

# Indice globale di definizioni, teoremi, proposizioni, lemmi, osservazioni, corollari, esempi, esercizi per fisica II, 2015-2016

## Indice

### Serre: Rappresentazioni lineari di gruppi finiti, 1971

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | Generalità sulle rappresentazioni . . . . .               | 1 |
| 2 | Teoria dei caratteri . . . . .                            | 1 |
| 3 | Sottogruppi, prodotti, rappresentazioni indotte . . . . . | 2 |
| 5 | Esempi . . . . .  | 2 |

### Vinberg: Rappresentazioni lineari di gruppi, 1989

|   |   |   |
|---|---|---|
| 0 | Nozioni di base . . . . .   | 3 |
| 1 | Sottospazi invarianti . . . . .   | 3 |
| 2 | Completa riducibilità delle rappresentazioni di gruppi compatti . . . . . | 4 |
| 3 | Operazioni di base sulle rappresentazioni . . . . .                       | 5 |
| 4 | Proprietà delle rappresentazioni irriducibili complesse . . . . .         | 6 |
| 5 | Scomposizione della rappresentazione regolare . . . . .                   | 7 |
| 6 | Relazioni di ortogonalità . . . . .                                       | 8 |
| 7 | I gruppi $SU_2$ e $SO_3$ . . . . .  | 8 |

### Bracci: Appunti del corso Metodi matematici per la Fisica I, 2004

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 1     | Spazi normati e con prodotto scalare . . . . .           | 9  |
| 1.1   | Definizioni e proprietà elementari . . . . .             | 9  |
| 1.2   | Topologia . . . . .                                      | 9  |
| 1.3   | Spazi di Banach . . . . .                                | 9  |
| 1.4   | Prodotti scalari . . . . .                               | 10 |
| 1.5   | Proprietà elementari degli spazi di Hilbert . . . . .    | 10 |
| 2     | Equazioni differenziali alle derivate parziali . . . . . | 10 |
| 2.1   | Serie di Fourier . . . . .                               | 10 |
| 2.2   | Problema ai limiti per il quadrato . . . . .             | 29 |
| 2.3   | Problema ai limiti per il cerchio . . . . .              | 33 |
| 2.3.3 | Funzioni armoniche . . . . .                             | 11 |
| 2.3.4 | Lemma di Green e sue conseguenze . . . . .               | 11 |
| 2.4   | Equazione delle onde . . . . .                           | 45 |
| 3     | Spazi di Hilbert ed Operatori lineari . . . . .          | 11 |
| 3.1   | Geometria degli spazi di Hilbert . . . . .               | 11 |
| 3.2   | Operatori e funzionali lineari . . . . .                 | 12 |
| 3.3   | Proiettori . . . . .                                     | 12 |
| 3.4   | Particolari classi di operatori . . . . .                | 12 |
| 3.5   | Trasformata di Fourier . . . . .                         | 13 |
| 3.6   | Operatori chiusi e chiudibili . . . . .                  | 14 |

### Serre: Rappresentazioni lineari di gruppi finiti, 1971

#### 1 Generalità sulle rappresentazioni

|    |                                     |   |
|----|-------------------------------------|---|
| d. | rappresentazione unitaria . . . . . | 4 |
|----|-------------------------------------|---|

|    |                          |   |
|----|--------------------------|---|
| d. | rapp. regolare . . . . . | 5 |
|----|--------------------------|---|

|    |                                 |   |
|----|---------------------------------|---|
| d. | rapp. di permutazioni . . . . . | 5 |
|----|---------------------------------|---|

|    |                                 |   |
|----|---------------------------------|---|
| d. | sottorappresentazione . . . . . | 5 |
|----|---------------------------------|---|

|    |  |   |
|----|--|---|
| T. | (1) un sottospazio stabile ha un complemento stabile . . . . . | 6 |
|----|--|---|

|    |                         |   |
|----|-------------------------|---|
| d. | somma diretta . . . . . | 7 |
|----|-------------------------|---|

|    |                              |   |
|----|------------------------------|---|
| d. | rapp. irriducibile . . . . . | 7 |
|----|------------------------------|---|

|    |   |   |
|----|---|---|
| T. | (2) le rapp. si scompongono in rapp. irr. . . . . | 7 |
|----|---|---|

|    |                               |   |
|----|-------------------------------|---|
| d. | prodotto tensoriale . . . . . | 8 |
|----|-------------------------------|---|

|    |   |   |
|----|---|---|
| d. | prodotto tensoriale di rapp. (su un gruppo) . . . . . | 8 |
|----|---|---|

|    |  |   |
|----|--|---|
| d. | quadrati simmetrico e alternante . . . . . | 9 |
|----|--|---|

## 2 Teoria dei caratteri

|    |                     |    |
|----|---------------------|----|
| d. | carattere . . . . . | 10 |
|----|---------------------|----|

|    |   |    |
|----|---|----|
| P. | (1) proprietà di base del carattere . . . . . | 10 |
|----|---|----|

|    |                              |    |
|----|------------------------------|----|
| d. | funzione di classe . . . . . | 11 |
|----|------------------------------|----|

|    |  |    |
|----|--|----|
| P. | (2) carattere della somma e del prodotto . . . . . | 11 |
|----|--|----|

|    |   |    |
|----|---|----|
| P. | (3) carattere dei quadrati simm. e alt. . . . . | 11 |
|----|---|----|

|    |   |    |
|----|---|----|
| E. | (1) carattere dei quadrati simm. e alt. della somma . . . . . | 12 |
|----|---|----|

|    |  |    |
|----|--|----|
| E. | (2) carattere della rapp. di perm. . . . . | 12 |
|----|--|----|

|    |                           |    |
|----|---------------------------|----|
| E. | (3) rapp. duale . . . . . | 12 |
|----|---------------------------|----|

|    |   |    |
|----|---|----|
| E. | (4) rapp. sugli omomorfismi tra spazi di rappresentazione . . . . . | 12 |
|----|---|----|

|    |                              |    |
|----|------------------------------|----|
| P. | (4) lemma di Schur . . . . . | 13 |
|----|------------------------------|----|

|    |                                       |    |
|----|---------------------------------------|----|
| C. | (1) applicazione alla media . . . . . | 13 |
|----|---------------------------------------|----|

|    |   |    |
|----|---|----|
| C. | (2) media del prodotto dei coefficienti di matrici di due rapp. irr. non isomorfe . . . . . | 14 |
|----|---|----|

|    |  |    |
|----|--|----|
| C. | (3) media del prodotto dei coefficienti di matrici di una rapp. irr. . . . . | 14 |
|----|--|----|

|    |  |    |
|----|--|----|
| d. | prodotto scalare sui caratteri . . . . . | 15 |
|----|--|----|

|    |  |    |
|----|--|----|
| T. | (3) ortonormalità dei caratteri irr. . . . . | 15 |
|----|--|----|

|    |  |    |
|----|--|----|
| T. | (4) calcolo del numero di componenti irr. isomorfe a una data rapp. irr. . . . . | 16 |
|----|--|----|

|    |   |    |
|----|---|----|
| C. | (1) la scomposizione in rapp. irr. è unica a meno di ordine e isomorfismi . . . . . | 16 |
|----|---|----|

|    |   |    |
|----|---|----|
| C. | (2) rapp. con lo stesso carattere sono isomorfe . . . . . | 16 |
|----|---|----|

|  |    |  |    |
|--|----|--|----|
| T. (5) criterio di irriducibilità .....  | 17 | E. (2a) le rapp. irr. sono omotetie sul centro .....   | 26 |
| d. orbita .....  | 17 | E. (2b) limite superiore al grado di una rapp. irr. dato il centro .....   | 26 |
| d. transitività .....  | 17 | d. rapp. fedele .....  | 26 |
| E. (6a) la rapp. di perm. contiene rapp. unitarie quante le orbite .....   | 17 | E. (2c) rapp. fedele implica centro ciclico .....  | 26 |
| E. (6b) carattere della rapp. di perm. sul prodotto cartesiano .....   | 17 | E. (3) gruppo duale .....  | 26 |
| d. doppia transitività .....   | 17 | d. gruppo prodotto .....   | 26 |
| E. (6c) fatti equivalenti alla doppia transitività .....   | 17 | d. prodotto diretto di sottogruppi .....   | 27 |
| P. (5) carattere della rapp. reg. ....   | 18 | d. prodotto tensoriale di rapp. (su gruppi diversi) .....  | 27 |
| C. (1) scomposizione della rapp. reg. ....   | 18 | T. (10i) irriducibilità del prodotto di irriducibili .....   | 27 |
| C. (2) relazione sui gradi delle rapp. irr. ....   | 18 | T. (10ii) tutti gli irriducibili sul prodotto sono prodotto di irriducibili .....  | 27 |
| P. (6) somma lungo il gruppo di una funzione di classe per una rapp. irr. ....   | 19 | d. classe laterale sinistra .....  | 28 |
| d. spazio delle funzioni di classe .....   | 19 | d. congruenza modulo un sottogruppo .....  | 28 |
| T. (6) i caratteri delle rapp. irr. sono una base delle funzioni di classe .....   | 19 | d. quoziente su un sottogruppo .....   | 28 |
| T. (7) numero di rapp. irr. ....   | 19 | d. rapp. indotta .....   | 28 |
| P. (7) relazioni sulla grandezza delle classi e sui caratteri irr. ....  | 20 | X. (1) induzione della rapp. reg. ....   | 29 |
| d. scomposizione canonica .....  | 21 | X. (2) la rapp. unitaria induce la rapp. di perm. sul quoziente .....  | 29 |
| T. (8) proiezioni sulla scomposizione canonica .....   | 21 | X. (3) l'induzione della somma è la somma degli indotti ..   | 29 |
| E. (8a) dimesione dello spazio delle applicazioni lineari dallo spazio di rappresentazione di una componente irr. a quello della rapp. scomposta che commutano con la rapp. .... | 22 | X. (4) sottorapp. indotta .....  | 29 |
| E. (8b) isomorfismo tra il prodotto della comp. irr. con lo spazio dell'es. (8a) e la corrispondente comp. canonica .....  | 22 | X. (5) induzione del prodotto tensore su un fattore .....  | 29 |
| P. (8) scomposizione di una comp. canonica .....   | 23 | L. (1) una mappa da uno spazio di rappresentazione a un altro che porta fuori la rapp. si estende univocamente alla rapp. indotta .....                              | 29 |
| E. (9) isomorfismo tra lo spazio dell'es. 8a e il sottospazio della comp. canonica associato alla mappa della prop. 8 .....  | 24 | T. (11) esistenza e unicità della rapp. indotta .....  | 30 |
| E. (10) sottorapp. minima per un punto .....   | 24 | T. (12) carattere di una rapp. indotta .....   | 30 |
| <b>3 Sottogruppi, prodotti, rappresentazioni indotte</b>   |    | E. (4) le rapp. irr. sono contenute in indotte di rapp. irr. di sottogruppi .....  | 31 |
| d. gruppo abeliano .....   | 25 | E. (5) induzione attraverso isomorfismo allo spazio di funzioni dal gruppo allo spazio di rappresentazione che portano fuori la rapp. ....                           | 31 |
| T. (9) abeliano equivale ad avere rapp. irr. solo di grado 1 ..  | 25 | E. (6) la rapp. sul prodotto diretto indotta da una rapp. del primo fattore è isomorfa al prodotto della rapp. del primo fattore con la rapp. reg. del secondo ..... | 31 |
| d. indice di un sottogruppo .....  | 25 | <b>5 Esempi</b>  |    |
| C. limite superiore ai gradi delle rapp. irr. dato un sottogruppo abeliano .....   | 25 | X. (1) gruppo ciclico .....  | 35 |
| E. (1) anche i gruppi abeliani infiniti hanno rapp. irr. solo di grado 1 .....   | 26 | X. (2) rotazioni sul piano .....   | 36 |
| d. centro di un gruppo .....   | 26 | X. (3) gruppo diedrale .....   | 36 |
|  |    | E. (1) classi di coniugio del gruppo diedrale .....  | 38 |
|  |    | E. (2) prodotto di caratteri e caratteri dei quadrati simmetrico e alternante (sul gruppo diedrale) .....  | 38 |

