

Indice globale di definizioni, teoremi, proposizioni, lemmi, osservazioni, corollari, esempi, esercizi per fisica II, 2015-2016

Indice

Serre: Rappresentazioni lineari di gruppi finiti, 1971

1	Generalità sulle rappresentazioni	1
2	Teoria dei caratteri	1
3	Sottogruppi, prodotti, rappresentazioni indotte	2
5	Esempi	3

Vinberg: Rappresentazioni lineari di gruppi, 1989

0	Nozioni di base	3
1	Sottospazi invarianti	3
2	Completa riducibilità delle rappresentazioni di gruppi compatti	4
3	Operazioni di base sulle rappresentazioni	5
4	Proprietà delle rappresentazioni irriducibili complesse	6
5	Scomposizione della rappresentazione regolare	7
6	Relazioni di ortogonalità	8
7	I gruppi SU_2 e SO_3	8
9	Armoniche sferiche	9

Bracci: Appunti del corso Metodi matematici per la Fisica I, 2004

1	Spazi normati e con prodotto scalare	9
1.1	Definizioni e proprietà elementari	9
1.2	Topologia	10
1.3	Spazi di Banach	10
1.4	Prodotti scalari	11
1.5	Proprietà elementari degli spazi di Hilbert	11
2	Equazioni differenziali alle derivate parziali	11
2.1	Serie di Fourier	11
2.2	Problema ai limiti per il quadrato	12
2.3	Problema ai limiti per il cerchio	12
2.3.3	Funzioni armoniche	12
2.3.4	Lemma di Green e sue conseguenze	12
2.4	Equazione delle onde	12
3	Spazi di Hilbert ed Operatori lineari	12
3.1	Geometria degli spazi di Hilbert	12
3.2	Operatori e funzionali lineari	12
3.3	Proiettori	13
3.4	Particolari classi di operatori	13
3.5	Trasformata di Fourier	14
3.6	Operatori chiusi e chiudibili	15

Serre: Rappresentazioni lineari di gruppi finiti, 1971

1 Generalità sulle rappresentazioni

d.	rappresentazione unitaria	4
d.	rapp. regolare	5
d.	rapp. di permutazioni	5
d.	sottorappresentazione	5

T. (1) un sottospazio stabile ha un complemento stabile

d.	somma diretta	7
----	-------------------------	---

d. rapp. irriducibile

T. (2) le rapp. si scompongono in rapp. irr.

d.	prodotto tensoriale	8
----	-------------------------------	---

d.	prodotto tensoriale di rapp. (su un gruppo)	8
----	---	---

d.	quadrati simmetrico e alternante	9
----	--	---

2 Teoria dei caratteri

d.	carattere	10
----	---------------------	----

P.	(1) proprietà di base del carattere	10
----	---	----

d.	funzione di classe	11
----	------------------------------	----

P.	(2) carattere della somma e del prodotto	11
----	--	----

P.	(3) carattere dei quadrati simm. e alt.	11
----	---	----

E.	(1) carattere dei quadrati simm. e alt. della somma	12
----	---	----

E.	(2) carattere della rapp. di perm.	12
----	--	----

E.	(3) rapp. duale	12
----	---------------------------	----

E.	(4) rapp. sugli omomorfismi tra spazi di rappresentazione	12
----	---	----

P.	(4) lemma di Schur	13
----	------------------------------	----

C.	(1) applicazione alla media	13
----	---------------------------------------	----

C.	(2) media del prodotto dei coefficienti di matrici di due rapp. irr. non isomorfe	14
----	---	----

C.	(3) media del prodotto dei coefficienti di matrici di una rapp. irr.	14
----	--	----

d.	prodotto scalare sui caratteri	15
----	--	----

T.	(3) ortonormalità dei caratteri irr.	15
----	--	----

T. (4) calcolo del numero di componenti irr. isomorfe a una data rapp. irr.	16
C. (1) la scomposizione in rapp. irr. è unica a meno di ordine e isomorfismi	16
C. (2) rapp. con lo stesso carattere sono isomorfe	16
T. (5) criterio di irriducibilità	17
d. orbita	17
d. transitività	17
E. (6a) la rapp. di perm. contiene rapp. unitarie quante le orbite	17
E. (6b) carattere della rapp. di perm. sul prodotto cartesiano	17
d. doppia transitività	17
E. (6c) fatti equivalenti alla doppia transitività	17
P. (5) carattere della rapp. reg.	18
C. (1) scomposizione della rapp. reg.	18
C. (2) relazione sui gradi delle rapp. irr.	18
P. (6) somma lungo il gruppo di una funzione di classe per una rapp. irr.	19
d. spazio delle funzioni di classe	19
T. (6) i caratteri delle rapp. irr. sono una base delle funzioni di classe	19
T. (7) numero di rapp. irr.	19
P. (7) relazioni sulla grandezza delle classi e sui caratteri irr.	20
d. scomposizione canonica	21
T. (8) proiezioni sulla scomposizione canonica	21
E. (8a) dimensione dello spazio delle applicazioni lineari dallo spazio di rappresentazione di una componente irr. a quello della rapp. scomposta che commutano con la rapp.	22
E. (8b) isomorfismo tra il prodotto della comp. irr. con lo spazio dell'es. (8a) e la corrispondente comp. canonica	22
P. (8) scomposizione di una comp. canonica	23
E. (9) isomorfismo tra lo spazio dell'es. 8a e il sottospazio della comp. canonica associato alla mappa della prop. 8	24
E. (10) sottorapp. minima per un punto	24

3 Sottogruppi, prodotti, rappresentazioni indotte

d. gruppo abeliano	25
T. (9) abeliano equivale ad avere rapp. irr. solo di grado 1	25
d. indice di un sottogruppo	25
C. limite superiore ai gradi delle rapp. irr. dato un sottogruppo abeliano	25
E. (1) anche i gruppi abeliani infiniti hanno rapp. irr. solo di grado 1	26
d. centro di un gruppo	26
E. (2a) le rapp. irr. sono omotetie sul centro	26
E. (2b) limite superiore al grado di una rapp. irr. dato il centro	26
d. rapp. fedele	26
E. (2c) rapp. fedele implica centro ciclico	26
E. (3) gruppo duale	26
d. gruppo prodotto	26
d. prodotto diretto di sottogruppi	27
d. prodotto tensoriale di rapp. (su gruppi diversi)	27
T. (10i) irriducibilità del prodotto di irriducibili	27
T. (10ii) tutti gli irriducibili sul prodotto sono prodotto di irriducibili	27
d. classe laterale sinistra	28
d. congruenza modulo un sottogruppo	28
d. quoziente su un sottogruppo	28
d. rapp. indotta	28
X. (1) induzione della rapp. reg.	29
X. (2) la rapp. unitaria induce la rapp. di perm. sul quoziente	29
X. (3) l'induzione della somma è la somma degli indotti	29
X. (4) sottorapp. indotta	29
X. (5) induzione del prodotto tensore su un fattore ...	29
L. (1) una mappa da uno spazio di rappresentazione a un altro che porta fuori la rapp. si estende univocamente alla rapp. indotta	29
T. (11) esistenza e unicità della rapp. indotta	30
T. (12) carattere di una rapp. indotta	30
E. (4) le rapp. irr. sono contenute in indotte di rapp. irr. di sottogruppi	31
E. (5) induzione attraverso isomorfismo allo spazio di funzioni dal gruppo allo spazio di rappresentazione che portano fuori la rapp.	31
E. (6) la rapp. sul prodotto diretto indotta da una rapp. del primo fattore è isomorfa al prodotto della rapp. del primo fattore con la rapp. reg. del secondo	31

5 Esempi

X. (1) gruppo ciclico	35
X. (2) rotazioni sul piano	36
X. (3) gruppo diedrale	36
E. (1) classi di coniugio del gruppo diedrale	38
E. (2) prodotto di caratteri e caratteri dei quadrati simmetrico e alternante (sul gruppo diedrale)	38
E. (3) riducibilità e carattere della rapp. usuale del gruppo diedrale	38
X. (4) gruppo diedrale più riflessioni per l'origine	40
X. (5) rotazioni e riflessioni sul piano	39
X. (6) rotazioni e riflessioni sul piano più riflessioni per l'origine	40
X. (7) gruppo alternante	41
d. prodotto semidiretto di sottogruppi	41
E. (4) induzione della rapp. irr. di grado 3 del gruppo alternante dal sottogruppo di elementi di ordine 2	41
X. (8) gruppo simmetrico	42
X. (9) gruppo del cubo	43
E. (4) decomposizione semidiretta del gruppo del cubo con il gruppo simmetrico 3 passando da quella diretta con il gruppo simmetrico 4	43
E. (5) isomorfismo tra il gruppo di rotazioni del cubo e il gruppo simmetrico 4	43

