黎曼几何笔记

Gau Syu

2013 年 6 月 11 日

Preface

这是 2013 年春季学期南开大学数学科学学院黄利兵老师的研究生课程“黎曼几何”的笔记。

主要内容

1. 黎曼联络
2. 测地线及其变分问题
3. 曲率

   以上是基础内容。

4. 曲率与拓扑之间的关系

   例如 G-B-Chern 公式。

   又如完备 +“$k \geqslant \varepsilon$”$\Longrightarrow$ 紧、直径有限；完备 +“$k \leqslant 0$”$\Longrightarrow$ 拓扑同胚于欧式空间。

教材

陈维桓，李兴校，《黎曼几何引论》（上），北京大学出版社。

参考书

叫《Riemannian Geometry》的书不少。[Pet10] 虽然错误较多，但易于上手；[dC92] 受到许多推崇。

[Boo86] 图多易读，推荐！

同上学期的《微分几何》课程一样，[Spi99] 是值得参考的文献。

鼎鼎大名的 [KN09] 内容丰富，上学期内容相当于其第 1、2、4 章，推荐其 6、7、8 章作为本学期参考资料。

参考文献

[Boo86] W.M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry (2nd Ed)*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1986.

[dC92] M.P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, 1992.

[KN09] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry Set*. Wiley Classics Library. Wiley, 2009.

[Pet10] P. Petersen. *Riemannian Geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2010.

[Spi99] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. 2*. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish, 1999.

目录

第一部分

黎曼联络

1 切丛上的联络

2013-2-22

设 M 是光滑流形，TM 为其切丛。

定义 1.1. 若映射 $\mathrm{D}\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$ 满足（记 $\mathrm{D}(X,Y)$ 为 $\mathrm{D}_X Y$）

1. D 关于 X 是函数线性（$C^\infty(M)-$ 线性）的，即

$$\mathrm{D}_{X_1+fX_2}Y=\mathrm{D}_{X_1}Y+f\,\mathrm{D}_{X_2}Y$$

2. D 关于 Y 是导数，即

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_X(Y_1+Y_2)&=\mathrm{D}_X Y_1+\mathrm{D}_X Y_2\\ \mathrm{D}_X(fY)&=X(f)Y+f\,\mathrm{D}_X Y\end{aligned}$$

则称 D 为 M 上的仿射联络，也称为 TM 上的联络。

命题 1.2. D 具有局部性。即若在开集 U 上有 $X_1|_U=X_2|_U,Y_1|_U=Y_2|_U$，则

$$(\mathrm{D}_{X_1}Y_1)|_U=(\mathrm{D}_{X_2}Y_2)|_U$$

证明. 我们分别证明：

1. 对任意的 Y，$(\mathrm{D}_{X_1}Y)|_U=(\mathrm{D}_{X_2}Y)|_U$
2. 对任意的 X，$(\mathrm{D}_X Y_1)|_U=(\mathrm{D}_X Y_2)|_U$

对任意 $p\in U$，取开集 W，$p\in W\subset U$ 及函数 f，使得 $f|_{M\setminus U}=0, f|_W=1$，则

$$\begin{aligned}&f(X_1-X_2)\equiv 0\\ \Longrightarrow&\mathrm{D}_{f(X_1-X_2)}Y\equiv 0\\ \Longrightarrow&f\,\mathrm{D}_{X_1-X_2}Y\equiv 0\\ \Longrightarrow&\ (\mathrm{D}_{X_1-X_2}Y)|_p=0\end{aligned}$$

从而 $(\mathrm{D}_{X_1-X_2}Y)|_U=0$，即得 1。
取同样的 f，则 $\mathrm{D}_X f(Y_1-Y_2)=0$。而

$$\mathrm{D}_X f(Y_1-Y_2)=X(f)(Y_1-Y_2)+f\,\mathrm{D}_X(Y_1-Y_2)$$

在 p 点，有 $(X(f)(Y_1-Y_2))|_p=0$，从而 $\mathrm{D}_X(Y_1-Y_2)|_p=0$，即得 2。 □

从而可以局部地考虑联络。

定义 1.3. 在局部上取标架场 $\{e_i\}$，可设

$$\mathrm{D}_{e_i} e_j = \Gamma_{ji}^k e_k$$

称 Γ_{ji}^k 为关于标架场 $\{e_i\}$ 的联络系数。

局部上，联络由联络系数决定：设 $X = X^i e_i, Y^j e_j$，则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_X Y \\
=&\mathrm{D}_{X^i e_i}(Y^j e_j) \\
=&X^i \mathrm{D}_{e_i}(Y^j e_j) \\
=&X^i(e_i(Y^j)e_j + Y^j \Gamma_{ji}^k e_k) \\
=&X^i(e_i(Y^k) + Y^j \Gamma_{ji}^k) e_k
\end{aligned}$$

定义 1.4. 称 $\omega_j^k \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{ji}^k \omega^i$ 为上述联络在标架场 $\{e_i\}$ 下的联络形式。

这时可写

$$\mathrm{D}.\, e_j = \omega_j^k \otimes e_k$$

（因为 $\mathrm{D}_{e_i} e_j = \omega_j^k(e_i) e_k = \Gamma_{ji}^k e_k$。）

问题 1.1. 若另取标架场 $\{\widetilde{e}_i\}$，相应的联络形式为 $\widetilde{\omega}_j^k$，问 ω_j^k 与 $\widetilde{\omega}_j^k$ 之关系。

证明. 不妨设 $\widetilde{e}_i = a_i^j e_j$，则

一方面

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}.\, \widetilde{e}_i &= \widetilde{\omega}_j^k \otimes \widetilde{e}_k \\
&= \widetilde{\omega}_j^k \otimes a_k^l e_l \\
&= a_k^l \widetilde{\omega}_i^k \otimes e_l
\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}.(a_i^j e_j) &= \mathrm{d}\, a_i^j \otimes e_j + a_i^j \, \mathrm{D}.\, e_j \\
&= \mathrm{d}\, a_i^j \otimes e_j + a_i^j \omega_j^k \otimes e_k \\
&= (\mathrm{d}\, a_i^l + a_i^j \omega_j^l) \otimes e_l
\end{aligned}$$

（注意 $X(f)Y = (\mathrm{d}\, f \otimes Y)(X)$）

故得

$$a_k^l \widetilde{\omega}_i^k = \mathrm{d}\, a_i^l + a_i^j \omega_j^l$$

若记 $a = (a_i^j), \omega = (\omega_j^l), \widetilde{\omega} = (\widetilde{\omega}_i^k)$，则上式变成

$$\widetilde{\omega} \cdot a = \mathrm{d}\, a + a \cdot \omega$$

从而

$$\widetilde{\omega} = (\mathrm{d}\, a) \cdot a^{-1} + a \cdot \omega \cdot a^{-1}$$

□

挠率与曲率

定义 1.5. 设 D 为 M 上的仿射联络，定义 $T\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$ 如下

$$T(X,Y)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{D}_X Y-\mathrm{D}_Y X-[X,Y]$$

则 T 是 $(1,2)$ 型张量场，称为仿射联络 D 的挠率[1]张量。

证明. 由于 $T(X,Y)=-T(Y,X)$，故只需验证 T 关于 X 是函数线性的，即

$$T(fX,Y)=fT(X,Y)$$

事实上

$$\begin{aligned}T(fX,Y)&=\mathrm{D}_{fX}Y-\mathrm{D}_Y(fX)-[fX,Y]\\&=f\,\mathrm{D}_X Y-Y(f)X-f\,\mathrm{D}_Y X+Y(f)X-f[X,Y]\\&=fT(X,Y)\end{aligned}$$

□

定义 1.6. 设 D 为 M 上的仿射联络，定义 $\mathcal{R}\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$ 如下

$$\mathcal{R}(X,Y,Z)\overset{\text{def}}{=}{}^{2}\,\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_Z X-\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_Y X-\mathrm{D}_{[Y,Z]}X$$

则 $\mathcal{R}$ 是 $(1,3)$ 型张量场，称为仿射联络 D 的曲率张量。

证明. 由于 $\mathcal{R}(X,Y,Z)=-\mathcal{R}(X,Z,Y)$，故只需验证

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(fX,Y,Z)&=f\mathcal{R}(X,Y,Z)\\\mathcal{R}(X,fY,Z)&=f\mathcal{R}(X,Y,Z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(fX,Y,Z)&=\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_Z(fX)-\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_Y(fX)-\mathrm{D}_{[Y,Z]}(fX)\\&=f\mathcal{R}(X,Y,Z)+\mathrm{D}_Y(Z(f)X)+Y(f)\,\mathrm{D}_Z X-\mathrm{D}_Z(Y(f)X)-Z(f)\,\mathrm{D}_Y X-[Y,Z](f)X\\&=f\mathcal{R}(X,Y,Z)+Y(Z(f))X-Z(Y(f))X-[Y,Z](f)X\\&=f\mathcal{R}(X,Y,Z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X,fY,Z)&=\mathrm{D}_{fY}\mathrm{D}_Z X-\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_{fY}X-\mathrm{D}_{[fY,Z]}X\\&=f\,\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_Z X-\mathrm{D}_Z(f\,\mathrm{D}_Y X)-\mathrm{D}_{f[Y,Z]-Z(f)Y}X\\&=f\mathcal{R}(X,Y,Z)-Z(f)\,\mathrm{D}_Y X+Z(f)\,\mathrm{D}_Y X\\&=f\mathcal{R}(X,Y,Z)\end{aligned}$$

□

[1]术语“挠率（torsion）”并不一定与弯曲有关，其出现在不同地方时含义不一定有联系。

[2]也记作 $\mathcal{R}(Y,Z)X$。

定义 1.7. 若仿射联络 D 的挠率 $T \equiv 0$，则称 D 是“无挠的”（torsion-free）。

命题 1.8. D 是无挠的，当且仅当它在自然标架下的联络系数 Γ_{ji}^k 满足

$$\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$$

证明. $T \equiv 0$ 等价于 $T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = 0$，而

$$T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}) - \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(\frac{\partial}{\partial x^i}) - [\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}]$$

上式 $= 0$ 等价于

$$\Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = 0$$

而这等价于 $\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$。 □

注. 由于

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_X Y &= X^i (e_i(Y^k) + Y^j \Gamma_{ji}^k) e_k \\ &= (X(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ji}^k) e_k \end{aligned}$$

可见 $\mathrm{D}_X Y$ 在一点 p 的值，取决于 $X(p)$ 和 Y 在 p 附近的值。

进一步地，若 $\gamma(t)$ 在 $t = 0$ 处的切向量为 $X(p)$，则 $(\mathrm{D}_X Y)|_p$ 取决于 $X(p)$ 和 Y 沿 $\gamma(t)$（在 $t = 0$ 附近）的值。

平行与测地线

定义 1.9. 对于曲线 $\gamma \colon [a, b] \longrightarrow M$ 和沿 γ 定义的向量场 Y，定义

$$\mathrm{D}_{\dot\gamma} Y = (\dot\gamma(Y^k) + \dot\gamma^i Y^j \Gamma_{ji}^k) e_k$$

其中 $\{e_k\}$ 是沿 γ 定义的标架场。

称 $\mathrm{D}_{\dot\gamma} Y$ 为 Y 沿曲线 γ 的协变导数（covariant derivation）。若 $\mathrm{D}_{\dot\gamma} Y = 0$，则称 Y 沿 γ 是平行的。

定义 1.10. 若曲线 γ 满足

$$\mathrm{D}_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$$

则称 γ 是仿射联络 D 的测地线。

命题 1.11. γ 是测地线，当且仅当 $\ddot\gamma^k + \dot\gamma^i \dot\gamma^j \Gamma_{ji}^k = 0$。

证明. 在局部坐标系 (U, x^i) 中，设 $\gamma(t)$ 的坐标为

$$(\gamma^1(t), \cdots, \gamma^n(t))$$

则 $\dot\gamma = \dot\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，这时

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\dot\gamma} \dot\gamma &= (\dot\gamma(\dot\gamma^k) + \dot\gamma^i \dot\gamma^j \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} \dot\gamma^k(\gamma(t)) + \dot\gamma^i \dot\gamma^j \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= (\ddot\gamma^k + \dot\gamma^i \dot\gamma^j \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

□

例 1.12. $\mathbb{R}^n$，取 D 为方向导数，即 $\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=0$，即 $\Gamma^k_{ji}=0$。

$$\mathrm{D}_v(Y^j\frac{\partial}{\partial x^j})=v(Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

因此 $\mathbb{R}^n$ 的测地线 γ 满足方程

$$\ddot{\gamma}^k=0$$

从而 $\gamma^k(t)=a^k+b^kt$。其中 a^k,b^k 是常数。

从而 $\gamma(t)=a+bt$，其中 $a,b\in\mathbb{R}^n$。

定义 1.13. 若一一映射 $f\colon M\longrightarrow M$ 满足"当 γ 是仿射联络 D 的测地线时，$f(\gamma)$ 也是 D 的测地线"，则称 f 为仿射变换。

2013-3-1

回顾

1. M 上的仿射联络

   $\mathrm{D}\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$ 满足

   1) $\mathrm{D}_{X_1+fX_2}Y=\mathrm{D}_{X_1}Y+f\,\mathrm{D}_{X_2}Y$
   2) $\mathrm{D}_X(Y_1+fY_2)=\mathrm{D}_X Y_1+X(f)Y_2+f\,\mathrm{D}_X Y_2$

2. 取定局部标架场 $\{e_i\}$，可定义联络系数

$$\mathrm{D}_{e_i}e_j=\Gamma^k_{ji}e_k$$

   及联络形式

$$\omega^k_j=\Gamma^k_{ji}\omega^i$$

3. 挠率张量

$$T(X,Y)=\mathrm{D}_X Y-\mathrm{D}_Y X-[X,Y]$$

4. 曲率张量

$$\mathcal{R}(X,Y,Z)=\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_Z X-\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_Y X-\mathrm{D}_{[Y,Z]}X$$

5. 无挠（$T\equiv 0$）等价于在自然标架下的联络系数满足 $\Gamma^k_{ji}=\Gamma^k_{ij}$。

6. 仿射联络具有局部性

$$\mathrm{D}_{X^i\frac{\partial}{\partial x^i}}Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}=(X(Y^k)+X^iY^j\Gamma^k_{ji})\frac{\partial}{\partial x^k}$$

7. 若曲线 γ 满足 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$，则称 γ 是仿射联络 D 的测地线。

补充

固定 $X\in\mathfrak{X}(M)$，则 D_X 是从 $\mathfrak{X}(M)$ 到 $\mathfrak{X}(M)$ 的算子。
约定 $\mathrm{D}_X(f)=X(f)$，则算子 D_X 可作用在任何张量场上，只需：

1. 保持张量类型；

2. 满足 Leibniz 法则，即对任意张量场 τ,σ 有

$$\mathrm{D}_X(\tau\otimes\sigma)=(\mathrm{D}_X\tau)\otimes\sigma+\tau\otimes(\mathrm{D}_X\sigma)$$

3. 与缩并（对应的上下标遍历求和，例如 $(1,1)$ 型张量，即矩阵，缩并后得到标量为其对角线元素之和）可交换。

例 1.14. 若 ω 是 $1-$ 形式，则

$$(\mathrm{D}_X\omega)(Y)=\mathrm{D}_X(\omega(Y))-\omega(\mathrm{D}_X Y)$$

例 1.15. 若 τ 是 $(0,2)$ 型张量场，则

$$(\mathrm{D}_X\tau)(Y,Z)=\mathrm{D}_X(\tau(Y,Z))-\tau(\mathrm{D}_X Y,Z)-\tau(Y,\mathrm{D}_X Z)$$

2 黎曼度量

2013-3-1

历史渊源：黎曼。

想法：将曲线长度定义为沿曲线的切向量长度之积分。

定义 2.1. 若流形 M 上有一个光滑的 $(0,2)$ 型张量场 g，且 $\forall x \in M$，$\mathrm{g}|_x$ 是 T_xM 上的内积，则称 g 是 M 上的黎曼度量（黎曼结构），称 (M, g) 为黎曼流形。

例 2.2. 在 $\mathbb{R}^n$ 中取坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$，令

$$\mathrm{g} = \mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^1 + \cdots + \mathrm{d}\,x^n \otimes \mathrm{d}\,x^n$$

则 g 是 $\mathbb{R}^n$ 的黎曼度量。

证明. 需验证

1. $\mathrm{g}(X_p, Y_p) = \mathrm{g}(Y_p, X_p)$
2. $\mathrm{g}(X_p, X_p) \geqslant 0 \vDash X_p = 0$

令 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$，则

$$\mathrm{g}(X_p, Y_p) = (X^1Y^1 + \cdots + X^nY^n)\big|_p$$

□

例 2.3. 设 $f\colon M \longrightarrow N$ 是浸入（f_* 满秩），g 是 N 上的黎曼度量，则 $f^*\mathrm{g}$ 是 M 上的黎曼度量（称为诱导度量）

证明.

$$(f^*\mathrm{g})(X, Y) = \mathrm{g}(f_*X, f_*Y)$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{g}(f_*X, f_*X) = 0 \\ \Longrightarrow & f_*X = 0 \\ \Longrightarrow & X = 0 \end{aligned}$$

□

例 2.4. 设 $i\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是标准嵌入。利用球极投影建立 S^n 上的局部坐标系 $(u^1, \cdots, u^n)$，则

$$i(u) = (\frac{|u|^2 - 1}{|u|^2 + 1}, \frac{2u}{|u|^2 + 1})$$

可见

$$
\begin{aligned}
i^*\,\mathrm{g} &= \mathrm{d}\,\frac{|u|^2-1}{|u|^2+1}\otimes\mathrm{d}\,\frac{|u|^2-1}{|u|^2+1}+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}\,\frac{2u^k}{|u|^2+1}\otimes\mathrm{d}\,\frac{2u^k}{|u|^2+1}\\
&\quad\text{（记}\phi=\frac{2}{|u|^2+1}\text{，则 }\mathrm{d}\,\phi=-\phi^2\sum_{k=1}^{n}u^k\,\mathrm{d}\,u^k\text{）}\\
&=\mathrm{d}(1-\phi)\otimes\mathrm{d}(1-\phi)+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}(\phi u^k)\otimes\mathrm{d}(\phi u^k)\\
&=\mathrm{d}\,\phi\otimes\mathrm{d}\,\phi+\sum_{k=1}^{n}(u^k\,\mathrm{d}\,\phi+\phi\,\mathrm{d}\,u^k)\otimes(u^k\,\mathrm{d}\,\phi+\phi\,\mathrm{d}\,u^k)\\
&=(1+|u|^2)\,\mathrm{d}\,\phi\otimes\mathrm{d}\,\phi+\phi^2\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}\,u^k\otimes\mathrm{d}\,u^k+\phi\sum_{k=1}^{n}(u^k\,\mathrm{d}\,u^k\otimes\mathrm{d}\,\phi+\mathrm{d}\,\phi\otimes u^k\,\mathrm{d}\,u^k)\\
&=\frac{4\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}\,u^k\otimes\mathrm{d}\,u^k}{(|u|^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

例 2.5. 设 G 是李群，$e_1,\cdots,e_n$ 是 T_1G 的一组基，$X_1,\cdots,X_n$ 是相应于 $e_1,\cdots,e_n$ 的右不变向量场，定义 $(0,2)$ 型张量 g 如下：

$$\mathrm{g}(X_i,X_j)=\delta_{ij}$$

则 g 是 G 上的黎曼度量。

可以验证：g 是右不变的，即

$$R_a^*\,\mathrm{g}=\mathrm{g}$$

证明.

$$R_a^*\,\mathrm{g}(X_i,X_j)=\mathrm{g}(R_{a*}X_i,R_{a*}X_j)=\mathrm{g}(X_i,X_j)$$

□

定义 2.6. 如不要求 $\mathrm{g}|_x$ 正定，只要求 $\mathrm{g}|_x$ 对称、非退化，则称张量 g 为伪黎曼度量。

例 2.7. 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中取坐标系 $(x^0,x^1,\cdots,x^n)$，定义（约定 $\alpha\cdot\beta=\frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta+\beta\otimes\alpha)$）

$$L=-(\mathrm{d}\,x^0)^2+(\mathrm{d}\,x^1)^2+\cdots+(\mathrm{d}\,x^n)^2$$

则 L 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的伪黎曼度量，称为Lorentz 度量。

例 2.8. 考虑

$$H^n\overset{\mathrm{def}}{=}\left\{(x^0,x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^{n+1}\middle|-(x^0)^2+(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2=-1,x^0>0\right\}$$

设 $i\colon H^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ 是标准嵌入，则 i^*L 是 H^n 上的黎曼度量。

证明. 利用球极投影建立 H^n 上的局部坐标系 $(u^1,\cdots,u^n)$，则

$$i(u)=(\frac{|u|^2+1}{1-|u|^2},\frac{2u}{1-|u|^2})$$

可见

$$
\begin{aligned}
i^* \mathrm{g} &= -\mathrm{d}\,\frac{|u|^2+1}{1-|u|^2} \otimes \mathrm{d}\,\frac{|u|^2+1}{1-|u|^2} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\,\frac{2u^k}{1-|u|^2} \otimes \mathrm{d}\,\frac{2u^k}{1-|u|^2} \\
&\quad （记\phi = \frac{2}{1-|u|^2}，则\, \mathrm{d}\,\phi = \phi^2 \sum_{k=1}^{n} u^k \,\mathrm{d}\, u^k） \\
&= -\mathrm{d}(\phi-1) \otimes \mathrm{d}(\phi-1) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}(\phi u^k) \otimes \mathrm{d}(\phi u^k) \\
&= -\mathrm{d}\,\phi \otimes \mathrm{d}\,\phi + \sum_{k=1}^{n} (u^k \,\mathrm{d}\,\phi + \phi \,\mathrm{d}\, u^k) \otimes (u^k \,\mathrm{d}\,\phi + \phi \,\mathrm{d}\, u^k) \\
&= (|u|^2-1)\,\mathrm{d}\,\phi \otimes \mathrm{d}\,\phi + \phi^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\, u^k \otimes \mathrm{d}\, u^k + \phi \sum_{k=1}^{n} (u^k \,\mathrm{d}\, u^k \otimes \mathrm{d}\,\phi + \mathrm{d}\,\phi \otimes u^k \,\mathrm{d}\, u^k) \\
&= -\frac{2}{\phi}(\mathrm{d}\,\phi)^2 + \phi^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\, u^k \otimes \mathrm{d}\, u^k + \frac{2}{\phi}(\mathrm{d}\,\phi)^2 \\
&= \frac{4\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}\, u^k \otimes \mathrm{d}\, u^k}{(1-|u|^2)^2}
\end{aligned}
$$

□

例 2.9. 若 $(M_1, \mathrm{g}_1), (M_2, \mathrm{g}_2)$ 都是黎曼度量，则在 $M_1 \times M_2$ 上可定义黎曼度量

$$\mathrm{g} \overset{\text{def}}{=} \pi_1^* \mathrm{g}_1 + \pi_2^* \mathrm{g}_2$$

其中 $\pi_i^* \colon M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$ 是投影。

证明.

$$T_{(x_1,x_2)}(M_1 \times M_2) \cong T_{x_1} M_1 \oplus T_{x_2} M_2$$

□

相关问题

问题 2.1 (等价性问题). 给定 M 上的两个黎曼度量 $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2$，是否存在变换 $f \colon M \longrightarrow M$，使 $f^* \mathrm{g}_1 = \mathrm{g}_2$。[3]

问题 2.2 (测地线问题). 主要有：

1. 紧流形上的闭测地线问题。

[相关著名猜想] n 维紧黎曼流形至少有 n 条测地线。

2. 测地线在遍历论上的应用。

可参考 [TS05]。

问题 2.3 (几何变换). 主要考虑下面三种：

[3] 一般地，考虑黎曼流形 $(M, \mathrm{g}), (M', \mathrm{g}')$。若微分同胚 $f \colon M \longrightarrow M'$ 满足 $f^* \mathrm{g}' = \mathrm{g}$，则称为等距同构（isometry），是黎曼流形范畴中的同构。若 f 只是局部微分同胚，则称为局部等距同构。

1. 仿射变换

2. 射影变换

3. 共形变换

保持夹角的变换，即满足

$$\frac{\mathrm{g}(f_*u, f_*v)}{|f_*u||f_*v|} = \frac{\mathrm{g}(u,v)}{|u||v|} \ (|u| = \sqrt{\mathrm{g}(u,u)})$$

这个条件等价于

$$\exists \rho \in C^\infty(M), \text{s.t. } f^*\,\mathrm{g} = \rho\,\mathrm{g}$$

猜想 2.4 (Lichnerowicz-Obata)**.** 若 $(M, \mathrm{g}) \neq (\mathbb{R}^n, m)$ 且 $\neq (S^n, m)$ 则 (M, g) 的任一共形变换都是 $(M, \rho\,\mathrm{g})$ 的等距变换。

可参考 [Lic77]。

参考文献

[Lic77] A. Lichnerowicz. *Geometry of groups of transformations.* Noordhoff International Publishing, 1977.