|  |    |   |    |
|--|----|---|----|
| E. (3) riducibilità e carattere della rapp. usuale del gruppo diedrale   | 38 | d. rapp. regolari destra e sinistra   | 10 |
| X. (4) gruppo diedrale più riflessioni per l'origine   | 40 | O. (0.10) la composizione di una rapp. con un omomorfismo è una rapp.                                       | 10 |
| X. (5) rotazioni e riflessioni sul piano   | 39 | X. restrizione come composizione con omomorfismo  | 10 |
| X. (6) rotazioni e riflessioni sul piano più riflessioni per l'origine   | 40 | X. (1) la composizione con il coniugio è una rapp. isomorfa   | 10 |
| X. (7) gruppo alternante   | 41 | E. (1) $\det e^A = e^{\text{tr } A}$  | 11 |
| d. prodotto semidiretto di sottogruppi   | 41 | E. (2a) trovare $A$ tale che $e^{xA}$ è un boost  | 11 |
| E. (4) induzione della rapp. irr. di grado 3 del gruppo alternante dal sottogruppo di elementi di ordine 2                             | 41 | E. (2b) trovare $A$ tale che $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$                        | 11 |
| X. (8) gruppo simmetrico   | 42 | E. (3) caratterizzare le rapp. matriciali unidimensionali   | 11 |
| X. (9) gruppo del cubo   | 43 | E. (4) mostrare che la traccia della rapp. dell'esempio 0.2 è il numero di punti fissati dalla permutazione | 11 |
| E. (4) decomposizione semidiretta del gruppo del cubo con il gruppo simmetrico 3 passando da quella diretta con il gruppo simmetrico 4 | 43 | E. (5) caratterizzare le rapp. matriciali triviali di un gruppo arbitrario                                  | 11 |
| E. (5) isomorfismo tra il gruppo di rotazioni del cubo e il gruppo simmetrico 4  | 43 | E. (6) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^AC$ , $C$ invertibile  | 11 |

## Vinberg: Rappresentazioni lineari di gruppi, 1989

### 0 Nozioni di base

|   |   |
|---|---|
| X. rotazioni come omomorfismo di $\mathbb{R}$ in $GL_2(\mathbb{R})$   | 2 |
| X. (0.2) omomorfismo di $S_n$ in $GL_n$ usando la base canonica   | 2 |
| d. (0.3) rappresentazione matriciale  | 3 |
| d. nucleo   | 3 |
| d. rapp. fedele   | 3 |
| d. rapp. triviale   | 4 |
| d. rapp. lineare  | 4 |
| d. equivalenza di rapp. matriciali  | 5 |
| d. isomorfismo di rapp. lineari   | 5 |
| X. (1) rapp. di $\mathbb{R}$ con le rotazioni   | 6 |
| X. (2) rapp. di $\mathbb{R}$ sullo spazio dei polinomi  | 7 |
| X. (3) rapp. di $\mathbb{R}$ sullo spazio di (a) funzioni continue (b) polinomi di grado limitato (c) polinomi in $\sin$ e $\cos$ (d) span di $\sin$ e $\cos$ | 7 |
| d. azione   | 7 |
| d. traslazioni a destra e a sinistra  | 8 |
| d. (0.9) rapp. lineare associata a un'azione  | 8 |
| X. (1) rapp. associata all'azione del gruppo delle rotazioni del cubo sulle facce   | 9 |
| X. (2) isomorfismo tra la rapp. associata all'azione naturale di $S_n$ e la rapp. dell'esempio 0.2  | 9 |

|  |    |
|--|----|
| E. (11) l'azione sull'identità è l'identità  | 12 |
| E. (12) le iperboli con asintoti paralleli agli assi con coefficienti da una matrice inducono un'azione da $GL_2(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ | 12 |
| E. (13) formula esplicita per la rapp. reg. destra   | 12 |
| E. (14) le rapp. reg. destra e sinistra sono isomorfe  | 12 |
| E. (15) ogni gruppo ha una rapp. lineare fedele  | 12 |
| E. (16) le rapp. di $\mathbb{Z}$ sono restrizioni di rapp. di $\mathbb{C}$ ?   | 12 |
| E. (17) trovare le rapp. complesse di grado finito di $\mathbb{Z}_m$ che rimangono isomorfe per inversione dell'asse   | 12 |

### 1 Sottospazi invarianti

|  |    |
|--|----|
| d. (1.1) sottospazio invariante sotto rapp.  | 13 |
| X. i polinomi di grado limitato sono sottospazi invarianti per la rapp. di $\mathbb{R}$ come traslazioni | 13 |
| O. invarianza di somme e intersezioni di sottospazi invarianti   | 13 |
| X. forma della rapp. matriciale con base estesa da un sottospazio invariante                             | 14 |
| d. (1.2) sottorappresentazione e rapp. quoziente   | 14 |
| X. forma matriciale delle sottorapp. e rapp. quoziente   | 14 |
| d. (1.3) rapp. irriducibile  | 15 |
| X. (1) irriducibilità delle rapp. unidimensionali  | 15 |
| X. (2) irr. della rapp. identica di $GL(V)$  | 15 |
| X. (3) irr. della rapp. di $\mathbb{R}$ come rotazioni   | 15 |
| X. (4) irr. della rapp. di $\mathbb{R}$ come traslazioni di polinomi                                     | 15 |

|   |    |
|---|----|
| X. (5) irr. delle rapp. monomiali di $S_n$ .....  | 15 |
| d. (1.4) rapp. completamente riducibile .....   | 16 |
| O. le rapp. irr. sono compl. rid. ....  | 16 |
| X. isomorfismo tra la sottorapp. su un sottospazio complementare e la rapp. quoziente, e descrizione matriciale .....   | 16 |
| T. (1) le sottorapp. di una rapp. compl. rid. sono compl. rid. ....   | 17 |
| T. (2) lo spazio di rappresentazione di una rapp. compl. rid. di grado finito è somma diretta di sottospazi invarianti minimali .....   | 18 |
| T. (3) se una rapp. è somma di finiti sottospazi invarianti minimali allora, dato un sottospazio invariante, è somma diretta di alcuni di essi e del sottospazio .....                                | 18 |
| O. (1) applicare il teorema 3 con un sottospazio nullo ...  | 19 |
| O. (2) sotto le ipotesi del teorema 3, un sottospazio invariante non è necessariamente somma di quelli minimali dati .....  | 19 |
| X. (1) rapp. di $GL(V)$ in $L(V)$ con moltiplicazione a sinistra .....  | 19 |
| X. (2) rapp. di $GL(V)$ in $L(V)$ con il coniugio .....   | 19 |
| X. (3) rapp. naturale di $GL(V)$ in $B(V)$ .....  | 20 |
| E. (1) l'azione della rapp. su un sottospazio invariante è l'identità .....   | 21 |
| E. (2) trovare i sottospazi dei polinomi invarianti per rapp. di $\mathbb{R}$ come traslazioni .....  | 21 |
| E. (3) trovare i sottospazi invarianti nella rapp. esponenziale di $\mathbb{C}$ dove l'esponente non ha radici multiple nel polinomio caratteristico .....  | 21 |
| E. (5) le sottorapp. sui complementi dello stesso sottospazio invariante sono isomorfe .....  | 21 |
| E. (6) le rapp. quoziente di una rapp. compl. rid. sono compl. rid. ....  | 21 |
| E. (7) dire se è compl. rid. (a) la rapp. di $\mathbb{R}$ come traslazioni di polinomi (b) la rapp. esponenziale di $\mathbb{C}$ senza radici multiple nel polinomio caratteristico dell'esponente .. | 21 |
| E. (8) la rapp. esponenziale di $\mathbb{C}$ è compl. rid. se e solo se l'esponente è diagonalizzabile .....  | 21 |
| E. (9) la rapp. identica del gruppo ortogonale è irr. ....  | 21 |
| E. (10) le rapp. monomiali di $S_n$ su un campo a caratteristica zero sono compl. rid. ....   | 21 |
| E. (11) la restrizione ad $A_n$ della sottorapp. sui vettori con somma dei coefficienti nulla della rapp. monomiale di $S_n$ è irr. per $n \geq 4$ .....  | 21 |
| E. (12) i sottospazi invarianti di rapp. di grado finito compl. rid. sono somma diretta di sottospazi invarianti minimali della decomposizione analoga della rapp. ....                               | 21 |
| E. (14) sottospazi invarianti della rapp. di $GL(V)$ in $L(V)$ con il coniugio .....  | 22 |

|  |    |
|--|----|
| E. (15) le funzioni commutative e anticommutative sono sottospazi invarianti minimali per rapp. di $GL(V)$ di $B(V)$ ..... | 22 |
|--|----|

