Indice globale di definizioni, teoremi, proposizioni, lemmi, osservazioni, corollari, esempi, esercizi per fisica II, 2015-2016

Indice

Serre: Rappresentazioni lineari di gruppi finiti, 1971 **1**
1 Generalità sulle rappresentazioni 1
2 Teoria dei caratteri 1
3 Sottogruppi, prodotti, rappresentazioni indotte 2
5 Esempi 2

Vinberg: Rappresentazioni lineari di gruppi, 1989 **3**
0 Nozioni di base 3
1 Sottospazi invarianti 3
2 Completa riducibilità delle rappresentazioni di gruppi compatti 4
3 Operazioni di base sulle rappresentazioni . . . 5
4 Proprietà delle rappresentazioni irriducibili complesse 6
5 Scomposizione della rappresentazione regolare 7
6 Relazioni di ortogonalità 8
7 I gruppi SU_2 e SO_3 8

Bracci: Appunti del corso Metodi matematici per la Fisica I, 2004 **9**
1 Spazi normati e con prodotto scalare 9
1.1 Definizioni e proprietà elementari . . . 9
1.2 Topologia 9
1.3 Spazi di Banach 9
1.4 Prodotti scalari 10
1.5 Proprietà elementari degli spazi di Hilbert 10
2 Equazioni differenziali alle derivate parziali . . 10
2.1 Serie di Fourier 10
2.2 Problema ai limiti per il quadrato . 29 11
2.3 Problema ai limiti per il cerchio . . 33 11
2.3.3 Funzioni armoniche 11
2.3.4 Lemma di Green e sue conseguenze 11
2.4 Equazione delle onde . . . . . . 45 . . . 11
3 Spazi di Hilbert ed Operatori lineari 11
3.1 Geometria degli spazi di Hilbert . . . 11
3.2 Operatori e funzionali lineari 12
3.3 Proiettori 12
3.4 Particolari classi di operatori 12
3.5 Trasformata di Fourier 13

Serre: Rappresentazioni lineari di gruppi finiti, 1971

1 Generalità sulle rappresentazioni

d. rappresentazione unitaria 4

d. rapp. regolare 5

d. rapp. di permutazioni 5

d. sottorappresentazione 5

T. (1) un sottospazio stabile ha un complemento stabile . 6

d. somma diretta 7

d. rapp. irriducibile 7

T. (2) le rapp. si scompongono in rapp. irr. 7

d. prodotto tensoriale 8

d. prodotto tensoriale di rapp. (su un gruppo) 8

d. quadrati simmetrico e alternante 9

2 Teoria dei caratteri

d. carattere 10

P. (1) proprietà di base del carattere 10

d. funzione di classe 11

P. (2) carattere della somma e del prodotto 11

P. (3) carattere dei quadrati simm. e alt. 11

E. (1) carattere dei quadrati simm. e alt. della somma . . 12

E. (2) carattere della rapp. di perm. 12

E. (3) rapp. duale 12

E. (4) rapp. sugli omomorfismi tra spazi di rappresentazione 12

P. (4) lemma di Schur 13

C. (1) applicazione alla media 13

C. (2) media del prodotto dei coefficienti di matrici di due rapp. irr. non isomorfe 14

C. (3) media del prodotto dei coefficienti di matrici di una rapp. irr. 14

d. prodotto scalare sui caratteri 15

T. (3) ortonormalità dei caratteri irr. 15

T. (4) calcolo del numero di componenti irr. isomorfe a una data rapp. irr. 16

C. (1) la scomposizione in rapp. irr. è unica a meno di ordine e isomorfismi 16

C. (2) rapp. con lo stesso carattere sono isomorfe 16

T. (5) criterio di irriducibilità 17

d. orbita 17

d. transitività 17

E. (6a) la rapp. di perm. contiene rapp. unitarie quante le orbite 17

E. (6b) carattere della rapp. di perm. sul prodotto cartesiano 17

d. doppia transitività 17

E. (6c) fatti equivalenti alla doppia transitività 17

P. (5) carattere della rapp. reg. 18

C. (1) scomposizione della rapp. reg. 18

C. (2) relazione sui gradi delle rapp. irr. 18

P. (6) somma lungo il gruppo di una funzione di classe per una rapp. irr. 19

d. spazio delle funzioni di classe 19

T. (6) i caratteri delle rapp. irr. sono una base delle funzioni di classe 19

T. (7) numero di rapp. irr. 19

P. (7) relazioni sulla grandezza delle classi e sui caratteri irr. 20

d. scomposizione canonica 21

T. (8) proiezioni sulla scomposizione canonica 21

E. (8a) dimesione dello spazio delle applicazioni lineari dallo spazio di rappresentazione di una componente irr. a quello della rapp. scomposta che commutano con la rapp. 22

E. (8b) isomorfismo tra il prodotto della comp. irr. con lo spazio dell'es. (8a) e la corrispondente comp. canonica 22

P. (8) scomposizione di una comp. canonica 23

E. (9) isomorfismo tra lo spazio dell'es. 8a e il sottospazio della comp. canonica associato alla mappa della prop. 8 24

E. (10) sottorapp. minima per un punto 24

3 Sottogruppi, prodotti, rappresentazioni indotte

d. gruppo abeliano 25

T. (9) abeliano equivale ad avere rapp. irr. solo di grado 1 25

d. indice di un sottogruppo 25

C. limite superiore ai gradi delle rapp. irr. dato un sottogruppo abeliano 25

E. (1) anche i gruppi abeliani infiniti hanno rapp. irr. solo di grado 1 26

d. centro di un gruppo 26

E. (2a) le rapp. irr. sono omotetie sul centro 26

E. (2b) limite superiore al grado di una rapp. irr. dato il centro 26

d. rapp. fedele 26

E. (2c) rapp. fedele implica centro ciclico 26

E. (3) gruppo duale 26

d. gruppo prodotto 26

d. prodotto diretto di sottogruppi 27

d. prodotto tensoriale di rapp. (su gruppi diversi) 27

T. (10i) irriducibilità del prodotto di irriducibili 27

T. (10ii) tutti gli irriducibili sul prodotto sono prodotto di irriducibili 27

d. classe laterale sinistra 28

d. congruenza modulo un sottogruppo 28

d. quoziente su un sottogruppo 28

d. rapp. indotta 28

X. (1) induzione della rapp. reg. 29

X. (2) la rapp. unitaria induce la rapp. di perm. sul quoziente 29

X. (3) l'induzione della somma è la somma degli indotti . 29

X. (4) sottorapp. indotta 29

X. (5) induzione del prodotto tensore su un fattore 29

L. (1) una mappa da uno spazio di rappresentazione a un altro che porta fuori la rapp. si estende univocamente alla rapp. indotta 29

T. (11) esistenza e unicità della rapp. indotta 30

T. (12) carattere di una rapp. indotta 30

E. (4) le rapp. irr. sono contenute in indotte di rapp. irr. di sottogruppi 31

E. (5) induzione attraverso isomorfismo allo spazio di funzioni dal gruppo allo spazio di rappresentazione che portano fuori la rapp. 31

E. (6) la rapp. sul prodotto diretto indotta da una rapp. del primo fattore è isomorfa al prodotto della rapp. del primo fattore con la rapp. reg. del secondo 31

5 Esempi

X. (1) gruppo ciclico 35

X. (2) rotazioni sul piano 36

X. (3) gruppo diedrale 36

E. (1) classi di coniugio del gruppo diedrale 38

E. (2) prodotto di caratteri e caratteri dei quadrati simmetrico e alternante (sul gruppo diedrale) 38

E. (3) riducibilità e carattere della rapp. usuale del gruppo diedrale 38

X. (4) gruppo diedrale più riflessioni per l'origine 40

X. (5) rotazioni e riflessioni sul piano 39

X. (6) rotazioni e riflessioni sul piano più riflessioni per l'origine 40

X. (7) gruppo alternante 41

d. prodotto semidiretto di sottogruppi 41

E. (4) induzione della rapp. irr. di grado 3 del gruppo alternante dal sottogruppo di elementi di ordine 2 .. 41

X. (8) gruppo simmetrico 42

X. (9) gruppo del cubo 43

E. (4) decomposizione semidiretta del gruppo del cubo con il gruppo simmetrico 3 passando da quella diretta con il gruppo simmetrico 4 43

