拓扑学（I）复习题

Made By ***Gau Syu***

最近更新： 2013 年 1 月 6 日

Preface

这是 2012 年下半年南开大学数学科学学院研究生课程“**拓扑学（I）**”的期末复习材料及复习题解答，基于本人和一些同学的笔记、资料和解答整理而成，如有疏漏，还望海涵。

该课程由**王向军**老师讲授。

目录

第一部分　知识略览及补充

1　同伦与基本群

1.1　基本知识

定义 1. 子集 $A \subset X$ 称为 X 的收缩核，如果含入映射 $i\colon A \longrightarrow X$ 存在左逆 $j\colon X \longrightarrow A$，即 $j \circ i = \mathrm{id}_A$；如果还有 $i \circ j \simeq \mathrm{id}_X$，则称为形变收缩核；若还有 $i \circ j \simeq_A \mathrm{id}_X$，则称为强形变收缩核。

定义 2. 空间偶的映射 $f\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ 是指映射 $f\colon X \longrightarrow Y$ 满足 $f(A) \subset B$。空间偶的映射的伦移是指空间偶的映射 f, g 之间的伦移 $F\colon X \times I \longrightarrow Y$，满足 $F(A \times I) \subset B$。

注. 即使 $X \simeq Y, A \simeq B$ 也不一定有 $(X, A) \simeq (Y, B)$。例如题目（27）。

命题 3 (基本群的直积)**.** $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$。

1.2　Van Kampen 定理及其推论

定理 4 (Van Kampen 定理)**.** 设 U, V 是空间 (X, x_0) 的两个开集，满足 $U \cup V = X, x_0 \in U \cap V$，并且 $U \cap V, U, V$ 都是道路连通的。则

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$$

其中 N 是 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ 中所有 $i_1([\sigma])^{-1} \circ i_2([\sigma])$ 生成的正规子群。这里 i_1, i_2 分别是由含入映射 $U \cap V \hookrightarrow U$ 和 $U \cap V \hookrightarrow V$ 诱导的同态。

推论 5. 若 V 是单连通的，则

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0)/\langle \mathrm{Im}\, i_1 \rangle$$

推论 6. 设 X 道路连通，Cf 是映射 $f\colon X \longrightarrow Y$ 的映射锥（定义见后文），则

$$\pi_1(Cf, x_0) \cong \pi_1(Y)/\langle \mathrm{Im}\, f_* \rangle$$

推论 7. 设 X 道路连通，$\widetilde{\sigma}\colon (S^1, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ 对应于道路 $\sigma\colon I \longrightarrow S^1 \longrightarrow X$，则空间 $Y = X \cup_{\widetilde{\sigma}} e^2$ 的基本群为 $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0)/\langle [\sigma] \rangle$。

2　同调

2.1　简约同调群

定义 8. 设 X 是拓扑空间，从 X 到单点集 Pt 唯一的映射诱导同调群的同态 $H_q(X) \longrightarrow H_q(\mathrm{Pt})$，这一同态的核称为 X 的 q 维简约同调群，记作 $\widetilde{H}_q(X)$。

由于单点集除 0 维外的各维同调群平凡，故有

命题 9. 若 X 非空，则当 $q > 0$ 时，$\widetilde{H}_q(X) = H_q(X)$。此外 $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$。

证明. 考虑映射 $f\colon X \longrightarrow \mathrm{Pt}$ 和 $g\colon \mathrm{Pt} \longrightarrow X$ 所诱导的同态

$$f_*\colon H_0(X) \longrightarrow H_0(\mathrm{Pt}),\ g_*\colon H_0(\mathrm{Pt}) \longrightarrow H_0(X)$$

由于 $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{Pt}}$，故 $f_* \circ g_* = \mathrm{id}_{H_0(\mathrm{Pt})}$，从而由分裂引理得 $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus H_0(\mathrm{Pt})$。 □

2.2 低维同调群

定理 10 (同调群的直和). 设 $X=\cup X_i$ 是 X 的道路连通分支分解，则其同调群有直和分解：

$$H_*(X)=\bigoplus H_*(X_i)$$

证明. 以 Σ_X 记 X 中全体奇异单形之集合，则它可分解为 $\Sigma=\bigsqcup\Sigma_{X_i}$，因而有直和分解：

$$S_*(X)=\bigoplus S_*(X_i)$$

于是得到所需结论。 □

命题 11. 拓扑空间 X 是道路连通的，则 $H_0(X)=\mathbb{Z}$。

推论 12 (0 维同调群的几何意义). 拓扑空间 X 恰有 n 个道路连通分支，当且仅当

$$H_0(X)=\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{n\text{个}\mathbb{Z}}$$

定理 13 (1 维同调群与基本群的关系). 若 X 是道路连通的拓扑空间，则 $H_1(X)$ 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的交换化。

2.3 相对同调群

注. 相对同调群的简约同调群与之完全一致，而不仅是在 $q>0$ 时。

定理 14 (相对同调群的长正合列). 设 (X,A) 是空间偶，则下面的同调序列正合：

$$\cdots\longrightarrow H_q(A)\xrightarrow{i_*}H_q(X)\xrightarrow{j_*}H_q(X,A)\xrightarrow{\delta_q}H_{q-1}(A)\longrightarrow\cdots$$
$$\cdots\longrightarrow H_1(X,A)\xrightarrow{\delta_1}H_0(A)\xrightarrow{i_*}H_0(X)\xrightarrow{j_*}H_0(X,A)\longrightarrow 0$$

命题 15 (相对同调群的长正合列的自然性). 若 $f\colon (X,A)\longrightarrow(Y,B)$ 是空间偶的映射，则下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & H_q(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & H_q(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & H_{q-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(B) \arrow[r] & H_q(Y) \arrow[r] & H_q(Y,B) \arrow[r] & H_{q-1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