## 2 Completa riducibilità delle rappresentazioni di gruppi compatti

|  |    |
|--|----|
| d. invarianza di una funzione sotto rapp. ....   | 22 |
| d. rapp. ortogonale e rapp. unitaria .....   | 22 |
| P. le rapp. ortogonali e unitarie sono compl. rid. ....  | 23 |
| T. (1) le rapp. di gruppi finiti sono ortogonali/unitarie ..   | 23 |
| C. le rapp. reali/complesse di gruppi finiti sono compl. rid. ....   | 24 |
| d. (2.4) gruppo topologico .....   | 24 |
| X. (1) gruppo con topologia discreta .....   | 24 |
| X. (2) topologia di $GL(V)$ .....  | 24 |
| X. (3) sottogruppi topologici .....  | 24 |
| d. gruppo compatto .....   | 24 |
| X. (1) gruppo finito con topologia discreta .....  | 24 |
| X. (2) gruppo ortogonale .....   | 24 |
| X. (3) gruppo unitario .....   | 24 |
| X. (4) sottogruppi chiusi di gruppi compatti .....   | 24 |
| P. compattezza del gruppo ortogonale .....   | 24 |
| d. rapp. continua .....  | 25 |
| X. (1) rapp. reali/complesse di gruppi con topologia discreta .....  | 25 |
| X. (2) le rapp. di $GL(V)$ in $L(V)$ per moltiplicazione a destra e coniugio e in $B(V)$ naturale con $V$ reale/complesso sono continue .....                        | 25 |
| T. (2) le rapp. di un gruppo compatto sono ortogonali/unitarie .....   | 25 |
| C. le rapp. reali/complesse di un gruppo compatto sono compl. rid. ....  | 26 |
| d. integrazione invariante normalizzata su un gruppo compatto .....  | 26 |
| X. (1) integrazione sui gruppi finiti .....  | 26 |
| X. (2) integrazione su $U_1$ .....   | 26 |
| X. (3) integrazione su $SU_2$ attraverso $S^3$ .....   | 26 |
| T. (2.6, 2.7) dimostrazione alternativa del teorema 2 ...  | 27 |
| E. (1) gli autovalori complessi di una rapp. ortogonale/unitaria hanno modulo 1 .....  | 29 |
| E. (2) dare un esempio di rapp. complessa non unitaria di $\mathbb{Z}$ .....   | 29 |
| E. (3) trovare un prodotto scalare invariante per la rapp. reale di $\mathbb{Z}_3$ che manda il generatore in $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ..... | 30 |
| E. (4) dire se sono compatti: $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Z}_m$ , $\mathbb{T}$ , $SL_n(\mathbb{R})$ .....  | 30 |

- E. (5) la continuità di una rapp. reale/complessa passa alle sottorapp. e rapp. quoziente ..... 30
- E. (6) la rapp. di  $GL(V)$  in  $L(V)$  con il coniugio,  $V$  reale/complesso, è continua ..... 30

### 3 Operazioni di base sulle rappresentazioni

- d. (3.1) rapp. duale ..... 30
- X. forma matriciale della rapp. duale ..... 31
- O. le rapp. ortogonali sono isomorfe alla duale ..... 31
- O. ogni rapp. è isomorfa alla biduale ..... 31
- T. (1) la duale di una rapp. irr. di grado finito è irr. .... 31
- d. annullatore ..... 31
- d. (3.2) somma di rapp. .... 32
- X. forma matriciale della somma di rapp. .... 32
- T. (2) compl. rid. di grado finito equivale a somma di rapp. irr. (a meno di isomorfismi) ..... 32
- T. (3) se una rapp. è isomorfa a una somma di rapp. irr. allora le sue sottorapp. e rapp. quoziente sono isomorfe a somme di alcune delle rapp. irr. .... 33
- C. se le sottorapp. su finiti sottospazi minimali invarianti sono a coppie non isomorfe, i sottospazi sono indipendenti 33
- T. (4) la scomposizione in rapp. irr. è unica a meno di ordine e isomorfismi ..... 33
- d. (3.3) prodotto di rapp. .... 34
- X. forma matriciale del prodotto di rapp. .... 34
- X. (1) prodotto con una rapp. triviale ..... 35
- X. (2) prodotto con la duale ..... 36
- X. (3) quadrato della duale ..... 36
- X. (4) prodotto con una rapp. monodimensionale ..... 36
- O. il prodotto di irr. non è necessariamente irr. .... 36
- d. (3.4) prodotto tensoriale di rapp. .... 37
- X. forma matriciale del prodotto tensoriale ..... 37
- X. prodotto tensoriale con la duale ..... 37
- d. (3.5) estensione del campo di base ..... 38
- d. (3.6) complessificazione ..... 38
- X. complessificazione della rapp. di  $\mathbb{R}$  come rotazioni ... 38
- T. (5) rapp. reali di grado finito sono isomorfe se e solo se lo sono le complessificazioni ..... 39
- O. (3.7) la complessificazione di un sottospazio invariante è un sottospazio invariante della complessificata ..... 39
- d. coniugazione di vettori ..... 39
- O. la coniugazione è antilineare ..... 39

- L. un sottospazio della complessificata è complessificazione di un sottospazio se e solo se è uguale al coniugato . 40
- O. la somme e l'intersezione con il coniugato sono uguali ai loro coniugati ..... 40
- T. (6) la complessificata di una rapp. irr. è o irr. o somma di due rapp. irr. con spazi coniugati ..... 40
- X. (2) rapp. fedele di  $S_3$  con un triangolo ..... 40
- d. (3.7) sollevamento e fattorizzazione di rapp. .... 41
- O. bigezione tra le rapp. del quoziente e le rapp. il cui nucleo contiene il sottogruppo normale ..... 41
- X. (1)  $SL_n$  è normale ed è nucleo del determinante .... 41
- X. (2) gruppo di Klein ..... 42
- X. (3) tutte le rapp. di  $\mathbb{Z}_m$  fattorizzando quelle di  $\mathbb{Z}$  .... 42
- d. sottogruppo commutatore ..... 42
- O. ogni rapp. monodimensionale è sollevamento di una rapp. monodimensionale del quoziente sul commutatore .. 42
- X. tutte le rapp. monodimensionali di  $S_n$  ..... 43
- E. (1) descrivere la duale di una rapp. triviale ..... 43
- E. (2) irriducibilità della duale implica irriducibilità ..... 43
- E. (3) il passaggio alla duale commuta con la somma ... 43
- E. (4) la completa irriducibilità passa alla duale ..... 43
- E. (5) la rapp. identica di  $SL_2$  è isomorfa alla duale ..... 43
- E. (6) ogni rapp. compl. rid. è isomorfa alla somma della sottorapp. e della rapp. quoziente su uno stesso sottospazio invariante ..... 43
- E. (7) regola di cancellazione per la somma di rapp. compl. rid. di grado finito ..... 43
- E. (8) il prodotto di rapp. commuta con la somma ..... 43
- E. (9) il prodotto di rapp. è commutativo ..... 43
- E. (10) descrizione matriciale del quadrato di una rapp. . 44
- E. (11) il prodotto di due rapp. esponenziali di  $\mathbb{C}$  è una rapp. esponenziale; trovare l'esponente ..... 44
- E. (12) il prodotto di una rapp. irr. con una monodimensionale è irr. .... 44
- E. (13) esplicitare la forma del prodotto tensoriale con la duale senza usare la forma matriciale ..... 44
- E. (14) forma matriciale del quadrato tensoriale e confronto con il quadrato ..... 44
- E. (15) la complessificata di una rapp. irr. di grado dispari è irr. .... 44
- E. (16) trovare le rapp. di grado finito di  $O_n$  i cui nuclei contengono  $SO_n$  ..... 44
- E. (17) trovare le rapp. monodimensionali di  $A_4$  ..... 44
- E. (18)  $SL_n$  è il commutatore di  $GL_n$  ..... 44