E. (5) isomorfismo tra il gruppo di rotazioni del cubo e il gruppo simmetrico 4 43

Vinberg: Rappresentazioni lineari di gruppi, 1989

0 Nozioni di base

X. rotazioni come omomorfismo di $\mathbb{R}$ in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 2

X. (0.2) omomorfismo di S_n in GL_n usando la base canonica 2

d. (0.3) rappresentazione matriciale 3

d. nucleo 3

d. rapp. fedele 3

d. rapp. triviale 4

d. rapp. lineare 4

d. equivalenza di rapp. matriciali 5

d. isomorfismo di rapp. lineari 5

X. (1) rapp. di $\mathbb{R}$ con le rotazioni 6

X. (2) rapp. di $\mathbb{R}$ sullo spazio dei polinomi 7

X. (3) rapp. di $\mathbb{R}$ sullo spazio di (a) funzioni continue (b) polinomi di grado limitato (c) polinomi in $\sin$ e $\cos$ (d) span di $\sin$ e $\cos$ 7

d. azione 7

d. traslazioni a destra e a sinistra 8

d. (0.9) rapp. lineare associata a un'azione 8

X. (1) rapp. associata all'azione del gruppo delle rotazioni del cubo sulle facce 9

X. (2) isomorfismo tra la rapp. associata all'azione naturale di S_n e la rapp. dell'esempio 0.2 9

d. rapp. regolari destra e sinistra 10

O. (0.10) la composizione di una rapp. con un omomorfismo è una rapp. 10

X. restrizione come composizione con omomorfismo 10

X. (1) la composizione con il coniugio è una rapp. isomorfa 10

E. (1) $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$ 11

E. (2a) trovare A tale che $e^{\chi A}$ è un boost 11

E. (2b) trovare A tale che $e^{tA} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 11

E. (3) caratterizzare le rapp. matriciali unidimensionali .. 11

E. (4) mostrare che la traccia della rapp. dell'esempio 0.2 è il numero di punti fissati dalla permutazione 11

E. (5) caratterizzare le rapp. matriciali triviali di un gruppo arbitrario 11

E. (6) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$, C invertibile 11

E. (9) trovare le rapp. di grado finito di (a) $\mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{Z}_m$ .. 12

E. (10) trovare le rapp. complesse differenziabili di grado finito di (a) $\mathbb{R}^+$ (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 12

E. (11) l'azione sull'identità è l'identità 12

E. (12) le iperboli con asintoti paralleli agli assi con coefficienti da una matrice inducono un'azione da $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 12

E. (13) formula esplicita per la rapp. reg. destra 12

E. (14) le rapp. reg. destra e sinistra sono isomorfe 12

E. (15) ogni gruppo ha una rapp. lineare fedele 12

E. (16) le rapp. di $\mathbb{Z}$ sono restrizioni di rapp. di $\mathbb{C}$? 12

E. (17) trovare le rapp. complesse di grado finito di $\mathbb{Z}_m$ che rimangono isomorfe per inversione dell'asse 12

1 Sottospazi invarianti

d. (1.1) sottospazio invariante sotto rapp. 13

X. i polinomi di grado limitato sono sottospazi invarianti per la rapp. di $\mathbb{R}$ come traslazioni 13

O. invarianza di somme e intersezioni di sottospazi invarianti 13

X. forma della rapp. matriciale con base estesa da un sottospazio invariante 14

d. (1.2) sottorappresentazione e rapp. quoziente 14

X. forma matriciale delle sottorapp. e rapp. quoziente ... 14

d. (1.3) rapp. irriducibile 15

X. (1) irriducibilità delle rapp. unidimensionali 15

X. (2) irr. della rapp. identica di $\mathrm{GL}(V)$ 15

X. (3) irr. della rapp. di $\mathbb{R}$ come rotazioni 15

X. (4) irr. della rapp. di $\mathbb{R}$ come traslazioni di polinomi . 15

X. (5) irr. delle rapp. monomiali di S_n 15

d. (1.4) rapp. completamente riducibile 16

O. le rapp. irr. sono compl. rid. 16

X. isomorfismo tra la sottorapp. su un sottospazio complementare e la rapp. quoziente, e descrizione matriciale 16

T. (1) le sottorapp. di una rapp. compl. rid. sono compl. rid. 17

T. (2) lo spazio di rappresentazione di una rapp. compl. rid. di grado finito è somma diretta di sottospazi invarianti minimali 18

T. (3) se una rapp. è somma di finiti sottospazi invarianti minimali allora, dato un sottospazio invariante, è somma diretta di alcuni di essi e del sottospazio 18

O. (1) applicare il teorema 3 con un sottospazio nullo 19

O. (2) sotto le ipotesi del teorema 3, un sottospazio invariante non è necessariamente somma di quelli minimali dati 19

X. (1) rapp. di $\mathrm{GL}(V)$ in $\mathrm{L}(V)$ con moltiplicazione a sinistra 19

X. (2) rapp. di $\mathrm{GL}(V)$ in $\mathrm{L}(V)$ con il coniugio 19

X. (3) rapp. naturale di $\mathrm{GL}(V)$ in $\mathrm{B}(V)$ 20

E. (1) l'azione della rapp. su un sottospazio invariante è l'identità 21

E. (2) trovare i sottospazi dei polinomi invarianti per rapp. di $\mathbb{R}$ come traslazioni 21

E. (3) trovare i sottospazi invarianti nella rapp. esponenziale di $\mathbb{C}$ dove l'esponente non ha radici multiple nel polinomio caratteristico 21

E. (5) le sottorapp. sui complementi dello stesso sottospazio invariante sono isomorfe 21

E. (6) le rapp. quoziente di una rapp. compl. rid. sono compl. rid. 21

E. (7) dire se è compl. rid. (a) la rapp. di $\mathbb{R}$ come traslazioni di polinomi (b) la rapp. esponenziale di $\mathbb{C}$ senza radici multiple nel polinomio caratteristico dell'esponente 21

E. (8) la rapp. esponenziale di $\mathbb{C}$ è compl. rid. se e solo se l'esponente è diagonalizzabile 21

E. (9) la rapp. identica del gruppo ortogonale è irr. 21

E. (10) le rapp. monomiali di S_n su un campo a caratteristica zero sono compl. rid. 21

E. (11) la restrizione ad A_n della sottorapp. sui vettori con somma dei coefficienti nulla della rapp. monomiale di S_n è irr. per $n \geq 4$ 21

E. (12) i sottospazi invarianti di rapp. di grado finito compl. rid. sono somma diretta di sottospazi invarianti minimali della decomposizione analoga della rapp. 21

E. (14) sottospazi invarianti della rapp. di $\mathrm{GL}(V)$ in $\mathrm{L}(V)$ con il coniugio 22

E. (15) le funzioni commutative e anticommutative sono sottospazi invarianti minimali per rapp. di $\mathrm{GL}(V)$ di $\mathrm{B}(V)$ 22