Vinberg: Rappresentazioni lineari di gruppi, 1989

0 Nozioni di base

X. rotazioni come omomorfismo di \mathbb{R} in $GL_2(\mathbb{R})$	2
X. (0.2) omomorfismo di S_n in GL_n usando la base canonica	2
d. (0.3) rappresentazione matriciale	3
d. nucleo	3
d. rapp. fedele	3
d. rapp. triviale	4
d. rapp. lineare	4
d. equivalenza di rapp. matriciali	5
d. isomorfismo di rapp. lineari	5
X. (1) rapp. di \mathbb{R} con le rotazioni	6
X. (2) rapp. di \mathbb{R} sullo spazio dei polinomi	7
X. (3) rapp. di \mathbb{R} sullo spazio di (a) funzioni continue (b) polinomi di grado limitato (c) polinomi in \sin e \cos (d) span di \sin e \cos	7

d. azione	7
d. traslazioni a destra e a sinistra	8
d. (0.9) rapp. lineare associata a un'azione	8
X. (1) rapp. associata all'azione del gruppo delle rotazioni del cubo sulle facce	9
X. (2) isomorfismo tra la rapp. associata all'azione naturale di S_n e la rapp. dell'esempio 0.2	9
d. rapp. regolari destra e sinistra	10
O. (0.10) la composizione di una rapp. con un omomorfi- smo è una rapp.	10
X. restrizione come composizione con omomorfismo ..	10
X. (1) la composizione con il coniugio è una rapp. isomorfa	10
E. (1) $\det e^A = e^{\text{tr } A}$	11
E. (2a) trovare A tale che e^{xA} è un boost	11
E. (2b) trovare A tale che $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	11
E. (3) caratterizzare le rapp. matriciali unidimensionali	11
E. (4) mostrare che la traccia della rapp. dell'esempio 0.2 è il numero di punti fissati dalla permutazione	11
E. (5) caratterizzare le rapp. matriciali triviali di un gruppo arbitrario	11
E. (6) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^AC$, C invertibile	11
E. (9) trovare le rapp. di grado finito di (a) \mathbb{Z} (b) \mathbb{Z}_m	12
E. (10) trovare le rapp. complesse differenziabili di grado finito di (a) \mathbb{R}^+ (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid z = 1\}$	12
E. (11) l'azione sull'identità è l'identità	12
E. (12) le iperboli con asintoti paralleli agli assi con coef- ficienti da una matrice inducono un'azione da $GL_2(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$	12
E. (13) formula esplicita per la rapp. reg. destra	12
E. (14) le rapp. reg. destra e sinistra sono isomorfe ...	12
E. (15) ogni gruppo ha una rapp. lineare fedele	12
E. (16) le rapp. di \mathbb{Z} sono restrizioni di rapp. di \mathbb{C} ? ...	12
E. (17) trovare le rapp. complesse di grado finito di \mathbb{Z}_m che rimangono isomorfe per inversione dell'asse ...	12

1 Sottospazi invarianti

d. (1.1) sottospazio invariante sotto rapp.	13
X. i polinomi di grado limitato sono sottospazi invarianti per la rapp. di \mathbb{R} come traslazioni	13
O. invarianza di somme e intersezioni di sottospazi invarianti	13
X. forma della rapp. matriciale con base estesa da un sottospazio invariante	14
d. (1.2) sottorappresentazione e rapp. quoziente	14

X. forma matriciale delle sottorapp. e rapp. quoziente	14	E. (10) le rapp. monomiali di S_n su un campo a caratteristica zero sono compl. rid.	21
d. (1.3) rapp. irriducibile	15	E. (11) la restrizione ad A_n della sottorapp. sui vettori con somma dei coefficienti nulla della rapp. monomiale di S_n è irr. per $n \geq 4$	21
X. (1) irriducibilità delle rapp. unidimensionali	15	E. (12) i sottospazi invarianti di rapp. di grado finito compl. rid. sono somma diretta di sottospazi invarianti minimali della decomposizione analoga della rapp.	21
X. (2) irr. della rapp. identica di $GL(V)$	15	E. (14) sottospazi invarianti della rapp. di $GL(V)$ in $L(V)$ con il coniugio	22
X. (3) irr. della rapp. di \mathbb{R} come rotazioni	15	E. (15) le funzioni commutative e anticommutative sono sottospazi invarianti minimali per rapp. di $GL(V)$ di $B(V)$	22
X. (4) irr. della rapp. di \mathbb{R} come traslazioni di polinomi	15		
X. (5) irr. delle rapp. monomiali di S_n	15		
d. (1.4) rapp. completamente riducibile	16		
O. le rapp. irr. sono compl. rid.	16		
X. isomorfismo tra la sottorapp. su un sottospazio complementare e la rapp. quoziente, e descrizione matriciale	16		
T. (1) le sottorapp. di una rapp. compl. rid. sono compl. rid.	17		
T. (2) lo spazio di rappresentazione di una rapp. compl. rid. di grado finito è somma diretta di sottospazi invarianti minimali	18		
T. (3) se una rapp. è somma di finiti sottospazi invarianti minimali allora, dato un sottospazio invariante, è somma diretta di alcuni di essi e del sottospazio	18		
O. (1) applicare il teorema 3 con un sottospazio nullo	19		
O. (2) sotto le ipotesi del teorema 3, un sottospazio invariante non è necessariamente somma di quelli minimali dati	19		
X. (1) rapp. di $GL(V)$ in $L(V)$ con moltiplicazione a sinistra	19		
X. (2) rapp. di $GL(V)$ in $L(V)$ con il coniugio	19		
X. (3) rapp. naturale di $GL(V)$ in $B(V)$	20		
E. (1) l'azione della rapp. su un sottospazio invariante è l'identità	21		
E. (2) trovare i sottospazi dei polinomi invarianti per rapp. di \mathbb{R} come traslazioni	21		
E. (3) trovare i sottospazi invarianti nella rapp. esponenziale di \mathbb{C} dove l'esponente non ha radici multiple nel polinomio caratteristico	21		
E. (5) le sottorapp. sui complementi dello stesso sottospazio invariante sono isomorfe	21		
E. (6) le rapp. quoziente di una rapp. compl. rid. sono compl. rid.	21		
E. (7) dire se è compl. rid. (a) la rapp. di \mathbb{R} come traslazioni di polinomi (b) la rapp. esponenziale di \mathbb{C} senza radici multiple nel polinomio caratteristico dell'esponente	21		
E. (8) la rapp. esponenziale di \mathbb{C} è compl. rid. se e solo se l'esponente è diagonalizzabile	21		
E. (9) la rapp. identica del gruppo ortogonale è irr.	21		
		2 Completa riducibilità delle rappresentazioni di gruppi compatti	
		d. invarianza di una funzione sotto rapp.	22
		d. rapp. ortogonale e rapp. unitaria	22
		P. le rapp. ortogonali e unitarie sono compl. rid.	23
		T. (1) le rapp. di gruppi finiti sono ortogonali/unitarie	23
		C. le rapp. reali/complesse di gruppi finiti sono compl. rid.	24
		d. (2.4) gruppo topologico	24
		X. (1) gruppo con topologia discreta	24
		X. (2) topologia di $GL(V)$	24
		X. (3) sottogruppi topologici	24
		d. gruppo compatto	24
		X. (1) gruppo finito con topologia discreta	24
		X. (2) gruppo ortogonale	24
		X. (3) gruppo unitario	24
		X. (4) sottogruppi chiusi di gruppi compatti	24
		P. compattezza del gruppo ortogonale	24
		d. rapp. continua	25
		X. (1) rapp. reali/complesse di gruppi con topologia discreta	25
		X. (2) le rapp. di $GL(V)$ in $L(V)$ per moltiplicazione a destra e coniugio e in $B(V)$ naturale con V reale/complesso sono continue	25
		T. (2) le rapp. di un gruppo compatto sono ortogonali/unitarie	25
		C. le rapp. reali/complesse di un gruppo compatto sono compl. rid.	26
		d. integrazione invariante normalizzata su un gruppo compatto	26
		X. (1) integrazione sui gruppi finiti	26
		X. (2) integrazione su U_1	26

