微分几何笔记

Gau Syu

2013 年 1 月 22 日

Preface

这是 2012 年下半年南开大学数学科学学院黄利兵老师的研究生课程“微分几何”的笔记。

0.1 主要内容

1. 微分流形
   (a) 向量场
   (b) 张量场
   (c) 切丛、余切丛
2. 外微分
   (a) 活动标架法和李群
3. 主纤维丛上的联络

0.2 教材

陈省身,《微分几何讲义》

0.3 参考书

- Kobayashi & Nomizu
  Foundations of Differential Geometry
  Vol.I Chapts 1-2
- M.Spivak
  A Comprehensive Introduction to Differential Geometry
  Vol. II 1,Gauss's paper 2,Riemann's report 3, 联络概念的 5 个版本
- J.M.Lee, Introduction to Smooth Manifolds(GTM218)

Contents

1 微分流形

2012-9-13

记号：$\mathbb{R}^n$。

定义 1. n 元函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，若 f 的任意 r 阶偏导数存在且连续，则称 f 为C^r的。

例 2. C^∞，光滑函数。

C^ω，解析函数。

$$f(x)=f(x_0)+\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i-(x_0)_i)+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)(x_i-(x_0)_i)(x_j-(x_0)_j)+\cdots$$

定义 3. 设 M 是 Hausdorff 空间，若对任意的 $x\in M$，存在 x 的领域 $U\subset M$ 使得存在同胚 $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^n$，[1]则称 M 为（n 维）流形。(φ,U) 称为 x 处的坐标系。

定义 4. 设 M 为 n 维流形，若坐标系的集合 $\mathscr{A}=\{(\varphi_i,U_i)\mid i\in I\}$ 使得

1) M 为 $\mathscr{A}$ 所覆盖，即 $M=\bigcup\limits_{i\in I}U_i$。

2) $\mathscr{A}$ 是C^r 相容的，即或者 $U_i\cap U_j=\varnothing$，或者 $\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}\colon\varphi_j(U_i\cap U_j)\to\varphi_i(U_i\cap U_j)$ 是 C^r 的。

3) $\mathscr{A}$ 具有极大性，即对任意坐标系 (φ,U), 若其与任意 (φ_i,U_i) 是 C^r 相容的，则 $(\varphi,U)\in\mathscr{A}$。

则称 $\mathscr{A}$ 为 M 上的一个C^r 微分结构。赋予 C^r 微分结构的流形 M 称为一个C^r 微分流形。

例 5. $M=\mathbb{R}^n$，取 $\mathscr{A}=\{(\mathrm{id},\mathbb{R}^n)\}$。

例 6. $M=S^n=\{(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}$，取 $U_1=S^n\backslash\{(-1,\vec{0})\}$，$U_2=S^n\backslash\{(1,\vec{0})\}$，则 $S^n=U_1\cup U_2$。定义

$$\begin{aligned}\varphi_1\colon\ U_1&\longrightarrow\mathbb{R}^n\\(x_0,\vec{x})&\mapsto\frac{\vec{x}}{1+x_0}\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}\varphi_2\colon\ U_2&\longrightarrow\mathbb{R}^n\\(x_0,\vec{x})&\mapsto\frac{\vec{x}}{1-x_0}\end{aligned}$$

则 (φ_1,U_1) 与 (φ_2,U_2) 是光滑相容的：

$$\begin{aligned}\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}\colon\ \mathbb{R}^n\backslash\{0\}&\longrightarrow\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\\\vec{u}&\mapsto\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\end{aligned}$$

证明.

$$\begin{aligned}\begin{cases}\dfrac{\vec{x}}{1-x_0}=\vec{u}\\x_0^2+|\vec{x}|^2=1\end{cases}&\Longrightarrow\begin{cases}\vec{x}=(1-x_0)\vec{u}\\x_0^2+(1-x_0)^2|\vec{u}|^2=1\end{cases}\\&\Longrightarrow\varphi_2^{-1}(\vec{u})=(\frac{|\vec{u}|^2-1}{|\vec{u}|^2+1},\frac{2\vec{u}}{|\vec{u}|^2+1})\\&\Longrightarrow\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}(\vec{u})=\frac{\frac{2\vec{u}}{|\vec{u}|^2+1}}{\frac{2|\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2+1}}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\end{aligned}$$

□

[1]每一处的维数相同。

例 7. $M=\mathbb{R}\mathbf{P}^n=(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/\sim$，这里 $(x_0,x_1,\cdots,x_n)\sim(y_0,y_1,\cdots,y_n)$ 指 $\exists\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $x_i=\lambda y_i$。令 $Z_i=\{(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid x_i\neq 0\}$，$U_i=Z_i/\sim$，则 $\mathbb{R}\mathbf{P}^n=U_0\cup U_1\cup\cdots\cup U_n$。

定义 $\varphi_i([x_0,x_1,\cdots,x_n])=(\frac{x_0}{x_i},\frac{x_1}{x_i},\cdots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\cdots,\frac{x_n}{x_i})$，则任意 (φ_i,U_i) 与 (φ_j,U_j) 相容：

$$
\begin{aligned}
\varphi_j^{-1}(r_1,r_2,\cdots,r_n)&=[r_1,r_2,\cdots,r_i,1,r_{j+1},\cdots,r_n]\\
\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}(r_1,r_2,\cdots,r_n)&=\varphi_i([r_1,r_2,\cdots,r_i,1,r_{j+1},\cdots,r_n])\\
&=\begin{cases}(\frac{r_1}{r_i},\frac{r_2}{r_i},\cdots,\frac{r_j}{r_i},\frac{1}{r_i},\frac{r_{j+1}}{r_i},\cdots,\frac{r_{i-1}}{r_i},\frac{r_{i+1}}{r_i},\cdots,\frac{r_n}{r_i}) & i>j\\ (\frac{r_1}{r_i},\frac{r_2}{r_i},\cdots,\frac{r_{i-1}}{r_i},\frac{r_{i+1}}{r_i},\cdots,\frac{r_j}{r_i},\frac{1}{r_i},\frac{r_{j+1}}{r_i},\cdots,\frac{r_n}{r_i}) & i<j\end{cases}
\end{aligned}
$$

定义 8. 设 M、N 为光滑流形，$f\colon M\to N$ 是连续映射。对于 $x\in M$，若存在 x 处的坐标系 (φ,U) 和 $f(x)$ 处的坐标系 (ψ,V)，使得

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon\mathbb{R}^{\dim M}\longrightarrow\mathbb{R}^{\dim N}$$

是光滑映射，则称 f在 x 处光滑。

若 $\forall x\in M$，f 在 x 处光滑，则称 f 为光滑映射，记作 $f\in C^\infty(M,N)$。

例 9. 光滑映射 $f\colon M\to\mathbb{R}$ 称为 M 上的光滑函数。M 上的光滑函数全体记为 $C^\infty(M)$。

例 10. 若 $f\colon M\to N$ 是同胚，且 $f\in C^\infty(M,N),f^{-1}\in C^\infty(N,M)$，则称 f 为光滑同胚。

例 11. 光环映射 $f\colon\mathbb{R}\to M$ 称为 M 上的光滑曲线。

例 12. 考虑 $f\colon S^3\to S^2$，其中

$$
\begin{aligned}
S^3&=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\mid|z_1|^2+|z_2|^2=1\}\\
S^2&=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}\mid\alpha^2+|\beta|^2=1\}\\
f(z_1,z_2)&=(|z_1|^2-|z_2|^2,2\overline{z_1}z_2)
\end{aligned}
$$

这个 f 称为*Hopf fibration*。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathbb{R}\times\mathbb{C} \\
S^3 \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"] & S^2 \arrow[u, "i"]
\end{tikzcd}
$$

对于 $\xi\in\mathbb{C},|\xi|=1$，$f(\xi z_1,\xi z_2)=f(z_1,z_2)$。也就是说，$S^3$ 中的一个圆周被映射为 S^2 上的一个点。

定义 13. 设 M 和 N 为光滑流形，微分结构分别为

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}&=\{(\varphi_i,U_i)\mid i\in A\}\\
\mathscr{B}&=\{(\psi_j,V_j)\mid j\in B\}
\end{aligned}
$$

则

$$\mathscr{A}\times\mathscr{B}=\{(\varphi_i\times\psi_j,U_i\times V_j)\mid i\in A,j\in B\}$$

定义 $M\times N$ 上微分结构，使 $M\times N$ 成为一个光滑流形，称为 M 和 N 的乘积流形。其中

$$(\varphi_i\times\psi_j)(x,y)=(\varphi_i(x),\psi_j(y))\in\mathbb{R}^{\dim M}\times\mathbb{R}^{\dim N}$$

注. $S^3\neq S^2\times S^1$。

2 切空间和余切空间

2012-9-20

定义 14. 对于光滑曲线 $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$，设 $\gamma(0)=p$，定义 γ 在 p 点的切向量 $X_p=\dot\gamma(0)$ 为映射

$$\begin{aligned} X_p\colon\ C_p^\infty &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

命题 15. 切向量 $X_p\colon C_p^\infty\to\mathbb{R}$ 是实线性映射，且满足*Leibniz's Law*

$$X_p(fg)=X_p(f)g(p)+X_p(g)f(p)$$

证明. 对任意的 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}, f,g\in C_p^\infty$ 有

$$\begin{aligned} X_p(\lambda f+\mu g) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\lambda f+\mu g)(\gamma(t))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\lambda f(\gamma(t))+\mu g(\gamma(t)))\Big|_{t=0} \\ &= \lambda X_p(f)+\mu X_p(g) \\ X_p(fg) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(f(\gamma(t))g(\gamma(t)))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}f(\gamma(t))\Big|_{t=0} g(p)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}g(\gamma(t))\Big|_{t=0} f(p) \\ &= X_p(f)g(p)+X_p(g)f(p) \end{aligned}$$

□

约定. 取 $p\in M$ 处的坐标系 (φ,U)，设 $\varphi(p)=(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^n)$，考虑过 p 的曲线

$$\gamma_i(t)=\varphi^{-1}(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^i+t,\cdots,x_0^n)$$

将它在 p 点的切向量记作 $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$。

命题 16. 取定 $p\in M$ 处的坐标系 (x^i)，则 p 点的任一切向量 X_p 可写为 $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2}\big|_p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$ 的线性组合。反之，$\forall\xi^i\in\mathbb{R},\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ 必为切向量。

证明. 任一曲线 γ，设 $\varphi(\gamma(t))=(\gamma^1(t),\gamma^2(t),\cdots,\gamma^n(t))$。则 γ 在 p 点的切向量 X_p 满足

$$\begin{aligned} X_p(f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(f(\gamma(t)))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\gamma(t))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\widetilde{f}(\gamma^1(t),\gamma^2(t),\cdots,\gamma^n(t)))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x^i}(\gamma^1(0),\gamma^2(0),\cdots,\gamma^n(0))\dot\gamma^i(0) \end{aligned}$$

下面说明它等于 $(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p)(f)\gamma^i(0)$：

$$\begin{aligned}(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p)(f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}f(\gamma_i(t))\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}f(\varphi^{-1}(x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^i + t, \cdots, x_0^n))\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^i}(x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^n)\end{aligned}$$

这表明 X_p 与 $\dot{\gamma}^i(0)(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p)$ 在任何 $f \in C_p^\infty$ 上的作用相等。所以 $X_p = \dot{\gamma}^i(0)(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p)$。

下面证明 $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2}\big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$ 线性无关：

若有 $\xi^i \in \mathbb{R}$ 使得 $\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p = 0$，则

$$0 = (\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p)(x^j \circ \varphi) = \xi^i \delta_i^j = \xi^j$$

故 $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2}\big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$ 线性无关。 □

定理 17. p 点的全体切向量构成 $n = \dim M$ 维线性空间，且任取 p 点的坐标系 (x^i) 则 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\}$ 构成它的一组基。将这个实线性空间称为 p 点的切空间，记作 T_pM。

注. 切向量有局部性：$\forall f, g \in C_p^\infty$，若 $f|_U = g|_U$，则 $X_p(f) = X_p(g)$。等价地说，$\forall f \in C_p^\infty$，若 $f|_U = 0$，则 $X_p(f) = 0$。

定义 C_p^∞ 之等价关系为 $f \sim g$ 当且仅当存在 p 的领域 U 使得 $f|_U = g|_U$。该关系下的等价类称为在 p 点的函数芽（germ）。

定义 18. T_pM 的对偶空间，称为 p 点的余切空间，记作 T_p^*，其中元素称为余切向量（也称为1− 形式）。

定义 19. 对于 $f \in C_p^\infty$ 定义 f 在 p 点的全微分$\mathrm{d}\,f|_p$ 为这样一个余切向量：

$$(\mathrm{d}\,f|_p)(X_p) = X_p(f), \forall X_p \in T_pM$$

取 p 点的坐标系 (x^i)，将 $\mathrm{d}(x^i \circ \varphi)|_p$ 简写为 $\mathrm{d}\,x^i|_p$，则有：

命题 20. $\{\mathrm{d}\,x^i|_p\}$ 构成 T_p^*M 的一组基。

证明.

$$(\mathrm{d}\,x^i|_p)(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p) = (\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p)(x^i \circ \varphi) = \delta_j^i$$

所以 $\{\mathrm{d}\,x^i|_p\}$ 与 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\}$ 是对偶基。 □

例 21. 考虑 $M = O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A'A = I\}$，有 $\dim M = \dfrac{n(n-1)}{2}$。

证明. 有 $I \in M$，下求 T_IM。

取曲线 $A(t)$ 过 I，即 $A(0) = I$，则

$$A(t)^T A(t) = I$$

在 $t = 0$ 处求导得：

$$\dot{A}(t)^T A(t) + A(t)^T \dot{A}(t) = 0$$

取 $t = 0$ 得知切向量 $X = \dot{A}(0)$ 满足

$$X^T + X = 0$$

即 X 为反对称矩阵。所以 $T_IM \subset \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^T + X = 0\}$。

反之，对任何反对称矩阵 X，考虑曲线

$$A(t) = e^{tX} = I + tX + \frac{t^2}{2!}X^2 + \cdots$$

则 $A(t) \in O(n)$ 且 $\dot{A}(0) = X$，于是 $T_IM = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^T + X = 0\}$。故 $\dim M = \dim T_IM = \dfrac{n(n-1)}{2}$。 □

约定. 设 $f\colon M \to N$ 是光滑流形的光滑映射。对 M 上的任一曲线 $\gamma(t)$，设 $\gamma(0) = p, f(p) = q$，将曲线 $f(\gamma(t))$ 在 q 点的切向量记作 $f_{*p}(\dot{\gamma}(0))$。

命题 22. $f_{*p}\colon T_PM \to T_qN$ 是线性映射。

证明. 首先证明 f_{*p} well-defined，即，对任意两条过 p 的曲线 $\gamma(t)$ 和 $\widetilde{\gamma}(t)$，$\gamma(0) = \widetilde{\gamma}(0) = p$，若 $\dot{\gamma}(0) = \dot{\widetilde{\gamma}}(0) = q$，则 $f(\gamma(t))$ 和 $f(\widetilde{\gamma}(t))$ 在 q 点切向量相同。

为此，只需验证：

$$\forall g \in C_q^\infty, \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}g(f(\gamma(t)))\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}g(f(\widetilde{\gamma}(t)))\right|_{t=0}$$

令 $\widetilde{g} = g \circ f \in C_p^\infty$，则

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}g(f(\gamma(t)))\right|_{t=0} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\widetilde{g}(\gamma(t))\right|_{t=0} = \dot{\gamma}(0)(\widetilde{g})\\ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}g(f(\widetilde{\gamma}(t)))\right|_{t=0} &= \dot{\widetilde{\gamma}}(0)(\widetilde{g})\end{aligned}$$

再证 f_{*p} 是实线性映射，即

$$f_{*p}(X_p + \lambda Y_p) = f_{*p}X_p + \lambda f_{*p}Y_p$$

因为

$$f_{*p}(X_p)(g) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}g(f(\gamma(t)))\right|_{t=0} = X_p(g\circ f)$$

