

p -进表示与 Bruhat-Tits 建筑中的单形距离

珠海代数组合研讨会

高煦

同济大学

2023 年 10 月 29 日

1 p -进表示与稳定格

2 Bruhat-Tits 建筑

3 稳定格的几何研究

4 主要结果

p -进表示与稳定格

- p -进表示 $\rho: \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}_K(V)$, 其中 K 为 p -进域 (p -adic field)
固定记号:
 - val = 赋值 (valuation)
 - \mathcal{O}_K = 赋值环 (valuation ring)
 - ϖ = 一意化元 (uniformizer)
 - κ = 剩余类域 (residue field)
 - $q = |\kappa|$

val = 赋值、 \mathcal{O}_K = 赋值环、 ϖ = 一意化元、 κ = 剩余类域、 $q = |\kappa|$

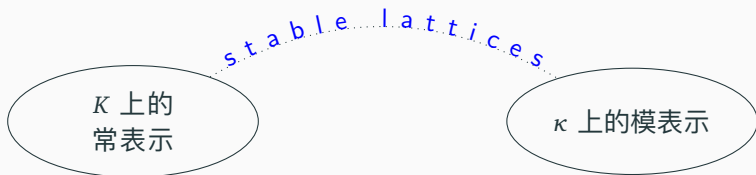
- p -进表示 $\rho: \Gamma \rightarrow \text{GL}_K(V)$, 其中 K 为 p -进域 (p -adic field)
- 稳定格 (*stable lattice*) = 在 ρ 的作用下稳定的格
注: 所谓格 (*lattice*) 者, 意指 V 之满足 $V = K \cdot L$ 的有限生成 \mathcal{O}_K -子模 L .

val = 赋值、 \mathcal{O}_K = 赋值环、 ϖ = 一意化元、 κ = 剩余类域、 $q = |\kappa|$

- p -进表示 $\rho: \Gamma \rightarrow \text{GL}_K(V)$, 其中 K 为 p -进域 (p -adic field)
- 稳定格 (*stable lattice*) = 在 ρ 的作用下稳定的格
- p -进表示 \rightsquigarrow 稳定格 \rightsquigarrow 模 ϖ 约化

$$(\rho, V) \rightsquigarrow L \rightsquigarrow L \otimes_{\mathcal{O}_K} \kappa \rightsquigarrow (\bar{\rho}, V_{\kappa})$$

- p -进表示 \coloneqq 同态 $\rho: \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}_K(V)$, 其中 K 为 p -进域 (p -adic field)
- 稳定格 (*stable lattice*) = 在 ρ 的作用下稳定的格
- p -进表示 \rightsquigarrow 稳定格 \rightsquigarrow 模 ϖ 约化



基本想法：

将表示论对象转化为几何对象

基本想法:

将表示论对象转化为几何对象

或:

从几何信息推知表示论信息

基本想法：

将表示论对象转化为几何对象

或：

从几何信息推知表示论信息

例如：

复李代数之表示论 \longleftrightarrow 根系 (root system)

基本想法：

将表示论对象转化为几何对象

或：

从几何信息推知表示论信息

例如：

可分约化代数群之表示论 \longleftrightarrow root datum

基本想法：

将表示论对象转化为几何对象

或：

从几何信息推知表示论信息

例如：

约化代数群之表示论 \longleftrightarrow Tits 建筑

基本想法：

将表示论对象转化为几何对象

或：

从几何信息推知表示论信息

例如：

p -进约化代数群之表示论 \longleftrightarrow Bruhat-Tits 建筑

考虑如下群表示：

$$D_8 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = (rs)^2 = 1 \rangle$$
$$r \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

将其分量嵌入 p -进数域 \mathbb{Q}_p 则得到一个 p -进表示.

如下定义了一个线性空间 \mathbb{Q}_p^2 中的格：

$$L_0 = \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

可以验证它是前述 p -进表示的一个稳定格.

如下定义了一个线性空间 \mathbb{Q}_p^2 中的格：

$$L_0 = \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

可以验证它是前述 p -进表示的一个稳定格.

它诱导了如下模表示：

$$r \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p), \quad s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p).$$

注意到当 $p \neq 2$ 时，这是个不可约表示.

我们希望考察前述 p -进表示之全体稳定格. 一个基本的结论是：

我们希望考察前述 p -进表示之全体稳定格. 一个基本的结论是：

- 若 $p \neq 2$, 则任何稳定格都与 L_0 至多相差一非零乘积因子. 换言之, 全体稳定格只包含一个相似 (homothety) 类 $[L_0]$.

我们希望考察前述 p -进表示之全体稳定格. 一个基本的结论是：

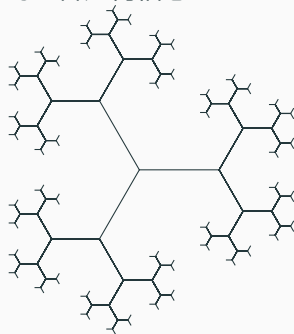
- 若 $p \neq 2$, 则任何稳定格都与 L_0 至多相差一非零乘积因子. 换言之, 全体稳定格只包含一个相似 (homothety) 类 $[L_0]$.
- 若 $p = 2$, 则除 $[L_0]$ 以外, 还存在如下稳定格之相似类:

$$L(\textcolor{blue}{1}) := \mathbb{Z}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\mathbb{Z}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

注意到我们有稳定格之包含关系 $2L_0 \subseteq L(1) \subseteq L_0$, 并且它诱导了模表示的包含关系 $0 \subseteq L(1)/2L_0 \subseteq L_0/2L_0$. 可见全体稳定格之相似类的集合与它们所诱导的模表示之性质息息相关.