2 Completa riducibilità delle rappresentazioni di gruppi compatti

d. invarianza di una funzione sotto rapp. 22

d. rapp. ortogonale e rapp. unitaria 22

P. le rapp. ortogonali e unitarie sono compl. rid. 23

T. (1) le rapp. di gruppi finiti sono ortogonali/unitarie 23

C. le rapp. reali/complesse di gruppi finiti sono compl. rid. 24

d. (2.4) gruppo topologico 24

X. (1) gruppo con topologia discreta 24

X. (2) topologia di $\mathrm{GL}(V)$ 24

X. (3) sottogruppi topologici 24

d. gruppo compatto 24

X. (1) gruppo finito con topologia discreta 24

X. (2) gruppo ortogonale 24

X. (3) gruppo unitario 24

X. (4) sottogruppi chiusi di gruppi compatti 24

P. compattezza del gruppo ortogonale 24

d. rapp. continua 25

X. (1) rapp. reali/complesse di gruppi con topologia discreta 25

X. (2) le rapp. di $\mathrm{GL}(V)$ in $\mathrm{L}(V)$ per moltiplicazione a destra e coniugio e in $\mathrm{B}(V)$ naturale con V reale/complesso sono continue 25

T. (2) le rapp. di un gruppo compatto sono ortogonali/unitarie 25

C. le rapp. reali/complesse di un gruppo compatto sono compl. rid. 26

d. integrazione invariante normalizzata su un gruppo compatto 26

X. (1) integrazione sui gruppi finiti 26

X. (2) integrazione su U_1 26

X. (3) integrazione su SU_2 attraverso S^3 26

T. (2.6, 2.7) dimostrazione alternativa del teorema 2 27

E. (1) gli autovalori complessi di una rapp. ortogonale/unitaria hanno modulo 1 29

E. (2) dare un esempio di rapp. complessa non unitaria di $\mathbb{Z}$ 29

E. (3) trovare un prodotto scalare invariante per la rapp. reale di $\mathbb{Z}_3$ che manda il generatore in $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ 30

E. (4) dire se sono compatti: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_m$, $\mathbb{T}$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 30

E. (5) la continuità di una rapp. reale/complessa passa alle sottorapp. e rapp. quoziente 30

E. (6) la rapp. di $\mathrm{GL}(V)$ in $\mathrm{L}(V)$ con il coniugio, V reale/complesso, è continua 30

3 Operazioni di base sulle rappresentazioni

d. (3.1) rapp. duale 30

X. forma matriciale della rapp. duale 31

O. le rapp. ortogonali sono isomorfe alla duale 31

O. ogni rapp. è isomorfa alla biduale 31

T. (1) la duale di una rapp. irr. di grado finito è irr. 31

d. annullatore 31

d. (3.2) somma di rapp. 32

X. forma matriciale della somma di rapp. 32

T. (2) compl. rid. di grado finito equivale a somma di rapp. irr. (a meno di isomorfismi) 32

T. (3) se una rapp. è isomorfa a una somma di rapp. irr. allora le sue sottorapp. e rapp. quoziente sono isomorfe a somme di alcune delle rapp. irr. 33

C. se le sottorapp. su finiti sottospazi minimali invarianti sono a coppie non isomorfe, i sottospazi sono indipendenti 33

T. (4) la scomposizione in rapp. irr. è unica a meno di ordine e isomorfismi 33

d. (3.3) prodotto di rapp. 34

X. forma matriciale del prodotto di rapp. 34

X. (1) prodotto con una rapp. triviale 35

X. (2) prodotto con la duale 36

X. (3) quadrato della duale 36

X. (4) prodotto con una rapp. monodimensionale 36

O. il prodotto di irr. non è necessariamente irr. 36

d. (3.4) prodotto tensoriale di rapp. 37

X. forma matriciale del prodotto tensoriale 37

X. prodotto tensoriale con la duale 37

d. (3.5) estensione del campo di base 38

d. (3.6) complessificazione 38

X. complessificazione della rapp. di $\mathbb{R}$ come rotazioni 38

T. (5) rapp. reali di grado finito sono isomorfe se e solo se lo sono le complessificazioni 39

O. (3.7) la complessificazione di un sottospazio invariante è un sottospazio invariante della complessificata 39

d. coniugazione di vettori 39

O. la coniugazione è antilineare 39

L. un sottospazio della complessificata è complessificazione di un sottospazio se e solo se è uguale al coniugato 40

O. la somme e l'intersezione con il coniugato sono uguali ai loro coniugati 40

T. (6) la complessificata di una rapp. irr. è o irr. o somma di due rapp. irr. con spazi coniugati 40

X. (2) rapp. fedele di S_3 con un triangolo 40

d. (3.7) sollevamento e fattorizzazione di rapp. 41

O. bigezione tra le rapp. del quoziente e le rapp. il cui nucleo contiene il sottogruppo normale 41

X. (1) SL_n è normale ed è nucleo del determinante 41

X. (2) gruppo di Klein 42

X. (3) tutte le rapp. di $\mathbb{Z}_m$ fattorizzando quelle di $\mathbb{Z}$ 42

d. sottogruppo commutatore 42

O. ogni rapp. monodimensionale è sollevamento di una rapp. monodimensionale del quoziente sul commutatore 42

X. tutte le rapp. monodimensionali di S_n 43

E. (1) descrivere la duale di una rapp. triviale 43

E. (2) irriducibilità della duale implica irriducibilità 43

E. (3) il passaggio alla duale commuta con la somma 43

E. (4) la completa irriducibilità passa alla duale 43

E. (5) la rapp. identica di SL_2 è isomorfa alla duale 43

E. (6) ogni rapp. compl. rid. è isomorfa alla somma della sottorapp. e della rapp. quoziente su uno stesso sottospazio invariante 43

E. (7) regola di cancellazione per la somma di rapp. compl. rid. di grado finito 43

E. (8) il prodotto di rapp. commuta con la somma 43

E. (9) il prodotto di rapp. è commutativo 43

E. (10) descrizione matriciale del quadrato di una rapp. 44

E. (11) il prodotto di due rapp. esponenziali di $\mathbb{C}$ è una rapp. esponenziale; trovare l'esponente 44

E. (12) il prodotto di una rapp. irr. con una monodimensionale è irr. 44

E. (13) esplicitare la forma del prodotto tensoriale con la duale senza usare la forma matriciale 44

E. (14) forma matriciale del quadrato tensoriale e confronto con il quadrato 44

E. (15) la complessificata di una rapp. irr. di grado dispari è irr. 44

E. (16) trovare le rapp. di grado finito di O_n i cui nuclei contengono SO_n 44

E. (17) trovare le rapp. monodimensionali di A_4 44

E. (18) SL_n è il commutatore di GL_n 44

4 Proprietà delle rappresentazioni irriducibili complesse

d. (4.1) morfismo di rapp. 44

X. la proiezione su un sottospazio invariante parallela a un suo complemento invariante è un morfismo dalla rapp. alla sottorapp. 45

O. il nucleo e l'immagine di un morfismo sono sottospazi invarianti 45

T. (1) i morfismi di rapp. irr. sono isomorfismi o nulli ... 45

T. (2) se lo spazio di una rapp. si scompone in sottospazi invarianti minimali tali che le sottorapp. sono a coppie non isomorfe, allora ogni altro sottospazio invariante è somma di alcuni di essi 45

d. (4.2) endomorfismo di rapp. 45

T. (3) lemma di Schur 46

C. tutti i morfismi di due rapp. irr. complesse isomorfe sono isomorfismi multipli tra loro 46

T. (4) tutti i sottospazi del prodotto tensoriale dello spazio di una rapp. irr. complessa con quello di una triviale invarianti per il prodotto delle rapp. e minimali sono prodotti tensoriali dello spazio della rapp. irr. con un vettore nello spazio della triviale 46

T. (5) le rapp. irr. complesse di un gruppo abeliano sono monodimensionali 47

C. ogni rapp. complessa di un gruppo abeliano ha un sottospazio invariante minimale 47

T. (6) il prodotto tensoriale di due rapp. irr. complesse è irr. 47

T. ogni rapp. irr. complessa del prodotto di due gruppi è il prodotto tensoriale di due rapp. irr. dei gruppi 48

d. (4.5) elementi matriciali di una rapp. 48

d. spazio dei coefficienti matriciali 48

P. (1) gli spazi dei coeff. mat. di rapp. isomorfe sono uguali 48

P. (2) lo spazio dei coeff. mat. di una somma di rapp. è la somma dei rispettivi spazi di coeff. mat. 48

d. rapp. regolare (bilatera) 49

T. (7) isomorfismo tra il prodotto tensoriale di una rapp. irr. complessa con la duale e la rapp. reg. ristretta allo spazio dei coeff. mat. 49

