拓扑学（I I）复习题

Made By ***Gau Syu***

最近更新： 2013 年 8 月 7 日

Preface

这是 2013 年春季学期南开大学数学科学学院研究生课程“**拓扑学（I I）**”的期末复习材料及复习题解答，基于本人和一些同学的笔记、资料和解答整理而成，如有疏漏，还望海涵。

该课程由**王向军**老师讲授。

目录

第一部分

知识略览及补充

1 回顾：整系数同调群

1.1 简约同调群

定义 1.1. 设 X 是拓扑空间，从 X 到单点集 Pt 唯一的映射诱导同调群的同态 $H_q(X) \longrightarrow H_q(\mathrm{Pt})$，这一同态的核称为 X 的 q 维 简约同调群，记作 $\widetilde{H}_q(X)$。

由于单点集除 0 维外的各维同调群平凡，故有

命题 1.2. 若 X 非空，则当 $q > 0$ 时，$\widetilde{H}_q(X) = H_q(X)$。此外 $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$。

证明. 考虑映射 $f\colon X \longrightarrow \mathrm{Pt}$ 和 $g\colon \mathrm{Pt} \longrightarrow X$ 所诱导的同态

$$f_*\colon H_0(X) \longrightarrow H_0(\mathrm{Pt}),\ g_*\colon H_0(\mathrm{Pt}) \longrightarrow H_0(X)$$

由于 $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{Pt}}$，故 $f_* \circ g_* = \mathrm{id}_{H_0(\mathrm{Pt})}$，从而由分裂引理得 $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus H_0(\mathrm{Pt})$。 □

1.2 低维同调群

定理 1.3 (同调群的直和). 设 $X = \cup X_i$ 是 X 的道路连通分支分解，则其同调群有直和分解：

$$H_*(X) = \bigoplus H_*(X_i)$$

证明. 以 Σ_X 记 X 中全体奇异单形之集合，则它可分解为 $\Sigma = \coprod \Sigma_{X_i}$，因而有直和分解：

$$S_*(X) = \bigoplus S_*(X_i)$$

于是得到所需结论。 □

命题 1.4. 拓扑空间 X 是道路连通的，则 $H_0(X) = \mathbb{Z}$。

推论 1.5 (*0 维同调群的几何意义*). 拓扑空间 X 恰有 n 个道路连通分支，当且仅当

$$H_0(X) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{n\text{个}\mathbb{Z}}$$

定理 1.6 (*1 维同调群与基本群的关系*). 若 X 是道路连通的拓扑空间，则 $H_1(X)$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 的交换化。

1.3 相对同调群

注. 相对同调群的简约同调群与之完全一致，而不仅是在 $q > 0$ 时。

定理 1.7 (相对同调群的长正合列). 设 (X, A) 是空间偶，则下面的同调序列正合：

$$\cdots \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow H_1(X, A) \xrightarrow{\delta_1} H_0(A) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \longrightarrow 0$$

命题 1.8 (相对同调群的长正合列的自然性). 若 $f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ 是空间偶的映射，则下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & H_q(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & H_q(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & H_{q-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(B) \arrow[r] & H_q(Y) \arrow[r] & H_q(Y,B) \arrow[r] & H_{q-1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

定理 1.9 (切除定理). 设 (X,A) 是一个空间偶，若子集 $U \subset A$ 满足 $\overline{U} \subset \operatorname{Int} A$，则含入映射 $i\colon (X\backslash U, A\backslash U) \longrightarrow (X,A)$ 诱导相对同调群的同构

$$i_*\colon H_*(X\backslash U, A\backslash U) \longrightarrow H_*(X,A)$$

推论 1.10. 设 $V \subset U \subset A$，其中 $\overline{V} \subset \operatorname{Int} A$，且 $(X\backslash U, A\backslash U)$ 是 $(X\backslash V, A\backslash V)$ 的形变收缩核，则

$$H_*(X\backslash U, A\backslash U) \xrightarrow{i_*} H_*(X\backslash V, A\backslash V) \xrightarrow{j_*} H_*(X,A)$$

是同构。

1.4 Mayer-Vietoris 序列

定义 1.11. 称 (X,A,B) 为正合三元组，如果 $A \cup B = X$，且

$$i_*\colon H_*(A, A\cap B) \longrightarrow H_*(X,B),\ j_*\colon H_*(B, A\cap B) \longrightarrow H_*(X,A)$$

都是切除同构。

例 1.12. 若 $A \cup B = X$，且 $A \cap B$ 是其某个开邻域的收缩核，则 (X,A,B) 是正合三元组。

推论 1.13. $\widetilde{H}_q(X \vee Y) = \widetilde{H}_q(X) \oplus \widetilde{H}_q(Y)$。

定理 1.14 (*Mayer-Vietoris 序列*). 若 (X,A,B) 是正合三元组，则有同调群的长正合列：

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H_q(A\cap B) \xrightarrow{(i_1,i_2)} H_q(A)\oplus H_q(B) \xrightarrow{j_1-j_2} H_q(X) \xrightarrow{\delta} H_{q-1}(A\cap B) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{\delta} H_0(A\cap B) \xrightarrow{(i_1,i_2)} H_0(A)\oplus H_0(B) \xrightarrow{j_1-j_2} H_0(X) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{1}$$

命题 1.15 (*Mayer-Vietoris 序列的自然性*). 若 $f\colon (X,A,B) \longrightarrow (Y,C,D)$ 是正合三元组的映射，即 $f(A) \subset C, f(B) \subset D$，则下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & H_q(A)\oplus H_q(B) \arrow[r] \arrow[d, "f_*\oplus f_*"'] & H_q(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & H_{q-1}(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(C\cap D) \arrow[r] & H_q(C)\oplus H_q(D) \arrow[r] & H_q(Y) \arrow[r] & H_{q-1}(C\cap D) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

1.5 映射锥的同调序列

定义 1.16. 映射 $f\colon X \longrightarrow Y$ 的映射锥形Cf 定义如下：

$$Cf \overset{\text{def}}{=} Y \cup_f CX = Y \sqcup CX/\sim$$

其中的等价关系是 $f(x) \sim (x,0)$。

此外再定义：

$$C_-f \overset{\text{def}}{=} Y \cup_f (X \times [0, \frac{1}{2}])$$
$$C_+f \overset{\text{def}}{=} X \times [\frac{1}{2}]/(X \times \{1\})$$

命题 1.17. (Cf, C_-f, C_+f) 是正合三元组。

证明. 由切除定理推论易得。 □

定理 1.18 (映射锥的同调序列)**.** 设 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是拓扑空间的映射，则有同调群的长正合列：[1]

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_q(Y) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(Cf) \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

其中 i_* 是从 Y 到 Cf 的嵌入映射诱导的同态。

证明. 由 Mayer-Vietoris 序列即得。 □

推论 1.19. 设 $A \subset X$，则有同调群的长正合列：

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_q(A) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_q(X) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_q(X \cup CA) \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

证明. 取 f 为含入映射 $A \hookrightarrow X$ 即可。 □

命题 1.20 (映射锥的同调序列的自然性)**.** 若有拓扑空间映射的交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

则下图交换：

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_q(X) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"'] & \widetilde{H}_q(Y) \arrow[r] \arrow[d, "h_*"'] & \widetilde{H}_q(Cf) \arrow[r] \arrow[d, "C_*"'] & \widetilde{H}_{q-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_q(X') \arrow[r] & \widetilde{H}_q(Y') \arrow[r] & \widetilde{H}_q(Cf') \arrow[r] & \widetilde{H}_{q-1}(X) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

1.6 粘贴胞腔的同调群

定理 1.21. 设 n 维胞腔 D^n 通过映射 f 粘贴到拓扑空间 X 上，即 $D^n \supset S^{n-1} \xrightarrow{f} X$，则

1) $\widetilde{H}_q(X \cup_f D^n) \cong \widetilde{H}_q(X)$，如果 $q \neq n, n-1$。

2) 有如下正合列：

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n(X \cup_f D^n) \xrightarrow{\delta} \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_{n-1}(X) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_{n-1}(X \cup_f D^n) \longrightarrow 0$$

证明. 由于 $CS^{n-1} \cong D^n$，故 $X \cup_f D^n = Cf$，然后用映射锥的同调序列即得。 □

[1]用简约同调群只是为了写得少一点。

1.7 映射度

定义 1.22. 对于映射 $f\colon S^n \longrightarrow S^n$，由于 $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$，设 $[a]$ 是其生成元，则存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使 $f_*([a]) = k[a] \in H_n(S^n)$。$k$ 称为 f 的映射度，记作 $\deg f = k$。

命题 1.23. *1)* 若 $c\colon S^n \longrightarrow S^n$ 是常值映射，则 $\deg c = 0$。

2) 若 $f \simeq g\colon S^n \longrightarrow S^n$，则 $\deg f = \deg g$；

3) 若 $f, g\colon S^n \longrightarrow S^n$ 是两个映射，则 $\deg g \circ f = \deg g \cdot \deg f$；

4) 若 $f\colon S^n \longrightarrow S^n$ 是同伦等价，则 $\deg f = \pm 1$。

1.8 一些拓扑空间的同调群

例 1.24. n 维球面 S^n 的同调群为 $H_q(S^n) = \delta_q^0\mathbb{Z} \oplus \delta_q^n\mathbb{Z}$。

例 1.25. 环面 $T = S^1 \times S^1$ 的同调群是 $H_q(T) = \delta_q^0\mathbb{Z} \oplus \delta_q^1\mathbb{Z} \oplus \delta_q^1\mathbb{Z} \oplus \delta_q^2\mathbb{Z}$。

例 1.26. $H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x) = \delta_q^n\mathbb{Z}$。

例 1.27. n 维实射影空间 $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ 的同调群是

$$H_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0\text{或}q = n\text{为奇数} \\ \mathbb{Z}/2 & q\text{为奇数} \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

例 1.28. n 维实射影空间 $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ 的 $\mathbb{Z}/2$ 系数同调群是

$$H_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & 0 \leqslant q \leqslant n \\ 0 & q > n \end{cases}$$

例 1.29. *Klein* 瓶 K 的同调群是

$$H_q(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 & q = 1 \\ 0 & q \geqslant 2 \end{cases}$$

1.9 注记

1. 链复形的直和分解：

$$\bigoplus_\lambda C_\lambda = \{C_{\lambda *}, \partial_{\lambda *}\}$$

自然给出同调群的直和分解：

$$H_*(\bigoplus_\lambda C_\lambda) = \bigoplus_\lambda H_*(C_\lambda)$$

2. 正合三元组 (X, A, B) 的链群短正合列为

$$0 \longrightarrow S_*(A \cap B) \xrightarrow{(i_{1\#}, i_{2\#})} S_*(A) \oplus S_*(B) \xrightarrow{j_{1\#} - j_{2\#}} S_*(A) + S_*(B) \longrightarrow 0$$

其中含入链映射 $\imath\colon S_*(A) + S_*(B) \longrightarrow S_*(X)$ 诱导出的同调群同态 $H_*(S_*(A) + S_*(B)) \xrightarrow{\cong} H_*(X)$ 是同构，故得到同调群长正合列(1)。

