泛函分析复习

Gau Syu

2013 年 1 月 1 日

Preface

这是 2012 年下半年南开大学数学科学学院研究生课程“泛函分析”的期末复习五道题目。该课程由安桂梅老师讲授。

Contents

1 半范数与局部凸空间

题目 1 设 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 上分离点的半范数族，则由其生成的拓扑是 *Hausdorff* 的。

定义 1. X 是域 $\mathbb{K}$（$\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$）上的线性空间，X 上的实值函数 p 满足

1) （次可加性）$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y),\forall x,y\in X$；

2) （绝对齐性）$p(\lambda x)=|\lambda|p(x),\forall\lambda\in\mathbb{K},x\in X$

则称 p 是 X 上的一个半范数。

命题 2. 设 p 是线性空间 X 上的半范数，则

1) $p(0)=0$；

2) $|p(x)-p(y)|\leqslant p(x-y)$；

3) $p(x)\geqslant 0$；

4) $\ker p$ 是 X 的子空间。

证明. 1) $p(0)=p(0x)=|0|p(x)=0$；

2) 因为 $p(x)=p(x-y+y)\leqslant p(x-y)+p(y)$，且 $p(y-x)=p(x-y)$；

3) $p(x)\geqslant|p(x)-P(0)|\geqslant 0$；

4) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},x,y\in\ker p$，

$$p(\alpha x+\beta y)\leqslant p(\alpha x)+p(\beta y)=|\alpha|p(x)+|\beta|p(y)=0+0=0$$

□

注. 可见半范数就是范数定义中去掉 $p(x)=0\Rightarrow x=0$ 这一条。

定义 3. 对于线性空间 X 中的集合 M，

1) 若 $\forall x,y\in M,0\leqslant\alpha\leqslant 1,\alpha x+(1-\alpha)y\in M$，则称 M 是凸的；

2) 若 $\forall x\in M,|\lambda|\leqslant 1,\lambda x\in M$，则称 M 是平衡的；

3) 若 $M=-M$，则称 M 是对称的；

4) 若 $\forall x\in X$，存在 $\varepsilon>0$，使得当 $0<|\alpha|\leqslant\varepsilon$ 时，$\alpha x\in M$，则称 M 是吸收的。

命题 4. 对任给的半范数 p 和实数 $r>0$，

$$M=\{x\in X\mid p(x)<r\},M'=\{x\in X\mid p(x)<=r\}$$

均是平衡的、吸收的凸集。

证明. 先证 M 是凸集：$\forall x,y\in M,0\leqslant\alpha\leqslant 1$，

$$p(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant|\alpha|p(x)+|1-\alpha|p(y)<\alpha r+(1-\alpha)r=r$$

所以 $\alpha x+(1-\alpha)y\in M$。

再证 M 是平衡集：$\forall x\in M, |\lambda|\leqslant 1$，

$$p(\lambda x)=|\lambda|p(x)\leqslant p(x)<r$$

所以 $\lambda x\in M$。

最后证 M 是吸收集：$\forall x\in X$，不妨设 $p(x)>0$，则

$$p(\frac{rx}{2p(x)})=\frac{r}{2p(x)}p(x)=\frac{r}{2}<r$$

即 $\frac{r}{2p(x)}x\in M$。

对 M' 的证明类似。 □

定义 5. 设 K 是线性空间 X 中的子集，则

$$\mu_K(x)\overset{\text{def}}{=}\inf\left\{\alpha\middle|\alpha>0,\frac{1}{\alpha}x\in K\right\}$$