为了证明上述结论，一个办法是考察如下的组合几何信息：

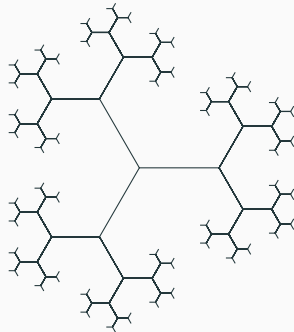
- 以线性空间 \mathbb{Q}_p^2 中的格之相似类为顶点



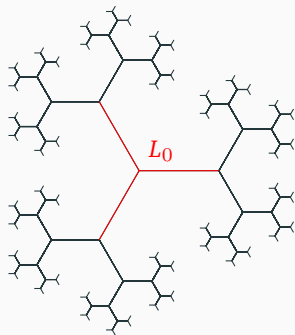
为了证明上述结论，一个办法是考察如下的组合几何信息：

- 以线性空间 \mathbb{Q}_p^2 中的格之相似类为顶点
- 两顶点 x, y 相邻当且仅当存在 $L \in x, L' \in y$ 使得

$$L \supseteq L' \supseteq pL.$$

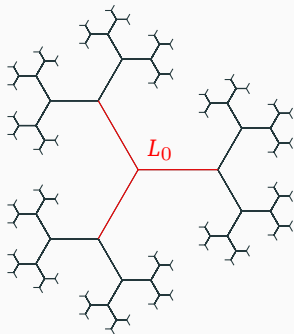


与 $[L_0]$ 相邻的顶点由下述格给出：



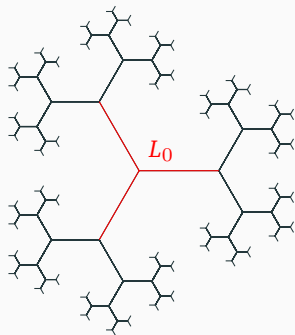
与 $[L_0]$ 相邻的顶点由下述格给出：

- $L(u) := \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} + p\mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ($u \in \mathbb{Z}_p$)
(事实上, $L(u)$ 只依赖于 $\bar{u} \in \mathbb{F}_p$)



与 $[L_0]$ 相邻的顶点由下述格给出：

- $L(u) := \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} + p\mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ($u \in \mathbb{Z}_p$)
(事实上, $L(u)$ 只依赖于 $\bar{u} \in \mathbb{F}_p$)
- $L(\infty) := \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p\mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

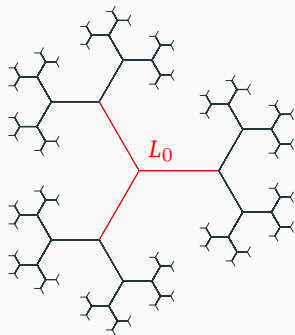


与 $[L_0]$ 相邻的顶点由下述格给出：

- $L(u) := \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} + p\mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ($u \in \mathbb{Z}_p$)
(事实上, $L(u)$ 只依赖于 $\bar{u} \in \mathbb{F}_p$)
- $L(\infty) := \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p\mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

这些顶点一一对应于：

- 射影直线 $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^1$ 中的闭点, 以及

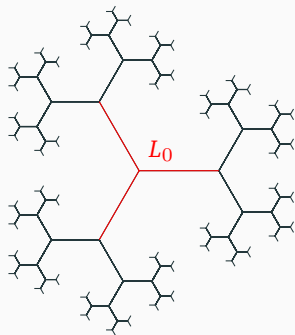


与 $[L_0]$ 相邻的顶点由下述格给出：

- $L(u) := \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} + p\mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ($u \in \mathbb{Z}_p$)
(事实上, $L(u)$ 只依赖于 $\bar{u} \in \mathbb{F}_p$)
- $L(\infty) := \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p\mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

这些顶点一一对应于：

- 射影直线 $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^1$ 中的闭点, 以及
- 代数群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 之 Tits 建筑.



Bruhat-Tits 建筑

建筑 (building)

- 是一个多单纯复形 (polysimplicial complex)
- 带有一个 Hadamard 度量空间结构
- 由互相同构的子复形粘合而成
- 每个子复形被称为该建筑里的一套公寓 (*apartment*)
- 每套公寓是一个仿射空间, 其单纯结构由 Weyl 群给出

何谓 Tits 建筑 (Building)

建筑 (building)

- 是一个多单纯复形 (polysimplicial complex)
- 带有一个 Hadamard 度量空间结构
- 由互相同构的子复形粘合而成
- 每个子复形被称为该建筑里的一套公寓 (*apartment*)
- 每套公寓是一个仿射空间, 其单纯结构由 Weyl 群给出

\mathcal{G} 为一约化代数群 $\rightsquigarrow \mathcal{B}(\mathcal{G})$ Tits 建筑

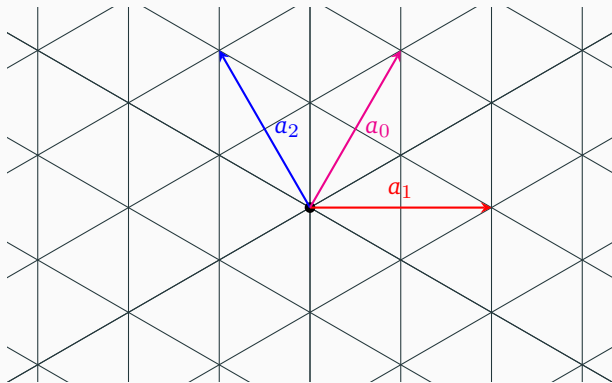
何谓 Bruhat-Tits 建筑 (Building)