X. (3) integrazione su SU_2 attraverso S^3	26
T. (2.6, 2.7) dimostrazione alternativa del teorema 2 ..	27
E. (1) gli autovalori complessi di una rapp. ortogonale/unitaria hanno modulo 1	29
E. (2) dare un esempio di rapp. complessa non unitaria di \mathbb{Z}	29
E. (3) trovare un prodotto scalare invariante per la rapp. reale di \mathbb{Z}_3 che manda il generatore in $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	30
E. (4) dire se sono compatti: \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_m , \mathbb{T} , $SL_n(\mathbb{R})$	30
E. (5) la continuità di una rapp. reale/complessa passa alle sottorapp. e rapp. quoziente	30
E. (6) la rapp. di $GL(V)$ in $L(V)$ con il coniugio, V reale/complesso, è continua	30

3 Operazioni di base sulle rappresentazioni

d. (3.1) rapp. duale	30
X. forma matriciale della rapp. duale	31
O. le rapp. ortogonali sono isomorfe alla duale	31
O. ogni rapp. è isomorfa alla biduale	31
T. (1) la duale di una rapp. irr. di grado finito è irr.	31
d. annullatore	31
d. (3.2) somma di rapp.	32
X. forma matriciale della somma di rapp.	32
T. (2) compl. rid. di grado finito equivale a somma di rapp. irr. (a meno di isomorfismi)	32
T. (3) se una rapp. è isomorfa a una somma di rapp. irr. allora le sue sottorapp. e rapp. quoziente sono isomorfe a somme di alcune delle rapp. irr.	33
C. se le sottorapp. su finiti sottospazi minimali invarianti sono a coppie non isomorfe, i sottospazi sono indipendenti	33
T. (4) la scomposizione in rapp. irr. è unica a meno di ordine e isomorfismi	33
d. (3.3) prodotto di rapp.	34
X. forma matriciale del prodotto di rapp.	34
X. (1) prodotto con una rapp. triviale	35
X. (2) prodotto con la duale	36
X. (3) quadrato della duale	36
X. (4) prodotto con una rapp. monodimensionale	36
O. il prodotto di irr. non è necessariamente irr.	36
d. (3.4) prodotto tensoriale di rapp.	37
X. forma matriciale del prodotto tensoriale	37
X. prodotto tensoriale con la duale	37

d. (3.5) estensione del campo di base	38
d. (3.6) complessificazione	38
X. complessificazione della rapp. di \mathbb{R} come rotazioni ..	38
T. (5) rapp. reali di grado finito sono isomorfe se e solo se lo sono le complessificazioni	39
O. (3.7) la complessificazione di un sottospazio invariante è un sottospazio invariante della complessificata ..	39
d. coniugazione di vettori	39
O. la coniugazione è antilineare	39
L. un sottospazio della complessificata è complessificazione di un sottospazio se e solo se è uguale al coniugato	40
O. la somme e l'intersezione con il coniugato sono uguali ai loro coniugati	40
T. (6) la complessificata di una rapp. irr. è o irr. o somma di due rapp. irr. con spazi coniugati	40
X. (2) rapp. fedele di S_3 con un triangolo	40
d. (3.7) sollevamento e fattorizzazione di rapp.	41
O. bigezione tra le rapp. del quoziente e le rapp. il cui nucleo contiene il sottogruppo normale	41
X. (1) SL_n è normale ed è nucleo del determinante	41
X. (2) gruppo di Klein	42
X. (3) tutte le rapp. di \mathbb{Z}_m fattorizzando quelle di \mathbb{Z} ..	42
d. sottogruppo commutatore	42
O. ogni rapp. monodimensionale è sollevamento di una rapp. monodimensionale del quoziente sul commutatore	42
X. tutte le rapp. monodimensionali di S_n	43
E. (1) descrivere la duale di una rapp. triviale	43
E. (2) irriducibilità della duale implica irriducibilità ..	43
E. (3) il passaggio alla duale commuta con la somma ..	43
E. (4) la completa irriducibilità passa alla duale	43
E. (5) la rapp. identica di SL_2 è isomorfa alla duale ..	43
E. (6) ogni rapp. compl. rid. è isomorfa alla somma della sottorapp. e della rapp. quoziente su uno stesso sottospazio invariante	43
E. (7) regola di cancellazione per la somma di rapp. compl. rid. di grado finito	43
E. (8) il prodotto di rapp. commuta con la somma	43
E. (9) il prodotto di rapp. è commutativo	43
E. (10) descrizione matriciale del quadrato di una rapp.	44
E. (11) il prodotto di due rapp. esponenziali di \mathbb{C} è una rapp. esponenziale; trovare l'esponente	44

- E. (12) il prodotto di una rapp. irr. con una monodimensionale è irr. 44
- E. (13) esplicitare la forma del prodotto tensoriale con la duale senza usare la forma matriciale 44
- E. (14) forma matriciale del quadrato tensoriale e confronto con il quadrato 44
- E. (15) la complessificata di una rapp. irr. di grado dispari è irr. 44
- E. (16) trovare le rapp. di grado finito di O_n i cui nuclei contengono SO_n 44
- E. (17) trovare le rapp. monodimensionali di A_4 44
- E. (18) SL_n è il commutatore di GL_n 44
- #### 4 Proprietà delle rappresentazioni irriducibili complesse
- d. (4.1) morfismo di rapp. 44
- X. la proiezione su un sottospazio invariante parallela a un suo complemento invariante è un morfismo dalla rapp. alla sottorapp. 45
- O. il nucleo e l'immagine di un morfismo sono sottospazi invarianti 45
- T. (1) i morfismi di rapp. irr. sono isomorfismi o nulli 45
- T. (2) se lo spazio di una rapp. si scompone in sottospazi invarianti minimali tali che le sottorapp. sono a coppie non isomorfe, allora ogni altro sottospazio invariante è somma di alcuni di essi 45
- d. (4.2) endomorfismo di rapp. 45
- T. (3) lemma di Schur 46
- C. tutti i morfismi di due rapp. irr. complesse isomorfe sono isomorfismi multipli tra loro 46
- T. (4) tutti i sottospazi del prodotto tensoriale dello spazio di una rapp. irr. complessa con quello di una triviale invarianti per il prodotto delle rapp. e minimali sono prodotti tensoriali dello spazio della rapp. irr. con un vettore nello spazio della triviale 46
- T. (5) le rapp. irr. complesse di un gruppo abeliano sono monodimensionali 47
- C. ogni rapp. complessa di un gruppo abeliano ha un sottospazio invariante minimale 47
- T. (6) il prodotto tensoriale di due rapp. irr. complesse è irr. 47
- T. ogni rapp. irr. complessa del prodotto di due gruppi è il prodotto tensoriale di due rapp. irr. dei gruppi 48
- d. (4.5) elementi matriciali di una rapp. 48
- d. spazio dei coefficienti matriciali 48
- P. (1) gli spazi dei coeff. mat. di rapp. isomorfe sono uguali 48
- P. (2) lo spazio dei coeff. mat. di una somma di rapp. è la somma dei rispettivi spazi di coeff. mat. 48
- d. rapp. regolare (bilatera) 49
- T. (7) isomorfismo tra il prodotto tensoriale di una rapp. irr. complessa con la duale e la rapp. reg. ristretta allo spazio dei coeff. mat. 49
- C. (1) dimensione dello spazio dei coeff. mat. 49
- C. (2) isomorfismo tra il prodotto di una rapp. triviale con la duale di una rapp. irr. complessa e la rapp. reg. sinistra ristretta allo spazio dei coeff. mat. della rapp. irr.; isomorfismo tra il prodotto di una rapp. irr. complessa con la duale di una triviale e la rapp. reg. destra ristretta allo spazio dei coeff. mat. della rapp. irr. 50
- C. (3) la rapp. reg. sinistra ristretta allo spazio dei coeff. mat. di una rapp. irr. complessa è isomorfa a un multiplo della duale della rapp. irr.; per la rapp. reg. destra vale con un multiplo della rapp. irr. 50
- C. (4) le rapp. reg. ristrette agli spazi dei coeff. mat. di due rapp. irr. complesse non isomorfe non sono isomorfe 50
- C. (5) gli spazi dei coeff. mat. di rapp. irr. complesse a coppie non isomorfe sono indipendenti 50
- X. scomposizione dello spazio dei coeff. mat. in una somma diretta di sottospazi invarianti per rapp. reg. sinistra o destra minimali 50
- X. rapp. monodimensionali esponenziali di un gruppo ciclico 51
- L. dati due prodotti hermitiani esiste un operatore lineare che applicato al primo fattore di un prodotto lo trasforma nell'altro 51
- T. (8) il prodotto hermitiano invariante di una rapp. irr. unitaria è unico a meno di un fattore costante 52
- T. (9) spazi invarianti minimali con sottorapp. non isomorfe di una rapp. unitaria sono ortogonali rispetto a qualunque prodotto hermitiano invariante 52
- E. (1) l'immagine attraverso morfismo di rapp. di un sottospazio invariante è un sottospazio invariante 52
- E. (2) gli endomorfismi della rapp. monomiale di S_n ristretta a un sottogruppo doppiamente transitivo sono combinazione lineare dell'identità e dell'operatore che manda la base nella somma della base 53
- E. (3) dimensione dello spazio dei morfismi da una combinazione lineare a coefficienti naturali a un'altra di rapp. irr. complesse a coppie non isomorfe 53
- E. (4) la sottorapp. monomiale sul sottospazio di vettori con somma delle componenti nulla ristretta a un sottogruppo doppiamente transitivo è irr. 53
- E. (5) trovare gli automorfismi della rapp. di \mathbb{R} come rotazioni 53
- E. (6) nello spazio di una rapp. complessa di un gruppo abeliano c'è una base che triangularizza la rapp. 53
- E. (7) le rapp. irr. reali di un gruppo abeliano sono al più bidimensionali 53

