p-进表示与 Bruhat-Tits 建筑中的单形距离

第 18 届全国李理论会议　　同济大学，上海

高煦

同济大学

2023 年 7 月 21 日

p-进表示与稳定格

- p-进表示 $:=$ 同态 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_K(V)$，其中$K$为 p-进域 (p-adic field)
  固定记号：
  - val = 赋值 (valuation)
  - $\mathscr{O}_K$ = 赋值环 (valuation ring)
  - ϖ = 一意化元 (uniformizer)
  - κ = 剩余类域 (residue field)
  - $q = |\kappa|$

p-进表示与稳定格

val = 赋值、$\mathscr{O}_K$ = 赋值环、ϖ = 一意化元、κ = 剩余类域、$q = |\kappa|$

- p-进表示 := 同态 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_K(V)$，其中$K$为 p-进域 (p-adic field)
- 稳定格 *(stable lattice)* = 在 ρ 的作用下稳定的格
  注：所谓格 (lattice)者，意指 V 之满足 $V = K \cdot L$ 的有限生成 $\mathscr{O}_K$-子模L.

p-进表示与稳定格

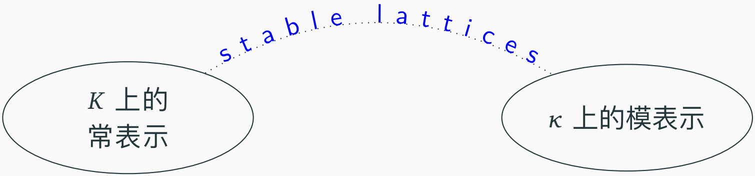
val = 赋值、$\mathcal{O}_K$ = 赋值环、ϖ = 一意化元、κ = 剩余类域、$q = |\kappa|$

- p-进表示 := 同态 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_K(V)$，其中$K$为 p-进域 (p-adic field)
- 稳定格 *(stable lattice)* = 在 ρ 的作用下稳定的格
- p-进表示 $\rightsquigarrow$ 稳定格 $\rightsquigarrow$ 模 ϖ 约化

$$(\rho, V) \rightsquigarrow L \rightsquigarrow L \otimes_{\mathcal{O}_K} \kappa \rightsquigarrow (\bar{\rho}, V_\kappa)$$

p-进表示与稳定格

- p-进表示 $:=$ 同态 $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_K(V)$，其中$K$为 p-进域 (p-adic field)
- 稳定格 *(stable lattice)* = 在 ρ 的作用下稳定的格
- p-进表示 $\rightsquigarrow$ 稳定格 $\rightsquigarrow$ 模 ϖ 约化



基本想法：

将表示论对象转化为几何对象

几何表示论

基本想法:

将表示论对象转化为几何对象

或:

从几何信息推知表示论信息

几何表示论

基本想法：

将表示论对象转化为几何对象

或：

从几何信息推知表示论信息

例如：

复李代数之表示论 $\longleftrightarrow$ 根系（root system）

几何表示论

基本想法：

将表示论对象转化为几何对象

或：

从几何信息推知表示论信息

例如：

可分约化代数群之表示论 $\longleftrightarrow$ root datum

几何表示论

基本想法：

将表示论对象转化为几何对象

或：

从几何信息推知表示论信息

例如：

约化代数群之表示论 $\longleftrightarrow$ Tits 建筑

几何表示论

基本想法：

将表示论对象转化为几何对象

或：

从几何信息推知表示论信息

例如：

p-进约化代数群之表示论 $\longleftrightarrow$ Bruhat-Tits 建筑

Bruhat-Tits 建筑

何谓建筑（Building）

建筑（building）

- 是一个多单纯复形 (polysimplicial complex)
- 带有一个 Hadamard 度量空间结构
- 由互相同构的子复形粘合而成
- 每个子复形被称为该建筑里的一套公寓 *(apartment)*
- 每套公寓是一个仿射空间，其单纯结构由 Weyl 群给出

何谓 Tits 建筑（Building）

建筑（building）

- 是一个多单纯复形 (polysimplicial complex)
- 带有一个 Hadamard 度量空间结构
- 由互相同构的子复形粘合而成
- 每个子复形被称为该建筑里的一套公寓 *(apartment)*
- 每套公寓是一个仿射空间，其单纯结构由 Weyl 群给出

