

基于图像的三维模型重建

——点云到网格的重建



主讲人 隋博



✓ 三维模型的表述方式

- ✓ 边界表述法
- ✓ 空间划分法

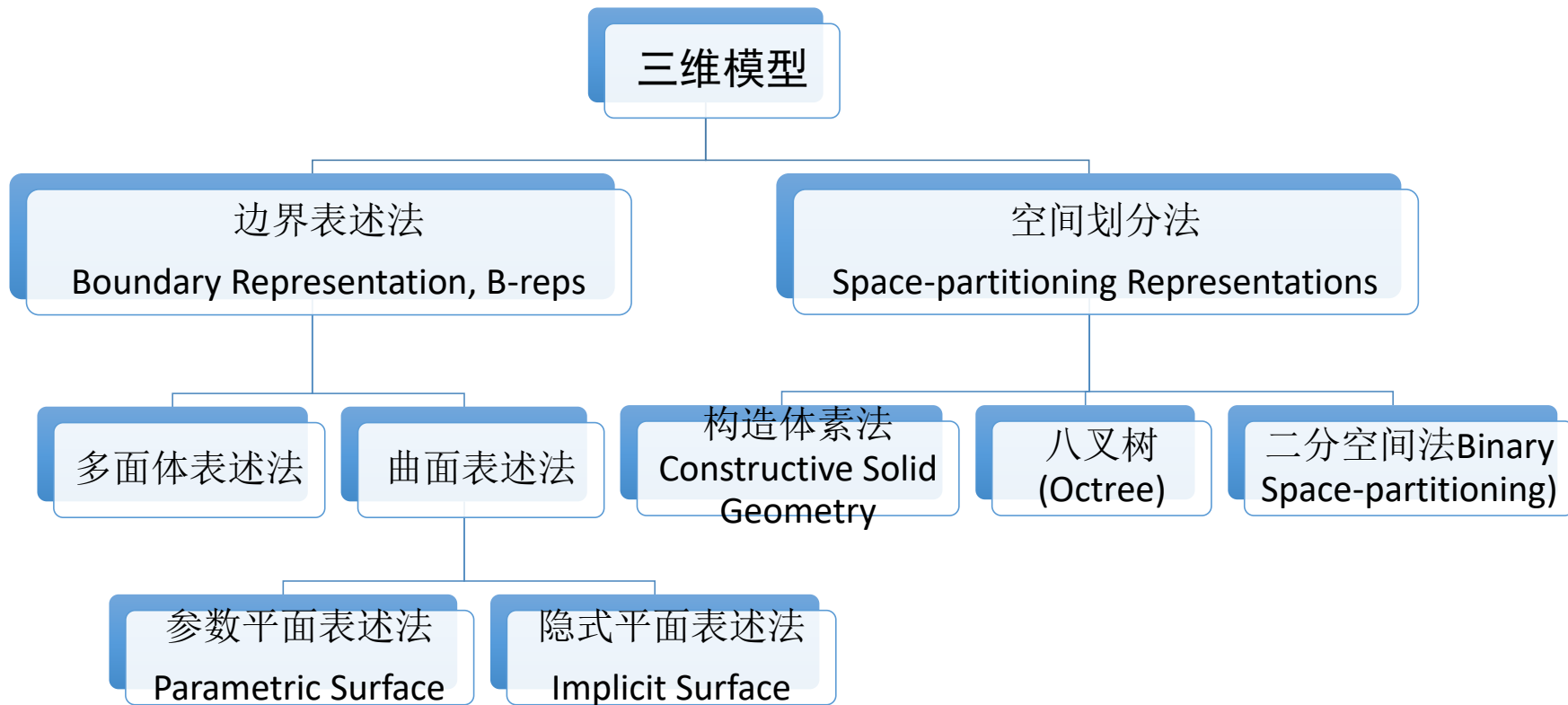
✓ 德劳内三角剖分(Delaunay Triangulation)

- ✓ 空圆特性
- ✓ 德劳内重建算法流程

✓ 基于隐函数的三维模型重建

- ✓ 符号距离场(Signed Distance Field)与隐函数(Implicit Function)
- ✓ 均匀划分(Grid)与八叉树(Octree)
- ✓ Marching Cube算法生成表面网格

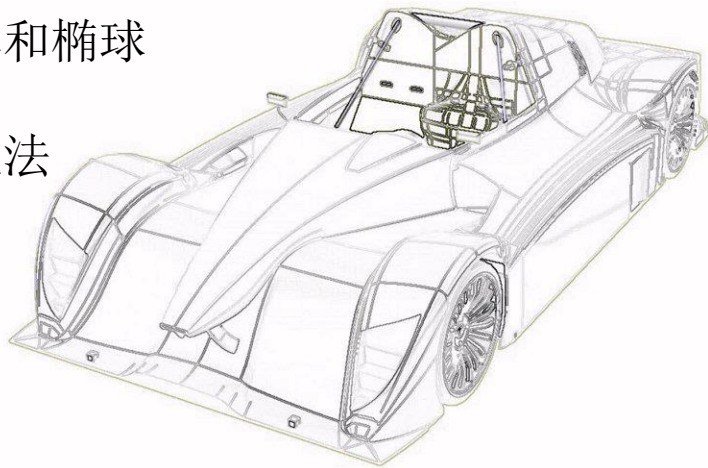
三维模型的表述方式



三维模型的表述方式

边界表述法(Boundary Representation)

- 将三维物体描述成一组表面，该表面将物体的内部和外部分离开
- 有较多的关于面、边、点及其相互关系的信息，便于对模型进行几何运算和操作
- 可以精确地表示简单规则的物体，例如多面体和椭球
- 可分为基于多面体的表述法和基于曲面的表述法

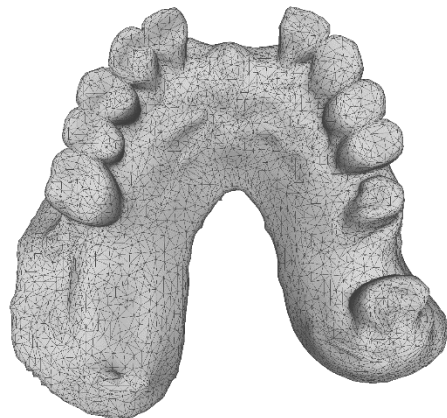
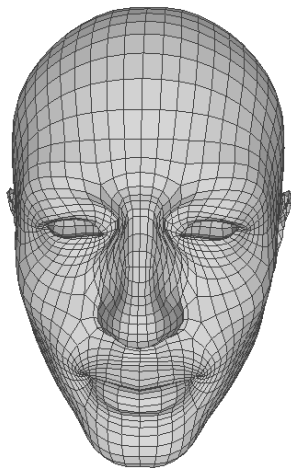


三维模型的表述方式

边界表述法-多面体表述法

将物体表面表述成一组封闭物体空间的多边形，其中最常用的是三角形和四边形，其中三角形表示物体的表面也叫做三角剖分。三角剖分具有以下特性

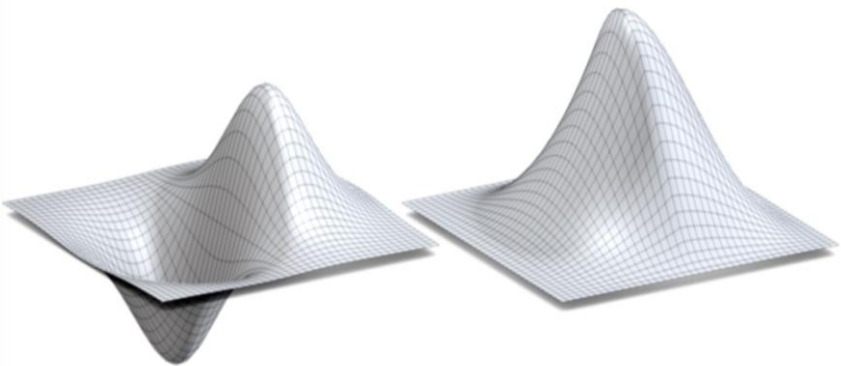
- 稳定性强
- 能够表示各种形状的三维模型
- 有助于恢复模型的表面细节
- 要求点云稠密且分布均匀



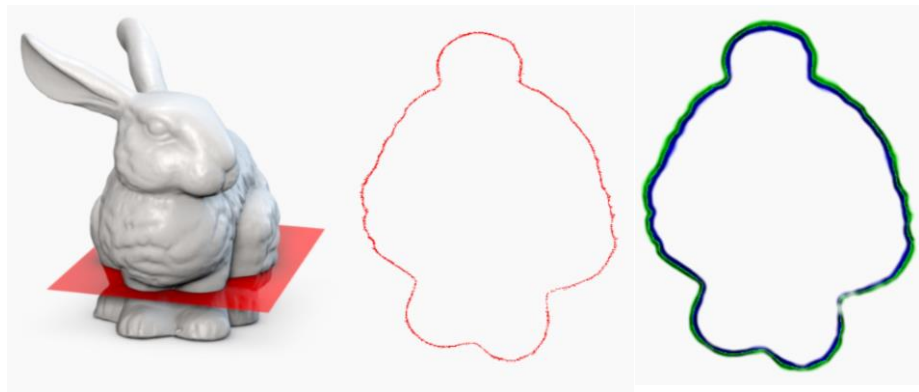
三维模型的表述方式

边界表述法-曲面表述法

将物体表面表述成一组参数或者非参数化的曲面。曲面函数能精确地表示重建的物体模型



参数曲面



隐式曲面

三维模型的表述方式

边界表述法-参数曲面

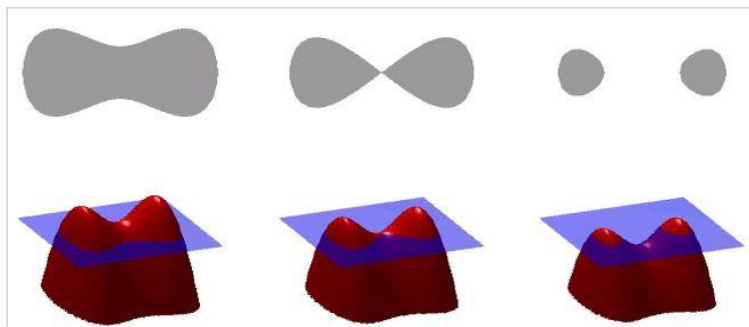
参数曲面形式为 $z = f(x, y)$ ，常用来表述场景中规则的物体，如球、椭球、圆环等。常用的参数曲面有二次曲面、多项式曲面和样条曲面等。



三维模型的表述方式

边界表述法-隐式曲面

隐式曲面通过函数 $f(x, y, z)$ 的零水平集，即 $\{x, y, z | f(x, y, z) = 0\}$ 所代表的曲面来确定物体表面的空间位置。相比较于参数平面，隐式平面更加灵活，适合描述结构比较复杂的物体。