- E. (8) la rapp. reg. destra di un gruppo finito è isomorfa alla somma di tutte (a meno di isomorfismi) le rapp. irr. del gruppo moltiplicate per il loro grado 53
- E. (9) i sottospazi del prodotto tensoriale dello spazio di una rapp. irr. complessa con quello di una triviale invariante per il prodotto delle rapp. sono prodotti tensoriali dello spazio della rapp. irr. con un sottospazio della triviale 53
- E. (10) gli elementi matriciali di una rapp. irr. complessa sono indipendenti; è vero anche per una reale? ... 53
- E. (11) lo span dell'immagine di una rapp. irr. complessa è $L(V)$ 53
- E. (12) le rapp. irr. sono isomorfe a una sottorapp. della rapp. reg. destra 53
- E. (13) le rapp. irr. sono isomorfe a una sottorapp. della rapp. reg. sinistra 53
- E. (14) dimostrare i corollari 4 e 5 su campi arbitrari .54
- E. (15) il prodotto scalare invariante di una rapp. irr. ortogonale è unico a meno di un fattore costante positivo 54

5 Scomposizione della rappresentazione regolare

- T. (1) le rapp. irr. complesse di un gruppo finito sono finite a meno di isomorfismi 55
- T. (2) lo spazio delle funzioni a valori complessi da un gruppo finito è la somma diretta degli spazi dei coeff. mat. delle rapp. irr. complesse del gruppo 56
- C. (1) la somma dei quadrati dei gradi delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito è l'ordine del gruppo 56
- C. (2) le rapp. reg. destra e sinistra di un gruppo finito sono isomorfe alla somma delle rapp. irr. complesse del gruppo moltiplicate per il loro grado 57
- X. (1) il numero di rapp. irr. complesse di un gruppo finito abeliano è l'ordine del gruppo 57
- X. (2) rapp. irr. complesse di S_3 57
- d. (5.3) carattere di una rapp. 57
- X. (1) carattere di una rapp. monodimensionale 57
- X. (2) carattere di una rapp. triviale 57
- X. (3) carattere della rapp. di \mathbb{R} come rotazioni 57
- X. (4) carattere della rapp. monomiale di S_n 58
- X. (5) carattere della rapp. di S_3 con un triangolo 58
- O. i caratteri di rapp. isomorfe sono uguali 58
- O. carattere della somma e del prodotto di rapp. 58
- X. carattere della rapp. monomiale di S_n ristretta ai valori con somma delle componenti nulla 58
- O. il carattere è una funzione di classe 59

- d. funzione di classe 59
- O. (5.4) le funzioni di classe sono un sottospazio delle funzioni dal gruppo a valori complessi 59
- O. dimensione dello spazio delle funzioni di classe 59
- T. (3) i caratteri delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito sono una base delle funzioni di classe 59
- L. le funzioni di classe nello spazio dei coeff. mat. di una rapp. irr. complessa di un gruppo finito sono proporzionali al carattere della rapp. 59
- C. (1) il numero di rapp. irr. complesse di un gruppo finito è il numero di classi di coniugio 60
- C. (2) le rapp. irr. complesse di un gruppo finito sono univocamente identificate dal loro carattere (a meno di isomorfismo) 60
- X. (1) numero di classi di coniugio di un gruppo abeliano finito 60
- X. (2) classi di coniugio di S_4 e rapp. come rotazioni di un cubo 60
- d. (5.5) azione transitiva 61
- X. (1) transitività della azione naturale di S_n 61
- X. (2) transitività della azione di O_n sulla sfera 61
- d. azione l^H di un gruppo G sulle classi laterali di $H \subseteq G$ 61
- d. stabilizzatore 61
- P. ogni azione transitiva è isomorfa a un'azione l^H ... 61
- T. (4) il sottospazio dei vettori invarianti per rapp. reg. destra di un gruppo finito ristretta a un sottogruppo H è la somma lungo le rapp. irr. complesse del gruppo delle immagini attraverso l'isomorfismo dal prodotto tensoriale con la duale allo spazio dei coeff. mat. del prodotto tensoriale del sottospazio dei vettori invarianti per la rapp. irr. complessa ristretta a H con lo spazio della duale 62
- C. la rapp. come funzioni associata a l^H è isomorfa alla somma delle rapp. irr. complesse del gruppo finito moltiplicate per la dimensione del loro sottospazio dei vettori invarianti per la rapp. irr. ristretta a H ... 63
- L. il sottospazio massimale invariante per rapp. compl. rid. ha la stessa dimensione di quello per la duale 63
- X. azione del gruppo delle rotazioni del cubo sulle facce 63
- X. (5.7) rappresentazioni di A_5 64
- E. (1) trovare una base degli elementi matriciali di S_3 65
- E. (2) valore del carattere sull'identità 65
- E. (3) calcolare i caratteri (a) delle rapp. irr. complesse di S_3 (b) delle rapp. reg. sinistra e destra di un gruppo finito qualsiasi 65
- E. (4) trovare le rapp. irr. complesse di A_4 e i loro caratteri 65

- E.** (5) un gruppo con tutte le rapp. irr. complesse monodimensionali è abeliano 65
- E.** (6) un gruppo finito con più di due elementi ha più di due rapp. irr. complesse 65
- E.** (7) trovare le rapp. irr. complesse (a) del gruppo diedrale (b) del gruppo generalizzato delle unità dei quaternioni; verificare i corollari 1 dei teoremi 2 e 3 per questi esempi 65
- E.** (8) usando i caratteri, trovare per quali n la sottorapp. monomiale di S_n sui vettori con somma delle componenti nulla è isomorfa al suo prodotto con la rapp. di parità 65
- E.** (9) l'indice di H nel gruppo finito G è la somma lungo le rapp. irr. complesse di G del grado della rapp. moltiplicato per il grado della rapp. ristretta a H 65
- E.** (10) scomporre la rapp. come funzione associata a (a) l'azione del gruppo delle rotazioni del cubo sui vertici (b) l'azione del gruppo di simmetria completo del tetraedro sugli spigoli 66
- E.** (11) trovare il carattere della rapp. irr. complessa di grado 5 di A_5 66
- E.** (12) una rapp. di un gruppo finito è isomorfa alla duale se e solo se il carattere è a valori reali 66

6 Relazioni di ortogonalità

- d.** prodotto hermitiano nello spazio delle funzioni da un gruppo finito a valori complessi invariante per rapp. reg. 66
- T.** (1) gli elementi matriciali delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito scritti in una base ortonormale rispetto al prodotto hermitiano invariante di ogni rapp. sono una base ortogonale delle funzioni dal gruppo a valori complessi; la norma quadra di un elemento matriciale è l'inverso della dimensione della rapp. irr. 67
- C.** (1) i caratteri delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito sono una base ortonormale delle funzioni di classe 68
- C.** (2) i coefficienti nella scomposizione in rapp. irr. di una rapp. complessa di un gruppo finito sono dati dal prodotto invariante per rapp. reg. dei caratteri ... 68
- C.** (3) una rapp. complessa di un gruppo finito è irr. se e solo se il carattere ha norma 1 secondo il prodotto invariante per rapp. reg. 69
- X.** (1) matrice dei caratteri delle rapp. irr. di un gruppo abeliano finito 69
- X.** (2) tavola dei caratteri di A_5 69
- E.** (1) calcolare la norma quadra del carattere della rapp. reg. destra sia direttamente che usando la scomposizione in rapp. irr. 71
- E.** (2) la dimensione dello spazio dei vettori invarianti per rapp. complessa di un gruppo finito è il prodotto hermitiano del carattere della rapp. con quello identicamente unitario 71