#### 4 Proprietà delle rappresentazioni irriducibili complesse

- d. (4.1) morfismo di rapp. .... 44
- X. la proiezione su un sottospazio invariante parallela a un suo complemento invariante è un morfismo dalla rapp. alla sottorapp. .... 45
- O. il nucleo e l'immagine di un morfismo sono sottospazi invarianti .... 45
- T. (1) i morfismi di rapp. irr. sono isomorfismi o nulli ... 45
- T. (2) se lo spazio di una rapp. si scompone in sottospazi invarianti minimali tali che le sottorapp. sono a coppie non isomorfe, allora ogni altro sottospazio invariante è somma di alcuni di essi .... 45
- d. (4.2) endomorfismo di rapp. .... 45
- T. (3) lemma di Schur .... 46
- C. tutti i morfismi di due rapp. irr. complesse isomorfe sono isomorfismi multipli tra loro .... 46
- T. (4) tutti i sottospazi del prodotto tensoriale dello spazio di una rapp. irr. complessa con quello di una triviale invarianti per il prodotto delle rapp. e minimali sono prodotti tensoriali dello spazio della rapp. irr. con un vettore nello spazio della triviale .... 46
- T. (5) le rapp. irr. complesse di un gruppo abeliano sono monodimensionali .... 47
- C. ogni rapp. complessa di un gruppo abeliano ha un sottospazio invariante minimale .... 47
- T. (6) il prodotto tensoriale di due rapp. irr. complesse è irr. .... 47
- T. ogni rapp. irr. complessa del prodotto di due gruppi è il prodotto tensoriale di due rapp. irr. dei gruppi ..... 48
- d. (4.5) elementi matriciali di una rapp. .... 48
- d. spazio dei coefficienti matriciali .... 48
- P. (1) gli spazi dei coeff. mat. di rapp. isomorfe sono uguali .... 48
- P. (2) lo spazio dei coeff. mat. di una somma di rapp. è la somma dei rispettivi spazi di coeff. mat. .... 48
- d. rapp. regolare (bilatera) .... 49
- T. (7) isomorfismo tra il prodotto tensoriale di una rapp. irr. complessa con la duale e la rapp. reg. ristretta allo spazio dei coeff. mat. .... 49
- C. (1) dimensione dello spazio dei coeff. mat. .... 49
- C. (2) isomorfismo tra il prodotto di una rapp. triviale con la duale di una rapp. irr. complessa e la rapp. reg. sinistra ristretta allo spazio dei coeff. mat. della rapp. irr.; isomorfismo tra il prodotto di una rapp. irr. complessa con la duale di una triviale e la rapp. reg. destra ristretta allo spazio dei coeff. mat. della rapp. irr. .... 50
- C. (3) la rapp. reg. sinistra ristretta allo spazio dei coeff. mat. di una rapp. irr. complessa è isomorfa a un multiplo della duale della rapp. irr.; per la rapp. reg. destra vale con un multiplo della rapp. irr. .... 50
- C. (4) le rapp. reg. ristrette agli spazi dei coeff. mat. di due rapp. irr. complesse non isomorfe non sono isomorfe 50
- C. (5) gli spazi dei coeff. mat. di rapp. irr. complesse a coppie non isomorfe sono indipendenti .... 50
- X. scomposizione dello spazio dei coeff. mat. in una somma diretta di sottospazi invarianti per rapp. reg. sinistra o destra minimali .... 50
- X. rapp. monodimensionali esponenziali di un gruppo ciclico .... 51
- L. dati due prodotti hermitiani esiste un operatore lineare che applicato al primo fattore di un prodotto lo trasforma nell'altro .... 51
- T. (8) il prodotto hermitiano invariante di una rapp. irr. unitaria è unico a meno di un fattore costante ..... 52
- T. (9) spazi invarianti minimali con sottorapp. non isomorfe di una rapp. unitaria sono ortogonali rispetto a qualunque prodotto hermitiano invariante .... 52
- E. (1) l'immagine attraverso morfismo di rapp. di un sottospazio invariante è un sottospazio invariante ... 52
- E. (2) gli endomorfismi della rapp. monomiale di  $S_n$  ristretta a un sottogruppo doppiamente transitivo sono combinazione lineare dell'identità e dell'operatore che manda la base nella somma della base .... 53
- E. (3) dimensione dello spazio dei morfismi da una combinazione lineare a coefficienti naturali a un'altra di rapp. irr. complesse a coppie non isomorfe .... 53
- E. (4) la sottorapp. monomiale sul sottospazio di vettori con somma delle componenti nulla ristretta a un sottogruppo doppiamente transitivo è irr. .... 53
- E. (5) trovare gli automorfismi della rapp. di  $\mathbb{R}$  come rotazioni .... 53
- E. (6) nello spazio di una rapp. complessa di un gruppo abeliano c'è una base che triangolarizza la rapp. .... 53
- E. (7) le rapp. irr. reali di un gruppo abeliano sono al più bidimensionali .... 53
- E. (8) la rapp. reg. destra di un gruppo finito è isomorfa alla somma di tutte (a meno di isomorfismi) le rapp. irr. del gruppo moltiplicate per il loro grado .... 53
- E. (9) i sottospazi del prodotto tensoriale dello spazio di una rapp. irr. complessa con quello di una triviale invarianti per il prodotto delle rapp. sono prodotti tensoriali dello spazio della rapp. irr. con un sottospazio della triviale 53
- E. (10) gli elementi matriciali di una rapp. irr. complessa sono indipendenti; è vero anche per una reale? .... 53
- E. (11) lo span dell'immagine di una rapp. irr. complessa è  $L(V)$  .... 53
- E. (12) le rapp. irr. sono isomorfe a una sottorapp. della rapp. reg. destra .... 53

- E. (13) le rapp. irr. sono isomorfe a una sottorapp. della rapp. reg. sinistra ..... 53
- E. (14) dimostrare i corollari 4 e 5 su campi arbitrari .... 54
- E. (15) il prodotto scalare invariante di una rapp. irr. ortogonale è unico a meno di un fattore costante positivo ..... 54

## 5 Scomposizione della rappresentazione regolare

- T. (1) le rapp. irr. complesse di un gruppo finito sono finite a meno di isomorfismi ..... 55
- T. (2) lo spazio delle funzioni a valori complessi da un gruppo finito è la somma diretta degli spazi dei coeff. mat. delle rapp. irr. complesse del gruppo ..... 56
- C. (1) la somma dei quadrati dei gradi delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito è l'ordine del gruppo . 56
- C. (2) le rapp. reg. destra e sinistra di un gruppo finito sono isomorfe alla somma delle rapp. irr. complesse del gruppo moltiplicate per il loro grado ..... 57
- X. (1) il numero di rapp. irr. complesse di un gruppo finito abeliano è l'ordine del gruppo ..... 57
- X. (2) rapp. irr. complesse di  $S_3$  ..... 57
- d. (5.3) carattere di una rapp. .... 57
- X. (1) carattere di una rapp. monodimensionale ..... 57
- X. (2) carattere di una rapp. triviale ..... 57
- X. (3) carattere della rapp. di  $\mathbb{R}$  come rotazioni ..... 57
- X. (4) carattere della rapp. monomiale di  $S_n$  ..... 58
- X. (5) carattere della rapp. di  $S_3$  con un triangolo ..... 58
- O. i caratteri di rapp. isomorfe sono uguali ..... 58
- O. carattere della somma e del prodotto di rapp. .... 58
- X. carattere della rapp. monomiale di  $S_n$  ristretta ai valori con somma delle componenti nulla ..... 58
- O. il carattere è una funzione di classe ..... 59
- d. funzione di classe ..... 59
- O. (5.4) le funzioni di classe sono un sottospazio delle funzioni dal gruppo a valori complessi ..... 59
- O. dimensione dello spazio delle funzioni di classe ..... 59
- T. (3) i caratteri delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito sono una base delle funzioni di classe ..... 59
- L. le funzioni di classe nello spazio dei coeff. mat. di una rapp. irr. complessa di un gruppo finito sono proporzionali al carattere della rapp. .... 59
- C. (1) il numero di rapp. irr. complesse di un gruppo finito è il numero di classi di coniugio ..... 60
- C. (2) le rapp. irr. complesse di un gruppo finito sono univocamente identificate dal loro carattere (a meno di isomorfismo) ..... 60

- X. (1) numero di classi di coniugio di un gruppo abeliano finito ..... 60
- X. (2) classi di coniugio di  $S_4$  e rapp. come rotazioni di un cubo ..... 60
- d. (5.5) azione transitiva ..... 61
- X. (1) transitività della azione naturale di  $S_n$  ..... 61
- X. (2) transitività della azione di  $O_n$  sulla sfera ..... 61
- d. azione  $l^H$  di un gruppo  $G$  sulle classi laterali di  $H \subseteq G$  61
- d. stabilizzatore ..... 61
- P. ogni azione transitiva è isomorfa a un'azione  $l^H$  ..... 61
- T. (4) il sottospazio dei vettori invarianti per rapp. reg. destra di un gruppo finito ristretta a un sottogruppo  $H$  è la somma lungo le rapp. irr. complesse del gruppo delle immagini attraverso l'isomorfismo dal prodotto tensoriale con la duale allo spazio dei coeff. mat. del prodotto tensoriale del sottospazio dei vettori invarianti per la rapp. irr. complessa ristretta a  $H$  con lo spazio della duale 62
- C. la rapp. come funzioni associata a  $l^H$  è isomorfa alla somma delle rapp. irr. complesse del gruppo finito moltiplicate per la dimensione del loro sottospazio dei vettori invarianti per la rapp. irr. ristretta a  $H$  ..... 63
- L. il sottospazio massimale invariante per rapp. compl. rid. ha la stessa dimensione di quello per la duale ..... 63
- X. azione del gruppo delle rotazioni del cubo sulle facce .63
- X. (5.7) rappresentazioni di  $A_5$  ..... 64
- E. (1) trovare una base degli elementi matriciali di  $S_3$  ... 65
- E. (2) valore del carattere sull'identità ..... 65
- E. (3) calcolare i caratteri (a) delle rapp. irr. complesse di  $S_3$  (b) delle rapp. reg. sinistra e destra di un gruppo finito qualsiasi ..... 65
- E. (4) trovare le rapp. irr. complesse di  $A_4$  e i loro caratteri ..... 65
- E. (5) un gruppo con tutte le rapp. irr. complesse monodimensionali è abeliano ..... 65
- E. (6) un gruppo finito con più di due elementi ha più di due rapp. irr. complesse ..... 65
- E. (7) trovare le rapp. irr. complesse (a) del gruppo diedrale (b) del gruppo generalizzato delle unità dei quaternioni; verificare i corollari 1 dei teoremi 2 e 3 per questi esempi ..... 65
- E. (8) usando i caratteri, trovare per quali  $n$  la sottorapp. monomiale di  $S_n$  sui vettori con somma delle componenti nulla è isomorfa al suo prodotto con la rapp. di parità 65
- E. (9) l'indice di  $H$  nel gruppo finito  $G$  è la somma lungo le rapp. irr. complesse di  $G$  del grado della rapp. moltiplicato per il grado della rapp. ristretta a  $H$  ... 65
- E. (10) scomporre la rapp. come funzione associata a (a) l'azione del gruppo delle rotazioni del cubo sui vertici (b) l'azione del gruppo di simmetria completo del tetraedro sugli spigoli ..... 66