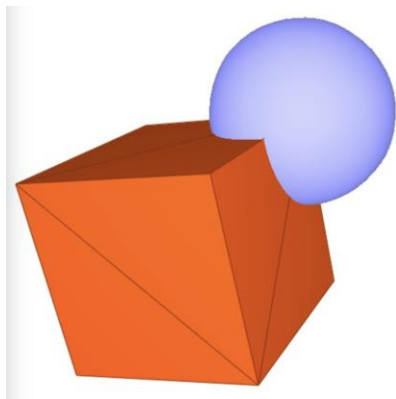
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v |\nabla \varphi|$$

$$\Gamma = \{(x, y) | \varphi(x, y) = 0\}$$

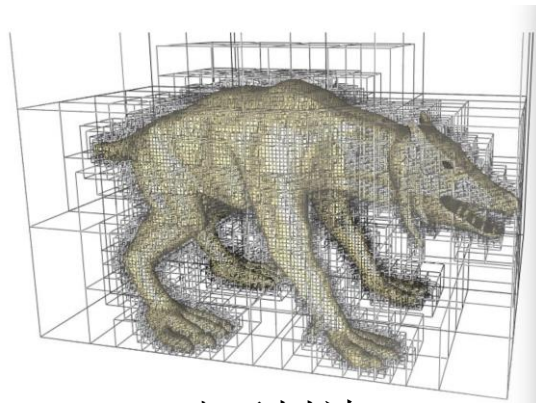
三维模型的表述方式

空间划分法

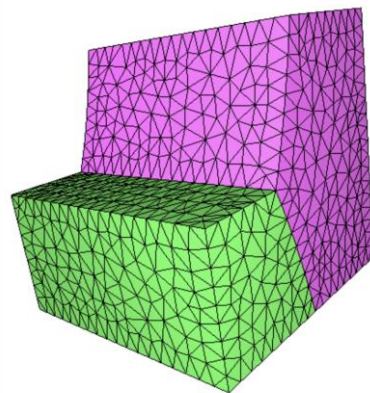
将物体内部的空间划分成细小、不重叠的连续实体来描述物体的形状，常用方法有构造体素法,八叉树法和二分空间法



构造体素法



八叉树法

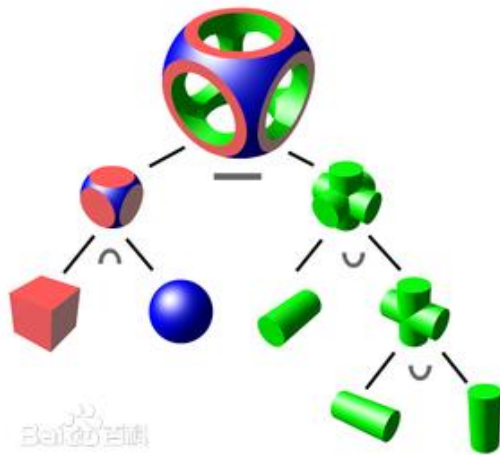


二分空间法

三维模型的表述方式

空间划分法-构造体素法

通过对一些基本元素(如四面体、圆柱体、圆锥、球体或者带有样条曲面的刚体)进行加、减、并集和交集等组合运算生成新的物体。



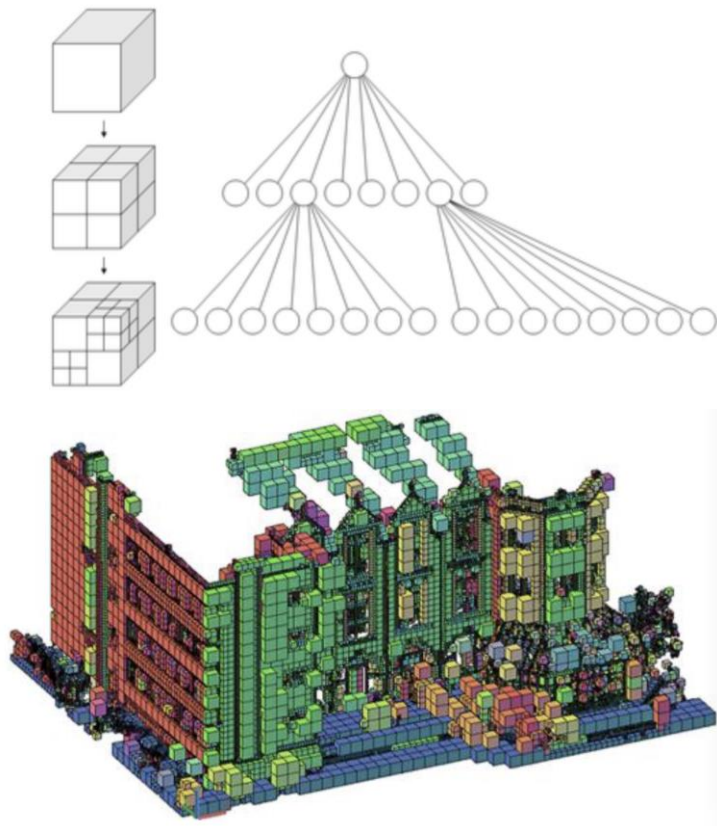
- 操作简单，便于实现
- 只能用来表述结构较为简单的实体，无法用于形状复杂或者表面细节丰富的物体
- 由于信息简单，这种数据结构无法存贮物体最终的详细信息，例如边界、顶点的信息等

三维模型的表述方式

空间划分法-八叉树法

利用分层的树结构将要表述的物体建造一个树结构，树节点对用空间中一块特定的区域(根节点是包含整个物体的正方体边界区域)。

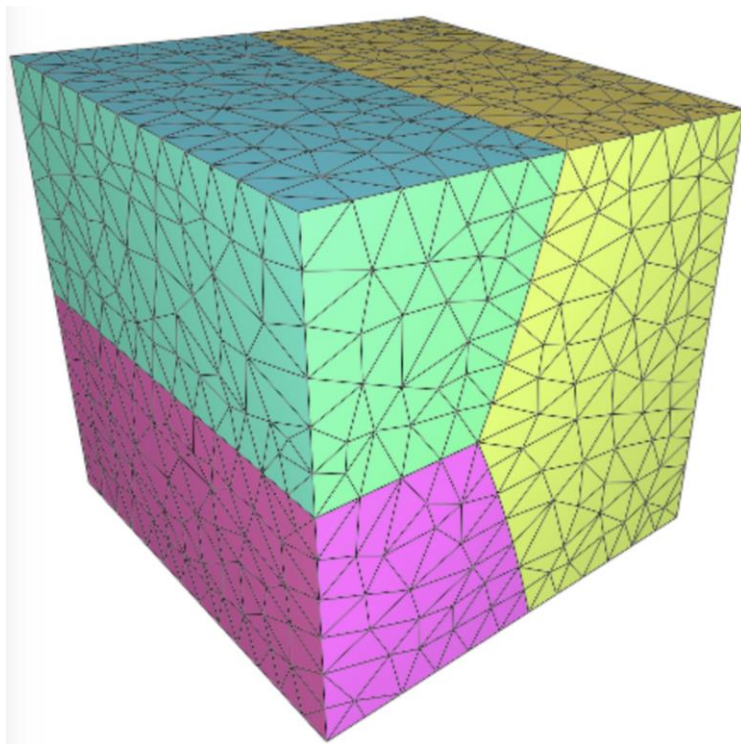
从根节点开始，包含物体的节点将被均匀地划分成八个子节点。这种迭代进行直到满足终止条件为止



三维模型的表述方式

空间划分法-二分空间法

与八叉树结构表述法类似，都是对空间进行逐步划分。不同之处在于二分空间法每一步都将空间划分成两部分，且划分平面的位置和方向根据物体的空间分布随时调整，因此增加了表述的灵活性。



三维模型的表述方式

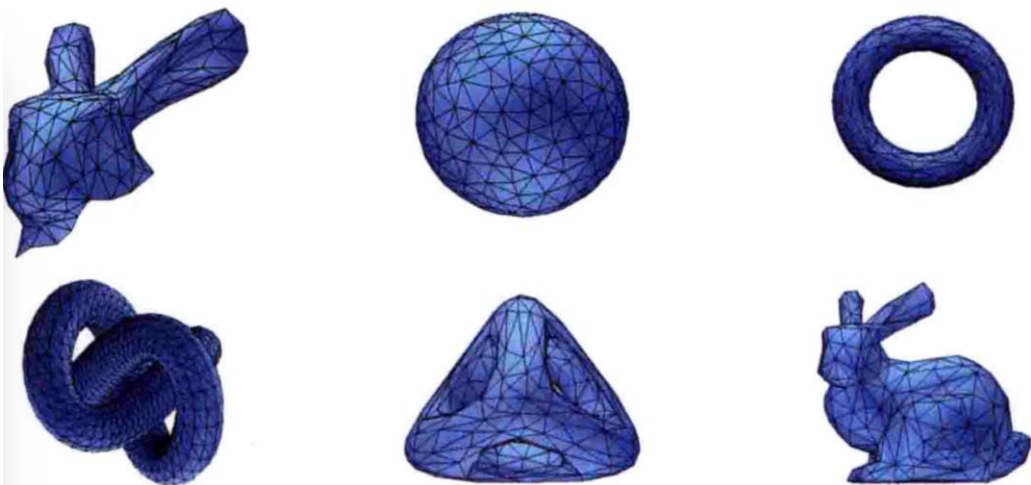
最常用的三维模型表述方式-三角网格

计算机图形学中的三维网格处理
绝大部分都是基于三角网格

三角网格的基本结构:

- 顶点 (Vertex)
- 面片 (Facet)
- 边 (Edge)

点线和面上的各种属性:
颜色(Color), 法向量(Normal),
纹理坐标(Texture Coordinate)



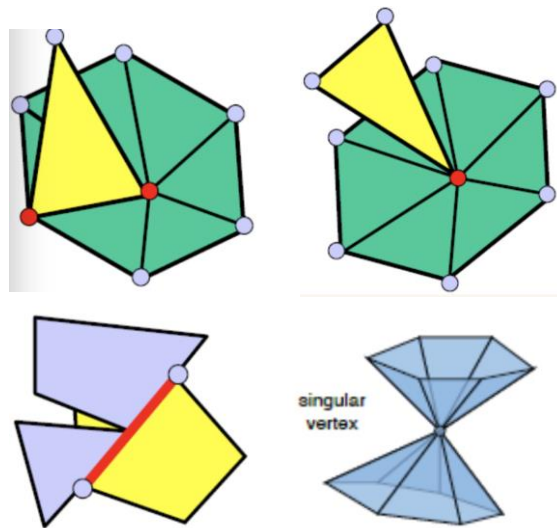
三维模型的表述方式

流形(Manifold Mesh)与非流形(Non-manifold Mesh)