定理 16 (切除定理). 设 (X,A) 是一个空间偶，若子集 $U\subset A$ 满足 $\overline{U}\subset\operatorname{Int}A$，则含入映射 $i\colon(X\backslash U,A\backslash U)\longrightarrow(X,A)$ 诱导相对同调群的同构

$$i_*\colon H_*(X\backslash U,A\backslash U)\longrightarrow H_*(X,A)$$

推论 17. 设 $V\subset U\subset A$，其中 $\overline{V}\subset\operatorname{Int}A$，且 $(X\backslash U,A\backslash U)$ 是 $(X\backslash V,A\backslash V)$ 的形变收缩核，则

$$H_*(X\backslash U,A\backslash U)\xrightarrow{i_*}H_*(X\backslash V,A\backslash V)\xrightarrow{j_*}H_*(X,A)$$

是同构。

2.4 Mayer-Vietoris 序列

定义 18. 称 (X,A,B) 为正合三元组，如果 $A\cup B=X$，且

$$i_*\colon H_*(A,A\cap B)\longrightarrow H_*(X,B),\ j_*\colon H_*(B,A\cap B)\longrightarrow H_*(X,A)$$

都是切除同构。

定理 19 (Mayer-Vietoris 序列)**.** 若 (X,A,B) 是正合三元组，则有同调群的长正合列：

$$\cdots\longrightarrow H_q(A\cap B)\xrightarrow{(i_1,i_2)}H_q(A)\oplus H_q(B)\xrightarrow{j_1-j_2}H_q(X)\xrightarrow{\delta}H_{q-1}(A\cap B)\longrightarrow\cdots$$
$$\cdots\longrightarrow H_1(X)\xrightarrow{\delta}H_0(A\cap B)\xrightarrow{(i_1,i_2)}H_0(A)\oplus H_0(B)\xrightarrow{j_1-j_2}H_0(X)\longrightarrow 0$$

命题 20 (Mayer-Vietoris 序列的自然性)**.** 若 $f\colon(X,A,B)\longrightarrow(Y,C,D)$ 是正合三元组的映射，即 $f(A)\subset C, f(B)\subset D$，则下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(A\cap B) \arrow[r]\arrow[d,"f_*"'] & H_q(A)\oplus H_q(B) \arrow[r]\arrow[d,"f_*\oplus f_*"'] & H_q(X) \arrow[r]\arrow[d,"f_*"'] & H_{q-1}(A\cap B) \arrow[r]\arrow[d,"f_*"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(C\cap D) \arrow[r] & H_q(C)\oplus H_q(D) \arrow[r] & H_q(Y) \arrow[r] & H_{q-1}(C\cap D) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

2.5 映射锥的同调序列

定义 21. 映射 $f\colon X\longrightarrow Y$ 的映射锥形Cf 定义如下：

$$Cf\overset{\text{def}}{=}Y\cup_f CX=Y\sqcup CX/\sim$$

其中的等价关系是 $f(x)\sim(x,0)$。

此外再定义：

$$C_-f\overset{\text{def}}{=}Y\cup_f(X\times[0,\frac{1}{2}])$$
$$C_+f\overset{\text{def}}{=}X\times[\frac{1}{2}]/(X\times\{1\})$$

命题 22. (Cf,C_-f,C_+f) 是正合三元组。

证明. 由切除定理推论易得。 □

定理 23 (映射锥的同调序列)**.** 设 $f\colon X\longrightarrow Y$ 是拓扑空间的映射，则有同调群的长正合列：[1]

$$\cdots\longrightarrow\widetilde{H}_q(X)\xrightarrow{f_*}\widetilde{H}_q(Y)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_q(Cf)\xrightarrow{\delta}\widetilde{H}_{q-1}(X)\longrightarrow\cdots$$

其中 i_* 是从 Y 到 Cf 的嵌入映射诱导的同态。

证明. 由 Mayer-Vietoris 序列即得。 □

推论 24. 设 $A\subset X$，则有同调群的长正合列：

$$\cdots\longrightarrow\widetilde{H}_q(A)\xrightarrow{f_*}\widetilde{H}_q(X)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_q(X\cup CA)\xrightarrow{\delta}\widetilde{H}_{q-1}(A)\longrightarrow\cdots$$

[1]用简约同调群只是为了写得少一点。

证明. 取 f 为含入映射 $A \hookrightarrow X$ 即可。 □

命题 25 (映射锥的同调序列的自然性)**.** 若有拓扑空间映射的交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

则下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & \widetilde{H}_q(X) & \longrightarrow & \widetilde{H}_q(Y) & \longrightarrow & \widetilde{H}_q(Cf) & \longrightarrow & \widetilde{H}_{q-1}(X) & \longrightarrow \cdots \\ & {\scriptstyle g_*}\downarrow & & {\scriptstyle h_*}\downarrow & & {\scriptstyle C_*}\downarrow & & {\scriptstyle g_*}\downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & \widetilde{H}_q(X') & \longrightarrow & \widetilde{H}_q(Y') & \longrightarrow & \widetilde{H}_q(Cf') & \longrightarrow & \widetilde{H}_{q-1}(X) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

2.6 粘贴胞腔的同调群

定理 26. 设 n 维胞腔 D^n 通过映射 f 粘贴到拓扑空间 X 上，即 $D^n \supset S^{n-1} \xrightarrow{f} X$，则

1) $\widetilde{H}_q(X \cup_f D^n) \cong \widetilde{H}_q(X)$，如果 $q \neq n, n-1$。

2) 有如下正合列：

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n(X \cup_f D^n) \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_{n-1}(X) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_{n-1}(X \cup_f D^n) \longrightarrow 0$$

证明. 由于 $CS^{n-1} \cong D^n$，故 $X \cup_f D^n = Cf$，然后用映射锥的同调序列即得。 □

2.7 映射度

定义 27. 对于映射 $f\colon S^n \longrightarrow S^n$，由于 $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$，设 $[a]$ 是其生成元，则存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使 $f_*([a]) = k[a] \in H_n(S^n)$。$k$ 称为 f 的映射度，记作 $\deg f = k$。

命题 28. *1)* 若 $c\colon S^n \longrightarrow S^n$ 是常值映射，则 $\deg c = 0$。

2) 若 $f \simeq g\colon S^n \longrightarrow S^n$，则 $\deg f = \deg g$；

3) 若 $f, g\colon S^n \longrightarrow S^n$ 是两个映射，则 $\deg g \circ f = \deg g \cdot \deg f$；