C. (1) dimensione dello spazio dei coeff. mat. 49

C. (2) isomorfismo tra il prodotto di una rapp. triviale con la duale di una rapp. irr. complesa e la rapp. reg. sinistra ristretta allo spazio dei coeff. mat. della rapp. irr.; isomorfismo tra il prodotto di una rapp. irr. complessa con la duale di una triviale e la rapp. reg. destra ristretta allo spazio dei coeff. mat della rapp. irr. 50

C. (3) la rapp. reg. sinistra ristretta allo spazio dei coeff. mat. di una rapp. irr. complessa è isomorfa a un multiplo della duale della rapp. irr.; per la rapp. reg. destra vale con un multiplo della rapp. irr. 50

C. (4) le rapp. reg. ristrette agli spazi dei coeff. mat. di due rapp. irr. complesse non isomorfe non sono isomorfe 50

C. (5) gli spazi dei coeff. mat. di rapp. irr. complesse a coppie non isomorfe sono indipendenti 50

X. scomposizione dello spazio dei coeff. mat. in una somma diretta di sottospazi invarianti per rapp. reg. sinistra o destra minimali 50

X. rapp. monodimensionali esponenziali di un gruppo ciclico 51

L. dati due prodotti hermitiani esiste un operatore lineare che applicato al primo fattore di un prodotto lo trasforma nell'altro 51

T. (8) il prodotto hermitiano invariante di una rapp. irr. unitaria è unico a meno di un fattore costante 52

T. (9) spazi invarianti minimali con sottorapp. non isomorfe di una rapp. unitaria sono ortogonali rispetto a qualunque prodotto hermitiano invariante 52

E. (1) l'immagine attraverso morfismo di rapp. di un sottospazio invariante è un sottospazio invariante ... 52

E. (2) gli endomorfismi della rapp. monomiale di S_n ristretta a un sottogruppo doppiamente transitivo sono combinazione lineare dell'identità e dell'operatore che manda la base nella somma della base 53

E. (3) dimensione dello spazio dei morfismi da una combinazione lineare a coefficienti naturali a un'altra di rapp. irr. complesse a coppie non isomorfe 53

E. (4) la sottorapp. monomiale sul sottospazio di vettori con somma delle componenti nulla ristretta a un sottogruppo doppiamente transitivo è irr. 53

E. (5) trovare gli automorfismi della rapp. di $\mathbb{R}$ come rotazioni 53

E. (6) nello spazio di una rapp. complessa di un gruppo abeliano c'è una base che triangolarizza la rapp. 53

E. (7) le rapp. irr. reali di un gruppo abeliano sono al più bidimensionali 53

E. (8) la rapp. reg. destra di un gruppo finito è isomorfa alla somma di tutte (a meno di isomorfismi) le rapp. irr. del gruppo moltiplicate per il loro grado 53

E. (9) i sottospazi del prodotto tensoriale dello spazio di una rapp. irr. complessa con quello di una triviale invarianti per il prodotto delle rapp. sono prodotti tensoriali dello spazio della rapp. irr. con un sottospazio della triviale 53

E. (10) gli elementi matriciali di una rapp. irr. complessa sono indipendenti; è vero anche per una reale? 53

E. (11) lo span dell'immagine di una rapp. irr. complessa è $\mathrm{L}(V)$ 53

E. (12) le rapp. irr. sono isomorfe a una sottorapp. della rapp. reg. destra 53

E. (13) le rapp. irr. sono isomorfe a una sottorapp. della rapp. reg. sinistra 53

E. (14) dimostrare i corollari 4 e 5 su campi arbitrari 54

E. (15) il prodotto scalare invariante di una rapp. irr. ortogonale è unico a meno di un fattore costante positivo 54

5 Scomposizione della rappresentazione regolare

T. (1) le rapp. irr. complesse di un gruppo finito sono finite a meno di isomorfismi 55

T. (2) lo spazio delle funzioni a valori complessi da un gruppo finito è la somma diretta degli spazi dei coeff. mat. delle rapp. irr. complesse del gruppo 56

C. (1) la somma dei quadrati dei gradi delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito è l'ordine del gruppo . 56

C. (2) le rapp. reg. destra e sinistra di un gruppo finito sono isomorfe alla somma delle rapp. irr. complesse del gruppo moltiplicate per il loro grado 57

X. (1) il numero di rapp. irr. complesse di un gruppo finito abeliano è l'ordine del gruppo 57

X. (2) rapp. irr. complesse di S_3 57

d. (5.3) carattere di una rapp. 57

X. (1) carattere di una rapp. monodimensionale 57

X. (2) carattere di una rapp. triviale 57

X. (3) carattere della rapp. di $\mathbb{R}$ come rotazioni 57

X. (4) carattere della rapp. monomiale di S_n 58

X. (5) carattere della rapp. di S_3 con un triangolo 58

O. i caratteri di rapp. isomorfe sono uguali 58

O. carattere della somma e del prodotto di rapp. 58

X. carattere della rapp. monomiale di S_n ristretta ai valori con somma delle componenti nulla 58

O. il carattere è una funzione di classe 59

d. funzione di classe 59

O. (5.4) le funzioni di classe sono un sottospazio delle funzioni dal gruppo a valori complessi 59

O. dimensione dello spazio delle funzioni di classe 59

T. (3) i caratteri delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito sono una base delle funzioni di classe 59

L. le funzioni di classe nello spazio dei coeff. mat. di una rapp. irr. complessa di un gruppo finito sono proporzionali al carattere della rapp. 59

C. (1) il numero di rapp. irr. complesse di un gruppo finito è il numero di classi di coniugio 60

C. (2) le rapp. irr. complesse di un gruppo finito sono univocamente identificate dal loro carattere (a meno di isomorfismo) 60

X. (1) numero di classi di coniugio di un gruppo abeliano finito 60

X. (2) classi di coniugio di S_4 e rapp. come rotazioni di un cubo 60

d. (5.5) azione transitiva 61

X. (1) transitività della'azione naturale di S_n 61

X. (2) transitività della'azione di O_n sulla sfera 61

d. azione l^H di un gruppo G sulle classi laterali di $H \subseteq G$ 61

d. stabilizzatore 61

P. ogni azione transitiva è isomorfa a un'azione l^H 61

T. (4) il sottospazio dei vettori invarianti per rapp. reg. destra di un gruppo finito ristretta a un sottogruppo H è la somma lungo le rapp. irr. complesse del gruppo delle immagini attraverso l'isomorfismo dal prodotto tensoriale con la duale allo spazio dei coeff. mat. del prodotto tensoriale del sottospazio dei vettori invarianti per la rapp. irr. complessa ristretta a H con lo spazio della duale 62

C. la rapp. come funzioni associata a l^H è isomorfa alla somma delle rapp. irr. complesse del gruppo finito moltiplicate per la dimensione del loro sottospazio dei vettori invarianti per la rapp. irr. ristretta a H 63

L. il sottospazio massimale invariante per rapp. compl. rid. ha la stessa dimensione di quello per la duale 63

X. azione del gruppo delle rotazioni del cubo sulle facce . 63

X. (5.7) rappresentazioni di A_5 64

E. (1) trovare una base degli elementi matriciali di S_3 ... 65

E. (2) valore del carattere sull'identità 65

E. (3) calcolare i caratteri (a) delle rapp. irr. complesse di S_3 (b) delle rapp. reg. sinistra e destra di un gruppo finito qualsiasi 65