- E.** (3) scrivere la tavola dei caratteri di S_4 e scomporre il quadrato della rapp. monomiale ristretta ai vettori con somma delle componenti nulla 71
- E.** (4) scomporre le rapp. di S_4 nello spazio delle funzioni (a) sui vertici del cubo (b) sugli spigoli del tetraedro 71
- E.** (5) scomporre $L(V)$ in sottospazi minimali invarianti per il prodotto di una rapp. irr. complessa tridimensionale di A_5 con la duale 71
- E.** (6) la rapp. associata a un'azione da un gruppo finito è isomorfa alla somma lungo le orbite H delle rapp. associate alle azioni l^H 71
- E.** (7) la somma lungo un gruppo finito di una rapp. irr. complessa moltiplicata per il carattere coniugato è l'ordine del gruppo diviso il grado della rapp. 71
- E.** (8) i gradi delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito dividono l'ordine del gruppo 71

7 I gruppi SU_2 e SO_3

- d.** algebra dei quaternioni 74
- d.** base dei quaternioni 74
- O.** regole di moltiplicazione per la base dei quaternioni 74
- O.** SU_2 come sfera nei quaternioni 74
- d.** omomorfismo da SU_2 in SO_3 75
- T.** l'omomorfismo da SU_2 in SO_3 è suriettivo; nucleo dell'omomorfismo 75
- L.** (1) un sottogruppo di SO_3 che agisce transitivamente sulla sfera e contiene le rotazioni intorno a un asse è SO_3 75
- L.** (2) ogni matrice 2×2 hermitiana a traccia nulla è coniugata con una matrice di SU_2 a una matrice diagonale a traccia nulla 76
- P.** (7.3) isomorfismo tra SO_3 e SU_2 quozientato sull'identità e sul suo opposto 76
- d.** topologia quoziente 77
- O.** le rapp. continue di un gruppo quoziente si ottengono fattorizzando le rapp. continue del numeratore ... 77
- L.** isomorfismo tra un gruppo topologico e il quoziente sul nucleo del dominio di un omomorfismo continuo al gruppo 77
- O.** SO_3 è isomorfo allo spazio proiettivo 78
- P.** le rapp. continue di SO_3 si ottengono fattorizzando le rapp. continue di SU_2 il cui nucleo contiene l'opposto dell'identità 78
- d.** rapp. di SL_2 come polinomi omogenei in due variabili e restrizione a SU_2 78
- P.** la rapp. di SU_2 come polinomi omogenei in due variabili è irr. 78

- O. la rapp. di SU_2 come polinomi omogenei in due variabili si fattorizza a SO_3 79
- E. (1) omomorfismo da $SU_2 \times SU_2$ in SO_4 e nucleo ... 79
- E. (2) esplicitare un isomorfismo tra la complessificazione della rapp. di SU_2 come matrici 2×2 hermitiane a traccia nulla e quella come polinomi omogenei di secondo grado in due variabili 79
- E. (3) le funzioni di classe su SU_2 sono determinate dalla restrizione al sottogruppo diagonale e sono pari nell'argomento degli elementi della diagonale 79
- E. (4) calcolare la restrizione del carattere della rapp. di SU_2 come polinomi omogenei in due variabili al sottogruppo diagonale 80
- E. (5) lo span dei caratteri delle rapp. di SU_2 come polinomi omogenei in due variabili ristretti al sottogruppo diagonale e visti come funzioni di un elemento della diagonale è lo spazio delle funzioni sul sottogruppo diagonale scrivibili come polinomi nei due elementi sulla diagonale e invarianti per coniugazione dell'argomento 80
- E. (6) integrale invariante su SU_2 ristretto alle funzioni di classe continue 80

9 Armoniche sferiche

- L. data un'azione transitiva continua di un gruppo compatto, la mappa naturale dal quoziente per uno stabilizzatore allo spazio di azione è un omeomorfismo 85
- L. (1) fissato SO_2 , in ogni sottospazio di dimensione finita, SO_3 -invariante e non nullo delle funzioni continue sulla sfera c'è una funzione non nulla SO_2 -invariante ... 86
- O. l'algebra dei polinomi complessi di tre variabili reali è SO_3 -invariante e si scompone in somma diretta di spazi di polinomi omogenei 87
- d. prodotto hermitiano sui polinomi complessi di tre variabili reali 87
- L. (2) sui polinomi complessi di tre variabili reali la moltiplicazione per una coordinata è l'aggiunto della derivazione per la stessa 87
- C. la moltiplicazione per il raggio quadro è l'aggiunto del laplaciano 87
- d. funzioni armoniche 88
- L. (3) il nucleo dell'operatore restrizione dei polinomi alla sfera non contiene polinomi omogenei 88
- T. (1) decomposizione dei polinomi omogenei in somma diretta di sottospazi SO_3 -invarianti minimali 88
- L. (4) ogni spazio di polinomi omogenei di grado fissato ammette una base di autofunzioni per una rotazione in SO_2 ; formule per autovalori e molteplicità 89
- T. (2) lo spazio dei polinomi ristretto alla sfera si scompone in somma diretta ortogonale di sottospazi SO_3 -invarianti minimali; dimensioni e basi dei sottospazi 89

- d. armoniche sferiche 89
- C. le armoniche sferiche sono un insieme ortonormale completo nello spazio delle funzioni continue sulla sfera 90
- L. ortogonalità dei polinomi di Legendre 91
- T. (3) espressione delle armoniche sferiche di ordine 0 91
- X. polinomi di Legendre fino al quinto ordine 92
- X. espressione generale delle armoniche sferiche 92
- E. (3) le armoniche di ordine non nullo si annullano sul polo nord 92
- E. (4) espressioni esplicite per le armoniche di indice 1 e 2 92
- E. (5) espressione delle armoniche di ordine massimo .92
- E. (6) espressione delle armoniche di ordine negato ... 92
- E. (7) formula di Rodrigues 92

Bracci: Appunti del corso Metodi matematici per la Fisica I, 2004

1 Spazi normati e con prodotto scalare

1.1 Definizioni e proprietà elementari

- d. (1.1.1) norma 1
- d. (1.1.2) spazio normato 1
- d. (1.1.3) limite 1
- d. (1.1.4) punto di accumulazione 2
- d. (1.1.5) insieme limitato 2
- L. (1.1.1) unicità del limite su un punto di accumulazione 2
- L. (1.1.2) unicità del limite per $x \rightarrow \infty$ 2
- d. (1.1.6) limite di una successione 2
- L. (1.1.3) unicità del limite di una successione 2
- d. (1.1.7) continuità in un punto 2
- L. (1.1.4) definizione di continuità con il limite 2
- L. (1.1.5) definizione di continuità con le successioni ... 2
- T. (1.1.1) la somma di funzioni continue è continua 3
- L. (1.1.6) la somma dei limiti è il limite della somma .. 3
- T. (1.1.2) la composizione di funzioni continue è continua 3
- d. (1.1.8) continuità sul dominio 3
- d. (1.1.9) funzione lipschitziana 3
- L. (1.1.7) lipschitziana \Rightarrow continua 3
- T. (1.1.3) la norma è lipschitziana 3
- d. (1.1.10) norme equivalenti 4