3. 假如已有链复形的直和分解 $C_* \cong A_* \oplus B_*$，即交换图

$$0 \longrightarrow A_* \longrightarrow A_* \oplus B_* \longleftarrow B_* \longrightarrow 0$$

则自然有分裂短正合列：

$$0 \longrightarrow A_* \longrightarrow A_* \oplus B_* \longrightarrow B_* \longrightarrow 0$$

4. 反过来是不对的！

例如相对链群的短正合列是

$$0 \longrightarrow S_*(A) \longrightarrow S_*(X) \longrightarrow S_*(X, A) \longrightarrow 0$$

其中 $S_*(X, A)$ 仍是自由 Abel 群，故每个 q 维链群的短正合列分裂。尽管如此，该分裂并不导致直和分解 $S_*(X) \cong S_*(A) \oplus S_*(X, A)$，从而只能得到同调群的长正合列而不是直和分解。

2 一般系数同调群

定义 2.1. 设 R 是交换幺环，则拓扑空间 X 的所有 n 维奇异单形生成的自由 $R-$ 模称为 X 的R 系数 n 维奇异链群，记作 $S_n(X,R)$。$R-$ 模同态 $\partial_n\colon S_n(X,R)\longrightarrow S_{n-1}(X,R)$ 构做同整系数情形。$S(X,R)=\{S_n(X,R),\partial_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个链复形，称为 X 的R 系数奇异链复形。$S(X,R)$ 的同调群 $H_n(S(X,R),\partial)$ 称为 X 的R 系数 n 维非约化奇异同调群，记为 $H_n(X,R)$。

注. 一般系数同调群同样具有简约同调群、同伦不变性、相对同调群、长正合列、切除定理、正合三元组、Mayer-Vietoris 序列等上一节回顾的内容。

2.1 张量积

若未声明，环均指交换幺环。

定义 2.2. 两个 R 模 A,B 的张量积 $A\otimes_R B$ 定义为

- 生成元：$\{a\otimes b|a\in A,b\in B\}$
- 生产关系：$\forall a_1,a_2,a\in A,b_1,b_2,b\in B,r\in R$

  i $(a_1+a_2)\otimes b=a_1\otimes b+a_2\otimes b$

  ii $a\otimes(b_1+b_2)=a\otimes b_1+a\otimes b_2$

  iii $r(a\otimes b)=ra\otimes b=a\otimes rb$

注. 事实上，张量积 $A\otimes_{\mathbb{Z}} B$ 是“泛的”，即 $A\otimes_R B=(A\otimes_{\mathbb{Z}} B)/iii$，故通常将其简记为 $A\otimes B$。

注. 张量积的泛性质，即张量积 $A\otimes_R B$ 是函子 $\mathrm{Bil}_R(A,B;-)$[2]的表示对象，即该函子自然同构于 $\mathrm{Hom}(A\otimes_R B,-)$。

注. 若进一步地，A,B 是 R 代数，则 $A\otimes_R B$ 是余纤维积。

命题 2.3. 若 $C=\{C_n,\partial_n\},D=\{D_n,\partial_n'\}$ 是环 R 上的两个链复形，则 $C\otimes_R D$ 也是。特别地，若 C 是 $\mathbb{Z}$ 上的链复形，则 $C\otimes R$ 是 R 上的链复形。

命题 2.4. $S(X,R)\cong S(X)\otimes R$，从而一般系数同调群满足：同伦不变性、相对同调群具有长正合列、切除定理。

命题 2.5. 张量积具有交换律：

$$A\otimes_R B\cong B\otimes_R A$$

张量积具有结合律：

$$(A\otimes_R B)\otimes_R C\cong A\otimes_R(B\otimes_R C)$$

张量积和直和满足分配律：

$$(\bigoplus_i A_i)\otimes_R B\cong\bigoplus_i A_i\otimes_R B$$

[2] $\mathrm{Bil}_R(A,B;C)$ 是从 A,B 到 C 的 R 双线性映射全体。

推论 2.6. 若短正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

分裂，则有下列分裂正合列：

$$0 \longrightarrow A \otimes_R N \longrightarrow B \otimes_R N \longrightarrow C \otimes_R N \longrightarrow 0$$

注. 模 P 是投射模（*projective module*）的等价定义之一就是任意短正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

分裂。特别地，任何自由 Abel 群的短正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

导出自由 R 模的短正合列

$$0 \longrightarrow A \otimes R \longrightarrow B \otimes R \longrightarrow C \otimes R \longrightarrow 0$$

命题 2.7. 函子 $M \otimes_R -, - \otimes_R N$ 均是右正合的协变函子，即若有右正合列

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

则有右正合列

$$A \otimes_R N \longrightarrow B \otimes_R N \longrightarrow C \otimes_R N \longrightarrow 0$$

但一般地，它们不是正合函子，于是一般地长正合列在其下不能保持，但由于链复形的短正合列总是分裂，故在其作用下保持。

一般地，由 $f\colon A \longrightarrow B$ 诱导的映射 $f \otimes 1\colon A \otimes R \longrightarrow B \otimes R$ 不一定满足 $\ker(f \otimes 1) \cong \ker f \otimes R$，$\operatorname{im}(f \otimes 1) \cong \operatorname{im} f \otimes R$，故**未必**有 $H_n(X, R) \cong H_n(X) \otimes R$。

2.2 Tor 和 Ext

由于张量积函子 $- \otimes_R N$ 一般只是右正合，故可通过其左导函子来衡量其偏离左正合性的程度，该函子记作 $\mathrm{Tor}_*^R(-, N)$。

定义 2.8. 一个 R 模 A 的分解（*resolution*）是指 R 模的长正合列

$$\cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

特别地，若每个 C_i 都是投射模，则称为投射分解（*projective resolution*）；若每个 C_i 都是自由模，则称为自由分解。

命题 2.9. A 的一个 R 模分解对应一个链复形

$$C\colon \quad \cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

使 $H_n(C) = 0 (n > 0), H_0(C) = A$。

注. 通常不区分 R 模分解及其对应链复形的记号，其区别由上下文决定，也可以理解为把 R 模分解本身视为对应链复形的增广链复形。

定理 2.10 (投射零调模型 (*projective acyclic model*)). R 模 A 的投射分解 C 满足泛性质：对任何同态 $\varphi\colon A \longrightarrow A'$ 及 A' 的分解 C'，总存在链映射 $\phi\colon C \longrightarrow C'$ 扩张 φ，进一步地，任何两个这样的链映射同伦。

推论 2.11. 同一个 R 模 A 的不同投射分解链同伦等价。

定义 2.12. 设 A 是一个 R 模，任取其一投射分解 C，称同调群 $H_n(C \otimes_R B)$ 为 A 与 B 的第 n 个挠群，记作 $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$。

命题 2.13. 挠群与投射分解选取无关。

命题 2.14. $\mathrm{Tor}_0^R(A,B) = A \otimes_R B$。

定义 2.15. 若 R 是主理想整环，则 $\mathrm{Tor}_n^R(A,B) = 0(n > 1)$，称 $\mathrm{Tor}_1^R(A,B)$ 为 A 与 B 的挠积，记作 $\mathrm{Tor}^R(A,B)$。特别地，当 $R = \mathbb{Z}$ 时，记作 $\mathrm{Tor}(A,B)$。

定理 2.16 (挠群的长正合列). 设 N 是 R 模，若有 R 模的短正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

则有长正合列

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(A,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(B,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(C,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n-1}^R(A,N)\cdots&\\ \cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(C,N) \longrightarrow A \otimes_R N \longrightarrow B \otimes_R N \longrightarrow C \otimes_R N \longrightarrow 0&\end{aligned}$$

推论 2.17. 若 A 是自由 R 模，则 $\mathrm{Tor}_n^R(A,B) = 0(n \geqslant 1)$。

定理 2.18. 挠群是关于 A 和 B 的可加的双函子，并具有性质：

1. 交换律：
$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B) = \mathrm{Tor}_n^R(B,A)$$

2. 分配律：
$$\mathrm{Tor}_n^R(\bigoplus_i A_i, B) = \bigoplus_i \mathrm{Tor}_n^R(A_i, B)$$

事实上，函子 $\mathrm{Tor}_*^R(-,-)$ 是保持任何余极限的。

与 Tor 对偶的概念是 Ext。

命题 2.19. $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ 是左正合的反变函子，即若有右正合列

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

则有左正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,N)$$

定理 2.20. 设 A 是一个 R 模，任取其一投射分解 C，经过函子 $\mathrm{Hom}_R(-,B)$ 作用后得到上链复形

$$\mathrm{Hom}_R(C,B): \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C_0,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C_1,B) \longrightarrow \cdots$$

其上同调群 $H^*(\mathrm{Hom}_R(C,B))$ 与投射分解的选取无关。

定义 2.21. $\mathrm{Ext}^n_R(A,B) = H^n(\mathrm{Hom}_R(C,B))$。

定理 2.22 (*Ext 的长正合列*)**.** 设 A,B 是 R 模，若有 R 模的短正合列

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

则有长正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_R(A'',B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_R(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_R(A',B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(A'',B) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(A'',B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(A',B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_R(A'',B) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

若有 R 模的短正合列

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$$

则有长正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_R(A,B') \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_R(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(A,B'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(A,B') \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(A,B') \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(A,B'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_R(A,B') \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

推论 2.23. 若 A 是投射模或者 B 是内射模，则 $\mathrm{Ext}^n_R(A,B) = 0 (n > 0)$。

定理 2.24. *Ext* 具有分配律：

$$\mathrm{Ext}^*_R(\bigoplus_i A_i, B) = \bigoplus_i \mathrm{Ext}^*_R(A_i,B)$$
$$\mathrm{Ext}^*_R(A, \prod_j B_j) = \prod_j \mathrm{Ext}^*_R(A,B_j)$$

事实上，函子 $\mathrm{Ext}^*_R(-,B)$ 保持任何余极限，而函子 $\mathrm{Ext}^*_R(A,-)$ 保持任何极限。

注. 一般地，$\mathrm{Ext}^n_R(A,B) \neq \mathrm{Ext}^n_R(B,A)$。

命题 2.25. $\mathrm{Ext}^1_R(R/I,B) \cong B/IB$。

3 上同调

一般地，环 R 明确时，可以将 $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ 简写为 $\mathrm{Hom}(A,B)$。

3.1 Hom 函子

命题 3.1. 分配律：

1. $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_\lambda A_\lambda, B) \cong \prod_\lambda \mathrm{Hom}_R(A_\lambda, B)$；
2. $\mathrm{Hom}_R(A, \bigoplus_\mu B_\mu) \cong \prod_\mu \mathrm{Hom}_R(A, B_\mu)$。

推论 3.2. 若短正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

分裂，则有下列分裂正合列：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,C) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,N) \longrightarrow 0$$

命题 3.3. $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 是左正合的协变函子，即若有左正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