E. (4) trovare le rapp. irr. complesse di A_4 e i loro caratteri 65

E. (5) un gruppo con tutte le rapp. irr. complesse monodimensionali è abeliano 65

E. (6) un gruppo finito con più di due elementi ha più di due rapp. irr. complesse 65

E. (7) trovare le rapp. irr. complesse (a) del gruppo diedrale (b) del gruppo generalizzato delle unità dei quaternioni; verificare i corollari 1 dei teoremi 2 e 3 per questi esempi 65

E. (8) usando i caratteri, trovare per quali n la sottorapp. monomiale di S_n sui vettori con somma delle componenti nulla è isomorfa al suo prodotto con la rapp. di parità 65

E. (9) l'indice di H nel gruppo finito G è la somma lungo le rapp. irr. complesse di G del grado della rapp. moltiplicato per il grado della rapp. ristretta a H ... 65

E. (10) scomporre la rapp. come funzione associata a (a) l'azione del gruppo delle rotazioni del cubo sui vertici (b) l'azione del gruppo di simmetria completo del tetraedro sugli spigoli 66

E. (11) trovare il carattere della rapp. irr. complessa di grado 5 di A_5 66

E. (12) una rapp. di un gruppo finito è isomorfa alla duale se e solo se il carattere è a valori reali 66

6 Relazioni di ortogonalità

d. prodotto hermitiano nello spazio delle funzioni da un gruppo finito a valori complessi invariante per rapp. reg. 66

T. (1) gli elementi matriciali delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito scritti in una base ortonormale rispetto al prodotto hermitiano invariante di ogni rapp. sono una base ortogonale delle funzioni dal gruppo a valori complessi; la norma quadra di un elemento matriciale è l'inverso della dimensione della rapp. irr. 67

C. (1) i caratteri delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito sono una base ortonormale delle funzioni di classe .. 68

C. (2) i coefficienti nella scomposizione in rapp. irr. di una rapp. complessa di un gruppo finito sono dati dal prodotto invariante per rapp. reg. dei caratteri 68

C. (3) una rapp. complessa di un gruppo finito è irr. se e solo se il carattere ha norma 1 secondo il prodotto invariante per rapp. reg. 69

X. (1) matrice dei caratteri delle rapp. irr. di un gruppo abeliano finito 69

X. (2) tavola dei caratteri di A_5 69

E. (1) calcolare la norma quadra del carattere della rapp. reg. destra sia direttamente che usando la scomposizione in rapp. irr. 71

E. (2) la dimensione dello spazio dei vettori invarianti per rapp. complessa di un grupo finito è il prodotto hermitiano del carattere della rapp. con quello identicamente unitario 71

E. (3) scrivere la tavola dei caratteri di S_4 e scomporre il quadrato della rapp. monomiale ristretta ai vettori con somma delle componenti nulla 71

E. (4) scomporre le rapp. di S_4 nello spazio delle funzioni (a) sui vertici del cubo (b) sugli spigoli del tetraedro 71

E. (5) scomporre $\mathrm{L}(V)$ in sottospazi minimali invarianti per il prodotto di una rapp. irr. complessa tridimensionale di A_5 con la duale 71

E. (6) la rapp. associata a un'azione da un gruppo finito è isomorfa alla somma lungo le orbite H delle rapp. associate alle azioni l^H 71

E. (7) la somma lungo un gruppo finito di una rapp. irr. complessa moltiplicata per il carattere coniugato è l'ordine del gruppo diviso il grado della rapp. 71

E. (8) i gradi delle rapp. irr. complesse di un gruppo finito dividono l'ordine del gruppo 71

7 I gruppi SU_2 e SO_3

d. algebra dei quaternioni 74

d. base dei quaternioni 74

O. regole di moltiplicazione per la base dei quaternioni . . 74

O. SU_2 come sfera nei quaternioni 74

d. omomorfismo da SU_2 in SO_3 75

T. l'omomorfismo da SU_2 in SO_3 è suriettivo; nucleo dell'omomorfismo 75

L. (1) un sottogruppo di SO_3 che agisce transitivamente sulla sfera e contiene le rotazioni intorno a un asse è SO_3 75

L. (2) ogni matrice 2×2 hermitiana a traccia nulla è coniugata con una matrice di SU_2 a una matrice diagonale a traccia nulla 76

P. (7.3) isomorfismo tra SO_3 e SU_2 quozientato sull'identità e sul suo opposto 76

d. topologia quoziente 77

O. le rapp. continue di un gruppo quoziente si ottengono fattorizzando le rapp. continue del numeratore 77

L. isomorfismo tra un gruppo topologico e il quoziente sul nucleo del dominio di un omomorfismo continuo al gruppo 77

O. SO_3 è isomorfo allo spazio proiettivo 78

P. le rapp. continue di SO_3 si ottengono fattorizzando le rapp. continue di SU_2 il cui nucleo contiene l'opposto dell'identità 78

d. rapp. di SL_2 come polinomi omogenei in due variabili e restrizione a SU_2 78

P. la rapp. di SU_2 come polinomi omogenei in due variabili è irr. 78

O. la rapp. di SU_2 come polinomi omogenei in due variabili si fattorizza a SO_3 79

E. (1) omomorfismo da $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ in SO_4 e nucleo 79

E. (2) esplicitare un isomorfismo tra la complessificazione della rapp. di SU_2 come matrici 2×2 hermitiane a traccia nulla e quella come polinomi omogenei di secondo grado in due variabili 79

E. (3) le funzioni di classe su SU_2 sono determinate dalla restrizione al sottogruppo diagonale e sono pari nell'argomento degli elementi della diagonale 79

E. (4) calcolare la restrizione del carattere della rapp. di SU_2 come polinomi omogenei in due variabili al sottogruppo diagonale 80

E. (5) lo span dei caratteri delle rapp. di SU_2 come polinomi omogenei in due variabili ristretti al sottogruppo diagonale e visti come funzioni di un elemento della diagonale è lo spazio delle funzioni sul sottogruppo diagonale scrivibili come polinomi nei due elementi sulla diagonale e invarianti per coniugazione dell'argomento 80