L. (1.1.8) norme equivalenti \implies limiti di successioni uguali	4
L. (1.1.9) norme equivalenti \implies limiti di funzioni uguali	4
1.2 Topologia	
d. (1.2.1) palle aperte e chiuse	4
d. (1.2.2) insiemi aperti e chiusi	4
L. (1.2.1) le palle aperte sono aperte e le palle chiuse sono chiuse	4
T. (1.2.1) proprietà generali della famiglia degli aperti ..	5
T. (1.2.2) proprietà generali della famiglia dei chiusi ...	5
T. (1.2.3) definizione di chiuso con le successioni	5
T. (1.2.4) i chiusi e gli aperti per norme equivalenti sono gli stessi	5
d. (1.2.3) chiusura	6
T. (1.2.5) definizione di chiusura con le successioni	6
C. (1.2.1) la chiusura della palla aperta è la palla chiusa	6
d. (1.2.4) insiemi compatti per successioni e relativamente compatti	6
L. (1.2.2) compatto \implies chiuso e limitato	6
T. (1.2.6) (Weierstrass) una funzione continua su un compatto ammette massimo e minimo	6
d. (1.2.5) continuità uniforme	7
O. uniformemente continua \implies continua	7
T. (1.2.7) (Heine-Cantor-Borel) continua su un compatto \implies uniformemente continua	7
T. (1.2.8) in uno spazio di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti	7
X. esempio di spazio di dimensione infinita con norme non equivalenti	8
C. (1.2.2) (Bolzano-Weierstrass) in uno spazio di dimensione finita gli insiemi chiusi e limitati sono compatti	8
X. esempio di spazio di dimensione infinita con insieme chiuso e limitato ma non compatto	8
C. (1.2.3) (Bolzano-Weierstrass) in uno spazio di dimensione finita i sottoinsiemi infiniti e limitati hanno un punto di accumulazione	8
d. (1.2.6) densità	8
d. (1.2.7) parte interna	9
O. definizione di parte interna con le palle aperte	8
L. (1.2.3) parte interna vuota \iff complementare denso	8

1.3 Spazi di Banach

d. (1.3.1) successione di Cauchy ovvero fondamentale ..	9
O. le successioni di Cauchy per norme equivalenti sono le stesse	9
L. (1.3.1) le successioni convergenti sono di Cauchy	9
d. (1.3.2) spazi completi e di Banach	9
L. (1.3.2) la completezza rispetto a norme equivalenti è equivalente	9
O. \mathbb{R} è uno spazio di Banach	9
T. (1.3.1) gli spazi di dimensione finita sono completi ..	9
C. (1.3.1) i sottospazi di dimensione finita sono chiusi	10
T. (1.3.2) esistenza del completamento	10
d. (1.3.3) completamento	11
d. (1.3.4) spazi delle funzioni continua su un intervallo con e senza supporto compatto	11
L. (1.3.3) lo spazio delle funzioni continua su un intervallo limitato a supporto compatto non è completo per norma L^1	11
d. (1.3.5) spazio L^1	11
T. (1.3.3) definizione di L^1 come funzioni integrabili ..	11
T. (1.3.4) (Weierstrass) lo spazio dei polinomi in una variabile è denso nello spazio delle funzioni continue su un intervallo limitato per norma ∞	12
X. controesempio con intervallo illimitato	12
C. (1.3.2) su un intervallo limitato i polinomi in una variabile sono densi in L^1	13
d. (1.3.6) spazi delle funzioni infinitamente derivabili con e senza supporto compatto	13
C. (1.3.3) su un intervallo limitato le funzioni lisce sono dense in L^1	13
T. (1.3.5) su un intervallo limitato le funzioni lisce a supporto compatto sono dense in L^1	13
d. (1.3.7) funzione caratteristica di un insieme	13
C. (1.3.4) su un intervallo illimitato le funzioni lisce a supporto compatto sono dense in L^1	13
d. (1.3.8) spazio L^p	14
T. (1.3.6) (Fisher-Riesz) gli spazi L^p sono di Banach ..	14
T. (1.3.7) lo spazio delle funzioni lisce a supporto compatto è denso in L^p	14
T. (1.3.8) (Disuguaglianza di Hölder)	14
C. (1.3.5) su un intervallo limitato $p > q \implies L^p \subseteq L^q$	14
X. controesempio su un intervallo illimitato	14
T. (1.3.9) una successione convergente in L^p ammette una sottosuccessione puntualmente convergente	15

X. (1.3.1) la convergenza in L^p non implica la convergenza puntuale quasi ovunque	15
T. (1.3.10) su un intervallo limitato una successione in L^p che converge uniformemente converge in L^p	15
E. (1.3.2) controesempio per un intervallo illimitato ..	15
T. (1.3.11) una successione limitata in L^p che converge puntualmente converge in L^p	15
E. (1.3.3) controesempio per una successione non limitata	15
T. (1.3.2) (delle contrazioni di Banach) in uno spazio di Banach le contrazioni ammettono uno e un solo punto fisso	15

1.4 Prodotti scalari

d. (1.4.1) prodotto scalare	16
T. (1.4.1) (Cauchy-Schwarz)	16
O. la maggiorazione di Cauchy-Schwarz vale anche per prodotti scalari degeneri	17
C. (1.4.1) norma indotta da un prodotto scalare	17
T. (1.4.2) un prodotto scalare è continuo per la norma che induce	17
T. (1.4.3) identità del parallelogramma	18
X. norma che non deriva da un prodotto scalare	18
T. (1.4.4) formula di polarizzazione	18
T. (1.4.5) (von Neumann) una norma che soddisfa l'identità del parallelogramma è indotta da un prodotto scalare	18
C. (1.4.2) una norma è indotta da un prodotto scalare se e solo se soddisfa l'identità del parallelogramma ..	19
C. (1.4.3) la norma p -esima è indotta da un prodotto scalare se e solo se $p = 2$	20

1.5 Proprietà elementari degli spazi di Hilbert

d. (1.5.1) spazio di Hilbert	20
T. (1.5.1) L^2 è di Hilbert	20
d. (1.5.2) insieme completo e base	20
L. (1.5.1) un vettore ortogonale a un insieme completo è nullo	20
d. (1.5.3) insieme ortonormale	20
T. (1.5.2) (Disuguaglianza di Bessel)	21
C. (1.5.1) il prodotto scalare di un vettore con una successione ortonormale converge a 0	21
T. (1.5.3) un insieme numerabile di vettori tale che ogni vettore ortogonale all'insieme è nullo è completo ..	21
C. (1.5.2) un insieme numerabile è completo se e solo se l'unico vettore ortogonale a esso è 0	22
T. (1.5.4) serie di Fourier	22

T. (1.5.5) valore minimo della differenza tra un vettore e una serie parziale lungo un insieme numerabile ortonormale	22
C. (1.5.3) (identità di Parseval) un insieme numerabile ortonormale è completo se e solo se la norma quadra di ogni vettore è la serie di Fourier delle norme quadre	22
T. (1.5.6) (Fisher-Riesz) fatti equivalenti alla completezza per un insieme ortonormale numerabile	22
T. (1.5.7) una serie lungo una successione ortonormale completa converge se e solo se converge la serie dei moduli quadri dei coefficienti	23

2 Equazioni differenziali alle derivate parziali

2.1 Serie di Fourier

T. (2.1.1) (Lemma di Riemann-Lebesgue)	$f \in L^1(-\infty, \infty) \implies \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx = 0$	24
T. (2.1.2)	$\phi \in C_c^\infty(-\infty, \infty) \implies \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^r \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{i\alpha x} dx = 0$	25
d. (2.1.1) polinomio trigonometrico		25
L. (2.1.1) le potenze intere di funzioni trigonometriche sono polinomi trigonometrici		25
T. (1.2.3) (Weierstrass) i polinomi trigonometrici sono densi nelle funzioni continue a supporto compatto sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ con la norma ∞		25
C. (2.1.1) i polinomi trigonometrici sono densi in $L^2(-\pi, \pi)$		26
L. (2.1.2) $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è un insieme ortogonale in $L^2(-\pi, \pi)$		26
T. (2.1.4) $\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$		26
T. (2.1.5) $\{\sin(nx)/\sqrt{\pi}\}_{n \in \mathbb{N}_0} \cup \{\cos(nx)/\sqrt{\pi}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una base ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$		26
L. (2.1.3) $\sum_{-\infty}^{\infty} z_n < \infty \implies \sum_{-\infty}^{\infty} z_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ converge uniformemente ed è continua		26
L. (2.1.4) $\sum_{-\infty}^{\infty} na_n < \infty \implies \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ è continua e derivabile termine a termine		26
d. serie di Fourier in $L^1(-\pi, \pi)$		27
T. (2.1.6) $f \in L^1(-\pi, \pi)$, f continua in x_0 , il rapporto incrementale di f intorno a x_0 è integrabile intorno a $x_0 \implies$ la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in x_0		27

T. (2.1.7) (criterio di Dini) $f \in L^1(-\pi, \pi)$, $\exists f(x_0^+), f(x_0^-)$, i rapporti incrementali di f a destra e a sinistra di x_0 sono in L^1 intorno a destra di 0 \implies la serie di Fourier di f converge alla media dei limiti destro e sinistro di f in x_0 28