4) 若 $f\colon S^n \longrightarrow S^n$ 是同伦等价，则 $\deg f = \pm 1$。

第二部分　复习题

题目 1　试举例说明空间可以是连通的但不是道路连通的。

证明. 在 $\mathbb{R}^2$ 中考虑 $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,1]\}, B = \{(0,y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$，则 $\overline{A} = A \cup B$。显然 A 是连通的，于是连通集的闭包也是连通的，故 $A \cup B$ 是连通的。但它不是道路连通的：否则若存在道路连接 $(1, \sin 1)$ 和 B 上某点，则取该道路与 B 的第一个交点 $(0,a)$ 为端点做成一条道路 $f, f(0) = (0,a), f(1) = (1, \sin 1)$，然而取 $t_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$，则 $t_n \to 0$ 但 $f(t_n) = (t_n, (-1)^n)$ 不收敛，与 f 连续矛盾。 □

题目 2　记 $\mathrm{SO}(n)$ 为所有行列式等于 1 的 n 阶正交矩阵构成的拓扑空间。试证明 $\mathrm{SO}(n)$ 是道路连通的。

证明. 对任何 $A \in \mathrm{SO}(n)$，存在 $v \in \mathrm{O}(n)$ 使得 $A = v\Lambda v^T$，其中 Λ 是标准型：

$$\begin{pmatrix} I_{n-2k} & & & \\ & M_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{pmatrix}$$

其中 $M_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, \theta_i \in [0, 2\pi), i = 1, 2, \cdots, k$。

于是可构做 $\mathrm{SO}(n)$ 上的道路 σ 为

$$\sigma(t) = v \begin{pmatrix} I_{n-2k} & & & \\ & M_1(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k(t) \end{pmatrix} v^T$$

其中 $M_i(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i t & \sin\theta_i t \\ -\sin\theta_i t & \cos\theta_i t \end{pmatrix}, i = 1, 2, \cdots, k$。

则由于 $M_i(0) = I_2, M_i(1) = M_i, i = 1, 2, \cdots, k$，所以 $\sigma(0) = I_n, \sigma(1) = A$，即 σ 是连接 I_n 和 A 的道路。从而对 $\mathrm{SO}(n)$ 中任何两点 A, B，设其各自连接 I 的道路为 σ_A, σ_B，则连接 A, B 的道路 σ 为：

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_A(1-2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma_B(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

□

题目 3　证明：实直线 $\mathbb{R}$ 不与 2 维平面 $\mathbb{R}^2$ 同胚。

证明. 若存在同胚映射

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}, f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$$

并且 $f(0)=x_0$，则考虑 $X=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 和 $Y=\mathbb{R}^2\backslash\{x_0\}$ 以及映射：

$$f|_X : X \longrightarrow Y, g|_Y : Y \longrightarrow X$$

显然 $g|_Y \circ f|_X = \mathrm{id}_X, f|_X \circ g|_Y = \mathrm{id}_Y$，于是 X 与 Y 同胚。然而 X 不连通，而 Y 是相交道路连通集的并故而连通。由于连通性是拓扑不变性，故矛盾。故 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 不同胚。 □

题目 4 试证明：3 维实射影空间 $\mathbb{R}\mathbf{P}^3$ 与 $\mathrm{SO}(3)$ 是同胚的。

证明. 首先

$$\mathrm{SO}(3)=\frac{\{(v,\theta)\mid v\in S^2,\theta\in[0,\pi]\}}{(v,\pi)\sim(-v,\pi),(u,0)\sim(v,0)}$$

考虑 $X=D^3/\sim'$，这里的等价关系是粘合 D^3 的表面 S^2 上的对径点。显然有同胚

$$\mathrm{SO}(3)\xleftrightarrow{\cong} X$$
$$(v,\theta)\longleftrightarrow(v,\frac{\theta}{\pi})$$

而 $X\cong\mathbb{R}\mathbf{P}^3$。故 $\mathbb{R}\mathbf{P}^3\cong\mathrm{SO}(3)$。 □

题目 5 证明：$n+1$ 维欧式空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中挖去一个点 $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ 与球面 S^n 同伦等价。

证明. 构做映射

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto \frac{x}{||x||} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g\colon\ S^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

由于 $x\neq 0$，故映射是连续的。进一步有

$$f\circ g(x)=f(x)=\frac{x}{||x||}=x$$
$$g\circ f(x)=g(\frac{x}{||x||})=\frac{x}{||x||}$$

所以 $f\circ g=\mathrm{id}_{S^n}$。

构做伦移 $H\colon(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})\times I\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ 如下

$$H(x,t)=tx+(1-t)\frac{x}{||x||}$$

则

$$H(x,0)=\frac{x}{||x||}=g\circ f(x)$$
$$H(x,1)=x=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}}$$

所以 $g\circ f\simeq\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}}$。于是 $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}\simeq S^n$。 □

题目 6 记 S^n 为 n 维标准球面。如果映射 $f\colon S^n\longrightarrow S^n$ 满足：对任何 $x\in S^n, f(x)\neq x$。证明：f 同伦于对径映射 $\beta\colon S^n\longrightarrow S^n$。对任何 $x\in S^n,\beta(x)=-x$。

证明. 构做伦移 $H\colon S^n \times I \longrightarrow S^n$ 如下

$$H(x,t)=\frac{(1-t)f(x)+t\beta(x)}{||(1-t)f(x)+t\beta(x)||}$$

注意到 $||(1-t)f(x)+t\beta(x)||=0$ 当且仅当 $(1-t)f(x)=tx$ 而由于 $||f(x)||=||x||=1$，这就要求 $1-t=t$ 即 $t=\frac{1}{2}$。然而此时分母为 $\frac{1}{2}||f(x)-x||$，由条件又有 $f(x)\neq x$，故分母总不为零，此伦移定义良好。因为

$$H(x,0)=f(x), H(x,1)=\beta(x)$$

所以 $f\simeq\beta$。 □

题目 7 记 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 为所有 n 阶实可逆矩阵组成的 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间。证明：$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 不是道路连通的。

