La Brachistochrone Réelle

L'étude de la brachistochrone, ou recherche du toboggan au temps de parcours minimal, est une curiosité mathématique. La résolution numérique de ce problème en tenant compte des frottements se révèle beaucoup plus amusante et moins ardue que sa résolution analytique.

Cette étude de la brachistochrone réelle est un cas particulier de passage du modèle théorique à un modèle réel, constructible, comprenant les contraintes de son milieu. C'est une tâche nécessaire lors de la conception de tout moyen de transport, ici un transport sur rails.

Positionnement thématique (phase 2)

INFORMATIQUE (Informatique pratique), PHYSIQUE (Mécanique), INFORMATIQUE (Informatique Théorique).

Mots-clés (phase 2)

Mots-Clés (en français) Mots-Clés (en anglais)

Modélisme Optimization

Model making

Bibliographie commentée

Du grec brakhistos ("le plus court") et chronos ("temps"), la courbe brachistochrone désigne la courbe le long de laquelle doit glisser une masse soumise uniquement à son poids entre deux points donnés pour avoir un temps de parcours minimal [1]. La première étude du problème est réalisée par Galilée en 1638, mais la solution qu'il propose est fausse : Galilée propose un arc de cercle, alors que la solution est une cycloïde. La première preuve correcte est rédigée en 1696 par Jean Bernoulli, qui décide d'en faire un défi pour la communauté scientifique [2]. Il recevra, entre autres, les réponses de son frère Jacques Bernoulli et de Sir Isaac Newton.

La résolution analytique du problème prenant en compte les frottements solides est beaucoup plus récente : elle est publiée en 1975 dans l'American Journal of Physics par Ashby, Brittin, Love et Wyss [3, 4]. La solution obtenue est une courbe paramétrée, qui est d'autant plus creuse que le coefficient de frottement solide est élevé. Ils montrent d'ailleurs qu'il n'existe pas de solution si le coefficient de frottement est supérieur au rapport de la hauteur sur la longueur. Quant aux frottements fluides, il faudra attendre 1998 et la solution de Aleksey Parnovski [5].

D'autre part, aussi en 1975, John Holland et son équipe publient Adaptation in Natural and Artificial System, marquant ainsi le début de la popularisation des algorithmes génétiques [6]. Ils ont l'avantage de donner une solution relativement bonne en un temps raisonnable, dans une situation où un algorithme déterministe ne progresserait pas aussi vite, ou même n'existe pas.

La rencontre du problème de la brachistochrone et des algorithmes génétiques a lieu en 1990 [7], et c'est en 2003 que Christopher Wensrich utilise un algorithme génétique pour obtenir une solution au problème de la brachistochrone avec frottements solides [8]. Il a fait le choix de couper la courbe en segments dont les extrémités se déplacent uniquement sur des axes verticaux. Ses résultats montrent que plus le coefficient de frottement est élevé, plus la solution optimale s'éloigne de la cycloïde pour se rapprocher d'une droite rejoignant le départ et l'arrivée. Cela entre en contradiction avec les résultats obtenus par Ashby et Parnovski.

Problématique retenue

Etant donné la contradiction entre l'étude analytique et l'étude numérique soulevée précédemment, nous nous poserons la question suivante :

Comment programmer un algorithme pour résoudre le problème de la brachistochrone réelle?

Objectifs du TIPE

- Développer un algorithme génétique performant
- Construire une maquette pour vérifier la proposition de l'algorithme

Abstract

I thoroughly designed an algorithm to solve the problem of the brachistochrone for virtually any conceivable combination of external forces. This algorithm stands somewhere in between genetic and deterministic algorithms, making it a hybrid algorithm. The idea was to minimize the travel time of a die sliding on rails. Therefore, I built three models to work out the frictional forces applied on the die, and another one that is the actually optimal path.

Références bibliographiques (phase 2)

- [1] RICHARD TAILLET, LOÏC VILLAIN ET PASCAL FEBVRE : Dictionnaire de physique : ISBN: 978-2-8041-7554-2
- [2] J. Bernoulli: Acta Eruditorum: https://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/1051713
- [3] ASHBY, BRITTIN, LOVE ET WYSS: Brachistochrone with Coulomb friction: American Journal of Physics 43, 902 (octobre 1975)
- [4] WEISSTEIN, ERIC W.: Brachistochrone Problem:
- http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html
- [5] A. PARNOVSKY: Some Generalisations of the Brachistochrone Problem: Acta Physica Polonica 93 (1998)
- [6] J. H. HOLLAND: Adaptation In Natural And Artificial Systems: University of Michigan Press (1975)
- [7] R. A. ABU ZITAR ET ABDULLAH HOMAIFAR: The genetic algorithm as an alternative method for optimizing the brachistochrone problem: In Proceedings of the International Conference on Control and Modeling, Rome, 1990
- [8] C. M. Wensrich: Evolutionary solutions to the brachistochrone problem with Coulomb friction: Mechanics Research Communications 31(2):151-159 March 2004

DOT

- [1] Octobre 2018 : Première version de l'algorithme
- [2] Février 2019 : Amélioration de l'algorithme, construction des deux premières maquettes
- [3] Mars 2019 : Mesure des frottements, construction des deux dernières maquettes
- [4] Avril 2019: Mesure du temps de parcours sur le toboggan optimal