建筑 (building)

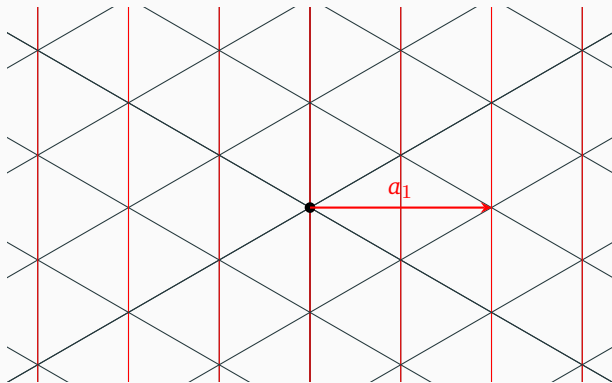
- 是一个多单纯复形 (polysimplicial complex)
- 带有一个 Hadamard 度量空间结构
- 由互相同构的子复形粘合而成
- 每个子复形被称为该建筑里的一套公寓 (*apartment*)
- 每套公寓是一个仿射空间, 其单纯结构由 Weyl 群给出

\mathcal{G} 为一 p -进约化代数群 $\rightsquigarrow \mathcal{B}(\mathcal{G})$ Bruhat-Tits 建筑

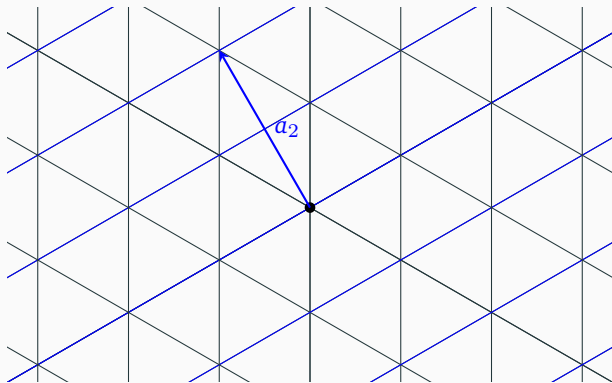
例子： A_2 型公寓



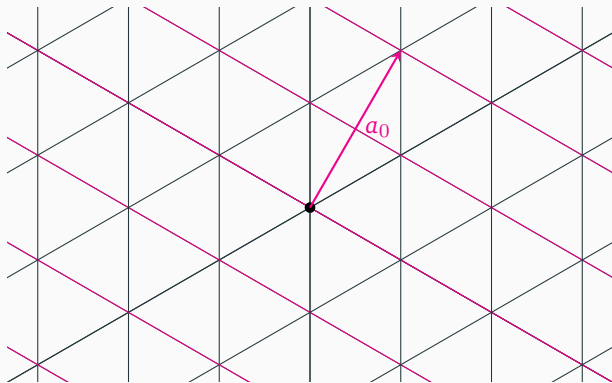
例子： A_2 型公寓



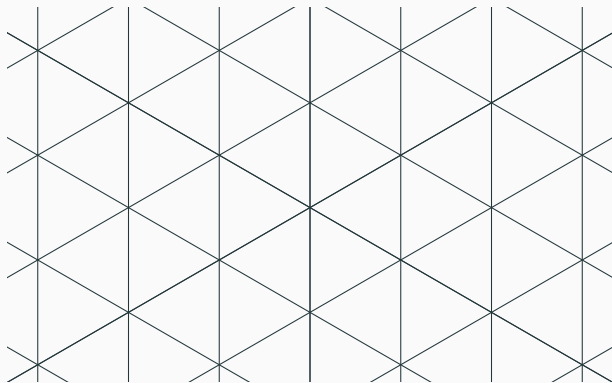
例子: A_2 型公寓

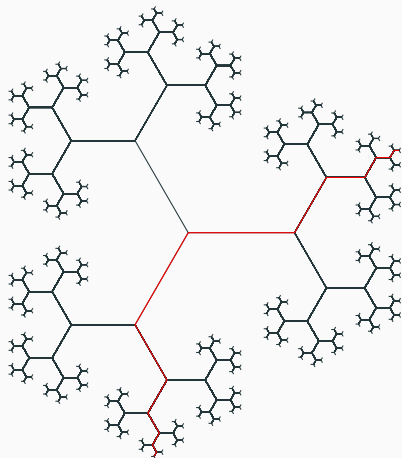


例子: A_2 型公寓



例子: A_2 型公寓





左图展示了群 $GL(2, K)$ 之 Bruhat-Tits 建筑，其被称为 *Bruhat-Tits 树*。它由一些同构于带格点的实直线的公寓拼接而成。其中一套公寓被用红色标识出来。

肇始：

O. Goldman and 岩堀長慶 (N. Iwahori). (1963). *The space of p -adic norms*, Acta Math. **109**, 137–177.

岩堀長慶 (N. Iwahori) and 松村英之 (H. Matsumoto). (1965). *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p -adic Chevalley groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **25**, 5–48.

土方宏明 (H. Hijikata). (1964). *Maximal compact subgroups of some p -adic classical groups*, mimeographed notes, Yale University.