流形的定义：

三角网格曲面中大多数算法是基于流形网格的，其定义如下：

- 1) 一条边由一个或两个面片共享
- 2) 一个网格顶点的一环邻域三角片构成一个闭合或者开放大扇面



非流形的几种情况

三维模型的表述方式

三角网格常用的数据结构—共享顶点(Shared Vertex)

共享顶点的数据结构主要包含2个部分：

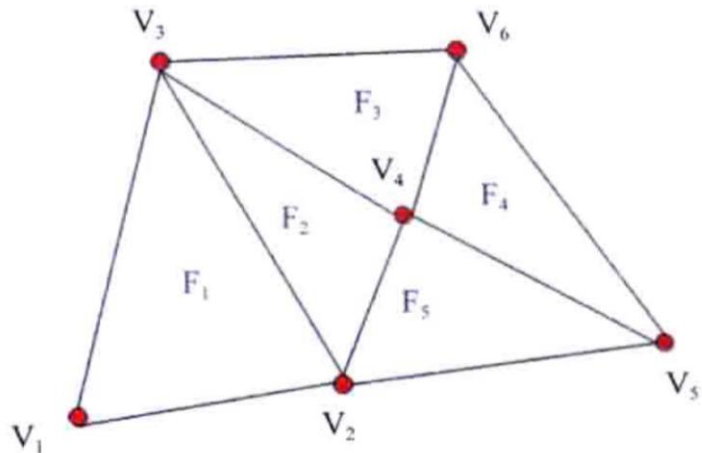
- 1) 顶点的坐标数组
- 2) 三角形面的数组（每个面片只存储相应的顶点数组的序号）

顶点
顶点坐标
[40 5 20]
[10 20 30]
[10 4 3]
...

三角形		
顶点索引	顶点索引	顶点索引
2	1	3
...		

三维模型的表述方式

三角网格常用的数据结构—共享顶点 (Shared Vertex)



三角网格模型

顶点	
V ₁	[40 5 20]
V ₂	[10 20 30]
V ₃	[10 4 3]
...	

面	三角形		
F ₁	2	1	3
...			

三维模型的表述方式

三角网格常用的数据结构—共享顶点 (Shared Vertex)

缺点:

可以表示点之间的连接关系(Connectivity), 但是没有局部之间的邻接关系 (Neighborhood), 例如从一个顶点到与其相邻的面片, 因此在很多局部操作上速度和效率低

三维模型的表述方式

半边数据结构 (Half-Edge Data Structure)

- 一边为中心的数据结构
- 存储三维模型所有顶点、边和面的数据以及相邻接关系的信息
- 利用半边表示边的方向
- 局部操作速度快
- 只能处理流形(Manifold)模型

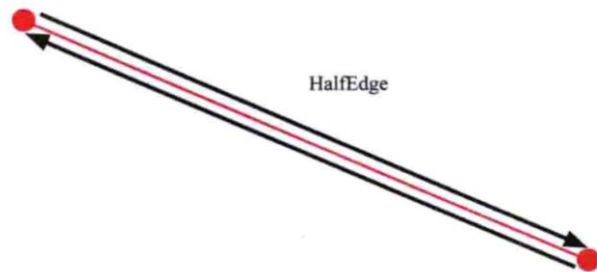
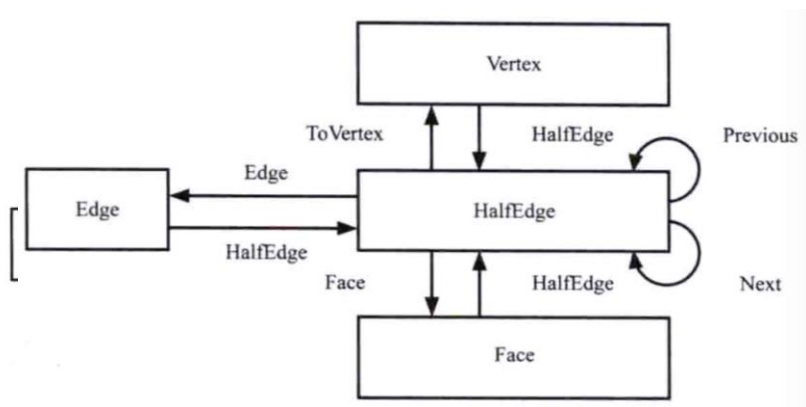
三维模型的表述方式

半边数据结构 (Half-Edge Data Structure)

半边结构的5个组成部分：

- 顶点(Vertex)
- 半边(HalfEdge)
- 边(Edge)
- 面(Face)
- 模型(Mesh)

半边是有方向(Oriented)的边,而边是没有方向(Non-Oriented)的边,一个没有方向的边可以视为两个方向相反的半边



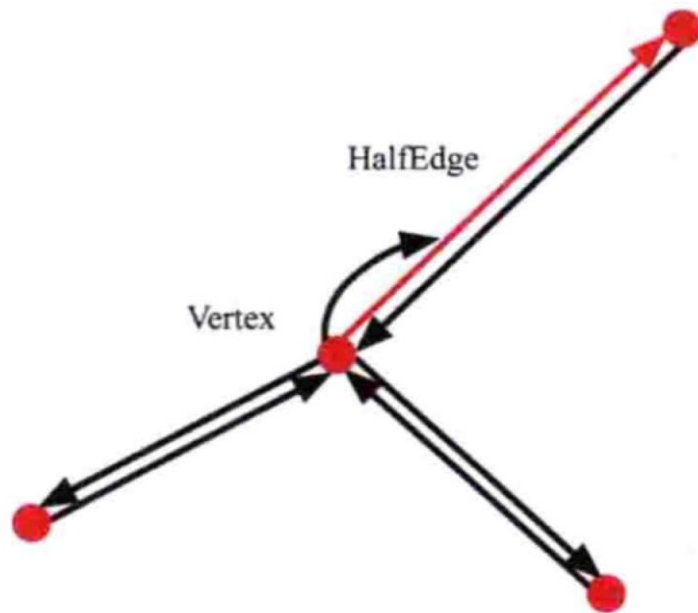
半边数据结构

三维模型的表述方式

半边数据结构 (Half-Edge Data Structure)

顶点需要保存的信息：

- 以此顶点为源点的半边
(随机选取一条)

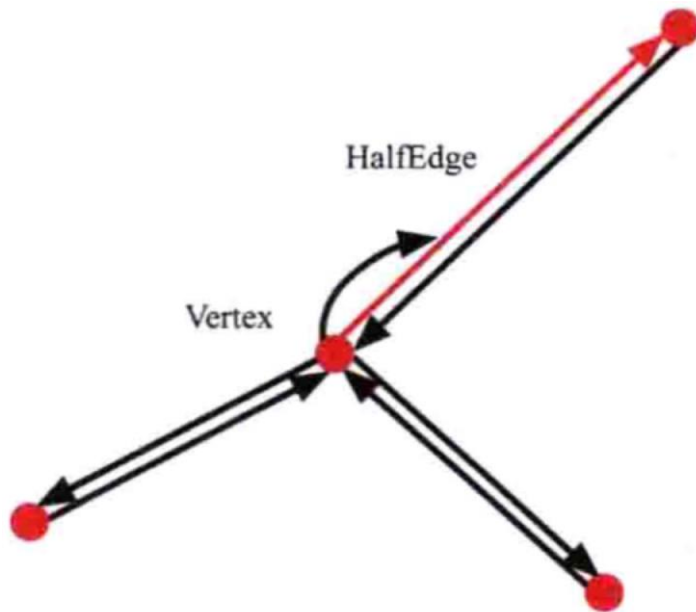


三维模型的表述方式

半边数据结构 (Half-Edge Data Structure)

顶点需要保存的信息：

- 以此顶点为源点的半边
(随机选取一条)

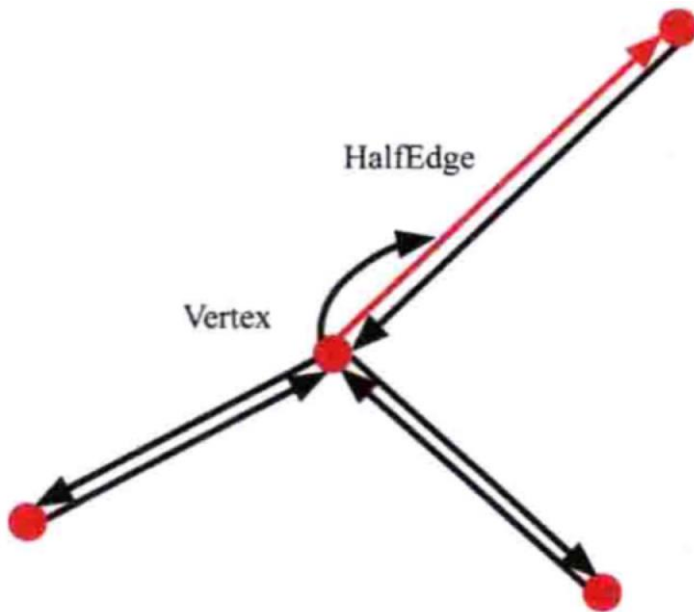


三维模型的表述方式

半边数据结构 (Half-Edge Data Structure)

半边需要保存的信息：

- 目的顶点 (Target Vertex)
- 半边左侧面
- 前一个 (Prev) 半边
- 下一个 (Next) 半边
- 孪生 (Twin) 半边

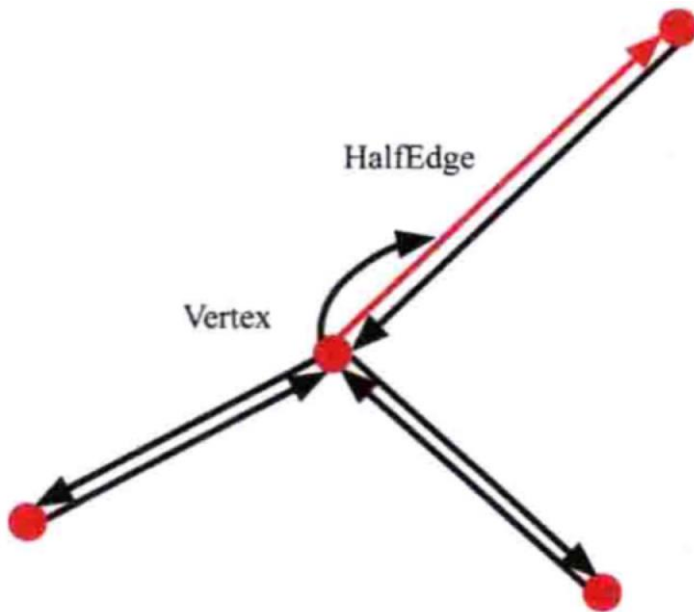


三维模型的表述方式

半边数据结构 (Half-Edge Data Structure)