则有左正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,C)$$

命题 3.4. 函子 $\mathrm{Hom}_R(R,-)$ 自然同构于恒等函子。

注. 一般地，$\mathrm{Hom}_R(A,R) \ncong A$，前者往往称为 A 的对偶模。

推论 3.5. 对任意的 R 模 B，模同态

$$\begin{aligned} r\colon\ R &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto rx \end{aligned}$$

自然诱导出自同态 $r\otimes 1 \in \mathrm{End}(R\otimes_R B)$ 及 $r^* \in \mathrm{End}(\mathrm{Hom}_R(R,B))$。进一步地，有自然同构

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/(r),B) \cong \mathrm{Hom}_R(R/(r),B) \cong {}_rB := \{b\in B | rb=0\}$$

3.2 上同调群

我们下面只讨论函子 $Hom_R(-,N)$。

定义 3.6. $\mathrm{Hom}_R(S_n(X),R)$ 称为 X 的R 系数 n 维奇异上链群，记作 $S^n(X,R)$。原来链复形的边缘同态导出 $\delta_n := \partial^*_{n+1}$ 称为上边缘同态，从而形成上链复形 $S^*(X,R)$。在其中，

- $Z^n(X,R) := \ker\delta_n \subset S^n(X,R)$ 称为 n 维上闭链群，
- $B^n(X,R) := \operatorname{im}\delta_{n-1} \subset S^n(X,R)$ 称为 n 维上边缘链群，

- $H^n(X,R) := Z^n(X,R)/B^n(X,R)$ 称为 n 维上同调群。

注. 对于 $S^n(X,R)$ 中的元素 c^n，通常把它在 $S_n(X)$ 上的作用 $c^n(-)$ 记作 $\langle c^n, -\rangle$。在这种记号下，对任意的 $c^n \in S^n(X,R), c_{n+1} \in S_{n+1}(X)$ 有

$$\langle \delta_n(c^n), c_{n+1}\rangle = \langle c^n, \partial_{n+1}(c_{n+1})\rangle \tag{1}$$

定义 3.7. 连续映射 $f\colon X \longrightarrow Y$ 导出链映射 $f_\#\colon S_n(X) \longrightarrow S_n(Y)$，导出上链映射 $f^\#\colon S^n(Y,R) \longrightarrow S^n(X,R)$，导出同态 $f^*\colon H^n(Y,R) \longrightarrow H^n(X,R)$。

命题 3.8. 上同调群具有：同伦不变性、相对上同调群具有长正合列、切除定理。只是映射方向是反过来的。

定义 3.9. 设 $C = \{C_n, \partial_n\}$ 是环 R 上的链复形，A 是一个 R 模，用函子 $\mathrm{Hom}_R(-,A)$ 作用后得到一个上链复形 $C^*(A) = \{C^n, \delta_n\}$，其中 $C^n = \mathrm{Hom}_R(C_n, A), \delta_n = \partial_{n+1}^*$。$C^*(A)$ 的上同调群 $H^n(C^*(A))$ 称为链复形 C 的A 系数 n 维上同调群，记作 $H^n(C,A)$。

3.3 简约上同调群

定义 3.10. 设 X 是拓扑空间，从 X 到单点集 Pt 唯一的映射诱导同调群的同态 $H^n(\mathrm{Pt}) \longrightarrow H^n(X)$，这一同态的余核称为 X 的 n 维 简约上同调群，记作 $\widetilde{H}^n(X)$。

命题 3.11. 若 X 非空，则当 $n > 0$ 时，$\widetilde{H}^n(X,R) = H^n(X,R)$。此外 $H^0(X,R) \cong \widetilde{H}^0(X,R) \oplus R$。

3.4 上同调群的直和

命题 3.12 (上同调群的直和)**.** 链复形的直和分解：

$$\bigoplus_\lambda C_\lambda = \{C_{\lambda *}, \partial_{\lambda *}\}$$

自然给出上同调群的直和分解：

$$H^*(\bigoplus_\lambda C_\lambda) = \prod_\lambda H^*(C_\lambda)$$

进一步地，由自然性可知这还是一个上同调环的同构。

3.5 相对上同调群

注. 相对上同调群的简约上同调群与之完全一致，而不仅是在 $q > 0$ 时。

相对上链群的短正合列是

$$0 \longrightarrow S^*(X,A) \longrightarrow S^*(X) \longrightarrow S^*(A) \longrightarrow 0$$

由此得到

定理 3.13 (相对上同调群的长正合列)**.** 设 (X,A) 是空间偶，则下面的上同调序列正合：

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X,A) \xrightarrow{j^*} H^0(X) \xrightarrow{i^*} H^0(A) \xrightarrow{\delta} H^1(X,A) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow H^{n-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^n(X,A) \xrightarrow{j^*} H_n(X) \xrightarrow{i^*} H^n(A) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

命题 3.14 (相对上同调群的长正合列的自然性). 若 $f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ 是空间偶的映射，则下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\cdots & H^n(A) \arrow[l] \arrow[d, "f_*"] & H^n(X) \arrow[l] \arrow[d, "f_*"] & H^n(X,A) \arrow[l] \arrow[d, "f_*"] & H^{n-1}(A) \arrow[l] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & H^n(B) \arrow[l] & H^n(Y) \arrow[l] & H^n(Y,B) \arrow[l] & H^{n-1}(B) \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

定理 3.15 (切除定理). 设 (X,A) 是一个空间偶，若子集 $U \subset A$ 满足 $\overline{U} \subset \operatorname{Int} A$，则含入映射 $i\colon (X\backslash U, A\backslash U) \longrightarrow (X,A)$ 诱导相对上同调群的同构

$$i^*\colon H^*(X,A) \longrightarrow H^*(X\backslash U, A\backslash U)$$

推论 3.16. 设 $V \subset U \subset A$，其中 $\overline{V} \subset \operatorname{Int} A$，且 $(X\backslash U, A\backslash U)$ 是 $(X\backslash V, A\backslash V)$ 的形变收缩核，则

$$H^*(X,A) \xrightarrow{j^*} H^*(X\backslash V, A\backslash V) \xrightarrow{i^*} H^*(X\backslash U, A\backslash U)$$

是同构。

3.6 Mayer-Vietoris 序列

正合三元组 (X,A,B) 的上链群短正合列为

$$0 \longrightarrow S^*(A)+S^*(B) \xrightarrow{j_1^\# - j_2^\#} S^*(A)\oplus S^*(B) \xrightarrow{(i_1^\#, i_2^\#)} S^*(A\cap B) \longrightarrow 0$$

其中含入链映射 $\imath^\#\colon S^*(X) \longrightarrow S^*(A)+S^*(B)$ 诱导出的同调群同态 $H^*(X) \xrightarrow{\cong} H^*(S^*(A)+S^*(B))$ 是同构，故得到同调群长正合列。

定理 3.17 (*Mayer-Vietoris 序列*). 若 (X,A,B) 是正合三元组，则有自然的上同调群的长正合列：

$$0 \longrightarrow H^0(X) \xrightarrow{j_1 - j_2} H^0(A)\oplus H^0(B) \xrightarrow{(i_1,i_2)} H^0(A\cap B) \xrightarrow{\delta} H^1(X) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(A\cap B) \xrightarrow{\delta} H^n(X) \xrightarrow{j_1 - j_2} H^n(A)\oplus H^n(B) \xrightarrow{(i_1,i_2)} H^n(A\cap B) \longrightarrow \cdots$$

3.7 一些拓扑空间的上同调群

例 3.18. n 维球面 S^n 的 R 系数上同调群为 $H^q(S^n) = \delta_q^0 R \oplus \delta_q^n R$。

例 3.19. 环面 $T = S^1\times S^1$ 的 R 系数上同调群是 $H^q(T) = \delta_q^0 R\oplus \delta_q^1 R \oplus \delta_q^1 R \oplus \delta_q^2 R$。

例 3.20. $H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus x, R) = \delta_q^n R$。

例 3.21. n 维实射影空间 $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ 的 $\mathbb{Z}/2$ 系数上同调群是

$$H^q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & 0\leqslant q \leqslant n \\ 0 & q > n \end{cases}$$

4 Cup 积和 Cap 积

4.1 奇异上链的 Cup 积和 Cap 积

定义 4.1. 对于标准单形 Δ^n，其中 $n = p + q$，可定义映射

$$(e_0 \cdots e_p)\colon \Delta^p \longrightarrow \Delta^n \qquad e_0, \cdots, e_p \longmapsto e_0, \cdots, e_p$$
$$(e_p \cdots e_n)\colon \Delta^q \longrightarrow \Delta^n \qquad e_0, \cdots, e_q \longmapsto e_p, \cdots, e_n$$

从而对于任何奇异单形 $\sigma\colon \Delta^n \longrightarrow X$，有奇异单形

$$_p\sigma := \sigma \circ (e_0 \cdots e_p)\colon \Delta^p \longrightarrow X$$

称为 σ 的前 p 维面（$p-th$ *front face*），以及奇异单形

$$\sigma_q := \sigma \circ (e_p \cdots e_n)\colon \Delta^q \longrightarrow X$$

称为 σ 的后 q 维面（$q-th$ *back face*）。

定义 4.2. 对于 p 维奇异上链 c^p 和 q 维奇异上链 d^q，定义其 *cup 积*为

$$\langle c^p \smile d^q, \sigma\rangle = \langle c^p, {}_p\sigma\rangle \cdot \langle d^q, \sigma_q\rangle$$

即 c^p 和 d^q 分别作用在 σ 的前 p 维面和后 q 维面上再乘起来。

命题 4.3. *cup* 积是分次 R 模 $S^*(X)$ 上的一个双线性、可结合、具备单位元 $1 \in S^0(X)$ 的乘法。其中 1 在每个点取值都是 1。

命题 4.4. *cup* 积是自然的，即：若有映射 $f\colon X \longrightarrow Y$，则对任何 $c, d \in S^*(Y)$，有

$$f^{\#}(c \smile d) = f^{\#}(c) \smile f^{\#}(d)$$

并且 $f^{\#}(1) = 1$。

于是 $S^*(X)$ 在 cup 积下成为一个分次 R 代数。

命题 4.5. 上边缘算子 δ 是分次 R 代数 $S^*(X)$ 上的一个微分，即对任何 $c^p \in S^p(X), d^q \in S^q(X)$，有

$$\delta(c^p \smile d^q) = \delta(c^p) \smile d^q + (-1)^p c^p \smile \delta(d^q)$$

因此 $S^*(X)$ 是一个微分分次代数（DGA）。

定义 4.6. 对于 $p+q$ 维奇异单形 σ 和 p 维奇异上链 c，其 cap 积定义为

$$\sigma \frown c = \langle c, {}_p\sigma\rangle \cdot \sigma_q$$

注. 姜伯驹那本书上定义为 $c \frown \sigma = \langle c, \sigma_p\rangle \cdot {}_q\sigma$，这样最后得到的就成了一个左模。