所以

$$\begin{aligned}(f_{*p}(X_p + \lambda Y_p))(g) &= (X_p + \lambda Y_p)(g \circ f)\\ &= X_p(g\circ f) + \lambda Y_p(g \circ f)\\ &= (f_{*p}X_p)(g) + \lambda(f_{*p}Y_p)(g)\end{aligned}$$

故 f_{*p} 是实线性映射。 □

定义 23. $f_{*p}\colon T_PM \to T_qN$ 称为 f 在 p 点的切映射。$\operatorname{rank}_p f \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rank} f_{*p}$ 称为 f 在 p 点的秩。

设 $f\colon M \to N, f(p) = q$，分取 p, q 之坐标系 $(\varphi, U), (\psi, V)$ 使得 $f(U) \subset V$，此时，f 有局部表达式：

$$\widetilde{f}(x^1, \cdots, x^m) = (f^1(x^1, \cdots, x^m), \cdots, f^n(x^1, \cdots, x^m))$$

即 $f = \psi^{-1} \circ \widetilde{f} \circ \varphi$。$(f_{*p})(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p)$ 就是曲线 $f(\gamma_i(t))$ 在 $t = 0$ 处的切向量, 其中 $\gamma_i(t) = \varphi^{-1}(x_0^1, \cdots, x_0^i + t, \cdots, x_0^n)$。

$$f(\gamma_i(t)) = \varphi^{-1} \circ \widetilde{f}(x_0^1, \cdots, x_0^i + t, \cdots, x_0^n)\gamma^\alpha(t) = f^\alpha(x_0^1, \cdots, x_0^i + t, \cdots, x_0^n)$$

所以

$$\dot{\gamma}^\alpha(0) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(\varphi(p))\left.\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right|_q$$

命题 24. $f_{*p}\colon T_pM \to T_pN$ 在基 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\}$ 和 $\{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\big|_q\}$ 下的矩阵为 *Jacobi* 矩阵。

例 25. $M=\mathbb{R}^{n\times n}, N=\mathbb{R}, f(A)=\det(A)$。

证明. $f_{*I}(B)$ 是曲线 $f(I+tB)$ 在 $t=0$ 处的切向量。

$$f_{*I}(B)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}|I+tB|\bigg|_{t=0}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}|I+tB|=t^n|B+\frac{1}{t}I|$$

若 B 之特征多项式为 $F(\lambda)$，则

$$|I+tB|=(-t)^nF(\frac{1}{t})$$

由于

$$F(\lambda)=\lambda^n-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots$$

所以

$$\begin{aligned}|I+tB|&=(-t)^n((-\frac{1}{t})^n-\mathrm{tr}(B)(-\frac{1}{t})^{n-1}+\cdots)\\&=1+\mathrm{tr}(B)t+o(t)\end{aligned}$$

所以 $f_{*I}(B)=\mathrm{tr}(B)$。 □

定义 26. 对于 $f\in C^\infty(M,N)$，切映射 f_* 的共轭映射 $f^*\colon T_q^*N\to T_p^*M$ 称为拉回。

证明. (验证 well-define) $\forall\alpha\in T_q^*N, \forall X\in T_pM$，有

$$(f^*\alpha)(X)=\alpha(f_*X)$$
$$f^*(\mathrm{d}\,y^j)=\mathrm{d}\,f^j=\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\,\mathrm{d}\,x^i\bigg|_p$$

□

3 子流形

2012-9-27

定义 27. 设 $f\colon M\to N$ 是光滑映射，$\forall p\in M$，定义 f 在 p 点的秩为 f_{*p} 的秩，记作 $\mathrm{rank}_p f=\mathrm{rank}\, f_{*p}$。

若 $\mathrm{rank}_p f=\dim M$，则称 f 在 p 点浸入（immersion）；

若 $\mathrm{rank}_p f=\dim N$，则称 f 在 p 点淹没（submersion）；

若 f 在每一点浸入（淹没），则称 f 是浸入（淹没）映射。

例 28.

$$\begin{aligned}f\colon\ (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(0,\pi)&\longrightarrow\mathbb{R}^3\\(u,v)&\mapsto(\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u)\end{aligned}$$

定理 29 (浸入的局部典范表示)**.** 设 $f\colon M\to N$ 是光滑映射且 f 在 $p\in M$ 上是浸入，则存在 p 的坐标系 (φ,U) 和 $q=f(p)$ 的坐标系 (ψ,V) 使得

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)$$

证明. 取 p 之坐标系 $(\widetilde{\varphi},\widetilde{U})$ 和 q 之坐标系 $(\widetilde{\psi},\widetilde{V})$，设 f_{*p} 在 $\{\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^i}\big|_p\}$ 和 $\{\frac{\partial}{\partial\widetilde{y}^\alpha}\big|_q\}$ 的矩阵为

$$(\frac{\partial\widetilde{f}^\alpha}{\partial\widetilde{x}^i})=(A|*)$$

由于 $\mathrm{rank}(\frac{\partial\widetilde{f}^\alpha}{\partial\widetilde{x}^i})=\dim M(=m)$，不妨设 $A=(\frac{\partial\widetilde{f}^\alpha}{\partial\widetilde{x}^i})^{1\leqslant\alpha\leqslant m}_{1\leqslant i\leqslant m}$ 可逆。

定义映射

$$\begin{aligned}F\colon\ \widetilde{\varphi}(\widetilde{U})\times\mathbb{R}^{n-m}&\longrightarrow\mathbb{R}^n\\(x,z)&\mapsto\widetilde{\psi}\circ f\circ\widetilde{\varphi}^{-1}(x)+(0,z)\end{aligned}$$

则 F 在 $(\widetilde{\varphi}(p),0)$ 处的 Jacobi 为

$$\begin{pmatrix}A & *\\ & I_{n-m}\end{pmatrix}$$

这是可逆矩阵。

由反函数定理，存在 $(\widetilde{\varphi}(p),0)$ 之邻域 $U\times\widehat{U}$ 使 $F|_{U\times\widehat{U}}$ 可逆，将反函数记作 F^{-1}，令 $\psi=F^{-1}\circ\widetilde{\psi}\colon F(U\times\widehat{U})\cap V\to\mathbb{R}^n$，则 $(\widetilde{\varphi},U),(\psi,V)$ 满足定理要求：

$$\begin{aligned}&\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)\\=&F^{-1}\circ(\widetilde{\psi}\circ f\circ\widetilde{\psi}^{-1})(x^1,\cdots,x^m)\\=&F^{-1}(F(x,0))=(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)\end{aligned}$$

□

例 30. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 定义为

$$\begin{aligned}f(t)&=(2\cos(t-\frac{\pi}{2}),\sin(2t-\pi))\\&=(2\sin t,-\sin 2t)\end{aligned}$$

计算一下：

$$\begin{aligned}f'(t)&=(2\cos t,-2\cos 2t)\\&=(2\cos t,-2(2\cos^2 t-1))\neq 0\end{aligned}$$

可见 f 是浸入。然而 $f(\mathbb{R})$ 并不是流形！

定义 31. 设 $f\colon M\to N$ 是光滑映射且 f 在 $p\in M$ 上是浸入，则称 (M,f) 是 N 的浸入子流形。若 f 是单射，则称 (M,f) 是 N 的嵌入子流形。

例 32. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 定义为

$$f(t)=(2\cos(2\arctan t+\frac{\pi}{2}),\sin 2(2\arctan t+\frac{\pi}{2}))$$

注意到 $f(M)$ 与 M 同胚，但在 0 点的拓扑与 $\mathbb{R}^2$ 不同。

定义 33. 设 $f\colon M\to N$ 是嵌入映射，若 $f\colon M\to f(M)$ 是（微分）同胚（这里 $f(M)$ 具有从 N 诱导的拓扑），则称 f 是正则子流形。

定义 34. 给定光滑流形 N，设 $S\subset N$，若 $\forall p\in S$，存在 p 在 N 中的坐标系 (φ,U) 使得 $\varphi(S\cap U)$ 是由

$$x^{k+1}=c^1,x^{k+2}=c^2,\cdots,x^n=c^{n-k}$$

定义的，则称 S 是 N 的一个 k 维闭子流形。

这里由 $x^{k+1}=c^1,x^{k+2}=c^2,\cdots,x^n=c^{n-k}$ 所定义的 $\mathbb{R}^n$ 的子集称为 $\mathbb{R}^n$ 上的 k 维切片（slice）。

定理 35. 对于 N 的任一正则子流形 $f\colon M\to N$，$f(M)$ 是 N 的闭子流形。反之，对于 N 之任一闭子流形 S，$i\colon S\to N$ 是正则的嵌入。

证明. 前一部分，用浸入的局部典范表示；后一部分，只需验证

$$i\colon (x^1,\cdots,x^k)\to(x^1,\cdots,x^k,c^1,\cdots,c^{n-k})$$

是浸入。 □

定理 36. $f\colon M\to N$ 是淹没，即

$$\mathrm{rank}_p f=\dim N,\forall p\in M$$

则 $\forall q\in N$，$f^{-1}(q)$ 是 M 的闭子流形。

证明. 先证，$\forall p\in M, f(p)=q$，则存在 p 之坐标系 (φ,U) 和 q 之坐标系 (ψ,V) 使得

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^n)$$

为此，先取 $(\widetilde{\varphi},\widetilde{U})$ 和 $(\widetilde{\psi},\widetilde{V})$ 使 $\widetilde{\varphi}(p)=0$。设

$$\widetilde{\psi}\circ f\circ\widetilde{\varphi}^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(f^1(x),\cdots,f^n(x))$$

由于 $\mathrm{rank}(\frac{\partial\widetilde{f}^\alpha}{\partial x^i})=\dim N$，不妨设 $A=(\frac{\partial\widetilde{f}^\alpha}{\partial x^i})_{1\leqslant i\leqslant n}^{1\leqslant\alpha\leqslant n}$ 可逆，于是映射

$$\begin{aligned}F\colon\ \mathbb{R}^r&\longrightarrow\mathbb{R}^n\\(x^1,\cdots,x^n)&\mapsto f^1(x^1,\cdots,x^n,0,\cdots,0),\cdots,f^n(x^1,\cdots,x^n,0,\cdots,0)\end{aligned}$$

在 0 点附近可逆。

令 $\psi=F^{-1}\circ\widetilde{\psi}$，则 $(\widetilde{\varphi},U),(\psi,V)$ 满足要求。

再证：$\forall p\in f^{-1}(q)$，存在坐标系 (φ,U)，使得 $\varphi(U\cap f^{-1}(q))$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的切片。

取上一步得到的坐标系，则 $\varphi(U\cap f^{-1}(q))=\{(x^1,\cdots,x^m)\in\varphi(U)\mid(x^1,\cdots,x^n)=\psi(q)\}$ 是切片。 □

例 37 (Hopf fibration)**.**

$$\begin{aligned}f\colon\ S^3&\longrightarrow S^2\\(z_1,z_2)&\mapsto(|z_1|^2-|z_2|^2,2\overline{z_1}z_2)\end{aligned}$$

对于 $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in S^3$，$(-x_2,x_1,-x_4,x_3),(-x_3,x_4,x_1,-x_2),(-x_4,-x_3,x_2,x_1)$ 是其切向量。

定义 38. 设 $f\colon M\to N$ 是光滑映射且 f 在 $p\in M$ 上是淹没，则称 p 是 f 的正则点。对于 $q\in N$，若 $\forall p\in f^{-1}(q)$ 都是正则点，则称 q 是 f 的正则值。

推论 39 (正则值原像定理)**.** 设 $f\colon M\to N$ 是光滑映射，$q\in N$ 是 f 的正则值，则 $f^{-1}(q)$ 是 M 的闭子流形。

例 40. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2+t^2=1\\xy-zt=0\end{cases}$ 是否是闭子流形？

证明. 考虑映射

$$\begin{aligned}f\colon\ \mathbb{R}^4&\longrightarrow\mathbb{R}^2\\(x,y,z,t)&\mapsto(x^2+y^2+z^2+t^2,xy-zt)\end{aligned}$$

由于

$$\operatorname{rank}_p f = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z & 2t \\ y & x & -t & -z \end{pmatrix} = 2$$

故 $f^{-1}(1,0)$ 是闭子流形。 □

定理 41 (H.Whitney 浸入定理). *设 M 是光滑流形，$n \geqslant 2\dim M$，则 $\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R}^n), \varepsilon > 0$，存在 $g \in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ 使得*

1) g 是浸入

2) $|f(p) - g(p)| < \varepsilon, \forall p \in M$

证明. Step1，局部上对 $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ 作修改

$$g(x) = f(x) + Ax, A \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

适当取 A 可使 q 是浸入且 $|Ax| < \varepsilon$；

Step2，稳定；

Step3，延拓。 □

4 向量场和流

2012-9-29

定义 42. M 上切向量的全体，记作 TM，即 $TM = \{u \in T_pM \mid p \in M\}$，称为 M 的切丛。

命题 43. *若 M 是 m 维光滑流形，则 TM 可赋予微分结构，成为 $2m$ 维光滑流形。*

证明. 设 $\{(\varphi_i, U_i) \mid i \in I\}$ 为 M 的微分结构。$\forall p \in M$，设 $p \in U_i$ 的局部坐标为 $(x^1,\cdots,x^m)$，$\forall y \in T_pM$，可写成 $y = y^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$，从而得到从 TM 之开集 $\widehat{U}_i = \{y \in T_pM \mid p \in U_i\}$ 到 $\mathbb{R}^{2m}$ 之映射：

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_i\colon\ \widehat{U}_i &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \\ y &\mapsto (x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^m) \end{aligned}$$

于是：

1) $TM = \bigcup_{i\in I} \widehat{U}_i$

2) $(\widehat{U}_i, \widehat{\varphi}_i)$ 与 $(\widehat{U}_j, \widehat{\varphi}_j)$ 光滑相容：

$$\widehat{U}_i \cap \widehat{U}_j \neq \varnothing \Longrightarrow U_i \cap U_j \neq \varnothing;$$

$$\begin{aligned} &\widehat{\varphi}_i \circ \widehat{\varphi}_j^{-1}(\widetilde{x}^1,\cdots,\widetilde{x}^m,\widetilde{y}^1,\cdots,\widetilde{y}^m) \\ =&\widehat{\varphi}_i(\widetilde{y}^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p) \\ =&(x^1,\cdots,x^m,\widetilde{y}^i\frac{\partial x^1}{\partial \widetilde{x}^i},\cdots,\widetilde{y}^i\frac{\partial x^m}{\partial \widetilde{x}^i}) \end{aligned}$$

□

定义 44. 若映射 $X\colon M\to TM$，满足[2]$\pi\circ X=\mathrm{id}\colon M\to M$，则称 X 是 M 上的向量场。若 X 光滑，则称为光滑向量场。

命题 45. *X 是光滑向量场当且仅当 $\forall f\in C^\infty(M)$，$X(f)$ 是光滑函数。这里 $X(f)(p)=X(p)(f),\forall p\in M$。*

证明. "$\Rightarrow$"：$\forall p\in M$，取 p 点坐标系 (x^i)，则可设 $X(p)=X^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$，其中 X^i 是 M 上的函数，局部上：

$$\begin{aligned}&\widehat{\varphi}\circ X\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^m)\\=&(x^1,\cdots,x^m,X^1\circ\varphi^{-1},\cdots,X^m\circ\varphi^{-1})\end{aligned}$$

于是 X 是光滑向量场 $\Leftrightarrow$ 每个 $X^i\circ\varphi^{-1}$ 是光滑函数。

$\forall f\in C^\infty(M)$，

$$\begin{aligned}X(f)(p)&=X_p(f)\\&=X^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p(f)\\&=(X^i\circ\varphi^{-1})\frac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}\end{aligned}$$

是光滑函数。

"$\Leftarrow$"：取 $f=x^i$，则 $X(x^i)=X^i$ 光滑，由前面讨论知 X 是光滑向量场。

□

注. 以后可将向量场 X 写成

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

约定. M 上的光滑向量场全体记作 $\mathfrak{X}(M)$。

定义 46. 给定光滑向量场 X，若有曲线 $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 满足 $\dot\gamma(t)=X(\gamma(t))$，则称 γ 为 X 的一条积分曲线。

命题 47. *若 $X\in\mathfrak{X}(M)$，则存在唯一的过 p 的积分曲线 γ，使得 $\gamma(0)=p$。*

证明. 取 p 点的坐标系 (x^i)，设

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

又设 $\gamma(t)=(\gamma^1(t),\cdots,\gamma^m(t))$，则 $\dot\gamma(t)=\dot\gamma^i(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{t=0}$。要使 γ 是 X 的积分曲线，则 γ^i 满足

$$\dot\gamma^i(t)=X^i(\gamma(t))$$

由 ODE 理论，上述 ODEs 有解。 □

定义 48. 设 M 是光滑流形，光滑映射 $\psi\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times M\to M$ 若满足：

1) $\psi_0=\mathrm{id}\colon M\to M$

2) $\psi_s\circ\psi_t=\psi_{s+t},\forall s,t,s+t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$

其中 $\psi_t(p)=\psi(t,p),t\in(-\varepsilon,\varepsilon),p\in M$

则称 ψ 为 M 上的一个（局部）流（flow）

[2] i.e. X is a section of π.