边存储的信息:

- 任意一条半边

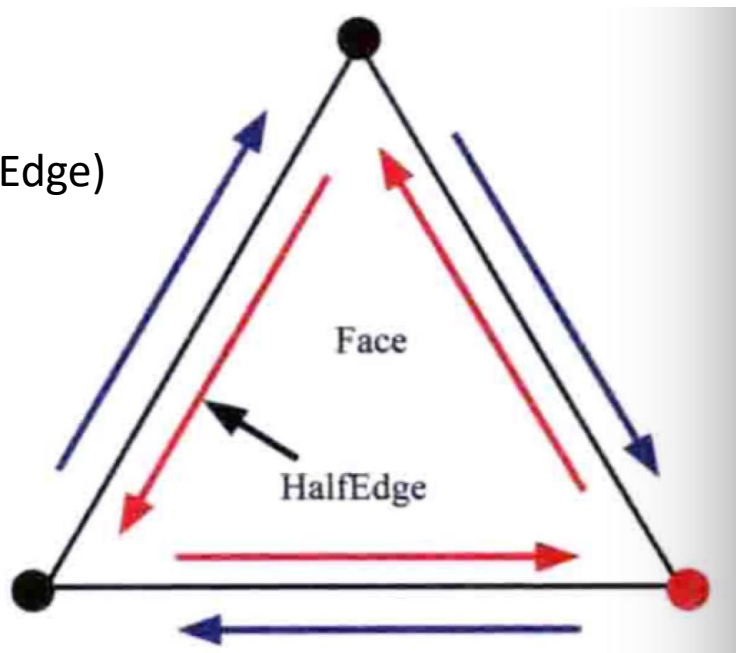


三维模型的表述方式

半边数据结构 (Half-Edge Data Structure)

面存储的信息:

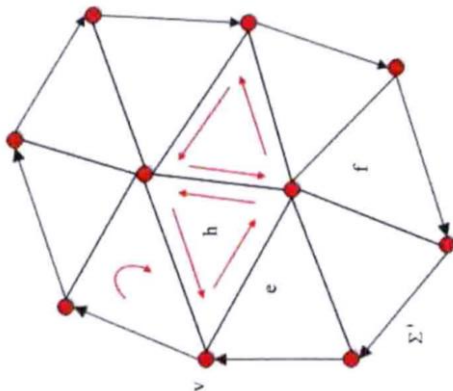
- 一条和此面相邻的半边(Adjacent HalfEdge)



三维模型的表述方式

半边数据结构 (Half-Edge Data Structure)

Mesh存储的信息:



顶点列表

边列表

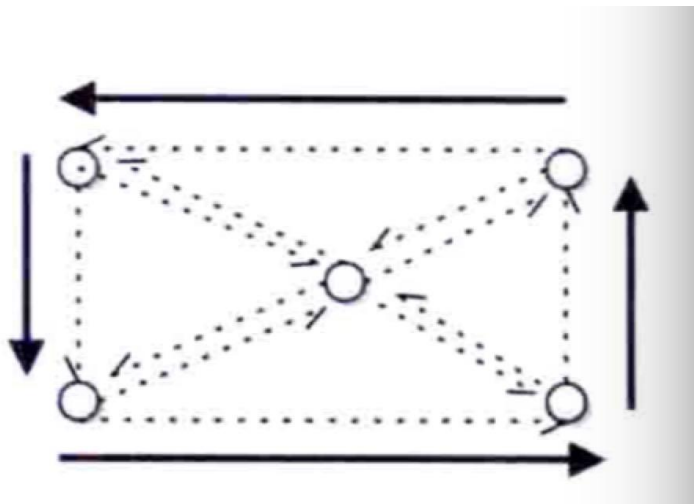
半边列表

面列表

三维模型的表述方式

半边数据结构 (Half-Edge Data Structure)

示例：找顶点的邻域顶点

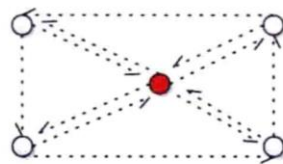


三维模型的表述方式

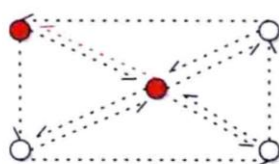
半边数据结构 (Half-Edge Data Structure)

示例：找顶点的邻域顶点

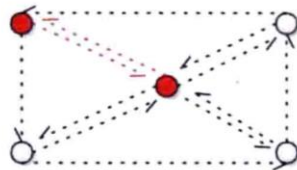
- a) 确定给顶点
- b) 通过该点可以直接得到此点的一个相邻的半边
- c) 通过该半边便可以确定一个相邻的顶点,以及此半边下一个相邻的半边
- d) 重复上述过程可以得到所有的相邻顶点



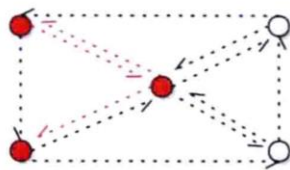
(a)



(b)



(c)



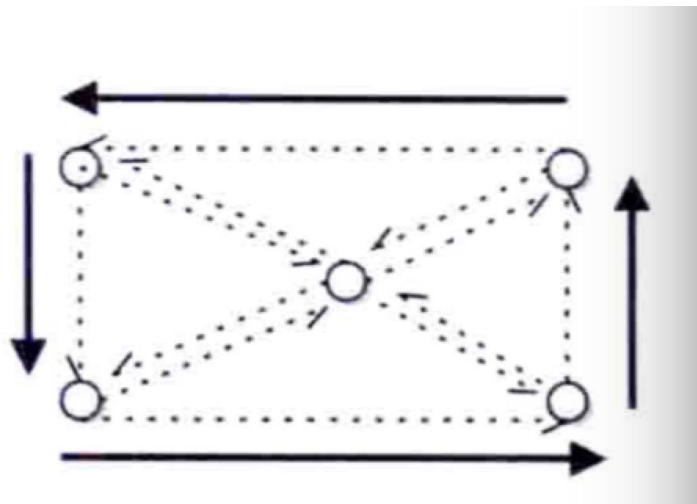
(d)

三维模型的表述方式

半边数据结构 (Half-Edge Data Structure)

思考：

- 1) 如何通过半边结构遍历顶点所有的相邻的面？
- 2) 如果通过半边结构遍历面片的所有顶点？



✓ 三维模型的表述方式

- ✓ 边界表述法
- ✓ 空间划分法

✓ 德劳内三角剖分(Delaunay Triangulation)

- ✓ 空圆特性
- ✓ 德劳内重建算法流程

✓ 基于隐函数的三维模型重建

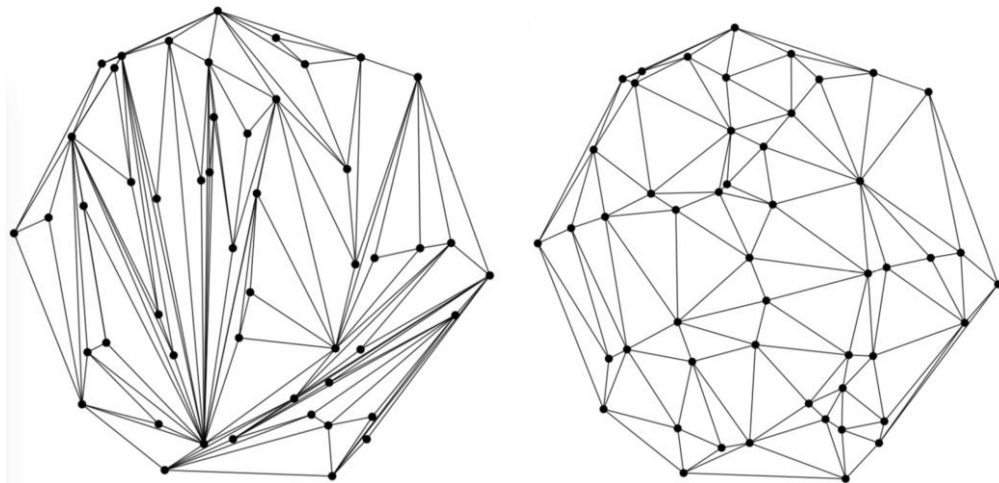
- ✓ 符号距离场(Signed Distance Field)与隐函数(Implicit Function)
- ✓ 均匀划分(Grid)与八叉树(Octree)
- ✓ Marching Cube算法生成表面网格