证明. 构做映射

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \det A \end{aligned}$$

则由于 f 的值域 $\operatorname{Im} f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 是不连通的，故 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 不连通，从而不道路连通。 □

题目 8 记 $\mathrm{SO}(2)$ 为行列式等于 1 的 2 阶正交矩阵构成的拓扑空间，$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 为 2 维实射影平面。求 $\mathrm{SO}(2)\times\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 的基本群 $\pi_1(\mathrm{SO}(2)\times\mathbb{R}\mathbf{P}^2,x_0)$。

证明. 注意到 $\forall A\in\mathrm{SO}(2)$，$A$ 可以写成 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，故有同胚

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(2) &\longleftrightarrow S^1 \\ \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} &\longleftrightarrow (\cos\theta,\sin\theta) \end{aligned}$$

于是 $\pi_1(\mathrm{SO}(2),x_0)=\mathbb{Z}$。

而 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 可看成赤道 S^1 通过映射 2 粘合上半球面粘合对径点这个拓扑空间（同胚于 e^2），其中

$$2\colon I\longrightarrow S^1\longrightarrow S^1/\sim\cong S^1$$

代表 $\pi_1(S^1,x_0)\cong\mathbb{Z}$ 中的 2，从而 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2=S^1\cup_2 e^2$，所以由 Van Kampen 定理的推论7得

$$\pi_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,x_0)\cong\pi_1(S^1,x_0)/\langle 2\rangle=\mathbb{Z}/2$$

所以由定理3，$\pi_1(\mathrm{SO}(2)\times\mathbb{R}\mathbf{P}^2,x_0)\cong\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2$。 □

题目 9 求：在环面 $T=S^1\times S^1$ 中挖去一个三角形所得空间 X 的基本群 $\pi_1(X,x_0)$。

证明. 考虑空间 $T'=I\times I/\sim$，其中等价关系定义为 $(x,0)\sim(x,1),(0,y)\sim(1,y)$，易知 $T\cong T'$。记 $\partial T'=\{[x,y]\in X\mid xy=0\}$ 为 T' 的边界，则由于 $\partial(I\times I)$ 是 $I\times I$ 中挖去一个三角形所得空间 Y 的形变收缩核，故 $\partial T'$ 是 T' 挖去一个三角形所得空间 X' 的形变收缩核。由于 $\partial T'\cong S^1\vee S^1$，故 $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(X',x_0)\cong\pi_1(\partial T',x_0)\cong\pi_1(S^1\vee S^1,x_0)=F(a,b)$。 □

题目 10 试构做拓扑空间 X 使 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \times X$ 的基本群为 $\pi_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \times X, x_0) = \mathbb{Z}/6$。

证明. 由于题目（8）中已求得 $\pi_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2, x_0) \cong \mathbb{Z}/2$，又由于 $\mathbb{Z}/6 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$，故只须构做 X 使得 $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}/3$。

为此考虑 $\widetilde{\sigma}\colon (S^1, x_0) \longrightarrow (S^1, x_0)$ 如下（这里将 S^1 视为复平面上的单位圆周 $\{e^{2\pi ti} \mid t \in [0,1)\}$）：

$$\widetilde{\sigma}(e^{2\pi ti}) = e^{6\pi ti}$$

则道路 $\sigma\colon I \longrightarrow S^1 \longrightarrow S^1$ 是绕圆周 3 圈，即 $\pi_1(S^1, x_0)$ 中的 3，于是令 $X = S^1 \cup_{\widetilde{\sigma}} e^2$，则 $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0)/\langle 3\rangle = \mathbb{Z}/3$。 □

题目 11 试构做拓扑空间 X 使其基本群 $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}/12$。

证明. 考虑 $\widetilde{\sigma}\colon (S^1, x_0) \longrightarrow (S^1, x_0)$ 如下：

$$\widetilde{\sigma}(e^{2\pi ti}) = e^{24\pi ti}$$

则道路 $\sigma\colon I \longrightarrow S^1 \longrightarrow S^1$ 是绕圆周 12 圈，即 $\pi_1(S^1, x_0)$ 中的 12，于是令 $X = S^1 \cup_{\widetilde{\sigma}} e^2$，则 $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0)/\langle 12\rangle = \mathbb{Z}/12$。 □

题目 12 设 $n > 1$。证明：n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 不与 $n+1$ 维欧式空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 同胚。

证明. 反之，若 $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n+1}$，并记同胚映射为 f，则与题目（3）同样的讨论可知 $\mathbb{R}^n\backslash\{x_0\} \cong \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{f(x_0)\}$，所以 $H_*(\mathbb{R}^n\backslash\{x_0\}) \cong H_*(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{f(x_0)\})$。然而 $\mathbb{R}^n\backslash\{x_0\} \cong S^{n-1}, \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{f(x_0)\} \cong S^n$，故 $H_n(\mathbb{R}^n\backslash\{x_0\}) = 0$，但 $H_n(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{f(x_0)\}) = \mathbb{Z}$，故矛盾，所以 $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^{n+1}$。 □

题目 13 证明：$\mathrm{SO}(3)$ 不与 $S^1 \vee S^1$ 同胚。

证明. 由题目（4），$\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{R}\mathbf{P}^3$，所以 $\pi_1(\mathrm{SO}(3), x_0) \cong \pi_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^3, x_0)$

下面计算 $\mathbb{R}\mathbf{P}^3$ 的基本群：

由于 $\mathbb{R}\mathbf{P}^3 \cong \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \cup_p e^3$，其中 $p\colon S^2 \longrightarrow S^2/\sim \cong \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 是粘合对径点映射，故

$$\pi_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^3, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2, x_0)/\langle \operatorname{Im} p_*\rangle = \mathbb{Z}/2$$

可见然而 $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) = F(a,b) \neq \mathbb{Z}/2$，故 $\mathrm{SO}(3)$ 不与 $S^1 \vee S^1$ 同胚。 □