称为 K 的*Minkowski 泛函*。

由定义可知 $K\subset L\Rightarrow \mu_K\geqslant\mu_L$。

命题 6. *线性空间 X 中的平衡吸收凸集 K 的 Minkowski 泛函 μ_K 是 X 上的半范数。*

定义 7. 一个线性空间 X 上赋予一个使得加法和数乘运算连续的拓扑 τ，则称 (X,τ) 为*拓扑线性空间*。

注. 拓扑线性空间的拓扑基可由 0 点的邻域基平移得到，故称 0 点的邻域基称为*局部基*。

注. 设 X 是一个拓扑线性空间，U 是 0 点的一个凸邻域，则 U 包含一个 0 点的平衡的、吸收的凸邻域。

定义 8. 设 (X,τ) 是拓扑线性空间，如果 τ 的局部基全由凸集组成，则称为*局部凸拓扑线性空间*，简称*局部凸空间*。

定理 9. *设 P 是线性空间 X 上的半范数族，对每个 $p\in P$ 及自然数 n，记*

$$V(p,n)\overset{\text{def}}{=}\left\{x\in X\middle|p(x)<\frac{1}{n}\right\}$$

其所有有限交构成的集合记为 $\mathscr{B}$，则 $\mathscr{B}$ 是平衡的凸的局部基。这样就由 P 诱导出一个 X 上的局部凸拓扑，称为由半范数族 P生成的拓扑。

证明. 首先，由命题4，每个 $V(p,n)$ 都是 0 点的平衡的凸邻域，进一步地，它们的有限交也是 0 点的平衡的凸邻域。

然后证明加法运算连续：注意到加法运算在 0 处是连续的当且仅当对于任何 0 的邻域 U 存在另一个 0 的邻域 V 使得 $V+V$ 被包含在 U 中。

设 U 是 0 点的一个邻域，则存在 $p_i\in P, n_i\in\mathbb{N}, i=1,2,\cdots,k$，使得

$$U\supset V(p_1,n_1)\cap\cdots\cap V(p_k,n_k)$$

令 $V=V(p_1,2n_1)\cap\cdots\cap V(p_k,2n_k)$，则由次可加性得 $V+V\subset U$。

最后证明乘法运算连续：即 $\forall x\in X,\alpha\in\mathbb{K},U\in N(0)$，存在 ε 和 $V\in N(0)$，当 $|\beta-\alpha|<\varepsilon, y-x\in V$ 时，$\beta y-\alpha x\in U$。

取 V 同上，由于 V 平衡，所以当 $s\geqslant 1, x\in sV, t=s(1+|\alpha|s)^{-1}, |\beta-\alpha|<s^{-1}, y\in x+tV\in N(x)$ 时就有

$$\begin{aligned}\beta y-\alpha x&=\beta(y-x)+(\beta-\alpha)x\\&\in\beta tV+s^{-1}sV\\&\subset V+V\subset U\end{aligned}$$

□

命题 10. *设 (X,τ) 是局部凸空间，则必有一族 X 上的半范数 P 使得 $V(p,n)$ 是 τ 的局部基。*

证明. 设 U 是 0 点的一个凸邻域，则 U 包含一个 0 点的平衡的吸收的凸邻域 V，令 μ_V 为其 Minkowski 泛函，则 μ_V 是半范数，所有这样的半范数构成的半范数族生成该局部凸拓扑。 □

定义 11. 设 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是线性空间 X 上的一族半范数，如果

$$\forall\alpha\in\Lambda, p_\alpha(x)=0\Longrightarrow x=0$$

则称 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$分离$X$ 中的点。

定理 12. *由分离点的半范数族决定的的局部凸空间是 Hausdorff 的，反之亦然。*

证明. 首先证明 $\forall x\neq 0\in X$，x 和 0 可由开集分离：

事实上，因为 $x\neq 0$，由于 P 分离点，故存在 $p\in P$ 使得 $p(x)>0$，取自然数 n 使得 $np(x)>2$，则

$$V(p,n)\cap(x+V(p,n))=\left\{y\in X\middle|p(y)<\frac{1}{n},p(y-x)<\frac{1}{n}\right\}$$

然而

$$\begin{cases}p(y)<\frac{1}{n}\\p(y-x)<\frac{1}{n}\end{cases}\Longrightarrow p(x)\leqslant p(y)+p(y-x)<2n$$

与 $np(x)>2$ 矛盾，故 $V(p,n)\cap(x+V(p,n))=\varnothing$。

对于 $x\neq y$，若已有开集 U,V 分离 0 和 $x-y$，则

$$\begin{cases}0\in U\\x-y\in V\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\in y+V\\y\in y+U\end{cases}$$

$$U\cap V=\varnothing\Longrightarrow(y+U)\cap(y+V)=\varnothing$$

反之，若 X 是 Hausdorff 的局部凸空间，则取半范数族 P 为其局部基的 Minkowski 泛函。$\forall x\neq 0$，由 Hausdorff 性，存在 0 点邻域 U，使得 $x\notin U$。进一步地，可取为邻域基中的元 V，使得 $x\notin V$，于是 $\mu_V\neq 0$，这就证明了半范数族 P 分离 X 中的点。 □