命题 49. $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$，存在 M 上的一个流 ψ，使得

$$X(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\psi_t(p)\bigg|_{t=0}$$

称 ψ 为 X 生成的流。

证明. 取过 p 的积分曲线 $\gamma(t)$，使 $\gamma(0) = p$，令 $\psi_t(p) = \gamma_p(t)$，则

1) $\psi_0(p) = p$

2) $\psi_s \circ \psi_t(q) = \psi_{s+t}(q)$

□

定理 50 (管状流定理（Flow Box）)**.** 设 $X \in \mathfrak{X}(M)$，$X_p \neq 0$，则存在 p 点的坐标系，使 $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$

证明. 先取坐标系 (y^i) 使 $X_p = \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_q$ 且 p 点的坐标为 $(0, \cdots, 0)$。设 X 生成的流为 ψ_t，定义

$$\begin{aligned}\theta\colon\ \mathbb{R}^m &\longrightarrow U \\ (y^1, \cdots, y^m) &\mapsto \psi_{y^1}(0, y^2, \cdots, y^m)\end{aligned}$$

则

$$\theta_{*0}\,\frac{\partial}{\partial y^1}\bigg|_0 = X_p = \frac{\partial}{\partial y^1}\bigg|_q$$
$$\theta_{*0}\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_q$$

于是 θ_{*0} 可逆，由反函数定理，存在 0 和 p 的领域 $\widetilde{U}$，使 θ 在 $\widetilde{U}$ 上可逆。

取 p 之坐标系 $(\widetilde{U}, \theta^{-1})$ 则

$$\begin{aligned}\theta_*\frac{\partial}{\partial y^1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\psi_{y^1+t}(0, y^2, \cdots, y^m)\bigg|_{t=0} \\ &= X(\psi_{y^1}(0, y^2, \cdots, y^m))\end{aligned}$$

故 $\theta_*^{-1}X = \frac{\partial}{\partial y^1}$。 □

定义 51. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$，若 $\forall p \in M$，$\mathrm{rank}\{X_1(p), X_2(p), \cdots, X_s(p)\} = k$ 为常数，则称 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 构成 M 上的 k 维切空间场。

定义 52. 给定 M 上的 k 维切子空间场 $\{X_1, X_2, \cdots, X_s\}$，若浸入 $f\colon N \to M$ 满足 $f_*(T_pN) \subset \mathrm{span}\{X_1, X_2, \cdots, X_s\}_{f(p)}, \forall p \in M$ 则称 N 是上述切子空间场的积分子流形。

例 53. $M = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ 中定义

$$\begin{cases} X_1 = z\frac{\partial}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial y} \\ X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z} \\ X_3 = z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

则

$$xX_1 - zX_2 + yX_3 = 0 \Rightarrow \mathrm{rank}\{X_1, X_2, X_3\} = 2$$

因此 $\{X_1, X_2, X_3\}$ 是 2 维切子空间场，而且曲面 $N\colon \frac{1}{2}x^2 - yz = 1$ 是其积分子流形，$(x, -z, -y)$ 是其法向量。对 $(2, 1, 1) \in N$ 有 $X_1 = (0, -1, 1), X_2 = (1, 0, 2), X_3 = (1, 2, 0)$，法向量为 $(2, -1, -1)$。

总结

X 生成流 ψ_t

$$X(\psi_s(p)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\psi_t(p)\Big|_{t=s}$$

流 ψ_t 固定一点变成积分曲线

$$\gamma(t) = \psi_t(p), X(\gamma(t)) = X(\psi_t(p)) = \dot{\gamma}(t)$$

ψ_t 诱导向量场 X

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\psi_t(p)\Big|_{t=0} = X(p)$$

Flow Box $X \in \mathfrak{X}(M), X(p) \neq 0$，则存在 p 点的坐标系 (x^i) 使得 $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$。

5 Frobenius 定理

2012-10-11

例 54. *在 $\mathbb{R}^3$ 上定义*

$$\begin{cases} X_1 = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

$E = \operatorname{span}\{X-1, X_2\}$ 是 2 维切子空间场，然而：

1) E 没有 2 维积分子流形；

2) E 有 1 维积分子流形 $\begin{cases} x = c_1 \\ z = x_2 \end{cases}$

定义 55. 对于 $X, Y \in \mathfrak{X}(M), [X,Y] \overset{\text{def}}{=} X \circ Y - Y \circ X$ 也是 M 上的光滑向量场，称为 X 和 Y 的*Lie 括号*或*Poisson 括号*。

验证. 将 X 视为泛函 $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} X(f)(p) &= X_p(f) \\ &= X^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p(f) \end{aligned}$$

故 $X(f) = X^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$。

设 $Y(f) = Y^j\frac{\partial f}{\partial x^j}$，则

$$\begin{aligned} [X,Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\ &= X(Y^j\frac{\partial f}{\partial x^j}) - Y(X^i\frac{\partial f}{\partial x^i}) \\ &= X^i\frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j\frac{\partial f}{\partial x^j}) - Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}(X^i\frac{\partial f}{\partial x^i}) \\ &= X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} + X^iY^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} - Y^jX^i\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i} \\ &= (X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i})\frac{\partial f}{\partial x^j} \end{aligned}$$

若令 $Z^j = X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}$，$Z = Z^j\frac{\partial}{\partial x^j}$，则

$$[X,Y](f) = Z(f), \forall f \in C^\infty(M)$$

即 $[X,Y] = Z \in \mathfrak{X}(M)$。 □

定义 56. X 是向量场，$f\colon N \to M$ 为浸入，若 $\forall q \in N$，$X(f(q)) \in f_*(T_qN)$ 则称 X 与 f 相切。

例 57. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ 与 S^2 相切。

命题 58. 若 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 都与某个浸入子流形 $f\colon N \to M$ 相切，则 $[X,Y]$ 也与 f 相切。

证明. $\forall q \in N$，取 q 点坐标系 (y^i) 及 $f(q)$ 点坐标系 (x^i) 使得

$$f(y^1, y^2, \cdots, y^n) = (x^1, x^2, \cdots, x^n, 0, \cdots, 0)$$

又设 $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$

$$f_*(T_qN) = \mathrm{span}\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}_{f(q)}$$

由于 X, Y 与 f 相切，故 $X^k(f(q)) = 0, Y^k)f)q)) = 0, n < k \leqslant m$

$$[X,Y] = (X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j}$$

由于

$$(X^i\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^k}{\partial x^i})(f(q)) = 0, n < k \leqslant m$$

所以 $[X,Y]$ 也与 f 相切。 □

命题 59. 若 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 且 X 生成的流为 ψt，则

$$[X,Y] = \lim_{t\to 0}\frac{Y - \psi_{t*}Y}{t}$$

即

$$[X,Y]_p = \lim_{t\to 0}\frac{Y_p - \psi_{t*}(Y_{\psi_t(p)})}{t}$$

证明. $\forall f \in C_p^\infty$，设

$$f(\psi_t(p)) = c_0(p) + c_1(p)t + c_2(p)t^2 + o(t^2)$$

于是

$$\begin{aligned}
c_0(p) &= f(p) \\
c_1(p) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}f(\psi_t(p))\Big|_{t=0} \\
&= X_p(f) = X(f)(p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(Y_p - \psi_{t*}(Y_{\psi_t(p)}))(f) \\
=&Y_p(f) - Y_{\psi_t(p)}(f \circ \psi_t) \\
=&Y_p(f) - Y_{\psi_t(p)}(f + tX(f) + o(t)) \\
=&Y_p(f) - Y_{\psi_t(p)}(f) - tY_{\psi_t(p)}(X(f)) - Y_{\psi_t(p)}(o(t))
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\frac{Y_p-\psi_{t*}(Y_{\psi_t(p)})}{t}(f)\\=&\lim_{t\to 0}\frac{Y(f)(p)-Y(f)(\psi_t(p))}{t}-Y_p(X(f))\\=&X_p(Y(f))-Y_p(X(f))\\=&[X,Y]_p(f)\end{aligned}$$

□

命题 60. 设 $X\in\mathfrak{X}(M)$ 生成的流为 ψ_t，$\varphi\colon M\to M$ 是光滑同胚，则 φ_*X 生成的流是

$$\varphi\circ\psi_t\circ\varphi^{-1}$$

证明. 1) $\varphi\circ\psi_t\circ\varphi^{-1}$ 是流。

2) $\varphi\circ\psi_t\circ\varphi^{-1}$ 诱导的向量场是 φ_*X：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\varphi\circ\psi_t\circ\varphi^{-1}(p)\Big|_{t=0}\\=&\varphi_*(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\psi_t(\varphi^{-1}(p))\Big|_{t=0})\\=&\varphi_*X_{\varphi^{-1}(p)}\end{aligned}$$

□

推论 61. $\varphi_*X=X\Longleftrightarrow\varphi\circ\psi_t\circ\varphi^{-1}=\psi_t$

命题 62. 设 $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ 生成的流分别为 ψ_t,ϕ_t，则 $[X,Y]=0$ 的充要条件是 $\psi_t\circ\phi_t=\phi_t\circ\psi_t$。

证明.

$$\begin{aligned}[X,Y]=0&\Longleftrightarrow\lim_{t\to 0}\frac{Y-\psi_{t*}Y}{t}=0\\&\Longleftrightarrow Y=\psi_{t*}Y\\&\Longleftrightarrow\phi_s\circ\psi_t=\psi_t\circ\phi_s\end{aligned}$$

□

命题 63 (Lie 括号性质)**.** *1)* $[X,Y]=-[Y,X]$*;*

2) $[X+Y,Z]=[X,Z]+[Y,Z]$*;*

3) $[X,fY]=X(f)Y+f[X,Y]$*;*

4) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]$

证明. 1) trivial;

2) trivial;

3)

$$\begin{aligned}[X,fY](g)&=X(fY(g))-fY(X(g))\\&=X(f)Y(g)+fX(Y(g))-fY(X(g))\\&=X(f)Y(g)+f[X,Y](g)\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]](f) &= X([Y,Z](f)) - [Y,Z](Xf) \\ &= XYZ(f) - XZY(f) - YZX(f) + ZYX(f)\end{aligned}$$

□

定理 64 (同步管状流定理). $X_1, X_2, \cdots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$，且 $\operatorname{rank}\{X_1, X_2, \cdots, X_r\} = r, [X_i, X_j] = 0$，则 $\forall p \in M$，存在坐标系 (x^i)，使得 $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, 1 \leqslant i \leqslant r$。

证明. 任取 p 点之坐标系 (u^i) 使 p 点坐标为 $(0, \cdots, 0)$。考虑

$$\begin{aligned}\theta\colon\ &\mathbb{R}^m \longrightarrow U \\ (x^1, \cdots, x^m) &\mapsto (\varphi_1)_{x^1} \circ (\varphi_2)_{x^2} \cdots \circ (\varphi_r)_{x^r}(0, \cdots, 0, x^{r+1}, \cdots, x^m)\end{aligned}$$

其中 $(\varphi_i)_{t_i}$ 是 X_i 生成的流。

下面验证 $\theta_* \frac{\partial}{\partial x^i} = X_i$：

$$\begin{aligned}\theta_{*u}\frac{\partial}{\partial x^i} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\theta(x^1, \cdots, x^i + t, \cdots, x^m)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\varphi_i)_{x^i+t} \circ (\varphi_1)_{x^1} \circ \cdots \circ \widehat{(\varphi_i)_{x^i}} \cdots \circ (\varphi_r)_{x^r}\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\varphi_i)_t \circ (\varphi_1)_{x^1} \circ (\varphi_2)_{x^2} \cdots \circ (\varphi_r)_{x^r}\Big|_{t=0} \\ &= X(\theta(u)), 1 \leqslant i \leqslant r \\ \theta_{*0}\frac{\partial}{\partial x^k} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\theta(0, \cdots, \widehat{t}, \cdots, 0) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(0, \cdots, t, \cdots, 0)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^k}\Big|_p, r < k \leqslant m\end{aligned}$$

只要取 (U, u^i)s 使 $X_i|_p, \frac{\partial}{\partial u^i}\big|_p$ 线性无关即可。 □

定理 65. 设 $E = \operatorname{span}\{X_1, \cdots, X_r\}$ 是 M 上的 r 维子空间，且满足*Frobenius 条件*

$$[X_i, X_j]_p \in E_p$$

则过任一点 $p \in M$，有唯一的极大积分子流形 $f\colon N \to M$，且 $\dim N = r$。

换言之，$\forall p \in M$，存在坐标系 (x^i) 使得

$$E = \operatorname{span}\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^r}\}$$

这时由 $x^{r+1} = c^{r+1}, \cdots, x^m = c^m$ 所定义的闭子流形与 E 相切。

证明. 先取坐标系 (U, u^i) 设

$$X_j = X_j^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

$$\begin{pmatrix} X_1^1 & \cdots & X_1^m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_r^1 & \cdots & X_r^m \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & 1 & \end{array}\right)$$

即可找到 $Y_1, \cdots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ 使得 $\operatorname{span}\{Y_1, \cdots, Y_r\} = E$ 且 $Y_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}, r+1 \leqslant k \leqslant m$。

这时

$$\begin{aligned}[Y_i, Y_j] &= [A_i^s X_s, A_j^t X_t] \\ &= A_i^s X_s(A_j^t) X_t - A_j^t X_t(A_i^s) X_s + A_i^s A_j^t [X_s, X_t] \in E\end{aligned}$$

$$[\frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j} + Y_j^l \frac{\partial}{\partial x^l}] = Y_i(Y_j^l)\frac{\partial}{\partial x^l} - Y_j(Y_i^k)\frac{\partial}{\partial x^k} \in E$$

故 $[Y_i, Y_j] = 0 i, j \leqslant r$，故可用同步管状流。 □

向量场 $X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

X, Y 都与子流形 $N \subset M$ 相切，则 $[X, Y]$ 与 N 相切。

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{Y - \varphi_{t*} Y}{t}$$

切子空间场 E

$$\begin{aligned}&\pi\colon G_k(TM) = \{P \subset T_x M \mid \dim P = k, x \in M\} \longrightarrow M \\ &E\colon M \longrightarrow G_k(TM)\end{aligned}$$

例 66. *S^2 上不存在 1 维切子空间场，即不存在处处非零的光滑向量场。*

例 67 (Clifford 代数)**.** *若 S^n 上存在 $1, 2, \cdots, k$ 维光滑切子空间场，求 k 的最大值。*

$$\begin{aligned}2 \mid^n &\Longrightarrow k = 0 \\ n = 3 &\Longrightarrow k = 3 \\ n \equiv 3 \mod 4 &\Longrightarrow k \geqslant 3 \\ n = 7 &\Longrightarrow k = 7 \\ n &= 5 k = 1\end{aligned}$$