命题 4.7. *cap* 积具有性质：

1. 结合性：

$$\sigma \frown (c \smile d) = (\sigma \frown c) \frown d$$

2. 对偶性：

$$\langle c \smile d, \sigma\rangle = \langle d, \sigma \frown c\rangle$$

3. 有单位：

$$\sigma \frown 1 = \sigma$$

4. 自然性：

$$f_{\#}(\sigma) \frown c = f_{\#}(\sigma \frown f^{\#}(c))$$

或曰下图交换

$$\begin{tikzcd}
S_{p+q}(X) \arrow[d, "f_{\#}"] & \times & S^p(X) \arrow[r, "\frown"] & S_q(X) \arrow[d, "f_{\#}"] \\
S_{p+q}(Y) & \times & S^p(Y) \arrow[u, "f^{\#}"] \arrow[r, "\frown"] & S_q(Y)
\end{tikzcd}$$

于是分次 R 模 $S_*(X)$ 在 cap 积下成为一个右 $S^*(X)$ 模。

4.2 上同调环与下同调模

定理 4.8. *cup* 积诱导出分次 R 模 $H^*(X)$ 上的乘法，从而使 $H^*(X)$ 成为分次 R 代数。该乘法还是自然的，即映射 $f\colon X \longrightarrow Y$ 诱导出分次代数的同态 $f^*\colon H^*(X) \longrightarrow H^*(Y)$。

定义 4.9. 分次代数 $H^*(X,R)$ 称为 X 的R 系数上同调环。

命题 4.10. *cup* 积具有分次交换性，即若 $\alpha \in H^p(X), \beta \in H^q(X)$，则

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{pq}\beta \smile \alpha$$

命题 4.11. 对任何 $\sigma \in S_{p+q}(X), c \in S^p(X)$，有边缘算子公式

$$\partial(\sigma \frown c) = (-1)^p(\partial(\sigma) \frown c - \sigma \frown \delta(c))$$

定理 4.12. *cap* 积诱导出分次 R 模 $H_*(X)$ 上的自然的右 $H^*(X)$ 模结构。

定义 4.13. 分次模 $H_*(X,R)$ 称为 X 的R 系数下同调模。

注. 下同调模 cap 积仍具有对偶性。

4.3 一些拓扑空间的上同调环

例 4.14. n 维球面 S^n 的 R 系数上同调环为 $H^q(S^n) = \delta_q^0 R \oplus \delta_q^n R$，其上的乘法结构是平凡的。

例 4.15. 环面 $T = S^1 \times S^1$ 的 R 系数上同调环是 $H^*(T) = H^*(S^1) \otimes H^*(S^1)$。

例 4.16. n 维实射影空间 $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ 的 $\mathbb{Z}/2$ 系数上同调环是截断多项式环 $\mathbb{Z}/2[\xi]/_{<\xi^{n+1}>}$。

5 计算工具

5.1 泛系数定理

定理 5.1 (泛系数定理). 设 $C=\{C_n,\partial_n\}$ 是一个主理想整环 R 上的自由链复形，则对任何的 R 模 N，$C\otimes_R N$ 是一个链复形，且有自然的短正合列

$$0\longrightarrow H_n(C)\otimes_R N\longrightarrow H_n(C\otimes_R N)\longrightarrow \mathrm{Tor}^R(H_{n-1}(C),N)\longrightarrow 0$$

进一步地，该短正合列分裂（但是该分裂不是自然的）。

推论 5.2. 对任何空间偶 (X,A) 及环 R，存在自然的短正合列

$$0\longrightarrow H_n(X,A)\otimes R\longrightarrow H_n(X,A,R)\longrightarrow \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X,A),R)\longrightarrow 0$$

进一步地，该短正合列分裂（但是该分裂不是自然的）。

推论 5.3. 若 R 是一个域，则

$$H_n(C\otimes_R N)\cong H_n(C)\otimes_R N$$

证明. 此时，$\mathrm{Tor}^R(-,-)=0$。 □

定义 5.4 (*Kronecker* 积). 设 $C=\{C_n,\partial_n\}$ 是一个主理想整环 R 上的自由链复形，则对任何的 R 模 N，存在自然的上下同调群的配对：

$$\begin{aligned}\langle -,-\rangle\colon\ H^n(C,N)\times H_n(C)&\longrightarrow N\\ ([c^n],[c_n])&\longmapsto \langle c^n,c_n\rangle\end{aligned}$$

特别地，这个配对与长正合列是协调的。

Kronecker 积自然导出同态 $\kappa\colon H^n(C,N)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_n(C),N)$，$\kappa([c^n])([c_n])=\langle c^n,c_n\rangle$。进一步地，这个同态是满的。

定理 5.5 (上同调群的泛系数定理). 设 $C=\{C_n,\partial_n\}$ 是一个主理想整环 R 上的自由链复形，则对任何的 R 模 N，$\mathrm{Hom}_R(C,N)$ 是一个上链复形，且有自然的短正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(C),N)\longrightarrow H^n(C,N)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_n(C),N)\longrightarrow 0$$

进一步地，该短正合列分裂（但是该分裂不是自然的）。

推论 5.6. 对任何空间偶 (X,A) 及环 R，存在自然的短正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X,A),R)\longrightarrow H^n(X,A,R)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X,A),R)\longrightarrow 0$$
$$0\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(X,A,R),R)\longrightarrow H^n(X,A,R)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_n(X,A,R),R)\longrightarrow 0$$

进一步地，该短正合列分裂（但是该分裂不是自然的）。

推论 5.7. 若 R 是一个域，则

$$H^n(C,N)\cong \mathrm{Hom}_R(H_n(C),N)$$

证明. 此时，$\mathrm{Ext}_R(-,-)=0$。 □

定义 5.8. 链映射 $f\colon C\longrightarrow D$ 称为拟同构（*quasi isomorphism*），如果它诱导出同调群的同构。

泛系数定理中的自然性加上 5-引理可得

推论 5.9. 拟同构的链映射诱导出的上同调同态是同构。

5.2 Künneth 公式

本节中的环都是主理想整环。

定义 5.10. 设 $A=\{A_n\},B=\{B_n\}$ 是分次 R 模，则其张量积 $A\otimes_R B$ 和挠积 $\mathrm{Tor}^R(A,B)$ 定义为分次模

$$[A\otimes_R B]_n=\bigoplus_{i+j=n}A_i\otimes_R B_j \qquad [\mathrm{Tor}^R(A,B)]_n=\bigoplus_{i+j=n}\mathrm{Tor}^R(A_i,B_j)$$

定义 5.11. 设 $A=\{A_n,\partial'_n\},B=\{B_n,\partial''_n\}$ 是环 R 上的两个链复形，则其张量积定义为 $A\otimes_R B=\{[A\otimes_R B]_n,\partial_n\}$，其中 $\partial=\partial'\otimes 1+\mathrm{sgn}\otimes\partial''$。

例如：$\partial(a_i\otimes b_j)=\partial'(a_i)\otimes b_j+(-1)^i a_i\otimes\partial''(b_j)$。

定理 5.12 (*代数 Künneth 公式*). *若 A,B 是主理想整环 R 上的自由链复形，则有自然的短正合列*

$$0\longrightarrow[H_*(A)\otimes_R H_*(B)]_n\xrightarrow{\otimes}H_n(A\otimes_R B)\longrightarrow[\mathrm{Tor}^R(H_*(A),H_*(B))]_{n-1}\longrightarrow 0$$

进一步地，该短正合列分裂（但是该分裂不是自然的）。

推论 5.13. *若 R 是一个域，则*

$$H_n(A\otimes_R B)\cong[H_*(A)\otimes_R H_*(B)]_n=\bigoplus_{i+j=n}H_i(A)\otimes_R H_j(B)$$

证明. 此时，$\mathrm{Tor}^R(-,-)=0$。 □

引理 5.14 (*Eilenberg-Zilber 引理*). *对任何拓扑空间 X,Y 有自然的整系数链同伦等价*

$$S(X\times Y)\simeq S(X)\otimes S(Y)$$

注. 设 $p_1\colon X\times Y\longrightarrow X$ 和 $p_2\colon X\times Y\longrightarrow Y$ 是拓扑空间的两个投影，则 Eilenberg-Zilber 映射为（设 σ 为 n 维奇异单形）：

$$EZ(\sigma)=\sum_{i+j=n}p_{1\#}({}_i\sigma)\otimes p_{2\#}(\sigma_j)$$

定义 $\times=EZ\circ\otimes$ 则得到：

定理 5.15 (*拓扑 Künneth 公式*). *设 R 是主理想整环，则对任何拓扑空间 X,Y 有自然的短正合列*

$$0\longrightarrow[H_*(X,R)\otimes_R H_*(Y,R)]_n\xrightarrow{\times}H_n(X\times Y,R)\longrightarrow[\mathrm{Tor}^R(H_*(X,R),H_*(Y,R))]_{n-1}\longrightarrow 0$$

进一步地，该短正合列分裂（但是该分裂不是自然的）。

推论 5.16. *若 R 是一个域，则*

$$H_n(X\times Y,R)\cong[H_*(X,R)\otimes_R H_*(Y,R)]_n=\bigoplus_{i+j=n}H_i(X,R)\otimes_R H_j(Y,R)$$

5.3 良好空间偶

定义 5.17. 若 X 是一个拓扑空间，A 是其一个非空闭子空间，且 A 是其在某个邻域的形变收缩核，则称为 (X,A) 为 良好的空间偶（*good pair*）。

命题 5.18. *若 (X,A) 是良好的空间偶，则商映射 $q\colon (X,A)\longrightarrow (X/A, A/A)$ 诱导出同构：*

$$H_n(X,A)\xrightarrow{q_*} H_n(X/A, A/A)\cong \widetilde{H}_n(X/A)$$

$$\widetilde{H}^n(X/A)\cong H^n(X/A, A/A)\xrightarrow{q^*} H^n(X,A)$$

定理 5.19 (良好空间偶的长正合列)**.** *若 (X,A) 是良好的空间偶，则有自然的同调群和上同调群的长正合列*

$$\cdots\longrightarrow \widetilde{H}_q(A)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_q(X)\xrightarrow{j_*}\widetilde{H}_q(X/A)\xrightarrow{\delta_q}\widetilde{H}_{q-1}(A)\longrightarrow\cdots$$
$$\cdots\longrightarrow\widetilde{H}_1(X/A)\xrightarrow{\delta_1}\widetilde{H}_0(A)\xrightarrow{i_*}\widetilde{H}_0(X)\xrightarrow{j_*}\widetilde{H}_0(X/A)\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow\widetilde{H}^0(X/A)\xrightarrow{j^*}\widetilde{H}^0(X)\xrightarrow{i^*}\widetilde{H}^0(A)\xrightarrow{\delta}\widetilde{H}^1(X/A)\longrightarrow\cdots$$
$$\cdots\longrightarrow\widetilde{H}^{n-1}(A)\xrightarrow{\delta}\widetilde{H}^n(X/A)\xrightarrow{j^*}\widetilde{H}_n(X)\xrightarrow{i^*}\widetilde{H}^n(A)\longrightarrow\cdots$$