2 值域定理

题目 2 *设 T 为从赋范线性空间 E 到 E_1 内的线性算子，且有 $\overline{\mathcal{D}(T)}=E$，那么，为了 T^{-1} 存在且连续（即 $T\in\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(\mathcal{D}(T),E_1))$）必须且只须 $\mathcal{W}(T^*)=E^*$，即 T^* 满值域。*

证明. 1) "$\Longrightarrow$"：如果 T^{-1} 存在且连续，须证对任意的 $f\in E^*$，存在 $g\in E_1^*$，使得 $T^*(g)=f$。

首先定义 $\mathcal{W}(T)\subset E_1$ 上的有界线性泛函

$$g_0(y)\overset{\text{def}}{=}f(T^{-1}(y)),y\forall y\in\mathcal{W}(T)$$

从而由 Hahn-Banach 定理，可得到 g_0 的一个保范延拓 $g\in g\in E_1^*$。又由于

$$g(T(x))=g_0(T(x))=f(T^{-1}(T(x)))=f(x),\forall x\in\mathcal{D}(T)$$

故 $g\in\mathcal{D}(T^*),T^*(g)=f$。

2) "$\Longleftarrow$"：为证 T^{-1} 存在，只须证 T 是 $1-1$ 对应的。

若 $T(x)=0$，则任取 $f\in E^*$，由假设 $\mathcal{W}(T^*)=E^*$，故存在 $g\in\mathcal{D}(T^*)$，使得 $f=T^*(g)$，于是

$$f(x)=(T^*(g))(x)=g(T(x))=g(0)=0$$

故 $x=0$。

为证 T^{-1} 是连续的，只须证 T^{-1} 是有界线性算子：

$\forall y\in\mathcal{W}(T),||y||\leqslant 1$，任取 $f\in E^*$，由假设 $\mathcal{W}(T^*)=E^*$，故存在 $g\in E_1^*$，使得 $f=T^*(g)$。由于

$$\begin{aligned}|f(T^{-1}(y))|&=|(T^*(g))(T^{-1}(y))|\\&=|g(TT^{-1}(y))|\\&=|g(y)|\leqslant||g||\end{aligned}$$

故由共鸣定理[1]得

$$\sup\{||T^{-1}(y)||\mid||y||\leqslant 1,y\in\mathcal{W}(T)\}<\infty$$

□

题目 3 设 T 是从赋范线性空间 E 到 E_1 内的线性算子，且有 $\overline{\mathcal{D}(T)}=E$，那么，为了 $(T^*)^{-1}$ 存在，必须且只须有 $\overline{\mathcal{W}(T)}=E_1$。

证明. 1) "$\Longrightarrow$"：反之，假如存在 $y_1\in E_1$ 且 $y_1\notin\overline{\mathcal{W}(T)}$，则注意到 $\overline{\mathcal{W}(T)}$ 是 E_1 内的一个闭线性子空间，因此由分割性定理可知，存在 $g_1\in E_1^*$，使得

$$g_1(y_1)=1,g_1(y)=0,\forall y\in\overline{\mathcal{W}(T)}$$

由此得

$$g_1(T(x))=0,\forall x\in\mathcal{D}(T)$$

于是

$$g_1\in\mathcal{D}(T^*),T^*(g_1)=0$$

由假设，T^* 存在线性逆算子，故 T^* 是 $1-1$ 对应的，于是 $g_1=0$，与前面取法矛盾。

2) "$\Longleftarrow$"：只须证 T^* 是 $1-1$ 对应的。

如果存在泛函 $g_0\in E_1^*$，使得

$$T^*(g_0)=0$$

则

$$g_0(T(x))=(T^*(g_0))(x)=0,\forall x\in\mathcal{D}(T)$$

即 $g_0|_{\mathcal{W}(T)}=0$。由假设 $\overline{\mathcal{W}(T)}=E_1$ 以及 g_0 在 E_1 上连续，故 $g_0=0$。