具体的：

$$\begin{aligned}S^1 &\rightsquigarrow \text{复数} \\ S^3 &\rightsquigarrow \text{四元数} \\ S^7 &\rightsquigarrow \text{八元数}\end{aligned}$$

定义 68 (Frobenius 条件)**.**

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), X_p, Y_p \in E_p (X, Y \in E) \Longrightarrow [X, Y] \in E$$

注. 等价于“取 E 的一组基 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 时 $[X_i, X_j] \in E$”。

定理 69 (Frobenius 定理)**.** *若 k 维切子空间场 E 满足 Frobenius 条件，则 $\forall p \in M$，存在唯一的极大积分子流形 N 经过 p。*

证明. 设 $X_1, \cdots, X_k$ 是 E 的一组基，则

$$X_i = X_i^j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\begin{pmatrix} X_1^1 & \cdots & X_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_k^1 & \cdots & X_k^n \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & 1 & \end{array}\right)$$

得到另一组基 $Y_i = \frac{\partial}{\partial u^i} + Y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, k+1 \leqslant \alpha \leqslant n$

$$[Y_i, Y_j] = Y_i(Y_j^{beta})\frac{\partial}{\partial u^\beta} - Y_j(Y_i^\alpha)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

由 Frobenius 条件，

$$\begin{aligned}[Y_i, Y_j] &= C_{ij}^l Y_l \\ &= C_{ij}^l(\frac{\partial}{\partial u^l} + Y_l^\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma})\end{aligned}$$

比较得 $C_{ij}^l = 0$，于是 $[Y_i, Y_j] = 0$。

由同步管状流，存在坐标系 (x^i) 使得

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

于是 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ 都与切片 $x^{k+1} = cst, \cdots, x^n = cst$ 相切。 □

6 外代数

2012-10-18

定义 70. 设 V, W 是实线性空间，V^*, W^* 是其对偶空间。对于 $\alpha \in V^*, \beta \in W^*$，定义

$$\begin{aligned}\alpha \otimes \beta \colon\ V \times W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \alpha(v)\beta(w)\end{aligned}$$

可见 $\alpha \otimes \beta$ 是双线性函数。

以 $V^* \otimes W^*$ 记所有形如 $\alpha \otimes \beta$ 所张成的线性空间，称为 V^* 和 W^* 的张量积。

1) $V^* \otimes W^*$ 的元素就是 $V \times W$ 上的双线性函数；

2) 设 $\alpha^1, \cdots, \alpha^m$ 和 $\beta^1, \cdots, \beta^n$ 分别是 V^* 和 W^* 的一组基，则 $\{\alpha^i \otimes \beta^j\}$ 是 $V^* \otimes W^*$ 的一组基。

同理可定义 $V \otimes W$。

定义 71. $T_s^r(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s}$ 中的元素称为(r, s) 型张量。

定义 72. 对于 $(r, 0)$ 型或 $(0, s)$ 型张量 T，若

$$T(\theta^1, \cdots, \theta^r) = T(\theta^{\sigma(1)}, \cdots, \theta^{\sigma(r)})$$

则称 T 是对称的；

$$T(\theta^1, \cdots, \theta^r) = \mathrm{sgn}(\sigma)T(\theta^{\sigma(1)}, \cdots, \theta^{\sigma(r)})$$

则称 T 是反对称的。

$$\begin{aligned}V \otimes V^* &\cong \mathrm{End}(V) \\ f &= f_j^i v_i \otimes \alpha^j \\ f(v_j) &= f_i^j v_j\end{aligned}$$

约定. 记 $T_0^r(V)$ 中反对称张量全体为 $A^r(V)$。

定义 73. $\forall \xi \in A^k(V), \eta \in A^l(V)$，外积定义为

$$\xi \wedge \eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma(\xi \otimes \eta)$$

命题 74. 外积满足以下运算律

1) 分配律

$$(\xi_1 + \xi_2) \wedge \eta = \xi_1 \wedge \eta + \xi_2 \wedge \eta$$
$$\xi \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \xi \wedge \eta_1 + \xi \wedge \eta_2$$

2) 反交换律

$$\xi \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \xi$$

3) 结合律

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta)$$

定理 75. 矢量 $v_1, \cdots, v_r \in V$ 线性相关的充要条件是 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = 0$。

定理 76 (Cartan 引理)**.** 设 $v_1, \cdots, v_r; w^1, \cdots, w^r$ 是 V 中两组矢量，使得

$$v_i \wedge w^i = 0$$

如果 $v_1, \cdots, v_r$ 线性无关，则存在满足 $h^{ij} = h^{ji}$ 的 h^{ij} 使得

$$w^j = h^{ij} v_i, 1 \leqslant j \leqslant r$$

7 外微分

2012-10-25

定义 77. $A^r(M) = \bigcup\limits_{p \in M} A^r(T_p^* M)$ 称为 M 上的 r 次外形式丛。

$\forall p \in M$，取坐标系 (x^i)，$\mathrm{d}\, x^1, \cdots, \mathrm{d}\, x^m$ 是 $T_p^* M$ 的一组基，故 $\forall \omega \in A^r(T_p^* M)$ 可写为

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \cdots i_r} \mathrm{d}\, x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x^{i_r}$$

其中 $\omega_{i_1 \cdots i_r}$ 关于任意两个角标反对称。于是 $(x^i, \omega_{i_1 \cdots i_r})$ 可构成 $A^r(M)$ 上的坐标系。容易验证，这些坐标系是光滑相容的，从而 $A^r(M)$ 关于这一微分结构成为光滑流形。

定义 78. 若 $\omega \colon M \to A^r(M)$ 是光滑映射且满足 $\pi \circ \omega = \mathrm{id}$，这里 $\pi \colon A^r(M) \to M$ 是自然投影，则称 ω 是一个 r 次外微分式，也称为 r 形式。

引理 79. 局部上，ω 是 r 形式等价于

$$\omega(p) = \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \cdots i_r}(p) \,\mathrm{d}\, x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x^{i_r}$$

其中系数 $\omega_{i_1 \cdots i_r}$ 是光滑函数。

约定. 记 $A(M)$ 为 M 上所有 0 形式、1 形式、$\cdots$、m 形式的全体。

定理 80. *存在唯一的算子* $\mathrm{d}\colon A(M)\to A(M)$*，满足*

1) $\mathrm{d}(A^r(M))\subset A^{r+1}(M)$*；*

2) d *是实线性的；*

3) 对任意 r *形式* ω_1*，*k *形式* ω_2

$$\mathrm{d}(\omega_1\wedge\omega_2)=\mathrm{d}\,\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^r\omega_1\wedge\mathrm{d}\,\omega_2$$

4) 对 0 形式 $f\in C^\infty(M)$*，*$\mathrm{d}\,f$ *是* f *的全微分且* $\mathrm{d}(\mathrm{d}\,f)=0$*。*

称 d 为外微分算子。

证明. 先证明这样的 d 若存在，则具有局部性，即

$$\omega_1|_U=\omega_2|_U\Longrightarrow \mathrm{d}\,\omega_1|_U=\mathrm{d}\,\omega_2|_U$$

由于 d 具有实线性，只需证明 $\omega|_U=0\Rightarrow \mathrm{d}\,\omega|_U$。

$\forall p\in U$，取邻域 $\widehat{U}\subset U$，并取光滑函数 f，使 $f|_{\widehat{U}}=1, f|_{M\setminus U}=0$。则

$$\begin{aligned}f(\omega)=0&\Longrightarrow \mathrm{d}(f(\omega))=0\\&\Longrightarrow \mathrm{d}\,f\wedge(\omega)+f(\mathrm{d}\,\omega)=0\end{aligned}$$

由于在 p 点

$$\mathrm{d}\,f|_p=0,\ f|_p=1$$

故 $\mathrm{d}\,\omega|_p=0$。

再证明局部存在唯一性

存在性：对单项式 $\omega=f(x)\,\mathrm{d}\,x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x^r$，规定 $\mathrm{d}\,\omega=\mathrm{d}\,f\wedge\mathrm{d}\,x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x^r$。由实线性，得

$$\begin{aligned}\omega&=\frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r}\,\mathrm{d}\,x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x^{i_r}\\ \mathrm{d}\,\omega&=\frac{1}{r!}\,\mathrm{d}\,\omega_{i_1\cdots i_r}\wedge\mathrm{d}\,x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x^{i_r}\end{aligned}$$

验证 3)：

$$\begin{aligned}\omega_1&=\frac{1}{r!}\omega_I\,\mathrm{d}\,x^I\\ \omega_2&=\frac{1}{k!}\eta_J\,\mathrm{d}\,x^J\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_1\wedge\omega_2&=\frac{1}{r!}\frac{1}{k!}\omega_I\eta_J\,\mathrm{d}\,x^I\wedge\mathrm{d}\,x^J\\ \Longrightarrow \mathrm{d}(\omega_1\wedge\omega_2)&=\frac{1}{r!}\frac{1}{k!}\,\mathrm{d}(\omega_I\eta_J)\wedge\mathrm{d}\,x^I\wedge\mathrm{d}\,x^J\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}(\omega_I\eta_J)=\omega_I\,\mathrm{d}(\eta_J)+\eta_J\,\mathrm{d}(\omega_I)$。

故

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\omega_1\wedge\omega_2)&=\frac{1}{r!}\frac{1}{k!}(\omega_I\,\mathrm{d}(\eta_J)\wedge\mathrm{d}\,x^I\wedge\mathrm{d}\,x^J+\eta_J\,\mathrm{d}(\omega_I)\wedge\mathrm{d}\,x^I\wedge\mathrm{d}\,x^J)\\&=\mathrm{d}\,\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^r\omega_1\wedge\mathrm{d}\,\omega_2\end{aligned}$$

验证 4)：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\, f &= \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}\, x^i \\
\mathrm{d}(\mathrm{d}\, f) &= \mathrm{d}(\frac{\partial f}{\partial x^i}) \wedge \mathrm{d}\, x^i \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\,\mathrm{d}\, x^j \wedge \mathrm{d}\, x^i \\
&= \sum_{j<i} (\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i})\,\mathrm{d}\, x^j \wedge \mathrm{d}\, x^i \\
&= 0
\end{aligned}$$

唯一性：对 r 用数学归纳法证明 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\, x^I) = 0$，于是

$$\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}\, x^I) = \mathrm{d}\, f \wedge \mathrm{d}\, x^I + (-1)^0 f\,\mathrm{d}(\mathrm{d}\, x^I) = \mathrm{d}\, f \wedge \mathrm{d}\, x^I$$

最后证明整体的存在唯一性：$\forall p \in U \cap W$，由于

$$\mathrm{d}(\omega_U)|_{U\cap W} = \mathrm{d}(\omega_{U\cap W}) = \mathrm{d}(\omega_W)|_{U\cap W}$$

故 d 在 $U \cap W$ 上是一致的。 □

定理 81 (Poincáre 引理)**.** 外微分算子 d 具有性质 $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$。

证明. 由于实线性性质，只需证明对于单项式 $\omega = f\,\mathrm{d}\, x^I$ 有 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\,\omega) = 0$ 即可。而

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\,\omega) &= \mathrm{d}(\mathrm{d}\, f \wedge \mathrm{d}\, x^I) \\
&= \mathrm{d}(\mathrm{d}\, f) \wedge \mathrm{d}\, x^I - \mathrm{d}\, f \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}\, x^I) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

例 82. 对于 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\mathrm{d}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}\, x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}\, y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}\, z$$

$\mathrm{grad}\, f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ 通常称为 f 的梯度[3]。

例 83. 对于 1 形式

$$\begin{aligned}
\omega &= P\,\mathrm{d}\, x + Q\,\mathrm{d}\, y + R\,\mathrm{d}\, z \\
\mathrm{d}\,\omega &= \mathrm{d}\, P \wedge \mathrm{d}\, x + \mathrm{d}\, Q \wedge \mathrm{d}\, y + \mathrm{d}\, R \wedge \mathrm{d}\, z \\
&= (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,\mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, y \\
&\quad + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\,\mathrm{d}\, y \wedge \mathrm{d}\, z \\
&\quad + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\,\mathrm{d}\, z \wedge \mathrm{d}\, x
\end{aligned}$$

通常，把 $(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})$ 称为向量场 $X = (P, Q, R)$ 的旋度场，记为 $\mathrm{curl}\, X$。

[3] 有一个定理：函数 F 在一点的梯度与其过该点的水平集 $\{x \mid F(x) = cst\}$ 垂直，故梯度可以用来求法向量。

例 84. 对于 2 形式

$$\omega = P\,\mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,z + Q\,\mathrm{d}\,z\wedge\mathrm{d}\,x + R\,\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y$$
$$\mathrm{d}\,\omega = (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\,\mathrm{d}\,x\wedge$$
$$y\wedge\mathrm{d}\,z$$

通常，把 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 称为 $X=(P,Q,R)$ 的散度，记为 $\operatorname{div}X$。

由 Poincáre 引理，得

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad}f)=0,\forall f\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$
$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}X)=0,\forall X\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$$

定理 85 (外微分求值公式)**.** 设 ω 是 1 形式，$X,Y\in\mathfrak{X}(M)$，则

$$\mathrm{d}\,\omega(X,Y)=X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega[X,Y]$$

证明.

$$\begin{aligned}\omega&=f\,\mathrm{d}\,g\\ \mathrm{d}\,\omega&=\mathrm{d}\,f\wedge\mathrm{d}\,g\\ \mathrm{d}\,\omega(X,Y)&=(\mathrm{d}\,f\wedge\mathrm{d}\,g)(X,Y)\\ &=\begin{vmatrix}\mathrm{d}\,f(X)&\mathrm{d}\,g(X)\\ \mathrm{d}\,f(Y)&\mathrm{d}\,g(Y)\end{vmatrix}\\ &=X(f)Y(g)-X(g)Y(f)\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\omega(Y)&=f\,\mathrm{d}\,g(Y)=fY(g)\\ \omega(X)&=fX(g)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega[X,Y]\\ =&X(fY(g))-Y(fX(g))-f(X(Y(g))-Y(X(g)))\\ =&X(f)Y(g)-X(g)Y(f)\end{aligned}$$

□

8 外微分（续）

2012-11-1

引理 86. 设 $\{X_1,\cdots,X_m\}$ 是 m 维流形 M 上的一个局部标架场（自动满足 *Frobenius* 条件，即存在光滑函数 C^i_{jk}，使 $[X_j,X_k]=C^i_{jk}X_i$），又设 $\omega^1,\cdots,\omega^m$ 是与 $X_1,\cdots,X_m$ 对偶的余标架场，则

$$\mathrm{d}\,\omega^i=-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k$$

证明. 一方面：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\omega^i(X_p,X_q) &= X_p(\omega^i(X_q)) - X_q(\omega^i(X_p)) - \omega^i[X_p,X_q] \\
&= -\omega^i[X_p,X_q] \\
&= -\omega^i(C^r_{pq}X_r) \\
&= -C^r_{pq}\omega^i X_r = -C^i_{pq}
\end{aligned}$$

另一方面：

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k(X_p,X_q) \\
=&-\frac{1}{2}C^i_{jk}\begin{vmatrix}\mathrm{d}\,\omega^j(X_p) & \mathrm{d}\,\omega^k(X_p)\\ \mathrm{d}\,\omega^j(X_q) & \mathrm{d}\,\omega^k(X_q)\end{vmatrix} \\
=&-\frac{1}{2}C^i_{jk}(\delta^j_p\delta^k_q - \delta^k_p\delta^j_q) \\
=&-\frac{1}{2}(C^i_{pq} - C^i_{qp}) = -C^i_{pq}
\end{aligned}$$