T. (2.1.8) f periodica con periodo 2π , $f \in C^1 \implies$ la serie di Fourier di f converge uniformemente a f 28

2.2 Problema ai limiti per il quadrato 29

2.3 Problema ai limiti per il cerchio 33

2.3.3 Funzioni armoniche

d. (2.3.1) funzione armonica 38

d. (2.3.2) problema di Dirichlet 39

T. (2.3.1) soluzione del problema di Dirichlet su un disco con condizione al bordo continua 39

T. (2.3.2) (Principio del massimo) per una funzione continua sulla chiusura di un aperto limitato con laplaciano non negativo sull'aperto, l'estremo superiore sull'aperto è maggiorato dal massimo sulla frontiera 39

C. (2.3.1) una soluzione del problema di Dirichlet su un aperto limitato è compresa tra il minimo e il massimo della condizione al bordo 39

C. (2.3.2) l'unica soluzione del problema di Dirichlet su un aperto limitato con condizione al bordo nulla è la funzione nulla 40

C. (2.3.3) unicità della soluzione del problema di Dirichlet 40

C. (2.3.4) unicità della soluzione del problema di Dirichlet su un disco con condizione al bordo continua 40

C. (2.3.5) (Teorema della media) 40

C. (2.3.6) una funzione armonica su un aperto connesso il cui modulo ammette massimo è costante 40

2.3.4 Lemma di Green e sue conseguenze

L. (2.3.1) (lemma di Green) $f, g \in C^2 \implies$

$$\int_S (f \Delta g - g \Delta f) dS = \int_\sigma \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\sigma$$

..... 41

T. (2.3.3) (teorema della media) 41

d. (2.3.3) funzione di Green in due dimensioni 42

L. (2.3.2) f continua in $\underline{y} \implies$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\underline{x}|=\epsilon} f(\underline{x}) \frac{\partial G}{\partial n}(\underline{x}, \underline{y}) d\sigma = f(\underline{y})$$

..... 42

T. (2.3.4) (simmetria della funzione di Green) 43

T. (2.3.5) soluzione del problema di Dirichlet con condizione al bordo nulla usando la funzione di Green 43

2.4 Equazione delle onde 45

3 Spazi di Hilbert ed Operatori lineari

3.1 Geometria degli spazi di Hilbert

d. (3.1.1) spazio ℓ^2 50

T. (3.1.1) lo spazio ℓ^2 è di Hilbert 50

L. (3.1.1) le successioni $e_n^{(i)} = \delta_{in}$ sono una base ortonormale di ℓ^2 51

T. (3.1.2) gli spazi di Hilbert di dimensione infinita con una base numerabile sono isomorfi a ℓ^2 51

d. (3.1.2) spazio separabile 51

T. (3.1.3) uno spazio Hilbert ha una base ortonormale finita o numerabile se e solo se è separabile 51

T. (3.1.4) i sottoinsiemi ortonormali di uno spazio separabile sono al più numerabili 52

X. spazio di Hilbert non separabile 52

X. altro spazio di Hilbert non separabile 53

d. (3.1.3) sottospazio di Hilbert 53

L. (3.1.2) i vettori ortogonali a un sottoinsieme dato sono uno sottospazio di Hilbert 53

L. (3.1.3) la chiusura di un sottospazio vettoriale è un sottospazio di Hilbert 53

d. (3.1.4) insieme convesso 54

T. (3.1.5) (proiezione su un convesso chiuso) 54

d. (3.1.5) insieme ortogonale a uno dato 54

T. (3.1.6) (della proiezione ortogonale) 55

d. (3.1.6) somma diretta in uno spazio di Hilbert 55

3.2 Operatori e funzionali lineari

d. (3.2.1) operatore lineare e nucleo 55

T. (3.2.1) fatti equivalenti alla continuità per un operatore lineare tra spazi normati 55

d. (3.2.2) norma di un operatore lineare tra spazi normati e operatore limitato 56

L. (3.2.1) un operatore lineare tra spazi normati è continuo se e solo se è limitato 56

L. (3.2.2) gli operatori lineari su spazi normati di dimensione finita sono limitati 56

X. controesempio in dimensione infinita 56

L. (3.2.3) definizione della norma di un operatore maggiorandola con la norma dell'argomento 56

T. (3.2.2) lo spazio degli operatori lineari da uno spazio normato a uno di Banach è di Banach 57

d. (3.2.3) funzionale lineare e spazio duale 57

T. (3.2.3) (di rappresentazione di Riesz) 57

d. (3.2.4) operatore aggiunto	58
L. (3.2.4) la norma della composizione di operatori lineari continui è minore o uguale del prodotto delle norme	58
L. (3.2.5) l'aggiunto di un operatore lineare continuo è continuo e ha la stessa norma	58
L. (3.2.6) la norma quadra di un operatore lineare continuo è la norma della composizione con l'aggiunto	58
T. (3.2.4) un operatore lineare continuo su un sottospazio denso si estende in modo unico	58
T. una funzione uniformemente continua da un sottoinsieme di uno spazio normato a uno spazio di Banach si estende in modo unico alla chiusura del dominio ..	59

3.3 Proiettori

d. (3.3.1) proiettore	59
T. (3.3.1) proprietà del proiettore	59
L. (3.3.1) $\forall x (Ax, x) = 0 \implies A = 0$	60
X. controesempio per spazi su \mathbb{R}	60
T. (3.3.2) un operatore lineare di ordine 2 e autoaggiunto è un proiettore	60
C. l'immagine di un proiettore è di vettori fissati	61
T. (3.3.3) un operatore lineare limitato di ordine 2 tale che $(x - Px, Px) = 0$ è un proiettore	61
C. (3.3.1) un operatore lineare limitato di ordine 2 con l'immagine ortogonale al nucleo è un proiettore ...	61
L. (3.3.2) l'immagine di un operatore di ordine 2 sono gli elementi fissati	61
T. (3.3.4) un operatore lineare di ordine 2 con norma minore o uguale a 1 è un proiettore	61
T. (3.3.5) la composizione di due proiettori è un proiettore se e solo se commutano, in tal caso l'immagine è l'intersezione delle immagini	61
L. (3.3.3) la composizione di due proiettori è nulla se e solo se le immagini sono ortogonali e se e solo se la composizione nell'altro ordine è nulla	61
L. (3.3.6) la somma di proiettori è un proiettore se e solo se le composizioni sono nulle e se e solo se le immagini sono ortogonali; in tal caso l'immagine della somma è la somma diretta delle immagini	62
L. (3.3.4) un'applicazione è un proiettore se e solo se il complemento all'identità è un proiettore	62
T. (3.3.7) la differenza di due proiettori è un proiettore se e solo se la composizione del complemento all'identità del minuendo con il sottraendo è nulla e l'immagine è il complemento ortogonale dell'immagine del sottraendo rispetto a quella del minuendo	62

3.4 Particolari classi di operatori

d. (3.4.1) operatore unitario	63
L. (3.4.1) gli operatori unitari sono lineari	63
O. per il lemma precedente non serve l'ipotesi di surgettività	63
L. (3.4.2) gli operatori unitari sono limitati, biunivoci e con inverso unitario	63
L. (3.4.3) un operatore lineare surgettivo che lascia invariata la norma è unitario	63
L. (3.4.4) un operatore limitato è unitario se e solo se è surgettivo e l'aggiunto è l'inverso	64
d. (3.4.2) isometria	64
O. se uno spazio di Hilbert è separabile allora è isometrico a ℓ^2	64
d. (3.4.3) autovalore, autovettore, autospazio, spettro puntuale	64
d. (3.4.4) autoaggiunto, normale	64
L. (3.4.5) gli autovalori di un operatore autoaggiunto sono reali	64
O. autoaggiunto \implies normale	64
L. (3.4.6) gli autovettori dell'aggiunto di un operatore normale sono gli stessi ma con autovalore coniugato	64
L. (3.4.7) autovettori relativi ad autovalori distinti di un operatore normale sono perpendicolari	65
d. (3.4.5) sottospazio invariante	65
T. (3.4.1) (teorema spettrale normale)	65
L. (3.4.8) in uno spazio di Hilbert di dimensione finita l'ortogonale di un sottospazio è invariante per un operatore normale se e solo se è invariante per l'aggiunto	65
X. controesempio al teorema spettrale in dimensione infinita	66
d. (3.4.6) polinomio minimo	66
T. (3.4.2) gli autovalori sono le radici del polinomio minimo	66
d. (3.4.7) operatore compatto ovvero completamente continuo	66
L. (3.4.9) gli operatori compatti sono limitati	66
L. (3.4.10) comporre un operatore compatto con uno limitato dà operatori compatti	66
T. (3.4.3) un operatore limitato è compatto se e solo se lo è l'aggiunto	66
L. (3.4.11) un operatore limitato di rango finito è compatto	67
T. (3.4.4) il limite di una successione di operatori compatti è compatto	67