□

题目 4 设 T 是从赋范线性空间 E 到 E_1 内的线性算子，且有 $\overline{\mathcal{D}(T)}=E$，那么，当 E_1 为"第二纲"赋范线性空间且有 $\mathcal{W}(T)=E_1$ 时，$(T^*)^{-1}$ 存在且连续。

[1]注意到共轭空间 E^* 一定是 Banach 空间，将 $T^{-1}(y)$ 视为 E^* 上的连续线性泛函。

证明. 首先，由前一题可知 $(T^*)^{-1}$ 存在。下证 $(T^*)^{-1}$ 有界：

若不然，则由于 $(T^*)^{-1}$ 非有界，故存在列 $\{g_n\}\subset E_1^*$，使得

$$||g_n||=1,||T^*(g_n)||\to 0(n\to\infty)$$

于是，可定义：

$$g_n'=\frac{g_n}{||T^*(g_n)||}(n\in\mathbb{N})$$

此时

$$\lim_{n\to\infty}||g_n'||=\lim_{n\to\infty}\frac{||g_n||}{||T^*(g_n)||}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{||T^*(g_n)||}=\infty \tag{2.0.1}$$

另外，由定理假设 $E_1=\mathcal{W}(T)$ 知，$\forall y\in E_1$，存在 $x\in E$ 使得 $y=T(x)$。于是

$$\begin{aligned}|g_n'(y)|&=|g_n'(T(x))|=|(T^*g_n')(x)|\\&\leqslant||T^*g_n'||||x||=||x||<\infty,\forall y\in E_1\end{aligned}$$

由 E_1 第二纲以及推广的共鸣定理，得 $\{||g_n'||\}$ 是有界数列，与式2.0.1矛盾。 □

定义 13. 从赋范线性空间 E 到 E_1 内的线性算子 T 称为有界的，如果存在 $\lambda>0$ 使得

$$||Tx||\leqslant\lambda||x||,\forall x\in E$$

注. 等价的条件是将有界集映到有界集。

注. 反之，若算子 T 非有界，则存在 E 中的点列 $\{x_n\}$，使得

$$||Tx_n||=1,||x_n||\to 0(n\to\infty)$$

定义 14. 从赋范线性空间 E 到 E_1 内的全体有界线性算子构成的赋范空间记为 $\mathcal{B}(E,E_1)$。特别地，$\mathcal{B}(E,\mathbb{K})$ 称为 E 的共轭空间，记作 E^*。

定理 15. *赋范线性空间 $\mathcal{B}(E,E_1)$ 完备，当且仅当 E_1 完备。*

推论 16. *赋范线性空间 E 的对偶空间 E^* 是 Banach 空间。*

定义 17. 线性空间 E 上的泛函 $p(x)$ 称为

1) 次加的，如果

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y),\forall x,y\in E$$

2) 正齐性的，如果

$$p(\alpha x)=\alpha p(x),\forall\alpha\geqslant 0,x\in E$$

定理 18 (Hahn-Banach 延拓定理)**.** *若*

1) E 是实线性空间，$E_0\subset E$ 是其线性子空间；

2) $p(y)$ 是 E 上的次加正齐性泛函，$f_0(y)$ 是定义在子空间 E_0 上的实线性泛函，且满足

$$f_0(y)\leqslant p(y),\forall y\in E_0$$

则必存在定义在整个空间 E 上的实线性泛函 $f(y)$，满足

1) $f(y)=f_0(y),\forall y\in E_0$；

2) $f(y) \leqslant p(y), \forall y \in E$。

注. 将定理中的"次加正齐性"控制泛函 $p(x)$ 换成凸泛函时结论任成立。其中凸泛函是指

$$p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y), \forall \lambda \in [0,1], x, y \in E$$

定义 19. 线性空间 E 上的泛函 $p(x)$ 称为绝对齐性的，如果

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in E$$

定理 20 (Hahn-Banach 延拓定理)**.** *若*

1) E *是复线性空间，*$E_0 \subset E$ *是其复线性子空间；*

2) $p(y)$ *是* E *上的次加绝对齐性泛函，*$f_0(y)$ *是定义在子空间* E_0 *上的复线性泛函，且满足*

$$|f_0(y)| \leqslant p(y), \forall y \in E_0$$

则必存在定义在整个空间 E *上的复线性泛函* $f(y)$*，满足*

1) $f(y) = f_0(y), \forall y \in E_0$；

2) $|f(y)| \leqslant p(y), \forall y \in E$。

定理 21 (Hahn-Banach 保范延拓定理)**.** *设* E *为赋范线性空间，*E_0 *为其线性子空间，*f_0 *为* E_0 *上定义的连续线性泛函，则在* E *上必存在连续线性泛函* f*，使得*