E. (11) trovare il carattere della rapp. irr. complessa di grado 5 di  $A_5$  ..... 66

E. (12) una rapp. di un gruppo finito è isomorfa alla duale se e solo se il carattere è a valori reali ..... 66

## 6 Relazioni di ortogonalità

d. prodotto hermitiano nello spazio delle funzioni da un gruppo finito a valori complessi invariante per rapp. reg. .... 66

T. (1) gli elementi matriciali delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito scritti in una base ortonormale rispetto al prodotto hermitiano invariante di ogni rapp. sono una base ortogonale delle funzioni dal gruppo a valori complessi; la norma quadra di un elemento matriciale è l'inverso della dimensione della rapp. irr. .... 67

C. (1) i caratteri delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito sono una base ortonormale delle funzioni di classe .. 68

C. (2) i coefficienti nella scomposizione in rapp. irr. di una rapp. complessa di un gruppo finito sono dati dal prodotto invariante per rapp. reg. dei caratteri ..... 68

C. (3) una rapp. complessa di un gruppo finito è irr. se e solo se il carattere ha norma 1 secondo il prodotto invariante per rapp. reg. .... 69

X. (1) matrice dei caratteri delle rapp. irr. di un gruppo abeliano finito ..... 69

X. (2) tavola dei caratteri di  $A_5$  ..... 69

E. (1) calcolare la norma quadra del carattere della rapp. reg. destra sia direttamente che usando la scomposizione in rapp. irr. .... 71

E. (2) la dimensione dello spazio dei vettori invarianti per rapp. complessa di un gruppo finito è il prodotto hermitiano del carattere della rapp. con quello identicamente unitario ..... 71

E. (3) scrivere la tavola dei caratteri di  $S_4$  e scomporre il quadrato della rapp. monomiale ristretta ai vettori con somma delle componenti nulla ..... 71

E. (4) scomporre le rapp. di  $S_4$  nello spazio delle funzioni (a) sui vertici del cubo (b) sugli spigoli del tetraedro 71

E. (5) scomporre  $L(V)$  in sottospazi minimali invarianti per il prodotto di una rapp. irr. complessa tridimensionale di  $A_5$  con la duale ..... 71

E. (6) la rapp. associata a un'azione da un gruppo finito è isomorfa alla somma lungo le orbite  $H$  delle rapp. associate alle azioni  $l^H$  ..... 71

E. (7) la somma lungo un gruppo finito di una rapp. irr. complessa moltiplicata per il carattere coniugato è l'ordine del gruppo diviso il grado della rapp. .... 71

E. (8) i gradi delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito dividono l'ordine del gruppo ..... 71

## 7 I gruppi $SU_2$ e $SO_3$

d. algebra dei quaternioni ..... 74

d. base dei quaternioni ..... 74

O. regole di moltiplicazione per la base dei quaternioni .. 74

O.  $SU_2$  come sfera nei quaternioni ..... 74

d. omomorfismo da  $SU_2$  in  $SO_3$  ..... 75

T. l'omomorfismo da  $SU_2$  in  $SO_3$  è suriettivo; nucleo dell'omomorfismo ..... 75

L. (1) un sottogruppo di  $SO_3$  che agisce transitivamente sulla sfera e contiene le rotazioni intorno a un asse è  $SO_3$  75

L. (2) ogni matrice  $2 \times 2$  hermitiana a traccia nulla è coniugata con una matrice di  $SU_2$  a una matrice diagonale a traccia nulla ..... 76

P. (7.3) isomorfismo tra  $SO_3$  e  $SU_2$  quozientato sull'identità e sul suo opposto ..... 76

d. topologia quoziente ..... 77

O. le rapp. continue di un gruppo quoziente si ottengono fattorizzando le rapp. continue del numeratore ..... 77

L. isomorfismo tra un gruppo topologico e il quoziente sul nucleo del dominio di un omomorfismo continuo al gruppo ..... 77

O.  $SO_3$  è isomorfo allo spazio proiettivo ..... 78

P. le rapp. continue di  $SO_3$  si ottengono fattorizzando le rapp. continue di  $SU_2$  il cui nucleo contiene l'opposto dell'identità ..... 78

d. rapp. di  $SL_2$  come polinomi omogenei in due variabili e restrizione a  $SU_2$  ..... 78

P. la rapp. di  $SU_2$  come polinomi omogenei in due variabili è irr. .... 78

O. la rapp. di  $SU_2$  come polinomi omogenei in due variabili si fattorizza a  $SO_3$  ..... 79

E. (1) omomorfismo da  $SU_2 \times SU_2$  in  $SO_4$  e nucleo .... 79

E. (2) esplicitare un isomorfismo tra la complessificazione della rapp. di  $SU_2$  come matrici  $2 \times 2$  hermitiane a traccia nulla e quella come polinomi omogenei di secondo grado in due variabili ..... 79

E. (3) le funzioni di classe su  $SU_2$  sono determinate dalla restrizione al sottogruppo diagonale e sono pari nell'argomento degli elementi della diagonale ..... 79

E. (4) calcolare la restrizione del carattere della rapp. di  $SU_2$  come polinomi omogenei in due variabili al sottogruppo diagonale ..... 80

E. (5) lo span dei caratteri delle rapp. di  $SU_2$  come polinomi omogenei in due variabili ristretti al sottogruppo diagonale e visti come funzioni di un elemento della diagonale è lo spazio delle funzioni sul sottogruppo diagonale scrivibili come polinomi nei due elementi sulla diagonale e invarianti per coniugazione dell'argomento ..... 80

E. (6) integrale invariante su  $SU_2$  ristretto alle funzioni di classe continue ..... 80



# Bracci: Appunti del corso Metodi matematici per la Fisica I, 2004

## 1 Spazi normati e con prodotto scalare

### 1.1 Definizioni e proprietà elementari

|   |   |
|---|---|
| d. (1.1.1) norma  | 1 |
| d. (1.1.2) spazio normato   | 1 |
| d. (1.1.3) limite   | 1 |
| d. (1.1.4) punto di accumulazione                                       | 2 |
| d. (1.1.5) insieme limitato   | 2 |
| L. (1.1.1) unicità del limite su un punto di accumulazione              | 2 |
| L. (1.1.2) unicità del limite per $x \rightarrow \infty$                | 2 |
| d. (1.1.6) limite di una successione                                    | 2 |
| L. (1.1.3) unicità del limite di una successione                        | 2 |
| d. (1.1.7) continuità in un punto                                       | 2 |
| L. (1.1.4) definizione di continuità con il limite                      | 2 |
| L. (1.1.5) definizione di continuità con le successioni                 | 2 |
| T. (1.1.1) la somma di funzioni continue è continua                     | 3 |
| L. (1.1.6) la somma dei limiti è il limite della somma                  | 3 |
| T. (1.1.2) la composizione di funzioni continue è continua              | 3 |
| d. (1.1.8) continuità sul dominio                                       | 3 |
| d. (1.1.9) funzione lipschitziana                                       | 3 |
| L. (1.1.7) lipschitziana $\Rightarrow$ continua                         | 3 |
| T. (1.1.3) la norma è lipschitziana                                     | 3 |
| d. (1.1.10) norme equivalenti   | 4 |
| L. (1.1.8) norme equivalenti $\Rightarrow$ limiti di successioni uguali | 4 |
| L. (1.1.9) norme equivalenti $\Rightarrow$ limiti di funzioni uguali    | 4 |

### 1.2 Topologia

|  |   |
|--|---|
| d. (1.2.1) palle aperte e chiuse                                       | 4 |
| d. (1.2.2) insiemi aperti e chiusi                                     | 4 |
| L. (1.2.1) le palle aperte sono aperte e le palle chiuse sono chiuse   | 4 |
| T. (1.2.1) proprietà generali della famiglia degli aperti              | 5 |
| T. (1.2.2) proprietà generali della famiglia dei chiusi                | 5 |
| T. (1.2.3) definizione di chiuso con le successioni                    | 5 |
| T. (1.2.4) i chiusi e gli aperti per norme equivalenti sono gli stessi | 5 |
| d. (1.2.3) chiusura  | 6 |
| T. (1.2.5) definizione di chiusura con le successioni                  | 6 |
| C. (1.2.1) la chiusura della palla aperta è la palla chiusa            | 6 |

|  |   |
|--|---|
| d. (1.2.4) insiemi compatti per successioni e relativamente compatti   | 6 |
| L. (1.2.2) compatto $\Rightarrow$ chiuso e limitato  | 6 |
| T. (1.2.6) (Weierstrass) una funzione continua su un compatto ammette massimo e minimo   | 6 |
| d. (1.2.5) continuità uniforme   | 7 |
| O. uniformemente continua $\Rightarrow$ continua   | 7 |
| T. (1.2.7) (Heine-Cantor-Borel) continua su un compatto $\Rightarrow$ uniformemente continua   | 7 |
| T. (1.2.8) in uno spazio di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti  | 7 |
| X. esempio di spazio di dimensione infinita con norme non equivalenti  | 8 |
| C. (1.2.2) (Bolzano-Weierstrass) in uno spazio di dimensione finita gli insiemi chiusi e limitati sono compatti                        | 8 |
| X. esempio di spazio di dimensione infinita con insieme chiuso e limitato ma non compatto  | 8 |
| C. (1.2.3) (Bolzano-Weierstrass) in uno spazio di dimensione finita i sottoinsiemi infiniti e limitati hanno un punto di accumulazione | 8 |
| d. (1.2.6) densità   | 8 |
| d. (1.2.7) parte interna   | 9 |
| O. definizione di parte interna con le palle aperte  | 9 |
| L. (1.2.3) parte interna vuota $\iff$ complementare denso  | 8 |

