,j)-\boldsymbol{c}_k\ \cdot\boldsymbol{I}_k(i,j)\right)\begin{bmatrix}1\\ i\\ j\end{bmatrix}$$