F. Bruhat. (1965). *p -adic Groups*, Algebraic groups and Discontinuous Subgroups (University of Colorado in Boulder, July 5 to August 6, 1965), Proc. Symp. Pure Math., vol. 9, AMS, Providence, 1966, pp. 63–70.

主干:

F. Bruhat and J. Tits. (1972). *Groupes réductifs sur un corps local : I. Données radicielles valuées*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **41**, 5–251.

F. Bruhat and J. Tits. (1984). *Groupes réductifs sur un corps local : II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **60**, 5–184.

F. Bruhat and J. Tits. (1984). *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local*, Bull. Soc. Math. France **112**, no. 2, 259–301.

F. Bruhat and J. Tits. (1987). *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. II. Groupes unitaires*, Bull. Soc. Math. France **115**, no. 2, 141–195.

F. Bruhat and J. Tits. (1987). *Groupes algébriques sur un corps local. Chapitre III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **34**, no. 3, 671–698.

发展:

E. Landvogt. (2000). *Some functorial properties of the Bruhat-Tits building*, J. Reine Angew. Math. **518**, 213–241.

G. Prasad and 于如岡 (J.-K. Yu). (2002). *On finite group actions on reductive groups and buildings*, Invent. Math. **147**, no. 3, 545–560.

A. Borel and J.-P. Serre. (1973). *Corners and arithmetic groups*, Comment. Math. Helv. **48**, 436–491.

E. Landvogt. (1996). *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1619, Springer-Verlag, Berlin.

A. Moy and G. Prasad. (1994). *Unrefined minimal K -types for p -adic groups*, Invent. Math. **116**, no. 1-3, 393–408.

A. Moy and G. Prasad. (1996). *Jacquet functors and unrefined minimal K -types*, Comment. Math. Helv. **71**, no. 1, 98–121.

于如岡 (J.-K. Yu). (2015). *Smooth models associated to concave functions in Bruhat-Tits theory*, Autour des schémas en groupes, pp. 227–258.

J. Fintzen and B. Romano. (2017). *Stable vectors in Moy-Prasad filtrations*, Compos. Math. **153**, no. 2, 358–372.

J. Fintzen. (2021). *On the Moy-Prasad filtration*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **23**, no. 12, 4009–4063.

P. Garrett. (1997). *Buildings and classical groups*, Chapman & Hall, London.

A. Werner. (2011). *A tropical view on Bruhat-Tits buildings and their compactifications*, Cent. Eur. J. Math. **9**, no. 2, 390–402.

B. Rémy, A. Thuillier, and A. Werner. (2015). *Bruhat-Tits buildings and analytic geometry*, Berkovich spaces and applications, pp. 141–202.

... ..

- A. Borel and J.-P. Serre. (1976). *Cohomologie d'immeubles et de groupes S-arithmétiques*, *Topology* **15**, no. 3, 211–232 (French).
- P. Schneider and U. Stuhler. (1997). *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **85**, 97–191.
- D. Barbasch and A. Moy. (2000). *A new proof of the Howe conjecture*, *J. Amer. Math. Soc.* **13**, no. 3, 639–650.
- 于如岡 (J.-K. Yu). (2001). *Construction of tame supercuspidal representations*, *J. Amer. Math. Soc.* **14**, no. 3, 579–622.
- S. DeBacker. (2002). *Parametrizing nilpotent orbits via Bruhat-Tits theory*, *Ann. of Math.* **156**, no. 1, 295–332.
- S. Gubser, J. Knaute, S. Parikh, A. Samberg, and P. Witaszczyk. (2017). *p-adic AdS/CFT*, *Comm. Math. Phys.* **352**, no. 3, 1019–1059.
- J. Fintzen. (2021). *On the construction of tame supercuspidal representations*, *Compos. Math.* **157**, no. 12, 2733–2746.
- J. Suh. (2021). *Stable lattices in p-adic representations I. regular reduction and schur algebra*, *Journal of Algebra* **575**, 192–219.

... ..

稳定格的几何研究

$$\rho: \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_K(V)$$

稳定格 $\approx \mathrm{GL}_K(V)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点

$$\rho: \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_K(V)$$

稳定格 $\approx \mathrm{GL}_K(V)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点

= 不动点集 $S(\rho)$ 中的顶点 (0-单形), 其数目记作 $h(\rho)$

$$\rho: \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_K(V)$$

稳定格 $\approx \mathrm{GL}_K(V)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点

= 不动点集 $S(\rho)$ 中的顶点 (0-单形), 其数目记作 $h(\rho)$

定理 1 (J. Suh, 2021).

(i) $S(\rho)$ 是连通的凸单形集.

$$\rho: \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_K(V)$$

稳定格 $\approx \mathrm{GL}_K(V)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点

= 不动点集 $S(\rho)$ 中的顶点 (0-单形), 其数目记作 $h(\rho)$

定理 1 (J. Suh, 2021).

- (i) $S(\rho)$ 是连通的凸单形集.
- (ii) $S(\rho)$ 紧 $\iff h(\rho)$ 有限 $\iff \rho$ 不可约。

$$\rho: \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_K(V)$$

稳定格 $\approx \mathrm{GL}_K(V)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点

= 不动点集 $S(\rho)$ 中的顶点 (0-单形), 其数目记作 $h(\rho)$

定理 1 (J. Suh, 2021).