C. (3.4.1) gli operatori di Hilbert-Schmidt sono compatti 67	C. (3.5.3) la trasformata in L^2 è biunivoca 77
d. operatore di Hilbert-Schmidt 68	T. (Teorema di Plancherel) definizione unitaria della trasformata 78
L. (3.4.12) l'aggiunto di un operatore di Hilbert-Schmidt si ottiene coniugando il moltiplicatore 68	T. (3.5.5) trasformata in L^2 come limite lungo intervalli di integrazione 78
C. (3.4.2) gli operatori di Hilbert-Schmidt con moltiplicatore reale sono compatti e autoaggiunti 68	T. (3.5.6) antitrasformata in L^2 come limite lungo intervalli di integrazione 78
L. (3.4.13) T limitato $\Rightarrow \ T\ = \sup_{\ x\ =\ y\ =1} (x, Ty) $ 68	C. (3.5.4) in $L^2 \cap L^1$ vale la formula integrale per la trasformata 78
L. (3.4.14) T limitato autoaggiunto $\Rightarrow \ T\ = \sup_{\ x\ =1} (x, Tx) $ 69	C. (3.5.5) se una funzione in L^2 ha trasformata in L^1 , allora vale la formula integrale per l'antitrasformata 79
T. (3.4.5) un operatore compatto autoaggiunto ha un autovalore uguale in modulo alla norma 69	X. trasformata di $1/(1+x^2)$ 79
L. (3.4.15) gli autospazi di un operatore compatto diversi dal nucleo hanno dimensione finita 70	d. (3.5.4) trasformata e trasformata inversa in L^1 79
T. (3.4.6) (teorema spettrale compatto autoaggiunto) 70	X. la trasformata inversa in generale non è l'inverso della trasformata 79
C. (3.4.3) per ogni operatore compatto autoaggiunto esiste una base ortonormale di autovettori 72	L. (3.5.3) $\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ 79
T. (3.4.7) dati due operatori compatti autoaggiunti che commutano esiste una base ortonormale al più numerabile dell'ortogonale dell'intersezione dei nuclei composta di autovettori comuni 72	T. (3.5.7) se una funzione di L^1 è continua in un punto intorno al quale il rapporto incrementale è integrabile, allora il valore in quel punto si ottiene come limite lungo intervalli di integrazione della trasformata inversa 80
L. (3.4.16) la somma di operatori compatti è compatta 72	L. (3.5.4) la trasformata della traslata di una funzione in $L^1 \cup L^2$ porta fuori una fase proporzionale alla traslazione 81
C. (3.4.4) (teorema spettrale compatto normale) 73	L. (3.5.5) la trasformata del rifasamento di una funzione in $L^1 \cup L^2$ porta fuori una traslazione antiproporzionale alla fase 81
X. applicazione del teorema spettrale ai problemi di Dirichlet e Sturm-Liouville 73	d. (3.5.5) prodotto di convoluzione in L^1 82
3.5 Trasformata di Fourier	L. (3.5.6) il prodotto di convoluzione in L^1 è a valori in L^1 82
d. (3.5.1) classe di Schwartz 74	T. (3.5.8) la trasformata del prodotto di convoluzione in L^1 è il prodotto delle trasformate 82
O. la classe di Schwartz è non vuota, è contenuta in L^1 e il prodotto tra una potenza e una funzione della classe è in L^1 74	d. (3.5.6) prodotto di convoluzione in $L^1 \times L^p$ 82
d. (3.5.2) trasformata di Fourier 74	T. (3.5.9) il prodotto di convoluzione in $L^1 \times L^p$ è a valori in L^p e la norma del prodotto si maggiora con il prodotto delle norme 82
L. (3.5.1) la classe di Schwartz è densa in L^2 75	T. (3.5.10) la trasformata del prodotto di convoluzione in $L^1 \times L^2$ è il prodotto delle trasformate 83
T. (3.5.1) la trasformata di Fourier è a valori nella classe di Schwartz 75	L. (3.5.7) la traslazione di funzioni L^1 è uniformemente continua 83
T. (3.5.2) antitrasformata di Fourier 75	L. (3.5.8) $f \in L^1$, $h_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} \Rightarrow (f * h_\lambda)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{- \lambda t } \hat{f}(t) e^{-ixt} dt$ 83
C. (3.5.1) la trasformata è suriettiva 76	L. (3.5.9) $f \in L^1 \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \ f * h_\lambda - f\ = 0$ 84
T. (3.5.3) (Identità di Parseval) il prodotto scalare di due trasformate è 2π volte il prodotto delle funzioni .. 77	T. (3.5.11) (formula di inversione) per una funzione in L^1 con trasformata in L^1 , la trasformata inversa è l'inverso della trasformata quasi ovunque 84
C. (3.5.2) la trasformata è biunivoca 77	C. (3.5.6) se due funzioni in L^1 hanno la stessa trasformata allora coincidono quasi ovunque 84
d. (3.5.3) estensione della trasformata a L^2 77	
O. in generale su L^2 non vale la formula integrale per la trasformata 77	
L. (3.5.2) la trasformata in L^2 è suriettiva 77	
T. (3.5.4) (Identità di Parseval) vedi teorema 3.5.3, però in L^2 77	

L. (3.5.10) la trasformata inversa di una funzione L^1 è continua	85	O. assolutamente continua implica uniformemente continua	91
C. (3.5.7) per una funzione in L^1 con trasformata in L^1 , la trasformata inversa è l'inverso della trasformata quasi ovunque	85	L. (3.6.7) la funzione integrale di una funzione L^1 è assolutamente continua	91
3.6 Operatori chiusi e chiudibili			
d. (3.6.1) operatore chiuso	85	T. (3.6.6) (teorema fondamentale del calcolo) le funzioni assolutamente continue sono derivabili quasi ovunque con derivata L^1 e sono la funzione integrale della derivata	91
d. prodotto cartesiano di spazi di Hilbert	85	C. (3.6.2) una funzione su un intervallo compatto a valori complessi è la funzione integrale di una funzione L^1 se e solo se è assolutamente continua; in tal caso è funzione integrale della sua derivata quasi ovunque	91
d. (3.6.2) grafico	85	T. (3.6.7) (formula di integrazione per parti)	91
O. il grafico di un operatore lineare è un sottospazio ..	85	X. funzione di Cantor-Vitali	91
L. (3.6.1) un operatore è chiuso se e solo se il grafico è un sottospazio chiuso	85	X. (3.6.6) l'estensione chiusa minimale dell'operatore derivata su funzioni C^1 su un intervallo compatto a valori in L^2 è l'operatore derivata sulle funzioni assolutamente continue	92
L. (3.6.2) gli operatori lineari limitati sono chiusi	86		
T. (3.6.1) (teorema del grafico chiuso di Banach) gli operatori lineari chiusi sono limitati	86		
d. (3.6.3) valore aggiunto	86		
O. unicità del valore aggiunto	86		
L. (3.6.3) operatore aggiunto	86		
d. (3.6.4) operatore aggiunto	86		
L. (3.6.4) l'aggiunto è chiuso	86		
X. (3.6.1) operatore lineare senza biaggiunto	86		
X. (3.6.2) operatore non chiuso	87		
X. (3.6.3) operatore chiuso non limitato	87		
X. (3.6.4) l'operatore derivata sulle funzioni L^2 su un intervallo aperto limitato con derivata in L^2 quasi ovunque non è chiuso	88		
T. (3.6.2) estensione di un operatore lineare chiuso sull'origine	88		
C. (3.6.1) un operatore lineare ha estensione chiusa se e solo se è chiuso sull'origine	88		
d. (3.6.5) operatore chiudibile e estensione minimale ..	88		
L. (3.6.5) esistenza dell'estensione minimale	88		
X. (3.6.5) l'operatore derivata sulle funzioni C^1 su un intervallo compatto a valori in L^2 non è chiuso ma è chiudibile	89		
T. (3.6.3) gli operatori con biaggiunto sono chiudibili e estesi dal biaggiunto	89		
L. (3.6.6) la chiusura dell'immagine unitaria di un sottospazio è l'immagine della chiusura	89		
T. (3.6.4) l'estensione minimale di un operatore lineare chiudibile con aggiunto è il biaggiunto	90		
T. (3.6.5) (teorema fondamentale del calcolo secondo Lebesgue)	90		
d. (3.6.6) funzione assolutamente continua	91		