5.4 准单纯剖分

定义 5.20. 一个同胚于 D^n 的拓扑空间称为 n 维闭胞腔（*closed cell*）。同胚于 $\mathrm{Int}\,D^n = D^n - S^{n-1}$ 的拓扑空间称为 n 维开胞腔（*open cell*），或简称胞腔。

定义 5.21. Hausdorff 空间 X 上的一个*CW 剖分*是指：把 X 分解为不相交子集的并 $\{e_i^n\}$，使得：

1. 每个 e_i^n 是一个 n 维开胞腔，且存在映射 $\varphi_i^n\colon D^n\longrightarrow X$ 把 $\mathrm{Int}\,D^n$ 同胚地映射成 e_i^n，称为 e_i^n 的特征映射。
2. 胞腔 e_i^n 的边缘 $\partial e_i^n := \overline{e_i^n} - e_i^n$ 包含于有限个低于 n 维的胞腔的并。
3. X 的一个子集是闭的，当且仅当它与每个胞腔的闭包的交是紧集。

取定了 CW 剖分的空间，称为*CW 复形*，其中胞腔的最大维数称为该 CW 复形的维数。

定义 5.22. CW 复形 X 称为一个准单纯复形（*Δ−complex*），如果

1. 每个胞腔已指定特征映射 $\sigma\colon \Delta^n\longrightarrow X$，称为代表该胞腔的准单形。
2. 对每个准单形[3]$\sigma\colon\Delta^n\longrightarrow X$ 及每个整数 $0\leqslant i\leqslant n$，奇异单形 $\sigma\circ(e_0\cdots\widehat{e_i}\cdots e_n)\colon\Delta^{n-1}\longrightarrow X$ 都是 X 中的 $n-1$ 维准单形。

定理 5.23 (准单纯同调基本定理)**.** *以 $\Delta_n(X)$ 记以 X 中 n 维准单形为基所生成的自由 Abel 群，则其是 $S_n(X)$ 的子群，在边缘算子下构成一个链复形 $\Delta(X)=\{\Delta_n(X),\partial_n\}$。含入映射 $\imath\colon\Delta(X)\longrightarrow S(X)$ 是拟同构（参考5.9），从而有同构：*

$$H_n(X,R)\cong H_n(\Delta(X)\otimes R)\qquad\qquad H^n(X,R)\cong H^n(\mathrm{Hom}(\Delta(X),R))$$

进一步地，仿照奇异链复形和上链复形定义 cup 积和 cap 积，则还有

$$H^*(X,R)\cong H^*(\mathrm{Hom}(\Delta(X),R))\qquad\qquad H_*(X,R)\cong H_*(\Delta(X)\otimes R)$$

[3]准单形是映射，同一个标准单形的选取不同的次序对应的是不同的准单形。

6 流形

6.1 流形的定向

定义 6.1. 局部同胚与 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑空间称为 n 维流形。不带边的紧流形称为闭流形。

本节考虑的都是闭流形。

定义 6.2. 设 x 是 n 维流形 M 上的一点，$H_n(M, M\setminus x)$ 的一个生成元称为流形在 x 处的（局部）定向。

定义 6.3. 一个流形 M 上的整体定向包括:

- M 的一个开球覆盖 $\{B_i\}$;
- 对每个 B_i 选定 $H_n(M, M\setminus B_i)$ 的一个生成元 α_{B_i}，并且对任何 $x\in B_i$，有典范同构
$$\jmath_x^{B_i}\colon H_n(M, M\setminus B_i) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M\setminus x)$$
而 $\jmath_x^{B_i}(\alpha_{B_i}) = \alpha_x$ 是 $H_n(M, M\setminus x)$ 的生成元。
- 若 $x\in B_i\cap B_j$，则 $\jmath_x^{B_i}(\alpha_{B_i}) = \jmath_x^{B_j}(\alpha_{B_j}) = \alpha_x$。

流形的定向也可以看做一种对应

定义 6.4. 流形 M 上的定向（*orientation*）是指对应 $\alpha\colon x\in M\mapsto \alpha_x\in H_n(M, M\setminus x)$，其中 α_x 是 $H_n(M, M\setminus x)$ 的生成元，并且该对应满足相容性：当 x, y 包含在球 B 中时，有
$$\jmath_y^B(\jmath_x^B)^{-1}(\alpha_x) = \alpha_y$$

当流形 M 上存在定向时，就称为可定向的，否则称为不可定向的。

对于流形的 R 系数同调群，可以类似的定义 R 定向、可 R 定向和不可 R 定向。

命题 6.5. *对任何主理想整环 R，如果流形 M 可（$\mathbb{Z}$）定向，则一定可 R 定向。*

证明. 注意到 $H_n(M, M\setminus x, R)\cong H_n(M, M\setminus x)\otimes R$。 □

6.1.1 一些性质

命题 6.6. *流形 M 可定向当且仅当其每个连通分支可定向。*

命题 6.7. *若流形 M, N 同胚，则它们同时可定向或不可定向。*

命题 6.8. *若 α, β 是连通流形 M 上的两个定向，若存在点 $x_0\in M$ 使得 $\alpha_{x_0} = \beta_{x_0}\in H_n(M, M\setminus x_0)$，则 $\alpha_x = \beta_x, \forall x\in M$。*

推论 6.9. *若流形 M 可（$\mathbb{Z}$）定向，则其定向只有两种：α 和 $-\alpha$。*

命题 6.10. *任何流形都是可 $\mathbb{Z}/2$ 定向的。*

6.1.2 二重覆盖

下面主要讨论 $\mathbb{Z}$ 定向。设 M 是一个连通流形，则 M 有一个二重覆盖 $\widetilde{M} = \{(x,\alpha_x),(x,-\alpha_x)|x \in M\}$。流形 $\widetilde{M}$ 显然是可定向的——其在 (x,α_x) 处的定向是 α_x，在 $(x,-\alpha_x)$ 处的定向是 $-\alpha_x$。

定理 6.11 (二重覆盖判别). 连通流形 M 可定向的充要条件是 $\widetilde{M}$ 有两个连通分支。

推论 6.12. 若流形 M 是单连通的，或者更一般地，其基本群无指数为 2 的子群，则 M 可定向。

注. 连通的二重覆盖对应于基本群的指数为 2 的子群。

6.1.3 与同调群的关系

定理 6.13 (定向与同调群的关系). 设 M 是连通的 n 维闭流形，则

1. 若 M 可定向，则对任意的 $x \in M$，$j_*\colon H_n(M) \longrightarrow H_n(M, M\setminus x) \cong \mathbb{Z}$ 是同构。
2. 若 M 不可定向，则对任意的 $x \in M$，$j_*\colon H_n(M) \longrightarrow H_n(M, M\setminus x) \cong \mathbb{Z}$ 是单的零映射（即 $H_n(M) = 0$）。

定义 6.14. 当流形 M 可定向时，有唯一的同调类 $\alpha \in H_n(M)$，使得对任意的 $x \in M$，$j_*(\alpha) = \alpha_x \in H_n(M, M\setminus x)$，称为流形 M 的基本类，记作 $[M]$。

对于一般的环 R，有类似的结论成立：

定理 6.15 (定向与同调群的关系). 设 M 是连通的 n 维闭流形，则

1. 若 M 可 R 定向，则对任意的 $x \in M$，$j_*\colon H_n(M,R) \longrightarrow H_n(M, M\setminus x, R) \cong R$ 是同构。
2. 若 M 不可 R 定向，则对任意的 $x \in M$，$j_*\colon H_n(M,R) \longrightarrow H_n(M, M\setminus x, R) \cong R$ 是单射，其像为 ${}_2R := \{r \in R|2r = 0\}$。

定义 6.16. 当流形 M 可 R 定向时，有唯一的同调类 $\alpha \in H_n(M,R)$，使得对任意的 $x \in M$，$j_*(\alpha) = \alpha_x \in H_n(M, M\setminus x, R)$，称为流形 M 的R 系数基本类，记作 $[M]$。

定理的证明需要用到引理

引理 6.17. 设 M 是 n 维无边流形，K 是其一个紧致子集，则

- 当 $q > 0$ 时 $H_q(M, M\setminus K, R) = 0$。
- 若 $\alpha\colon x \longrightarrow \alpha_x \in H_n(M, M\setminus x, R) \cong R$ 是 M 的一个 R 定向，则存在唯一的同调类 $\alpha_K \in H_n(M, M\setminus K, R)$ 使得在映射

$$\jmath_x^K\colon H_n(M, M\setminus K, R) \longrightarrow H_n(M, M\setminus x, R)$$

下有 $\jmath_x^K(\alpha) = \alpha_x$ 对任意的 $x \in K$ 成立。

6.2 对偶

定理 6.18 (*Poincaré 对偶*)**.** 设 M 是 n 维闭流形，若 M 可定向，则存在自然同构：

$$D\colon H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M)$$

进一步地，若 $[M]$ 是 M 的基本类，则这个同构可以用 *cap* 积表达：

$$D(\varphi) = [M] \frown \varphi$$

事实上，这个定理对任意系数 R 都成立，特别地有：

定理 6.19 (模 2 的 *Poincaré* 对偶)**.** 设 M 是 n 维闭流形，则存在自然同构：

$$D\colon H^k(M, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M, \mathbb{Z}/2)$$

进一步地，若 $[M]$ 是 M 的基本类，则这个同构可以用 *cap* 积表达：

$$D(\varphi) = [M] \frown \varphi$$

定义 6.20. 设 A, B 是有限生成的 Abel 群，$\phi\colon A \times B \longrightarrow \mathbb{Z}$ 是一个双线性映射，则它事实上还是自由部分的一个双线性映射 $\phi\colon \widetilde{A} \times \widetilde{B} \longrightarrow \mathbb{Z}$。如果 A, B 有相同的秩 r，并且分别有元素 $\{a_1, \cdots, a_r\}$ 和 $\{b_1, \cdots, b_r\}$ 使得它们分别在 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$ 中的投影构成一组基，而且

$$\phi(a_i, b_j) = \delta_{ij}$$

则称 ϕ 是一个对偶配对，$\{a_1, \cdots, a_r\}$ 和 $\{b_1, \cdots, b_r\}$ 为对偶“基”。

定义 6.21. 设 A, B 是域 F 上的有限维线性空间，$\phi\colon A \times B \longrightarrow F$ 是一个双线性映射，如果 A, B 具有相同的维数 r，并且分别有一组基 $\{a_1, \cdots, a_r\}$ 和 $\{b_1, \cdots, b_r\}$，使得

$$\phi(a_i, b_j) = \delta_{ij}$$

则称 ϕ 是一个对偶配对，$\{a_1, \cdots, a_r\}$ 和 $\{b_1, \cdots, b_r\}$ 为对偶基。

命题 6.22 (*Kronecker* 积是对偶配对)**.** 若 X 是有限 CW 复形，则 *Kronecker* 积是 $H^q(X)$ 和 $H_q(X)$ 的一个对偶配对。