$\mathcal{G}$ 为一约化代数群 $\rightsquigarrow \mathscr{B}(\mathcal{G})$ *Tits 建筑*

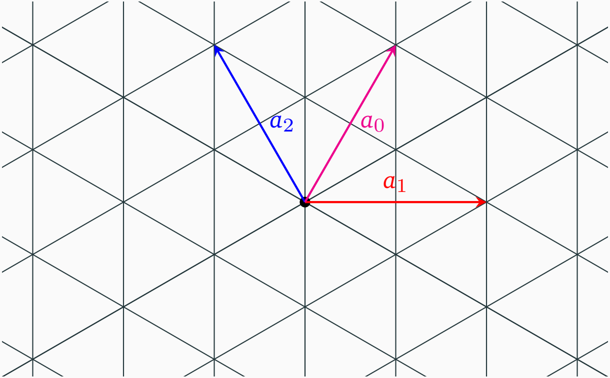
何谓 Bruhat-Tits 建筑（Building）

建筑（building）

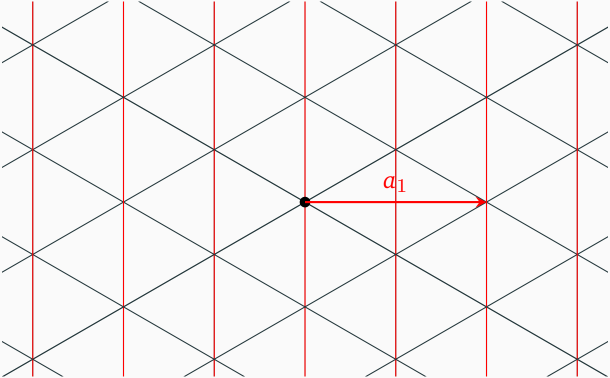
- 是一个多单纯复形 (polysimplicial complex)
- 带有一个 Hadamard 度量空间结构
- 由互相同构的子复形粘合而成
- 每个子复形被称为该建筑里的一套公寓 *(apartment)*
- 每套公寓是一个仿射空间，其单纯结构由 Weyl 群给出

$\mathcal{G}$ 为一 p-进约化代数群 $\rightsquigarrow \mathscr{B}(\mathcal{G})$ *Bruhat-Tits* 建筑