### 1.3 Spazi di Banach

|   |    |
|---|----|
| d. (1.3.1) successione di Cauchy ovvero fondamentale  | 9  |
| O. le successioni di Cauchy per norme equivalenti sono le stesse  | 9  |
| L. (1.3.1) le successioni convergenti sono di Cauchy  | 9  |
| d. (1.3.2) spazi completi e di Banach   | 9  |
| L. (1.3.2) la completezza rispetto a norme equivalenti è equivalente  | 9  |
| O. $\mathbb{R}$ è uno spazio di Banach  | 9  |
| T. (1.3.1) gli spazi di dimensione finita sono completi   | 9  |
| C. (1.3.1) i sottospazi di dimensione finita sono chiusi  | 10 |
| T. (1.3.2) esistenza del completamento  | 10 |
| d. (1.3.3) completamento  | 11 |
| d. (1.3.4) spazi delle funzioni continue su un intervallo con e senza supporto compatto                                   | 11 |
| L. (1.3.3) lo spazio delle funzioni continue su un intervallo limitato a supporto compatto non è completo per norma $L^1$ | 11 |
| d. (1.3.5) spazio $L^1$   | 11 |
| T. (1.3.3) definizione di $L^1$ come funzioni integrabili   | 11 |

|  |    |
|--|----|
| T. (1.3.4) (Weierstrass) lo spazio dei polinomi in una variabile è denso nello spazio delle funzioni continue su un intervallo limitato per norma $\infty$ ..... | 12 |
| X. controesempio con intervallo illimitato .....   | 12 |
| C. (1.3.2) su un intervallo limitato i polinomi in una variabile sono densi in $L^1$ .....   | 13 |
| d. (1.3.6) spazi delle funzioni infinitamente derivabili con e senza supporto compatto .....   | 13 |
| C. (1.3.3) su un intervallo limitato le funzioni lisce sono dense in $L^1$ .....   | 13 |
| T. (1.3.5) su un intervallo limitato le funzioni lisce a supporto compatto sono dense in $L^1$ .....   | 13 |
| d. (1.3.7) funzione caratteristica di un insieme .....   | 13 |
| C. (1.3.4) su un intervallo illimitato le funzioni lisce a supporto compatto sono dense in $L^1$ .....   | 13 |
| d. (1.3.8) spazio $L^p$ .....  | 14 |
| T. (1.3.6) (Fisher-Riesz) gli spazi $L^p$ sono di Banach ...   | 14 |
| T. (1.3.7) lo spazio delle funzioni lisce a supporto compatto è denso in $L^p$ .....   | 14 |
| T. (1.3.8) (Disuguaglianza di Hölder) .....  | 14 |
| C. (1.3.5) su un intervallo limitato $p > q \implies L^p \subseteq L^q$ ..   | 14 |
| X. controesempio su un intervallo illimitato .....   | 14 |
| T. (1.3.9) una successione convergente in $L^p$ ammette una sottosuccessione puntualmente convergente .....  | 15 |
| X. (1.3.1) la convergenza in $L^p$ non implica la convergenza puntuale quasi ovunque .....   | 15 |
| T. (1.3.10) su un intervallo limitato una successione in $L^p$ che converge uniformemente converge in $L^p$ .....  | 15 |
| E. (1.3.2) controesempio per un intervallo illimitato .....  | 15 |
| T. (1.3.11) una successione limitata in $L^p$ che converge puntualmente converge in $L^p$ .....  | 15 |
| E. (1.3.3) controesempio per una successione non limitata ..   | 15 |
| T. (1.3.2) (delle contrazioni di Banach) in uno spazio di Banach le contrazioni ammettono uno e un solo punto fisso .....  | 15 |

#### 1.4 Prodotti scalari

|  |    |
|--|----|
| d. (1.4.1) prodotto scalare .....  | 16 |
| T. (1.4.1) (Cauchy-Schwarz) .....  | 16 |
| O. la maggiorazione di Cauchy-Schwarz vale anche per prodotti scalari degeneri ..... | 17 |
| C. (1.4.1) norma indotta da un prodotto scalare .....                                | 17 |
| T. (1.4.2) un prodotto scalare è continuo per la norma che induce .....              | 17 |
| T. (1.4.3) identità del parallelogramma .....  | 18 |
| X. norma che non deriva da un prodotto scalare .....                                 | 18 |

|  |    |
|--|----|
| T. (1.4.4) formula di polarizzazione .....   | 18 |
| T. (1.4.5) (von Neumann) una norma che soddisfa l'identità del parallelogramma è indotta da un prodotto scalare .. | 18 |
| C. (1.4.2) una norma è indotta da un prodotto scalare se e solo se soddisfa l'identità del parallelogramma .....   | 19 |
| C. (1.4.3) la norma $p$ -esima è indotta da un prodotto scalare se e solo se $p = 2$ .....                         | 20 |

#### 1.5 Proprietà elementari degli spazi di Hilbert

|  |    |
|--|----|
| d. (1.5.1) spazio di Hilbert .....   | 20 |
| T. (1.5.1) $L^2$ è di Hilbert .....  | 20 |
| d. (1.5.2) insieme completo e base .....   | 20 |
| L. (1.5.1) un vettore ortogonale a un insieme completo è nullo .....   | 20 |
| d. (1.5.3) insieme ortonormale .....   | 20 |
| T. (1.5.2) (Disuguaglianza di Bessel) .....  | 21 |
| C. (1.5.1) il prodotto scalare di un vettore con una successione ortonormale converge a 0 .....  | 21 |
| T. (1.5.3) un insieme numerabile di vettori tale che ogni vettore ortogonale all'insieme è nullo è completo ....   | 21 |
| C. (1.5.2) un insieme numerabile è completo se e solo se l'unico vettore ortogonale a esso è 0 .....   | 22 |
| T. (1.5.4) serie di Fourier .....  | 22 |
| T. (1.5.5) valore minimo della differenza tra un vettore e una serie parziale lungo un insieme numerabile ortonormale .....  | 22 |
| C. (1.5.3) (identità di Parseval) un insieme numerabile ortonormale è completo se e solo se la norma quadra di ogni vettore è la serie di Fourier delle norme quadre ..... | 22 |
| T. (1.5.6) (Fisher-Riesz) fatti equivalenti alla completezza per un insieme ortonormale numerabile .....   | 22 |
| T. (1.5.7) una serie lungo una successione ortonormale completa converge se e solo se converge la serie dei moduli quadri dei coefficienti .....                           | 23 |

### 2 Equazioni differenziali alle derivate parziali

#### 2.1 Serie di Fourier

|  |    |
|--|----|
| T. (2.1.1) (Lemma di Riemann-Lebesgue)   |    |
| $f \in L^1(-\infty, \infty) \implies \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 0$                       |    |
| .....  | 24 |
| T. (2.1.2)   |    |
| $\phi \in C_c^\infty(-\infty, \infty) \implies \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^r \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{i\alpha x} dx = 0$ |    |
| .....  | 25 |
| d. (2.1.1) polinomio trigonometrico .....  | 25 |