□

定义 87. 设 $\{X_1,\cdots,X_r\}$ 是 r 维切子空间场，将它扩充为一个局部标架场 $X_1,\cdots,X_m$ 并取与之对偶的余标架场 $\omega^1,\cdots,\omega^m$。若 1 形式 $\omega^{r+1},\cdots,\omega^m$ 线性无关，且对于 r 维子空间场 E，满足

$$\omega^\alpha(X) = 0, \forall X\in E$$

则称 $\omega^{r+1},\cdots,\omega^m$ 是 E 的*定义方程*（*零化子*）。

定义 88. 线性无关的 1 形式 $\omega^{r+1},\cdots,\omega^m$ 若满足

$$\mathrm{d}\,\omega^\alpha \equiv 0 \mod \omega^{r+1},\cdots,\omega^m, \forall r+1\leqslant\alpha\leqslant m$$

即存在 1 形式 θ^α_β 使得

$$\mathrm{d}\,\omega^\alpha = \theta^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta$$

则称 $\omega^{r+1},\cdots,\omega^m$ 满足*Frobenius 条件*。

定理 89 (Frobenius 定理)**.** *设 r 维切子空间场 E 的定义方程 $\omega^{r+1},\cdots,\omega^m$ 满足 Frobenius 条件，则 E 是完全可积的，即存在局部坐标系 (x^i) 使*

$$E = \{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^r}\}$$

或者写成外微分式：

$$\{\omega^{r+1},\cdots,\omega^m\} = \{\mathrm{d}\,x^{r+1},\cdots,\mathrm{d}\,x^m\}$$

证明. 不妨设 $X_1,\cdots,X_m$ 与 $\omega^{r+1},\cdots,\omega^m$ 对偶，只需验证 $E=\{X_1,\cdots,X_m\}$ 满足（向量场版）Frobenius 条件。

设 $[X_a,X_b]=C^i_{ab}X_i$，则 Frobenius 条件等价于

$$C^\alpha_{jk} = 0, \forall r+1\leqslant\alpha\leqslant m, 1\leqslant j,k\leqslant r$$

由引理86，

$$\mathrm{d}\,\omega^c = -\frac{1}{2}C^c_{ab}\omega^a\wedge\omega^b, \forall a,b,c$$

于是

$$\mathrm{d}\,\omega^\alpha = -\frac{1}{2}C^\alpha_{ij}\omega^i\wedge\omega^j - C^\alpha_{\beta i}\omega^\beta\wedge\omega^i - \frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta\wedge\omega^\gamma$$

与 Frobenius 条件比较，得

$$\mathrm{d}\,\omega^\alpha = \theta^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta = C^\alpha_{\beta i}\omega^i\wedge\omega^\beta + \frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma\wedge\omega^\beta$$

于是 $C^\alpha_{ij}=0$。 □

注. Frobenius 条件也可看作 $\mathrm{d}\,\omega^\alpha|_E = 0$。

定义 90. 设 $X\in\mathfrak{X}(M)$，定义算子

$$i_X\colon A^k(M)\longrightarrow A^{k-1}(M)$$
$$(i_X\omega)(Y_1,\cdots,Y_{k-1}) = \omega(X,Y_1,\cdots,Y_{k-1})$$

称为内置算子。

命题 91. 设 $\omega^{r+1},\cdots,\omega^m$ 是 r 维切子空间场 E 的定义方程，则 *Frobenius* 条件等价于

$$i_X(\mathrm{d}\,\omega^\alpha)|_E = 0, \forall X\in E, r+1\leqslant\alpha\leqslant m$$

证明. $\Longrightarrow$:

$$\mathrm{d}\,\omega^\alpha = \theta^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta = C^\alpha_{\beta i}\omega^i\wedge\omega^\beta + \frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma\wedge\omega^\beta$$

$$\begin{aligned}(i_X(\mathrm{d}\,\omega^\alpha))(Y) &= \mathrm{d}\,\omega^\alpha(X,Y)\\ &= (\theta^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta)(X,Y)\\ &= \begin{vmatrix}\theta^\alpha_\beta(X) & \theta^\alpha_\beta(Y)\\ \omega^\beta(X) & \omega^\beta(Y)\end{vmatrix} = 0\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$: $i_X(\mathrm{d}\,\omega^\alpha)(Y)=0$ 中，取 $X=X_i, Y=X_j$ 并将 $\mathrm{d}\,\omega^\alpha$ 代入得 $C^\alpha_{ij}=0$。 □

定义 92. 设 $f\colon N\to M$ 是光滑映射，则如下定义的 $f^*\colon A^k(M)\to A^k(N)$ 称为拉回：

$$(f^*\omega)(Y_1,\cdots,Y_k) \overset{\text{def}}{=} \omega(f_*Y_1,\cdots,f_*Y_k)$$

定理 93. $f^*\circ\mathrm{d} = \mathrm{d}\circ f^*$

证明. 取 M,N 上的坐标系 $(x^i),(y^i)$，设 $f=(f^1,\cdots,f^m)$。对于 $\omega=\frac{1}{r!}\omega_I\,\mathrm{d}\,x^I$ 有

$$\begin{aligned}&(f^*\omega)(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^{j_r}})\\ =&\omega(f_*\frac{\partial}{\partial y^{j_1}},\cdots,f_*\frac{\partial}{\partial y^{j_r}})\\ =&\frac{\partial f^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial f^{i_r}}{\partial y^{j_r}}\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}})\\ =&\frac{1}{r!}\frac{\partial f^I}{\partial y^J}\omega_K\,\mathrm{d}\,x^K(\frac{\partial}{\partial x^I})\\ =&\frac{1}{r!}\omega_I(f(y))\,\mathrm{d}\,f^I(\frac{\partial}{\partial y^J})\end{aligned}$$

故

$$f^*\omega = \frac{1}{r!}\omega_I(f(y))\,\mathrm{d}\,f^I$$

于是对 $\eta\in A(M)$，设 $\eta=\eta_I\,\mathrm{d}\,x^I$，则

$$\begin{aligned}f^*(\mathrm{d}\,\eta)&=f^*(\mathrm{d}\,\eta_I\wedge\mathrm{d}\,x^I)\\&=f^*(\mathrm{d}\,\eta_I)\wedge f^*(\mathrm{d}\,x^I)\\&=\mathrm{d}(\eta_I\circ f)\wedge\mathrm{d}\,f^I\\&=\mathrm{d}((\eta_I\circ f)\,\mathrm{d}\,f^I)\\&=\mathrm{d}(f^*\eta)\end{aligned}$$

□

注. E 是 M 上的 r 维切子空间场，其积分子流形是指浸入 $f\colon N\to M$ 满足：

$$\begin{aligned}&f_*(T_pN)\subset E\\\Longleftrightarrow&\omega^\alpha(f_*v)=0,\forall v\in T_pN\\\Longleftrightarrow&f^*\omega^\alpha=0\end{aligned}$$

Frobenius 定理说明：

$$\{\omega^{r+1},\cdots,\omega^m\}=\{\mathrm{d}\,x^{r+1},\cdots,\mathrm{d}\,x^m\}$$

于是

$$f^*(\mathrm{d}\,x^{r+1})=\cdots=f^*(\mathrm{d}\,x^m)=0$$

即

$$\mathrm{d}\,f^{r+1}=\cdots=\mathrm{d}\,f^m=0$$

例 94. 求 $f(x,y,z)$，使得

$$\begin{cases}xf_x+f_y+x(1+y)f_z=0\\f_x+yf_z=0\end{cases}$$

令

$$\begin{aligned}X_1&=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+x(1+y)\frac{\partial}{\partial z}\\X_2&=\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

则

$$[X_1,X_2]=\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}-(1+y)\frac{\partial}{\partial z}=-X_2$$

故 $E=\mathrm{span}\{X_1,X_2\}$ 满足 *Frobenius* 条件。

再取 $X_3=\frac{\partial}{\partial z}$ 以及 X_1,X_2,X_3 的对偶 $\omega^1,\omega^2,\omega^3$，设

$$\omega^3=P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y+\mathrm{d}\,z$$

有

$$\begin{cases}xP+Q+x(1+y)=0\\P+y=0\end{cases}$$

故

$$\omega^3=\mathrm{d}\,z-y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y=\mathrm{d}(z-xy)$$

可见 E 的积分子流形为

$$z-xy=cst$$

故 $f(x,y,z)=g(z-xy)$，g 为任意函数、

例 95. 考虑 $u=u(x,y)$ 的 *PDES*:

$$\begin{cases} u_x=\alpha(x,y,z) \\ u_y=\beta(x,y,z) \end{cases}$$

在 $\mathbb{R}^3=\{(x,y,u)\}$ 中来看，相当于由

$$\omega=\mathrm{d}\,u-\alpha\,\mathrm{d}\,x-\beta\,\mathrm{d}\,y$$

定义的 2 维切子空间场的积分问题。

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,\omega&=\alpha_y\,\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y-\alpha_u\,\mathrm{d}\,u\wedge\mathrm{d}\,x-\beta_x\,\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y+\beta_u\,\mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,u \\ &(\because \mathrm{d}\,u\equiv\alpha\,\mathrm{d}\,x+\beta\,\mathrm{d}\,y \mod \omega) \\ &\equiv(\alpha_y-\beta_x+\alpha_u\beta-\beta_u\alpha)\,\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y \mod \omega\end{aligned}$$

注意到 $\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y\neq 0$，故 $\mathrm{d}\,\omega\equiv 0$ 等价于

$$\alpha_y-\beta_x+\alpha_u\beta-\beta_u\alpha=0$$

即当上式成立时此 *PDES* 有解。

定义 96. 设 $\dim M=m$，若 M 上存在处处非零的 $\omega=f\,\mathrm{d}\,x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x^m$，则称 M可定向。

定理 97 (单位分解定理)**.** 设 Σ 是光滑流形 M 的一个开覆盖，则 M 上存在一族光滑函数 $\{g_\alpha\}$ 满足：

1) 对每个 α，有 $0\leqslant g_\alpha\leqslant 1$，支集 $\operatorname{supp} g_\alpha$ 紧，且包含于某个 $U_i\in\Sigma$；

2) 对每点 p，存在一个邻域 U，它只与有限个支集 $\operatorname{supp} g_\alpha$ 相交；

3) $\sum_\alpha g_\alpha=1$。

定义 98. 如下定义外微分式 ω 的积分

$$\int_M\omega=\sum_i\int_{U_i}g_\alpha\omega$$

定理 99 (Stokes 公式)**.**

$$\int_D\mathrm{d}\,\omega=\int_{\partial D}\omega$$

定义 100. 外微分式 ω 称为闭的，如果 $\mathrm{d}\,\omega=0$，换而言之 $\omega\in\ker\mathrm{d}$；称为恰当的，如果存在 θ 使得 $\omega=\mathrm{d}\,\theta$，换而言之，$\omega\in\operatorname{im}\mathrm{d}$。

命题 101. ω 是闭的 1 形式，当且仅当对于任意零伦闭路径 γ，有

$$\int_\gamma\omega=0$$

ω 是恰当的 1 形式，当且仅当对于任意闭路径 γ，有

$$\int_\gamma\omega=0$$

9 李群

2012-11-8

定义 102. 若群 G 赋予了一个光滑结构，使得群运算是光滑映射，则称为李群。

定义 103. 设 G 是李群，$\forall a \in G$，定义

$$L_a\colon G \longrightarrow G \qquad\qquad R_a\colon G \longrightarrow G$$
$$b \mapsto ab \qquad\qquad\qquad b \mapsto ba$$

则它们都是光滑同胚，分别称为左移动和右移动。

例 104. $(\mathbb{R}^n,+)$、$(S^1,\cdot)$ 是 $abel$ 李群。

例 105. 若 G_1, G_2 是李群，则 $G_1 \times G_2$ 也是李群。特别地，$T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{个}}$ 是 $abel$ 李群，称为 n 维环面。

例 106. $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}$ 称为 n 阶一般线性群。

例 107. $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1\}$ 称为 n 阶特殊线性群。

例 108. $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^T = I_n\}$ 称为 n 阶正交群。

例 109. $SO(n,\mathbb{R}) = SL(n,\mathbb{R}) \cap O(n,\mathbb{R})$ 称为 n 阶特殊正交群。

定义 110. 对李群 G，若其子群 H 同时也是 G 的闭子流形，则称 H 为 G 的李子群。

例 111. $G = T^2 = S^1 \times S^1$，取 $H < G$ 如下

$$H = \{(e^{i\theta}, e^{ik\theta}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

其中 k 为给定实数。

当 $k \notin \mathbb{Q}$ 时，H 不是 G 的闭子流形（事实上 H 稠于 G），因此不是 G 的李子群。

定义 112. 设 $X \in \mathfrak{X}(G)$，若 $\forall a \in G$，

$$(R_a)_* X = X$$

则称 X 是 G 上的右不变向量场。G 上右不变向量场的全体，记作 $\mathfrak{g}$。

命题 113. $\mathfrak{g}$ 是 $\dim G$ 维的实线性空间，且

$$X \mapsto X_1$$

给出 $\mathfrak{g} \to T_1 G$ 的同构。

证明. $\forall v \in T_1 G$，可构造右不变向量场 V

$$V_a = (R_a)_* v$$

反之，右不变向量场 X 满足 $X_1 = v$，则

$$X_a = (R_a)_* X_1 = V_a$$

故任一右不变向量场由其在 1 的值唯一确定。 □

定理 114. $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$，有 $[X, Y] \in \mathfrak{g}$。

证明. $\forall a \in G$，$(R_a)_*[X, Y] = [(R_a)_*X, (R_a)_*Y] = [X, Y]$。 □

定义 115. 称 $(\mathfrak{g}, [,])$ 为李群 G 的李代数。

注. 有时也称 T_1G 为 G 的李代数。

对于 $v \in T_1G$，将满足 $X_1 = v$ 的右不变向量场记作 $\widehat{v}$，并定义

$$[v, w] \overset{\text{def}}{=} [\widehat{v}, \widehat{w}]_1$$

定义 116. 取 T_1G 的一组基 $v_1, \cdots, v_n$，则可设

$$[v_i, v_j] = C_{ij}^k v_k$$

其中 C_{ij}^k 称为 G 的结构常数。

此时 $\widehat{v}_1, \cdots, \widehat{v}_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基，且

$$[\widehat{v}_i, \widehat{v}_j] = C_{ij}^k \widehat{v}_k$$

定理 117. 结构常数满足方程组：

$$\begin{cases} C_{ij}^k = -C_{ji}^k \\ C_{sj}^i C_{kl}^s + C_{sk}^i C_{lj}^s + C_{sl}^i C_{jk}^s = 0 \end{cases}$$

注. 反之，满足上述方程组的一组常数 C_{ij}^k 就定义了一个李代数 $\mathfrak{g}$，并有一个局部李群 G 以 $\mathfrak{g}$ 为李代数。

定义 118. 对于 $x \in G$，定义

$$\alpha_x(a) = L_x R_{x^{-1}}(a) = xax^{-1}$$

称为 G 的内自同构。此时，

$$(\alpha_x)_{*1} \colon T_1G \longrightarrow T_1G$$

是李代数的同构，记作 $\operatorname{Ad} x$。

$$\begin{aligned} \operatorname{Ad}\colon\ G &\longrightarrow GL(T_1G) \cong GL(n, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \operatorname{Ad} x \end{aligned}$$

定义 119. $\operatorname{ad} = \operatorname{Ad}_{*1} \colon T_1G \to gl(n, \mathbb{R})$，称为 G 的伴随表示。

定义 120. $\theta \in A^1(G)$，若 $\forall a \in G, (R_a)^*\theta = \theta$，则称 θ 为 G 上的右不变 1 形式。

注. 右不变 1 形式全体与 T_1^*G 同构，恰是 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间，记作 $\mathfrak{g}^*$。

具体地，设 $v_1, \cdots, v_n$ 是 T_1G 的一组基，则 $\widehat{v}_1, \cdots, \widehat{v}_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基，它们构成 G 的整体标架场。记它们的对偶为 $\omega^1, \cdots, \omega^n$，则

$$\mathrm{d}\,\omega^i = -\frac{1}{2} C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$$