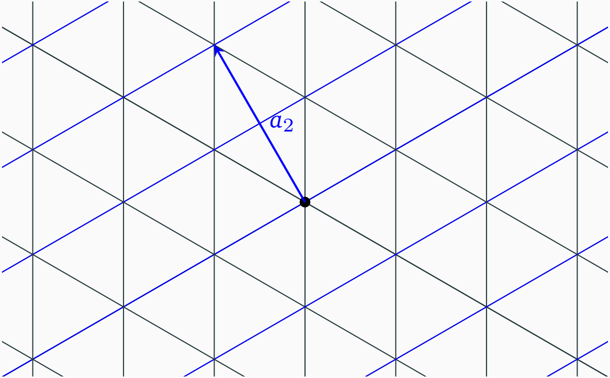
例子：A_2 型公寓



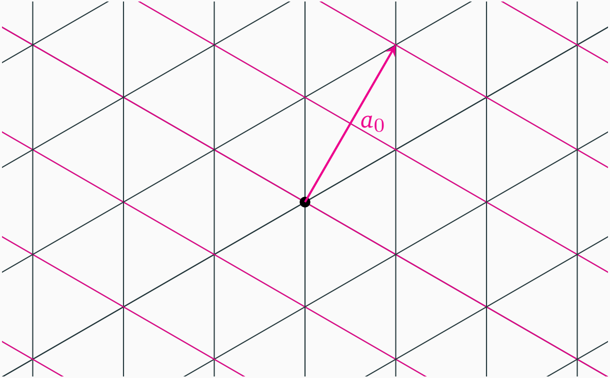
例子：A_2 型公寓



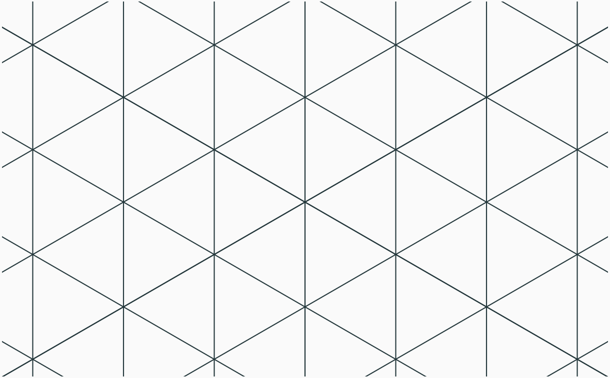
例子：A_2 型公寓



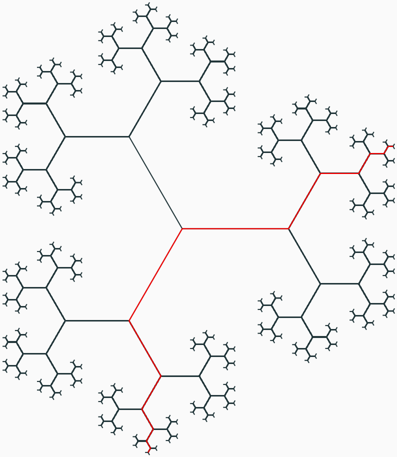
例子：A_2 型公寓



例子：A_2 型公寓



例子：Bruhat-Tits 树



左图展示了群 $\mathrm{GL}(2, K)$ 之 Bruhat-Tits 建筑，其被称为*Bruhat-Tits 树*。它由一些同构于带格点的实直线的公寓拼接而成。其中一套公寓被用红色标识出来。

肇始:

O. Goldman and 岩堀長慶 (N. Iwahori). (1963). *The space of $\mathfrak{p}$-adic norms*, Acta Math. **109**, 137–177.

岩堀長慶 (N. Iwahori) and 松村英之 (H. Matsumoto). (1965). *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of $\mathfrak{p}$-adic Chevalley groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **25**, 5–48.

土方宏明 (H. Hijikata). (1964). *Maximal compact subgroups of some p-adic classical groups*, mimeographed notes, Yale University.

F. Bruhat. (1965). *p-adic Groups*, Algebraic groups and Discontinuous Subgroups (University of Colorado in Boulder, July 5 to August 6, 1965), Proc. Symp. Pure Math., vol. 9, AMS, Providence, 1966, pp. 63–70.

主干：

F. Bruhat and J. Tits. (1972). *Groupes réductifs sur un corps local : I. Données radicielles valuées*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **41**, 5–251.

F. Bruhat and J. Tits. (1984). *Groupes réductifs sur un corps local : II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **60**, 5–184.

F. Bruhat and J. Tits. (1984). *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local*, Bull. Soc. Math. France **112**, no. 2, 259–301.

F. Bruhat and J. Tits. (1987). *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. II. Groupes unitaires*, Bull. Soc. Math. France **115**, no. 2, 141–195.

F. Bruhat and J. Tits. (1987). *Groupes algébriques sur un corps local. Chapitre III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **34**, no. 3, 671–698.

发展:

E. Landvogt. (2000). *Some functorial properties of the Bruhat-Tits building*, J. Reine Angew. Math. **518**, 213–241.

G. Prasad and 于如冈（J.-K. Yu）. (2002). *On finite group actions on reductive groups and buildings*, Invent. Math. **147**, no. 3, 545–560.

A. Borel and J.-P. Serre. (1973). *Corners and arithmetic groups*, Comment. Math. Helv. **48**, 436–491.

E. Landvogt. (1996). *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1619, Springer-Verlag, Berlin.

A. Moy and G. Prasad. (1994). *Unrefined minimal K-types for p-adic groups*, Invent. Math. **116**, no. 1-3, 393–408.

A. Moy and G. Prasad. (1996). *Jacquet functors and unrefined minimal K-types*, Comment. Math. Helv. **71**, no. 1, 98–121.

于如冈（J.-K. Yu）. (2015). *Smooth models associated to concave functions in Bruhat-Tits theory*, Autour des schémas en groupes, pp. 227–258.