1) $f|_{E_0} = f_0$；

2) $||f|| = ||f_0||$。

命题 22 (足够多有界线性泛函存在)**.** *设* E *为赋范线性空间，则* $\forall x_0 \in E, ||x_0|| \neq 0$*，存在* $f_1 \in E^*$*，使得*

$$f_1(x_0) = ||x_0||, ||f_1|| = 1$$

推论 23. *设* E *为赋范线性空间，*$x, y \in E$*，则为使* $x = y$ *必须且只须* $\forall f \in E^*$*，均有* $f(x) = f(y)$。

定理 24 (分割性定理)**.** *设* E *是赋范线性空间，*$E_0 \subset E$ *是其线性子空间，则* $\forall x_1 \in E$*，若*

$$d = d(x_1, E_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in E_0} ||x_1 - y|| > 0$$

则存在 $f_1 \in E^*$*，使得*

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & x = x_1 \\ 0 & x \in E_0 \end{cases}$$

且 $||f_1|| = \frac{1}{d}$。

定理 25 (Banach-Steinhaus 定理（共鸣定理）)**.** *给定赋范线性空间* X *和* Y*，其中* X *是完备的，若算子族* $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ *是逐点连续的（即* $\forall x \in X$*，*$\{||T_\alpha(x)||\}_{\alpha \in \Lambda}$ *都是有界数集），则必是一致连续的（即* $\{||T_\alpha||\}_{\alpha \in \Lambda}$ *是有界数集）。*

定义 26. (X, d) 为距离空间，$A \subset X$，若 $\forall$ 开集 $G \subset X$，存在开集 $G_0 \subset G$ 使得 $G_0 \cap A = \varnothing$，则称 A 在 X 中稀疏。集合 A 称为第一纲的，如果它是可数个稀疏集的并，否则称为第二纲的。

定理 27 (推广的 Banach-Steinhaus 定理（共鸣定理）)**.** *给定赋范线性空间* X *和* Y*，其中* X *是第二纲的，若算子族* $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ *在* X *的一个第二纲的子集上是逐点连续的，则必一致连续。*

3 可分性

题目 5 可分距离空间 X 的任意非空子集 X_0 必可分。

证明. 由 X 可分，故存在可数稠密子集 $\{x_n\}$。

由于是距离空间，故可作一列开球 $\{O(x_n, \frac{1}{m}) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$，并且

$$X = \bigcup_{n,m} O(x_n, \frac{1}{m})$$

对于任意非空子集 $X_0 \subset X$，有

$$X_0 = \bigcup_{n,m} (X_0 \cap O(x_n, \frac{1}{m}))$$

于是可从每个非空的 $X_0 \cap O(x_n, \frac{1}{m})$ 中取出一元。显见这些元的全体 $\{y_k\}$ 至多可数。

下面只须证 $\{y_k\}$ 稠于 X_0：

$\forall y \in X_0, \varepsilon > 0$，由于 $\{x_n\}$ 在 X 中稠密，故存在 x_{n_0} 及 $m_0 > \frac{2}{\varepsilon}$，使 $y \in O(x_{n_0}, \frac{1}{m_0})$。

因此，$X_0 \cap O(n_0, \frac{1}{m_0}) \neq \varnothing$，故必存在 $y_{k_0} \in \{y_k\}$，使得 $y_{k_0} \in X_0 \cap O(n_0, \frac{1}{m_0})$

于是

$$d(y, y_{k_0}) \leqslant d(y, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, y_{k_0}) < \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_0} < \varepsilon$$

即 $\{y_k\}$ 在 X_0 中稠密。故 X_0 可分。 □

定义 28. (X, d) 为一个距离空间，$A, B \subset (X, d)$，若 B 的每一个点的每一个邻域中均含有 A 中的点，则称 A 在 B 中稠密。