定义 121. 形式地定义一个 T_1G 值 1 形式

$$\omega = v_i \omega^i$$

称为李群 G 的 *Maurer-Cartan 形式*。

定理 122. *设 ω^i 是 $\mathfrak{g}^*$ 的一组基，若 $\sigma\colon G\to G$ 满足 $\sigma^*\omega^i=\omega^i$，则 σ 是右移动。*

Cartan graph technique. 考虑 $G\times G$ 上 n 维切子空间场 E，定义方程为

$$\theta^i=\pi_1^*\omega^i-\pi_2^*\omega^i$$

其中 π_1,π_2 是 $G\times G$ 到两个分量的技能。

由于

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\theta^i&=\pi_1^*\,\mathrm{d}\,\omega^i-\pi_2^*\,\mathrm{d}\,\omega^i\\
&=\pi_1^*(-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k)-\pi_2^*(-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k)\\
&=-\frac{1}{2}C^i_{jk}(\pi_1^*\omega^j\wedge\pi_1^*\omega^k-\pi_2^*\omega^j\wedge\pi_2^*\omega^k)\\
&\equiv 0\mod \theta^1,\cdots,\theta^n
\end{aligned}$$

可见 E 满足 Frobenius 条件，过 $G\times G$ 上任一点总存在唯一的极大积分子流形。

注意到 σ 之图像 $\{(x,\sigma(x))\mid x\in G\}$ 恰是 E 的一个积分子流形

$$\begin{aligned}
f\colon N\to G\times G&\to\pi_1(G)\\
f^*\theta^i&=f^*(\pi_1^*\omega^i)-f^*(\pi_2^*\omega^i)\\
\theta^i(Y)&=\omega^i(\pi_{1*}Y)-\omega^i(\pi_{2*}Y)\\
&=\omega^i(X)-\omega^i(\sigma_*X)\\
&=\omega^i(X)-(\sigma^*\omega^i)(X)=0
\end{aligned}$$

同理，$\forall a\in G$，R_a 的图像也是 E 的积分子流形。

取 $a=\sigma(1)$，则 σ 与 R_a 的图像都经过 $(1,a)$，故 $\sigma=R_a$。 □

例 123. *$GL(n,\mathbb{R})$ 之 Maurer-Cartan 形式为*

$$\omega=(\mathrm{d}\,A)A^{-1}$$

10 李群（续）

2012-11-15

定义 124. 取 T_1G 的一组基 $v_1,\cdots,v_n$，并取 $\widehat{v}_1,\cdots,\widehat{v}_n$ 的对偶 1 形式 $\omega^1,\cdots,\omega^n\in A^1(G)$，形式地定义

$$\omega=v_i\omega^i$$

称为李群 G 的*右基本微分式*，或*Maurer-Cartan 形式*。

注. $\omega(\widehat{v}_i)=v_i$。

例 125. *$G=GL(n,\mathbb{R})$ 的李代数与右基本微分式：*

因为 G 中曲线 $I+tA$ 在 $t=0$ 处的切向量就是 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，所以

$$T_IG=\mathbb{R}^{n\times n}$$

取 $A\in T_IG$，注意到这里的 $R_ax=xa$ 是线性变换，故

$$
\begin{aligned}
\widetilde{A_x}&=R_xA=Ax\in T_xG\\
\widehat{A}(f)(x)&=\widehat{A}_x(f)\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}f(x+tAx)\Big|_{t=0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\widehat{A},\widehat{B}](f)(x)&=\widehat{A}_x(\widehat{B}(f))-\widehat{B}_x(\widehat{A}(f))\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\widehat{B}(f)(x+tAx)\Big|_{t=0}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\widehat{A}(f)(x+sBx)\Big|_{s=0}\\
&=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}(f(x+tAx+s(Bx+tBAx))-f(x+sBx+t(Ax+sABx)))\Big|_{t=s=0}\\
&=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}(f(x+stBAx)-f(x+stABx))\Big|_{t=s=0}\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(f(x+t(BA-AB)x))\Big|_{t=0}\\
&=(BA-AB)^\wedge(f)(x)
\end{aligned}
$$

所以 $[\widehat{A},\widehat{B}]=(BA-AB)^\wedge$。

换言之，T_IG 中的 $[,]$ 运算由

$$[A,B]=BA-AB$$

给出。

右基本微分式为

$$\omega=\mathrm{d}\,x\cdot x^{-1}$$

其中 $x=(x_{ij}),\mathrm{d}\,x=(\mathrm{d}\,x_{ij})$。

这是因为

$$
\begin{aligned}
\omega(\widehat{A})&=\mathrm{d}\,x((Ax)_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}})x^{-1}\\
&=(Ax)x^{-1}=A
\end{aligned}
$$

定义 126. 对李群 G，称李群同态 $\gamma\colon(\mathbb{R}.+)\to G$ 为 G 的一个单参数子群。

定理 127. 单参数子群 γ 由 $\dot\gamma(0)\in T_1G$ 唯一决定。

证明. 设 $v=\dot\gamma(0)\in T_1G$，考虑 $\widehat{v}$ 的流 θ_t，则

$$
\begin{cases}
\theta_0=\mathrm{id}\\
\theta_{t+s}=\theta_t\circ\theta_s
\end{cases}
$$

考虑 $\widetilde{\gamma}(t)=\theta_t(1)$，则 $\widetilde{\gamma}$ 是单参数子群。

$$
\begin{aligned}
\dot\gamma(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\gamma(t+s)\Big|_{s=0}\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}(R_{\gamma(t)}\gamma(s))\Big|_{s=0}\\
&=(R_{\gamma(t)})_*\dot\gamma(0)
\end{aligned}
$$

可见 $\gamma(t)$ 是右不变向量 $\widehat{v}$ 的积分曲线。 □

例 128. $G=S^1=\{e^{it}\mid t\in\mathbb{R}\}$，固定 k，$\gamma(t)=e^{itk}$ 就是 S^1 的一个单参数子群，$\dot\gamma(0)=ik$。

定义 129. 对于 $v\in T_1G$，设 v 对应的单参数子群为 $\gamma(t)$，定义

$$\begin{aligned}\exp\colon\ T_1G &\longrightarrow G\\ v &\mapsto \gamma(1)\end{aligned}$$

称为指数映射。

注. $\exp(kv)=\gamma(k),\forall k\in\mathbb{R}$。

例 130. $G=GL(n,\mathbb{R})$

$$\exp(A)=I+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots$$

例 131. $G=S^1$

$$\exp(t)=e^{it}$$

定义 132. 对于李群 G 和流形 M，若光滑映射 $\sigma\colon G\times M\to M$ 满足：

1) $\sigma(1,x)=x$；

2) $\sigma(a,\sigma(b,c))=\sigma(ab,c)$

则称之为 G 在 M 上的一个（左）作用。简记 $\sigma(a,x)$ 为 ax。

例 133. S^1 在 S^3 上的左作用

$$\sigma(z,(\xi,\eta))=(z\xi,z\eta)$$

例 134. $SL(2,\mathbb{R})$ 在 $S^2\cong\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上的左作用：

$$\sigma(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

定义 135. 设李群 G 左作用在流形 M 上，

1) 若 $\forall a\in G,a\neq 1$，存在 $x\in M$ 使得 $ax\neq x$，则称为有效的；

2) 若 $\forall a\in G,a\neq 1,\forall x\in M$，都有 $ax\neq x$，则称为自由的。

定义 136. 设李群 G 左作用在流形 M 上，对 $v\in T_1G$，单参数子群 $\exp(tv)$ 在 M 上之作用形成一个流

$$\theta_t(x)=\exp(tv).x$$

将 θ_t 在 M 上生成的向量场记作 $\widetilde{v}$，称为（相应于 v 的）基本向量场。

定理 137. 设李群 G 左作用在流形 M 上，则 M 上的全体基本向量场构成一个李代数，且这个李代数是 T_1G 的同态像。进一步，若该作用有效，则这个李代数同构于 T_1G。

证明. 在 $\sigma\colon G\times M\to M$ 中固定 $p\in M$，则得到

$$\begin{aligned}\sigma_p\colon\ G &\longrightarrow M\\ a &\mapsto a.p\end{aligned}$$

此时 $(\sigma_p)_*\colon T_1G\to T_pM$ 满足 $(\sigma_p)_{*1}v=\widetilde{v}_p$。（因为 $\sigma_p(\exp(tv))=\exp(tv)p=\theta_t(p)$，而流在 $t=0$ 处求导，即得 $(\sigma_p)_{*1}v=\widetilde{v}_p$。）

考虑 $(\sigma_p)_{*a}\colon T_aG\to T_{a.p}M$，$\widehat{v}_a$ 是 $\exp(tv)a$ 的切向量。

所以 $(\sigma_p)_{*a}(\widehat{v}_a)$ 是 $\sigma_p(\exp(tv)a)$ 之切向量。其中 $\exp(tv)a.p=\exp(tv).ap=\theta_t(ap)=\widetilde{v}_{ap}$。

可见 $(\sigma_p)_*\widehat{v}=\widetilde{v}$，故 $[\widetilde{v},\widetilde{w}]=[\sigma_{p*}\widehat{v},\sigma_{p*}\widehat{w}]=\sigma_{p*}[\widehat{v},\widehat{w}]$。 □

例 138. $SL(2,\mathbb{R})$ 在 S^2 上的作用：

对于 $v=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ 有 $\exp(tv)=\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$，其中

$$\begin{cases} a(0)=d(0)=1 \\ b(0)=c(0)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{a}(0)=a & \dot{b}(0)=b \\ \dot{c}(0)=c & \dot{d}(0)=-a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{v}|_z &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\exp(tv).z\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{a(t)z+b(t)}{c(t)z+d(t)}\Big|_{t=0} \\ &= \dot{a}(0)z+\dot{b}(0)-(a(0)z+b(0))(\dot{c}(0)z+\dot{d}(0)) \\ &= az+b-z(cz-a) \\ &= -cz^2+2az+b \end{aligned}$$

11 李氏变换群的应用

2012-11-22

11.1 李型微分方程

定义 139. 给定李群 G 在 M 上的一个左作用，设 $A\colon\mathbb{R}\to T_1G$ 是光滑曲线，称 M 上的常微分方程

$$\gamma' t=\widetilde{A(t)}(\gamma(t))$$

为李型微分方程。

例 140 (Ricatti 方程)**.**

$$x'(t)=a_0(t)+2a_1(t)x(t)+a_2(t)x(t)^2$$

其中 a_0,a_1,a_2 已知。

证明. 考虑 $G=SL(2,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}\mathbf{P}^1$ 上的作用。此时，相应于 $v=\begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ 的基本向量场为

$$\widetilde{v}(x)=a_0+2a_1+a_2x^2$$

取 T_1G 中的曲线 $A(t)=\begin{pmatrix} a_1(t) & a_0(t) \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}$ 则

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \widetilde{A(t)}(\gamma(t)) \\ &= a_0(t)+2a_1(t)\gamma(t)+a_2(t)\gamma(t)^2 \end{aligned}$$

是李型微分方程。 □

例 141 (一阶线性微分方程)**.**

$$x'(t)=a(t)x(t)+b(t)$$

这里 $x(t),b(t)\in\mathbb{R}^{n\times 1},a(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$，而 $a(t),b(t)$ 已知。

证明. 考虑

$$G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}\middle| a\in GL(n,\mathbb{R}), b\in\mathbb{R}^{n\times 1}\right\}$$

G 在 $\mathbb{R}^n$ 上的左作用（仿射变换）如下：

$$\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}.x=ax+b$$

经计算得：

$$T_1G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}\middle| a\in\mathbb{R}^{n\times n}, b\in\mathbb{R}^{n\times 1}\right\}$$

对应于 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 的基本向量场是

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\exp(tA).x\Big|_{t=0}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}e^{tA}.x\Big|_{t=0}\\&=ax+b\end{aligned}$$

因此，取 T_1G 中曲线 $A(t)=\begin{pmatrix}a(t) & b(t)\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，则微分方程

$$\begin{aligned}\gamma'(t)&=\widetilde{A(t)}(\gamma(t))\\&=a(t)\gamma(t)+b(t)\end{aligned}$$

是李型微分方程。 □

定理 142. 给定李型微分方程

$$\gamma' t=\widetilde{A(t)}(\gamma(t))$$

设 $S\colon\mathbb{R}\to G$ 是微分方程

$$S'(t)=(R_{s(t)})_*A(t)$$

的满足 $S(0)=1$ 的唯一解，则

$$\gamma' t=\widetilde{A(t)}(\gamma(t))$$

的满足 $\gamma(0)=m\in M$ 的解是 $\gamma(t)=S(t).m$，称 $S(t)$ 为李型微分方程的基解。

证明.

$$\begin{aligned}\sigma\colon G\times M&\to M\\ \sigma_p(g)&=g.p\\ (\sigma_p)_*\widehat{v}_a&=\widetilde{v}_{a.p}\end{aligned}$$

由

$$\gamma(t)=\sigma_m(S(t))$$

得

$$
\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (\sigma_m)_* S'(t) \\
&= (\sigma_m)_* (R_{s(t)})_* A(t) \\
&= \widetilde{A(t)}(S(t).m) \\
&= \widetilde{A(t)}(\gamma(t))
\end{aligned}
$$

□

例 143. $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ 的基解是 $S(t) = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

证明.

$$
\begin{aligned}
S'(t) &= (R_{s(t)})_* A(t) \\
\begin{pmatrix} x'(t) & y(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) & y(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) \\ x(0) = I \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

□

Lie 的约化方法

（由 Ricatti 方程的研究得到）

假设已有李型微分方程 $\gamma' t = \widetilde{A(t)}(\gamma(t))$ 的一个特解 $\gamma_0(t)$，且 $\gamma_0(0) = m$。可取 $g(t) \in G$，使 $\gamma_0(t) = g(t).m$，但 $g(t)$ 一般不是基解。

设基解为 $S(t) = g(t)h(t)$，其中 $h(t) \in G_m \overset{\text{def}}{=} \{g \in G \mid g.m = m\}$，则 $h(t)$ 需满足

$$
\begin{aligned}
(g(t)h(t))' &= (R_{g(t)h(t)})_* A(t) \\
(L_{g(t)})_* h'(t) + (R_{h(t)})_* g'(t) &= (R_{h(t)})_* (R_{g(t)})_* A(t) \\
\Longrightarrow h'(t) &= (L_{g(t)})_*^{-1} (R_{h(t)})_* ((R_{g(t)})_* A(t) - g'(t)) \\
&= (R_{h(t)})_* (L_{g(t)})_*^{-1} ((R_{g(t)})_* A(t) - g'(t))
\end{aligned}
$$

令 $B(t) = L_{g(t)*}^{-1}((R_{g(t)})_* A(t) - g'(t))$，则 $B(t) \in T_1 G_m = \ker \sigma_{m*}$。

于是 $h(t)$ 需满足

$$
h'(t) = R_{h(t)*} B(t)
$$

这是 G_m 上的一个基解方程。

例 144 (Ricatti 方程)**.** 设 $x' = a_0 + 2a_1 x + a_2 x^2$ 有特解 $x_0(t)$，取

$$
g(t) = \begin{pmatrix} 1 & x_0(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})
$$

则 $x_0(t)=g(t).0$。

$$\begin{aligned}G_0&=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})\middle|b=0,d\neq 0\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}u&0\\v&u^{-1}\end{pmatrix}\middle|u\in\mathbb{R}^{\times},v\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

设基解为 $S(t)=g(t)h(t)=\begin{pmatrix}1&x_0(t)\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u&0\\v&u^{-1}\end{pmatrix}$，则

$$\begin{aligned}B(t)&=L^{-1}_{g(t)*}(R_{g(t)*}A(t)-g'(t))\\&=\begin{pmatrix}1&-x_0\\0&1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}a_1&a_0\\-a_2&-a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x_0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&a_0+2a_1x_0+a_2x_0^2\\0&0\end{pmatrix}\right)\\&=\begin{pmatrix}a_1+a_0x_0&0\\-a_2&-(a_1+a_2x_0)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