题目 14 求 n 维球面与 m 维球面一点和 $S^n \vee S^m$ 的各维同调群。

证明. $(S^n \vee S^m, S^n, S^m)$ 是正合三元组，故有 Mayer-Vietoris 序列：

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_q(\mathrm{Pt}) \xrightarrow{(i_1,i_2)} \widetilde{H}_q(S^n) \oplus \widetilde{H}_q(S^m) \xrightarrow{j_1 - j_2} \widetilde{H}_q(S^n \vee S^m) \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}_{q-1}(\mathrm{Pt}) \longrightarrow \cdots$$

由于 $\widetilde{H}_q(\mathrm{Pt}) = 0$，故 $\widetilde{H}_q(S^n \vee S^m) \cong \widetilde{H}_q(S^n) \oplus \widetilde{H}_q(S^m)$。利用命题9回到通常的同调群有

$$H_q(S^n \vee S^m) = \delta_q^n \mathbb{Z} \oplus \delta_q^m \mathbb{Z} \oplus \delta_q^0 \mathbb{Z}$$

□

题目 15 求两个射影空间 $\mathbb{R}\mathbf{P}^3$ 的一点和 $\mathbb{R}\mathbf{P}^3 \vee \mathbb{R}\mathbf{P}^3$ 的各维同调群。

证明. $(\mathbb{R}\mathbf{P}^3\vee\mathbb{R}\mathbf{P}^3,\mathbb{R}\mathbf{P}^3,\mathbb{R}\mathbf{P}^3)$ 是正合三元组，故有 Mayer-Vietoris 序列：

$$\cdots\longrightarrow\widetilde{H}_q(\mathrm{Pt})\xrightarrow{(i_1,i_2)}\widetilde{H}_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^3)\oplus\widetilde{H}_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^3)\xrightarrow{j_1-j_2}\widetilde{H}_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^3\vee\mathbb{R}\mathbf{P}^3)\xrightarrow{\delta}\widetilde{H}_{q-1}(\mathrm{Pt})\longrightarrow\cdots$$

由于 $\widetilde{H}_q(\mathrm{Pt})=0$，故 $\widetilde{H}_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^3\vee\mathbb{R}\mathbf{P}^3)\cong\widetilde{H}_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^3)\oplus\widetilde{H}_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^3)$。从题目（16）求得 $\widetilde{H}_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^3)$。利用命题9回到通常的同调群有

$$H_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^3\vee\mathbb{R}\mathbf{P}^3)=\begin{cases}\mathbb{Z} & q=0\\ \mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2 & q=1\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & q=3\\ 0 & q\neq 0,1,3\end{cases}$$

□

题目 16 求 SO(3) 的各维同调群。

证明. 由于 $\mathrm{SO}(3)\cong\mathbb{R}\mathbf{P}^3$，故只须计算 $\mathbb{R}\mathbf{P}^3$ 的同调群。

首先，$\mathbb{R}\mathbf{P}^1\cong S^1$，于是 $\widetilde{H}_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^1)=0,(q\neq 1),\widetilde{H}_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^1)=\mathbb{Z}$。

注意到 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2\cong\mathbb{R}\mathbf{P}^1\cup_f D^2$，故由定理26得到正合列：

$$0\longrightarrow\widetilde{H}_2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)\xrightarrow{\delta}\widetilde{H}_1(S^1)\xrightarrow{f_*}\widetilde{H}_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^1)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)\longrightarrow 0$$

注意到 f 诱导的基本群映射将 S^1 中的单位闭路映到 $\pi_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^1,x_0)$ 中的 2，于是 f_* 是单射。由上面的正合列可知：

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)&\cong\operatorname{Im}\delta=\ker f_*=0\\ \ker i_*&=\operatorname{Im}f_*=2\mathbb{Z}\\ \widetilde{H}_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)&=\operatorname{Im}i_*\cong\widetilde{H}_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^1)/\ker i_*=\mathbb{Z}/2\end{aligned}$$

所以

$$\widetilde{H}_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)=\begin{cases}\mathbb{Z}/2 & q=1\\ 0 & q\neq 1\end{cases}$$

由于 $\mathbb{R}\mathbf{P}^3\cong\mathbb{R}\mathbf{P}^2\cup_f D^3$，故如法炮制得到正合列：

$$0\longrightarrow\widetilde{H}_3(\mathbb{R}\mathbf{P}^3)\xrightarrow{\delta}\widetilde{H}_2(S^2)\xrightarrow{f_*}\widetilde{H}_2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_2(\mathbb{R}\mathbf{P}^3)\longrightarrow 0$$

由于 $\widetilde{H}_2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)=0$，故 $\widetilde{H}_3(\mathbb{R}\mathbf{P}^3)=\widetilde{H}_2(S^2)=\mathbb{Z}$ 且又由 $\widetilde{H}_1(S^2)=0$ 得到 $\widetilde{H}_2(\mathbb{R}\mathbf{P}^3)=0$。其余维数则有 $\widetilde{H}_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^3)\cong H_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)$。利用命题9回到通常的同调群有

$$H_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^3)=\begin{cases}\mathbb{Z}/2 & q=1\\ \mathbb{Z} & q=0,3\\ 0 & q\neq 0,1,3\end{cases}$$

□

证明. 计算 $H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^3)$ 时也可由题目（13）以及 1 维同调群是基本群的交换化得到。 $\square$

题目 17 试利用基本群证明 SO(2) 不与 SO(3) 同胚。

证明. 因为 $\mathrm{SO}(2) \cong S^1$，故 $\pi_1(\mathrm{SO}(2), x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$。而由题目（13），$\pi_1(\mathrm{SO}(3), x_0) = \mathbb{Z}/2$。所以 $\pi_1(\mathrm{SO}(2), x_0) \ncong \pi_1(\mathrm{SO}(3), x_0)$，故 SO(2) 不与 SO(3) 同胚。 $\square$

题目 18 设 A, B 是 n 维球面 S^n 的两个道路连通的开集，$n > 1, A \cup B = S^n$。试利用 0 维同调群证明：$A \cap B$ 是道路连通的。