[TS05] S.L. Tabačnikov and Pennsylvania State University. Mathematics Advanced Study Semesters. *Geometry and Billiards.* Student Mathematical Library. American Math. Soc., 2005.

2013-3-8

回顾

1. M 上的仿射联络

   $\mathrm{D}\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$ 满足

   1) $\mathrm{D}_{X+fY}Z=\mathrm{D}_X Z+f\,\mathrm{D}_Y Z$

   2) $\mathrm{D}_X(Y+fZ)=\mathrm{D}_X Y+X(f)Z+f\,\mathrm{D}_X Z$

2. M 上的黎曼度量

   对称、正定的 $(0,2)$ 型张量场。

3 黎曼联络

2013-3-8

定理 3.1 (黎曼几何基本定理)**.** 给定黎曼流形 (M,g)，则存在唯一的仿射联络 D，满足

1. 无挠：

$$\mathrm{D}_X Y-\mathrm{D}_Y X=[X,Y],\ \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

2. 与度量相容：

$$\mathrm{D}_X\,\mathrm{g}=0,\ \forall X\in\mathfrak{X}(M)$$

称这样的联络为黎曼联络。

证法一（*By Koszul*）. 可参考 [Cha06]，主要想法：利用条件直接写出 D_XY 的表达式。

由无挠，得

$$\mathrm{g}(\mathrm{D}_X Y,Z)-\mathrm{g}(\mathrm{D}_Y X,Z)=\mathrm{g}([X,Y],Z)\tag{1}$$

只须计算 $\mathrm{g}(\mathrm{D}_X Y,Z)+\mathrm{g}(\mathrm{D}_Y X,Z)$。

注意到

$$(D_X\,\mathrm{g})(Y,Z)=X(\mathrm{g}(Y,Z))-\mathrm{g}(D_XY,Z)-\mathrm{g}(Y,D_XZ)$$

故由与度量相容得

$$X(\mathrm{g}(Y,Z))=\mathrm{g}(D_XY,Z)+\mathrm{g}(Y,D_XZ)$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{g}(\mathrm{D}_X Y,Z)+\mathrm{g}(\mathrm{D}_Y X,Z)=&X(\mathrm{g}(Y,Z))-\mathrm{g}(Y,D_XZ)+Y(\mathrm{g}(X,Z))-\mathrm{g}(X,D_YZ)\\=&X(\mathrm{g}(Y,Z))+Y(\mathrm{g}(X,Z))-\mathrm{g}(Y,D_ZX)-\mathrm{g}(Y,[X,Z])\\&-\mathrm{g}(X,D_ZY)-\mathrm{g}(X,[Y,Z])\\=&X(\mathrm{g}(Y,Z))+Y(\mathrm{g}(X,Z))-Z(\mathrm{g}(X,Y))\\&-\mathrm{g}(Y,[X,Z])-\mathrm{g}(X,[Y,Z])\end{aligned}\tag{2}$$

将式(1)与式(2)相加得

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{g}(\mathrm{D}_X Y,Z)=&X(\mathrm{g}(Y,Z))+Y(\mathrm{g}(X,Z))-Z(\mathrm{g}(X,Y))\\&-\mathrm{g}(Y,[X,Z])-\mathrm{g}(X,[Y,Z])+\mathrm{g}([X,Y],Z)\end{aligned}\tag{3}$$

由此立即可知 D 由 g 唯一决定。 □

证法二（*By Ricci and Levi-Civita*）. 主要想法：利用条件直接解出联络系数。

局部上取自然标架场，设

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k}$$
$$\mathrm{g}(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})=\mathrm{g}_{ij}$$

则由无挠得

$$\Gamma^k_{ji}=\Gamma^k_{ij}\tag{4}$$

由与度量相容得

$$\begin{aligned}X(\mathrm{g}(Y,Z))&=\mathrm{g}(D_XY,Z)+\mathrm{g}(Y,D_XZ)\\\frac{\partial}{\partial x^i}(\mathrm{g}(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}))&=\mathrm{g}(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k})+\mathrm{g}(\frac{\partial}{\partial x^j},D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k})\\\frac{\partial}{\partial x^i}\mathrm{g}_{jk}&=\mathrm{g}(\Gamma^l_{ji}\frac{\partial}{\partial x^l},\frac{\partial}{\partial x^k})+\mathrm{g}(\frac{\partial}{\partial x^j},\Gamma^l_{ki}\frac{\partial}{\partial x^l})\\&=\Gamma^l_{ji}\,\mathrm{g}_{lk}+\Gamma^l_{ki}\,\mathrm{g}_{jl}\end{aligned}\tag{5}$$

在(4)中轮换指标得

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\mathrm{g}_{ki}=\Gamma^l_{kj}\,\mathrm{g}_{li}+\Gamma^l_{ij}\,\mathrm{g}_{kl}\tag{6}$$
$$\frac{\partial}{\partial x^k}\mathrm{g}_{ij}=\Gamma^l_{ik}\,\mathrm{g}_{lj}+\Gamma^l_{jk}\,\mathrm{g}_{il}\tag{7}$$

(5)+(6)−(7) 得（注意到 $\Gamma^k_{ji}=\Gamma^k_{ij},\mathrm{g}_{ij}=\mathrm{g}_{ji}$）

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\mathrm{g}_{jk}+\frac{\partial}{\partial x^j}\mathrm{g}_{ki}-\frac{\partial}{\partial x^k}\mathrm{g}_{ij}=2\Gamma^l_{ji}\,\mathrm{g}_{lk}+0\Gamma^l_{ki}\,\mathrm{g}_{jl}+0\Gamma^l_{kj}\,\mathrm{g}_{li}\tag{8}$$

设 $(\mathrm{g}^{ij})=(\mathrm{g}_{ij})^{-1}$，即 $\mathrm{g}^{kp}\,\mathrm{g}_{lk}=\delta^p_l$，则由(8)得

$$2\Gamma^p_{ij}=\mathrm{g}^{kp}(\frac{\partial}{\partial x^i}\mathrm{g}_{jk}+\frac{\partial}{\partial x^j}\mathrm{g}_{ki}-\frac{\partial}{\partial x^k}\mathrm{g}_{ij})$$

可见联络系数 Γ^k_{ji} 是由度量 g 唯一决定的。 □

注. 通常称

$$\Gamma_{kij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^i}\mathrm{g}_{jk}+\frac{\partial}{\partial x^j}\mathrm{g}_{ki}-\frac{\partial}{\partial x^k}\mathrm{g}_{ij})$$

为第一种 *Christoffel* 记号；

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\mathrm{g}^{kl}(\frac{\partial}{\partial x^i}\mathrm{g}_{jl}+\frac{\partial}{\partial x^j}\mathrm{g}_{li}-\frac{\partial}{\partial x^l}\mathrm{g}_{ij})$$

为第二种 *Christoffel* 记号。

证法三（*By Cartan*）. 可参考 [IL03]，本质上相当于上一方法的外微分版本。

取局部标架场 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 及其对偶 $\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^n$，设

$$\mathrm{D}_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ji} e_k$$

则有联络形式

$$\omega^k_j = \Gamma^k_{ji} \omega^i$$

由无挠得

$$\mathrm{D}_{e_i} e_j - \mathrm{D}_{e_j} e_i = [e_i, e_j]$$

而这等价于对任一 ω^k，成立

$$\omega^k(\mathrm{D}_{e_i} e_j - \mathrm{D}_{e_j} e_i) = \omega^k[e_i, e_j] \tag{9}$$

利用公式

$$\mathrm{d}\,\theta(X, Y) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta[X, Y]$$

改写(9)，得到

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij} &= \omega^k[e_i, e_j] \\ &= e_i(\omega^k(e_j)) - e_j(\omega^k(e_i)) - \mathrm{d}\,\omega^k(e_i, e_j) \end{aligned} \tag{10}$$

注意到又有

$$\begin{aligned} (\omega^l \wedge \omega^k_l)(e_i, e_j) &= \omega^l(e_i)\omega^k_l(e_j) - \omega^k_l(e_i)\omega^l(e_j) \\ &= \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} \end{aligned} \tag{11}$$

(10)+(11)得

$$(\mathrm{d}\,\omega^k - \omega^l \wedge \omega^k_l)(e_i, e_j) = 0$$

故

$$\mathrm{d}\,\omega^k = \omega^l \wedge \omega^k_l \tag{12}$$

由与度量相容得

$$\begin{aligned} e_i(\mathrm{g}(e_j, e_k)) &= \mathrm{g}(D_{e_i} e_j, e_k) + \mathrm{g}(e_j, D_{e_i} e_k) \\ e_i(\mathrm{g}_{jk}) &= \Gamma^l_{ji}\, \mathrm{g}_{lk} + \Gamma^l_{ki}\, \mathrm{g}_{lj} \\ e_i(\mathrm{g}_{jk})\omega^i &= \mathrm{g}_{lk}\, \omega^l_j + \mathrm{g}_{lj}\, \omega^l_k \\ \mathrm{d}\,\mathrm{g}_{jk} &= \mathrm{g}_{lk}\, \omega^l_j + \mathrm{g}_{lj}\, \omega^l_k \end{aligned} \tag{13}$$

特别地，若取 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为标准正交标架，则 $\mathrm{g}_{ij} = \delta_{ij}$，于是(13)成为

$$\delta_{lk}\omega^l_j + \delta_{lj}\omega^l_k = 0$$

即

$$\omega^k_j + \omega^j_k = 0 \tag{14}$$

于是基本定理等价于下述命题：

设 $\omega^1,\omega^2,\cdots,\omega^n$ 是 M 上的余标架场，则存在唯一的一组 1− 形式 ω_j^i 使得

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i & (15a) \\ \omega_j^i + \omega_i^j = 0 & (15b) \end{cases}$$

由于 $\omega^1,\omega^2,\cdots,\omega^n$ 是 M 上的余标架场，故可设设

$$\mathrm{d}\,\omega^i = \frac{1}{2}a_{jk}^i\omega^j \wedge \omega^k,\ a_{jk}^i = -a_{kj}^i$$

则代入(15a)得

$$\omega^j \wedge (\omega_j^i - \frac{1}{2}a_{jk}^i\omega^k) = 0$$

于是，由 Cartan 引理，存在满足 $b_{jk}^i = b_{kj}^i$ 的 b_{jk}^i，使得

$$\omega_j^i - \frac{1}{2}a_{jk}^i\omega^k = b_{jk}^i\omega^k$$

将其代入(15b)得

$$\frac{1}{2}a_{jk}^i + \frac{1}{2}a_{ik}^j + b_{jk}^i + b_{ik}^j = 0 \tag{16}$$

在(16)中轮换指标得

$$\frac{1}{2}a_{ki}^j + \frac{1}{2}a_{ji}^k + b_{ki}^j + b_{ji}^k = 0 \tag{17}$$

$$\frac{1}{2}a_{ij}^k + \frac{1}{2}a_{kj}^i + b_{ij}^k + b_{kj}^i = 0 \tag{18}$$

(16)+(17)−(18) 得

$$a_{jk}^i + a_{ji}^k + 2b_{ik}^j = 0$$

故 $\{b_{jk}^i\}$ 由 $\{a_{jk}^i\}$ 完全决定，即 $\{\omega_j^i\}$ 由 $\{\omega^i\}$ 完全决定。 □

注. 若

$$\begin{cases} C_{ijk} = C_{jik} \\ C_{ijk} = C_{ikj} \end{cases}$$

则 $C_{ijk} = 0$。

计算黎曼联络

例 3.2. 在 S^n 上用球极投影建立坐标系，则 S^n 上的标准度量可写为

$$\mathrm{g} = \frac{4\sum_{i=1}^n \mathrm{d}\,u^i \otimes \mathrm{d}\,u^i}{(\sum_{i=1}^n (u^i)^2 + 1)^2}$$

令 $\lambda = \frac{2}{\sum_{i=1}^n (u^i)^2+1}$，取标架场 $e_i = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}$，则

$$\begin{aligned} \mathrm{g}(e_i, e_j) &= \lambda^2 \sum_{k=1}^n \mathrm{d}\,u^k \otimes \mathrm{d}\,u^k(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathrm{d}\,u^k \otimes \mathrm{d}\,u^k(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= \sum_{k=1}^n \delta_i^k \delta_j^k = \delta_{ij} \end{aligned}$$

故 $\{e_i\}$ 是标准正交标架场，其对偶的余标架场为

$$\omega^i = \lambda \,\mathrm{d}\, u^i$$

联络形式 ω_j^i 满足

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i \\ \omega_j^i + \omega_i^j = 0 \end{cases}$$

这里

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,\omega^i &= \mathrm{d}\,\lambda \wedge \mathrm{d}\, u^i \\ &= \mathrm{d}\,\lambda \wedge \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}\,\omega^i \\ &= \omega^i \wedge (-\mathrm{d}\ln\lambda) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} -\mathrm{d}\ln\lambda &= \mathrm{d}\ln(\sum_{i=1}^n (u^i)^2 + 1) \\ &= \frac{2}{\sum_{i=1}^n (u^i)^2 + 1} \sum_{i=1}^n u^i \,\mathrm{d}\, u^i \\ &= \sum_{i=1}^n u^i \omega^i \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,\omega^i &= \omega^i \wedge (\sum_{j=1}^n u^j \omega^j) \\ &= \sum_{j=1}^n \omega^j \wedge (-u^j \omega^i) \\ &= \sum_{j=1}^n \omega^j \wedge (u^i \omega^j - u^j \omega^i) \end{aligned}$$

所以

$$\omega_j^i = u^i \omega^j - u^j \omega^i$$

例 3.3. 在 H^n 上用球极投影建立坐标系，则 H^n 上的标准度量可写为

$$\mathrm{g} = \frac{4\sum_{i=1}^n \mathrm{d}\, u^i \otimes \mathrm{d}\, u^i}{(1 - \sum_{i=1}^n (u^i)^2)^2}$$

同上例推理可求得

$$\omega_j^i = u^j \omega^i - u^i \omega^j$$

例 3.4. 设 g 是李群 G 上的右不变度量，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 T_1G 的标准正交基，$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \cdots, \hat{e}_n$ 是对应的右不变向量场，从而构成标准正交标架场。设对偶的余标架场为 $\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^n$，则

$$\mathrm{d}\,\omega^i = -\frac{1}{2} C_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$$

其中 $C^i_{jk}=-C^i_{kj}$ 为结构常数。

联络形式 ω^i_j 满足

$$\begin{cases}\mathrm{d}\,\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j\\ \omega^i_j+\omega^j_i=0\end{cases}$$

而

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,\omega^i&=-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k\\&=\omega^j\wedge(-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^k)\\&=\sum_{j=1}^n\omega^j\wedge(-\frac{1}{2}C^i_{jk}\omega^k+\frac{1}{2}C^j_{ik}\omega^k+\sum_{k=1}^n\frac{1}{2}C^k_{ij}\omega^k)\end{aligned}$$

故

$$\omega^i_j=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n(-C^i_{jk}+C^j_{ik}+C^k_{ij})\omega^k$$

公式(3)称为*Koszul 公式*，也可以用它来计算黎曼联络。

本节内容可参考 [Mil76] 和 [20008]

参考文献

[20008] 从微分观点看拓扑:. 图灵数学 · 统计学丛书. 人民邮电出版社, 2008.

[Cha06] I. Chavel. *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2006.

[IL03] T.T.A. Ivey and J.M. Landsberg. *Cartan for Beginners: Differential Geometry Via Moving Frames and Exterior Differential Systems*. Graduate Studies in Mathematics Series. American Math. Soc., 2003.

[Mil76] John Milnor. Curvatures of left invariant metrics on lie groups. *Advances in mathematics*, 21(3):293–329, 1976.

2013-3-15

回顾

1. 黎曼联络

   给定黎曼流形 (M,g)，则存在唯一的仿射联络 D，满足

   (a) 无挠：

   $$\mathrm{D}_X Y - \mathrm{D}_Y X = [X,Y],\ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$$

   (b) 与度量相容：

   $$\mathrm{D}_X \mathrm{g} = 0,\ \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

2. 外微分形式版本

   考虑局部标架场 $\{e_i\}$ 及其对偶余标架场 $\{\omega^i\}$，设 $\mathrm{g}_{ij} = \mathrm{g}(e_i,e_j)$，则存在唯一的联络形式 ω_j^i，满足

   (a) 无挠：

   $$\mathrm{d}\,\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$$

   (b) 与度量相容：

   $$\mathrm{d}\,\mathrm{g}_{ij} = \mathrm{g}_{kj}\,\omega_i^k + \mathrm{g}_{ik}\,\omega_j^k$$

约定 (指标下降). $\omega_{ij} = \mathrm{g}_{kj}\,{\omega_i}^k$

4 黎曼流形上的微分算子

2013-3-15

定义 4.1 (向量场的散度)**.** 对任意 $X \in \mathfrak{X}(M)$，定义[4]

$$\operatorname{div} X = C_1^1(\mathrm{D}.\,X) \in C^\infty(M)$$

称 $\operatorname{div}\colon \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ 为散度算子。

取局部标架场 $\{e_i\}$ 及其对偶 $\{\omega^i\}$，则

$$\operatorname{div} X = \omega^i(\mathrm{D}_{e_i} X)$$

设 $X = X^j e_j$，则

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X &= \omega^i(\mathrm{D}_{e_i}(X^j e_j))\\ &= \omega^i(e_i(X^j)e_j + X^j\Gamma_{ji}^k e_k)\\ &= e_i(X^i) + X^j\Gamma_{ji}^i\end{aligned}$$

[4] C_1^1 是指标缩并。

注. 一般地，约定

$$X^i_{,j} = e_j(X^i) + X^k\Gamma^i_{kj}$$

则，$\operatorname{div} X = X^i_{,i}$。

进一步地，取自然标架场 $\frac{\partial}{\partial x^i}$，则

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial}{\partial x^i}X^i + X^j\Gamma^i_{ji}$$

由公式

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{kl}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\,\mathrm{g}_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j}\,\mathrm{g}_{li} - \frac{\partial}{\partial x^l}\,\mathrm{g}_{ij}\Big)$$

得

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{ji} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{il}\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\,\mathrm{g}_{il} + \frac{\partial}{\partial x^i}\,\mathrm{g}_{lj} - \frac{\partial}{\partial x^l}\,\mathrm{g}_{ji}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{il}\,\frac{\partial}{\partial x^j}\,\mathrm{g}_{il} + \frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{il}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\mathrm{g}_{jl} - \frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{li}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\mathrm{g}_{jl}\end{aligned}$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\det(\mathrm{g}_{ab}) = \Big(\frac{\partial \mathrm{g}_{ij}}{\partial x^k}\Big)\,\mathrm{g}^{ij}\det(\mathrm{g}_{ab})$$

故

$$\Gamma^i_{ji} = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\det(\mathrm{g}_{ab})}{\partial x^j}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X &= \frac{\partial X^j}{\partial x^j} + X^j\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^j}\\ &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X^j\sqrt{G}}{\partial x^j}\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $G = \det(\mathrm{g}_{ab})$ 为度量矩阵的行列式。

例 4.2. $\mathbb{R}^n$ 中，度量矩阵 (g_{ab}) 等于单位矩阵，$G = 1$，$\operatorname{div} X$ 就是通常的散度。

定义 4.3 (函数的梯度)**.** 对任意 $f \in C^\infty(M)$，定义 $\operatorname{grad} f$ 为满足下面条件的向量场

$$\mathrm{g}(X, \operatorname{grad} f) = X(f),\ \forall X \in \mathfrak{X}(m)$$

称 $\operatorname{grad}\colon C^\infty(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ 为梯度算子。也记作 ∇，读作“nabla”。

取局部标架场 $\{e_i\}$ 及其对偶 $\{\omega^i\}$，记 $f_i = e_i(f)$，则

$$\mathrm{g}(e_i, \operatorname{grad} f) = f_i$$

设 $\operatorname{grad} f = Y^j e_j$，则上式化为

$$\mathrm{g}_{ij}\,Y^j = f_i$$

故

$$\operatorname{grad} f = \mathrm{g}^{ij}\,f_i e_j \tag{20}$$

定义 4.4 (*Laplace* 算子)**.** 称 $\Delta \overset{\text{def}}{=} \operatorname{div}\circ\operatorname{grad}\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ 为*Beltrami-Laplace* 算子。

取自然标架场，由上面讨论可知

$$\Delta f=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\mathrm{g}^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\sqrt{G}) \tag{21}$$

例 4.5. 在 $\mathbb{R}^3$ 中取极坐标系 (r,θ)，则由

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

得

$$\begin{aligned}\mathrm{g}&=(\mathrm{d}\,x)^2+(\mathrm{d}\,y)^2\\&=(\cos\theta\,\mathrm{d}\,r-r\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta)^2+(\sin\theta\,\mathrm{d}\,r+r\cos\theta\,\mathrm{d}\,\theta)^2\\&=\mathrm{d}\,r\otimes\mathrm{d}\,r+r^2\,\mathrm{d}\,\theta\otimes\mathrm{d}\,\theta\end{aligned}$$

即

$$(\mathrm{g}_{ab})=\begin{pmatrix}1&\\&r^2\end{pmatrix}$$

于是

$$G=r^2$$

$$(\mathrm{g}^{ab})=\begin{pmatrix}1&\\&\dfrac{1}{r^2}\end{pmatrix}$$

所以，代入公式(21)得

$$\begin{aligned}\Delta f&=\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial f}{\partial r}r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}r))\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\end{aligned}$$