由 $h'(t)=R_{h(t)*}B(t)$ 得

$$\begin{cases}u'(t)=u(t)(a_1+a_2x_0)\\v'(t)=-a_2u-(a_1+a_0x_0)v\end{cases}$$

可见 u,v 可积。

问题 求基解之难度？

例 145. G 是 $abel$ 群，则

$$\begin{aligned}S'(t)&=R_{s(t)*}A(t)\\&=A(t)\end{aligned}$$

例 146. 由交换的矩阵构成的李群 G

$$\begin{aligned}S'(t)&=A(t)S(t)\\\Longrightarrow S(t)&=\exp(\int A(t)\,\mathrm{d}\,t)\end{aligned}$$

参考文献 Peter.J.Olver ，Application of Lie groups to Differential Equations

12 习题一

习题 1. $f\colon M\to N,g\colon N\to K$ 都是光滑流形之间的光滑映射，证明：

$$g_*\circ f_*=(g\circ f)_*$$

证明. 主要方法是取曲线并注意到切映射与曲线选取无关。

对于 $p\in M$，设 $f(p)=q,g(q)=r$，$\forall v\in T_pM$，设 $\gamma(t)\subset M$ 在 $t=0$ 处的切向量是 v，则有 $\widetilde{\gamma}(t)=f(\gamma(t))\subset N$ 在 $t=0$ 处的切向量是 f_*v。

于是 $g(f(\gamma(t)))\subset K$ 在 $t=0$ 处的切向量，一方面是 $(g\circ f)(\gamma(t))$ 的切向量，即 $(g\circ f)_*v$；另一方面也是 $g(\widetilde{\gamma})$ 的切向量，即 $g_*(f_*v)$。

于是 $g_*\circ f_*=(g\circ f)_*$。 □

习题 2. $f\colon \mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ 是行列式函数 $f(p)=\det(p)$，$p\in GL(n,\mathbb{R})$，e 是单位矩阵，求

1) $\operatorname{rank}_p f$；

2) f_{*e}。

证明. 主要是注意到 $f_{*p}(v)$ 是 $f(p+tv)$ 在 $f(p)$ 点的切向量。

由于 $\dim\mathbb{R}=1$，所以 $\operatorname{rank}_p f\leqslant 1$，为使 $\operatorname{rank}_p f=1$，只须在每点 $p\in GL(n,\mathbb{R})$ 找到切向量 v，使得 $f_{*p}(v)\neq 0$。

为此，取 $v\in GL(n,\mathbb{R})$，则

$$f(p+tv)=|v||pv^{-1}+te|=|v|P_{-pv^{-1}}(t)$$

其中 $P_{-pv^{-1}}(t)$ 是关于 $-pv^{-1}$ 的特征多项式。

特别地，取 $v=p\in\mathbb{R}^{n\times n}\cong T_p\mathbb{R}^{n\times n}$，有

$$\begin{aligned}f_{*p}(p)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}f(p+tp)\Big|_{t=0}\\&=|p|\left.(1+t)^n\right|_{t=0}\neq 0\end{aligned}$$

这就证明了 $\operatorname{rank}_p f=1$。

由于 $f_{*e}(v)$ 是曲线 $f(e+tv)$ 在 $t=0$ 处的切向量。

$$f_{*e}(v)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}|e+tv|\Big|_{t=0}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}|e+tv|=(-t)^n|v-\frac{1}{t}e|$$

若 v 之特征多项式为 $F(\lambda)$，则

$$|e+tv|=(-t)^nF(\frac{1}{t})$$

由于

$$F(\lambda)=\lambda^n-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots$$

所以

$$\begin{aligned}|e+tv|&=(-t)^n((-\frac{1}{t})^n-\operatorname{tr}(v)(-\frac{1}{t})^{n-1}+\cdots)\\&=1+\operatorname{tr}(v)t+o(t)\end{aligned}$$

所以 $f_{*e}(v)=\operatorname{tr}(v)$。 □

习题 3. 证明 $SU(2)$ 与 S^3 微分同胚。其中

$$SU(2)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times 2}\,\middle|\,|a|^2+|b|^2=1,|c|^2+|d|^2=1,ad-bc=1,a\bar{c}+b\bar{d}=0\right\}$$
$$S^3=\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\mid |z_1|^2+|z_2|^2=1\right\}$$

证明. 先通过解方程化简 $SU(2)$ 的表达式，最后看出这个同胚来。

$$a\bar{c}+b\bar{d}=0\Longrightarrow ad|c|^2+bc|d|^2=0$$

将之代入 $ad-bc=1$ 得

$$ad(1+\frac{|c|^2}{|d|^2})=1$$

又 $|c|^2+|d|^2=1$，故得

$$a=\frac{\bar{d}}{|c|^2+|d|^2}=\bar{d}$$

同理可得 $b=-\bar{c}$。于是

$$SU(2)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times 2}\middle| |a|^2+|b|^2=1\right\}$$

对应

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\in SU(2)\longleftrightarrow(a,b)\in S^3$$

显然是光滑的双射，于是 $SU(2)\cong S^3$。 □

习题 4. 证明 $SL(n,\mathbb{R}),O(n,\mathbb{R})$ 是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的闭子流形。

证明. 运用正则值原像定理（*39*）或者淹没原像定理（*36*）。

考虑

$$\begin{aligned} f\colon\ GL(n,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \det(p) \end{aligned}$$

则由于 $\forall p\in GL(n,\mathbb{R}),\operatorname{rank}_p f=1$，故 $\forall c\neq 0$，$f^{-1}(c)$ 是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的闭子流形。特别地，取 $c=1$，则 $SL(n,\mathbb{R})$ 是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的闭子流形。

令 S 为实对称矩阵全体，考虑

$$\begin{aligned} f\colon\ GL(n,\mathbb{R}) &\longrightarrow S \\ A &\mapsto A^TA \end{aligned}$$

下证 $\forall p\in GL(n,\mathbb{R}),\operatorname{rank}_p f=\dim S$。注意到对 $f(p)=q$，有 $T_qS\cong S$，于是 $\forall v\in S$ 有

$$\begin{aligned} f_{*p}(v)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(p+tv)^T(p+tv)\bigg|_{t=0} \\ &=p^Tv+v^Tp \end{aligned}$$

故 $\forall B\in S$，取 $v=\frac{1}{2}(p^{-1})^TB$，则 $f_{*p}(v)=B$。即 f_{*p} 是满射，故满秩。

于是 $O(n,\mathbb{R})=f^{-1}(I)$ 是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的闭子流形。 □

习题 5. 证明下述 M 是 $\mathbb{R}^{2n+2}$ 的闭子流形（$\mathbb{C}^{n+1}$ 与 $\mathbb{R}^{2n+2}$ 视为等同）。

$$M=\{(z_0,z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^{n+1}\mid z_0^2+z_1^2+\cdots+z_n^2=1\}$$

证明. 注意到 $f_{*p}\colon T_pM\to T_pN$ 在基 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\}$ 和 $\{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\Big|_q\}$ 下的矩阵为 *Jacobi* 矩阵。

先将 $\mathbb{C}^{n+1}$ 下的坐标改写为 $\mathbb{R}^{2n+2}$ 下的坐标：$z_j=x_j+iy_j$。则 M 的等式成为：

$$\begin{cases}\sum_j(x_j^2-y_j^2)=1\\ \sum_j x_jy_j=0\end{cases}$$

考虑

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}^{2n+2} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_0,\cdots,x_n,y_0,\cdots,y_n) &\mapsto \left(\sum(x_j^2-y_j^2),\sum x_jy_j\right) \end{aligned}$$

则

$$\operatorname{rank}_p f = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2x_0 & \cdots & 2x_n & -2y_0 & \cdots & -2y_n \\ y_0 & \cdots & y_n & x_0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = 2$$

故 $M = f^{-1}(1,0)$ 是 $\mathbb{R}^{2n+2}$ 的闭子流形。 □

习题 6. 证明上题中的 M 与 TS^n（即 S^n 的切丛）微分同胚。

证明. 注意到：

$$TS^n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1, x \cdot y = 0\}$$

考虑

$$\begin{aligned} f\colon\ M &\longrightarrow TS^n \\ (x,y) &\mapsto (\frac{x}{\sqrt{1+|y|^2}}, y) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f^{-1}\colon\ TS^n &\longrightarrow M \\ (x,y) &\mapsto (x(1+|y|^2)^{\frac{1}{2}}, y) \end{aligned}$$

则 f 为微分同胚。 □

习题 7. 设 $f\colon M \to N$ 是光滑映射，$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$，如果 f_*X 和 f_*Y 是 N 上的向量场，证明：$f_*[X,Y]$ 也是 N 上的向量场，且 $f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y]$。

证明. 善用下面等式：

$$(f_*X)(g)(f(p)) = f_{*p}(X_p)(g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} g(f(\gamma(t)))\Big|_{t=0} = X_p(g \circ f)$$

由 Lie 括号的定义（55），由于 f_*X 和 f_*Y 是 N 上的向量场，故 $[f_*X, f_*Y]$ 也是 N 上的向量场。于是只须证 $f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y]$：

$$\begin{aligned} ([f_*X, f_*Y](g)) \circ f &= (f_*X(f_*Y(g))) \circ f - (f_*Y(f_*X(g))) \circ f \\ &= X(f_*Y(g) \circ f) - Y(f_*X(g) \circ f) \\ &= X(Y(g \circ f)) - (Y(X(g \circ f))) \\ &= [X,Y](g \circ f) \\ &= (f_*[X,Y](g)) \circ f \end{aligned}$$

□

习题 8. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，定义向量场 $X = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$。请计算 $Z = [X,Y]$，并证明 X, Y, Z 都与 $\mathbb{R}^3$ 的子流形 S^2 相切。

证明. 通过证明 X, Y, Z 是 $SO(3)$ 的基本向量场，而 S^2 又是 $SO(3)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上左作用的一个轨道，来证明 X, Y, Z 与 S^2 相切。

首先计算 $Z = [X,Y]$：

$$Z = [X,Y] = XY - YX = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

考虑 $SO(3)$ 的一组基

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 0 & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$\forall p=(x,y,z)^T$，有

$$\begin{aligned}\widetilde{e_1}(p) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\exp(te_1).p)\Big|_{t=0}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\begin{pmatrix}1 & & \\ & \cos t & \sin t\\ & -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0}\\ &= \begin{pmatrix}0\\ z\\ -y\end{pmatrix} = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

所以 $\widetilde{e_1}=-X$ 同理可得 $\widetilde{e_2}=-Y,\widetilde{e_3}=-Z$。

取 $SO(3)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上的作用为：

$$\sigma(A,X)=AX,\forall A\in SO(3),X\in\mathbb{R}^3$$

则 S^2 是该作用的一个轨道，故 $\forall p\in S^2,X(f(p))\in f_*(T_pS^2)$，其中 f 是嵌入，即 X,Y,Z 与 S^2 相切。 □

证明. 直接验证 X 与 S^2 相切，余类似。

设 X 生成的流为 ϕ_t，且

$$\phi_t(x,y,z)=(a,b,c)$$

由于

$$X(x,y,z)=(0,-z,y)$$

故

$$(\dot{a},\dot{b},\dot{c})=(0,-c,b)$$

注意到 $\phi_0=\mathrm{id},\phi_{t+s}=\phi_t\circ\phi_s$，从而

$$\phi_t(x,y,z)=(x,y\cos t+z\sin t,y\sin t-z\cos t)$$

故 $\forall p\in S^2$，$\phi_t(p)$ 是 S^2 上的以 X_p 为切向量的曲线。 □

证明. 用 $\mathbb{R}^3$ 的整体坐标，$S^2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$ 的法向量[4]表示为

$$(x,y,z)$$

而 X,Y,Z 则表示为

$$(0,-z,y),(z,0,-x),(y,-x,0)$$

易知 X,Y,Z 与 S^2 相切。 □

习题 9. 在 $\mathbb{R}^3$ 上定义向量场

$$X=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}+(1+z^2)\frac{\partial}{\partial z}$$

试计算 X 生成的流。

[4] 比如可以用梯度来求得。

证明. 设

$$\phi_t(x,y,z)=(a,b,c)$$

由于

$$X(x,y,z)=(-y,x,1+z^2)$$

故

$$(\dot{a},\dot{b},\dot{c})=(-b,a,1+c^2)$$

注意到 $\phi_0=\mathrm{id},\phi_{t+s}=\phi_t\circ\phi_s$，从而

$$\phi_t(x,y,z)=(x\cos t+y\sin t,x\sin t-y\cos t,\tan(t+\arctan z))$$

□

习题 10. 设向量场 $X\in\mathfrak{X}(M)$ 生成的流是 ϕ_t，$\psi\colon M\to M$ 是微分同胚，求证：ψ_*X 生成的流是 $\psi\circ\phi_t\circ\psi^{-1}$。

证明. 1) $\psi\circ\phi_t\circ\psi^{-1}$ 是流。

2) $\psi\circ\phi_t\circ\psi^{-1}$ 诱导的向量场是 ψ_*X：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\psi\circ\phi_t\circ\psi^{-1}(p)\Big|_{t=0}\\=&\psi_*(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\phi_t(\psi^{-1}(p))\Big|_{t=0})\\=&\psi_*X_{\psi^{-1}(p)}\end{aligned}$$

□

习题 11. 定义变换 $\phi_t\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 如下：

$$\phi_t(x,y)=(x\cosh t+y\sinh t,x\sinh t+y\cosh t)$$

证明：ϕ_t 是 $\mathbb{R}^2$ 上的流，并求其诱导的向量场 X。

证明. 首先证明 ϕ_t 是 $\mathbb{R}^2$ 上的流。注意到

$$\phi_t(x,y)=\begin{pmatrix}\cosh t&\sinh t\\\sinh t&\cosh t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

故只须证

$$\begin{pmatrix}\cosh t&\sinh t\\\sinh t&\cosh t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh s&\sinh s\\\sinh s&\cosh s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh(t+s)&\sinh(t+s)\\\sinh(t+s)&\cosh(t+s)\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}X(x,y)=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\phi_t(x,y)\Big|_{t=0}\\=&(x\sinh t+y\cosh t,x\cosh t+y\sinh t)|_{t=0}\\=&(y,x)\end{aligned}$$

即 $X=y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$。 □

习题 12. 在 $M := \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上定义如下 3 个向量场：

$$X = 2y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}, Y = -2x\frac{\partial}{\partial x} + 2z\frac{\partial}{\partial z}, Z = x\frac{\partial}{\partial y} + 2y\frac{\partial}{\partial z}$$

证明 $\mathrm{span}\{X, Y, Z\}$ 满足 *Frobenius* 条件，并找出积分子流形。

证明. *Frobenius* 条件：当 $X_1, \cdots, X_k$ 是 E 的一组基时，$[X_i, X_j] \in E$。

注意到 $xX + yY = zZ$，故 $\mathrm{span}\{X, Y, Z\} = \mathrm{span}\{X, Y\}$，而

$$[X, Y] = XY - YX = -4y\frac{\partial}{\partial x} - 2z\frac{\partial}{\partial y} = -2X$$

故 E 满足 Frobenius 条件。

将 X, Y 扩充为一组基并取其对偶 1 形式 $\omega^1, \omega^2, \omega^3 = P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z$。则

$$\begin{cases} 2yP + zQ = 0 \\ -2xP + 2zR = 0 \end{cases}$$

故

$$\omega^3 = z\,\mathrm{d}\,x - 2y\,\mathrm{d}\,y + x\,\mathrm{d}\,z = \mathrm{d}(xz - y^2)$$

即积分子流形为

$$xz - y^2 = cst$$

□

13 习题二

习题 13. 在向量空间 V 中，$v_1, \cdots, v_k$ 和 $\omega_1, \cdots, \omega_k$ 分别是子空间 V_1 和 V_2 的一组基，证明：$V_1 = V_2$ 当且仅当存在非零实数 c，使得