- (i) $S(\rho)$ 是连通的凸单形集.
- (ii) $S(\rho)$ 紧 $\iff h(\rho)$ 有限 $\iff \rho$ 不可约.
- (iii) $S(\rho)$ 之维数为 $r(\rho) - 1$, 其中 $r(\rho)$ 是 V_K 之 *Jordan-Hölder* 分解的长度.

$$\rho: \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_K(V)$$

稳定格 $\approx \mathrm{GL}_K(V)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点

= 不动点集 $S(\rho)$ 中的顶点 (0-单形), 其数目记作 $h(\rho)$

定理 1 (J. Suh, 2021).

- (i) $S(\rho)$ 是连通的凸单形集.
- (ii) $S(\rho)$ 紧 $\iff h(\rho)$ 有限 $\iff \rho$ 不可约.
- (iii) $S(\rho)$ 之维数为 $r(\rho) - 1$, 其中 $r(\rho)$ 是 V_K 之 *Jordan-Hölder* 分解的长度.
- (iv) 沿完全分歧扩张 E/K , 数 $h(\rho \otimes_K E)$ 随 $[E:K]$ 以多项式增长 $\iff \rho$ 具备正规约化 (即 V_K 之所有不可约因子互不同构).

回到前面的例子。我们已有 $[L_0] \in S(\rho)$.

回到前面的例子。我们已有 $[L_0] \in S(\rho)$.

- 对所有 $L(x)$, 不难发现

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot L(x) = L(x) \iff 2x \equiv 0 \pmod{p}.$$

回到前面的例子。我们已有 $[L_0] \in S(\rho)$.

- 对所有 $L(x)$, 不难发现

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot L(x) = L(x) \iff 2x \equiv 0 \pmod{p}.$$

- 因此, 当 $p \neq 2$ 时, 所有 $L(x)$ 都不是稳定的.

回到前面的例子。我们已有 $[L_0] \in S(\rho)$.

- 对所有 $L(x)$, 不难发现

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot L(x) = L(x) \iff 2x \equiv 0 \pmod{p}.$$

- 因此, 当 $p \neq 2$ 时, 所有 $L(x)$ 都不是稳定的.
- 由于 $S(\rho)$ 是连通的, $S(\rho)^0$ 只能包含 $[L_0]$.

- 当 $p = 2$ 时，我们有

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot L(x) = L(x) \iff x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

- 当 $p = 2$ 时，我们有

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot L(x) = L(x) \iff x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

- 因此， $[L(1)]$ 是与 $[L_0]$ 相邻的唯一的顶点.

- 当 $p = 2$ 时，我们有

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot L(x) = L(x) \iff x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

- 因此， $[L(1)]$ 是与 $[L_0]$ 相邻的唯一的顶点.
- 然而，由于 $\mathbb{Z}_2[\rho(D_8)]$ 包含主同余子群 P_1 ，单形集合 $S(\rho)$ 的半径不会超过 1.

- 当 $p = 2$ 时，我们有

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot L(x) = L(x) \iff x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

- 因此， $[L(1)]$ 是与 $[L_0]$ 相邻的唯一的顶点.
- 然而，由于 $\mathbb{Z}_2[\rho(D_8)]$ 包含主同余子群 P_1 ，单形集合 $S(\rho)$ 的半径不会超过 1.
- 因此， $S(\rho)^0$ 只能是 $\{[L_0], [L(1)]\}$.

设 \mathfrak{g} 为约化代数群, 考察 $\rho: \Gamma \longrightarrow \mathfrak{g}(K)$

设 \mathcal{G} 为约化代数群, 考察 $\rho: \Gamma \longrightarrow \mathcal{G}(K)$

稳定格 $\approx \mathcal{G}(K)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点
= 不动点集 $S(\rho)$ 中的顶点 (0-单形)

设 \mathcal{G} 为约化代数群, 考察 $\rho: \Gamma \longrightarrow \mathcal{G}(K)$

稳定格 $\approx \mathcal{G}(K)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点
= 不动点集 $S(\rho)$ 中的顶点 (0-单形)

问题.

如何研究 $S(\rho)$?

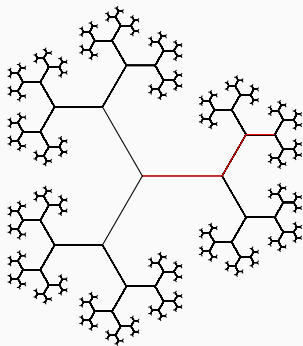
- \mathcal{G} 为一 p -进约化代数群 $\rightsquigarrow \mathcal{B}(\mathcal{G})$ *Bruhat-Tits* 建筑
- $\rho: \Gamma \rightarrow \mathcal{G}$ 为一表示 \rightsquigarrow 不动点集 $S(\rho) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{G})$

- \mathcal{G} 为一 p -进约化代数群 $\rightsquigarrow \mathcal{B}(\mathcal{G})$ *Bruhat-Tits* 建筑
- $\rho: \Gamma \rightarrow \mathcal{G}$ 为一表示 \rightsquigarrow 不动点集 $S(\rho) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{G})$
 - $S(\rho)$ 是凸单形集 (convex simplicial set)

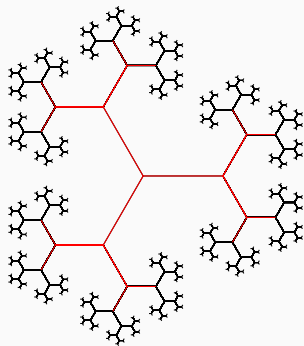
- \mathcal{G} 为一 p -进约化代数群 $\rightsquigarrow \mathcal{B}(\mathcal{G})$ *Bruhat-Tits* 建筑
- $\rho: \Gamma \rightarrow \mathcal{G}$ 为一表示 \rightsquigarrow 不动点集 $S(\rho) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{G})$
 - $S(\rho)$ 是凸单形集 (convex simplicial set)
 - \rightsquigarrow 它被其顶点完全决定