Bruhat-Tits 理论简史

J. Fintzen and B. Romano. (2017). *Stable vectors in Moy-Prasad filtrations*, Compos. Math. **153**, no. 2, 358–372.

J. Fintzen. (2021). *On the Moy-Prasad filtration*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **23**, no. 12, 4009–4063.

P. Garrett. (1997). *Buildings and classical groups*, Chapman & Hall, London.

A. Werner. (2011). *A tropical view on Bruhat-Tits buildings and their compactifications*, Cent. Eur. J. Math. **9**, no. 2, 390–402.

B. Rémy, A. Thuillier, and A. Werner. (2015). *Bruhat-Tits buildings and analytic geometry*, Berkovich spaces and applications, pp. 141–202.

... ...

Bruhat-Tits 理论简史：应用

A. Borel and J.-P. Serre. (1976). *Cohomologie d'immeubles et de groupes S-arithmétiques*, Topology **15**, no. 3, 211–232 (French).

P. Schneider and U. Stuhler. (1997). *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **85**, 97–191.

D. Barbasch and A. Moy. (2000). *A new proof of the Howe conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **13**, no. 3, 639–650.

于如冈（J.-K. Yu). (2001). *Construction of tame supercuspidal representations*, J. Amer. Math. Soc. **14**, no. 3, 579–622.

S. DeBacker. (2002). *Parametrizing nilpotent orbits via Bruhat-Tits theory*, Ann. of Math. **156**, no. 1, 295–332.

S. Gubser, J. Knaute, S. Parikh, A. Samberg, and P. Witaszczyk. (2017). *p-adic AdS/CFT*, Comm. Math. Phys. **352**, no. 3, 1019–1059.

J. Fintzen. (2021). *On the construction of tame supercuspidal representations*, Compos. Math. **157**, no. 12, 2733–2746.

J. Suh. (2021). *Stable lattices in p-adic representations I. regular reduction and schur algebra*, Journal of Algebra **575**, 192–219.

... ...

稳定格的几何研究

$$\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_K(V)$$

稳定格 $\approx \mathrm{GL}_K(V)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点

稳定格的几何研究

$$\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_K(V)$$

稳定格 $\approx \mathrm{GL}_K(V)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点

$= $ 不动点集 $S(\rho)$ 中的顶点 (0-单形)，其数目记作 $h(\rho)$

$$\rho\colon \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_K(V)$$

稳定格 $\approx \mathrm{GL}_K(V)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点

$=$ 不动点集 $S(\rho)$ 中的顶点 (0-单形)，其数目记作 $h(\rho)$

定理 1 (J. Suh, 2021).

(i) $S(\rho)$ 紧 $\iff$ $h(\rho)$ 有限 $\iff$ ρ 不可约。

$$\rho\colon \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_K(V)$$

$$\begin{aligned}\text{稳定格} &\approx \mathrm{GL}_K(V) \text{ 之 } \textit{Bruhat-Tits} \text{ 建筑中的稳定顶点}\\ &= \text{不动点集 } S(\rho) \text{ 中的顶点 (0-单形)，其数目记作 } h(\rho)\end{aligned}$$

定理 1 (J. Suh, 2021).

(i) $S(\rho)$ 紧 $\iff$ $h(\rho)$ 有限 $\iff$ ρ 不可约。

(ii) $S(\rho)$ 之维数为 $r(\rho)-1$，其中 $r(\rho)$ 是 V_κ 之 *Jordan-Hölder* 分解的长度。

$$\rho\colon \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_K(V)$$

稳定格 $\approx \mathrm{GL}_K(V)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点
$= $ 不动点集 $S(\rho)$ 中的顶点 (0-单形)，其数目记作 $h(\rho)$

定理 1 (J. Suh, 2021).