|   |    |  |    |
|---|----|--|----|
| L. (2.1.1) le potenze intere di funzioni trigonometriche sono polinomi trigonometrici .....   | 25 | C. (2.3.5) (Teorema della media) .....   | 40 |
| T. (1.2.3) (Weierstrass) i polinomi trigonometrici sono densi nelle funzioni continue a supporto compatto sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ con la norma $\infty$ .....   | 25 | C. (2.3.6) una funzione armonica su un aperto connesso il cui modulo ammette massimo è costante .....  | 40 |
| C. (2.1.1) i polinomi trigonometrici sono densi in $L^2(-\pi, \pi)$ .....   | 26 | <b>2.3.4 Lemma di Green e sue conseguenze</b>  |    |
| L. (2.1.2) $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è un insieme ortogonale in $L^2(-\pi, \pi)$ .....   | 26 | L. (2.3.1) (lemma di Green) $f, g \in C^2 \Rightarrow$   |    |
| T. (2.1.4) $\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$ .....  | 26 | $\int_S (f \Delta g - g \Delta f) dS = \int_\sigma \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\sigma$ | 41 |
| T. (2.1.5) $\{\sin(nx)/\sqrt{\pi}\}_{n \in \mathbb{N}_0} \cup \{\cos(nx)/\sqrt{\pi}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una base ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$ .....  | 26 | T. (2.3.3) (teorema della media) .....   | 41 |
| L. (2.1.3) $\sum_{-\infty}^{\infty}  z_n  < \infty \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} z_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ converge uniformemente ed è continua .....  | 26 | d. (2.3.3) funzione di Green in due dimensioni .....   | 42 |
| L. (2.1.4) $\sum_{-\infty}^{\infty}  na_n  < \infty \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ è continua e derivabile termine a termine .....  | 26 | L. (2.3.2) $f$ continua in $y \Rightarrow$   |    |
| d. serie di Fourier in $L^1(-\pi, \pi)$ .....   | 27 | $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{ x =\epsilon} f(x) \frac{\partial G}{\partial n}(x, y) d\sigma = f(y)$                                  | 42 |
| T. (2.1.6) $f \in L^1(-\pi, \pi)$ , $f$ continua in $x_0$ , il rapporto incrementale di $f$ intorno a $x_0$ è integrabile intorno a $x_0 \Rightarrow$ la serie di Fourier di $f$ converge puntualmente a $f$ in $x_0$ .....   | 27 | T. (2.3.4) (simmetria della funzione di Green) .....   | 43 |
| T. (2.1.7) (criterio di Dini) $f \in L^1(-\pi, \pi)$ , $\exists f(x_0^+), f(x_0^-)$ , i rapporti incrementali di $f$ a destra e a sinistra di $x_0$ sono in $L^1$ intorno a destra di 0 $\Rightarrow$ la serie di Fourier di $f$ converge alla media dei limiti destro e sinistro di $f$ in $x_0$ ..... | 28 | T. (2.3.5) soluzione del problema di Dirichlet con condizione al bordo nulla usando la funzione di Green .....                               | 43 |
| T. (2.1.8) $f$ periodica con periodo $2\pi$ , $f \in C^1 \Rightarrow$ la serie di Fourier di $f$ converge uniformemente a $f$ .....   | 28 | <b>2.4 Equazione delle onde</b> .....  | 45 |
| <b>2.2 Problema ai limiti per il quadrato</b> .....   | 29 | <b>3 Spazi di Hilbert ed Operatori lineari</b>   |    |
| <b>2.3 Problema ai limiti per il cerchio</b> .....  | 33 | <b>3.1 Geometria degli spazi di Hilbert</b>  |    |
| <b>2.3.3 Funzioni armoniche</b>   |    | d. (3.1.1) spazio $\ell^2$ .....   | 50 |
| d. (2.3.1) funzione armonica .....  | 38 | T. (3.1.1) lo spazio $\ell^2$ è di Hilbert .....   | 50 |
| d. (2.3.2) problema di Dirichlet .....  | 39 | L. (3.1.1) le successioni $e_n^{(i)} = \delta_{in}$ sono una base ortonormale di $\ell^2$ .....  | 51 |
| T. (2.3.1) soluzione del problema di Dirichlet su un disco con condizione al bordo continua .....   | 39 | T. (3.1.2) gli spazi di Hilbert di dimensione infinita con una base numerabile sono isomorfi a $\ell^2$ .....                                | 51 |
| T. (2.3.2) (Principio del massimo) per una funzione continua sulla chiusura di un aperto limitato con laplaciano non negativo sull'aperto, l'estremo superiore sull'aperto è maggiorato dal massimo sulla frontiera .....   | 39 | d. (3.1.2) spazio separabile .....   | 51 |
| C. (2.3.1) una soluzione del problema di Dirichlet su un aperto limitato è compresa tra il minimo e il massimo della condizione al bordo .....  | 39 | T. (3.1.3) uno spazio Hilbert ha una base ortonormale finita o numerabile se e solo se è separabile .....                                    | 51 |
| C. (2.3.2) l'unica soluzione del problema di Dirichlet su un aperto limitato con condizione al bordo nulla è la funzione nulla .....  | 40 | T. (3.1.4) i sottoinsiemi ortonormali di uno spazio separabile sono al più numerabili .....  | 52 |
| C. (2.3.3) unicità della soluzione del problema di Dirichlet .....  | 40 | X. spazio di Hilbert non separabile .....  | 52 |
| C. (2.3.4) unicità della soluzione del problema di Dirichlet su un disco con condizione al bordo continua .....   | 40 | X. altro spazio di Hilbert non separabile .....  | 53 |
|   |    | d. (3.1.3) sottospazio di Hilbert .....  | 53 |
|   |    | L. (3.1.2) i vettori ortogonali a un sottoinsieme dato sono uno sottospazio di Hilbert .....   | 53 |
|   |    | L. (3.1.3) la chiusura di un sottospazio vettoriale è un sottospazio di Hilbert .....  | 53 |
|   |    | d. (3.1.4) insieme convesso .....  | 54 |
|   |    | T. (3.1.5) (proiezione su un convesso chiuso) .....  | 54 |
|   |    | d. (3.1.5) insieme ortogonale a un dato .....  | 54 |
|   |    | T. (3.1.6) (della proiezione ortogonale) .....   | 55 |
|   |    | d. (3.1.6) somma diretta in uno spazio di Hilbert .....  | 55 |

### 3.2 Operatori e funzionali lineari

|   |    |
|---|----|
| d. (3.2.1) operatore lineare e nucleo .....   | 55 |
| T. (3.2.1) fatti equivalenti alla continuità per un operatore lineare tra spazi normati .....   | 55 |
| d. (3.2.2) norma di un operatore lineare tra spazi normati e operatore limitato .....   | 56 |
| L. (3.2.1) un operatore lineare tra spazi normati è continuo se e solo se è limitato .....  | 56 |
| L. (3.2.2) gli operatori lineari su spazi normati di dimensione finita sono limitati .....  | 56 |
| X. controesempio in dimensione infinita .....   | 56 |
| L. (3.2.3) definizione della norma di un operatore maggiorandola con la norma dell'argomento .....  | 56 |
| T. (3.2.2) lo spazio degli operatori lineari da uno spazio normato a uno di Banach è di Banach .....  | 57 |
| d. (3.2.3) funzionale lineare e spazio duale .....  | 57 |
| T. (3.2.3) (di rappresentazione di Riesz) .....   | 57 |
| d. (3.2.4) operatore aggiunto .....   | 58 |
| L. (3.2.4) la norma della composizione di operatori lineari continui è minore o uguale del prodotto delle norme .....   | 58 |
| L. (3.2.5) l'aggiunto di un operatore lineare continuo è continuo e ha la stessa norma .....  | 58 |
| L. (3.2.6) la norma quadra di un operatore lineare continuo è la norma della composizione con l'aggiunto .....  | 58 |
| T. (3.2.4) un operatore lineare continuo su un sottospazio denso si estende in modo unico .....   | 58 |
| T. una funzione uniformemente continua da un sottoinsieme di uno spazio normato a uno spazio di Banach si estende in modo unico alla chiusura del dominio ..... | 59 |

### 3.3 Proiettori

|  |    |
|--|----|
| d. (3.3.1) proiettore .....  | 59 |
| T. (3.3.1) proprietà del proiettore .....  | 59 |
| L. (3.3.1) $\forall x (Ax, x) = 0 \implies A = 0$ .....  | 60 |
| X. controesempio per spazi su $\mathbb{R}$ .....   | 60 |
| T. (3.3.2) un operatore lineare di ordine 2 e autoaggiunto è un proiettore .....                               | 60 |
| C. l'immagine di un proiettore è di vettori fissati .....  | 61 |
| T. (3.3.3) un operatore lineare limitato di ordine 2 tale che $(x - Px, Px) = 0$ è un proiettore .....         | 61 |
| C. (3.3.1) un operatore lineare limitato di ordine 2 con l'immagine ortogonale al nucleo è un proiettore ..... | 61 |
| L. (3.3.2) l'immagine di un operatore di ordine 2 sono gli elementi fissati .....                              | 61 |
| T. (3.3.4) un operatore lineare di ordine 2 con norma minore o uguale a 1 è un proiettore .....                | 61 |

|  |    |
|--|----|
| T. (3.3.5) la composizione di due proiettori è un proiettore se e solo se commutano, in tal caso l'immagine è l'intersezione delle immagini .....  | 61 |
| L. (3.3.3) la composizione di due proiettori è nulla se e solo se le immagini sono ortogonali e se e solo se la composizione nell'altro ordine è nulla .....   | 61 |
| L. (3.3.6) la somma di proiettori è un proiettore se e solo se le composizioni sono nulle e se e solo se le immagini sono ortogonali; in tal caso l'immagine della somma è la somma diretta delle immagini .....   | 62 |
| L. (3.3.4) un'applicazione è un proiettore se e solo se il complemento all'identità è un proiettore .....  | 62 |
| T. (3.3.7) la differenza di due proiettori è un proiettore se e solo se la composizione del complemento all'identità del minuendo con il sottraendo è nulla e l'immagine è il complemento ortogonale dell'immagine del sottraendo rispetto a quella del minuendo ..... | 62 |

### 3.4 Particolari classi di operatori

|  |    |
|--|----|
| d. (3.4.1) operatore unitario .....  | 63 |
| L. (3.4.1) gli operatori unitari sono lineari .....  | 63 |
| O. per il lemma precedente non serve l'ipotesi di surgettività .....   | 63 |
| L. (3.4.2) gli operatori unitari sono limitati, biunivoci e con inverso unitario .....   | 63 |
| L. (3.4.3) un operatore lineare surgettivo che lascia invariata la norma è unitario .....  | 63 |
| L. (3.4.4) un operatore limitato è unitario se e solo se è surgettivo e l'aggiunto è l'inverso .....   | 64 |
| d. (3.4.2) isometria .....   | 64 |
| O. se uno spazio di Hilbert è separabile allora è isometrico a $\ell^2$ .....  | 64 |
| d. (3.4.3) autovalore, autovettore, autospazio, spettro puntuale .....   | 64 |
| d. (3.4.4) autoaggiunto, normale .....   | 64 |
| L. (3.4.5) gli autovalori di un operatore autoaggiunto sono reali .....  | 64 |
| O. autoaggiunto $\implies$ normale .....   | 64 |
| L. (3.4.6) gli autovettori dell'aggiunto di un operatore normale sono gli stessi ma con autovalore coniugato .....   | 64 |
| L. (3.4.7) autovettori relativi ad autovalori distinti di un operatore normale sono perpendicolari .....   | 65 |
| d. (3.4.5) sottospazio invariante .....  | 65 |
| T. (3.4.1) (teorema spettrale normale) .....   | 65 |
| L. (3.4.8) in uno spazio di Hilbert di dimensione finita l'ortogonale di un sottospazio è invariante per un operatore normale se e solo se è invariante per l'aggiunto ..... | 65 |
| X. controesempio al teorema spettrale in dimensione infinita .....   | 66 |