定义 4.6 (*Hessian* 算子)**.** 称 $\mathrm{Hess}\overset{\text{def}}{=}\mathrm{D}\circ\mathrm{d}\colon C^\infty(M)\longrightarrow T_2^0M$ 为*Hessian 算子*。

对任意 $f\in C^\infty(M),X,Y\in\mathfrak{X}(M)$，按上述定义有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}(f)(X,Y)&=(\mathrm{D}_X(\mathrm{d}\,f))(Y)\\&=\mathrm{D}_X((\mathrm{d}\,f)Y)-\mathrm{d}\,f(\mathrm{D}_X\,Y)\\&=X(Y(f))-(\mathrm{D}_X\,Y)(f)\end{aligned}$$

由于

$$X(Y(f))-(\mathrm{D}_X\,Y)(f)=Y(X(f))-(\mathrm{D}_Y\,X)(f)$$

所以 $\mathrm{Hess}(f)$ 还是对称的：$\mathrm{Hess}(f)(X,Y)=\mathrm{Hess}(f)(Y,X)$。

取局部标架场 $\{e_i\}$ 及其对偶 $\{\omega^i\}$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}(f)(e_i,e_j)&=e_i(e_j(f))-(\mathrm{D}_{e_i}\,e_j)(f)\\&=e_i(f_j)-\Gamma_{ji}^k f_k\overset{\text{记作}}{=}f_{j,i}\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{Hess}(f)=f_{j,i}\omega^i\otimes\omega^j \tag{22}$$

命题 4.7.

$$\Delta f = \mathrm{g}^{ij}\, f_{j,i} \overset{\text{记作}}{=} \mathrm{tr}_{\mathrm{g}}(\mathrm{Hess}(f))$$

证明. 首先

$$\begin{aligned}\Delta f &= \mathrm{div}(\nabla f)\\ &= (\mathrm{g}^{ij}\, f_j)_{,i}\\ &= \mathrm{g}^{ij}_{,i}\, f_j + \mathrm{g}^{ij}\, f_{j,i}\end{aligned}$$

下面证明 $\mathrm{g}^{ij}_{,i}\, f_j = 0$：

注 (介绍 “,”). 上加下减。

$$\begin{aligned}\mathrm{g}_{ij,k} &= (\mathrm{D}_{\cdot}\, \mathrm{g})(e_k, e_i, e_j)\\ &= (\mathrm{D}_{e_k}\, \mathrm{g})(e_i, e_j)\\ &= \mathrm{D}_{e_k}(\mathrm{g}(e_i, e_j)) - \mathrm{g}(\mathrm{D}_{e_k}\, e_i, e_j) - \mathrm{g}(e_i, \mathrm{D}_{e_k}\, e_j)\\ &= e_k(\mathrm{g}_{ij}) - \mathrm{g}_{lj}\, \Gamma^l_{ik} - \mathrm{g}_{il}\, \Gamma^l_{jk}\\ T^i_{jk,l} &= e_l(T^i_{jk}) + T^p_{jk}\Gamma^i_{pl} - T^i_{pk}\Gamma^p_{jl} - T^i_{jp}\Gamma^p_{kl}\end{aligned}$$

首先 $\mathrm{g}_{ij,k} = 0$；

然后

$$\begin{aligned}\delta^i_{j,k} &= e_k(\delta^i_j) + \delta^l_j\Gamma^i_{lk} - \delta^i_l\Gamma^l_{jk}\\ &= 0 + \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} = 0\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}0 &= (\mathrm{g}^{il}\, \mathrm{g}_{lj})_{,k}\\ &= \mathrm{g}^{il}_{,k}\, \mathrm{g}_{lj} + \mathrm{g}^{il}\, \mathrm{g}_{lj,k}\end{aligned}$$

从而 $\mathrm{g}^{il}_{,k} = 0$。 □

定义 4.8. 若在两个局部坐标系 $(U, x^i), (V, \tilde{x}^i)$ 之公共部分有

$$\det(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}) > 0$$

则称它们定向一致。若流形 M 上存在一个坐标卡，使得任意两个相交局部坐标系定向一致，则称该流形是可定向的。

定义 4.9. (M, g) 是可定向的黎曼流形，定义

$$*1 = \sqrt{G}\, \mathrm{d}\, x^1 \wedge \mathrm{d}\, x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x^n$$

称为 (M, g) 的体积形式。

命题 4.10. 体积形式与坐标选取无关。

证明. 设 $\{e_i\},\{\tilde{e}_i\}$ 是两个定向一致的局部标架场，即若 $\tilde{e}_j = A^i_j e_i$，则

$$\det(A^i_j) > 0$$

又设 $\{\omega^i\},\{\tilde{\omega}^i\}$ 为其对偶余标架场，则

$$\omega^i = A^i_j \tilde{\omega}^j$$

于是

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^n = \det(A^i_j)\tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2 \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}^n$$

设 $\mathrm{g}_{ij} = \mathrm{g}(e_i, e_j), \tilde{\mathrm{g}}_{ij} = \mathrm{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)$，得

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{g}}_{ij} &= \mathrm{g}(A^p_i e_p, A^q_j e_q)\\ &= A^p_i A^q_j \,\mathrm{g}_{pq}\end{aligned}$$

于是

$$\sqrt{\det(\tilde{\mathrm{g}}_{ij})} = \det(A^i_j)\sqrt{\det(\mathrm{g}_{pq})}$$

故

$$\sqrt{\det(\mathrm{g}_{ij})}\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^n = \sqrt{\det(\tilde{\mathrm{g}}_{ij})}\tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2 \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}^n$$

□

由 Stokes 公式

$$\int_M \mathrm{d}\,\omega = \int_{\partial M} \omega$$

可证明下面定理：

定理 4.11 (散度定理). 设 (M, g) 是可定向的紧的无边黎曼流形，则

$$\int_M \operatorname{div} X *1 = 0,\ \ \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

证明. 令

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\sqrt{G}X^i \,\mathrm{d}\,x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}\,x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x^n$$

可以验证，ω 与坐标选取无关，且

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\,\mathrm{d}(\sqrt{G}X^i)\,\mathrm{d}\,x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}\,x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x^n\\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial\sqrt{G}X^i}{\partial x^i}\,\mathrm{d}\,x^1 \wedge \mathrm{d}\,x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x^n\\ &= \operatorname{div} X *1\end{aligned}$$

故由 Stokes 公式即得证。 □

推论 4.12. 条件同上，则

$$\int_M \Delta f *1 = 0,\ \ \forall f \in C^\infty(M)$$

定义 4.13 (*Hodge* 星算子). 对于

$$\omega = \frac{1}{r!} a_{i_1 i_2 \cdots i_r} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}$$

定义

$$*\omega = \frac{\sqrt{G}}{r!(n-r)!} \delta^{12\cdots n}_{i_1 i_2 \cdots i_n} a^{i_1 i_2 \cdots i_r} \omega^{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_n}$$

其中 $\delta^{12\cdots n}_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 当 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的偶排列时取值为 1，否则取值为 -1；a^{ij} 是对 a_{ij} 的指标上升，即

$$a^{ij} = \mathrm{g}^{ik} a_{kl} \mathrm{g}^{lj}$$

称 $*\colon A^r(M) \longrightarrow A^{n-r}(M)$ 为*Hodge 星算子*。

例 4.14. 考虑 $\mathbb{R}^3$，其度量为

$$\mathrm{g} = \mathrm{d}\, x^2 + \mathrm{d}\, y^2 + \mathrm{d}\, z^2$$

令

$$\begin{aligned}\omega =& \mathrm{d}\, y \wedge \mathrm{d}\, z \\ =& \frac{1}{2!}(a_{12} \mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, y + a_{13} \mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, z + a_{21} \mathrm{d}\, y \wedge \mathrm{d}\, x \\ &+ a_{23} \mathrm{d}\, y \wedge \mathrm{d}\, z + a_{31} \mathrm{d}\, z \wedge \mathrm{d}\, x + a_{32} \mathrm{d}\, z \wedge \mathrm{d}\, y)\end{aligned}$$

则

$$\begin{cases} a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = 0 \\ a_{23} = 1 \\ a_{32} = -1 \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}*\omega =& \frac{1}{2}(\delta^{123}_{123} a_{12} \mathrm{d}\, z + \delta^{123}_{132} a_{13} \mathrm{d}\, y + \delta^{123}_{213} a_{21} \mathrm{d}\, z \\ &+ \delta^{123}_{231} a_{23} \mathrm{d}\, x + \delta^{123}_{312} a_{31} \mathrm{d}\, y + \delta^{123}_{321} a_{32} \mathrm{d}\, x) \\ =& \frac{1}{2}(\mathrm{d}\, x + \mathrm{d}\, x) = \mathrm{d}\, x\end{aligned}$$

命题 4.15. $*$ 是线性算子，并把单项式映到单项式。

一般地，若

$$\omega = \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}$$

则

$$*\omega = \sqrt{G} \sum_{\substack{j_1 < \cdots < j_r \\ j_{r+1} < \cdots < j_n}} \delta^{12\cdots n}_{j_1 j_2 \cdots j_n} \begin{vmatrix} \mathrm{g}^{i_1 j_1} & \cdots & \mathrm{g}^{i_1 j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{g}^{i_r j_1} & \cdots & \mathrm{g}^{i_r j_r} \end{vmatrix} \mathrm{d}\, x^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x^{j_n}$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个偶排列。

约定. 对于 $\varphi,\psi\in A^r(M)$，设

$$\varphi=\frac{1}{r!}a_{i_1i_2\cdots i_r}\omega^{i_1}\wedge\omega^{i_2}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}$$
$$\psi=\frac{1}{r!}b_{j_1j_2\cdots j_r}\omega^{j_1}\wedge\omega^{j_2}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_r}$$

约定

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\frac{1}{r!}a_{i_1i_2\cdots i_r}b_{j_1j_2\cdots j_r}\,\mathrm{g}^{i_1j_1}\,\mathrm{g}^{i_2j_2}\cdots\mathrm{g}^{i_rj_r}$$
$$(\varphi,\psi)=\int_M\langle\varphi,\psi\rangle *1$$

命题 4.16. *在 n 维可定向紧黎曼流形 (M,g) 上，Hodge 星算子具有以下性质*

1. $\varphi\wedge*\psi=\langle\varphi,\psi\rangle *1$
2. $*(*1)=1$
3. $*(*\varphi))=(-1)^{r(n+1)}\varphi$
4. $(*\varphi,*\psi)=(\varphi,\psi)$

证明. 设

$$\varphi=\frac{1}{r!}a_{i_1i_2\cdots i_r}\omega^{i_1}\wedge\omega^{i_2}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}$$
$$\psi=\frac{1}{r!}b_{j_1j_2\cdots j_r}\omega^{j_1}\wedge\omega^{j_2}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_r}$$

则

$$\begin{aligned}\varphi\wedge*\psi&=\frac{1}{r!}a_{i_1i_2\cdots i_r}\omega^{i_1}\wedge\omega^{i_2}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}\wedge\frac{\sqrt{G}}{r!(n-r)!}\delta^{12\cdots n}_{j_1j_2\cdots j_n}b^{j_1j_2\cdots j_r}\omega^{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_n}\\&=\frac{\sqrt{G}}{r!r!(n-r)!}a_{i_1i_2\cdots i_r}b^{j_1j_2\cdots j_r}\delta^{12\cdots n}_{j_1j_2\cdots j_n}\delta^{i_1i_2\cdots i_rj_{r+1}\cdots j_n}_{12\cdots rr+1\cdots n}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^n\\&=\frac{\sqrt{G}}{r!r!}a_{i_1i_2\cdots i_r}b^{j_1j_2\cdots j_r}\delta^{i_1i_2\cdots i_r}_{j_1j_2\cdots j_r}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^n\\&=\frac{\sqrt{G}}{r!}a_{i_1i_2\cdots i_r}b^{i_1i_2\cdots i_r}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^n\\&=\langle\varphi,\psi\rangle *1\end{aligned}$$

□

补充

定义 4.17. 称同构

$$\begin{aligned}\flat\colon\ TM&\longrightarrow T^*M\\X&\longmapsto\mathrm{g}(X,-)\end{aligned}$$

为降号音乐同构；称其逆为升号音乐同构，记作 $\sharp$。

注. 降号音乐同构实质上就是指标下降：$X^\flat=\mathrm{g}_{ij}\,X^i\,\mathrm{d}\,x^j=X_j\,\mathrm{d}\,x^j$；而升号音乐同构实质上就是指标上升：$\omega^\sharp=\mathrm{g}^{ij}\,\omega_i\partial_j=\omega^j\partial_j$。

利用这种记号，梯度可写为 $\nabla f=(\mathrm{d}\,f)^\sharp$。

2013-3-22

回顾

1. 散度

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X &= \omega^i(\mathrm{D}_{e_i} X)\\ &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial(X^i\sqrt{G})}{\partial x^i}\\ \sqrt{G} &= \sqrt{\det(\mathrm{g}_{ij})}\\ *1 &= \sqrt{G}\,\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x^n\end{aligned}$$

2. 梯度

$$\begin{aligned}\mathrm{g}(\operatorname{grad} f, X) &= X(f)\\ \operatorname{grad} f &= \mathrm{g}^{ij}\,\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\end{aligned}$$

3. *Hessian* 算子

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}(f) &= \mathrm{D}(\mathrm{d}\,f)\\ &= f_{i,j}\,\mathrm{d}\,x^i\otimes\mathrm{d}\,x^j\\ f_{i,j} &= \frac{\partial f_i}{\partial x^j} - f_k\Gamma^k_{ij}\end{aligned}$$

4. *Beltrami-Laplace* 算子

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)\\ &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial(\mathrm{g}^{ij}\,f_j\sqrt{G})}{\partial x^i}\\ \Delta f &= \mathrm{tr}_{\mathrm{g}}(\mathrm{Hess}(f))\\ &= \mathrm{g}^{ij}\,f_{i,j}\end{aligned}$$

5. *Hodge* 星算子

对于

$$\omega = \frac{1}{r!}a_{i_1 i_2\cdots i_r}\omega^{i_1}\wedge\omega^{i_2}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}$$

定义

$$*\omega = \frac{\sqrt{G}}{r!(n-r)!}\,\mathrm{sgn}_{i_1 i_2\cdots i_n}\,a^{i_1 i_2\cdots i_r}\omega^{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_n}$$

注. $*$ 是函数线性的。（容易算错）

注. 若 $\omega^1,\omega^2,\cdots,\omega^n$ 是标准正交的（$\mathrm{g}_{ij}=\delta_{ij}$），则

$$*(\omega^{i_1}\wedge\omega^{i_2}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}) = \sum_{i_{r+1}<\cdots<i_n}\delta^{12\cdots n}_{i_1 i_2\cdots i_n}\,\mathrm{d}\,x^{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x^{i_n}$$

注. 在 n 维可定向紧黎曼流形 (M,g) 上，Hodge 星算子具有以下性质

(a) $*(*\varphi)) = (-1)^{r(n+1)}\varphi$

(b) $\varphi \wedge *\psi = \langle \varphi, \psi \rangle *1$

(c) $(*\varphi, *\psi) = (\varphi, \psi)$

5 黎曼流形上的微分算子（续）

2013-3-22

定义 5.1. 定义 $\delta \overset{\text{def}}{=} (-1)^{rn+1} * \mathrm{d} *\colon A^{r+1}(M) \longrightarrow A^r(M)$，称为余微分算子。

命题 5.2. $\delta \circ \delta = 0$

命题 5.3. 设 (M, g) 是可定向的紧的无边黎曼流形，则

$$(\varphi, \mathrm{d}\,\psi) = (\delta\varphi, \psi) \quad \forall \varphi \in A^{r+1}(M), \psi \in A^r(M)$$

即 d 与 δ 是共轭的线性映射。

证明. 首先

$$\begin{aligned}(\varphi, \mathrm{d}\,\psi) &= \int \langle \varphi, \mathrm{d}\,\psi \rangle *1 \\ &= \int \mathrm{d}\,\psi \wedge *\varphi\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}*\delta\varphi &= (-1)^{rn+1} * (*\,\mathrm{d} *\varphi) \\ &= (-1)^{rn+1}(-1)^{(n-r)(r+1)}\,\mathrm{d} *\varphi \quad (\because \mathrm{d} *\varphi \in A^{n-r}(M)) \\ &= (-1)^{r-1}\,\mathrm{d} *\varphi\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}(\delta\varphi, \psi) &= \int \langle \delta\varphi, \psi \rangle *1 \\ &= \int \psi \wedge *\delta\varphi \\ &= \int \psi \wedge (-1)^{r-1}(\mathrm{d} *\varphi)\end{aligned}$$

由于

$$\mathrm{d}(\psi \wedge *\varphi) = \mathrm{d}\,\psi \wedge *\varphi + (-1)^r \psi \wedge (\mathrm{d} *\varphi)$$

故

$$\begin{aligned}&(\varphi, \mathrm{d}\,\psi) - (\delta\varphi, \psi) \\ =& \int \mathrm{d}\,\psi \wedge *\varphi + (-1)^r \psi \wedge (\mathrm{d} *\varphi) \\ =& \int \mathrm{d}(\psi \wedge *\varphi) = 0\end{aligned}$$

□

定义 5.4 (*Hodge-Laplace 算子*). 定义 $\widetilde{\Delta} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}\circ\delta + \delta\circ\mathrm{d}\colon A^r(M) \longrightarrow A^r(M)$，称为*Hodge-Laplace 算子*。若 r 形式 α 满足 $\widetilde{\Delta}\alpha = 0$，则称为 **调和 r 形式**。

注. 定义

$$H^r(M) = \{[\alpha]|\alpha \in A^r(M), \mathrm{d}\,\alpha = 0\}$$

其中

$$[\alpha] = \left\{\beta \in A^r(M)\middle|\alpha - \beta\text{是恰当的}\right\}$$

称 $H^r(M)$ 为 M 的**上同调群**。

注 (Hodge). 对任意 $[\alpha] \in H^r(M)$，存在唯一的 $\beta \in [\alpha]$，使得 $\widetilde{\Delta}\beta = 0$。

注. $\widetilde{\Delta}$ 是椭圆形微分算子。参考 [GH11] 的第 117 页。

命题 5.5. 对任意 $f \in C^\infty(M)$，$\widetilde{\Delta} f = -\Delta f$。

证明.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta} f &= \delta(\mathrm{d}\, f)\\
&= - * \mathrm{d} * \mathrm{d}\, f\\
&= - * \mathrm{d} * (f_i \omega^i)\\
&= - * \mathrm{d}(\sqrt{G} f^i (-1)^{i-1} \omega^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \omega^n)\\
&= - * (e_i(\sqrt{G} f^i)\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n)\\
&= - * (\frac{1}{\sqrt{G}} e_i(\sqrt{G} f^i) *1)\\
&= -\frac{1}{\sqrt{G}} e_i(\sqrt{G} f^i)\\
&= -\Delta f
\end{aligned}$$

□

习题

习题 1 (*Hopf 定理*). (M, g) 是可定向的紧的无边黎曼流形，若 $f \in C^\infty(M)$ 满足 $\Delta f \geqslant 0$，则 f 为常值函数。

证明. 由

$$\int \Delta f *1 = 0$$

以及 $\Delta f \geqslant 0$ 得 $\Delta f = 0$。

考虑 $\Delta(\frac{1}{2} f^2)$，有

$$\begin{aligned}
\Delta(\frac{1}{2} f^2) &= \mathrm{g}^{ij}(\frac{1}{2} f^2)_{i,j}\\
&= \mathrm{g}^{ij}(f f_i)_{,j}\\
&= \mathrm{g}^{ij}(f_j f_i + f f_{i,j})\\
&= |\operatorname{grad} f|^2 + f\Delta f
\end{aligned}$$

其中，由于 $\operatorname{grad} f = \mathrm{g}^{ij} f_i e_j$，故

$$\begin{aligned}|\operatorname{grad} f|^2 &= \mathrm{g}(\mathrm{g}^{ij} f_i e_j, \mathrm{g}^{kl} f_k e_l)\\ &= \mathrm{g}_{jl}\,\mathrm{g}^{ij}\,\mathrm{g}^{kl} f_i f_k\\ &= \mathrm{g}^{ij} f_j f_i\end{aligned}$$

由 $\int \Delta(\frac{1}{2}f^2) *1 = 0$ 得

$$0 = \int f\Delta f *1 = -\int |\operatorname{grad} f|^2 *1 \leqslant 0$$

故 $|\operatorname{grad} f|^2 = 0$，从而 $\operatorname{grad} f = 0 \Rightarrow f_i = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\, f = 0 \Rightarrow f$ 是常值函数。 □

习题 2. (M, g) 是可定向的紧的无边黎曼流形，$\alpha \in A^r(M)$。求证：α 是调和的，当且仅当 $\mathrm{d}\,\alpha = 0$ 且 $\delta\alpha = 0$。

证明. “$\Longleftarrow$”：$\widetilde{\Delta} = \mathrm{d}\,\delta + \delta\,\mathrm{d}$。

“$\Longrightarrow$”：

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\,\alpha, \mathrm{d}\,\alpha) &= (\alpha, \delta\,\mathrm{d}\,\alpha)\\ &= (\alpha, -\mathrm{d}\,\delta\alpha)\\ &= -(\delta\alpha, \delta\alpha)\end{aligned}$$

故 $(\mathrm{d}\,\alpha, \mathrm{d}\,\alpha) + (\delta\alpha, \delta\alpha) = 0$，即 $\mathrm{d}\,\alpha = 0$ 且 $\delta\alpha = 0$。 □

定义 5.6. 设 (M, g) 是黎曼流形，$X \in \mathfrak{X}(M)$ 生成流 φ_t，若对任意的 t，φ_t 是等距变换，即

$$\varphi_t^* \mathrm{g} = \mathrm{g}$$

则称 X 是 (M, g) 的*Killing 向量场*。

习题 3. 求证：X 是 *Killing* 向量场，当且仅当

$$\mathrm{g}(\mathrm{D}_Z X, Y) + \mathrm{g}(\mathrm{D}_Y X, Z) = 0 \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

证明. 注意到 X 生成的流 φ_t 具有性质

$$[X, Y] = \lim_{t\to 0} \frac{Y - \varphi_{t*}Y}{t}$$

定义 5.7. 定义 $L_X : T_s^r M \longrightarrow T_s^r M$ 如下

1. $L_X(f) = X(f)$；
2. $L_X Y = [X, Y]$；
3. L_X 满足 Leibniz 法则；
4. L_X 与缩并运算可交换。

称 L_X 为李导数。

命题 5.8. 对任何的 τ，有

$$L_X\tau = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*\tau-\tau}{t} \tag{23}$$

回到证明，

先证明

$$\varphi_t^*\,\mathrm{g}=\mathrm{g} \Longleftrightarrow L_X\,\mathrm{g}=0 \tag{24}$$

由(23)，“$\Longrightarrow$” 显然。

反之，若 $L_X\,\mathrm{g}=0$，注意到

$$L_X\,\mathrm{g}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\varphi_t^*\,\mathrm{g}\Big|_{t=0}$$

由 $\varphi_{t+s}=\varphi_t\circ\varphi_s$ 得 $\varphi_{t+s}^*=\varphi_s^*\circ\varphi_t^*$。

记 $\mathrm{g}_t=\varphi_t^*\,\mathrm{g}$，则有

$$\varphi_s^*\,\mathrm{g}_t=\mathrm{g}_{t+s}$$

对 t 求导得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{g}_t\Big|_{t=s} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{g}_{t+s}\Big|_{t=0}\\ &=\varphi_s^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{g}_t\Big|_{t=0}=0\end{aligned}$$

从而 $\mathrm{g}_t=\mathrm{g}_0=\mathrm{g}$ 即 $\varphi_t^*\,\mathrm{g}=\mathrm{g}$。

由(24)，再由

$$\begin{aligned}L_X\,\mathrm{g}(Y,Z)&=L_X(\mathrm{g}(Y,Z))-\mathrm{g}(L_XY,Z)-\mathrm{g}(Y,L_XZ)\\&=X(\mathrm{g}(Y,Z))-\mathrm{g}([X,Y],Z)-\mathrm{g}(Y,[X,Z])\\&=\mathrm{g}(\mathrm{D}_X\,Y,Z)+\mathrm{g}(Y,\mathrm{D}_X\,Z)-\mathrm{g}([X,Y],Z)-\mathrm{g}(Y,[X,Z])\\&=\mathrm{g}(\mathrm{D}_Y\,X,Z)+\mathrm{g}(\mathrm{D}_Z\,X,Y)\end{aligned}$$

即得证。 □

补充

黎曼联络所对应的平行移动所具有的性质。

1. 与度量相容

命题 5.9. 在黎曼流形 (M,g) 上，若 $X(t),Y(t)$ 都是沿曲线 $\gamma(t)$ 定义的平行向量场，即 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}\,X=\mathrm{D}_{\dot\gamma}\,Y=0$，则 $\mathrm{g}(X,Y)$ 沿 $\gamma(t)$ 为常数。

证明. 由 D 与度量的相容性得

$$\dot\gamma(\mathrm{g}(X,Y))=\mathrm{g}(\mathrm{D}_{\dot\gamma}\,X,Y)+\mathrm{g}(\mathrm{D}_{\dot\gamma}\,Y,X)=0$$

□

2. 关于挠率的性质。

参考文献

[GH11] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley Classics Library Wiley Classics Library. Wiley, 2011.