德劳内三角剖分

德劳内三角剖分 Delaunay Triangulation

点集 P 的德劳内三角剖分满足满足任意 P 内任意一个点都不在 P 内任意一个三角面片的外接圆内。

德劳内三角剖分最大化三角面片内三角形的最小角

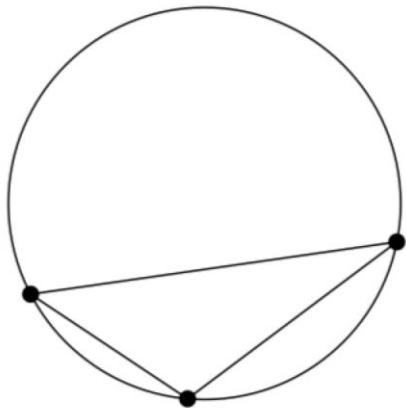


非德劳内三角剖分与德劳内三角剖分的对比

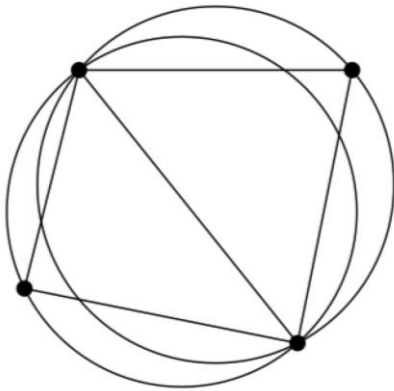
德劳内三角剖分

空圆特性

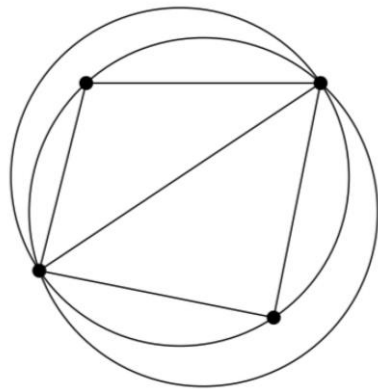
任意3个点的外接圆不包含第4个点，即任意3个点的外接圆是空的



三角形的外接圆



满足空圆特性的三角剖分

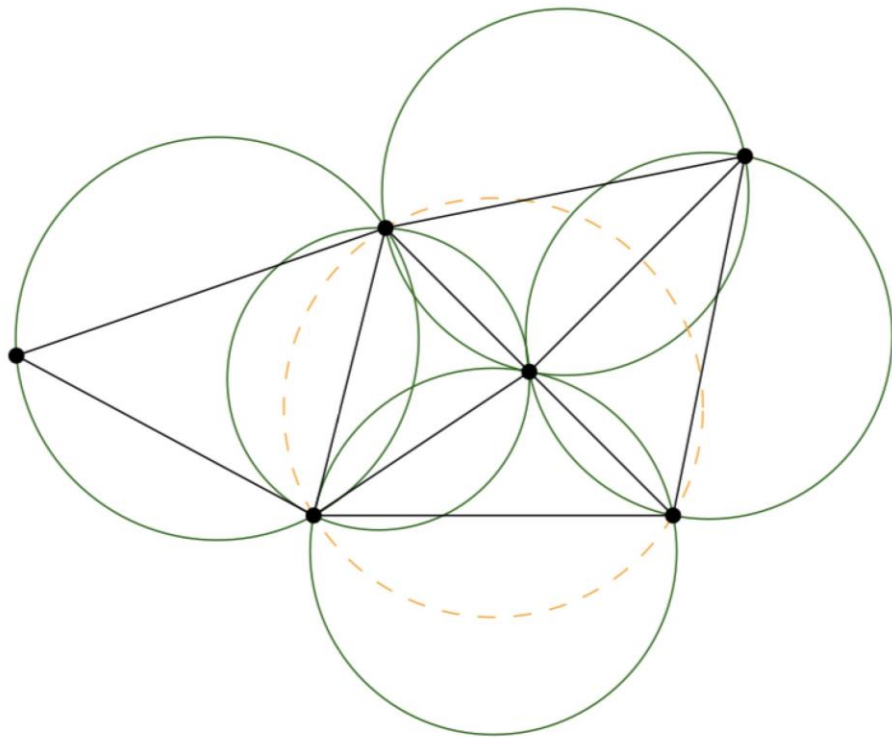


不满足空圆特性的三角剖分

德劳内三角剖分

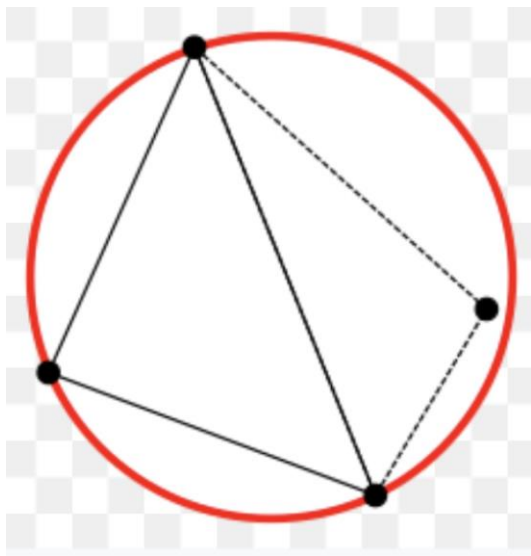
空圆特性

德劳内三角剖分中所有的
三角形都满足空圆特性



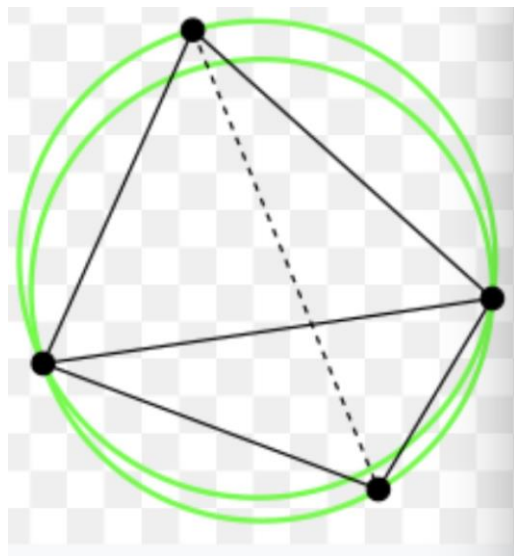
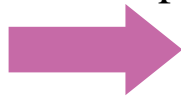
德劳内三角剖分

Lawson Flip Algorithm



不满足空圆特性

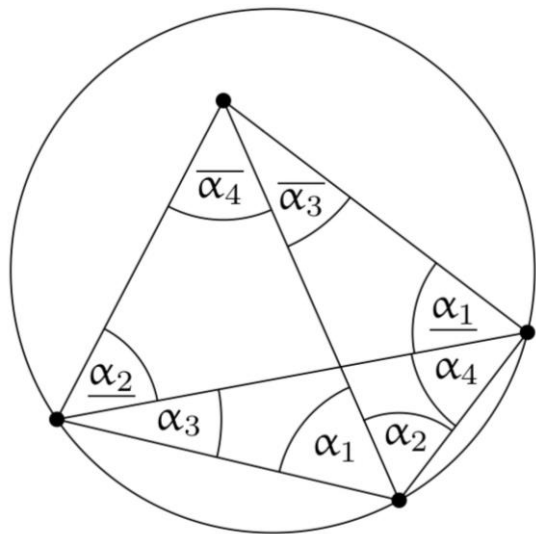
翻转 (Flip)



满足空圆特性

德劳内三角剖分

最大化最小角



翻转前后的三角形内角

翻转前的内角: $\alpha_1 + \alpha_2$, α_3 , α_4 , $\underline{\alpha_1}$, $\underline{\alpha_2}$, $\overline{\alpha_3} + \overline{\alpha_4}$

翻转后的内角: α_1 , α_2 , $\overline{\alpha_3}$, $\overline{\alpha_4}$, $\underline{\alpha_1} + \alpha_4$, $\underline{\alpha_2} + \alpha_3$

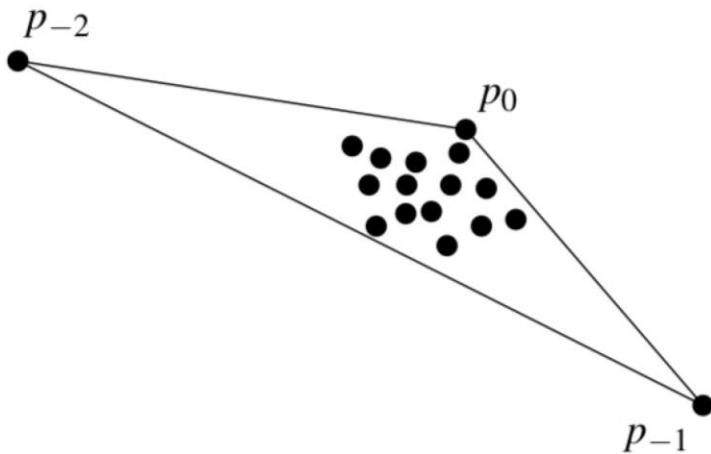
$$\begin{aligned}\alpha_1 &> \underline{\alpha_1}, \\ \alpha_2 &> \underline{\alpha_2}, \\ \overline{\alpha_3} &> \alpha_3, \\ \overline{\alpha_4} &> \alpha_4, \\ \underline{\alpha_1} + \alpha_4 &> \alpha_4, \\ \underline{\alpha_2} + \alpha_3 &> \alpha_3.\end{aligned}$$

每一次翻转都是在增大三角剖分的最小角

德劳内三角剖分

一种增量的德劳内三角剖分算法

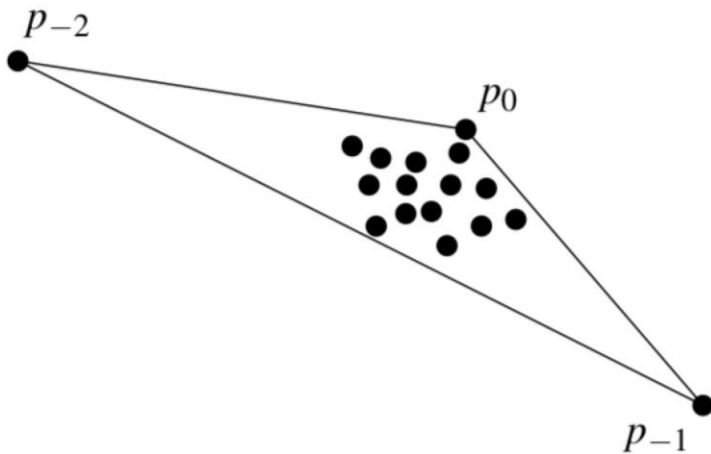
Step 1 添加两个足够远的点 p_{-1}, p_{-2}
以保证 p_{-1}, p_{-2} 位于所有三角形
的外接圆外



德劳内三角剖分

一种增量的德劳内三角剖分算法

Step 1 添加两个足够远的点 p_{-1}, p_{-2}
以保证 p_{-1}, p_{-2} 位于所有三角形
的外接圆外。三角形 $p_0 p_{-1} p_{-2}$
包含所有的点。初始的时候仅有一个空的三角形。

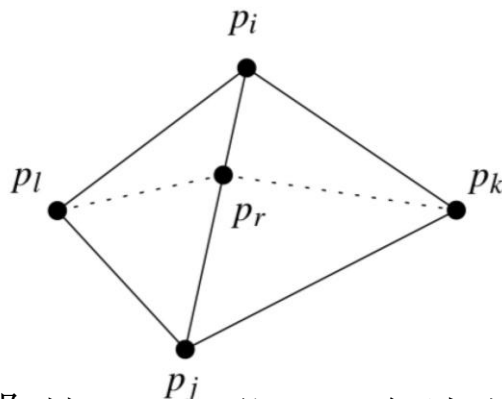
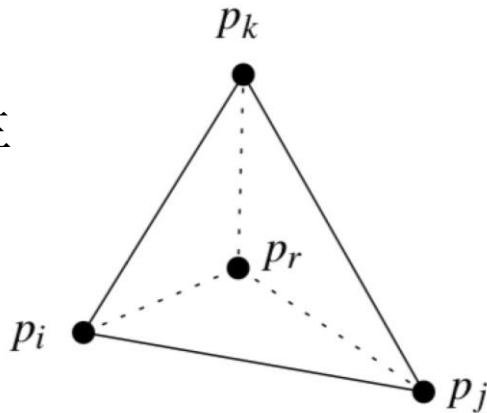


德劳内三角剖分

一种增量的德劳内三角剖分算法

Step 2 依次添加新的点 p_r

第一种情况：分别连接
 $p_r p_i, p_r p_j, p_r p_k$, 分别检查与三
角形 $p_r p_i p_k, p_r p_j p_k, p_r p_i p_k$ 相
邻的三角形的空圆特性