- \mathcal{G} 为一 p -进约化代数群 $\rightsquigarrow \mathcal{B}(\mathcal{G})$ *Bruhat-Tits* 建筑
- $\rho: \Gamma \rightarrow \mathcal{G}$ 为一表示 \rightsquigarrow 不动点集 $S(\rho) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{G})$
 - $S(\rho)$ 是凸单形集 (convex simplicial set)
 - \rightsquigarrow 它被其顶点完全决定
 - \rightsquigarrow 等效地, 可研究顶点的关联几何 (incidence geometry)

- \mathcal{G} 为一 p -进约化代数群 $\rightsquigarrow \mathcal{B}(\mathcal{G})$ *Bruhat-Tits 建筑*
- $\rho: \Gamma \rightarrow \mathcal{G}$ 为一表示 \rightsquigarrow 不动点集 $S(\rho) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{G})$
 - $S(\rho)$ 是凸单形集 (convex simplicial set)
 - \rightsquigarrow 它被其顶点完全决定
 - \rightsquigarrow 等效地, 可研究顶点的关联几何 (incidence geometry)
 - \rightsquigarrow 研究单形距离 (*simplicial distance*)



上图展示了一条长度为 3 的路径



上图展示了一个半径为 3 的单形球

主要结果

1. 单形距离之刻画
2. 单形球与不动点集之关系
3. 单形体积之增长估计

Gao, X. (2023). *Simplicial distance in Bruhat-Tits buildings of split classical type*, PhD Dissertation, University of California, Santa Cruz.

设建筑 \mathcal{B} 可分 (*split*), 则它完全由其根系 Φ 以及赋值 val 所决定。
当 Φ 为一不可约典型根系 (即 $\Phi = A_n, B_n, C_n$ 或 D_n) 时, 我们有

定理 2 (Gao, 2023).

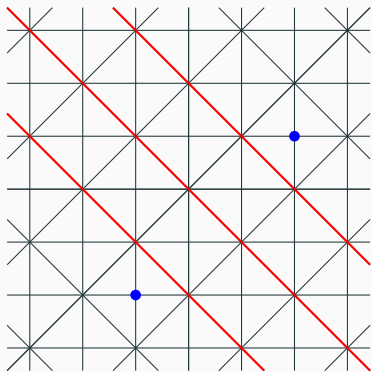
建筑 \mathcal{B} 中两顶点间的单形距离等于隔开它们的平行墙壁 (*wall*) 之最大数目加一。特别地, 从原点 o 到一顶点 x 的单形距离为

$$d(x, o) = \lceil a_0(x - o) \rceil,$$

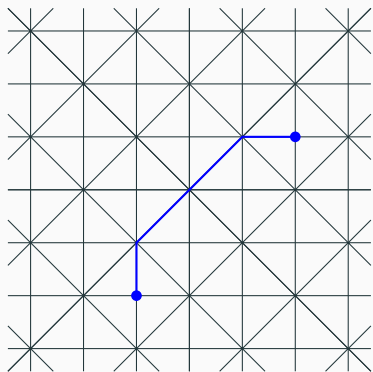
其中 a_0 为某一覆盖 x 的 Weyl 房之最高根。

注: 由单形距离与建筑/根系分解的相容性, 上述定理实质上给出了可分典型建筑中单形距离的刻画。

单形距离之刻画：示例

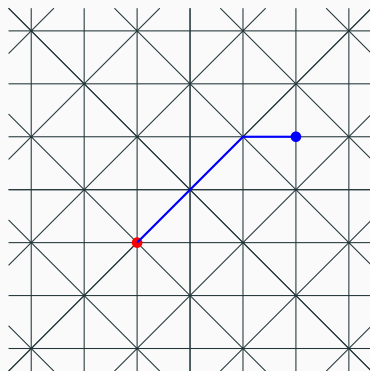
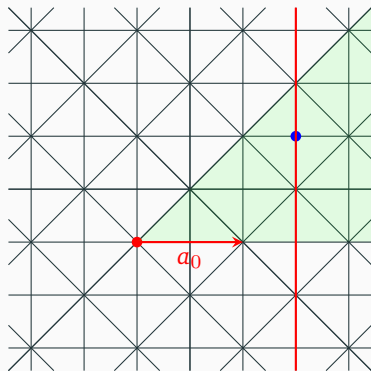


上图中两蓝色顶点被最多三面平行墙壁所隔开，故其间单形距离为 4。



上图展示了一条连结两蓝色顶点的最短路径。不难发现它的长度为 4。

单形距离之刻画：示例



图中蓝色顶点为绿色 Weyl 房所覆盖，而该 Weyl 房之最高根 a_0 在蓝色顶点处取值为 3，故其到原点的单形距离为 3。右图展示了一条连结二者的最短路径。