(i) $S(\rho)$ 紧 $\iff$ $h(\rho)$ 有限 $\iff$ ρ 不可约。

(ii) $S(\rho)$ 之维数为 $r(\rho)-1$，其中 $r(\rho)$ 是 V_κ 之 *Jordan-Hölder* 分解的长度。

(iii) 沿完全分歧扩张 E/K，数 $h(\rho\otimes_K E)$ 随 $[E:K]$ 以多项式增长 $\iff$ ρ 具备**正规约化** *(*即 V_κ 之所有不可约因子互不同构*)*。

设 $\mathcal{G}$ 为约化代数群，考察 $\rho\colon \Gamma \longrightarrow \mathcal{G}(K)$

设 $\mathcal{G}$ 为约化代数群，考察 $\rho\colon \Gamma \longrightarrow \mathcal{G}(K)$

稳定格 $\approx \mathcal{G}(K)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点

$=$ 不动点集 $S(\rho)$ 中的顶点 (0-单形)

设 $\mathcal{G}$ 为约化代数群，考察 $\rho\colon \Gamma \longrightarrow \mathcal{G}(K)$

稳定格 $\approx \mathcal{G}(K)$ 之 *Bruhat-Tits* 建筑中的稳定顶点

$=$ 不动点集 $S(\rho)$ 中的顶点 (0-单形)

问题.

如何研究 $S(\rho)$?

Bruhat-Tits 建筑中的单形距离

- $\mathcal{G}$ 为一 p-进约化代数群 $\rightsquigarrow \mathscr{B}(\mathcal{G})$ *Bruhat-Tits 建筑*
- $\rho : \Gamma \to \mathcal{G}$ 为一表示 $\rightsquigarrow$ 不动点集 $S(\rho) \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{G})$

Bruhat-Tits 建筑中的单形距离

- $\mathcal{G}$ 为一 p-进约化代数群 $\rightsquigarrow \mathscr{B}(\mathcal{G})$ *Bruhat-Tits* 建筑
- $\rho\colon \Gamma \to \mathcal{G}$ 为一表示 $\rightsquigarrow$ 不动点集 $S(\rho) \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{G})$
  - $S(\rho)$ 是凸单形集 (convex simplicial set)

Bruhat-Tits 建筑中的单形距离

- $\mathcal{G}$ 为一 p-进约化代数群 $\rightsquigarrow \mathscr{B}(\mathcal{G})$ *Bruhat-Tits 建筑*
- $\rho : \Gamma \to \mathcal{G}$ 为一表示 $\rightsquigarrow$ 不动点集 $S(\rho) \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{G})$
  - $S(\rho)$ 是凸单形集 (convex simplicial set)
  - $\rightsquigarrow$ 它被其顶点完全决定

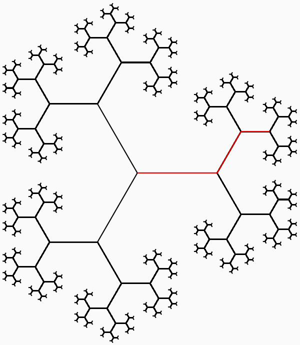
Bruhat-Tits 建筑中的单形距离

- $\mathcal{G}$ 为一 p-进约化代数群 $\rightsquigarrow$ $\mathscr{B}(\mathcal{G})$ *Bruhat-Tits* 建筑
- $\rho\colon \Gamma \to \mathcal{G}$ 为一表示 $\rightsquigarrow$ 不动点集 $S(\rho) \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{G})$
  - $S(\rho)$ 是凸单形集 (convex simplicial set)
  - $\rightsquigarrow$ 它被其顶点完全决定
  - $\rightsquigarrow$ 等效地，可研究顶点的关联几何 (incidence geometry)

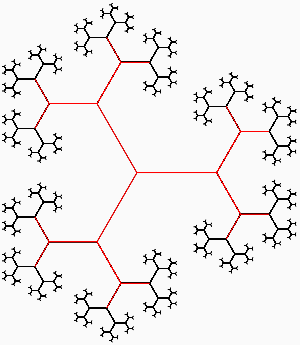
Bruhat-Tits 建筑中的单形距离

- $\mathcal{G}$ 为一 p-进约化代数群 $\rightsquigarrow$ $\mathscr{B}(\mathcal{G})$ *Bruhat-Tits 建筑*
- $\rho\colon \Gamma \to \mathcal{G}$ 为一表示 $\rightsquigarrow$ 不动点集 $S(\rho) \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{G})$
  - $S(\rho)$ 是凸单形集 (convex simplicial set)
  - $\rightsquigarrow$ 它被其顶点完全决定
  - $\rightsquigarrow$ 等效地，可研究顶点的关联几何 (incidence geometry)
  - $\rightsquigarrow$ 研究单形距离 *(simplicial distance)*