命题 6.23 (*Cup* 积是对偶配对)**.** 若 M 是 n 维可定向的闭流形，则双线性映射

$$\begin{aligned} P\colon\ H^q(M) \times H^{n-q}(M) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (\xi, \eta) &\longmapsto \langle \xi \smile \eta, [M] \rangle \end{aligned}$$

命题 6.24 (*Cup* 积是对偶配对)**.** 若 M 是 n 维闭流形，则双线性映射

$$\begin{aligned} P\colon\ H^q(M, \mathbb{Z}/2) \times H^{n-q}(M, \mathbb{Z}/2) &\longrightarrow \mathbb{Z}/2 \\ (\xi, \eta) &\longmapsto \langle \xi \smile \eta, [M] \rangle \end{aligned}$$

第二部分

复习题

题目 1 设 m,n 是两个正整数, 证明: *Abel* 群 $\mathbb{Z}/m$ 与 $\mathbb{Z}/n$ 的张量积 $\mathbb{Z}/m\otimes\mathbb{Z}/n\cong\mathbb{Z}/(m,n)$，其中 (m,n) 是 m 和 n 的最大公因数。

证明. 注意到作为 $\mathbb{Z}-$ 模，$\mathbb{Z}/m\otimes\mathbb{Z}/n$ 实际上是由 $1\otimes 1$ 生成的，故可将其中元素视为形如 $a(1\otimes 1)$，其中 $a\in\mathbb{Z}$。考虑同态

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{Z}/m\otimes\mathbb{Z}/n &\longrightarrow \mathbb{Z}/(m,n) \\ a(1\otimes 1) &\longmapsto \overline{a} \end{aligned}$$

则 f 显然是满射。若 $f(a(1\otimes 1))=0$，则 $(m,n)\mid a$，不妨设 $a=b(m,n)$。由于存在整数 s,t 使得 $sm+tn=(m.n)$，故 $a(1\otimes 1)=b(sm+tn)(1\otimes 1)=bs(m(1)\otimes 1)+bt(1\otimes n(1))=0$。从而 f 是单射，故为同构。 □

证明. 注意到有短正合列

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{m}\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/m\longrightarrow 0$$

以及函子 $-\otimes\mathbb{Z}/n$ 的右正合性，得

$$\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/n\xrightarrow{m\otimes 1}\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/n\longrightarrow\mathbb{Z}/m\otimes\mathbb{Z}/n\longrightarrow 0$$

即 $\mathbb{Z}/m\otimes\mathbb{Z}/n$ 是 $m\otimes 1$ 的余核（cokernel）。

由 $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/n$ 到 $\mathbb{Z}/n$ 的典范同构知 $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/n\xrightarrow{m\otimes 1}\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/n$ 与 $\mathbb{Z}/n\xrightarrow{m}\mathbb{Z}\mathbb{Z}/n$ 等价，而后者的余核是 $(\mathbb{Z}/n)/(m\mathbb{Z}/n)\cong\mathbb{Z}/(m,n)$。故由余核的唯一性得 $\mathbb{Z}/m\otimes\mathbb{Z}/n\cong\mathbb{Z}/(m,n)$。 □

题目 2 求 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ 和 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$。

证明. 取 $\mathbb{Z}$ 模 $\mathbb{Z}/2$ 的自由分解

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{2}\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/2\longrightarrow 0$$

则

$$C\otimes\mathbb{Z}/2\colon\quad\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\xrightarrow{2\otimes 1}\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\longrightarrow 0$$

故

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)=H_n(C\otimes\mathbb{Z}/2)=\begin{cases}0 & n\geqslant 2\\ \mathbb{Z}/2 & n=0,1\end{cases}$$

取 $\mathbb{Z}/2$ 模 $\mathbb{Z}/2$ 的自由分解

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow\mathbb{Z}/2\xrightarrow{1}\mathbb{Z}/2\longrightarrow 0$$

则

$$C\otimes_{\mathbb{Z}/2}\mathbb{Z}/2\colon\quad\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow\mathbb{Z}/2\otimes_{\mathbb{Z}/2}\mathbb{Z}/2\longrightarrow 0$$

故

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)=H_n(C\otimes_{\mathbb{Z}/2}\mathbb{Z}/2)=\begin{cases}0 & n\geqslant 1\\ \mathbb{Z}/2 & n=0\end{cases}$$

□

注. $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$。

题目 3 设 A,B,C 都是 R 模，证明：对任意 n，模同态 $f\colon A\longrightarrow B$ 导出唯一的同态

$$f_*\colon\ \mathrm{Tor}_n^R(A,C)\longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(B,C)$$

证明. 首先，分别取 R 模 A 和 B 的投射分解 $\mathcal{A},\mathcal{B}$，则由零调模型知模同态 $f\colon A\longrightarrow B$ 诱导出同调群的同态 $H_*(\mathcal{A}\otimes C)\longrightarrow H_*(\mathcal{B}\otimes C)$。任取 A 和 B 另外的投射分解 $\mathcal{A}',\mathcal{B}'$，则由零调模型知下图交换

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathcal{A}\otimes C) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n(\mathcal{B}\otimes C) \arrow[d, "\cong"] \\
H_n(\mathcal{A}'\otimes C) \arrow[r] & H_n(\mathcal{B}'\otimes C)
\end{tikzcd}$$

所以 f 所诱导的从 $\mathrm{Tor}_n^R(A,C)$ 到 $\mathrm{Tor}_n^R(B,C)$ 的同态是唯一的。 □

注. 用自由零调模型的话把“投射”改为“自由”。

题目 4 求 *Ext* 群 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/5,\mathbb{Z}/5)$ 和 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}/5}(\mathbb{Z}/5,\mathbb{Z}/5)$。

证明. 取 $\mathbb{Z}$ 模 $\mathbb{Z}/5$ 的自由分解

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow \mathbb{Z}\xrightarrow{5}\mathbb{Z}\longrightarrow \mathbb{Z}/5\longrightarrow 0$$

则

$$\mathrm{Hom}(C,\mathbb{Z}/5)\colon\quad 0\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/5)\xrightarrow{5^*}\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/5)\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots$$

注意到作为 $\mathbb{Z}$ 模，$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/5)\cong\mathbb{Z}/5$ 并且有 $5^*=0$。故

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/5,\mathbb{Z}/5)=H^n(\mathrm{Hom}(C,\mathbb{Z}/5))=\begin{cases}0 & n>1\\ \mathbb{Z}/5 & n=0,1\end{cases}$$

取 $\mathbb{Z}/5$ 模 $\mathbb{Z}/5$ 的自由分解

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow \mathbb{Z}/5\xrightarrow{1}\mathbb{Z}/5\longrightarrow 0$$

则

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/5}(C,\mathbb{Z}/5)\colon\quad 0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/5}(\mathbb{Z}/5,\mathbb{Z}/5)\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots$$

故

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}/5}(\mathbb{Z}/5,\mathbb{Z}/5)=H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/5}(C,\mathbb{Z}/5))=\begin{cases}0 & n>0\\ \mathbb{Z}/5 & n=0\end{cases}$$

□

题目 5 利用泛系数定理求环面 $T = S^1 \times S^1$ 的 $\mathbb{Z}/p$ 系数同调群 $H_*(T, \mathbb{Z}/p)$，其中 p 是一个素数。

证明. 已知环面 T 的整系数同调群为

$$H_n(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n = 1 \\ \mathbb{Z} & n = 0, 2 \\ 0 & n > 2 \end{cases}$$

由泛系数定理，有分裂的短正合列

$$0 \longrightarrow H_0(T) \otimes \mathbb{Z}/p \longrightarrow H_0(T, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow \mathrm{Tor}(0, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow H_1(T) \otimes \mathbb{Z}/p \longrightarrow H_1(T, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_0(T), \mathbb{Z}/p) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow H_2(T) \otimes \mathbb{Z}/p \longrightarrow H_2(T, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_1(T), \mathbb{Z}/p) \longrightarrow 0$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

故

$$H_n(T, \mathbb{Z}/p) \cong H_n(T) \otimes \mathbb{Z}/p = \begin{cases} \mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p & n = 1 \\ \mathbb{Z}/p & n = 0, 2 \\ 0 & n > 2 \end{cases}$$

□

证明. 或者用 Künneth 公式，得分裂短正合列（省略环 $\mathbb{Z}.p$）

$$0 \longrightarrow H_0(S^1) \otimes H_0(S^1) \longrightarrow H_0(T) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow (H_1(S^1) \otimes H_0(S^1)) \oplus (H_0(S^1) \otimes H_1(S^1)) \longrightarrow H_1(T) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow (H_2(S^1) \otimes H_0(S^1)) \oplus (H_1(S^1) \otimes H_1(S^1)) \oplus (H_0(S^1) \otimes H_2(S^1)) \longrightarrow H_2(T) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

于是

$$H_n(T) \cong [H_*(S^1) \otimes H_*(S^1)]_n = \begin{cases} \mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p & n = 1 \\ \mathbb{Z}/p & n = 0, 2 \\ 0 & n > 2 \end{cases}$$

□

题目 6 利用泛系数定理求 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 的各维整系数上同调群 $H^i(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)$。

证明. 已知 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 的整系数同调群为

$$H_n(\mathbb{R}\mathbf{P}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

由泛系数定理，有分裂的短正合列

$$
\begin{gathered}
0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(0,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_0(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}) \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_0(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}) \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}) \longrightarrow 0\\
\cdots \qquad \cdots
\end{gathered}
$$

其中不难计算 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ 以及 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}) = 0$（使用3.5），故得到分裂的短正合列

$$
\begin{gathered}
0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^0(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H^2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0\\
\cdots \qquad \cdots
\end{gathered}
$$

故

$$
H^n(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=0 \\ \mathbb{Z}/2 & n=2 \\ 0 & n=1, n>2 \end{cases}
$$

□

题目 7 已知圆 S^1 是实射影平面 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 的子空间且商空间 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2/S^1 \cong S^2$，证明：商映射 $\pi\colon \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\mathbf{P}^2/S^1 \cong S^2$ 导出非平凡的上同调同态

$$
\pi^*\colon H^2(S^2) \longrightarrow H^2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)
$$

证明. 由于 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2 = S^1 \cup_2 D^2$，所以由相对同调序列的自然性下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & H^2(S^2,\mathrm{Pt}) \arrow[r, "j_1^*"] \arrow[d, "\pi^*"'] & H^2(S^2) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_*"'] & 0 \\
 & H^1(S^1) \arrow[r] & H^2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,S^1) \arrow[r, "j_2^*"] & H^2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

由于 $(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,S^1)$ 是良好的空间偶（参考5.18），故 $H^2(S^2,\mathrm{Pt}) \xrightarrow{\pi^*} H^2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,S^1)$ 是同构。而 j_2^* 是一个满射，j_1^* 是同构，故 $H^2(S^2) \xrightarrow{\pi^*} H^2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)$ 一定非平凡。 □