置 $[L_0]$ 于图中心，令

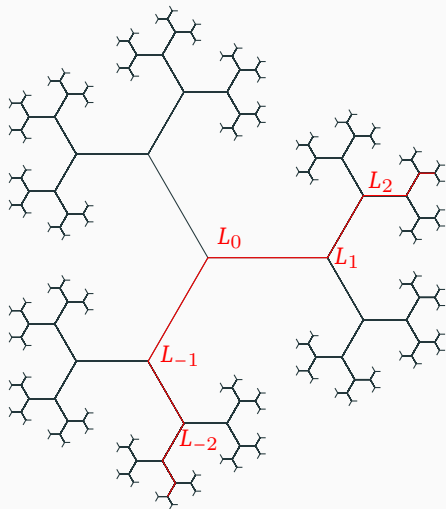
$$L_k := \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p^k \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

则 $[L_k]$ 总与 $[L_{k+1}]$ 相邻. 由此显见

$$d([L_k], [L_l]) = |l - k|.$$

另一方面（不妨设 $l > k$ ），我们有

$$L_k \supseteq L_l \supseteq p^{l-k} L_k.$$



置 $[L_0]$ 于图中心，令

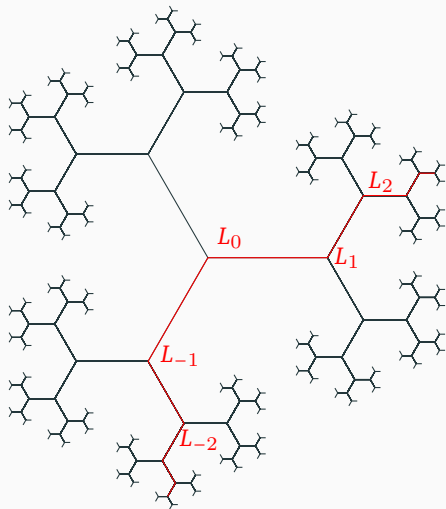
$$L_k := \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p^k \mathbb{Z}_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

则 $[L_k]$ 总与 $[L_{k+1}]$ 相邻. 由此显见

$$d([L_k], [L_l]) = |l - k|.$$

另一方面（不妨设 $l > k$ ），我们有

$$L_k \supseteq L_l \supseteq p^{l-k} L_k.$$



典型群之 Bruhat-Tits 建筑可用格的语言来描述 (P. Garrett, 1997)。
此时有如下刻画：

推论 3 (Gao, 2023).

当 Φ 为 A_n 或 C_n 时,

$$d(x, y) \leq r \iff \exists L \in x, L' \in y \text{ 使得 } L \supseteq L' \supseteq \varpi^r L.$$

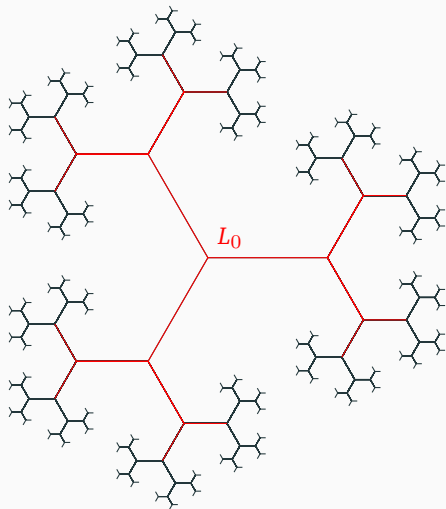
当 Φ 为 B_n 或 D_n 时, 由于存在一种叫做 oriflamme 的结构, 顶点之间的单形距离会比推论中预测的更短。尽管如此, 我们仍可将前述定理中的刻画翻译为格的语言。鉴于篇幅有限, 不在此详细展开。

以 L_0 之其他基底取代 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则由前述对单形距离之刻画, 我们有

$$d([L], [L_0]) = d \iff$$

$$\exists L \in [L]: L = e_1 + p^d e_2$$

for some basis of L_0 .



例子: Bruhat-Tits 树之单形球

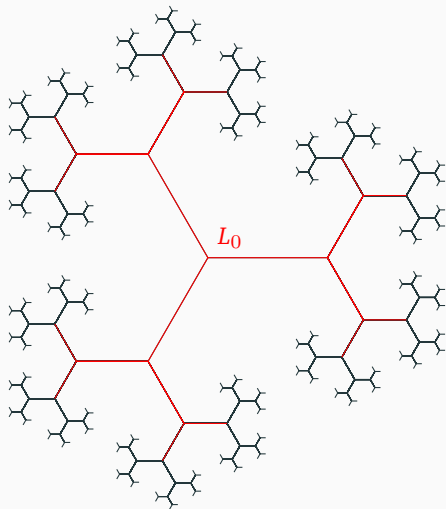
以 L_0 之其他基底取代 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则由前述对单形距离之刻画, 我们有

$$\begin{aligned} d([L], [L_0]) = d &\iff \\ \exists L \in [L]: L = e_1 + p^d e_2 & \\ \text{for some basis of } L_0. & \end{aligned}$$

由此, 不难发现单形球

$$B(r) := \{[L] \mid d([L], [L_0]) \leq r\}$$

正是 Bruhat-Tits 树在主同余子群 $P_r := I_2 + p^r M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_p)$ 作用下的不动点集.



定理 4 (Gao, 2023).