单形距离



上图展示了一条长度为 3 的路径



上图展示了一个半径为 3 的单形球

主要结果

主要结果

1. 单形距离之刻画
2. 单形球与不动点集之关系
3. 单形体积之增长估计

Gao, X. (2023). *Simplicial distance in Bruhat-Tits buildings of split classical type*, PhD Dissertation, University of California, Santa Cruz.

单形距离之刻画

设建筑 $\mathscr{B}$ 可分 *(split)*，则它完全由其根系 Φ 以及赋值 val 所决定。当 Φ 为一不可约典型根系 (即 $\Phi = A_n, B_n, C_n$ 或 D_n) 时，我们有

定理 2 (Gao, 2023)**.**

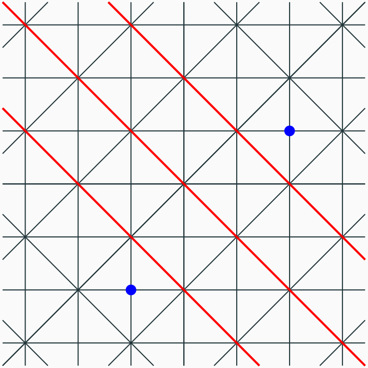
建筑 $\mathscr{B}$ 中两顶点间的单形距离等于隔开它们的平行墙壁 *(wall)* 之最大数目加一。特别地，从原点 o 到一顶点 x 的单形距离为

$$d(x, o) = \lceil a_0(x - o) \rceil,$$

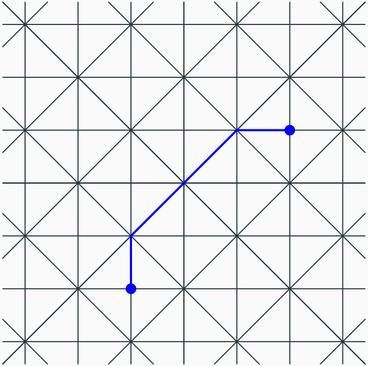
其中 a_0 为某一覆盖 x 的 *Weyl* 房之最高根。

注：由单形距离与建筑/根系分解的相容性，上述定理实质上给出了可分典型建筑中单形距离的刻画。

单形距离之刻画：示例

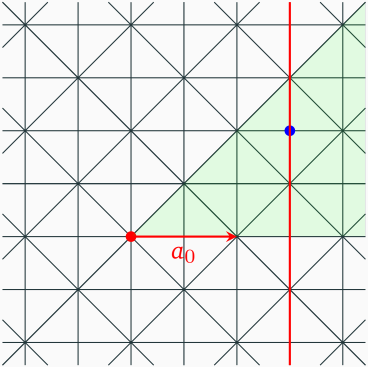


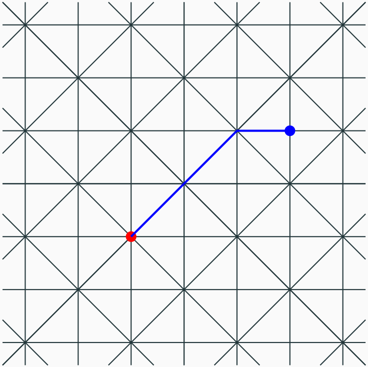
上图中两蓝色顶点被最多三面平行墙壁所隔开，故其间单形距离为 4。



上图展示了一条连结两蓝色顶点的最短路径。不难发现它的长度为 4。

单形距离之刻画：示例





图中蓝色顶点为绿色 Weyl 房所覆盖，而该 Weyl 房之最高根 a_0 在蓝色顶点处取值为 3，故其到原点的单形距离为 3。右图展示了一条连结二者的最短路径。

典型群之单形距离

典型群之 Bruhat-Tits 建筑可用格的语言来描述 (P. Garrett, 1997)。此时有如下刻画：

推论 3 (Gao, 2023)**.**

当 Φ 为 A_n 或 C_n 时，

$$d(x,y) \leqslant r \iff \exists L \in x, L' \in y \quad \text{使得} \quad L \supseteq L' \supseteq \varpi^r L.$$

当 Φ 为 B_n 或 D_n 时，由于存在一种叫做 oriflamme 的结构，顶点之间的单形距离会比推论中预测的更短。尽管如此，我们仍可将前述定理中的刻画翻译为格的语言。鉴于篇幅有限，不在此详细展开。

定理 4 (Gao, 2023).