E. (6) integrale invariante su SU_2 ristretto alle funzioni di classe continue 80

Bracci: Appunti del corso Metodi matematici per la Fisica I, 2004

1 Spazi normati e con prodotto scalare

1.1 Definizioni e proprietà elementari

d. (1.1.1) norma 1

d. (1.1.2) spazio normato 1

d. (1.1.3) limite 1

d. (1.1.4) punto di accumulazione 2

d. (1.1.5) insieme limitato 2

L. (1.1.1) unicità del limite su un punto di accumulazione 2

L. (1.1.2) unicità del limite per $x \to \infty$ 2

d. (1.1.6) limite di una successione 2

L. (1.1.3) unicità del limite di una successione 2

d. (1.1.7) continuità in un punto 2

L. (1.1.4) definizione di continuità con il limite 2

L. (1.1.5) definizione di continuità con le successioni 2

T. (1.1.1) la somma di funzioni continue è continua 3

L. (1.1.6) la somma dei limiti è il limite della somma 3

T. (1.1.2) la composizione di funzioni continue è continua 3

d. (1.1.8) continuità sul dominio 3

d. (1.1.9) funzione lipschitziana 3

L. (1.1.7) lipschitziana $\Longrightarrow$ continua 3

T. (1.1.3) la norma è lipschitziana 3

d. (1.1.10) norme equivalenti 4

L. (1.1.8) norme equivalenti $\Longrightarrow$ limiti di successioni uguali 4

L. (1.1.9) norme equivalenti $\Longrightarrow$ limiti di funzioni uguali 4

1.2 Topologia

d. (1.2.1) palle aperte e chiuse 4

d. (1.2.2) insiemi aperti e chiusi 4

L. (1.2.1) le palle aperte sono aperte e le palle chiuse sono chiuse 4

T. (1.2.1) proprietà generali della famiglia degli aperti . . . 5

T. (1.2.2) proprietà generali della famiglia dei chiusi 5

T. (1.2.3) definizione di chiuso con le successioni 5

T. (1.2.4) i chiusi e gli aperti per norme equivalenti sono gli stessi 5

d. (1.2.3) chiusura 6

T. (1.2.5) definizione di chiusura con le successioni 6

C. (1.2.1) la chiusura della palla aperta è la palla chiusa . 6

d. (1.2.4) insiemi compatti per successioni e relativamente compatti 6

L. (1.2.2) compatto $\Longrightarrow$ chiuso e limitato 6

T. (1.2.6) (Weierstrass) una funzione continua su un compatto ammette massimo e minimo 6

d. (1.2.5) continuità uniforme 7

O. uniformemente continua $\Longrightarrow$ continua 7

T. (1.2.7) (Heine-Cantor-Borel) continua su un compatto $\Longrightarrow$ uniformemente continua 7

T. (1.2.8) in uno spazio di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti 7

X. esempio di spazio di dimensione infinita con norme non equivalenti 8

C. (1.2.2) (Bolzano-Weierstrass) in uno spazio di dimensione finita gli insiemi chiusi e limitati sono compatti 8

X. esempio di spazio di dimensione infinita con insieme chiuso e limitato ma non compatto 8

C. (1.2.3) (Bolzano-Weierstrass) in uno spazio di dimensione finita i sottoinsiemi infiniti e limitati hanno un punto di accumulazione 8

d. (1.2.6) densità 8

d. (1.2.7) parte interna 9

O. definizione di parte interna con le palle aperte 8

L. (1.2.3) parte interna vuota $\Longleftrightarrow$ complementare denso 8

1.3 Spazi di Banach

d. (1.3.1) successione di Cauchy ovvero fondamentale 9

O. le successioni di Cauchy per norme equivalenti sono le stesse 9

L. (1.3.1) le successioni convergenti sono di Cauchy 9

d. (1.3.2) spazi completi e di Banach 9

L. (1.3.2) la completezza rispetto a norme equivalenti è equivalente 9

O. $\mathbb{R}$ è uno spazio di Banach 9

T. (1.3.1) gli spazi di dimensione finita sono completi 9

C. (1.3.1) i sottospazi di dimensione finita sono chiusi . . 10

T. (1.3.2) esistenza del completamento 10

d. (1.3.3) completamento 11

d. (1.3.4) spazi delle funzioni continua su un intervallo con e senza supporto compatto 11

L. (1.3.3) lo spazio delle funzioni continua su un intervallo limitato a supporto compatto non è completo per norma L^1 11

d. (1.3.5) spazio L^1 11

T. (1.3.3) definizione di L^1 come funzioni integrabili 11

T. (1.3.4) (Weierstrass) lo spazio dei polinomi in una variabile è denso nello spazio delle funzioni continue su un intervallo limitato per norma ∞ 12

X. controesempio con intervallo illimitato 12

C. (1.3.2) su un intervallo limitato i polinomi in una variabile sono densi in L^1 13

d. (1.3.6) spazi delle funzioni infinitamente derivabili con e senza supporto compatto 13

C. (1.3.3) su un intervallo limitato le funzioni liscie sono dense in L^1 13

T. (1.3.5) su un intervallo limitato le funzioni liscie a supporto compatto sono dense in L^1 13

d. (1.3.7) funzione caratteristica di un insieme 13

C. (1.3.4) su un intervallo illimitato le funzioni liscie a supporto compatto sono dense in L^1 13

d. (1.3.8) spazio L^p 14

T. (1.3.6) (Fisher-Riesz) gli spazi L^p sono di Banach ... 14

T. (1.3.7) lo spazio delle funzioni liscie a supporto compatto è denso in L^p 14

T. (1.3.8) (Disuguaglianza di Hölder) 14

C. (1.3.5) su un intervallo limitato $p > q \implies L^p \subseteq L^q$ .14

X. controesempio su un intervallo illimitato 14

T. (1.3.9) una successione convergente in L^p ammette una sottosuccessione puntualmente convergente 15

X. (1.3.1) la convergenza in L^p non implica la convergenza puntuale quasi ovunque 15

T. (1.3.10) su un intervallo limitato una successione in L^p che converge uniformemente converge in L^p 15

E. (1.3.2) controesempio per un intervallo illimitato 15

T. (1.3.11) una successione limitata in L^p che converge puntualmente converge in L^p 15

E. (1.3.3) controesempio per una successione non limitata 15

T. (1.3.2) (delle contrazioni di Banach) in uno spazio di Banach le contrazioni ammettono uno e un solo punto fisso 15

1.4 Prodotti scalari

d. (1.4.1) prodotto scalare 16

T. (1.4.1) (Cauchy-Schwarz) 16

O. la maggiorazione di Cauchy-Schwarz vale anche per prodotti scalari degeneri 17

C. (1.4.1) norma indotta da un prodotto scalare 17

T. (1.4.2) un prodotto scalare è continuo per la norma che induce 17

T. (1.4.3) identità del parallelogramma 18

X. norma che non deriva da un prodotto scalare 18

T. (1.4.4) formula di polarizzazione 18

T. (1.4.5) (von Neumann) una norma che soddisfa l'identità del parallelogramma è indotta da un prodotto scalare 18

C. (1.4.2) una norma è indotta da un prodotto scalare se e solo se soddisfa l'identità del parallelogramma 19

C. (1.4.3) la norma p-esima è indotta da un prodotto scalare se e solo se $p = 2$ 20

1.5 Proprietà elementari degli spazi di Hilbert

d. (1.5.1) spazio di Hilbert 20

T. (1.5.1) L^2 è di Hilbert 20

d. (1.5.2) insieme completo e base 20

L. (1.5.1) un vettore ortogonale a un insieme completo è nullo 20

d. (1.5.3) insieme ortonormale 20

T. (1.5.2) (Disuguaglianza di Bessel) 21

C. (1.5.1) il prodotto scalare di un vettore con una successione ortonormale converge a 0 21

T. (1.5.3) un insieme numerabile di vettori tale che ogni vettore ortogonale all'insieme è nullo è completo 21

C. (1.5.2) un insieme numerabile è completo se e solo se l'unico vettore ortogonale a esso è 0 22

T. (1.5.4) serie di Fourier 22

T. (1.5.5) valore minimo della differenza tra un vettore e una serie parziale lungo un insieme numerabile ortonormale 22

C. (1.5.3) (identità di Parsevall) un insieme numerabile ortonormale è completo se e solo se la norma quadra di ogni vettore è la serie di Fourier delle norme quadre 22

T. (1.5.6) (Fisher-Riesz) fatti equivalenti alla completezza per un insiemr ortonormale numerabile 22

T. (1.5.7) una serie lungo una successione ortonormale completa converge se e solo se converge la serie dei moduli quadri dei coefficienti 23

2 Equazioni differenziali alle derivate parziali

2.1 Serie di Fourier

T. (2.1.1) (Lemma di Riemann-Lebesgue)

$$f \in L^1(-\infty,\infty) \implies \lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x = 0$$

.... 24

T. (2.1.2)

$$\phi \in C_c^\infty(-\infty,\infty) \implies \lim_{\alpha\to\infty} \alpha^r \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x = 0$$

.... 25

d. (2.1.1) polinomio trigonometrico 25

L. (2.1.1) le potenze intere di funzioni trigonometriche sono polinomi trigonometrici 25

T. (1.2.3) (Weierstrass) i polinomi trigonometrici sono densi nelle funzioni continue a supporto compatto sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ con la norma ∞ 25

C. (2.1.1) i polinomi trigonometrici sono densi in $L^2(-\pi, \pi)$ 26

L. (2.1.2) $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è un insieme ortogonale in $L^2(-\pi, \pi)$ 26

T. (2.1.4) $\left\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è una base ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$ 26