第二部分

测地线及其变分问题

6 测地线

2013-3-29

主要想法：对于曲线 $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$，其长度为切向量长度的积分：

$$L(\gamma) = \int_0^1 F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\,\mathrm{d}\,t$$

定义 6.1. 设 V 是 n 维实线性空间，$F\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足：

1. F 在 $V \setminus \{0\}$ 上光滑；
2. $F(0) \geqslant 0$ 且 $F(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$；
3. $F(\lambda y) = \lambda F(y)$，$\forall \lambda > 0, y \in V$；
4. (强凸性[5]) $\left((\frac{F^2}{2})_{y^i y^j}\right)$ 在 $y \neq 0$ 处为正定矩阵。

则称 F 为 V 上的*Minkowski 范数*。

定义 6.2. 设 M 为光滑流形，$F\colon TM \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足

1. F 光滑地依赖于 $x \in M$；
2. $\forall x \in M$，$F|_x : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 Minkowski 范数。

则称 F 为 M 上的*Finsler 度量*，称 (M, F) 为*Finsler 流形*。

例 6.3. 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义

$$F(y^1, y^2) = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} + \frac{1}{2} y^1$$

则 F 是 *Minkowski* 范数，进一步地也可看作 $\mathbb{R}^2$ 上的 *Finsler* 度量。

在该 *Finsler* 度量下，曲线 $\gamma(t) = (t, 0)$ 和 $\gamma'(t) = (1-t, 0)$ 的长度分别为 $\frac{3}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$。可见，在一般的 *Finsler* 度量下，曲线的长度与端点选取顺序有关。

问题 6.1 (两点之间的最短线问题)**.** 给定 $p, q \in M$，考虑满足 $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ 的曲线 $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$，求其长度 $L(\gamma)$ 的最小值及取得最小值的条件。

变分法. 设 γ_0 是使 $L(\gamma)$ 最小的曲线，对其作光滑的扰动，得到一族满足 $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ 的曲线 $\gamma_s, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，这时有：

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s} L(\gamma_s)\bigg|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\bigg|_{s=0} \int_0^1 F(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t))\,\mathrm{d}\,t$$

[5] 欧氏空间中的强凸区域指边界上任意两点所连线段除端点外均在区域内部。

不妨设 p,q 处于同一坐标系 (x^i) 中，且 $F = F(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)$，则

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\right|_{s=0} F(\gamma_s^1,\cdots,\gamma_s^n,\dot\gamma_s^1,\cdots,\dot\gamma_s^n)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \left.(F_{x^i}\frac{\partial\gamma_s^i}{\partial s} + F_{y^i}\frac{\partial\dot\gamma_s^i}{\partial s})\right|_{s=0}\mathrm{d}\,t
\end{aligned}
$$

令 $v^i = \left.\frac{\partial\gamma_s^i}{\partial s}\right|_{s=0}$，则代入上式得

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 (F_{x^i}(\gamma_0,\dot\gamma_0)v^i + F_{y^i}(\gamma_0,\dot\gamma_0)\dot v^i)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 F_{x^i}v^i\,\mathrm{d}\,t + F_{y^i}v^i\big|_{t=0}^1 - \int_0^1 v^i(F_{y^ix^j}\dot\gamma_0^j + F_{y^iy^j}\ddot\gamma_0^j)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 v^i(F_{x^i} - F_{y^ix^j}\dot\gamma_0^j - F_{y^iy^j}\ddot\gamma_0^j)\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}
$$

由 v^i 的任意性，可知 γ_0 满足

$$
F_{x^i} - F_{y^ix^j}\dot\gamma_0^j - F_{y^iy^j}\ddot\gamma_0^j = 0 \tag{25}
$$

称为测地线方程。 □

问题 6.2 (Hilbert 第 4 问题). *给定凸开集 $U\subset\mathbb{R}^n$，求出 U 上所有的 Finsler 度量 F，使得测地线（满足测地线方程(25)的曲线）是 $\mathbb{R}^n$ 中的直线。*

满足条件的这样的 Finsler 度量称为射影平坦的。

1904 年，Hamel 得到：

引理 6.4 (*Hamel 引理*). *F 是射影平坦的，当且仅当*

$$
F_{x^i} - F_{y^ix^j}y^j = 0 \tag{26}
$$

证明. 将 $\gamma_0(t) = x + ty$ 代入方程(25)，取 $t=0$ 可得。 □

于是问题归结为解微分方程(26)。

1931 年，H.Busemann 考虑了这样的解。M 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n-1$ 维超平面全体，σ 为 M 上的体积形式，定义

$$
d(p,q) = \int\sigma
$$

其中积分遍历与线段 $\overline{pq}$ 相交的全体 $n-1$ 维超平面。

1979 年，Pogorelov 在 [PKZ79] 中证明了 H.Busemann 的构造是问题的所有的解（实际上是对称情形，即满足 $F(x,y) = F(x,-y)$ 的解）。

1981 年，Z.I.Szabo 在 [Sza86] 中给出公式

$$
F(x,y) = \int_{S^{n-1}} |\langle y,v\rangle|\rho(x,\langle x,v\rangle)\,\mathrm{d}\,v
$$

其中 ρ 是任一正值函数。

黎曼几何中的测地线

定义 6.5. 在 Finsler 流形 (M,F) 上，满足方程

$$F_{x^i}(\gamma,\dot\gamma)-(F_{y^ix^j}y^j)(\gamma,\dot\gamma)-F_{y^iy^j}(\gamma,\dot\gamma)\ddot\gamma^j=0 \tag{27}$$

的曲线 γ 称为（任意参数的）测地线。

定义 6.6. 若曲线 $\gamma(t)$ 满足 $F(\gamma(t),\dot\gamma(t))$ 为常数，则称 t 为 γ 的弧长参数。

条件“$F(\gamma(t),\dot\gamma(t))$ 为常数”等价于

$$F_{x^j}\dot\gamma^j+F_{y^j}\ddot\gamma^j=0 \tag{28}$$

(27)$\cdot F-$(28)$\cdot F_{y^i}$ 得

$$FF_{x^i}-\left(\frac{F^2}{2}\right)_{y^ix^j}\dot\gamma^j-\left(\frac{F^2}{2}\right)_{y^iy^j}\ddot\gamma^j=0 \tag{29}$$

在 Riemann 几何中，

$$F(x,y)=\sqrt{\mathrm{g}_x(y,y)}=\sqrt{\mathrm{g}_{ij}(x)y^iy^j}$$

这里 $\mathrm{g}_{ij}=\mathrm{g}(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}),y=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，因此 $\left(\frac{F^2}{2}\right)_{y^iy^j}=\mathrm{g}_{ij}$。
此时(29)化为

$$\left(\frac{F^2}{2}\right)_{x^i}-\left(\frac{F^2}{2}\right)_{y^ix^j}\dot\gamma^j-\mathrm{g}_{ij}\,\ddot\gamma^j=0$$

于是

$$\ddot\gamma^j=\mathrm{g}^{ij}\left(\left(\frac{F^2}{2}\right)_{x^i}-\left(\frac{F^2}{2}\right)_{y^ix^j}\dot\gamma^j\right)=-\Gamma^j_{kl}y^ky^l \tag{30}$$

命题 6.7. 若测地线 γ 取弧长参数，则它满足

$$\ddot\gamma^i+\Gamma^i_{jk}\dot\gamma^j\dot\gamma^k=0 \tag{31}$$

也就是 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$。
反之，若曲线满足 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$，则其是弧长参数的“测地线”。

证明. “$\Longrightarrow$”已证得，下证“$\Longleftarrow$”：由 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$ 可知：

$$\left(\frac{F^2}{2}\right)_{x^i}-\left(\frac{F^2}{2}\right)_{y^ix^j}y^j-\left(\frac{F^2}{2}\right)_{y^iy^j}\ddot\gamma^j=0$$

进而

$$\left(\frac{F^2}{2}\right)_{x^i}y^i-\left(\frac{F^2}{2}\right)_{y^ix^j}y^iy^j-\left(\frac{F^2}{2}\right)_{y^iy^j}y^i\ddot\gamma^j=0 \tag{32}$$

由

引理：$F(\lambda y)=\lambda F(y)\Longrightarrow F_yy=F$。

(32)化为

$$\left(\frac{F^2}{2}\right)_{x^i} y^i - 2\left(\frac{F^2}{2}\right)_{x^j} y^j - \left(\frac{F^2}{2}\right)_{y^j} \ddot{\gamma}^j = 0$$

即

$$F_{x^j} y^j + F_{y^j} \ddot{\gamma}^j = 0$$

可见(28)成立，即 t 为弧长参数，进一步可得(27)，即 γ 为测地线。 □

定义 6.8. 设 D 是黎曼流形 (M, g) 的黎曼联络，若曲线 γ 满足 $\mathrm{D}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$，则称 γ 为测地线。

推论 6.9. 若 γ 为测地线，则 $|\dot{\gamma}|$ 为常数。

命题 6.10. 设 γ 是测地线，若 $\gamma(f(s))$ 也是测地线，则 $f(s) = a + bs$，其中 a, b 为常数。

证明. 令 $\sigma(s) = \gamma(f(s))$，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\sigma(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\gamma(t)\big|_{t=f(s)} f'(s)$，从而

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\sigma(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\sigma(s) &= \mathrm{D}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\sigma(s)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\gamma(t)\bigg|_{t=f(s)} f'(s) \right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\gamma(t)\bigg|_{t=f(s)} f''(s) + (f'(s))^2 \, \mathrm{D}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\gamma(t)|_{t=f(s)}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\gamma(t)\bigg|_{t=f(s)} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\gamma(t)\bigg|_{t=f(s)} f''(s)
\end{aligned}$$

若 $\sigma(s)$ 仍是测地线，则 $\mathrm{D}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\sigma(s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\sigma(s) = 0$，于是 $f''(s) = 0$。 □

证明. 令 $\sigma(s) = \gamma(f(s))$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\sigma^i(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\gamma^i(t)\bigg|_{t=f(s)} f'(s) \tag{33}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,s^2}\sigma^i(s) = \ddot{\gamma}^i(f(s))(f'(s))^2 + \dot{\gamma}^i(f(s))f''(s) \tag{34}$$

若 $\sigma(s)$ 仍是测地线，则

$$\frac{\mathrm{d}^2\gamma^i}{\mathrm{d}\,s^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}\,\gamma^j}{\mathrm{d}\,s}\frac{\mathrm{d}\,\gamma^k}{\mathrm{d}\,s} = 0$$

将(33)与(34)代入上式得

$$\ddot{\gamma}^i(f(s))(f'(s))^2 + \dot{\gamma}^i(f(s))f''(s) + \Gamma^i_{jk}\dot{\gamma}^j(f(s))\dot{\gamma}^k(f(s))(f'(s))^2 = 0$$

从而 $f''(s) = 0$。 □

命题 6.11. 在黎曼流形 (M, g) 上，对任意 $x \in M, y \in T_xM$，存在 $\varepsilon > 0$ 以及（唯一的）测地线 $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$，使得 $\gamma(0) = x, \dot{\gamma}(0) = y$。

引理 6.12. $\gamma(t)$ 是测地线，f 是等距变换，则 $f(\gamma(t))$ 也是测地线。

命题 6.13. $f\colon M \longrightarrow M$ 是等距变换（$f^*\mathrm{g} = \mathrm{g}$），且 $\gamma(t)$ 上的点是 f 的所有不动点，则 $\gamma(t)$ 是测地线。

证明. 不妨设 t 是弧长参数。

令 $x=\gamma(0), y=\dot{\gamma}(0)$。

设 $c(t)$ 是满足 $c(0)=x, \dot{c}(0)=y$ 的唯一测地线，则由引理6.12，$f(c(t))$ 也是测地线。

由于 $\gamma(t)$ 上的点是 f 的所有不动点，故

$$f_*\dot{\gamma}(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}f(\gamma(t))\bigg|_{t=0}=\dot{\gamma}(0)$$

从而 $f(x)=x, f_*(y)=y$，故 $c(t)$ 与 $f(c(t))$ 是满足相同条件的测地线，故它们重合，即 $c(t)$ 是 f 的不动点。所以 $c(t)=\gamma(t)$。 □

参考文献

[PKZ79] A.V. Pogorelov, I. Kra, and E. Zaustinskiy. *Hilbert's fourth problem.* Scripta series in mathematics. V. H. Winston, 1979.

[Sza86] ZI Szabo. Hilbert's fourth problem, i. *Advances in Mathematics*, 59(3):185–301, 1986.

7　指数映射与弧长的第一变分公式

2013-4-7

定义 7.1. 设 (M,g) 是黎曼流形，若曲线 $\gamma\colon[0,1]\longrightarrow M$ 满足 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$，则称 γ 为测地线。

$\forall x\in M, y\in T_xM$，存在 $\varepsilon>0$ 及唯一的测地线 $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow M$，使得 $\gamma(0)=x,\dot\gamma(0)=y$。若令 $c(t)=\gamma(\frac{t}{k})$，其中 $k>0$ 为常数，$t\in(-k\varepsilon,k\varepsilon)$，则 $c(t)$ 也是测地线，且 $c(0)=x,\dot c(0)=\frac{1}{k}y$。特别地，若取 $k=\frac{2}{\varepsilon}$，则 $c(t)$ 在 $(-2,2)$ 上有定义。

定义 7.2. 对黎曼流形 (M,g) 上一点 x，设 $\mathcal{U}\subset T_xM$ 是包含 0 的一个开集，使得 $\forall v\in\mathcal{U}$, 满足 $c(0)=x,\dot c(0)=v$ 的测地线 $c(t)$ 在 $(-2,2)$ 上有定义。定义映射

$$\begin{aligned}\exp_x\colon\ \mathcal{U}&\longrightarrow M\\ v&\longmapsto c(1)\end{aligned}$$

称为指数映射。

注. 若 $v\in\mathcal{U}$ 对应的测地线为 $c(t)$，则 $c(t)=\exp_x(tv)$。这是因为 $c(kt)$ 也是一条过 x 的测地线，且其在 x 点的切向量为 kv，于是 $\exp_x(kv)=c(k\cdot 1)=c(k)$。

命题 7.3. 若指数映射 $\exp_x$ 在 $\mathcal{U}\subset T_xM$ 上有定义，则存在 0 的邻域 $\widetilde{\mathcal{U}}\subset\mathcal{U}$，使得 $\exp_x$ 在 $\widetilde{\mathcal{U}}$ 上是微分同胚。

证明. 只须证明 $(\exp_x)_{*0}$ 非退化。事实上，$\exp_x$ 将 $\widetilde{\mathcal{U}}$ 中的曲线 tv 映为 M 中的曲线 $\exp_x(tv)$，该曲线在 x 处的切向量为 v，故 $(\exp_x)_{*0}v=v$。 □

定义 7.4. 设 $\gamma\colon[0,1]\longrightarrow M$ 是光滑曲线，若有光滑映射

$$\Phi\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,1]\longrightarrow M$$

使 $\Phi(0,t)=\gamma(t)$，则称 Φ 为 γ 的一个变分。若还有 $\Phi(s,0)=\gamma(0),\Phi(s,1)=\gamma(1)$，则称为定端变分。

定义 7.5. 设 $\Phi\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,1]\longrightarrow M$ 是 γ 的一个变分，则称 $U=\Phi_{*(0,t)}\frac{\partial}{\partial s}$ 为变分向量场。

命题 7.6. 设 $\gamma\colon[0,1]\longrightarrow M$ 是光滑曲线，$U(t)$ 是沿 $\gamma(t)$ 定义光滑向量场，则存在 $\varepsilon>0$ 和 γ 的一个变分 $\Phi\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,1]\longrightarrow M$，使其变分向量场为 $U(t)$。

证明. 令 $\Phi(s,t)=\exp_{\gamma(t)}(sU(t))$，则 $\Phi_{*(0,t)}\frac{\partial}{\partial s}=U(t)$ □

定理 7.7 (弧长第一变分公式)**.** 设 $\Phi\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,1]\longrightarrow M$ 是曲线 $\gamma\colon[0,1]\longrightarrow M$ 的一个变分，记 $\gamma_s(t)=\Phi(s,t)$，

$$L(s)=\int_0^1\sqrt{\mathrm{g}(\dot\gamma_s,\dot\gamma_s)}\,\mathrm{d}\,t$$

若 $\forall s$，$|\dot\gamma_s|$ 与 t 无关，则

$$L'(s)=\frac{1}{|\dot\gamma_s|}\left\{\mathrm{g}(\widehat{U},\widehat{T})\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{g}(\mathrm{D}_{\widehat{T}}\widehat{T},\widehat{U})\,\mathrm{d}\,t\right\}\tag{35}$$

其中 $\widehat{U}=\Phi_*\frac{\partial}{\partial s},\widehat{T}=\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}=\dot\gamma_s$。

证明.

$$
\begin{aligned}
L'(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^1 \sqrt{\mathrm{g}(\widehat{T},\widehat{T})}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \mathrm{D}_{\widehat{U}}\sqrt{\mathrm{g}(\widehat{T},\widehat{T})}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \mathrm{g}(\widehat{T},\widehat{T})^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{D}_{\widehat{U}}\,\mathrm{g}(\widehat{T},\widehat{T})\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}(\widehat{T},\widehat{T})}}\,\mathrm{g}(\mathrm{D}_{\widehat{U}}\,\widehat{T},\widehat{T})\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}
$$

由于 $\mathrm{D}_{\widehat{T}}\,\widehat{U}-\mathrm{D}_{\widehat{U}}\,\widehat{T}=[\widehat{T},\widehat{U}]=\Phi_*[\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial s}]=0$，故

$$
\begin{aligned}
L'(s) &= \int_0^1 \frac{1}{|\widehat{T}|}\,\mathrm{g}(\mathrm{D}_{\widehat{U}}\,\widehat{T},\widehat{T})\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{|\widehat{T}|}\left\{\widehat{T}(\mathrm{g}(\widehat{U},\widehat{T}))-\mathrm{g}(\widehat{U},\mathrm{D}_{\widehat{T}}\,\widehat{T})\right\}\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{|\widehat{T}|}\left\{\mathrm{g}(\widehat{U},\widehat{T})\Big|_0^1-\int_0^1 \mathrm{g}(\mathrm{D}_{\widehat{T}}\,\widehat{T},\widehat{U})\,\mathrm{d}\,t\right\}
\end{aligned}
$$

□

推论 7.8. 对于曲线 γ 的一个变分 γ_s，若其变分向量场为 U，则

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}L(\gamma_s)\Big|_{s=0}=\frac{1}{L(\gamma)}\left\{\mathrm{g}(U,\dot{\gamma})|_0^1-\int_0^1 \mathrm{g}(\mathrm{D}_{\dot{\gamma}}\,\dot{\gamma},U)\,\mathrm{d}\,t\right\} \tag{36}
$$

引理 7.9 (*Gauss*)**.** 设 (M,g) 是黎曼流形，$\exp_x$ 在 $\mathcal{U}\subset T_xM$ 上有定义。对于 $v\in\mathcal{U}$，将 $T_v\mathcal{U}$ 等同于 T_xM，则

$$
\mathrm{g}_x(v,w)=\mathrm{g}_{\exp_x v}((\exp_x)_{*v}v,(\exp_x)_{*v}w)
$$

证明. 考虑变分 $\Phi(s,t)=\exp_x(t(v+sw))$，由于 $\gamma_s(t)=\Phi(s,t)$ 对任意 s 都是测地线，故 $\mathrm{D}_{\widehat{T}}\,\widehat{T}=0$，且 $|\widehat{T}|=|\widehat{T}|\Big|_{t=0}=|v+sw|$，$\widehat{U}\Big|_{t=0}=0$。故

$$
L'(s)=\frac{1}{|v+sw|}\,\mathrm{g}\left(\widehat{U}\Big|_{t=1},\widehat{T}\Big|_{t=1}\right)
$$

于是

$$
L'(0)=\frac{1}{|v|}\,\mathrm{g}\left(\widehat{U}\Big|_{s=0,t=1},\widehat{T}\Big|_{s=0,t=1}\right)
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\widehat{U}\Big|_{s=0} &= \Phi_{*(0,t)}\frac{\partial}{\partial s}=(\exp_x)_{*tv}tw \\
\widehat{T}\Big|_{s=0} &= \Phi_{*(0,t)}\frac{\partial}{\partial t}=(\exp_x)_{*tv}v
\end{aligned}
$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
L(s) &= \int_0^1 |\widehat{T}|\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1 |v+sw|\,\mathrm{d}\,t=|v+sw| \\
\Longrightarrow L'(s) &= \frac{1}{|v+sw|}\,\mathrm{g}(w,v+sw) \\
\Longrightarrow L'(0) &= \frac{1}{|v|}\,\mathrm{g}(v,w)
\end{aligned}
$$