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = c\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$$

证明. 当 $V_1 = V_2$ 时，$\omega_i = a_i^j v_j$，故

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k &= a_1^{i_1} v_{i_1} \wedge a_2^{i_2} v_{i_2} \wedge \cdots \wedge a_k^{i_k} v_{i_k} \\ &= cv_1 \wedge \cdots \wedge v_k \end{aligned}$$

其中 $c = \sum \mathrm{sgn}(i_1 \cdots i_k) a_1^{i_1} \cdots a_k^{i_k} = \det(a_i^j)$，由于 (a_i^j) 是过度矩阵，故 $c \neq 0$。

反之，由于

$$\omega_i \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \omega_i \wedge c\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = 0$$

故 $\omega_i \in V_1$，余同理，得 $V_2 \subset V_1$，反之亦然，故 $V_1 = V_2$。 □

习题 14. 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义 2 形式 $\omega = x\,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z + y\,\mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,x + z\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y$。设 $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ 是标准嵌入，求 $f^*\omega$，并证明 $f^*\omega$ 在 S^2 上处处非零。

证明. 将 S^2 用极坐标表示，则

$$f(\alpha, \beta) = (\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha)$$

故

$$f^*\omega = -\cos\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha \wedge \mathrm{d}\,\beta, \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

□

习题 15. 已知 α, β 为闭微分式，证明 $\alpha \wedge \beta$ 也是闭微分式；进一步地，若 β 还是恰当的，则 $\alpha \wedge \beta$ 也是恰当的。

证明. 因为 $\mathrm{d}\,\alpha = \mathrm{d}\,\beta = 0$，故

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\,\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \mathrm{d}\,\beta = 0$$

设 $\beta = \mathrm{d}\,\omega$，则

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \omega) = \mathrm{d}\,\alpha \wedge \omega + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \mathrm{d}\,\omega = (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \beta$$

故 $\alpha \wedge \beta = \mathrm{d}((-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \omega)$。 □

习题 16. 在 S^3 上构造三个整体定义的 1 形式 $\omega^1, \omega^2, \omega^3$，使得

$$\mathrm{d}\,\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega^3, \mathrm{d}\,\omega^2 = -\omega^3 \wedge \omega^1, \mathrm{d}\,\omega^3 = -\omega^1 \wedge \omega^2$$

证明. 首先求出

$$S^3 = SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z_2} & \bar{z_1} \end{pmatrix} \middle| |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}$$

的李代数。为此取 I 处的曲线

$$\begin{cases} |z_1(t)|^2 + |z_2(t)|^2 = 1 \\ z_1(0) = 1 \\ z_2(0) = 0 \end{cases}$$

故求得李代数为

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ki & a+bi \\ -a+bi & -ki \end{pmatrix} \middle| k^2 + a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

其一组基为

$$v_1 = \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}$$

它们对应的右不变向量场为 e_1, e_2, e_3，则

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= [v_1, v_2]^\wedge \\ &= (v_2 v_1 - v_1 v_2)^\wedge \\ &= (-2v_3)^\wedge = -2e_3 \end{aligned}$$

同理 $[e_2, e_3] = -2e_1, [e_3.e_1] = -2e_2$。于是令 e_1, e_2, e_3 对偶的 1 形式是 $\omega^1, \omega^2, \omega^3$，则由

$$\mathrm{d}\,\omega^k = -\frac{1}{2} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j$$

得

$$\mathrm{d}\,\omega^1 = 2\omega^2 \wedge \omega^3, \mathrm{d}\,\omega^2 = 2\omega^3 \wedge \omega^1, \mathrm{d}\,\omega^3 = 2\omega^1 \wedge \omega^2$$

令 $\widetilde{\omega}^i = -2\omega^i$，则 $\widetilde{\omega}^i$ 符合要求。 □

证明. 将 S^3 嵌入到 $\mathbb{R}^4$，并令

$$\begin{pmatrix} \theta^0 \\ \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ -x^2 & x^1 & -x^4 & x^3 \\ -x^3 & x^4 & x^1 & -x^2 \\ -x^4 & -x^3 & x^2 & x^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\,x^1 \\ \mathrm{d}\,x^2 \\ \mathrm{d}\,x^3 \\ \mathrm{d}\,x^4 \end{pmatrix}$$

简记为 $\theta = A\,\mathrm{d}\,X$。从而有

$$\mathrm{d}\,\theta = \mathrm{d}\,A \wedge \mathrm{d}\,X = \mathrm{d}\,A \wedge (A^{-1}\theta) = (\mathrm{d}\,A)A^{-1} \wedge \theta$$

故

$$f^*\,\mathrm{d}\,\theta^1 = 2f^*\,\mathrm{d}\,\theta^2 \wedge f^*\,\mathrm{d}\,\theta^3, f^*\,\mathrm{d}\,\theta^2 = 2f^*\,\mathrm{d}\,\theta^3 \wedge f^*\,\mathrm{d}\,\theta^1, f^*\,\mathrm{d}\,\theta^3 = 2f^*\,\mathrm{d}\,\theta^1 \wedge f^*\,\mathrm{d}\,\theta^2$$

□

习题 17. 在 $\mathbb{R}^5$ 中取坐标系 (x, y, u, p, q)，并定义外微分式 $\theta^1 = \mathrm{d}\,u - p\,\mathrm{d}\,x - q\,\mathrm{d}\,y, \theta^2 = \mathrm{d}\,p \wedge \mathrm{d}\,q - \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y$。对于二元函数 $z(x, y)$，考虑由 $f(x, y) = (x, y, z, z_x, z_y)$ 定义的浸入映射 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$。证明：当且仅当 z 是方程 $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 1$ 的解时，$f^*\theta^1 = 0, f^*\theta^2 = 0$。

证明.

$$\begin{aligned}
f^*\theta^1 &= \mathrm{d}\,z - z_x\,\mathrm{d}\,x - z_y\,\mathrm{d}\,y \\
f^*\theta^2 &= \mathrm{d}\,z_x \wedge \mathrm{d}\,z_y - \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y \\
&= (z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 - 1)\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y
\end{aligned}$$

□

习题 18. 所设同上，定义 $\omega^1 = \mathrm{d}\,u - p\,\mathrm{d}\,x - q\,\mathrm{d}\,y, \omega^2 = \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,p - \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,q$。证明：当且仅当 z 是方程 $z_{xx} + z_{yy} = 0$ 的解时，$f^*\omega^1 = 0, f^*\omega^2 = 0$。

证明.

$$\begin{aligned}
f^*\omega^1 &= \mathrm{d}\,z - z_x\,\mathrm{d}\,x - z_y\,\mathrm{d}\,y \\
f^*\omega^2 &= \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z_x - \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,z_y \\
&= (z_{xx} + z_{yy})\,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,x
\end{aligned}$$

□

习题 19. 所设同上两题，考虑微分同胚 $\phi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ 如下

$$\phi(x, y, u, p, q) = (x, q, u - qy, p, -y)$$

证明：$\phi^*\theta^1 = \omega^1, \phi^*\theta^2 = \omega^2$。这表明 *Monge-Ampere* 方程 $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 1$ 与 *Laplace* 方程 $z_{xx} + z_{yy} = 0$ 的解之间有怎样的联系。

证明.

$$\begin{aligned}
\phi^*\theta^1 &= \mathrm{d}(u - qy) - p\,\mathrm{d}\,x - (-y)\,\mathrm{d}\,q \\
&= \mathrm{d}\,u - y\,\mathrm{d}\,q - q\,\mathrm{d}\,y - p\,\mathrm{d}\,x + y\,\mathrm{d}\,q \\
&= \mathrm{d}\,u - p\,\mathrm{d}\,x - q\,\mathrm{d}\,y = \omega^1 \\
\phi^*\theta^2 &= \mathrm{d}\,p \wedge \mathrm{d}(-y) - \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,q \\
&= \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,p - \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,q = \omega^2
\end{aligned}$$

可见 Monge-Ampere 方程 $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 1$ 与 Laplace 方程 $z_{xx} + z_{yy} = 0$ 的解一一对应。 □

习题 20. 设 $\omega \in A^1(M)$ 处处不为零。若有处处非零的函数 $\mu \in C^\infty(M)$ 使得 $\mu\omega$ 为恰当的 1 形式，则称 μ 为 ω 的一个积分因子。证明：ω 有积分因子的充要条件是 $\mathrm{d}\,\omega \wedge \omega = 0$。

证明. 设 $\mu\omega = \mathrm{d}\, f$，则

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{\mu}\mathrm{d}\, f \\
\mathrm{d}\,\omega &= \mathrm{d}(\frac{1}{\mu}) \wedge \mathrm{d}\, f \\
&= \mathrm{d}(\frac{1}{\mu}) \wedge (\mu\omega) \\
\Longrightarrow \mathrm{d}\,\omega \wedge \omega &= 0
\end{aligned}$$

反之，$\mathrm{d}\,\omega \wedge \omega = 0$ 说明存在光滑函数 μ，使得 $\mathrm{d}\,\omega = \mu\omega$。 □

习题 21. 李群 G 的任意右不变向量场 X 都是完备的，即它生成的流 $\varphi_t = L_{\exp(tX)}$ 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 都有定义（请特别注意：右不变向量场生成的流是左移动）。

证明. 考虑 $v \in T_1G$ 对应的单参数子群 $\exp(tv)$。

则 $\varphi_t(a) = \exp(tv)a$ 相应的向量场为

$$X_{(a)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\varphi_t(a)\bigg|_{t=0} = R_{a*}v$$

故满足 $\dot{\gamma}(0) = X_1$ 的积分曲线 $\gamma(t)$ 存在，设它的最大存在区间为 $[0, \varepsilon)$，定义

$$\widetilde{\gamma} = \begin{cases} \gamma(t) & t \in [0, \varepsilon) \\ \gamma(t - \frac{\varepsilon}{2})\gamma(\frac{\varepsilon}{2}) & t \in [\varepsilon, \frac{3\varepsilon}{2}) \end{cases}$$

则 $\widetilde{\gamma}(t)$ 也是 X 的积分曲线：

由

$$\dot{\widetilde{\gamma}}(t) = R_{\gamma(\frac{\varepsilon}{2})*}\dot{\gamma}(t - \frac{\varepsilon}{2}) = R_{\gamma(\frac{\varepsilon}{2})*}X(\gamma(t - \frac{\varepsilon}{2}))$$

及右不变性，得证。 □

习题 22. 证明李群 G 的指数映射 $\exp\colon T_1G \to G$ 是光滑映射。

证明. 只须证明存在 $T_1G \times G$ 上的向量场 Y，它的流为 $\phi_t(v, a) = (v, \exp(tv)a)$，从而 $\exp$ 可写成光滑映射的复合 $\pi_2(\phi_1(v, 1))$。注意此时不能直接验证 ϕ 是流，因为还未证明指数映射是李群同态。

注意到 $\exp(tv) = \gamma(t)$，其中 $\gamma(t)$ 是由 $\dot{\gamma}(0) = v$ 决定的单参数子群，于是

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\phi_t(v, a)\bigg|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(v, \exp(tv)a)\bigg|_{t=0} \\
&= (0, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\exp(tv)a\bigg|_{t=0}) \\
&= (0, R_{a*1}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\gamma(t)\bigg|_{t=0})) \\
&= (0, R_{a*1}v) \in T_v(T_1G) \times T_aG \cong T_{(v,a)}(T_1G \times G)
\end{aligned}$$

故令 $Y_{(v,a)} = (0, R_{a*1}v)$ 即可。 □

习题 23. 证明指数映射满足等式 $x\exp(v)x^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_x v), \forall v \in T_1G, x \in G$，并由此说明 $\mathrm{tr}(\exp(v)) \geqslant 2, \forall v \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$。

提示. 考虑 $v \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 的相似标准型。 □

证明. 设 $\gamma(t)=x\exp(tv)x^{-1}, \widetilde{\gamma}(t)=\exp(\mathrm{Ad}_x(tv))$，则它们都是单参数子群。由于

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(0)&=(L_xR_{x^{-1}})_{*1}v\\ \dot{\widetilde{\gamma}}(0)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\exp((L_xR_{x^{-1}})_{*1}tv)\Big|_{t=0}\\ &=(L_xR_{x^{-1}})_{*1}v\end{aligned}$$

故 $\gamma(t)=\widetilde{\gamma}(t)$。

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})&=\{v\in\mathbb{R}^{2\times 2}\mid \mathrm{tr}(v)=0\}\\ \mathrm{tr}(\exp(v))&=\mathrm{tr}(x\exp(v)x^{-1})\\ &=\mathrm{tr}(\exp(\mathrm{Ad}_x\,v))\\ &=\mathrm{tr}(\exp(xvx^{-1}))\end{aligned}$$

特别地，可选取 x 使得 xvx^{-1} 化为相似下的标准型

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\exp\begin{pmatrix}\lambda & \\ & -\lambda\end{pmatrix})&=\mathrm{tr}(\begin{pmatrix}e^{\lambda} & \\ & e^{-\lambda}\end{pmatrix})=2\cosh\lambda\geqslant 2\\ \mathrm{tr}(\exp\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ & 0\end{pmatrix})&=\mathrm{tr}(\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ & 1\end{pmatrix})=1+1\geqslant 2\end{aligned}$$

□

习题 24. 考虑 $SL(2,\mathbb{C})$ 中形如 $\begin{pmatrix}x\sec t & y\tan t\\ \bar{y}\tan t & \bar{x}\sec t\end{pmatrix}$ 的所有矩阵，其中 $t\in(0,\frac{\pi}{2}), x,y\in\mathbb{C}$，且 $|x|=|y|=1$。证明这些矩阵构成一个李群 G，并求 T_1G 的一组基 e_1,e_2,e_3。

证明. 只须证 G 对乘法封闭：

$$\begin{pmatrix}p & q\\ \bar{q} & \bar{p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pa+q\bar{b} & q\bar{a}+pb\\ \bar{q}a+\bar{p}\bar{b} & \bar{p}\bar{a}+\bar{q}b\end{pmatrix}$$

令 $x=y=1$，则 $e_1=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$；

$t=0$，则 $e_2=\begin{pmatrix}i & \\ & -i\end{pmatrix}$；

$x=1, t=\frac{\pi}{4}$，则 $e_3=\begin{pmatrix} & i\\ -i & \end{pmatrix}$。 □

习题 25. 设 $D\overset{\text{def}}{=}\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$。考虑上题中的李群 G 在 D 上的左作用

$$\begin{pmatrix}x\sec t & y\tan t\\ \bar{y}\tan t & \bar{x}\sec t\end{pmatrix}.z\overset{\text{def}}{=}\frac{zx\sec t+y\tan t}{z\bar{y}\tan t+\bar{x}\sec t}$$

求相应于 e_1,e_2,e_3 的基本向量场。

证明. 设相应于 e_1, e_2, e_3 的基本向量场为 X, Y, Z，则

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\exp(te_1).z\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{z\cosh t+\sinh t}{z\sinh t+\cosh t}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{(1-z^2)e^t}{(z\sinh t+\cosh t)^2}\Big|_{t=0} \\
&= 1-z^2 \\
Y(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\exp(te_2).z\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{ze^{it}}{e^{-it}}\Big|_{t=0} \\
&= -2z\sin 2t+2zi\cos 2t|_{t=0} \\
&= 2zi \\
Z(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\exp(te_3).z\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{z\cos t+i\sin t}{-zi\sin t+\cos t}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{i(1-z^2)(\cos t^2-\sin t^2)}{(-zi\sin t+\cos t)^2}\Big|_{t=0} \\
&= i(1-z^2)
\end{aligned}$$

□

注. 计算 $\exp\begin{pmatrix} & z \\ z & \end{pmatrix}$。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!} &= \cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2} \\
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2} \\
\exp\begin{pmatrix} & z \\ z & \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cosh z & \sinh z \\ \sinh z & \cosh z\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Index