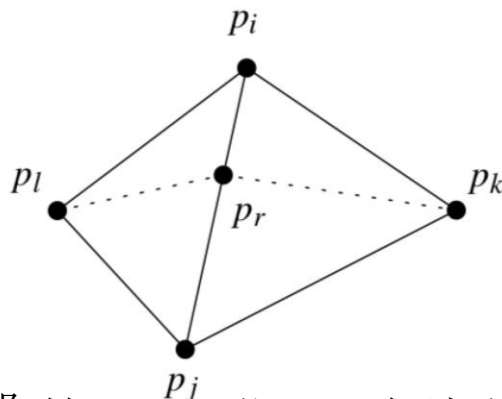
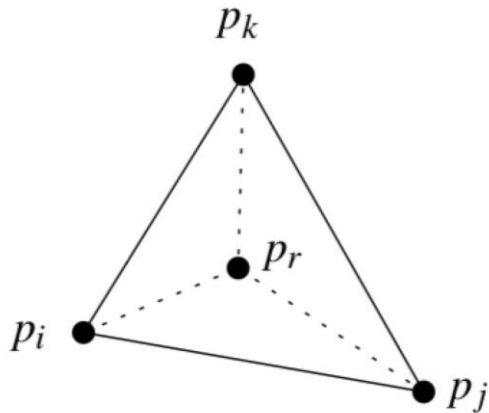
情况1: p_r 位于三角形 $p_i p_j p_k$ 内部 情况2: p_r 位于一条边上

德劳内三角剖分

一种增量的德劳内三角剖分算法

Step 2 依次添加新的点 p_r

第二种情况：分别连接
 $p_r p_l, p_r p_k$, 分别检查与三角形
 $p_r p_j p_k$, $p_r p_j p_l$, $p_r p_l p_i$, $p_r p_k p_i$
相邻的三角形的空圆特性



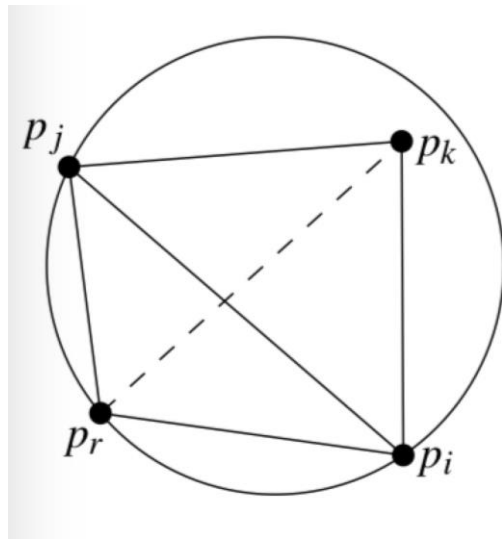
情况1: p_r 位于三角形 $p_i p_j p_k$ 内部 情况2: p_r 位于一条边上

德劳内三角剖分

一种增量的德劳内三角剖分算法

Step 2 依次添加新的点 p_r

检测相关三角形的空圆特性



德劳内三角剖分

一种增量的德劳内三角剖分算法

Algorithm DELAUNAYTRIANGULATION(P)

Input. A set P of $n + 1$ points in the plane.

Output. A Delaunay triangulation of P .

1. Let p_0 be the lexicographically highest point of P , that is, the rightmost among the points with largest y -coordinate.
2. Let p_{-1} and p_{-2} be two points in \mathbb{R}^2 sufficiently far away and such that P is contained in the triangle $p_0 p_{-1} p_{-2}$.
3. Initialize \mathcal{T} as the triangulation consisting of the single triangle $p_0 p_{-1} p_{-2}$.
4. Compute a random permutation p_1, p_2, \dots, p_n of $P \setminus \{p_0\}$.
5. **for** $r \leftarrow 1$ **to** n
6. **do** (* Insert p_r into \mathcal{T} : *)
7. Find a triangle $p_i p_j p_k \in \mathcal{T}$ containing p_r .
8. **if** p_r lies in the interior of the triangle $p_i p_j p_k$
9. **then** Add edges from p_r to the three vertices of $p_i p_j p_k$, thereby splitting $p_i p_j p_k$ into three triangles.
10. LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_i p_j}, \mathcal{T}$)
11. LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_j p_k}, \mathcal{T}$)
12. LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_k p_i}, \mathcal{T}$)
13. **else** (* p_r lies on an edge of $p_i p_j p_k$, say the edge $\overline{p_i p_j}$ *)
14. Add edges from p_r to p_k and to the third vertex p_l of the other triangle that is incident to $\overline{p_i p_j}$, thereby splitting the two triangles incident to $\overline{p_i p_j}$ into four triangles.
15. LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_i p_l}, \mathcal{T}$)
16. LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_l p_j}, \mathcal{T}$)
17. LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_j p_k}, \mathcal{T}$)
18. LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_k p_i}, \mathcal{T}$)
19. Discard p_{-1} and p_{-2} with all their incident edges from \mathcal{T} .
20. **return** \mathcal{T}

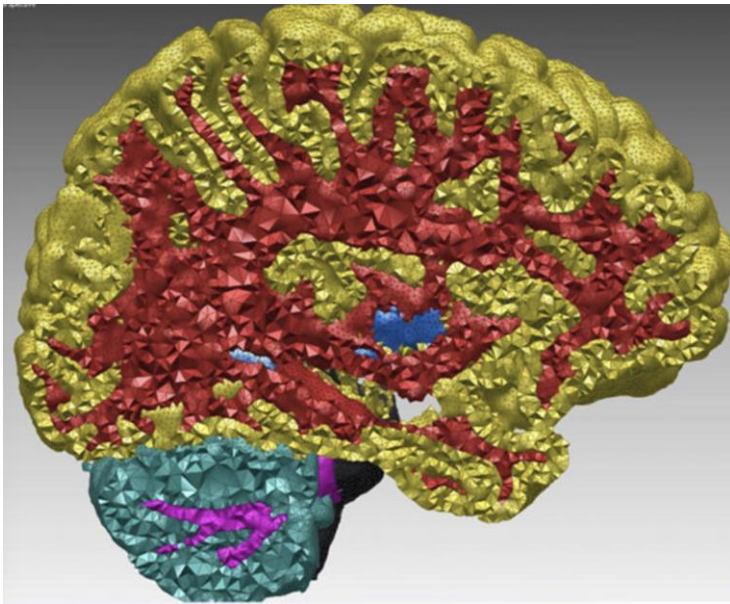
LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_i p_j}, \mathcal{T}$)

1. (* The point being inserted is p_r , and $\overline{p_i p_j}$ is the edge of \mathcal{T} that may need to be flipped. *)
2. **if** $\overline{p_i p_j}$ is illegal
3. **then** Let $p_i p_j p_k$ be the triangle adjacent to $p_r p_i p_j$ along $\overline{p_i p_j}$.
4. (* Flip $\overline{p_i p_j}$: *) Replace $\overline{p_i p_j}$ with $\overline{p_r p_k}$.
5. LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_i p_k}, \mathcal{T}$)
6. LEGALIZEEDGE($p_r, \overline{p_k p_j}, \mathcal{T}$)

德劳内三角剖分

三维上的德劳内三角剖分(四面体剖分)

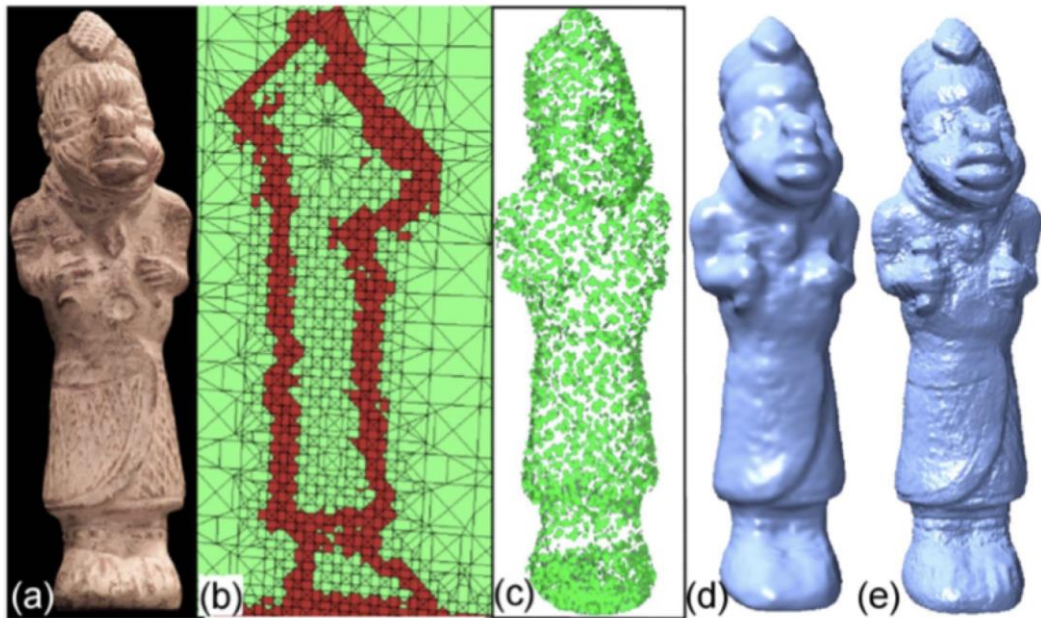
3D 对应的是德劳内四面体剖分，得到的是体数据，无法直接得到面片



德劳内三角剖分

三维上的德劳内三角剖分(四面体剖分)

3D 上德劳内四面体剖分+MRF
优化得到三维网格



✓ 三维模型的表述方式

- ✓ 边界表述法
- ✓ 空间划分法

✓ 德劳内三角剖分(Delaunay Triangulation)

- ✓ 空圆特性
- ✓ 德劳内重建算法流程

✓ 基于隐函数的三维模型重建

- ✓ 符号距离场(Signed Distance Field)与隐函数(Implicit Function)
- ✓ 均匀划分(Grid)与八叉树(Octree)
- ✓ Marching Cube算法生成表面网格

基于隐函数的三维模型重建

重建流程

空间划分

- 均匀(grid)
- 非均匀(octree)