T. (2.1.5) $\{\sin(nx)/\sqrt{\pi}\}_{n\in\mathbb{N}_0} \cup \{\cos(nx)/\sqrt{\pi}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base ortonormale in $L^2(-\pi, \pi)$ 26

L. (2.1.3) $\sum_{-\infty}^{\infty} |z_n| < \infty \implies \sum_{-\infty}^{\infty} z_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ converge uniformemente ed è continua 26

L. (2.1.4) $\sum_{-\infty}^{\infty} |na_n| < \infty \implies \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ è continua e derivabile termine a termine 26

d. serie di Fourier in $L^1(-\pi, \pi)$ 27

T. (2.1.6) $f \in L^1(-\pi, \pi)$, f continua in x_0, il rapporto incrementale di f intorno a x_0 è integrabile intorno a $x_0 \implies$ la serie di Fourier di f converge puntualmente a f in x_0 27

T. (2.1.7) (criterio di Dini) $f \in L^1(-\pi, \pi)$, $\exists f(x_0^+), f(x_0^-)$, i rapporti incrementali di f a destra e a sinistra di x_0 sono in L^1 intorno a destra di 0 $\implies$ la serie di Fourier di f converge alla media dei limiti destro e sinistro di f in x_0 28

T. (2.1.8) f periodica con periodo 2π, $f \in C^1 \implies$ la serie di Fourier di f converge uniformemente a f 28

2.2 Problema ai limiti per il quadrato 29

2.3 Problema ai limiti per il cerchio 33

2.3.3 Funzioni armoniche

d. (2.3.1) funzione armonica 38

d. (2.3.2) problema di Dirichlet 39

T. (2.3.1) soluzione del problema di Dirichlet su un disco con condizione al bordo continua 39

T. (2.3.2) (Principio del massimo) per una funzione continua sulla chiusura di un aperto limitato con laplaciano non negativo sull'aperto, l'estremo superiore sull'aperto è maggiorato dal massimo sulla frontiera 39

C. (2.3.1) una soluzione del problema di Dirichlet su un aperto limitato è compresa tra il minimo e il massimo della condizione al bordo 39

C. (2.3.2) l'unica soluzione del problema di Dirichlet su un aperto limitato con condizione al bordo nulla è la funzione nulla 40

C. (2.3.3) unicità della soluzione del problema di Dirichlet 40

C. (2.3.4) unicità della soluzione dle problema di Dirichlet su un disco con condizione al bordo continua 40

C. (2.3.5) (Teorema della media) 40

C. (2.3.6) una funzione armonica su un aperto connesso il cui modulo ammette massimo è costante 40

2.3.4 Lemma di Green e sue conseguenze

L. (2.3.1) (lemma di Green) $f, g \in C^2 \implies$

$$\int_S (f\Delta g - g\Delta f)\mathrm{d}S = \int_\sigma \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma$$

. 41

T. (2.3.3) (teorema della media) 41

d. (2.3.3) funzione di Green in due dimensioni 42

L. (2.3.2) f continua in $\underline{y} \implies$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|\underline{x}|=\epsilon} f(\underline{x})\frac{\partial G}{\partial n}(\underline{x},\underline{y})\mathrm{d}\sigma = f(\underline{y})$$

. 42

T. (2.3.4) (simmetria della funzione di Green) 43

T. (2.3.5) soluzione del problema di Dirichlet con condizione al bordo nulla usando la funzione di Green 43

2.4 Equazione delle onde 45

3 Spazi di Hilbert ed Operatori lineari

3.1 Geometria degli spazi di Hilbert

d. (3.1.1) spazio ℓ^2 50

T. (3.1.1) lo spazio ℓ^2 è di Hilbert 50

L. (3.1.1) le successioni $e_n^{(i)} = \delta_{in}$ sono una base ortonormale di ℓ^2 51

T. (3.1.2) gli spazi di Hilbert di dimensione infinita con una base numerabile sono isomorfi a ℓ^2 51

d. (3.1.2) spazio separabile 51

T. (3.1.3) uno spazio Hilbert ha una base ortonormale finita o numerabile se e solo se è separabile 51

T. (3.1.4) i sottoinsiemi ortonormali di uno spazio separabile sono al più numerabili 52

X. spazio di Hilbert non separabile 52

X. altro spazio di Hilbert non separabile 53

d. (3.1.3) sottospazio di Hilbert 53

L. (3.1.2) i vettori ortogonali a un sottoinsieme dato sono uno sottospazio di Hilbert 53

L. (3.1.3) la chiusura di un sottospazio vettoriale è un sottospazio di Hilbert 53

d. (3.1.4) insieme convesso 54

T. (3.1.5) (proiezione su un convesso chiuso) 54

d. (3.1.5) insieme ortogonale a uno dato 54

T. (3.1.6) (della proiezione ortogonale) 55

d. (3.1.6) somma diretta in uno spazio di Hilbert 55

3.2 Operatori e funzionali lineari

d. (3.2.1) operatore lineare e nucleo 55

T. (3.2.1) fatti equivalenti alla continuità per un operatore lineare tra spazi normati 55

d. (3.2.2) norma di un operatore lineare tra spazi normati e operatore limitato 56

L. (3.2.1) un operatore lineare tra spazi normati è continuo se e solo se è limitato 56

L. (3.2.2) gli operatori lineari su spazi normati di dimensione finita sono limitati 56

X. controesempio in dimensione infinita 56

L. (3.2.3) definizione della norma di un operatore maggiorandola con la norma dell'argomento 56

T. (3.2.2) lo spazio degli operatori lineari da uno spazio normato a uno di Banach è di Banach 57

d. (3.2.3) funzionale lineare e spazio duale 57

T. (3.2.3) (di rappresentazione di Riesz) 57

d. (3.2.4) operatore aggiunto 58

L. (3.2.4) la norma della composizione di operatori lineari continui è minore o uguale del prodotto delle norme 58

L. (3.2.5) l'aggiunto di un operatore lineare continuo è continuo e ha la stessa norma 58

L. (3.2.6) la norma quadra di un operatore lineare continuo è la norma della composizione con l'aggiunto 58

T. (3.2.4) un operatore lineare continuo su un sottospazio denso si estende in modo unico 58

T. una funzione uniformemente continua da un sottoinsieme di uno spazio normato a uno spazio di Banach si estende in modo unico alla chiusura del dominio 59

3.3 Proiettori

d. (3.3.1) proiettore 59

T. (3.3.1) proprietà del proiettore 59

L. (3.3.1) $\forall x\, (Ax, x) = 0 \implies A = 0$ 60

X. controesempio per spazi su $\mathbb{R}$ 60

T. (3.3.2) un operatore lineare di ordine 2 e autoaggiunto è un proiettore 60

C. l'immagine di un proiettore è di vettori fissati 61

T. (3.3.3) un operatore lineare limitato di ordine 2 tale che $(x - Px, Px) = 0$ è un proiettore 61

C. (3.3.1) un operatore lineare limitato di ordine 2 con l'immagine ortogonale al nucleo è un proiettore 61

L. (3.3.2) l'immagine di un operatore di ordine 2 sono gli elementi fissati 61

T. (3.3.4) un operatore lineare di ordine 2 con norma minore o uguale a 1 è un proiettore 61

T. (3.3.5) la composizione di due proiettori è un proiettore se e solo se commutano, in tal caso l'immagine è l'intersezione delle immagini 61

L. (3.3.3) la composizione di due proiettori è nulla se e solo se le immagini sono ortogonali e se e solo se la composizione nell'altro ordine è nulla 61

L. (3.3.6) la somma di proiettori è un proiettore se e solo se le composizioni sono nulle e se e solo se le immagini sono ortogonali; in tal caso l'immagine della somma è la somma diretta delle immagini 62