半径为 r 的单形球 $B(x,r)$ 正是 *Moy-Prasad* 子群 $P_{x,r}$ 之不动点集。

Moy-Prasad 子群 $(P_{x,r})_{r\geqslant 0}$

- 构成 Parahoric 子群 P_x 之滤过（filtration）
- 由 (A. Moy and G. Prasad, 1996) 引入
- 它们可看作是主同余子群在约化代数群上的推广

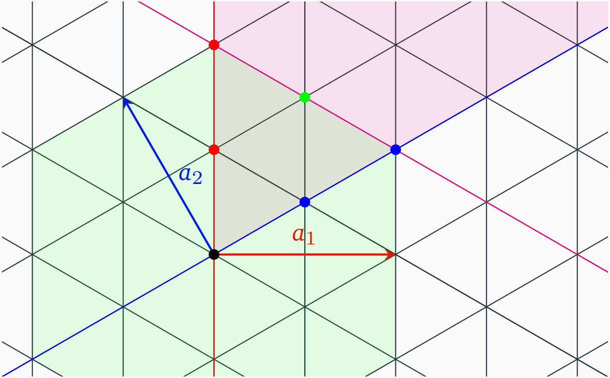
单形体积之公式

定理 5 (Gao, 2023).

$$\mathrm{SV}(r)(:= |B(o,r)|) = \sum_{I\subseteq\Delta} \frac{\mathscr{P}_{\Phi;I}(q)}{q^{\deg(\mathscr{P}_{\Phi;I})}} \sum_{x\in B(r,C,I)} \prod_{a(x)>0} q^{\lceil a(x)\rceil}$$

- $\mathscr{P}_{\Phi;I}$ 为 *Poincaré* 多项式
- C 为某一 *Weyl* 房
- $B(r,C,I) = B(o,r)\cap \mathrm{inn}(\bigcap_{a\in I}\ker(a))$

指标集 $B(r, C, I)$：示例



$$B(2, \blacksquare, a_1) = \{\bullet, \bullet\}, \qquad B(2, \blacksquare, a_2) = \{\bullet, \bullet\},$$

$$B(2, \blacksquare, \Delta) = \{\bullet\}, \qquad B(2, \blacksquare, \emptyset) = \{\bullet\}.$$

定理 6 (Gao, 2023).
当 $r \to \infty$ 时，函数 $\mathrm{SV}(r)$ 具有如下渐进关系：

$$\mathrm{SV}(r) \asymp r^{\epsilon} q^{\pi \cdot r},$$

其中常数 ϵ 与 π 只与根系 Φ 有关。兹列举如下：

	A_n (n odd)	A_n (n even)	B_3	B_n ($n \geqslant 4$)	C_n ($n \geqslant 2$)	D_4	D_n ($n \geqslant 5$)
ϵ	0	1	0	0	0	2	1
π	$(\frac{n+1}{2})^2$	$\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)$	5	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	6	$\frac{n(n-1)}{2}$

首项系数

前述渐进关系中的首项系数具备如下有理性：

定理 7 (Gao, 2023)**.**

当根系为 A_n、C_n、B_3 或 D_4 时，

$$\mathrm{SV}(r) \sim c \cdot r^{\epsilon} q^{\pi \cdot r},$$

否则

$$\mathrm{SV}(2r) \sim c_0 \cdot r^{\epsilon} q^{2\pi \cdot r},$$
$$\mathrm{SV}(2r+1) \sim c_1 \cdot r^{\epsilon} q^{2\pi \cdot r},$$

其中常数 c、c_0 以及 c_1 均可表示为 q 的有理函数。

感谢各位专家聆听！