题目 8 求射影平面 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 的 $\mathbb{Z}/2$ 系数同调群 $H_*(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2)$ 和 $\mathbb{Z}/2$ 系数上同调群 $H^*(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2)$。

证明. 已知 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 的整系数同调群为

$$
H_n(\mathbb{R}\mathbf{P}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=0 \\ \mathbb{Z}/2 & n=1 \\ 0 & n>1 \end{cases}
$$

由泛系数定理，有分裂的短正合列

$$
\begin{gathered}
0 \longrightarrow H_0(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)\otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_0(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{Tor}(0,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)\otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_0(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow H_2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2)\otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0\\
\cdots \qquad \cdots\\
0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(0,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_0(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_0(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0\\
\cdots \qquad \cdots
\end{gathered}
$$

经计算得 $\mathrm{Tor}(H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$（题目2），$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$，$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2),\mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$（参考题目4）。故得到分裂的短正合列

$$
\begin{gathered}
0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_0(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\otimes\mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0\\
\cdots \qquad \cdots\\
0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^0(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^1(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0\\
0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H^2(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0\\
\cdots \qquad \cdots
\end{gathered}
$$

再注意到 $\mathbb{Z}/2\otimes\mathbb{Z}/2\cong\mathbb{Z}/2$，故

$$
H_n(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2)=\begin{cases}\mathbb{Z}/2 & n=0,1,2\\ 0 & n>2\end{cases}\qquad H^n(\mathbb{R}\mathbf{P}^2,\mathbb{Z}/2)=\begin{cases}\mathbb{Z}/2 & n=0,1,2\\ 0 & n>2\end{cases}
$$

□

题目 9 求实射影空间 $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ 的 $\mathbb{Z}/2$ 系数上同调环 $H^*(\mathbb{R}\mathbf{P}^n,\mathbb{Z}/2)$。

证明. 为简化记号，省略系数 $\mathbb{Z}/2$。

首先，n 维实射影空间 $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ 的同调群是

$$
H_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & q=0\text{或}q=n\text{为奇数}\\ \mathbb{Z}/2 & q\text{为奇数}\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases}
$$

由上同调的泛系数定理

$$
0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{q-1}(\mathbb{R}\mathbf{P}^n),\mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n,\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n),\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0
$$

当 $q \leqslant n$ 且为奇数时，$\mathrm{Ext}(H_{q-1}(\mathbb{R}\mathbf{P}^n), \mathbb{Z}/2) = 0, \mathrm{Hom}(H_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n), \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$，故 $H^q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$。

当 $q \leqslant n$ 为偶数时，$\mathrm{Ext}(H_{q-1}(\mathbb{R}\mathbf{P}^n), \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2, \mathrm{Hom}(H_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n), \mathbb{Z}/2) = 0$，故 $H^q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$。

于是 $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ 的 $\mathbb{Z}/2$ 系数上同调群是

$$H^q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & 0 \leqslant q \leqslant n \\ 0 & q > n \end{cases}$$

下面关键是求其乘法结构。

办法一是取 S^n 的八面体剖分：将 S^n 视作 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中满足等式 $\sum |x_i| = 1$ 的点集，该单纯剖分的顶点为各坐标轴上的正负单位点 $e_0^{\pm}, e_1^{\pm}, \cdots, e_n^{\pm}$。

商映射 $\pi\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}\mathbf{P}^n$ 把对径点粘合，从而把上述八面体剖分变成 $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ 的一个准单纯剖分。其中，准单形为

$$a_{i_0}^{\epsilon_0} a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_q}^{\epsilon_q} := \pi \circ (e_{i_0}^{\epsilon_0} e_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots e_{i_q}^{\epsilon_q}) \qquad 0 \leqslant i_0 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_q \leqslant n$$

其中每个 ϵ_i 标明正负号。

由于

$$a_{i_0}^{\epsilon_0} a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_q}^{\epsilon_q} = a_{i_0}^{-\epsilon_0} a_{i_1}^{-\epsilon_1} \cdots a_{i_q}^{-\epsilon_q}$$

故总可将末尾的 ϵ_q 取作 $+$。

考虑 q 维链

$$z_q := \sum_{\epsilon} \epsilon_0 \epsilon_1 \cdots \epsilon_{q-1} a_{i_0}^{\epsilon_0} a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_q}^{+}$$

其中求和号取遍 ϵ 的所有可能。

则不难算得

$$\partial z_q = \begin{cases} 2z_{q-1} & q\text{为偶数} \\ 0 & q\text{为奇数} \end{cases}$$

故其一般不是闭链但一定不是边缘链。

定义 q 维上链

$$\langle \xi^q, a_{i_0}^{\epsilon_0} a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_q}^{\epsilon_q} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{若正负号 } \epsilon \text{ 是交错的} \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

则不难算得

$$\delta \xi^q = \begin{cases} 2\xi^{q+1} & q < n\text{且 } q \text{ 为奇数} \\ 0 & q\text{其他情况} \end{cases}$$

故其一般不是上闭链但一定不是上边缘链。

然而，若考虑 $\mathbb{Z}/2$ 系数的上下同调群，则 $\{z_q\}$ 都是闭链，$\{\xi^q\}$ 都是上闭链，并且对每个 q，$[z_q]$ 和 $[\xi^q]$ 是 $H_q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n, \mathbb{Z}/2)$ 和 $H^q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n, \mathbb{Z}/2)$ 关于 Kronecker 积的对偶基。

经计算，只要 $p + q \leqslant n$，就有

$$\xi^p \smile \xi^q = \xi^{p+q}$$

故若令 $\zeta = [\xi^1]$，则 $H^*(\mathbb{R}\mathbf{P}^n, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[\zeta]/ < \zeta^{n+1} >$。 $\square$

题目 10 设 p 是一个素数，证明：对任何空间 X 和 Y，$H_*(X\times Y,\mathbb{Z}/p)\cong H_*(X,\mathbb{Z}/p)\otimes H_*(Y,\mathbb{Z}/p)$。

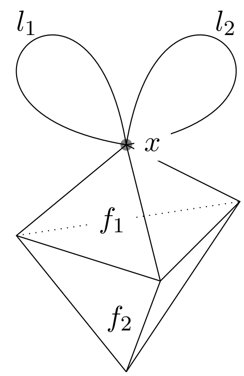
证明. 由于 $\mathbb{Z}/p$ 是一个域，故由拓扑 Künneth 公式之推论得

$$H_n(X\times Y,\mathbb{Z}/p)\cong\bigoplus_{i+j=n}H_i(X,\mathbb{Z}/p)\otimes H_j(Y,\mathbb{Z}/p)$$

□

题目 11 求 $S^1\vee S^1\vee S^2$ 的上同调环并证明：环面 $T=S^1\times S^1$ 不与 $S^1\vee S^1\vee S^2$ 同伦等价。

证明. 取 $X=S^1\vee S^1\vee S^2$ 的准单纯剖分如下（其中 f_1,f_2 的边界及其边界的边界因为在同调群中不出现故未标出，各复形的定向也未标出）：



则 X 的同调群及生成元为

- $H_0(X)=\mathbb{Z}$，生成元为 $[x]$；
- $H_1(X)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$，生成元为 $[l_1],[l_2]$；
- $H_2(X)=\mathbb{Z}$，生成元为 $[f_1-f_2]$。

由于它们都是自由 Abel 群，故由泛系数定理，$H^n(X)\cong\mathrm{Hom}(H_n(X),Z)$，并且其生成元为同调群生成元的对偶。于是 X 的上同调群及生成元为

- $H^0(X)=\mathbb{Z}$，生成元为 $[x]$ 的对偶，记为 ϵ；
- $H^1(X)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$，生成元为 $[l_1],[l_2]$ 的对偶 $[l_1]^*,[l_2]^*$；
- $H^2(X)=\mathbb{Z}$，生成元为 $[f_1-f_2]$ 的对偶，记为 c^*。

将其扩展为链群上的函数，其中由上下边缘算子的对偶（式(1)）得

$$\langle[l_i]^*,\partial f_j\rangle=\langle\delta[l_i]^*,f_j\rangle=0\qquad i,j=1,2$$

从而求得 $[l_1]^*=l_1^*,[l_2]^*=l_2^*$。

故上同调环 $H^*(X)$ 的乘法结构为：

- 由定义，ϵ 是单位元；
- 由分次交换性

$$[l_1]^* \smile [l_1]^* = (-1)[l_1]^* \smile [l_1]^* = 0 \qquad [l_2]^* \smile [l_2]^* = (-1)[l_2]^* \smile [l_2]^* = 0$$

- 由于 f_1, f_2 的边界在 l_1^*, l_2^* 的作用下为 0，故 $\langle [l_1] \smile [l_2], f_1 \rangle = \langle [l_1] \smile [l_2], f_2 \rangle = 0$，即 $[l_1] \smile [l_2] = 0$。

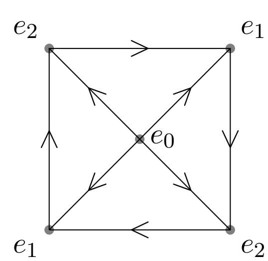
然而，环面的上同调环 $H^*(T)$ 为：

- 分次模：
  - $H^0(T) = \mathbb{Z}$，生成元设为 ϵ；
  - $H^1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$，生成元设为 α, β；
  - $H^2(T) = \mathbb{Z}$，生成元设为 c^*。
- 乘法：
  - ϵ 是单位元；
  - $\alpha \smile \alpha = \beta \smile \beta = 0$；
  - $\alpha \smile \beta = c^*$。

可见环面 $T = S^1 \times S^1$ 与 $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ 的上同调环不同构，故两空间不同伦等价。 □

题目 12 求射影平面 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 的 $\mathbb{Z}/2$ 系数上同调环 $H^*(\mathbb{R}\mathbf{P}^2, \mathbb{Z}/2)$。

证明. 取准单纯剖分如下：



则不难算出 $H^*(\mathbb{R}\mathbf{P}^2, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[\xi]/ < \xi^3 >$。 □

题目 13 求 n 维实射影空间 $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ 的 $\mathbb{Z}/2$ 系数上同调环 $H^*(\mathbb{R}\mathbf{P}^n, \mathbb{Z}/2)$。

证明. 为简化记号，省略系数 $\mathbb{Z}/2$。

$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 的整系数 CW 链复形为

$$\overset{n\text{维}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{1+(-1)^n} \cdots \xrightarrow{0} \overset{\text{偶数维}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2} \overset{\text{奇数维}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \overset{\text{偶数维}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{2} \overset{1\text{维}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \overset{0\text{维}}{\mathbb{Z}}$$

故 $\mathbb{Z}/2$ 系数 CW 链复形为

$$\overset{n\text{维}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} \overset{\text{偶数维}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \overset{\text{奇数维}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \overset{\text{偶数维}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} \overset{1\text{维}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \overset{0\text{维}}{\mathbb{Z}}$$

所以 $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ 的 $\mathbb{Z}/2$ 系数上同调群是

$$H^q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n)=\begin{cases}\mathbb{Z}/2 & 0\leqslant q\leqslant n\\ 0 & q>n\end{cases}$$