L. (3.3.4) un'applicazione è un proiettore se e solo se il complemento all'identità è un proiettore 62

T. (3.3.7) la differenza di due proiettori è un proiettore se e solo se la composizione del complemento all'identità del minuendo con il sottraendo è nulla e l'immagine è il complemento ortogonale dell'immagine del sottraendo rispetto a quella del minuendo 62

3.4 Particolari classi di operatori

d. (3.4.1) operatore unitario 63

L. (3.4.1) gli operatori unitari sono lineari 63

O. per il lemma precedente non serve l'ipotesi di surgettività 63

L. (3.4.2) gli operatori unitari sono limitati, biunivoci e con inverso unitario 63

L. (3.4.3) un operatore lineare surgettivo che lascia invariata la norma è unitario 63

L. (3.4.4) un operatore limitato è unitario se e solo se è surgettivo e l'aggiunto è l'inverso 64

d. (3.4.2) isometria 64

O. se uno spazio di Hilbert è separabile allora è isometrico a ℓ^2 64

d. (3.4.3) autovalore, autovettore, autospazio, spettro puntuale 64

d. (3.4.4) autoaggiunto, normale 64

L. (3.4.5) gli autovalori di un operatore autoaggiunto sono reali 64

O. autoaggiunto $\implies$ normale 64

L. (3.4.6) gli autovettori dell'aggiunto di un operatore normale sono gli stessi ma con autovalore coniugato 64

L. (3.4.7) autovettori relativi ad autovalori distinti di un operatore normale sono perpendicolari 65

d. (3.4.5) sottospazio invariante 65

T. (3.4.1) (teorema spettrale normale) 65

L. (3.4.8) in uno spazio di Hilbert di dimensione finita l'ortogonale di un sottospazio è invariante per un operatore normale se e solo se è invariante per l'aggiunto 65

X. controesempio al teorema spettrale in dimensione infinita 66

d. (3.4.6) polinomio minimo ... 66

T. (3.4.2) gli autovalori sono le radici del polinomio minimo ... 66

d. (3.4.7) operatore compatto ovvero completamente continuo ... 66

L. (3.4.9) gli operatori compatti sono limitati ... 66

L. (3.4.10) comporre un operatore compatto con uno limitato dà operatori compatti ... 66

T. (3.4.3) un operatore limitato è compatto se e solo se lo è l'aggiunto ... 66

L. (3.4.11) un operatore limitato di rango finito è compatto ... 67

T. (3.4.4) il limite di una successione di operatori compatti è compatto ... 67

C. (3.4.1) gli operatori di Hilbert-Schmidt sono compatti 67

d. operatore di Hilbert-Schmidt ... 68

L. (3.4.12) l'aggiunto di un operatore di Hilbert-Schmidt si ottiene coniugando il moltiplicatore ... 68

C. (3.4.2) gli operatori di Hilbert-Schmidt con moltiplicatore reale sono compatti e autoaggiunti ... 68

L. (3.4.13) T limitato $\implies \|T\| = \sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |(x, Ty)|$ .. 68

L. (3.4.14) T limitato autoaggiunto $\implies \|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, Tx)|$ ... 69

T. (3.4.5) un operatore compatto autoaggiunto ha un autovalore uguale in modulo alla norma ... 69

L. (3.4.15) gli autospazi di un operatore compatto diversi dal nucleo hanno dimensione finita ... 70

T. (3.4.6) (teorema spettrale compatto autoaggiunto) .. 70

C. (3.4.3) per ogni operatore compatto autoaggiunto esiste una base ortonormale di autovettori ... 72

T. (3.4.7) dati due operatori compatti autoaggiunti che commutano esiste una base ortonormale al più numerabile dell'ortogonale dell'intersezione dei nuclei composta di autovettori comuni ... 72

L. (3.4.16) la somma di operatori compatti è compatta . 72

C. (3.4.4) (teorema spettrale compatto normale) ... 73

X. applicazione del teorema spettrale ai problemi di Dirichlet e Sturm-Liouville ... 73

3.5 Trasformata di Fourier

d. (3.5.1) classe di Schwartz ... 74

O. la classe di Schwartz è non vuota, è contenuta in L^1 e il prodotto tra una potenza e una funzione della classe è in L^1 ... 74

d. (3.5.2) trasformata di Fourier ... 74

L. (3.5.1) la classe di Schwartz è densa in L^2 ... 75

T. (3.5.1) la trasformata di Fourier è a valori nella classe di Schwartz ... 75

T. (3.5.2) antitrasformata di Fourier ... 75

C. (3.5.1) la trasformata è suriettiva ... 76

T. (3.5.3) (Identità di Parsevall) il prodotto scalare di due trasformate è 2π volte il prodotto delle funzioni 77

C. (3.5.2) la trasformata è biunivoca ... 77

d. (3.5.3) estensione della trasformata a L^2 ... 77

O. in generale su L^2 non vale la formula integrale per la trasformata ... 77

L. (3.5.2) la trasformata in L^2 è suriettiva ... 77

T. (3.5.4) (Identità di Parsevall) vedi teorema 3.5.3, però in L^2 ... 77

C. (3.5.3) la trasformata in L^2 è biunivoca ... 77

T. (Teorema di Plancherel) definizione unitaria della trasformata ... 78

T. (3.5.5) trasformata in L^2 come limite lungo intervalli di integrazione ... 78

T. (3.5.6) antitrasformata in L^2 come limite lungo intervalli di integrazione ... 78

C. (3.5.4) in $L^2 \cap L^1$ vale la formula integrale per la trasformata ... 78

C. (3.5.5) se una funzione in L^2 ha trasformata in L^1, allora vale la formula integrale per l'antitrasformata ... 79

X. trasformata di $1/(1+x^2)$ ... 79

d. (3.5.4) trasformata e trasformata inversa in L^1 ... 79

X. la trasformata inversa in generale non è l'inverso della trasformata ... 79

L. (3.5.3) $\lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \pi$ ... 79

T. (3.5.7) se una funzione di L^1 è continua in un punto intorno al quale il rapporto incrementale è integrabile, allora il valore in quel punto si ottiene come limite lungo intervalli di integrazione della trasformata inversa ... 80

L. (3.5.4) la trasformata della traslata di una funzione in $L^1 \cup L^2$ porta fuori una fase proporzionale alla traslazione 81

L. (3.5.5) la trasformata del rifasamento di una funzione in $L^1 \cup L^2$ porta fuori una traslazione antiproporzionale alla fase ... 81

d. (3.5.5) prodotto di convoluzione in L^1 ... 82

L. (3.5.6) il prodotto di convoluzione in L^1 è a valori in L^1 ... 82

T. (3.5.8) la trasformata del prodotto di convoluzione in L^1 è il prodotto delle trasformate ... 82

d. (3.5.6) prodotto di convoluzione in $L^1 \times L^p$ ... 82

T. (3.5.9) il prodotto di convoluzione in $L^1 \times L^p$ è a valori in L^p e la norma del prodotto si maggiora con il prodotto delle norme ... 82

T. (3.5.10) la trasformata del prodotto di convoluzione in $L^1 \times L^2$ è il prodotto delle trasformate 83

L. (3.5.7) la traslazione di funzioni L^1 è uniformemente continua 83

L. (3.5.8) $f \in L^1$, $h_\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+x^2} \implies (f * h_\lambda)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\lambda t|}\hat{f}(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t$ 83

L. (3.5.9) $f \in L^1 \implies \lim_{\lambda\to 0} \|f * h_\lambda - f\| = 0$ 84

T. (3.5.11) (formula di inversione) per una funzione in L^1 con trasformata in L^1, la trasformata inversa è l'inverso della trasformata quasi ovunque 84

C. (3.5.6) se due funzioni in L^1 hanno la stessa trasformata allora coincidono quasi ovunque 84

L. (3.5.10) la trasformata inversa di una funzione L^1 è continua 85

C. (3.5.7) per una funzione in L^1 con trasformata in L^1, la trasformata inversa è l'inverso della trasformata quasi ovunque 85