故 $\mathrm{g}_x(v,w)=\mathrm{g}_{\exp_x v}((\exp_x)_{*v}v,(\exp_x)_{*v}w)$。 □

推论 7.10. *1.* 指数映射 $\exp_x$ 把 T_xM 中与射线 tv 正交的向量映到 M 中与测地线 $\gamma(t) = \exp_x(tv)$ 正交的切向量，即指数映射保持向量与径向测地线的正交性。

2. 指数映射沿径向保长。

定理 7.11. 设 $\exp_x$ 在 $\mathcal{U} \subset T_xM$ 上有定义，且 $\mathcal{U} \longrightarrow \exp_x(\mathcal{U})$ 是微分同胚。对任意 $p \in \exp_x(\mathcal{U})$，设 $p = \exp_x(v)$，则测地线 $\gamma(t) = \exp_x(tv)$ 是连接 x 与 p 的唯一的最短线。

证明. 对于连接 x 与 p 的任意曲线 $c(t)$，不妨设 $c(t) \in \exp_x(\mathcal{U})$。进一步地，可设 $c(t) = \exp_x(\theta(t))$。由于 $\theta(t) \in T_xM$，可设

$$\theta'(t) = \lambda(t)\theta(t) + h(t)$$

其中 $\lambda(t) = \frac{\mathrm{g}(\theta'(t),\theta(t))}{\mathrm{g}(\theta(t),\theta(t))}$，$h(t) \perp \theta(t)$。

$$\begin{aligned}
L(c) &= \int_0^1 \left|c'(t)\right| \mathrm{d}\, t \\
&= \int_0^1 \left|(\exp_x)_{*\theta(t)}\theta'(t)\right| \mathrm{d}\, t \\
&= \int_0^1 \left|\lambda(t)(\exp_x)_{*\theta(t)}\theta(t) + (\exp_x)_{*\theta(t)}h(t)\right| \mathrm{d}\, t
\end{aligned}$$

由 Gauss 引理，$\mathrm{g}_{\exp_x \theta(t)}\big((\exp_x)_{*\theta(t)}\theta(t), (\exp_x)_{*\theta(t)}h(t)\big) = \mathrm{g}_x(\theta(t), h(t)) = 0$，于是

$$\begin{aligned}
L(c) &= \int_0^1 \sqrt{\lambda^2|(\exp_x)_*\theta|^2 + |(\exp_x)_*h|^2}\, \mathrm{d}\, t \\
&\geqslant \int_0^1 |\lambda(t)||\theta(t)|\, \mathrm{d}\, t \\
&\geqslant \int_0^1 \lambda(t)|\theta(t)|\, \mathrm{d}\, t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{g}(\theta'(t),\theta(t))}{|\theta(t)|}\, \mathrm{d}\, t \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}\, |\theta| = |\theta||_0^1 \\
&= |v| = L(\exp_x(tv))
\end{aligned}$$

故 $L(c) \geqslant L(\exp_x(tv))$，可见测地线是连接 x 和 p 的最短线。

$L(c) \geqslant |v|$ 取等号的条件是 $\lambda(t) \geqslant 0$ 且 $|(\exp_x)_{*\theta(t)}h(t)| = 0$。由于 $\exp_x$ 是微分同胚，故后一条件等价于 $h(t) = 0$。由 $\theta'(t) = \lambda(t)\theta(t)$ 推知 $\theta(t)$ 是直线段，故 $c(t)$ 是 $\exp_x(tv)$ 的重新参数化。（唯一性得证） □

定义 7.12. 设 $\exp_x$ 在 $\mathcal{U} \subset T_xM$ 上有定义，且 $\mathcal{U} \longrightarrow \exp_x(\mathcal{U})$ 是微分同胚。取 T_xM 的一组标准正交基，从而获得 $\mathcal{U}$ 上的坐标系 $\rho\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^n$，称 $\varphi = \rho \circ (\exp_x)^{-1}$ 为以 x 为中心的法坐标系。

命题 7.13. 在以 x 为中心的法坐标系中，从 x 出发的测地线形如 $(ta^1, ta^2, \cdots, ta^n)$。

命题 7.14. 在以 x 为中心的法坐标系中，联络系数满足

$$\Gamma^i_{jk}(x) = 0$$

证明. 测地线满足方程(31)

$$\ddot{\gamma}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{\gamma}^j\dot{\gamma}^k = 0$$

将 $\gamma^i(t) = ta^i$ 代入并令 $t = 0$ 得

$$\Gamma^i_{jk}(x)a^ja^k = 0$$

又 $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$，故 $\Gamma^i_{jk}(x) = 0$。 □

2013-4-12

回顾

1. 指数映射

   对任意 $y \in T_x M$，令 $\gamma(t) = \exp_x(ty)$，则

   $$L(\gamma) = \int_0^1 |y| \,\mathrm{d}\, t$$

2. 变分

   对任意 γ 及沿 γ 定义的向量场 U，存在变分

   $$\Phi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \longrightarrow M$$

   使得 $\Phi(0,t) = \gamma(t)$，且 $\Phi_{*(0,t)} \frac{\partial}{\partial s} = U$。

3. 弧长第一变分公式

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, s} L(\gamma_s) \bigg|_{s=0} = \frac{1}{|\dot\gamma|} \left\{ \mathrm{g}(U, \dot\gamma)|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{g}(\mathrm{D}_{\dot\gamma}\, \dot\gamma, U) \,\mathrm{d}\, t \right\}$$

4. *Gauss* 引理

   $$\mathrm{g}_{\exp_x v}((\exp_x)_{*v} v, (\exp_x)_{*v} w) = \mathrm{g}_x(v, w)$$

5. 测地线局部上是最短线：

   $\forall x \in M$，存在 0 的邻域 $\mathcal{U} \subset T_x M$，使得 $\forall y \in \mathcal{U}$，测地线 $\exp_x(ty)$ 是连接 x 和 $\exp_x(y)$ 的最短线。

8 完备性

2013-4-12

黎曼流形 (M, g) 上任一曲线 $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow M$ 的长度定义为

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma| \,\mathrm{d}\, t = \int_a^b \sqrt{\mathrm{g}(\dot\gamma, \dot\gamma)} \,\mathrm{d}\, t$$

对任意的 $p, q \in M$，定义 $W_{pq} = \{\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M | \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$。
定义 $d\colon M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ 如下：

$$d(p,q) = \inf_{\gamma \in W_{pq}} L(\gamma)$$

命题 8.1. (M, d) 是度量空间。

证明. 需要验证

1. $d(p,q) = d(q,p)$；

2. $d(p,q) + d(q,r) \geqslant d(p,r)$；

3. $d(p,q)\geqslant 0$，且取等号条件为 $p=q$。

验证

1. $\forall\gamma\in W_{pq}$，令 $\overline{\gamma}(t)=\gamma(1-t)$，则 $\overline{\gamma}\in W_{qp}$，且 $L(\overline{\gamma})=L(\gamma)$。故 $\{L(\gamma)|\gamma\in W_{pq}\}\subset\{L(\gamma)|\gamma\in W_{qp}\}$，于是 $d(p,q)\geqslant d(q,p)$。同理 $d(q,p)\geqslant d(p,q)$，于是 $d(p,q)=d(q,p)$。

2. 显然。

3. $d(p,q)\geqslant 0$ 显然。

   当 $p\neq q$ 时，存在 p 的邻域 U，使 $q\notin U$。不妨设 $U=\exp_x(\mathcal{U})$，且 $\exp_p\colon\mathcal{U}\longrightarrow U$ 是微分同胚。取 $\varepsilon>0$，使以 0 为球心，ε 为半径的球 $\mathcal{B}_\varepsilon(p)\subset\mathcal{U}$。此时，该球的边界为 $\mathcal{S}_\varepsilon(p)$ 且 $S_\varepsilon(p)=\exp_p(\mathcal{S}_\varepsilon(p))$。这时，任何 $\gamma\in W_{pq}$ 必与 $S_\varepsilon(p)$ 相交，设交点为 p_0，则

$$d(p,q)=\inf_{\gamma\in W_{pq}}L(\gamma)=\inf_{\substack{\gamma_1\in W_{pp_0}\\ \gamma_2\in W_{p_0q}\\ p_0\in S_\varepsilon(p)}}L(\gamma_1)+L(\gamma_2)\geqslant\varepsilon>0$$

□

定义 8.2. 对于 $x\in M$ 之邻域 U，若存在 $0\in T_xM$ 的邻域 $\mathcal{U}$，使得 $\exp_x$ 是从 $\mathcal{U}$ 到 U 的微分同胚，则称 U 为 x 的法邻域。

记

$$\mathcal{B}_r(x)=\{v\in T_xM\mid |v|<r\}\qquad B_r(x)=\{q\in M\mid d(x,q)<r\}$$
$$\mathcal{S}_r(x)=\{v\in T_xM\mid |v|=r\}\qquad S_r(x)=\{q\in M\mid d(x,q)=r\}$$

引理 8.3. 对任意的 $x\in M$，存在 $\varepsilon>0$，使得 $B_\varepsilon(x)$ 是 x 的法邻域，且此时 $\exp_x(\mathcal{B}_\varepsilon(x))=B_\varepsilon(x)$。

证明. 由命题7.3，存在 0 的邻域 $\mathcal{U}$，使得 $\exp_x\colon\mathcal{U}\longrightarrow\exp_x(\mathcal{U})$ 是微分同胚。取 $\varepsilon>0$，使 $\mathcal{B}_\varepsilon(x)\subset\mathcal{U}$，只须证 $\exp_x(\mathcal{B}_\varepsilon(x))=B_\varepsilon(x)$。

显然，$\exp_x(\mathcal{B}_\varepsilon(x))\subset B_\varepsilon(x)$。对任意 $p\notin\exp_x(\mathcal{B}_\varepsilon(x))$，由命题8.1的证明知 $d(x,p)\geqslant\varepsilon$，故 $\exp_x(\mathcal{B}_\varepsilon(x))\supset B_\varepsilon(x)$。 □

定理 8.4. (M,d) 的度量拓扑与流形拓扑一致。

证明. 度量拓扑的拓扑基是 $B_r(x)$，只须证 $B_r(x)$ 也构成流形拓扑的拓扑基即可。

对 M 的任一开集 U，在 $x\in U$ 处取一个法邻域 $N_x\subset U$，再取球形邻域（注意到由指数映射得到的是度量球）$B_x\subset N_x$，则 $U=\bigcup\limits_{x\in U}B_x$。 □

推论 8.5. $d(p,q)$ 是连续函数。

引理 8.6. 设 $Y,Z\in T_xM$，$|Y|=|Z|=1$，且 $\mathrm{g}(Y,Z)=\cos\alpha,\alpha\in[0,\pi]$。又设 $y_t=\exp_x(tY),z_t\exp_x(tZ)$，则

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}d(y_t,z_t)=\sin\frac{\alpha}{2}$$

证明. 取 x 处的法邻域 U，并在 U 上建立以 x 为中心的法坐标系 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$。在 U 上考虑

$$\mathrm{h} = (\mathrm{d}\, x^1)^2 + (\mathrm{d}\, x^2)^2 + \cdots + (\mathrm{d}\, x^n)^2$$

则 $\mathrm{g}|_x = \mathrm{h}|_x$。所以，对任意 $c > 1$，适当缩小 U 可使

$$\frac{1}{c}\,\mathrm{h}(X, X) < \mathrm{g}(X, X) < c\,\mathrm{h}(X, X)$$

对任意 $p \in U$ 及任意非零 $X \in T_pU$ 成立。

又记由 h 所定义的距离函数为 δ，则

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\delta(p, q) < d(p, q) < \sqrt{c}\delta(p, q) \qquad \forall p \neq q \in U$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{1}{2t}\delta(y_t, z_t) < \frac{1}{2t}d(y_t, z_t) < \sqrt{c}\frac{1}{2t}\delta(y_t, z_t)$$

但 $\frac{1}{2t}\delta(y_t, z_t) = \sin\frac{\alpha}{2}$，故由 c 的任意性，得 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2t}d(y_t, z_t) = \sin\frac{\alpha}{2}$。 □

定理 8.7 (*Myers-Steenrod*). 设 (M, g) 和 (M', g') 是两个黎曼流形，其距离分别为 d 和 d'。满射（未必连续）$f\colon M \longrightarrow M'$ 满足

$$d(p, q) = d'(f(p), f(q)) \qquad \forall p, q \in M$$

则 f 是光滑同胚，且 $f^*\,\mathrm{g}' = \mathrm{g}$。

证明. □

引理 8.8 (*Hilbert*). 设 (M, g) 是连通的黎曼流形，若 $\exp_x$ 在整个 T_xM 上有定义，则对任意 $p \in M$，p 与 x 可通过最短测地线连接。

证明. 设 $d(x, p) = r$，取 x 处的法邻域 $B_\varepsilon(x)$ 使 $0 < \varepsilon < r$。此时，$S_\varepsilon(x) = \exp_x(\mathcal{S}_\varepsilon(x))$ 是紧集。所以存在 $q_0 \in S_\varepsilon(x)$，使得 $d(q_0, p) = \min\limits_{q \in S_\varepsilon(x)} d(q, p)$。

令 $\gamma(t)$ 为连接 x 与 q_0 的最短测地线，则

$$\gamma(0) = x, \gamma(\varepsilon) = q_0$$

由条件，γ 在 $[0, \infty)$ 上有定义，记 $A = \{s \in [\varepsilon, r] \mid d(\gamma(s), p) = r - s\}$，则

1. 容易证明 $\varepsilon \in A$
2. 函数 $f(s) = d(\gamma(s), p) - r + s$ 连续，$A = f^{-1}(0) \cap [\varepsilon, r]$ 是闭集，故 A 有最大值 s_0。

若 $s_0 < r$，则再找 $0 < \varepsilon_1 < r - s_0$ 及 $\gamma(s_0)$ 的法邻域 $B_{\varepsilon_1}(\gamma(s_0))$。则在 $S_{\varepsilon_1}(\gamma(s_0))$ 上存在一点 q_1，使得 $d(q_1, p) = \min\limits_{q \in S_{\varepsilon_1}(\gamma(s_0))} d(q, p)$。

这时，$d(x, q_1) \leqslant s_0 + \varepsilon_1$，故 $d(x, q_1) = s_0 + \varepsilon_1$，$q_1$ 仍在 γ 上，故 $s_0 + \varepsilon_1 \in A$，矛盾。 □

2013-4-19

命题 8.9 (*Hilbert*)**.** 设 (M,g) 是连通的黎曼流形，若 $\exp_x$ 在整个 T_xM 上有定义，则对任意 $p\in M$，p 与 x 可通过最短测地线连接。

引理 8.10 (延长引理)**.** 设 (M,g) 是连通的黎曼流形，$p,q\in M$，则存在 $\varepsilon>0$ 及一点 q_0，使 p 与 q_0 间有长为 ε 的最短测地线连接，且 $d(q_0,q)=d(p,q)-\varepsilon$。

证明. 取 $\varepsilon>0$，使 $B_\varepsilon(p)$ 包含于 p 点的法邻域。此时存在 $q_0\in S_\varepsilon(p)$，使得 $d(q_0,q)=\min\limits_{y\in S_\varepsilon(p)}d(y,q)$。

只需证 $d(q_0,q)=d(p,q)-\varepsilon$。

$$\begin{aligned}
d(p,q)&=\inf_{\gamma\in W_{pq}}L(\gamma)\\
&=\inf_{\substack{\gamma_1\in W_{py}\\ \gamma_2\in W_{yq}\\ y\in S_\varepsilon(p)}}L(\gamma_1)+L(\gamma_2)\\
&=\varepsilon+\inf_{y\in S_\varepsilon(p)}d(y,q)\\
&=\varepsilon+d(q_0,q)
\end{aligned}$$

□

证明. （Hilbert 引理）由延长引理，存在 $\varepsilon>0$ 及一点 $q_0\in S_\varepsilon(x)$，使 x 与 q_0 间有最短测地线连接，且 $d(q_0,p)=d(x,p)-\varepsilon$。设这条测地线为 $\gamma(t)$ 且 $\gamma(0)=x,\gamma(\varepsilon)=q_0$，考虑

$$A=\{s\in[\varepsilon,d(x,p)]\mid d(\gamma(s),p)=d(x,p)-s\}$$

则 $\varepsilon\in A$。

令 $r=d(x,p)$。函数 $f(s)=d(\gamma(s),p)-r+s$ 连续，$A=f^{-1}(0)\cap[\varepsilon,r]$ 是闭集，故 A 有最大值 s_0。若 $s_0=r$ 即已获证，否则若 $s_0<r$，则对 $q=\gamma(s_0)$ 与 p 应用延长引理，则存在 $\delta>0$ 及一点 $q_1\in S_\delta(q)$，使 q 与 q_1 间有最短测地线连接，且 $d(q_1,p)=d(q,p)-\delta$。

这时，$d(x,q_1)+d(q_1,p)\geqslant d(x,p)$，故

$$d(x,q_1)\geqslant d(x,p)-d(q_1,p)=d(x,p)-d(q,p)+\delta=s_0+\delta$$

又 $\gamma|_{[0,s_0]}$ 与 q,q_1 之间最短线长度之和恰为 $s_0+\delta$。故 $d(x,q_1)=s_0+\delta$，且 q_1 仍落在测地线 γ 上，$q_1=\gamma(s_0+\delta)$。所以 $s_0+\delta\in A$ 与 s_0 最大矛盾！ □

定理 8.11 (*Hopf-Rinow*)**.** 在一个连通的黎曼流形 (M,g) 上，以下等价：

1. (M,d) 作为度量空间完备；
2. 对任意的 $x\in M$，$\exp_x$ 在整个 T_xM 上有定义；
3. 存在一点 $x\in M$，$\exp_x$ 在整个 T_xM 上有定义；
4. M 的任何有界闭集是紧集。

de Rham 证明了 (1) $\Longleftrightarrow$ (2)，后来 *J.Milnor* 加入了 (3)。Hopf-Rinow 定理能被推广到一般的长度 -度量空间。然而，Atkin 证明对无穷维的长度 -度量空间，该定理不成立。

证明. **(1)⟹(2)** 任取 $x \in M$，考虑过 x 的测地线 $\gamma(t)$，$\gamma(0) = x, |\dot{\gamma}(0)| = 1$。若 $\gamma(t)$ 的最大定义区间是 $[0, a)$，则取常数列 $\{a_n\}$ 使 $a_n \longrightarrow a$，则 $\{\gamma(a_n)\}$ 是 Cauchy 列，必收敛到一点 p，定义 $\gamma(a) = p$，则得到定义在 $[0, a]$ 上的测地线。在 p 点处再取测地线 $\widetilde{\gamma}\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$，使得 $\widetilde{\gamma}(0) = p, \dot{\widetilde{\gamma}}(0) = \dot{\gamma}(a)$，则 γ 与 $\dot{\gamma}$ 是同一条测地线，故 γ 的最大定义区间包含 $[0, a+\varepsilon)$，矛盾。

(2)⟹(3) 显然。

(3)⟹(4) 设该点为 x。对任意有界闭集 K，存在 $c > 0$，使得 $d(x, K) < c$。由 Hilbert 引理，任意 $k \in K$ 与 x 有最短测地线连接。故 $k \in \exp_x(\mathcal{B}_c(x))$，于是 $K \subset \exp_x(\overline{\mathcal{B}_c(x)})$，而紧集的像、闭子集均是紧集，故 K 是紧集。

(4)⟹(1) 由通常的拓扑知识可知。

□

注. 尽管 (4)⟹(1) 是一个通常的拓扑学命题，但反之并不总是成立。例如，在 $\mathbb{Q}$ 上定义度量 $d(x, y) = 1, x \neq y$，则在此度量下 $\mathbb{Q}$ 本身是有界闭集，但不是紧集。

定义 8.12. 若连通的黎曼流形 (M, g) 满足 (2)，则称为（测地）完备的。

推论 8.13. *完备黎曼流形上任意两点可用最短测地线连接。*

推论 8.14. *紧连通黎曼流形是完备的。*

定理 8.15. *设 (M, g) 和 (M', g') 是两个同维数的黎曼流形，$f\colon M \longrightarrow M'$ 为浸入，且 $f^*\mathrm{g}' = \mathrm{g}$。若 M 是完备的，则 f 是覆盖映射，且 M' 也是完备的。*

证明. 由 $f^*\mathrm{g}' = \mathrm{g}$，$f$ 把 M 的测地线映为 M' 的测地线。由于 M 上的测地线都是定义在 $\mathbb{R}$ 上的，故 M' 上的测地线也在 $\mathbb{R}$ 上有定义，故 M' 完备。

f 是满射 取 $x \in M$，设 $x' = f(x)$，则对任意的 $p' \in M'$，x' 与 p' 之间有最短测地线连接，设为 $\exp_{x'}(tY')$，且 $\exp_{x'}(aY') = p'$。由于 f 是浸入，故 f_{*x} 非退化。所以存在 $Y \in T_xM$，使得 $f_{*x}Y = Y'$。由于测地线 $f(\exp_x(tY))$ 与 $\exp_{x'}(tY')$ 有相同的初始条件，故 $f(\exp_x(tY)) = \exp_{x'}(tY')$，特别地，$f(\exp_x(aY)) = p'$。

f 是覆盖映射 即证明：对任意的 $x' \in M'$，$f^{-1} = \{x_1, x_2, \cdots\}$，存在 x' 的邻域 B' 及 x_i 的邻域 B_i，使得

1. $f\colon B_i \longrightarrow B'$ 是微分同胚；
2. $f^{-1}(B') = \bigcup B_i$；
3. $i \neq j$ 时，$B_i \cap B_j = \varnothing$。

对任意 $r > 0$ 使得 $B_r(x')$ 包含于 x' 之法邻域，下图交换

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_r(x_i) \arrow[r, "f_{*x_i}"] \arrow[d, "\exp_{x_i}"'] & \mathcal{B}_r(x') \arrow[d, "\exp_{x'}"] \\
B_r(x_i) \arrow[r, "f"'] & B_r(x')
\end{tikzcd}$$

其中 f_{*x_i} 与 $\exp_{x'}$ 均为微分同胚。故 $\exp_{x_i}$ 及其切映射为单射，故 $\exp_{x_i}$ 为微分同胚。故 $f\colon B_r(x_i) \longrightarrow B_r(x')$ 为微分同胚。

对任意 $p' \in B_r(x')$，设 $p \in f^{-1}(p')$，取连接 p', x' 的最短测地线 $\exp_{p'}(tZ')$，且 $\exp_{p'}(bZ') = x'$。则存在 $Z \in T_pM$，使得 $f_{*p}Z = Z'$。由于 $f(\exp_p(tZ)) = \exp_{p'}(tZ')$，故 $\exp_p(bZ) \in f^{-1}(x')$，不妨设 $\exp_p(bZ) = x_i$，则 $p \in B_r(x_i)$。故 $f^{-1}(B_r(x')) \subset \bigcup B_r(x_i)$。又由于 $f(B_r(x_i)) = B_r(x')$，故 $f^{-1}(B_r(x')) = \bigcup B_r(x_i)$。