设 $H^1(\mathbb{R}\mathbf{P}^n)$ 的生成元为 ξ，为证明 $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ 的 $\mathbb{Z}/2$ 系数上同调环是截断多项式环 $\mathbb{Z}/2[\xi]/_{<\xi^{n+1}>}$，我们对 n 作归纳：

$n=1$ 时显然。

若结论已对 $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n-1}$ 成立，则由典范嵌入 $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n-1}\hookrightarrow\mathbb{R}\mathbf{P}^n$，$H^q(\mathbb{R}\mathbf{P}^n)$ 的生成元是 ξ^q（$q\leqslant n-1$）。由 Poincaré 对偶，$D\colon\varphi\mapsto[\mathbb{R}\mathbf{P}^n]\frown\varphi$ 是从 $H^{n-1}(\mathbb{R}\mathbf{P}^n)$ 到 $H_1(\mathbb{R}\mathbf{P}^n)$ 的同构，故

$$\langle\xi^n,[\mathbb{R}\mathbf{P}^n]\rangle=\langle\xi^{n-1}\frown\xi,[\mathbb{R}\mathbf{P}^n]\rangle=\langle\xi,[\mathbb{R}\mathbf{P}^n]\frown\xi^{n-1}\rangle=1$$

由于 $\mathbb{R}\mathbf{P}^n$ 是有限 CW 复形，故 Kronecker 积是其上下同调群的对偶配对，故由上式知 ξ^n 是 $H^n(\mathbb{R}\mathbf{P}^n)$ 的生成元，从而 $H^*(\mathbb{R}\mathbf{P}^n,\mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2[\xi]/_{<\xi^{n+1}>}$。 $\square$

题目 14 令 x 是环面 T 上一点，求 $T\setminus x$ 的整系数上同调环 $H^*(T\setminus x)$。

证明. 由于 $T\setminus x\simeq S^1\vee S^1$，故 $H^*(T\setminus x)=H^*(S^1\vee S^1)$。其中各维上同调群为

- $H^0(S^1\vee S^1)=\mathbb{Z}$，其生成元设为 ϵ；
- $H^1(S^1\vee S^1)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$，其生成元设为 α,β。

故其上的乘法结构只能为：

- ϵ 是单位元；
- $\alpha\smile\alpha=\beta\smile\beta=0$；
- $\alpha\smile\beta=0$。

$\square$

题目 15 设 M 是任何 n 维闭流形，$x\in M$ 是流形上任何一点，证明：$H_n(M,M\setminus x)\cong\mathbb{Z}$。

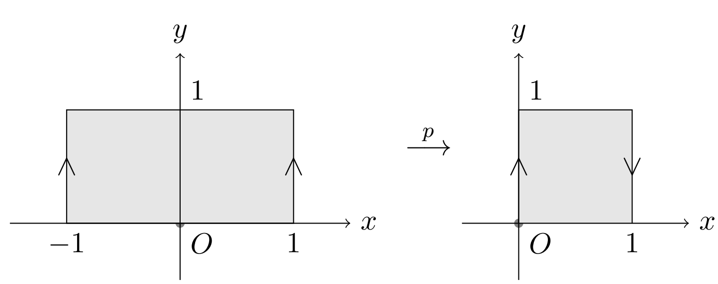
证明. 由于 M 是 n 维闭流形，故存在 x 的邻域 U 同胚于 $\mathbb{R}^n$，于是由切除定理，得

$$H_n(M,M\setminus x)\cong H_n(U,U\setminus x)\cong H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus 0)=\mathbb{Z}$$

$\square$

题目 16 试证明 *Möbius* 带 M 是不可定向的，因而 *Möbius* 带 M 不与环带 $S^1\times\mathbb{R}$ 同胚。

证明. 构做二重覆盖 $p\colon S^1\times\mathbb{R}\longrightarrow M$ 如下：

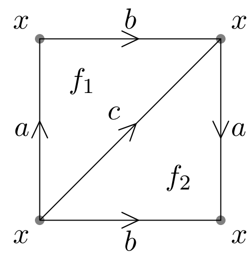


$$p\colon\ S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow M$$
$$(\pm x, y) \longmapsto (x, y)$$

则由于 $S^1 \times \mathbb{R}$ 是连通的，故由二重覆盖判别（cf. 6.11），Möbius 带 M 不可定向。 □

题目 17 试证明 *Klein* 瓶 K 是不可定向的, 因而它不与环面 T 同胚。

证明. 取准单纯剖分如下：



则经计算，得：

$$\partial a = \partial b = \partial c = 0$$
$$\partial f_1 = b - c + a \qquad \partial f_2 = a - b + c$$

从而可计算得 K 的同调群及生成元为

- $H_0(K) = \mathbb{Z}$，生成元为 $[x]$；
- $H_1(K) = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}$，生成元为 $[a], [b]$；
- $H_q(K) = 0$，当 $q \geqslant 2$ 时。

由于 K 是 2 维流形，故其可定向当且仅当 $H_2(K) = \mathbb{Z}$，而事实上 $H_2(K) = 0$。

然而环面 T 是可定向的，事实上，$H_2(T) = \mathbb{Z}$。 □

证明. 也可以用题16中的办法构做二重覆盖 $p\colon T \longrightarrow K$，则同理可证。 □

题目 18 证明：如果 n 维闭流形 M 可 R 定向, 则 M 的 R 系数同调群 $H_n(M, R) \cong R$，其中 R 是一个主理想整环。

证明. 我们有引理6.17成立，故令 $K = M$ 得：存在唯一的同调类 $\alpha \in H_n(M, R)$ 使得在映射

$$\jmath_x\colon H_n(M, R) \longrightarrow H_n(M, M \setminus x, R)$$

下有 $\jmath_x(\alpha) = \alpha_x$ 对任意的 $x \in M$ 成立。注意到 α_x 是 $H_n(M, M \setminus x, R)$ 的生成元，故 $\jmath_x$ 是满射。只须证明 $\jmath_x$ 还是单射。

若还有 $\beta \in H_n(M, R)$ 使得 $\jmath_x(\beta) = \alpha_x$，我们证明：$\beta$ 在映射 $\jmath_x, x \in M$ 下成为 M 的一个定向。

任取包含 x 的开球 B，则有同构

$$\jmath_y^B\colon H_n(M, M \setminus B, R) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M \setminus y, R)$$

令 $\jmath\colon H_n(M,R) \longrightarrow H_n(M,M\setminus B,R)$，则有 $\jmath_x^B\circ\jmath=\jmath_x$，故 $\jmath(\alpha)=\jmath(\beta)$ ，于是

$$\jmath_y(\beta)=\jmath_y^B\circ\jmath(\beta)=\jmath_y^B\circ\jmath(\alpha)=\jmath_y(\alpha)$$

由于 M 是连通的，故对任意的 $y\in M$，都有 $\jmath_y(\beta)=\jmath_y(\alpha)$，故由引理6.17中定向类的唯一性，$\alpha=\beta$，即 $\jmath$ 是单射。故 $H_n(M,R)\cong H_n(M,M\setminus x,R)\cong R$。 □

题目 19 证明：任何 n 维闭流形 M 的 $\mathbb{Z}/2$ 系数同调群 $H_n(M,\mathbb{Z}/2)$ 一定同构于 $\mathbb{Z}/2$。

证明. 对任何 $x\in M$，$H_n(M,M\setminus x,\mathbb{Z}/2)\cong\mathbb{Z}/2$ 只有一个非零元同时也是生成元 α_x，并且，对任何球体 B 中的两点 $x,y\in B$，有如下同构

$$H_n(M,M\setminus y)\xleftarrow{\jmath_y^B}H_n(M,M\setminus B)\xrightarrow{\jmath_x^B}H_n(M,M\setminus x)$$

于是 $\jmath_y^B(\jmath_x^B)^{-1}(\alpha_x)=\alpha_y$，否则 $\jmath_y^B(\jmath_x^B)^{-1}(\alpha_x)=0$ 与其为同构矛盾。

这样，流形 M 可 $\mathbb{Z}/2$ 定向，故由定向与同调群的关系（定理6.15），$H_n(M,\mathbb{Z}/2)$ 一定同构于 $\mathbb{Z}/2$。 □

题目 20 利用 *Künneth* 公式求 $S^n\times S^m$ 的同调群。

证明. 已知 S^n 的同调群为

$$H_q(S^n)=\delta_q^0\mathbb{Z}\oplus\delta_q^n\mathbb{Z}$$

于是对任意的 i,j，有 $\mathrm{Tor}(H_i(S^n),H_j(S^m))=0$。故由 Künneth 公式，得

$$H_q(S^n\times S^m)\cong[H_*(S^n)\otimes H_*(S^m)]_q=\delta_q^0\mathbb{Z}\oplus\delta_q^n\mathbb{Z}\oplus\delta_q^m\mathbb{Z}\oplus\delta_q^{n+m}\mathbb{Z}$$

□

题目 21 试利用 $S^m\times S^n$ 可定向推导出它的上同调环结构 $H^*(S^m\times S^n)$。

证明. 由上一题知

$$H_q(S^n\times S^m)=\delta_q^0\mathbb{Z}\oplus\delta_q^n\mathbb{Z}\oplus\delta_q^m\mathbb{Z}\oplus\delta_q^{n+m}\mathbb{Z}$$

于是对任意的 q，有 $\mathrm{Ext}^1(H_q(S^m\times S^n),\mathbb{Z})=0$，故由上同调群的泛系数定理，

$$H^q(S^n\times S^m)\cong H_q(S^n\times S^m)=\delta_q^0\mathbb{Z}\oplus\delta_q^n\mathbb{Z}\oplus\delta_q^m\mathbb{Z}\oplus\delta_q^{n+m}\mathbb{Z}$$

设其生成元依次为 $[\epsilon],[\alpha],[\beta],[\sigma]$。

以 $\delta^0\mathbb{Z}\oplus\delta^n\mathbb{Z}$ 记分次环 $\{\delta_q^0\mathbb{Z}\oplus\delta_q^n\mathbb{Z}\}$ 其上的乘法是平凡的。

由于 $m+n$ 维闭流形 $S^m\times S^n$ 可定向，故由 Poincaré 对偶，$D\colon\varphi\mapsto[S^m\times S^n]\frown\varphi$ 是从 $H^n(S^m\times S^n)$ 到 $H_m(S^m\times S^n)$ 的同构，故

$$\langle\alpha\smile\beta,[S^m\times S^n]\rangle=\langle\beta,[S^m\times S^n]\frown\alpha\rangle=1$$

由于 $S^m\times S^n$ 是有限 CW 复形，故 Kronecker 积是其上下同调群的对偶配对，故由上式知 $\alpha\smile\beta$ 是 $H^n(S^m\times S^n)$ 的生成元，从而 $H^*(S^m\times S^n)=(\delta^0\mathbb{Z}\oplus\delta^n\mathbb{Z})\otimes(\delta^0\mathbb{Z}\oplus\delta^m\mathbb{Z})$。 □

索引