证明. (S^n, A, B) 是正合三元组，故有 Mayer-Vietoris 序列：

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_1(S^n) \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}_0(A \cap B) \xrightarrow{(i_1, i_2)} \widetilde{H}_0(A) \oplus \widetilde{H}_0(B) \xrightarrow{j_1 - j_2} \widetilde{H}_0(S^n) \longrightarrow 0$$

由于 $n > 1$，故 $\widetilde{H}_1(S^n) = 0$；由于 A, B, S^n 道路连通，故 $\widetilde{H}_0(A) = \widetilde{H}_0(B) = \widetilde{H}_0(S^n) = 0$。从而 $\widetilde{H}_0(A \cap B) = 0$，即 $H_0(A \cap B) = \mathbb{Z}$，由 0 维同调群的几何意义，$A \cap B$ 道路连通。 $\square$

题目 19 证明：任何连续映射 $f \colon D^n \longrightarrow D^n$ 都有不动点，即存在 $x_0 \in D^n$ 使 $f(x_0) = x_0$。其中 $D^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \sum x_i^2 \leqslant 1\}$ 为 n 维圆盘。

证明. 若不然，可构造 $g \colon D^n \longrightarrow S^{n-1}$ 如下：

$$g(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{x - f(x)}{||x - f(x)||}$$

则 $g_0 = g|_{S^{n-1}}$ 满足 $g_0(x) \neq -x$（若不然，有 $x_0 \in S^{n-1}$ 使 $g_0(x_0) = -x_0$，则 $f(x_0) = x_0(1 + ||x_0 - f(x_0)||)$，但左边点的范数不大于 1 而右边则大于 1，矛盾。），由题目（22），它同伦于恒等映射 $\mathrm{id}_{S^{n-1}}$。由于 $g_0 = g \circ i$ 其中 $i \colon S^{n-1} \longrightarrow D^n$ 是零伦的，故 g_0 是零伦的，从而 $\mathrm{id}_{S^{n-1}}$ 是零伦的，于是其所诱导的自同构 $\mathrm{id}_* \colon H_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$ 与常值映射所诱导的平凡同态相同。而 $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$，故其自同构不可能平凡，故矛盾，从而映射 $f \colon D^n \longrightarrow D^n$ 有不动点。 $\square$

证明. 若不然，可构造 $g \colon D^n \longrightarrow S^{n-1}$ 为把 x 映到射线 $\overrightarrow{f(x), x}$ 与 S^{n-1} 之交点，则 $g \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ 其中 $i \colon S^{n-1} \longrightarrow D^n$ 是含入映射。于是它们诱导出同调群的同态 $g_* \circ i_* = \mathrm{id}_{H_q(S^{n-1})}$。

$$H_q(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_q(D^n) \xrightarrow{g_*} H_q(S^{n-1})$$

然而当 $q = n - 1$ 时，$H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}, H_{n-1}(D^n) \cong 0$，其复合不可能是恒等，矛盾。故映射 $f \colon D^n \longrightarrow D^n$ 有不动点。 $\square$

题目 20 记 T 为空间中的三角形，

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1, x, y, z \geqslant 0\}$$

a) 证明：任何映射 $f \colon T \longrightarrow T$ 都有不动点。

b) 设 A 是一个 3×3 矩阵，其所有元素都是正数。证明：A 有一个正的特征值 λ_0，且属于 λ_0 的特征向量的坐标全非负。

证明. a) 同上题。或者利用同胚 $g \colon D^2 \longrightarrow T$，得到 D^2 上的映射 $g^{-1} \circ f \circ g$，由于它有不动点 x_0，故 f 有不动点 $g(x_0)$。

b) 定义 $f\colon T\longrightarrow T$ 为复合 $p\circ A$ 在 T 上的限制。其中

$$p(x,y,z)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{x+y+z}(x,y,z),\ \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+$$

这里 $\mathbb{R}^3_+$ 表示 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x,y,z\geqslant 0,(x,y,z)\neq 0\}$。

则 $p(A(T))\subset T$ 且在 T 是连续的，故由 a)，f 有不动点 α，即

$$\alpha=f(\alpha)=\lambda_0 A(\alpha)$$

其中 λ_0 是 $A(\alpha)$ 的坐标和。由定义显然有 α 各坐标非负且不全为零，由于 A 的所有元素都是正数，故 $A(\alpha)$ 各坐标非负且不全为零，从而 $\lambda_0>0$。这样就找到了 A 的一个正的特征值 λ_0 且属于 λ_0 的特征向量 α 的坐标全非负。

□

题目 21 设映射 $f\colon S^n\longrightarrow S^n$ 同伦于常值映射。证明 f 有不动点 x_0 使 $f(x_0)=x_0$。

证明. 若不然，由题目（6），f 必同伦于对径映射，从而由题目（30）知 $\deg f=(-1)^{n+1}$。然而，由 f 同伦于常值映射得 $\deg f=0$，矛盾。 □

题目 22 设映射 $f\colon S^n\longrightarrow S^n$ 同伦于常值映射。证明：在 S^n 中存在 x_0 使 $f(x_0)=-x_0$。

证明. 若不然，构做伦移 $H\colon S^n\times I\longrightarrow S^n$ 如下

$$H(x,t)=\frac{(1-t)f(x)+tx}{||(1-t)f(x)+tx||}$$

注意到 $||(1-t)f(x)+tx||=0$ 当且仅当 $(1-t)f(x)=-tx$ 而由于 $||f(x)||=||x||=1$，这就要求 $1-t=t$ 即 $t=\frac{1}{2}$。然而此时分母为 $\frac{1}{2}||f(x)+x||$，由假设又有 $f(x)\neq -x$，故分母总不为零，此伦移定义良好。因为

$$H(x,0)=f(x),H(x,1)=x$$

所以 $f\simeq \mathrm{id}_{S^n}$，于是 $\deg f=1$。但由条件 f 同伦于常值映射，故 $\deg f=0$，矛盾，故在 S^n 中存在 x_0 使 $f(x_0)=-x_0$。 □