特别地，取 $B_i = B_r(x_i), B' = B_r(x')$，其中 $r > 0$ 使得 $B_{2r}(x')$ 包含于 x' 之法邻域。若存在 $p \in B_i \cap B_j$，则

$$d(x_i, x_j) \leqslant d(x_i, p) + d(p, x_j) < 2r$$

这说明 x_j 在 x_i 的法邻域 $B_{2r}(x_i)$ 中。然而 $f(x_j) = f(x_i)$，这与 $f\colon B_{2r}(x_i) \longrightarrow B_{2r}(x')$ 是微分同胚矛盾。故 $B_i \cap B_j = \varnothing$。 □

习题

习题 4. 对于连通黎曼流形 (M, g)，若对任意 $p, q \in M$，存在等距变换 $f\colon M \longrightarrow M$ 使得 $f(p) = q$，则称 (M, g) 为齐性空间。证明：齐性空间是完备的。

证明. 首先，由等距变换保持测地线及其长度不变可知，存在 $\delta > 0$，使得对任意的 $p \in M$，$\exp_p$ 在 $\mathcal{B}_\delta(p)$ 内均有定义。

对任意的 $x \in M$ 以及测地线 $\gamma(t)$，假如 $\gamma(t)$ 的最大定义区间为 $[0, a)$。考虑 $a - \delta < b < a$，不妨设 $\gamma(b) = p$，则存在等距变换 f，使得 $f(x) = p$，考虑 $\exp_p(tX)$，其中 $X = \dot\gamma(b)$，则其在 $(-\delta, \delta)$ 上有定义。进一步地，$\exp_p(tX)$ 与 $\gamma(t)$ 是同一条测地线，于是 $\gamma(t)$ 的最大定义区间包括 $[0, b+\delta) \supsetneq [0, a)$ 与 $\gamma(t)$ 的最大定义区间为 $[0, a)$ 矛盾。。 □

习题 5. 设 (M, g) 是完备的黎曼流形，φ, ψ 是等距变换，且在一点 p 处 $\varphi(p) = \psi(p)$，$\varphi_{*p} = \psi_{*p}$。证明：$\varphi = \psi$。

证明. 令 $f = \varphi^{-1} \circ \psi$，则 $f(p) = p, f_{*p} = \mathrm{id}$。对任意的 $q \in M$，存在测地线 $\exp_p(tX)$，使得 $\exp_p(aX) = q$。由于测地线 $f(\exp_p(tX))$ 与 $\exp_p(tX)$ 的初始条件相同，故重合，故 $f(q) = q$。 □

习题 6. 设 (M, g) 完备但非紧。证明：存在取弧长参数的测地线 γ，使得对任意 $a > 0$，$\gamma|_{[0,a]}$ 都是连接 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(a)$ 的最短测地线，这样的测地线称为射线。

证明. 由 M 非紧，知其无界，故存在点列 $\{p_n\}$，使得 $d(x, p_n) \longrightarrow \infty$。对每个 p_n，设连接 x 和 p_n 的最短测地线为 $\exp_x(tX_n)$，其中 $|X_n| = 1$。由于 $\{X_n\}$ 是 T_xM 中单位球面上的无穷点列，故必有聚点 X。令 $\gamma(t) = \exp_x(tX)$，下证 $\gamma(t)$ 满足要求：

由条件，$d(x, \gamma(a)) = a$, 只需证 $L(\gamma|_{[0,a]}) = a$。事实上，$L(\gamma|_{[0,a]}) = \int_0^a |X| \,\mathrm{d}\,t = a$。 □

第三部分

曲率

9　曲率与曲率形式

2013-4-26

对于流形 M 上的仿射联络 D，其挠率为

$$T(X,Y)=\mathrm{D}_X Y-\mathrm{D}_Y X-[X,Y]$$

曲率为

$$\mathcal{R}(X,Y)Z=\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y Z-\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X Z-\mathrm{D}_{[X,Y]}Z$$

D 为黎曼联络，则 $T=0$。

定义 9.1. 设 (M,g) 为黎曼流形，$X,Y\in\mathfrak{X}(M)$。称如下算子 $\mathcal{R}(X,Y)\colon\Gamma(T^r_sM)\longrightarrow\Gamma(T^r_sM)$ 为（黎曼）曲率算子。

$$\mathcal{R}(X,Y)\tau=\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y\tau-\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X\tau-\mathrm{D}_{[X,Y]}\tau$$

命题 9.2. *曲率算子具有以下性质：*

1. 反对称性

$$\mathcal{R}(X,Y)=-\mathcal{R}(Y,X)$$

2. 第一 Bianchi 恒等式

$$\mathcal{R}(X,Y)Z+\mathcal{R}(Y,Z)X+\mathcal{R}(Z,X)Y=0$$

证明. 我们证明第二个性质：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}(X,Y)Z+\mathcal{R}(Y,Z)X+\mathcal{R}(Z,X)Y\\
=\ &\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y Z-\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X Z-\mathrm{D}_{[X,Y]}Z\\
&+\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_Z X-\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_Y X-\mathrm{D}_{[Y,Z]}X\\
&+\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_X Y-\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Z Y-\mathrm{D}_{[Z,X]}Y\\
=&\ [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]\\
=&\ 0
\end{aligned}$$

□

定义 9.3. 定义 $(1,3)$ 型张量场 $\mathcal{R}\colon\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$ 如下

$$\mathcal{R}(Z,X,Y)=\mathcal{R}(X,Y)Z$$

称为黎曼曲率张量。

局部上，设 $\mathrm{D}_{\partial_i}\partial_j=\Gamma^k_{ji}\partial_k$（从这节开始，简记 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 为 ∂_i），则

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\partial_k,\partial_i,\partial_j)&=\mathcal{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_k\\&=\mathrm{D}_{\partial_i}\mathrm{D}_{\partial_j}\partial_k-\mathrm{D}_{\partial_j}\mathrm{D}_{\partial_i}\partial_k\\&=\mathrm{D}_{\partial_i}(\Gamma^l_{kj}\partial_l)-\mathrm{D}_{\partial_j}(\Gamma^l_{ki}\partial_l)\\&=\partial_i(\Gamma^l_{kj})\partial_l+\Gamma^l_{kj}\mathrm{D}_{\partial_i}\partial_l-\partial_j(\Gamma^l_{ki})\partial_l-\Gamma^l_{ki}\mathrm{D}_{\partial_j}\partial_l\\&=\left\{\partial_i(\Gamma^l_{kj})-\partial_j(\Gamma^l_{ki})+\Gamma^s_{kj}\Gamma^l_{si}-\Gamma^s_{ki}\Gamma^l_{sj}\right\}\partial_l\end{aligned}$$

因此，若令 $\mathcal{R}(\partial_k,\partial_i,\partial_j)=\mathcal{R}_k{}^l{}_{ij}\partial_l$，则

$$\mathcal{R}_k{}^l{}_{ij}=\partial_i(\Gamma^l_{kj})-\partial_j(\Gamma^l_{ki})+\Gamma^s_{kj}\Gamma^l_{si}-\Gamma^s_{ki}\Gamma^l_{sj}\tag{37}$$

命题 9.4. $\mathcal{R}_k{}^l{}_{ij}$ 具有以下性质：

1. 反对称性

$$\mathcal{R}_k{}^l{}_{ij}=-\mathcal{R}_k{}^l{}_{ji}$$

2. 第一 *Bianchi* 恒等式

$$\mathcal{R}_k{}^l{}_{ij}+\mathcal{R}_i{}^l{}_{jk}+\mathcal{R}_j{}^l{}_{ki}=0$$

定义 9.5. 定义 $(0,4)$ 型张量场 $\mathcal{R}$: $\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow C^\infty M$ 如下

$$\mathcal{R}(Z,W,X,Y)=\mathrm{g}(\mathcal{R}(X,Y)Z,W)$$

也称为黎曼曲率张量。

命题 9.6. $(0,4)$ 型黎曼曲率张量具有以下性质：

1. 反对称性

$$\mathcal{R}(Z,W,X,Y)=-\mathcal{R}(Z,W,Y,X)$$
$$\mathcal{R}(Z,W,X,Y)=-\mathcal{R}(W,Z,X,Y)$$

2. 第一 *Bianchi* 恒等式

$$\mathcal{R}(Z,W,X,Y)+\mathcal{R}(X,W,Y,Z)+\mathcal{R}(Y,W,Z,X)=0$$

3. 对称性

$$\mathcal{R}(Z,W,X,Y)=\mathcal{R}(X,Y,Z,W)$$

证明. 我们证明 *3.*。只需证

$$\mathcal{R}(\partial_k,\partial_l,\partial_i,\partial_j)=\mathcal{R}(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_l)$$

事实上

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\partial_k,\partial_l,\partial_i,\partial_j)&=\mathrm{g}(\mathcal{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_k,\partial_l)\\&=\mathrm{g}(\mathcal{R}_k{}^p{}_{ij}\partial_p,\partial_l)\\&=\mathrm{g}_{pl}\,\mathcal{R}_k{}^p{}_{ij}\end{aligned}$$

注意到

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\,g^{il}\left\{\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right\}$$

$$g_{il}\,\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right\}$$

为避免计算逆矩阵 g^{il}，令 $\Gamma_{ljk} = g_{il}\,\Gamma^i_{jk}$，有

$$g_{pl}\frac{\partial \Gamma^p_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial \Gamma_{ljk}}{\partial x^i} - \Gamma^p_{jk}\frac{\partial g_{pl}}{\partial x^i}$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\partial_k,\partial_l,\partial_i,\partial_j) =\ & g_{pl}\left\{\frac{\partial \Gamma^p_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^p_{ki}}{\partial x^j} + \Gamma^s_{kj}\Gamma^p_{si} - \Gamma^s_{ki}\Gamma^p_{sj}\right\} \\
=\ & \frac{\partial \Gamma_{ljk}}{\partial x^i} - \Gamma^p_{jk}\frac{\partial g_{pl}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{lik}}{\partial x^j} + \Gamma^p_{ik}\frac{\partial g_{pl}}{\partial x^j} + \Gamma^s_{kj}\Gamma_{lsi} - \Gamma^s_{ki}\Gamma_{lsj} \\
=\ & \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i\partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^j\partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^j\partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^l}\right\} \\
& + \frac{1}{2}\Gamma^s_{kj}\left\{-\frac{\partial g_{sl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{is}}{\partial x^l}\right\} - \frac{1}{2}\Gamma^s_{ki}\left\{-\frac{\partial g_{sl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{sj}}{\partial x^l}\right\} \\
=\ & \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i\partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^j\partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^l}\right\} \\
& - \frac{1}{2}\Gamma_{pkj}\,g^{ps}\,\Gamma_{sli} + \frac{1}{2}\Gamma_{pki}\,g^{ps}\,\Gamma_{slj}
\end{aligned}$$

由此显然有 $\mathcal{R}(\partial_k,\partial_l,\partial_i,\partial_j) = \mathcal{R}(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_l)$。 □

设 $\{e_i\}$ 是 (M,g) 上的局部标架场，$\{\omega^i\}$ 是其对偶余标架场。

定义 9.7. 设 ${\omega_i}^j$ 为黎曼流形 (M,g) 的联络形式，称

$$\Omega_i{}^j = d\,\omega_i{}^j - \omega_i{}^k \wedge \omega_k{}^j \tag{38}$$

为*曲率形式*。

回顾. 黎曼联络的联络形式满足方程：

- 无挠：

$$d\,\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j{}^i \tag{39}$$

- 与度量相容：

$$d\,g_{ij} = g_{ik}\,\omega_j{}^k + g_{jk}\,\omega_i{}^k \tag{40}$$

回顾. 外微分求值公式：

$$d\,\theta(X,Y) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta[X,Y]$$

命题 9.8. 若 $\mathcal{R}(e_k,e_l)e_i = \mathcal{R}_i{}^j{}_{kl}e_j$，则

$$\Omega_i{}^j = \frac{1}{2}\,\mathcal{R}_i{}^j{}_{kl}\omega^k \wedge \omega^l \tag{41}$$

证明. 一方面有

$$\begin{aligned}\Omega_i{}^j(e_k,e_l) &= (\mathrm{d}\,\omega_i{}^j)(e_k,e_l) - (\omega_i{}^s\wedge\omega_s{}^j)(e_k,e_l)\\ &= e_k(\omega_i{}^j(e_l)) - e_l(\omega_i{}^j(e_k)) - \omega_i{}^j[e_k,e_l]\\ &\quad - \omega_i{}^s(e_k)\omega_s{}^j(e_l) + \omega_i{}^s(e_l)\omega_s{}^j(e_k)\end{aligned}$$

另一方面有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{R}_i{}^j{}_{pq}\omega^p\wedge\omega^q(e_k,e_l) =& \ \frac{1}{2}\mathcal{R}_i{}^j{}_{kl} - \frac{1}{2}\mathcal{R}_i{}^j{}_{lk}\\ &= \mathcal{R}_i{}^j{}_{kl}\\ &= \omega^j(\mathcal{R}(e_k,e_l)e_i)\\ &= \omega^j\left(\mathrm{D}_{e_k}\mathrm{D}_{e_l}e_i - \mathrm{D}_{e_l}\mathrm{D}_{e_k}e_i - \mathrm{D}_{[e_k,e_l]}e_i\right)\\ &= \omega^j\left(\mathrm{D}_{e_k}(\omega_i{}^s(e_l)e_s) - \mathrm{D}_{e_l}(\omega_i{}^s(e_k)e_s) - \omega_i{}^s([e_k,e_l])e_s\right)\\ &= \omega^j\left(e_k(\omega_i{}^s(e_l))e_s\right) + \omega^j\left(\omega_i{}^s(e_l)\omega_s{}^p(e_k)e_p\right)\\ &\quad - \omega^j\left(e_l(\omega_i{}^s(e_k))e_s\right) - \omega^j\left(\omega_i{}^s(e_k)\omega_s{}^p(e_l)e_p\right)\\ &\quad - \omega^j\left(\omega_i{}^s([e_k,e_l])e_s\right)\\ &= e_k(\omega_i{}^j(e_l)) + \omega_i{}^s(e_l)\omega_s{}^j(e_k) - e_l(\omega_i{}^j(e_k))\\ &\quad - \omega_i{}^s(e_k)\omega_s{}^j(e_l) - \omega_i{}^j([e_k,e_l])\end{aligned}$$

比较两式即知 $\Omega_i{}^j = \frac{1}{2}\mathcal{R}_i{}^j{}_{kl}\omega^k\wedge\omega^l$。 □

命题 9.9. 对于曲率形式和联络形式，有

1. 第一 *Bianchi* 恒等式：

$$\omega^k\wedge\Omega_k{}^i = 0 \tag{42}$$

2. 第二 *Bianchi* 恒等式：

$$\mathrm{d}\,\Omega_i{}^j = \omega_i{}^k\wedge\Omega_k{}^j - \Omega_i{}^k\wedge\omega_k{}^j \tag{43}$$

证明. 对方程(39)作外微分得：

$$\begin{aligned}0 &= \mathrm{d}\,\omega^j\wedge\omega_j{}^i - \omega^j\wedge\mathrm{d}\,\omega_j{}^i\\ &= \omega^k\wedge\omega_k{}^j\wedge\omega_j{}^i - \omega^k\wedge\mathrm{d}\,\omega_k{}^i\\ &= -\omega^k\wedge\Omega_k{}^i\end{aligned}$$

对(38)作外微分得：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,\Omega_i{}^j &= -\mathrm{d}\,\omega_i{}^k\wedge\omega_k{}^j + \omega_i{}^k\wedge\mathrm{d}\,\omega_k{}^j\\ &= -(\Omega_i{}^k + \omega_i{}^l\wedge\omega_l{}^k)\wedge\omega_k{}^j + \omega_i{}^k\wedge(\Omega_k{}^j + \omega_k{}^l\wedge\omega_l{}^j)\\ &= \omega_i{}^k\wedge\Omega_k{}^j - \Omega_i{}^k\wedge\omega_k{}^j\end{aligned}$$

□

例 9.10. 在 S^n 上利用球极投影建立局部坐标系 (x^i)，则 S^n 上的标准度量可写成

$$\mathrm{g}=\frac{4\sum(\mathrm{d}\,x^i)^2}{(1+|x|^2)^2}$$

令 $\lambda=\frac{2}{1+|x|^2},\omega^i=\lambda\,\mathrm{d}\,x^i$，则

$$\mathrm{g}=(\omega^1)^2+\cdots+(\omega^n)^2$$

由于联络形式 ${\omega_j}^i$ 满足

$$\begin{cases}\mathrm{d}\,\omega^i=\omega^j\wedge{\omega_j}^i\\ {\omega_j}^i+{\omega_i}^j=0\end{cases}$$

这里

$$\mathrm{d}\,\omega^i=\mathrm{d}\,\lambda\wedge\mathrm{d}\,x^i=\mathrm{d}\,\lambda\wedge\frac{1}{\lambda}\omega^i=(\mathrm{d}\ln\lambda)\wedge\omega^i$$

而

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\ln\lambda&=-\,\mathrm{d}\ln(1+|x|^2)\\&=-\frac{2}{1+|x|^2}\sum x^i\,\mathrm{d}\,x^i\\&=-\sum x^i\omega^i\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,\omega^i&=(-\sum_j x^j\omega^j)\wedge\omega^i\\&=\sum_j\omega^j\wedge(-x^j\omega^i)\\&=\sum_j\omega^j\wedge(x^i\omega^j-x^j\omega^i)\end{aligned}$$

所以

$${\omega_j}^i=x^i\omega^j-x^j\omega^i$$

将其代入(38)得

$$\begin{aligned}{\Omega_j}^i=&\ \mathrm{d}\,{\omega_j}^i-{\omega_j}^k\wedge{\omega_k}^i\\=&\ \mathrm{d}(x^i\omega^j-x^j\omega^i)-\sum_k(x^k\omega^j-x^j\omega^k)\wedge(x^i\omega^k-x^k\omega^i)\\=&\ \mathrm{d}\,x^i\wedge\omega^j+x^i\,\mathrm{d}\,\omega^j-\mathrm{d}\,x^j\wedge\omega^i-x^j\,\mathrm{d}\,\omega^i\\&\ -x^i\omega^j\wedge\sum_k x^k\omega^k+|x|^2\omega^j\wedge\omega^i-\sum_k x^k\omega^k\wedge x^j\omega^i\\=&\ \frac{2}{\lambda}\omega^i\wedge\omega^j-|x|^2\omega^i\wedge\omega^j\\=&\ \omega^i\wedge\omega^j\end{aligned}$$

由于 ${\Omega_j}^i=\frac{1}{2}\,{\mathcal{R}_j}^i{}_{kl}\omega^k\wedge\omega^l$，故

$${\mathcal{R}_j}^i{}_{kl}=\begin{cases}1 & k=i,l=j\\ -1 & k=j,l=i\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

截面曲率

定义 9.11. 设 $u,v\in T_xM$ 线性无关，定义

$$K(u\wedge v)=\frac{-\mathcal{R}(u,v,u,v)}{||u\wedge v||^2}$$

其中 $||u\wedge v||^2=\mathrm{g}(u,u)\,\mathrm{g}(v,v)-\mathrm{g}(u,v)^2$。称 K 为截面 $u\wedge v$ 的截面曲率。

引理 9.12. $K(u\wedge v)$ 只与 u,v 张成的平面有关，与 u,v 的具体选取无关。

证明. 设 $u'=au+bv, v'=cu+dv$，其中 $\det\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\neq 0$。则

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(u',v',u',v')&=\mathcal{R}(au+bv,cu+dv,au+bv,cu+dv)\\&=(ad-bc)^2\mathcal{R}(u,v,u,v)\\||u'\wedge v'||^2&=(ad-bc)^2||u\wedge v||^2\end{aligned}$$

故 $K(u'\wedge v')=K(u\wedge v)$。 □

问题 9.1 (局部等距问题)**.** 首先的结果是

$$f_*\widetilde{\mathrm{g}}=\mathrm{g}\iff\begin{cases}f_*\widetilde{\mathcal{R}}=\mathcal{R}\\f_*\widetilde{\mathrm{D}}\widetilde{\mathcal{R}}=\mathrm{D}\,\mathcal{R}\\\dots\end{cases}$$

1970 年，Kulkarni 在 [Kul70] 中证明：

若 $K,\widetilde{K}$ 非常值，且维数大于 3，则 $K=\widetilde{K}$ 可推出等距。

丘成桐于在 [Yau74] 中给出另一个证明，并给出反例说明维数限制已是最佳的。

具有对称性的情况的结果可参考 cheeger、gromoll 和 gromov 的工作。

齐性空间上的结果可参考 Grove 和 J.Wolf 的工作。

参考文献

[Kul70] Ravindra Shripad Kulkarni. Curvature and metric. *The Annals of Mathematics*, 91(2):311–331, 1970.

[Yau74] Shing-Tung Yau. Curvature preserving diffeomorphisms. *The Annals of Mathematics*, 100(1):121–130, 1974.