半径为 r 的单形球 $B(x, r)$ 正是 *Moy-Prasad* 子群 $P_{x,r}$ 之不动点集。

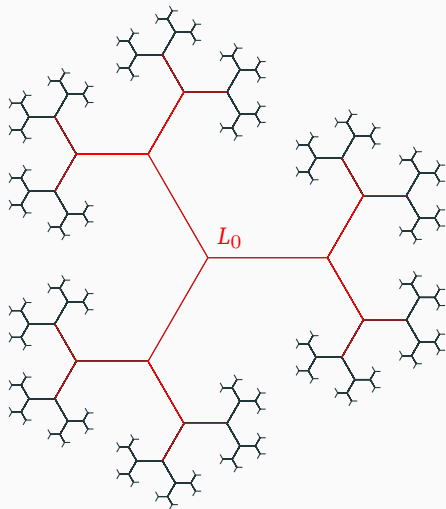
Moy-Prasad 子群 $(P_{x,r})_{r \geq 0}$

- 构成 Parahoric 子群 P_x 之滤过 (filtration)
- 由 (A. Moy and G. Prasad, 1996) 引入
- 它们可看作是主同余子群在约化代数群上的推广

例子：Bruhat-Tits 树之单形体积

观察 Bruhat-Tits 树后不难发现，
单形球 $B([L_0], r)$ 之体积为

$$\begin{aligned} |B([L_0], r)| &= 1 + \sum_{n=1}^r (p+1)p^{n-1} \\ &= \frac{p+1}{p-1}p^r - \frac{2}{p-1}. \end{aligned}$$



例子：Bruhat-Tits 树之单形体积

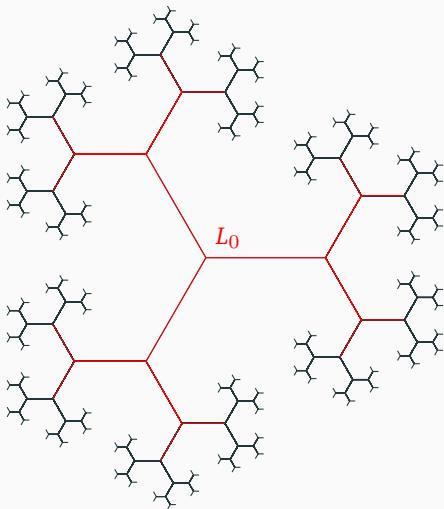
观察 Bruhat-Tits 树后不难发现，
单形球 $B([L_0], r)$ 之体积为

$$\begin{aligned}|B([L_0], r)| &= 1 + \sum_{n=1}^r (p+1)p^{n-1} \\ &= \frac{p+1}{p-1}p^r - \frac{2}{p-1}.\end{aligned}$$

注意到：

$$|B([L_0], r)| \sim \frac{p+1}{p-1}p^r,$$

且系数 $\frac{p+1}{p-1}$ 是关于 p 的有理函数.

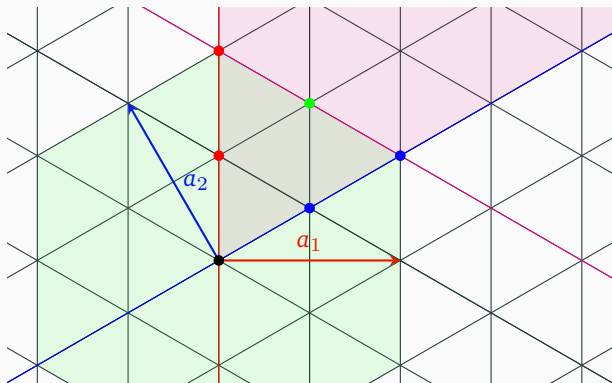


定理 5 (Gao, 2023).

$$\text{SV}(r)(:= |B(o, r)|) = \sum_{I \subseteq \Delta} \frac{\mathcal{P}_{\Phi; I}(q)}{q^{\deg(\mathcal{P}_{\Phi; I})}} \sum_{x \in B(r, C, I)} \prod_{a(x) > 0} q^{\lceil a(x) \rceil}$$

- $\mathcal{P}_{\Phi; I}$ 为 *Poincaré* 多项式
- C 为某一 *Weyl* 房
- $B(r, C, I) = B(o, r) \cap \text{inn}(\bigcap_{a \in I} \ker(a))$

指标集 $B(r, C, I)$: 示例



$$B(2, \text{pink}, a_1) = \{\bullet, \bullet\},$$

$$B(2, \text{pink}, a_2) = \{\bullet, \bullet\},$$

$$B(2, \text{pink}, \Delta) = \{\bullet\},$$

$$B(2, \text{pink}, \emptyset) = \{\bullet\}.$$

定理 6 (Gao, 2023).

当 $r \rightarrow \infty$ 时, 函数 $SV(r)$ 具有如下渐进关系:

$$SV(r) \asymp r^{\epsilon} q^{\pi \cdot r},$$

其中常数 ϵ 与 π 只与根系 Φ 有关。兹列举如下:

	A_n (n odd)	A_n (n even)	B_3	B_n ($n \geq 4$)	C_n ($n \geq 2$)	D_4	D_n ($n \geq 5$)
ϵ	0	1	0	0	0	2	1
π	$(\frac{n+1}{2})^2$	$\frac{n}{2}(\frac{n}{2} + 1)$	5	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	6	$\frac{n(n-1)}{2}$

前述渐进关系中的首项系数具备如下有理性：

定理 7 (Gao, 2023).

当根系为 A_n 、 C_n 、 B_3 或 D_4 时,

$$SV(r) \sim c \cdot r^\epsilon q^{\pi \cdot r},$$

否则

$$SV(2r) \sim c_0 \cdot r^\epsilon q^{2\pi \cdot r},$$

$$SV(2r+1) \sim c_1 \cdot r^\epsilon q^{2\pi \cdot r},$$

其中常数 c 、 c_0 以及 c_1 均可表示为 q 的有理函数。

感谢各位专家聆听！