|   |    |  |    |
|---|----|--|----|
| d. (3.4.6) polinomio minimo .....   | 66 | T. (3.5.1) la trasformata di Fourier è a valori nella classe di Schwartz .....   | 75 |
| T. (3.4.2) gli autovalori sono le radici del polinomio minimo .....   | 66 | T. (3.5.2) antitrasformata di Fourier .....  | 75 |
| d. (3.4.7) operatore compatto ovvero completamente continuo .....   | 66 | C. (3.5.1) la trasformata è suriettiva .....   | 76 |
| L. (3.4.9) gli operatori compatti sono limitati .....   | 66 | T. (3.5.3) (Identità di Parsevall) il prodotto scalare di due trasformate è $2\pi$ volte il prodotto delle funzioni .....  | 77 |
| L. (3.4.10) comporre un operatore compatto con uno limitato dà operatori compatti .....   | 66 | C. (3.5.2) la trasformata è biunivoca .....  | 77 |
| T. (3.4.3) un operatore limitato è compatto se e solo se lo è l'aggiunto .....  | 66 | d. (3.5.3) estensione della trasformata a $L^2$ .....  | 77 |
| L. (3.4.11) un operatore limitato di rango finito è compatto .....  | 67 | O. in generale su $L^2$ non vale la formula integrale per la trasformata .....   | 77 |
| T. (3.4.4) il limite di una successione di operatori compatti è compatto .....  | 67 | L. (3.5.2) la trasformata in $L^2$ è suriettiva .....  | 77 |
| C. (3.4.1) gli operatori di Hilbert-Schmidt sono compatti .....   | 67 | T. (3.5.4) (Identità di Parsevall) vedi teorema 3.5.3, però in $L^2$ .....   | 77 |
| d. operatore di Hilbert-Schmidt .....   | 68 | C. (3.5.3) la trasformata in $L^2$ è biunivoca .....   | 77 |
| L. (3.4.12) l'aggiunto di un operatore di Hilbert-Schmidt si ottiene coniugando il moltiplicatore .....   | 68 | T. (Teorema di Plancherel) definizione unitaria della trasformata .....  | 78 |
| C. (3.4.2) gli operatori di Hilbert-Schmidt con moltiplicatore reale sono compatti e autoaggiunti .....   | 68 | T. (3.5.5) trasformata in $L^2$ come limite lungo intervalli di integrazione .....   | 78 |
| L. (3.4.13) $T$ limitato $\Rightarrow \ T\  = \sup_{\ x\ =\ y\ =1}  (x, Ty) $ .....   | 68 | T. (3.5.6) antitrasformata in $L^2$ come limite lungo intervalli di integrazione .....   | 78 |
| L. (3.4.14) $T$ limitato autoaggiunto $\Rightarrow \ T\  = \sup_{\ x\ =1}  (x, Tx) $ .....  | 69 | C. (3.5.4) in $L^2 \cap L^1$ vale la formula integrale per la trasformata .....  | 78 |
| T. (3.4.5) un operatore compatto autoaggiunto ha un autovalore uguale in modulo alla norma .....  | 69 | C. (3.5.5) se una funzione in $L^2$ ha trasformata in $L^1$ , allora vale la formula integrale per l'antitrasformata .....   | 79 |
| L. (3.4.15) gli autospazi di un operatore compatto diversi dal nucleo hanno dimensione finita .....   | 70 | X. trasformata di $1/(1+x^2)$ .....  | 79 |
| T. (3.4.6) (teorema spettrale compatto autoaggiunto) ..   | 70 | d. (3.5.4) trasformata e trasformata inversa in $L^1$ .....  | 79 |
| C. (3.4.3) per ogni operatore compatto autoaggiunto esiste una base ortonormale di autovettori .....  | 72 | X. la trasformata inversa in generale non è l'inverso della trasformata .....  | 79 |
| T. (3.4.7) dati due operatori compatti autoaggiunti che commutano esiste una base ortonormale al più numerabile dell'ortogonale dell'intersezione dei nuclei composta di autovettori comuni ..... | 72 | L. (3.5.3) $\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ .....   | 79 |
| L. (3.4.16) la somma di operatori compatti è compatta ..  | 72 | T. (3.5.7) se una funzione di $L^1$ è continua in un punto intorno al quale il rapporto incrementale è integrabile, allora il valore in quel punto si ottiene come limite lungo intervalli di integrazione della trasformata inversa ..... | 80 |
| C. (3.4.4) (teorema spettrale compatto normale) .....   | 73 | L. (3.5.4) la trasformata della traslata di una funzione in $L^1 \cup L^2$ porta fuori una fase proporzionale alla traslazione .....   | 81 |
| X. applicazione del teorema spettrale ai problemi di Dirichlet e Sturm-Liouville .....  | 73 | L. (3.5.5) la trasformata del rifasamento di una funzione in $L^1 \cup L^2$ porta fuori una traslazione antiproporzionale alla fase .....  | 81 |
| <b>3.5 Trasformata di Fourier</b>   |    | d. (3.5.5) prodotto di convoluzione in $L^1$ .....   | 82 |
| d. (3.5.1) classe di Schwartz .....   | 74 | L. (3.5.6) il prodotto di convoluzione in $L^1$ è a valori in $L^1$ .....  | 82 |
| O. la classe di Schwartz è non vuota, è contenuta in $L^1$ e il prodotto tra una potenza e una funzione della classe è in $L^1$ .....   | 74 | T. (3.5.8) la trasformata del prodotto di convoluzione in $L^1$ è il prodotto delle trasformate .....  | 82 |
| d. (3.5.2) trasformata di Fourier .....   | 74 | d. (3.5.6) prodotto di convoluzione in $L^1 \times L^p$ .....  | 82 |
| L. (3.5.1) la classe di Schwartz è densa in $L^2$ .....   | 75 | T. (3.5.9) il prodotto di convoluzione in $L^1 \times L^p$ è a valori in $L^p$ e la norma del prodotto si maggiora con il prodotto delle norme .....   | 82 |

|  |    |   |    |
|--|----|---|----|
| T. (3.5.10) la trasformata del prodotto di convoluzione in $L^1 \times L^2$ è il prodotto delle trasformate  | 83 | X. (3.6.5) l'operatore derivata sulle funzioni $C^1$ su un intervallo compatto a valori in $L^2$ non è chiuso ma è chiudibile   | 89 |
| L. (3.5.7) la traslazione di funzioni $L^1$ è uniformemente continua   | 83 | T. (3.6.3) gli operatori con biaggiunto sono chiudibili e estesi dal biaggiunto   | 89 |
| L. (3.5.8) $f \in L^1$ , $h_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} \implies (f * h_\lambda)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{- \lambda t } \hat{f}(t) e^{-ixt} dt$ | 83 | L. (3.6.6) la chiusura dell'immagine unitaria di un sottospazio è l'immagine della chiusura   | 89 |
| L. (3.5.9) $f \in L^1 \implies \lim_{\lambda \rightarrow 0} \ f * h_\lambda - f\  = 0$   | 84 | T. (3.6.4) l'estensione minimale di un operatore lineare chiudibile con aggiunto è il biaggiunto  | 90 |
| T. (3.5.11) (formula di inversione) per una funzione in $L^1$ con trasformata in $L^1$ , la trasformata inversa è l'inverso della trasformata quasi ovunque  | 84 | T. (3.6.5) (teorema fondamentale del calcolo secondo Lebesgue)  | 90 |
| C. (3.5.6) se due funzioni in $L^1$ hanno la stessa trasformata allora coincidono quasi ovunque  | 84 | d. (3.6.6) funzione assolutamente continua  | 91 |
| L. (3.5.10) la trasformata inversa di una funzione $L^1$ è continua  | 85 | O. assolutamente continua implica uniformemente continua  | 91 |
| C. (3.5.7) per una funzione in $L^1$ con trasformata in $L^1$ , la trasformata inversa è l'inverso della trasformata quasi ovunque   | 85 | L. (3.6.7) la funzione integrale di una funzione $L^1$ è assolutamente continua   | 91 |
| <b>3.6 Operatori chiusi e chiudibili</b>   |    | T. (3.6.6) (teorema fondamentale del calcolo) le funzioni assolutamente continue sono derivabili quasi ovunque con derivata $L^1$ e sono la funzione integrale della derivata   | 91 |
| d. (3.6.1) operatore chiuso  | 85 | C. (3.6.2) una funzione su un intervallo compatto a valori complessi è la funzione integrale di una funzione $L^1$ se e solo se è assolutamente continua; in tal caso è funzione integrale della sua derivata quasi ovunque | 91 |
| d. prodotto cartesiano di spazi di Hilbert   | 85 | T. (3.6.7) (formula di integrazione per parti)  | 91 |
| d. (3.6.2) grafico   | 85 | X. funzione di Cantor-Vitali  | 91 |
| O. il grafico di un operatore lineare è un sottospazio   | 85 | X. (3.6.6) l'estensione chiusa minimale dell'operatore derivata su funzioni $C^1$ su un intervallo compatto a valori in $L^2$ è l'operatore derivata sulle funzioni assolutamente continue                                  | 92 |
| L. (3.6.1) un operatore è chiuso se e solo se il grafico è un sottospazio chiuso   | 85 |   |    |
| L. (3.6.2) gli operatori lineari limitati sono chiusi  | 86 |   |    |
| T. (3.6.1) (teorema del grafico chiuso di Banach) gli operatori lineari chiusi sono limitati   | 86 |   |    |
| d. (3.6.3) valore aggiunto   | 86 |   |    |
| O. unicità del valore aggiunto   | 86 |   |    |
| L. (3.6.3) operatore aggiunto  | 86 |   |    |
| d. (3.6.4) operatore aggiunto  | 86 |   |    |
| L. (3.6.4) l'aggiunto è chiuso   | 86 |   |    |
| X. (3.6.1) operatore lineare senza biaggiunto  | 86 |   |    |
| X. (3.6.2) operatore non chiuso  | 87 |   |    |
| X. (3.6.3) operatore chiuso non limitato   | 87 |   |    |
| X. (3.6.4) l'operatore derivata sulle funzioni $L^2$ su un intervallo aperto limitato con derivata in $L^2$ quasi ovunque non è chiuso   | 88 |   |    |
| T. (3.6.2) estensione di un operatore lineare chiuso sull'origine  | 88 |   |    |
| C. (3.6.1) un operatore lineare ha estensione chiusa se e solo se è chiuso sull'origine  | 88 |   |    |
| d. (3.6.5) operatore chiudibile e estensione minimale  | 88 |   |    |
| L. (3.6.5) esistenza dell'estensione minimale  | 88 |   |    |