2013-5-10

回顾

1. 曲率算子

$$\mathcal{R}(X,Y)=\mathrm{D}_X\,\mathrm{D}_Y-\mathrm{D}_Y\,\mathrm{D}_X-\mathrm{D}_{[X,Y]}$$

2. 曲率张量

$$\mathcal{R}(Z,X,Y)=\mathcal{R}(X,Y)Z$$
$$\mathcal{R}(Z,W,X,Y)=\mathrm{g}(\mathcal{R}(X,Y)Z,W)$$

3. 截面曲率

$$K(u\wedge v)=-\frac{\mathcal{R}(u,v,u,v)}{||u\wedge v||^2}$$

4. 联络形式

$$\begin{cases}\mathrm{d}\,\omega^i=\omega^j\wedge{\omega_j}^i\\ \mathrm{d}\,\mathrm{g}_{ij}=\mathrm{g}_{ik}\,{\omega_j}^k+\mathrm{g}_{jk}\,{\omega_i}^k\end{cases}$$

5. 曲率形式

$${\Omega_i}^j=\mathrm{d}\,{\omega_i}^j-{\omega_i}^k\wedge{\omega_k}^j$$

10　截面曲率

2013-5-10

定义 10.1. 对于黎曼流形 (M,g)，$x\in M$，$u,v,w,z\in T_xM$，定义

$$\mathcal{R}_0(u,v,w,z)=\mathrm{g}(u,w)\,\mathrm{g}(v,z)-\mathrm{g}(u,z)\,\mathrm{g}(v,w)$$

回顾. $\mathbb{R}^3$ 中的 Lagrange 恒等式：

$$(u\times v)\cdot(w\times z)=\begin{vmatrix}u\cdot w & u\cdot z\\ v\cdot w & v\cdot z\end{vmatrix}$$

引理 10.2. $\mathcal{R}_0$ 具有以下性质：

1. 反对称性

$$\mathcal{R}_0(Z,W,X,Y)=-\mathcal{R}_0(Z,W,Y,X)$$
$$\mathcal{R}_0(Z,W,X,Y)=-\mathcal{R}_0(W,Z,X,Y)$$

2. 第一 *Bianchi* 恒等式

$$\mathcal{R}_0(Z,W,X,Y)+\mathcal{R}_0(X,W,Y,Z)+\mathcal{R}_0(Y,W,Z,X)=0$$

3. 对称性

$$\mathcal{R}_0(Z,W,X,Y)=\mathcal{R}_0(X,Y,Z,W)$$

定义 10.3. 若 $(0,4)$ 型张量具有以上性质，则称为“曲率型张量”。

引理 10.4. 设 $\mathcal{R}$ 是曲率型张量，且 $\mathcal{R}(u,v,u,v)=0,\forall u,v$，则 $\mathcal{R}\equiv 0$。

注. 事实上，$\mathcal{R}$ 可视为在 $\bigwedge^2(T_xM)$ 上的二次型。(由线性及反对称性可得双线性)

证明.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}(u,v+z,u,v+z)=0\\
\Longrightarrow\ &\mathcal{R}(u,v,u,z)+\mathcal{R}(u,z,u,v)=0\\
\Longrightarrow\ &\mathcal{R}(u,v,u,z)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}(u+w,v,u+w,z)=0\\
\Longrightarrow\ &\mathcal{R}(u,v,w,z)+\mathcal{R}(w,v,u,z)=0\\
\Longrightarrow\ &\mathcal{R}(u,v,w,z)=\mathcal{R}(w,v,z,u)=\mathcal{R}(z,v,u,w)
\end{aligned}$$

由第一 Bianchi 恒等式，$\mathcal{R}(u,v,w,z)=0$。 □

定理 10.5. $x\in M$，在 x 处任何二维截面的截面曲率都相等，当且仅当

$$\mathcal{R}(u,v,w,z)=-k\mathcal{R}_0(u,v,w,z)$$

其中 $\mathcal{R}$ 是黎曼曲率张量，k 是常数。

证明.

$$\begin{aligned}
&K(u\wedge v)=k\\
\Longleftrightarrow\ &\mathcal{R}(u,v,u,v)=-k\mathcal{R}_0(u,v,u,v)\\
\Longleftrightarrow\ &\mathcal{R}(u,v,u,v)+k\mathcal{R}_0(u,v,u,v)=0
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{R}+k\mathcal{R}_0$ 是曲率型张量，故由引理，上式等价于 $\mathcal{R}(u,v,w,z)=-k\mathcal{R}_0(u,v,w,z)$。 □

推论 10.6. 一点 x 处的截面曲率为常数，当且仅当

$$\mathcal{R}_{ijkl}\big|_x=-k(\mathrm{g}_{ik}\,\mathrm{g}_{jl}-\mathrm{g}_{il}\,\mathrm{g}_{jk})\big|_x$$

当且仅当

$$\mathcal{R}_i{}^j{}_{kl}\big|_x=-k(\mathrm{g}_{ik}\,\delta^j{}_l-\mathrm{g}_{il}\,\delta^j{}_k)\big|_x$$

推论 10.7. 一点 x 处的截面曲率为常数，当且仅当

$$\Omega_i^j\big|_x=-k\omega_i\wedge\omega^j\big|_x$$

证明. 注意到

$$\begin{aligned}
\Omega_i^j&=\frac{1}{2}\mathcal{R}_i{}^j{}_{kl}\omega^k\wedge\omega^l\\
\omega_i\wedge\omega^j&=\mathrm{g}_{ik}\,\omega^k\wedge\delta^j{}_l\omega^l\\
&=\frac{1}{2}(\mathrm{g}_{ik}\,\delta^j{}_l-\mathrm{g}_{il}\,\delta^j{}_k)\omega^k\wedge\omega^l
\end{aligned}$$

□

为简化记号，取标准正交标架场时，不妨把所以指标写成下指标，并自动对单项式中出现两次的指标求和。例如联络形式的方程：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,\omega_i = \omega_j \wedge \omega_{ji} \\ 0 = \omega_{ij} + \omega_{ji} \end{cases}$$

例如曲率形式：

$$\Omega_{ij} = \mathrm{d}\,\omega_{ij} - \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

例 10.8. 考虑由表达式

$$\mathrm{g} = \frac{4\sum(\mathrm{d}\,x_i)^2}{(1+c\sum x_i^2)^2}$$

定义的黎曼度量。

令 $\lambda = \frac{2}{1+c\sum x_i^2}, \omega_i = \lambda \,\mathrm{d}\, x_i$，则

$$\mathrm{g} = (\omega_1)^2 + \cdots + (\omega_n)^2$$

即 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 是标准正交余标架场。

这里

$$\mathrm{d}\,\omega_i = \mathrm{d}\,\lambda \wedge \mathrm{d}\,x_i = \mathrm{d}\,\lambda \wedge \frac{1}{\lambda}\omega_i = (\mathrm{d}\ln\lambda) \wedge \omega^i$$

而

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ln\lambda &= -\,\mathrm{d}\ln(1 + c\sum x_i^2) \\ &= -\frac{2c}{1+c\sum x_i^2} x_i \,\mathrm{d}\,x_i \\ &= -c x_i \omega_i \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,\omega_i &= (-c x_j \omega_j) \wedge \omega_i \\ &= \omega_j \wedge (-c x_j \omega_i) \\ &= \omega_j \wedge (c x_i \omega_j - c x_j \omega_i) \end{aligned}$$

所以

$$\omega_{ij} = c(x_j \omega_i - x_i \omega_j)$$

于是曲率形式

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} =&\ \mathrm{d}\,\omega_{ij} - \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \\ =&\ c\,\mathrm{d}(x_j\omega_i - x_i\omega_j) - c^2(x_k\omega_i - x_i\omega_k) \wedge (x_j\omega_k - x_k\omega_j) \\ =&\ c\,\mathrm{d}\,x_j \wedge \omega_i + x_j\,\mathrm{d}\,\omega_i - \mathrm{d}\,x_i \wedge \omega_j - x_i\,\mathrm{d}\,\omega_j \\ &\ - c^2|x|^2\omega_i \wedge \omega_j + c^2(x_k\omega_k) \wedge (x_j\omega_i - x_i\omega_j) \\ =&\ -\frac{2c}{\lambda}\omega_i \wedge \omega_j + c^2|x|^2\omega_i \wedge \omega_j \\ =&\ -c\omega_i \wedge \omega_j \end{aligned}$$

可见 g 的截面曲率处处为常数 c。

引理 10.9 (*第二 Bianchi 恒等式*).

$$\mathrm{d}\,\Omega_{ij} = -\Omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{ik} \wedge \Omega_{kj}$$

证明. 由于

$$\Omega_{ij} = \mathrm{d}\,\omega_{ij} - \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

故

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\Omega_{ij} = & -\mathrm{d}\,\omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{ik} \wedge \mathrm{d}\,\omega_{kj} \\
= & -(\Omega_{ik} + \omega_{ip} \wedge \omega_{pk}) \wedge \omega_{kj} \\
& + \omega_{ik} \wedge (\Omega_{kj} + \omega_{kp} \wedge \omega_{pj}) \\
= & -\Omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{ik} \wedge \Omega_{kj}
\end{aligned}$$

□

定理 10.10 (*Schur 引理*). 设 $\dim M \geqslant 3$，若 (M, g) 在任一点 x 处的截面曲率与截面选取无关，即 $K = K(x)$，则 $K(x)$ 是常数。

证明. 取标准正交标架场，则由

$$\Omega_{ij} = -K(x)\omega_i \wedge \omega_j$$

得

$$\mathrm{d}\,\Omega_{ij} = -\,\mathrm{d}\,K \wedge \omega_i \wedge \omega_j - K\,\mathrm{d}\,\omega_i \wedge \omega_j + K\omega_i \wedge \mathrm{d}\,\omega_j$$

由于

$$\mathrm{d}\,\omega_i \wedge \omega_j = \omega_k \wedge \omega_{ki} \wedge \omega_j$$
$$\omega_i \wedge \mathrm{d}\,\omega_j = \omega_i \wedge \omega_k \wedge \omega_{kj}$$

故

$$\mathrm{d}\,\Omega_{ij} = -\,\mathrm{d}\,K \wedge \omega_i \wedge \omega_j - K\omega_{ik} \wedge \omega_k \wedge \omega_j + K\omega_i \wedge \omega_k \wedge \omega_{kj}$$

然而由第二 Bianchi 恒等式，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\Omega_{ij} &= -\Omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{ik} \wedge \Omega_{kj} \\
&= -K\omega_{ik} \wedge \omega_k \wedge \omega_j + K\omega_i \wedge \omega_k \wedge \omega_{kj}
\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{d}\,K \wedge \omega_i \wedge \omega_j = 0$$

由于 $\mathrm{d}\,K = e_k(K)\omega_k$，故

$$e_k(K)\omega_k \wedge \omega_i \wedge \omega_j = 0$$

由于 $\dim M \geqslant 3$，故 $e_k(K) = 0$，即 $K(x)$ 为常数。 □

截面曲率的几何意义： x 处的截面通过指数映射局部同胚于 M 上的一个二维曲面，而该截面的截面曲率就是该二维曲面的 Gauss 曲率。

常曲率空间

定义 10.11. 若 (M,g) 的截面曲率为常数，则称为常曲率空间（参考 [Wol11]）。特别地，若截面曲率恒为 0，则称为 平坦空间。

定义 10.12. 黎曼流形 (M,g) 称为局部欧式空间，若对任意的 $x \in M$，存在局部坐标系 (x^i)，使得

$$\mathrm{g} = (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2$$

注. 显然局部欧式空间是平坦的。

定理 10.13. *平坦黎曼流形必是局部欧式空间。*

证明. 分成几个步骤来证明：

1. *存在局部标架场 $\{\delta_i\}$，使得 δ_i 为平行向量场，即*

$$\mathrm{D}\,\delta_i = 0$$

   为此，先任取标架场 $\{e_i\}$，并设

$$\delta_i = a_i^j e_j$$

   其中系数 a_i^j 待定。

   设 $\{\omega^i\}$ 和 $\{\theta^i\}$ 分别是与 $\{e_i\}$ 和 $\{\delta_i\}$ 对偶的余标架场，则

$$a_i^j \theta^i = \omega^j$$

   设相应的联络形式为 ${\omega_i}^j$ 和 ${\theta_i}^j$，则由

$$\mathrm{d}\,\omega^i = \omega^j \wedge {\omega_j}^i$$

   得

$$\mathrm{d}\,a_j^i \wedge \theta^j + a_j^i\,\mathrm{d}\,\theta^j = a_k^j \theta^k \wedge {\omega_j}^i$$

   又由

$$\mathrm{d}\,\theta^i = \theta^j \wedge {\theta_j}^i$$

   得

$$\mathrm{d}\,a_j^i \wedge \theta^j + a_j^i \theta^k \wedge {\theta_k}^j = a_k^j \theta^k \wedge {\omega_j}^i$$

   故

$$(a_j^i {\theta_k}^j - a_k^j {\omega_j}^i - \mathrm{d}\,a_k^i) \wedge \theta^k = 0$$

   即

$$a_j^i {\theta_k}^j - a_k^j {\omega_j}^i - \mathrm{d}\,a_k^i = 0$$

   注意到

$$\mathrm{D}\,\delta_i = {\theta_i}^j \otimes \delta_j$$

   故只须 ${\theta_i}^j = 0$。

令

$$\sigma_k{}^i = a_k^j \omega_j{}^i + \mathrm{d}\, a_k^i$$

考虑在 M 的标架丛上的 Pfaff 方程组：

$$\sigma_k{}^i = 0$$

由于

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,\sigma_k{}^i &= \mathrm{d}\, a_k^j \wedge \omega_j{}^i + a_k^j \,\mathrm{d}\,\omega_j{}^i \\ &\equiv -a_k^l \omega_l{}^j \wedge \omega_j{}^i + a_k^l \,\mathrm{d}\,\omega_l{}^i \\ &= 0 \quad \mathrm{mod}\ \sigma_k^i \end{aligned}$$

故由 Frobenius 定理，方程组 $\sigma_k{}^i = 0$ 完全可积，即存在 a_k^i 使得 $\sigma_k{}^i = 0$，此时，$\theta_k{}^j = 0$，从而 δ_i 是平行向量场。

2. $\{\delta_i\}$ 是自然标架场，即存在局部坐标系 (x^i)，使得

$$\delta_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

由于 $\mathrm{d}\,\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j{}^i = 0$，故 θ^i 是闭的 1− 形式，故由 Poincaré 引理，局部上，θ^i 是恰当的，即存在函数 x^i，使得 $\theta^i = \mathrm{d}\, x^i$。

引理 10.14 (Poincaré 引理)**.** *1− 形式 θ 是闭的，则局部上存在函数 f，使得 $\theta = \mathrm{d}\, f$。*

证明. 设局部上，$\theta = u_i \,\mathrm{d}\, x^i$，于是

$$\mathrm{d}\,\theta = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i} = 0$$

从而由

$$f(p) = \int_0^p \theta$$

定义的 f 是光滑函数。 □

3. 在标架场 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 中，g_{ij} 是 M 上的常值函数。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k}(\mathrm{g}_{ij}) &= \delta_k(\mathrm{g}(\delta_i, \delta_j)) \\ &= \mathrm{g}(\mathrm{D}_{\delta_k}\, \delta_i, \delta_j) + \mathrm{g}(\delta_i, \mathrm{D}_{\delta_k}\, \delta_j) = 0 \end{aligned}$$

由此，对 (x^i) 作常系数线性变换即得所需局部坐标系。 □

参考文献

[Wol11] Joseph Albert Wolf. *Spaces of constant curvature*, volume 372. Chelsea Publishing Company, 2011.

2013-5-17

回顾

1. 截面曲率

$$K(u\wedge v)=-\frac{\mathcal{R}(u,v,u,v)}{||u\wedge v||^2}$$

$$\begin{aligned}K\equiv k\iff&\mathcal{R}(u,v,u,v)=-k||u\wedge v||^2\\\iff&\mathcal{R}(u,v,w,z)=-k\mathcal{R}_0(u,v,w,z)\\\iff&\mathcal{R}_{ijkl}=-k(\mathrm{g}_{ik}\,\mathrm{g}_{jl}-\mathrm{g}_{il}\,\mathrm{g}_{jk})\\\iff&\mathcal{R}_i{}^j{}_{kl}=-k(\mathrm{g}_{ik}\,\delta^j{}_l-\mathrm{g}_{il}\,\delta^j{}_k)\\\iff&\Omega_i{}^j=-k\omega_i\wedge\omega^j\end{aligned}$$

2. *Schur* 引理：$\dim M\geqslant 3$

$$K=K(x)\Longrightarrow K(x)=cst.$$

加强版：$\dim M\geqslant 3$

$$\mathrm{Ric}=(n-1)K(x)\Longrightarrow K(x)=cst.$$

3. 若 $K\equiv 0$，则局部上

$$\mathrm{g}=(\mathrm{d}\,x^1)^2+(\mathrm{d}\,x^2)^2+\cdots+(\mathrm{d}\,x^n)^2$$

若 $K\equiv c$，则局部上

$$\mathrm{g}=\frac{4\sum(\mathrm{d}\,x^i)^2}{(1+c\sum(x^i)^2)^2}$$

11 Ricci 曲率与数量曲率

定义 11.1. 设黎曼流形 (M,g) 的曲率算子为 $\mathcal{R}(X,Y)$，定义张量 $\mathrm{Ric}\colon\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow C^\infty(M)$ 如下：

$$\mathrm{Ric}(Y,Z)=\mathrm{tr}(X\longrightarrow\mathcal{R}(X,Y)Z)$$

称为 (M,g) 的*Ricci 张量*。

取局部标架场 $\{e_i\}$ 及其对偶 $\{\omega^i\}$，则

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=\omega^k(\mathcal{R}(e_k,X)Y)$$

又记 $\mathrm{Ric}_{ij}=\mathrm{Ric}(e_i,e_j)$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_{ij}&=\omega^k(\mathcal{R}(e_k,e_i)e_j)\\&=\omega^k(\mathcal{R}_j{}^l{}_{ki}e_l)\\&=\mathcal{R}_j{}^k{}_{ki}\end{aligned}$$

命题 11.2. *Ricci 张量是对称的，即* $\mathrm{Ric}(X,Y)=\mathrm{Ric}(Y,X)$。

证明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_{ji} &= \mathcal{R}_i{}^k{}_{kj} \\
&= \mathcal{R}_{ilkj}\, \mathrm{g}^{lk} \\
&= \mathcal{R}_{jkli}\, \mathrm{g}^{kl} \\
&= \mathcal{R}_j{}^k{}_{ki} = \mathrm{Ric}_{ij}
\end{aligned}$$

□

命题 11.3. 若 $e_1 = u, e_2, \cdots, e_n$ 是标准正交标架场，则

$$\mathrm{Ric}(u,u) = -\sum_{k=2}^{n} \mathcal{R}(u, e_k, u, e_k) = \sum_{k=2}^{n} K(u \wedge e_k)$$

证明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(u,u) &= \mathrm{Ric}_{11} \\
&= \mathcal{R}_1{}^k{}_{k1} = \mathcal{R}_{1lk1}\, \mathrm{g}^{lk} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \mathcal{R}_{1kk1} = -\sum_{k=2}^{n} \mathcal{R}_{1k1k}
\end{aligned}$$

□

注. 这说明 u 方向的 Ricci 曲率是含有 u 的彼此正交的 $n-1$ 个二维截面的截面曲率之和。

定义 11.4. 对非零切向量 u，定义

$$\mathrm{Ric}(u) = \frac{\mathrm{Ric}(u,u)}{\mathrm{g}(u,u)}$$

称为沿 u 方向的*Ricci 曲率*。

定义 11.5. 若 $\forall x \in M$，$\mathrm{Ric}(u)$ 与 $u \in T_xM \backslash \{0\}$ 选取无关，则称 (M, g) 为*Einstein 流形*。

定理 11.6 (*Schur 引理*)**.** *若 (M, g) 为 Einstein 流形，且 $\dim M \geqslant 3$，则 Ric 为常数。*

证明. 用第二 Bianchi 恒等式。参考 [Pet10]。 □

推论 11.7. *若 (M, g) 的截面曲率为常数 k，则 Ricci 曲率为常数 $(n-1)k$。*

定义 11.8. $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i)$ 于标准正交基 $\{e_i\}$ 的选取无关，称为 (M, g) 的**数量曲率**，记作 S。

证明. 另取标准正交基 $\{\widetilde{e}_i\}$，并设 $\widetilde{e}_i = a_i^j e_j$，则

$$a_i^j a_k^j = \delta_{ik} \qquad a_j^i a_j^k = \delta^{ik}$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(\widetilde{e}_i) &= \mathrm{Ric}(\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_i) \\
&= a_i^j a_i^k\, \mathrm{Ric}(e_j, e_k) \\
&= \delta^{jk}\, \mathrm{Ric}(e_j, e_k) \\
&= \mathrm{Ric}(e_j, e_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_j)
\end{aligned}$$

□

注. 任意的流形 M，存在黎曼度量 g，使得 S 为负的常数。但不一定存在 g，使得 S 为正的常数。

相关问题

问题 11.1. 任给流形 M，是否存在 g，使得 (M,g) 是 *Einstein* 流形。

Hilbert 首先给出一个办法：

若 g 是

$$\mathscr{S}(\mathrm{g})=\frac{\int_M S*1}{\int_M *1}$$

之临界点，则 (M,g) 是 Einstein 流形。

R.S.Hamilton 使用 *Ricci* 流

$$\frac{\partial \mathrm{g}_t}{\partial t}=-\operatorname{Ric}_t+\text{修正项}$$

Yamabe 方案：考虑 $e^{\rho(x)}\mathrm{g}$。

问题 11.2. 具有常（截面）曲率的空间。

单连通的只有以下三类：

$$K=1\Longrightarrow S^n$$
$$K=0\Longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$K=-1\Longrightarrow H^n$$

问题 11.3. 哪些流形 M 允许使得截面曲率处处为正的黎曼度量？

例 11.9. 秩为 1 的对称空间，如：$S^n,\mathbb{C}\mathbf{P}^n,\mathbb{H}\mathbf{P}^n,\mathrm{Ca}\mathbf{P}^n$

例 11.10. 其他主要例子（参考 [Zil07]）：

- *Berger* 空间：$B^7=\mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(3)$ 和 $B^{13}=\mathrm{SU}(5)/\mathrm{Sp}(2)\cdot S^1$；
- *Wallach* 空间（齐次旗流形）：$W^6=\mathrm{SU}(3)/T^2$，$W^{12}=\mathrm{Sp}(3)/\mathrm{Sp}(1)^3$ 和 $W^{24}=F_4/Spin(8)$；
- *Aloff–Wallach* 空间：$W^7_{p,q}=\mathrm{SU}(3)/\operatorname{diag}(z^p,z^q,\bar{z}^{p+q})$。
- *Eschenburg* 空间：$E_{k,l}=\operatorname{diag}(z^{k_1},z^{k_2},z^{k_3})\backslash\mathrm{SU}(3)/\operatorname{diag}(z^{l_1},z^{l_2},z^{l_3})^{-1}$；
- *Bazaikin* 空间：$B^{13}_p=\operatorname{diag}(z_1^{p_1},\cdots,z_1^{p_5})\backslash\mathrm{U}(5)/\operatorname{diag}(z_2A,1)^{-1}$，其中 $A\in\mathrm{Sp}(2)\subset\mathrm{SU}(4)$ 。

问题 11.4. 哪些流形 M 允许使得截面曲率处处非正的黎曼度量？

主要的结果是

定理 11.11. 若 $K\leqslant 0$，则 M 拓扑同胚于 $\mathbb{R}^n/\Gamma$，其中 Γ 是有限群。

J.Wolf 证明

定理 11.12. 若 (M, g) 是齐性空间（等距变换群可递）且 $K \leqslant 0$，则等距变换群有一可递的可解子群。此时 M 是一可解群的商群。

Heintze 进一步证明

定理 11.13. 若 (M, g) 是齐性空间（等距变换群可递）且 $K < 0$，则 $M = G$ 可解，且 g 是 G 上的左不变度量。

与 Ricci 曲率有关的问题

- *Bonnet-Myers* 定理： $\mathrm{Ric} \geqslant \delta > 0$，则 M 紧，$\pi_1(M)$ 有限。
- *Cheeger-Gromov*： $\mathrm{Ric} \geqslant 0$，体积 $\int_M *1$ 有限，距离 $d(x, y)$ 有界，则成立有限性定理。

参考 [Ber03]。

Ricci 恒等式

任给张量 τ 及 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$，考虑 $\mathcal{R}(X, Y)\tau$。

例 11.14. $\tau = Z \in \mathfrak{X}(M)$，则有

$$R(X, Y)Z = \mathrm{D}_X \mathrm{D}_Y Z - \mathrm{D}_Y \mathrm{D}_X Z - \mathrm{D}_{[X,Y]} Z$$

定理 11.15. 若 $\tau = \tau^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_r} \otimes \mathrm{d}\, x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}\, x^{j_s}$，则

$$\tau^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s, kl} - \tau^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s, lk} = \sum_p \mathcal{R}_{j_p}{}^{j}{}_{kl} \tau^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_{p-1} j j_{p+1} \cdots j_s} - \sum_q \mathcal{R}_i{}^{i_q}{}_{kl} \tau^{i_1 \cdots i_{q-1} i i_{q+1} \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$$