构建符号距离场

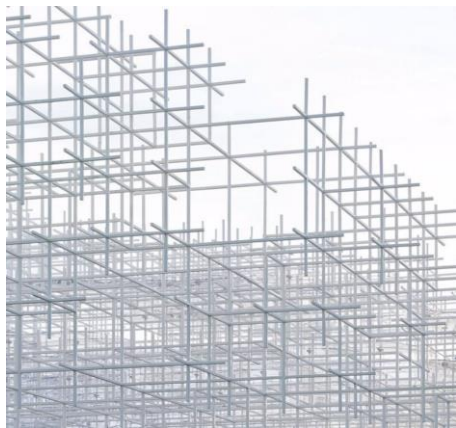
- 全局
- 局部



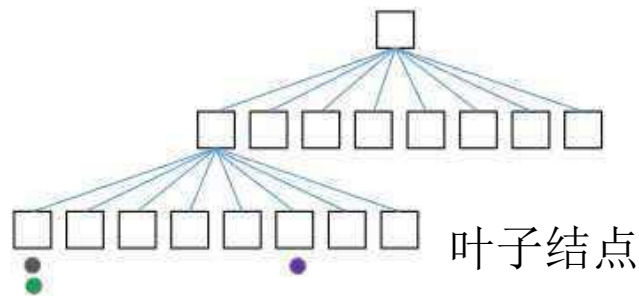
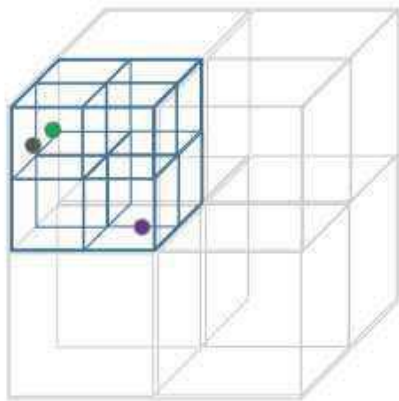
Marching Cube
生成表面

基于隐函数的三维模型重建

空间划分

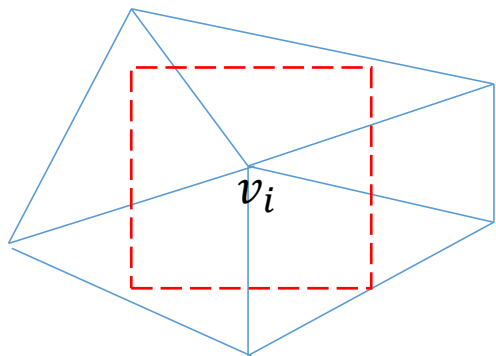


Grid 空间均匀划分



Octree 非均匀划分

八叉树深度的确定——点的尺度



点的尺度scale可以定义为顶点到最近邻的平均距离，它反映的点的分辨率

用点的尺度决定八叉树Node的宽度，从而确定深度

$$S_l \leq s_i < S_{l-1} \Leftrightarrow S_l \leq s_i < 2S_l$$



$$\frac{1}{2} s_i < S_l \leq s_i$$

s_i 表示点的尺度 S_l 和 S_{l-1} 分别表示第 l 和第 $l-1$ 层节点的宽度
且 $S_l = 2S_{l-1}$

基于隐函数的三维模型重建

符号距离函数(Signed Distance Function)

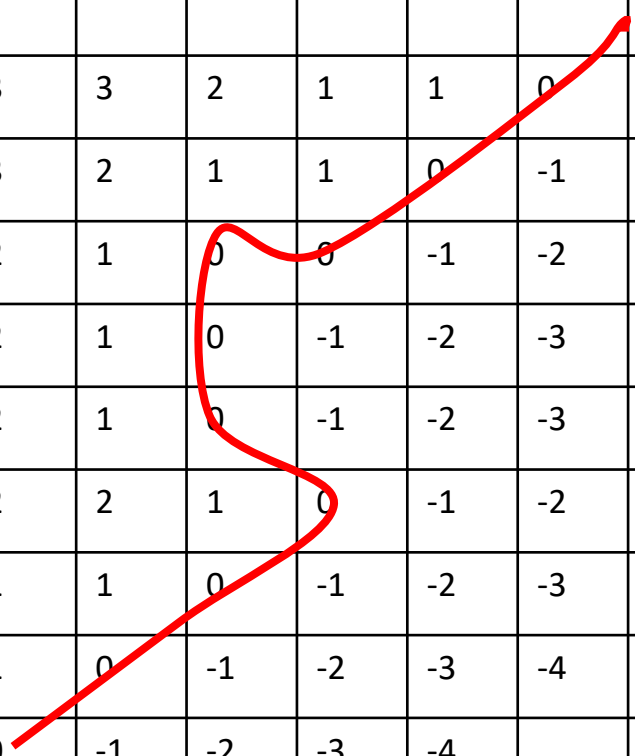
$$f(x) = \begin{cases} d(x, \partial\Omega) & \text{if } x \in \Omega_i \\ -d(x, \partial\Omega) & \text{if } x \in \Omega_o \end{cases}$$

$f(x) = 0$ 表示零势面

符号距离函数Signed Distance Function是某度量空间 X 中的一个集合 Ω 的函数，决定 X 中任一点到 Ω 边界 $\partial\Omega$ 的距离，并且由 x 是在 Ω 内还是 Ω 外确定其SDF的正负号：当 x 在 Ω 内时，SDF为正；当 x 在 Ω 外时，SDF为负。

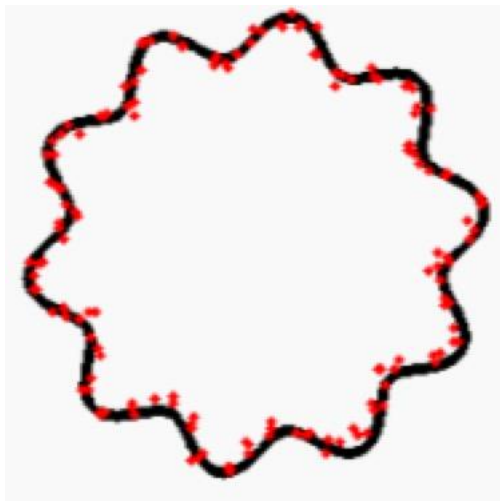
基于隐函数的三维模型重建

	4	3	3	2	1	1	0	-1	-2
	4	3	2	1	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	0	-1	-2	-3	4
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	
4	3	2	2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	1	0	-1	-2	-3	-4	
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4		
2	1	0	-1	-2	-3	-4			

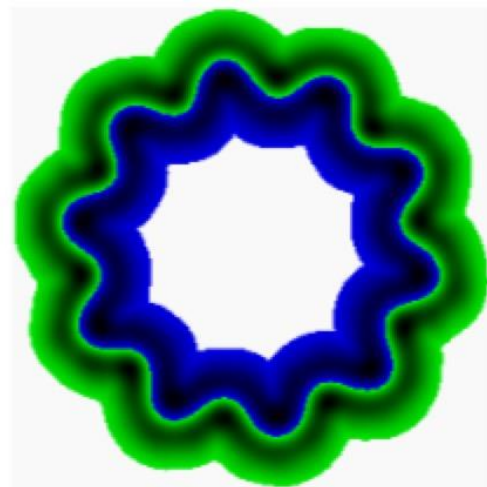


基于隐函数的三维模型重建

符号距离函数(Signed Distance Function)



输入点云



符号距离场

基于隐函数的三维模型重建

符号距离场的构建

- 对于grid计算每个node的符号距离
- 对于octree计算每个叶子结点的符号距离值

基于隐函数的三维模型重建

符号距离场的构建-全局的方法

把节点处的符号距离值看作是对空间隐函数的采样，采用拟合的方式计算符号距离函数，最常用的方法是在每个节点上建立一个基函数 $\phi(x)$

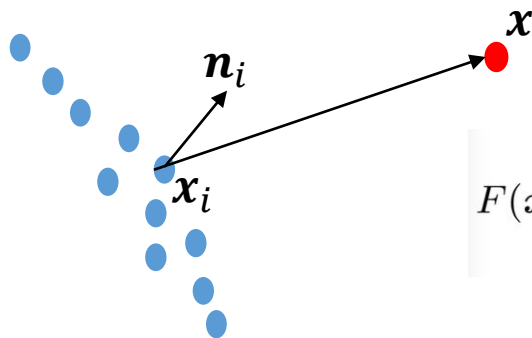
$$s(x) = p(x) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(|x - x_i|)$$

Carr J C, Beatson R K, Cherrie J B, et al. Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions[C] 2001:67-76.

基于隐函数的三维模型重建

符号距离场的构建-局部的方法

直接计算每个节点处分符号距离值



$$F(\mathbf{x}) = \frac{\sum_i c_i w_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})}{\sum_i c_i w_i(\mathbf{x})}$$

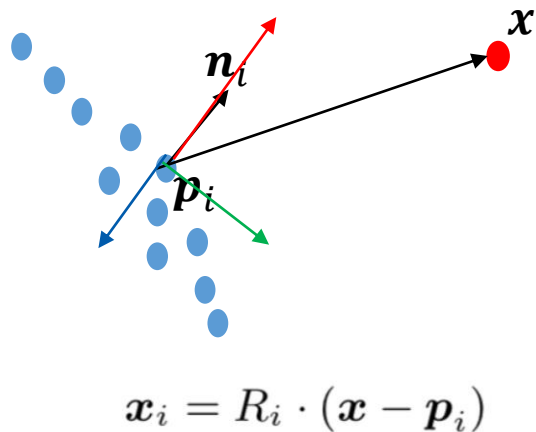
$$W(\mathbf{x}) = \sum_i c_i w_i(\mathbf{x})$$

最简单的情况

$$f_i(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{n}_i \quad w_i(\mathbf{x}) = \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\|^2)$$

基于隐函数的三维模型重建

符号距离场的构建-局部的方法



$$f(\mathbf{x}_i) = f_x(x)f_y(y)f_z(z) = \frac{x}{\sigma^4 2\pi} \cdot e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x^2+y^2+z^2)}$$

$$w(\mathbf{x}_i) = w_x(x) \cdot w_{yz}(\sqrt{y^2 + z^2})$$

$$w_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{2}{3} \frac{x}{\sigma} + 1 & x \in [-3\sigma, 0) \\ \frac{2}{27} \frac{x^3}{\sigma^3} - \frac{1}{3} \frac{x^2}{\sigma^2} + 1 & x \in [0, 3\sigma) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

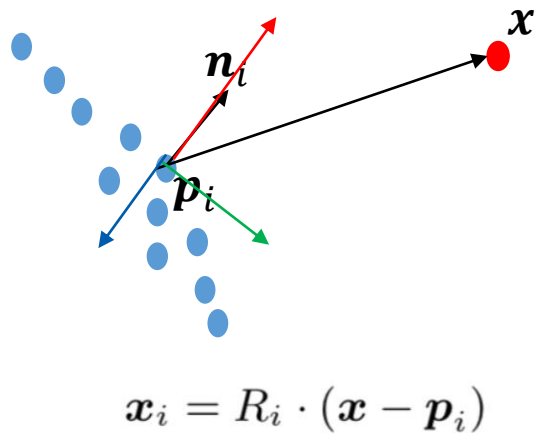
$$w_{yz}(r) = \begin{cases} \frac{2}{27} \frac{r^3}{\sigma^3} - \frac{1}{3} \frac{r^2}{\sigma^2} + 1 & r < 3\sigma \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