命题 29. *A 在 B 中稠密* $\Longleftrightarrow \overline{A} \supset B \Longleftrightarrow \forall x \in B$，*存在* $\{x_n\} \subset A$，*使得* $x_n \xrightarrow{d} x$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \bigcup_{x \in A} O(x, \varepsilon) \supset B$

定义 30. (X, d) 为一个距离空间，若 (X, d) 中存在可数的稠密子集，则称 (X, d) 可分。

4 内积空间与正交补

题目 6 A 是内积空间 U 的子集，则 $A^{\perp}$ 是 U 的闭子空间。

定义 31. 设 E 是线性空间，在乘积空间 $E \times E$ 上定义有有序二元泛函 $(,)$，如果 $\forall x, y, z \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$，其满足

1) $(x, x) >= 0$，且 $(x, x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$；
2) $(x, y) = (y, x)$；
3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

则称 $(,)$ 为 E 上的内积，称定义了内积的线性空间 E 为内积空间。

定理 32 (Cauchy-Schwarz 不等式). *设 E 为内积空间，则* $\forall x, y \in E$，*有*

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y)$$

且等号成立当且仅当 x, y 线性相关。

定义 33. 令 $||x|| = \sqrt{(x,x)}$，则 $||x||$ 成为 E 上的范数。若 E 在该范数下成为 Banach 空间，则称为*Hilbert 空间*。

命题 34. *内积 (x,y) 是关于 x 和 y 的二元连续函数，即*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x,y)$$

命题 35 (勾股定理)**.** *设 U 是内积空间，$x, y \in U$。若 $x \perp y$，则*

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

定义 36. 设 U 是内积空间

1) 对于 $x, y \in U$，如果 $(x,y) = 0$，则称 x 与 y正交，记作 $x \perp y$；

2) 设 $\varnothing \neq A \subset U, x \in U$，如果 $\forall y \in A, (x,y) = 0$，则称 x 与 A正交，记作 $x \perp A$；

3) 类似可定义两个子集的正交；

4) 设 $\varnothing \neq A \subset U$，把与 A正交的元全体记为 $A^{\perp}$，称为 A 的正交补。

命题 37. *若 $x \perp y_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $\forall \alpha_i \in \mathbb{K}$，有 $x \perp \sum \alpha_i y_i$。*

证明. $(x, \sum \alpha_i y_i) = \sum \overline{\alpha_i}(x, y_i) = \sum \overline{\alpha_i} 0 = 0$，故 $x \perp \sum \alpha_i y_i$。 □

命题 38. *若 $x \perp y_i (n \in \mathbb{N})$，且 $\lim_{n\to\infty} y_n = y$，则 $x \perp y$。*

证明. $(x,y) = \lim_{n\to\infty}(x, y_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$，故 $x \perp y$。 □

题目的证明. 由前面两个命题立得。 □

5 闭算子

题目 7 闭算子的定义与等价定义。

定义 39. 令 X, Y 为 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范线性空间，T 是从 X 到 Y 内的线性算子，对 $X \times Y$ 赋予范数 $||(x,y)|| = ||x||_X + ||y||_Y$，如果 T 的图像 $G(T) \subset$ 是闭集，则称算子 T 是闭算子。

命题 40. *T 是闭算子，当且仅当：*

$\forall \{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} Tx_n = y$$

都有 $x \in \mathcal{D}(T)$ 且 $Tx = y$。

证明. 一方面，如果 $x_n \to x, Tx_n \to y$，即 $(x_n, Tx_n) \to (x,y)$，则由于 T 是闭算子，故 $(x,y) \in G(T)$。由 $G(T)$ 的定义知 $x \in \mathcal{D}(T)$ 且 $Tx = y$。

另一方面，对于 $G(T)$ 中任何收敛列 $\{(x_n, y_n)\}$，设其极限为 (x,y)，则 $x_n \to x, Tx_n \to y$，由于 $y_n = Tx_n$，从而由假设条件知 $x \in \mathcal{D}(T)$ 且 $Tx = y$，于是 $(x,y) = (x, Tx) \in G(T)$。 □