题目 23 设 $U\subset\mathbb{R}^m$ 和 $V\subset\mathbb{R}^n$ 分别是 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$ 的开子集。试证明：如果 U 与 V 同胚，则 $m=n$。

证明. 设同胚映射为 $f\colon U\longrightarrow V$。

令 $x_0\in U$，则显然 $\overline{\mathbb{R}^m\backslash U}\subset\operatorname{Int}\mathbb{R}^m\backslash\{x_0\}$，故由切除定理知

$$l_*\colon H_q(U,U\backslash\{x_0\})\longrightarrow H_q(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\backslash\{x_0\})$$

是同构。

对空间偶 $(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\backslash\{x_0\})$ 有相对同调群的长正合列：

$$\cdots\longrightarrow\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^m)\xrightarrow{j_*}\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\backslash\{x_0\})\xrightarrow{\delta}\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{R}^m\backslash\{x_0\})\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{R}^m)\longrightarrow\cdots$$

其中 $\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^m)=0$。由于 $\mathbb{R}^m\backslash\{x_0\}\cong S^{m-1}$，故 $\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^m\backslash\{x_0\})\cong\delta_q^{m-1}\mathbb{Z}$。于是

$$\begin{cases}\widetilde{H}_q(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\backslash\{x_0\})\cong\widetilde{H}_{q-1}(\mathbb{R}^m\backslash\{x_0\})\cong\delta_{q-1}^{m-1}\mathbb{Z} & q>0\\ \widetilde{H}_0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\backslash\{x_0\})=0\end{cases}$$

利用命题9回到通常的同调群，并注意到相对同调群的简约同调群与之完全一致，得

$$H_q(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\backslash\{x_0\})=\begin{cases}\delta_{q-1}^{m-1}\mathbb{Z} & q>0\\ 0 & q=0\end{cases}\tag{1}$$

对 $V\subset\mathbb{R}^n$ 作类似讨论可得

$$H_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\backslash\{f(x_0)\})=\begin{cases}\delta_{q-1}^{n-1}\mathbb{Z} & q>0\\ 0 & q=0\end{cases}\tag{2}$$

由于 f 是空间偶同胚 $(U,U\backslash\{x_0\})\longrightarrow(V,V\backslash\{f(x_0)\})$，故

$$H_q(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m\backslash\{x_0\})\cong H_q(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\backslash\{f(x_0)\})$$

比较 (1) 和 (2) 即得 $m=n$。 □

题目 24 设 X 是一个道路连通的拓扑空间，记 ΣX 为 X 的双角锥（在 $X\times I$ 中分别粘合 $X\times\{0\}$ 和 $X\times\{1\}$ 成一个点所得的空间）。证明：对于 $q>0$，$H_q(X)\cong H_{q+1}(\Sigma X)$。

证明. 考虑映射 $f\colon X\longrightarrow\mathrm{Pt}$，易知 $Cf=\Sigma X$，于是由定理23得到同调群的长正合列：

$$\cdots\longrightarrow H_{q+1}(\mathrm{Pt})\xrightarrow{i_*}H_{q+1}(\Sigma X)\xrightarrow{\delta}H_q(X)\xrightarrow{f_*}H_q(\mathrm{Pt})\longrightarrow\cdots$$

当 $q>0$ 时，由于 $H_q(\mathrm{Pt})=0$，故得正合列：

$$0\longrightarrow H_{q+1}(\Sigma X)\xrightarrow{\delta}H_q(X)\longrightarrow 0$$

于是 $H_q(X)\cong H_{q+1}(\Sigma X)$。 □

题目 25 求环面 $T=S^1\times S^1$ 的各维同调群。

证明. 由于 $T=S^1\vee S^1\cup_f D^2$，其中 f 是粘合映射，则由定理26得 $\widetilde{H}_q(T)\cong\widetilde{H}_q(S^1\vee S^1)=0$（当 $q\neq 1,2$ 时）。而且有正合列：

$$0\longrightarrow\widetilde{H}_2(S^1\vee S^1)\longrightarrow\widetilde{H}_2(T)\longrightarrow\widetilde{H}_1(S^1)\xrightarrow{f_*}\widetilde{H}_1(S^1\vee S^1)\longrightarrow\widetilde{H}_1(T)\longrightarrow 0$$

下面计算 f_*。为此先计算由 f 诱导的基本群同态 $f_\pi\colon\pi_1(S^1,x_0)\longrightarrow\pi_1(S^1\vee S^1,x_0)$。考虑 S^1 上的单位闭路 σ，粘合映射将其映到 $aba^{-1}b^{-1}$ 其中 a,b,a^{-1},b^{-1} 分别是 $S^1\vee S^1$ 中的两个圆周的单位闭路及其反向，所以 f_π 恰将 $\pi_1(S^1,x_0)$ 的生成元映到 $\pi_1(S^1\vee S^1,x_0)$ 的换位子群的生成元。由于 H_1 是基本群的交换化（定理13），故 f_* 是零映射。

又由于 $\widetilde{H}_2(S^1\vee S^1)=0$，故有正合列：

$$0\longrightarrow\widetilde{H}_2(T)\longrightarrow\widetilde{H}_1(S^1)\longrightarrow 0,\quad 0\longrightarrow\widetilde{H}_1(S^1\vee S^1)\longrightarrow\widetilde{H}_1(T)\longrightarrow 0$$

所以 $\widetilde{H}_2(T)\cong\widetilde{H}_1(S^1)=\mathbb{Z},\widetilde{H}_1(T)=\widetilde{H}_1(S^1\vee S^1)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$。

由于 T 是道路连通的，故 $H_0(T)=\mathbb{Z}$。

总结：

$$H_q(T)=\begin{cases}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & q=1\\ \mathbb{Z} & q=0,2\\ 0 & q>2\end{cases}$$

□

题目 26 令 $A=\{x_0,-x_0\}$ 为球面 S^n 中两个点，$n>1$。求 (S^n,A) 的各维相对同调群 $H_q(S^n,A)$。

证明. 对空间偶 (S^n,A) 有相对同调群的长正合列：

$$\cdots\longrightarrow\widetilde{H}_q(A)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_q(S^n)\xrightarrow{j_*}\widetilde{H}_q(S^n,A)\xrightarrow{\delta}\widetilde{H}_{q-1}(A)\longrightarrow\cdots$$