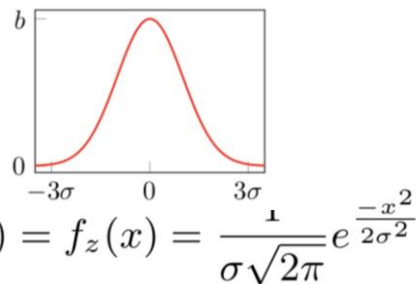
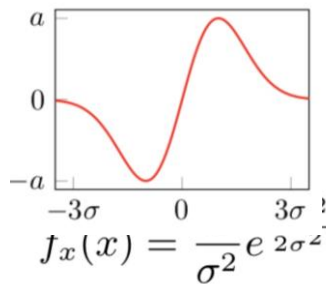
基于隐函数的三维模型重建

符号距离场的构建-局部的方法

符号距离函数



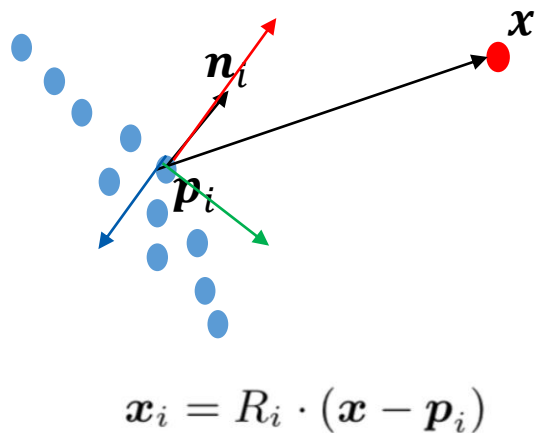
$$f(x_i) = f_x(x)f_y(y)f_z(z) = \frac{x}{\sigma^4 2\pi} \cdot e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x^2+y^2+z^2)}$$



基于隐函数的三维模型重建

符号距离场的构建-局部的方法

权重函数

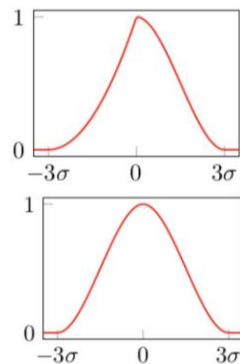


$$w(x_i) = w_x(x) \cdot w_{yz}(\sqrt{y^2 + z^2})$$

$$w_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{2}{3} \frac{x}{\sigma} + 1 & x \in [-3\sigma, 0) \\ \frac{2}{27} \frac{x^3}{\sigma^3} - \frac{1}{3} \frac{x^2}{\sigma^2} + 1 & x \in [0, 3\sigma) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

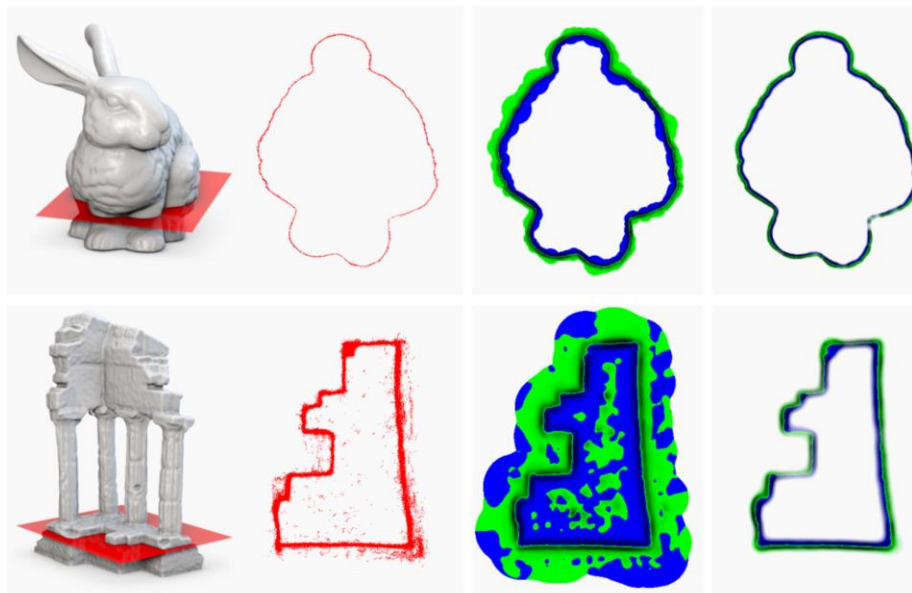
$$w_{yz}(r) = \begin{cases} \frac{2}{27} \frac{r^3}{\sigma^3} - \frac{1}{3} \frac{r^2}{\sigma^2} + 1 & r < 3\sigma \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}.$$



基于隐函数的三维模型重建

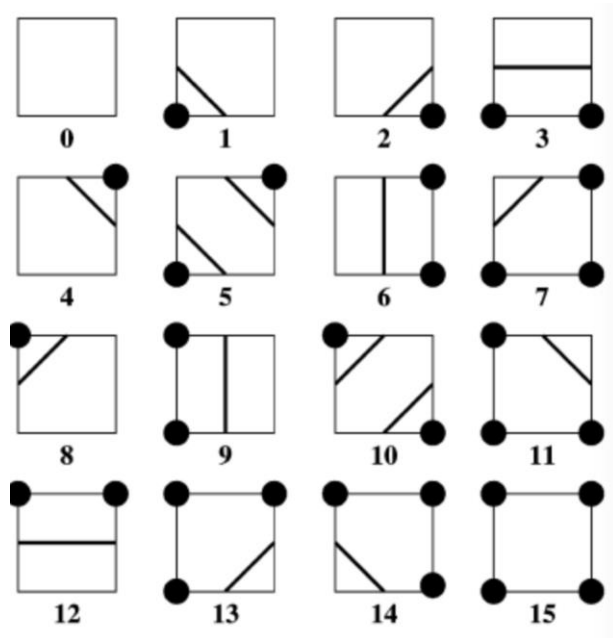
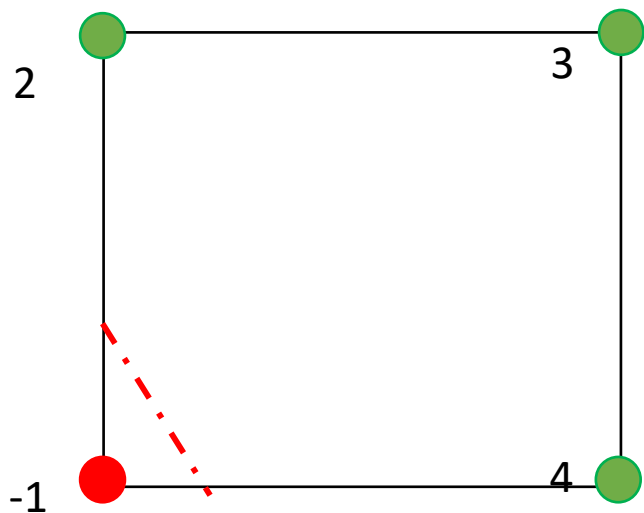
符号距离场的构建-局部的方法



基于隐函数的三维模型重建

Marching Cube生成表面(二维)

根据四边形的4个顶点的符号距离值，通过插值的方法生成直线段

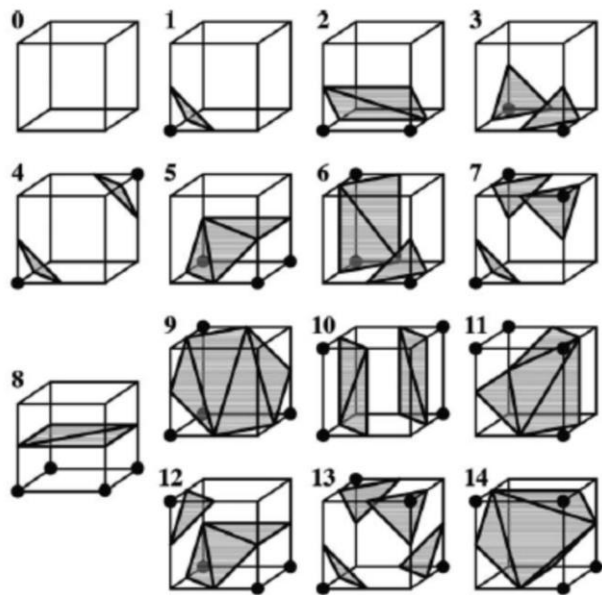


二维一共有
16种情况

基于隐函数的三维模型重建

Marching Cube生成表面

根据体素的8个顶点的符号距离值，通过插值的方法生成面片

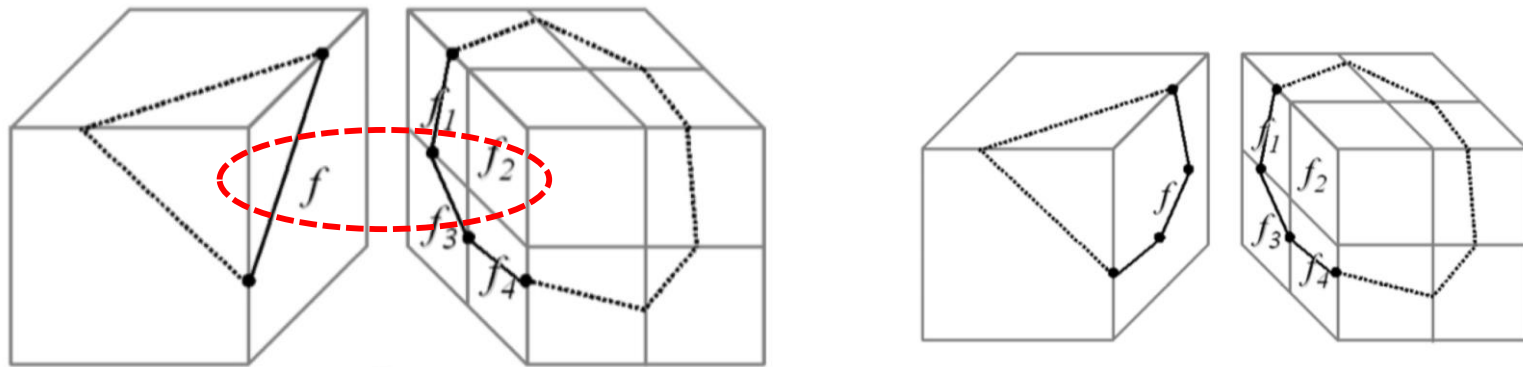


三维一共有256种情况

基于隐函数的三维模型重建

针对Octree的Marching Cube

相邻体素分辨率不同，导致出现空洞



基于隐函数的三维模型重建

常用的表面重建算法

泊松表面重建算法 <http://hhoppe.com/proj/poissonrecon/>

Fssr重建算法 <http://mesh.brown.edu/ssd/paper.html>

Ssd 重建算法 <http://www.regard3d.org/index.php/documentation/details/surface>



深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听!

Thanks for Listening