命题 41. *设 T 是从 X 到 Y 内的有界线性算子，且 $\mathcal{D}(T)$ 是闭集，则 T 是闭算子。*

证明. $\forall \{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$，如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} Tx_n = y$，则由 $\mathcal{D}(T)$ 闭得 $x \in \mathcal{D}(T)$，由 T 连续得 $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$，故由极限的唯一性，得 $y = Tx$，即 $(x,y) \in G(T)$。 □

6 补充

6.1 准范数

定义 42. 范数的定义：零元、三角不等式、绝对齐性。

准范数的定义：将范数定义中的绝对齐性换成：

a) $||-x|| = ||x||$

b) $||a_n x|| \to 0 (a_n \to 0)$

c) $||\alpha x_n|| \to 0 (||x_n|| \to 0)$

6.2 商空间

定理 43. 设 E 为一赋范线性空间，E_0 为其闭线性子空间，在商空间 E/E_0 定义

$$||\widetilde{x}|| \overset{\text{def}}{=} \inf_{x \in \widetilde{x}} ||x||$$

则其必为一范数，从而使 E/E_0 成为赋范空间。

定理 44. 设 E 为一赋范线性空间，E_0 为其闭线性子空间，则 E 完备当且仅当 E_0 和 E/E_0 均完备。

6.3 Hilbert 空间上的伴随算子

定义 45. 对于 $T \in \mathcal{B}(H)$，若 $(Tx, y) = (x, y')$，则 $T^* : y \to y'$ 称为 T 的伴随算子。

命题 46. 设 A, B 是 *Hilbert* 空间上的线性算子，则

1) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$

2) $A^{**} = A$

3) $(AB)^* = B^* A^*$

4) $I^* = I$

5) 若 A^{-1} 存在，则 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$。

命题 47. $T \in \mathcal{B}(H, H')$，则

1) $\ker T = (\operatorname{im} T^*)^{\perp}$

2) $\overline{\operatorname{im} T} = (\ker T^*)^{\perp}$

定义 48. 设 $T \in \mathcal{B}(H)$，若 $T = T^*$，则称 T 是自伴的。

命题 49. *1)* 设 A, B 自伴，则 $A + B$ 自伴；

2) 设 A 自伴，$\alpha \in \mathbb{R}$，则 αT 自伴；

3) 设 A, B 自伴，则 AB 自伴，且 $AB = BA$；

4) 设 T_n 自伴，且 $||T_n - T|| \to 0$，则 T 自伴。

命题 50. T 是自伴算子当且仅当 $\forall x \in H, (Tx, x) \in \mathbb{R}$，且

$$||T|| = \sup_{||x||=1} |(Tx, x)|$$

定义 51. 设 $T \in \mathcal{B}(H)$，令

$$A = \frac{T + T^*}{2}, B = \frac{T - T^*}{2}$$

则 $A, B \in \mathcal{B}(H)$ 均为自伴算子，且 $T = A + iB, T^* = A - iB$，分别称 A, B 为 T 的实部和虚部。

定义 52. 设 $T \in \mathcal{B}(H)$，若 $TT^* = T^*T$，则称 T 为正规算子。

命题 53. $T \in \mathcal{B}(H)$ 为正规算子当且仅当 $||Tx|| = ||T^*x||, \forall x \in H$。

定义 54. 设 $T \in \mathcal{B}(H)$，若 $T^* = T^{-1}$，则称 T 为酉算子。

6.4 正交投影

定理 55 (正交投影定理)**.** 设 E 为 *Hilbert* 空间，M 为 E 内的闭线性子空间，则 $\forall x \in E$，x 必可写成 $x = y + z$ 的形式，其中 $y \in M, z \in M^{\perp}$，并且

$$||x - y|| = \inf_{y' \in M} ||x - y'||$$

此分解称为正交分解，y 称为 x 在 M 上的正交投影。

命题 56. 设 M 为 *Hilbert* 空间 E 内的闭线性子空间，P_M 为从 E 到 M 的正交投影，则 P_M 满足

1) P_M 是 E 上的线性满算子；

2) $||P_M x|| \leqslant ||x||, \forall x \in E$；

3) $||P_M|| = 1$ 或 0；

4) $P_M^2 = P_M$；

5) $\operatorname{im} P_M = M, \ker P_M = M^{\perp}$

命题 57. P 是正交投影算子当且仅当 P 是自伴算子且 $P^2 = P$。

Index