其中当 $q>0$ 时，$\widetilde{H}_q(A)=0$。故得当 $q>1$ 时

$$\widetilde{H}_q(S^n,A)\cong\widetilde{H}_q(S^n)=\delta_q^n\mathbb{Z}$$

当 $q\leqslant 1$ 时则有

$$\cdots\longrightarrow\widetilde{H}_1(S^n)\xrightarrow{j_*}\widetilde{H}_1(S^n,A)\xrightarrow{\delta}\widetilde{H}_0(A)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_0(S^n)\xrightarrow{j_*}\widetilde{H}_0(S^n,A)\longrightarrow 0$$

由于 $n>1$，故 $\widetilde{H}_1(S^n)=0,\widetilde{H}_0(S^n)=0$，所以

$$\widetilde{H}_1(S^n,A)\cong\widetilde{H}_0(A)=\mathbb{Z},\ \widetilde{H}_0(S^n,A)=0$$

利用命题9回到通常的同调群，并注意到相对同调群的简约同调群与之完全一致，得

$$H_q(S^n,A)=\begin{cases}\mathbb{Z} & q=1,n\\ 0 & q\neq 1,n\end{cases}$$

□

题目 27 记 M 为 Möbius 带，它的边界是 S^1。求 (M,S^1) 的各维相对同调群 $H_q(M,S^1)$。

证明. 对空间偶 (M,S^1) 有相对同调群的长正合列：

$$\cdots\longrightarrow\widetilde{H}_q(S^1)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_q(M)\xrightarrow{j_*}\widetilde{H}_q(M,S^1)\xrightarrow{\delta}\widetilde{H}_{q-1}(S^1)\longrightarrow\cdots$$

其中当 $q\neq 1$ 时 $\widetilde{H}_q(S^1)=0$。由于 M 通过收缩映射 $r\colon M\longrightarrow S^1$ 同伦等价于其赤道 S^1，故 $\widetilde{H}_q(M)\cong\widetilde{H}_q(S^1)$。从而当 $q\neq 1,2$ 时 $\widetilde{H}_q(M,S^1)\cong\widetilde{H}_q(M)$。

现只需考虑：

$$0\longrightarrow\widetilde{H}_2(M,S^1)\xrightarrow{\delta}\widetilde{H}_1(S^1)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_1(M)\xrightarrow{j_*}\widetilde{H}_1(M,S^1)\longrightarrow 0$$

考虑 S^1 里的单位闭路的同调类，它通过 i_* 映到 M 的边界，而该边界通过 r_* 映到 M 的赤道上的 2 倍闭路，从而 $\ker i_* = 0, \operatorname{Im} i_* = 2\mathbb{Z}$。于是

$$\widetilde{H}_2(M, S^1) \cong \ker i_* = 0,\ \widetilde{H}_1(M, S^1) \cong \widetilde{H}_1(M)/\operatorname{Im} i_* = \mathbb{Z}/2$$

利用命题9回到通常的同调群，并注意到相对同调群的简约同调群与之完全一致，得

$$H_q(M, S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & q = 1 \\ 0 & q \neq 1 \end{cases}$$

□

题目 28 记 $S^1 = \{e^{it} \mid t \in [-\pi, \pi]\}$ 为复平面上的单位圆。映射 $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ 定义为：对任何 $e^{it} \in S^1, f(e^{it}) = e^{-it}$。证明：$f$ 的映射度为 -1，即：

$$f = -1\colon H_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(S^1)$$

证明. 考察 S^1 中单位闭路 σ，由于 $f \circ \sigma(t) = e^{-2\pi it}$ 是 σ 的反向道路，故 $f_*[\sigma] = -[\sigma]$。而 $[\sigma]$ 是 $H_1(S^1)$ 的生成元，故 $\deg f = -1$。 □

题目 29 利用（*24*）题结论证明：如果 $f\colon S^n \longrightarrow S^n$ 的映射度为 k，则

$$\Sigma f\colon \Sigma S^n = S^{n+1} \longrightarrow \Sigma S^n$$

的映射度也为 k，其中对 $[x, t] \in \Sigma S^n = S^n \times I/\sim, \Sigma f([x, t]) = [f(x), t]$。

证明. 对于 $q > 0$ 的情况，由映射锥的同调序列的自然性（命题25），得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H}_{q+1}(\Sigma X) & \xleftarrow{\Sigma_*} & \widetilde{H}_q(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (\Sigma f)_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \widetilde{H}_{q+1}(\Sigma Y) & \xleftarrow{\Sigma_*} & \widetilde{H}_q(Y) \end{array}$$

于是 $\Sigma_* \circ f_* = (\Sigma f)_* \circ \Sigma_*$。设 $\deg f = k, \deg \Sigma f = d$，则 $\forall [a] \in \widetilde{H}_q(X)$，有

$$\Sigma_*(f_*([a])) = \Sigma_*(k[a]) = k\Sigma_*[a]$$
$$(\Sigma f)_*(\Sigma_*([a])) = d\Sigma_*[a]$$

从而 $k = d$，即 $\deg f = \deg \Sigma f$。 □

题目 30 证明：对径映射 $\beta\colon S^n \longrightarrow S^n$ 的映射度为 $(-1)^{n+1}$。

证明. 我们先证明一个引理：

定义镜面反射$\gamma^n\colon S^n \longrightarrow S^n$ 为 $\gamma^n(x_0, x_1, \cdots, x_n) = (-x_0, x_1, \cdots, x_n)$，则 $\deg \gamma^n = -1$。

用归纳法，首先在题目（28）中已证明对 $\gamma^1\colon S^1 \longrightarrow S^1$ 结论成立。若对 S^n 结论成立，则由题目（29）及 $\Sigma S^n = S^{n+1}$，得到 $\deg r^{n+1} = \deg r^n = -1$。

对径映射是 $n+1$ 次镜面反射 $S^n \longrightarrow S^n$ 的复合。 □