证明. 注意到 $\mathrm{D}_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ji} e_k$，故 $\mathrm{D}.\, e_j = \omega_j{}^k \otimes e_k$；类似地有 $\mathrm{D}_{e_j} \omega^i = -\Gamma^i_{kj} \omega^k$，从而

$$\mathrm{D}(\mathrm{d}\, x^i) = -\omega_j{}^i \otimes \mathrm{d}\, x^j$$

将之用于 $\mathrm{D}\,\tau$ 并注意到

$$\mathrm{D}\,\tau = \tau^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s, k} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_r} \otimes \mathrm{d}\, x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}\, x^{j_s} \otimes \mathrm{d}\, x^k$$

可得

$$\mathrm{d}\,\tau^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} = \tau^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s, k} \omega^k + \sum_q \mathcal{R}_i{}^{i_q}{}_{kl} \tau^{i_1 \cdots i_{q-1} i i_{q+1} \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \omega_i{}^{i_q} - \sum_p \mathcal{R}_{j_p}{}^{j}{}_{kl} \tau^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_{p-1} j j_{p+1} \cdots j_s} \omega_{j_p}{}^j \tag{44}$$

在做外微分即得

$$\begin{aligned} 0 = &\ \mathrm{d}\,\tau^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s, k} \wedge \omega^k + \sum_q \mathrm{d}\,\mathcal{R}_i{}^{i_q}{}_{kl} \tau^{i_1 \cdots i_{q-1} i i_{q+1} \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \wedge \omega_i{}^{i_q} - \sum_p \mathrm{d}\,\mathcal{R}_{j_p}{}^{j}{}_{kl} \tau^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_{p-1} j j_{p+1} \cdots j_s} \wedge \omega_{j_p}{}^j \\ &+ \tau^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s, k} \,\mathrm{d}\,\omega^k + \sum_q \mathcal{R}_i{}^{i_q}{}_{kl} \tau^{i_1 \cdots i_{q-1} i i_{q+1} \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \,\mathrm{d}\,\omega_i{}^{i_q} - \sum_p \mathcal{R}_{j_p}{}^{j}{}_{kl} \tau^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_{p-1} j j_{p+1} \cdots j_s} \,\mathrm{d}\,\omega_{j_p}{}^j \end{aligned}$$

在将(44)代入即得。 □

习题

习题 7 (Marcel Berger)**.** 设 X 是 (M,g) 的 *Killing* 向量场，考虑函数 $f(x)=\mathrm{g}_x(X,X)$，p 是 f 的临界点，即 $\mathrm{d}\,f|_p=0$。证明：在 p 点处成立：

1. $\mathrm{g}(X,\mathrm{D}_Z X)=0 \quad \forall Z\in T_pM$；
2. $\mathrm{D}_X X=0$；
3. $|\mathrm{D}_Z X|^2=\frac{1}{2}Z(Z(f))-\mathcal{R}(X,Z,X,Z) \quad \forall Z\in T_pM$。

证明. （这种证明方法被称为 *Bochner's Technique*）

由习题 3，X 是 Killing 场，当且仅当 $\mathrm{g}(\mathrm{D}_Z X,Y)+\mathrm{g}(\mathrm{D}_Y X,Z)=0 \quad \forall Z\in T_pM$。令

$$\begin{aligned} A_X\colon\ \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M)\\ Y &\longmapsto \mathrm{D}_Y X \end{aligned}$$

则 X 是 Killing 场意味着 A_X 是反对称的（关于 g）。

1. 由 $\mathrm{d}\,f|_p=0$，知在 p 点处，对任意的 $Z\in T_pM$ 有

$$Z(\mathrm{g}(X,X))=0\Longrightarrow 2\,\mathrm{g}(X,\mathrm{D}_Z X)=0$$

于是 $\mathrm{g}(X,\mathrm{D}_Z X)=0$。

2. 对任意的 $Z\in T_pM$ 有

$$\mathrm{g}(X,A_XZ)=0\Longrightarrow \mathrm{g}(A_XX,Z)=0\Longrightarrow \mathrm{g}(\mathrm{D}_X X,Z)=0$$

故 $\mathrm{D}_X X=0$。

3. 由于

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}(A_X[X,Z],Z) &= -\,\mathrm{g}([X,Z],A_XZ)\\
&= -\,\mathrm{g}(\mathrm{D}_X Z-\mathrm{D}_Z X,\mathrm{D}_Z X)\\
&= |\,\mathrm{D}_Z X|^2-\mathrm{g}(\mathrm{D}_X Z,\mathrm{D}_Z X)\\
\mathrm{g}(\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_X X,Z) &= Z(\mathrm{g}(\mathrm{D}_X X,Z))-\mathrm{g}(\mathrm{D}_X X,\mathrm{D}_Z Z)\\
&= Z(\mathrm{g}(\mathrm{D}_X X,Z)) \quad (\text{因为在 } p \text{ 点处有 } \mathrm{D}_X X=0)\\
\mathrm{g}(\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Z X,Z) &= X(\mathrm{g}(\mathrm{D}_Z X,Z))-\mathrm{g}(\mathrm{D}_Z X,\mathrm{D}_X Z)\\
&= -\,\mathrm{g}(\mathrm{D}_Z X,\mathrm{D}_X Z) \quad (\because \mathrm{g}(A_XZ,Z)+\mathrm{g}(Z,A_XZ)=0)
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
-\mathcal{R}(X,Z,X,Z) &= \mathrm{g}(-\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Z X+\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_X X+\mathrm{D}_{[X,Z]}X,Z)\\
&= Z(\mathrm{g}(A_XX,Z))+|\,\mathrm{D}_Z X|^2\\
&= Z(\mathrm{g}(\mathrm{D}_Z X,X))+|\,\mathrm{D}_Z X|^2\\
&= -\frac{1}{2}Z(Z(f))+|\,\mathrm{D}_Z X|^2
\end{aligned}$$

□

习题 8. *设 (M,g) 是偶数维的具有正的截面曲率的紧黎曼流形，X 是其上一个 Killing 场，则 X 必有奇点，即存在 $p\in M$，使得 $X_p=0$。*

证明. 考虑函数 $f(x)=\mathrm{g}_x(X,X)$ 之最小值点 p，A_X 同上一题所设。若 $X_p\neq 0$，则可考虑其在 T_pM 里的正交补 E。则由上一题，$\mathrm{g}(A_XZ,X)=0$，故 $A_X(E)\subset E$。进一步地，$A_X|_E$ 反对称，又由于 $\dim E$ 是奇数，故存在 $Z\in E$ 使得 $A_XZ=0$。于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Z(Z(f))&=\mathcal{R}(X,Z,X,Z)\\&=-K(X\wedge Z)||X\wedge Z||^2<0\end{aligned}$$

这与 p 是 f 之最小值点矛盾。 □

Berger 证明：

李群 G 上若存在左不变度量使得 $K>0$，则 $G=\mathrm{SU}(2)$ 或 $\mathrm{SO}(3)$。

习题 9. *3 维 Einstein 流形之截面曲率必为常数。*

证明. 对任意的截面，取其标准正交基 e_1,e_2 并扩充为标准正交基 e_1,e_2,e_3，则有

$$\begin{aligned}K(e_1\wedge e_2)+K(e_1\wedge e_3)&=\mathrm{Ric}(e_1)\\K(e_2\wedge e_3)+K(e_2\wedge e_1)&=\mathrm{Ric}(e_2)\\K(e_3\wedge e_1)+K(e_3\wedge e_2)&=\mathrm{Ric}(e_3)\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Ric}(e_1)=\mathrm{Ric}(e_2)=\mathrm{Ric}(e_3)$，故得。 □

Selberg-witten 给出 4 维 Einstein 流形的拓扑不变量。

参考文献

[Ber03] Marcel Berger. *A panoramic view of Riemannian geometry.* Springer Verlag, 2003.

[Pet10] P. Petersen. *Riemannian Geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, 2010.

[Zil07] Wolfgang Ziller. Examples of riemannian manifolds with non-negative sectional curvature. *Surveys in differential geometry*, 11:63–102, 2007.

12 刚性定理

2013-5-24

- *Bonnet-Myers* 定理

  $$(M, \mathrm{g})\text{ 完备，}\mathrm{Ric} \geqslant n-1 \Longrightarrow M\text{ 紧，直径 }\leqslant \pi\text{，基本群有限。}$$

  工具：弧长的第二变分公式。

- *Cartan-Hadamard* 定理

  $$(M, \mathrm{g})\text{ 完备，}K \leqslant 0 \Longrightarrow \exp_x\colon T_xM \longrightarrow M\text{ 是覆盖映射。}$$

  工具：*Jacobi* 场。

Bonnet-Myers 定理与弧长的第二变分公式

回顾. 对于曲线 γ 的定端变分 γ_s，其长度为

$$L(\gamma_s) = \int_0^1 |\dot{\gamma_s}| \,\mathrm{d}\, t$$

且有第一变分公式

$$\left.\frac{\mathrm{d}\, L(\gamma_s)}{\mathrm{d}\, s}\right|_{t=0} = -\int_0^1 \mathrm{g}(\mathrm{D}_{\dot\gamma}\, \dot\gamma, U) \,\mathrm{d}\, t$$

定义 12.1. 设 $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$ 为测地线，而

$$\Phi\colon [0,1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$$

是 γ 的一个定端变分，即

$$\Phi(t,0) = \gamma(t) \qquad \Phi(0,s) = \gamma(0) \qquad \Phi(1,s) = \gamma(1)$$

令

$$U = \Phi_{*(t,0)}\frac{\partial}{\partial s} \qquad \widehat{U} = \Phi_{*(t,s)}\frac{\partial}{\partial s} \qquad T = \Phi_{*(t,s)}\frac{\partial}{\partial t}$$

并假设 γ 满足 $|\dot\gamma|$ 与 t 无关，则弧长 $L(s) = \int_0^1 |T| \,\mathrm{d}\, t$ 满足

$$\begin{aligned}
L'(s) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}|T| \,\mathrm{d}\, t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{|T|}\, \mathrm{g}(\mathrm{D}_{\widehat{U}}\, T, T) \,\mathrm{d}\, t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{|T|}\, \mathrm{g}(\mathrm{D}_T\, \widehat{U}, T) \,\mathrm{d}\, t \quad (\because [\widehat{U}, T] = 0) \\
&= \int_0^1 \frac{1}{|T|} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathrm{g}(\widehat{U}, T)\Big) - \mathrm{g}(\widehat{U}, \mathrm{D}_T\, T) \right\} \mathrm{d}\, t \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{|T|}\, \mathrm{g}(\widehat{U}, \mathrm{D}_T\, T) \,\mathrm{d}\, t
\end{aligned}$$

进而

$$L''(s)=\int_0^1\left\{\frac{1}{|T|^2}\,g(D_{\widehat{U}}\,T,T)\,g(\widehat{U},D_T\,T)-\frac{1}{|T|}\Big(g(D_{\widehat{U}}\,\widehat{U},D_T\,T)+g(\widehat{U},D_{\widehat{U}}\,D_T\,T)\Big)\right\}\mathrm{d}\,t$$

故

$$L''(0)=-\frac{1}{|\dot\gamma|}\int_0^1 g(U,D_U\,D_{\dot\gamma}\,\dot\gamma)\,\mathrm{d}\,t$$

注意到

$$\begin{aligned}g(\mathcal{R}(U,\dot\gamma)\dot\gamma,U)&=g(D_U\,D_{\dot\gamma}\,\dot\gamma-D_{\dot\gamma}\,D_U\,\dot\gamma,U)\\&=g(D_U\,D_{\dot\gamma}\,\dot\gamma,U)-\frac{\partial}{\partial t}g(D_U\,\dot\gamma,U)+g(D_U\,\dot\gamma,D_{\dot\gamma}\,U)\\&=g(U,D_U\,D_{\dot\gamma}\,\dot\gamma)-\frac{\partial}{\partial t}g(D_U\,\dot\gamma,U)+|\,D_{\dot\gamma}\,U|^2\end{aligned}$$

故

$$L''(0)=\frac{1}{|\dot\gamma|}\int_0^1\left\{|\,D_{\dot\gamma}\,U|^2+\mathcal{R}(U,\dot\gamma,U,\dot\gamma)\right\}\mathrm{d}\,t \tag{45}$$

称(45)为弧长的第二变分公式。

注. 由于

$$g(D_{\dot\gamma}\,U,D_{\dot\gamma}\,U)=\frac{\partial}{\partial t}g(U,D_{\dot\gamma}\,U)-g(U,D_{\dot\gamma}\,D_{\dot\gamma}\,U)$$

故弧长的第二变分公式也可写成

$$L''(0)=-\frac{1}{|\dot\gamma|}\int_0^1 g(\mathcal{R}(U,\dot\gamma)\dot\gamma+\ddot U,U)\,\mathrm{d}\,t \tag{46}$$

定理 12.2 (*Bonnet-Myers 定理*). 设 (M,g) 是完备黎曼流形，且 $\mathrm{Ric}\geqslant(n-1)k^2$，其中 $k>0$ 为常数，则 (M,g) 的直径 $\leqslant\frac{\pi}{k}$，特别地，M 紧，且 $\pi_1(M)$ 有限。

证明. 对任意的 $p,q\in M$，设 γ 为连接 p,q 的最短测地线，其长度为 l。取沿 γ 平行的标准正交标架场 $\{e_i(t)\}$，其中 $e_n(t)=\dfrac{\dot\gamma}{l}$。

沿 γ 定义向量场 $U_i=\sin(\pi t)e_i(t),1\leqslant i\leqslant n-1$。考虑以 U_i 为变分向量场的定端变分，则

$$\begin{aligned}0&\leqslant L''(0)\\&=-\frac{1}{l}\int_0^1 g(\mathcal{R}(U_i,\dot\gamma)\dot\gamma+\ddot U_i,U_i)\,\mathrm{d}\,t\\&=-\frac{1}{l}\int_0^1\Big\{K(U_i\wedge\dot\gamma)||U_i\wedge\dot\gamma||^2+g(\ddot U_i,U_i)\Big\}\mathrm{d}\,t\\&=-\frac{1}{l}\int_0^1\left\{K(U_i\wedge\dot\gamma)l^2\sin^2(\pi t)-\pi^2\sin^2(\pi t)\right\}\mathrm{d}\,t\\&=-\frac{1}{l}\int_0^1\sin^2(\pi t)\left\{K(U_i\wedge\dot\gamma)l^2-\pi^2\right\}\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

将其对 $1\leqslant i\leqslant n-1$ 求和得

$$\begin{aligned}0&\leqslant-\frac{1}{l}\int_0^1\sin^2(\pi t)\left\{\mathrm{Ric}(\dot\gamma)l^2-\pi^2\right\}\mathrm{d}\,t\\&\leqslant-\frac{n-1}{l}\int_0^1\sin^2(\pi t)\left\{k^2l^2-\pi^2\right\}\mathrm{d}\,t\\&=-\frac{n-1}{l}(k^2l^2-\pi^2)\int_0^1\sin^2(\pi t)\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

从而 $l \leqslant \dfrac{\pi}{k}$。进一步地，$M$ 紧。

考虑 M 的万有覆盖 $f\colon \widetilde{M} \longrightarrow M$，则 $\widetilde{M}$ 上具有诱导度量 $f^*\mathrm{g}$，使得 $\mathrm{Ric}_{\widetilde{M}} \geqslant (n-1)k^2$，于是 $\widetilde{M}$ 紧，从而 f 是有限层覆盖，从而 $\pi_1(M)$ 有限。 □

Cartan-Hadamard 定理与 Jacobi 场

定义 12.3. 设 $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$ 为测地线，$\Phi\colon [0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ 是其变分，若对于任意的 $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$，$\gamma_s(t) = \Phi(t,s)$ 是测地线，则称 Φ 为测地变分。

命题 12.4. *测地变分 Φ 的变分向量场 $U = \Phi_{*(t,0)}\frac{\partial}{\partial s}$ 满足下述Jacobi 方程*:

$$\ddot{U} + \mathcal{R}(U,\dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0 \tag{47}$$

证明. 由于 γ_s 是测地线，故 $\widehat{T} = \Phi_{*(t,s)}\frac{\partial}{\partial t}$ 满足 $\mathrm{D}_{\widehat{T}}\widehat{T} = 0$。记 $\widehat{U} = \Phi_{*(t,s)}\frac{\partial}{\partial s}$，则 $[\widehat{U},\widehat{T}] = 0$。于是

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\widehat{U},\widehat{T})\widehat{T} &= \mathrm{D}_{\widehat{U}}\mathrm{D}_{\widehat{T}}\widehat{T} - \mathrm{D}_{\widehat{T}}\mathrm{D}_{\widehat{U}}\widehat{T} - \mathrm{D}_{[\widehat{U},\widehat{T}]}\widehat{T}\\ &= -\mathrm{D}_{\widehat{T}}\mathrm{D}_{\widehat{U}}\widehat{T}\end{aligned}$$

限制到 $s=0$ 即得 Jacobi 方程。 □

定义 12.5. 设 γ 是测地线，若沿 γ 定义的向量场 U 满足 Jacobi 方程，则称为 γ 的一个*Jacobi* 场。

命题 12.6. *沿测地线 γ 的任一 Jacobi 场 J 都是某个测地变分的变分向量场。*

证明. 任取沿 γ 平行的标架场 $\{e_i(t)\}$，设 $J(\gamma(t)) = J^i(t)e_i(t)$，则 Jacobi 方程化为

$$\ddot{J}^i + J^k\omega^i(\mathcal{R}(e_k,\dot{\gamma})\dot{\gamma}) = 0$$

这是一个关于 $J^i(t)$ 的二阶齐次线性常微分方程组，故 J 由初始条件 $J(0)$ 及 $\dot{J}(0)$ 唯一确定。

设 $p = \gamma(0), y = \dot{\gamma}(0)$，设并 $J(0) = v \in T_pM, \dot{J}(0) = w \in T_yM$。任取曲线 $\sigma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ 使 $\sigma'(0) = v$。考虑

$$\Phi(t,s) = \exp_{\sigma(s)}(t(T(s) + sW(s)))$$

其中 $T(s), W(s)$ 分别是 y, w 分别沿 $\sigma(s)$ 平行移动所得到的。

则 Φ 是测地变分，其变分向量场 U 满足 Jacobi 方程，且

$$\begin{aligned}U(0) &= \Phi_{*(0,s)}\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\Phi(0,s)\\ &= \sigma'(0) = v\\ U'(0) &= \mathrm{D}_{\dot{\gamma}}U|_{t=0} = \mathrm{D}_{\widehat{T}}\widehat{U}\Big|_{t=0,s=0}\\ &= \mathrm{D}_{\widehat{U}}\widehat{T}\Big|_{t=0,s=0} = \mathrm{D}_{\sigma'(0)}\widehat{T}(0,s)\\ &= \mathrm{D}_{\sigma'(0)}(T(s) + sW(s)) = W(0) = w\end{aligned}$$

可见 U 与 J 满足同样的 Jacobi 方程，且具有相同的初值，故 $U = J$。 □

推论 12.7. 沿测地线 $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$ 定义的 *Jacobi* 场 J 若满足 $J(0)=0$，则它是测地变分

$$\Phi(t,s)=\exp_p(t(y+sw))$$

的变分向量场，其中 $p=\gamma(0), y=\dot{\gamma}(0), w=\dot{J}(0)$。进一步地，

$$\begin{aligned}J(t)&=\Phi_{*(t,0)}\frac{\partial}{\partial s}=(\exp_p)_{*t(y+sw)}\left(\frac{\partial}{\partial s}t(y+sw)\right)\Big|_{s=0}\\&=(\exp_p)_{*ty}(tw)\end{aligned}\tag{48}$$

定义 12.8. 对完备黎曼流形 (M,g) 上一点 p，若 $\exp_p$ 在 $v\in T_pM$ 处退化，即存在 $w\in T_vT_pM$，使得 $(\exp_p)_{*v}w=0$，则称 $\exp_p(v)$ 是 p 的一个（沿 $\exp_p(tv)$ 的）共轭点。

命题 12.9. 设 γ 是完备黎曼流形 (M,g) 上的一条测地线，$\gamma(0)=p,\gamma(1)=q$，则 q 是 p 的共轭点，当且仅当存在沿 γ 定义的 *Jacobi* 场 J 使得 $J(0)=J(1)=0$。

证明. “$\Longleftarrow$”：由 $J(0)=0$ 知 J 是测地变分

$$\Phi(t,s)=\exp_p(t(y+sw))$$

的变分向量场，故由(48)，

$$J(1)=(\exp_p)_{*y}w$$

故 $J(1)=0$ 意味着 $\exp_p$ 在 y 处退化，即 $q=\exp_p(y)$ 是 p 的共轭点。

“$\Longrightarrow$”：由于存在 $w\in T_yT_pM$，使得 $(\exp_p)_{*y}w=0$，故令

$$\Phi(t,s)=\exp_p(t(y+sw))$$

则其变分向量场是满足题目条件的 Jacobi 场。 $\square$

2013-5-31

回顾

- *Bonnet-Myers 定理*

  (M, g) 完备，$\mathrm{Ric} \geqslant n-1 \Longrightarrow M$ 紧，直径 $\leqslant \pi$，基本群有限。

- *Jacobi 场*

  – Jacobi 方程
  $$\ddot{U} + \mathcal{R}(U, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$$

  – 每个 Jacobi 场都是某个测地变分的变分向量场。

  – 固定起点的 Jacobi 场
  $$J(t) = (\exp_p)_{*ty}(tw) \in T_{\exp_p(ty)}M$$

Cartan-Hadamard 定理与 Jacobi 场（续）

定理 12.10 (*Cartan-Hadamard 定理*). *设 (M, g) 是完备黎曼流形，且 $K \leqslant 0$，则对任意的 $x \in M$，$\exp_x\colon T_xM \longrightarrow M$ 是覆盖映射。*

证明. 首先证明 $\exp_x$ 是局部微分同胚，这等价于 $\forall y \in T_xM$，$\exp_x$ 在 y 处非退化，等价于 x 无沿测地线 $\exp_x(ty)$ 的共轭点。

取沿 $\gamma(t) = \exp_x(ty)$ 的 Jacobi 场 $J(t)$，使 $J(0) = 0$，考虑函数 $f(t) = \frac{1}{2}|J(t)|^2$，则

$$\begin{aligned}
\dot{f} &= \mathrm{g}(J, \dot{J}) \\
\ddot{f} &= \mathrm{g}(\dot{J}, \dot{J}) + \mathrm{g}(J, \ddot{J}) \\
&= |\dot{J}|^2 - \mathrm{g}(J, \mathcal{R}(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}) \\
&= |\dot{J}|^2 - K(J \wedge \dot{\gamma})||J \wedge \dot{\gamma}||^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

故 $f'(t)$ 单调增加，从而 $f'(t) \geqslant f'(0) = 0$，故 $f(t)$ 单调增加，从而当 $t > 0$ 时，$J(t) \neq 0$。

下证 $\exp_x$ 是覆盖映射：

在 T_xM 上定义黎曼度量 $\widetilde{\mathrm{g}} = (\exp_x)^* \mathrm{g}$，则 $\exp_x\colon (T_xM, \widetilde{\mathrm{g}}) \longrightarrow (M, \mathrm{g})$ 是局部等距。由于 (M, g) 完备，故 $\exp_x$ 是满射，由定理8.15，$\exp_x$ 是覆盖映射。 □

例 12.11. *$S^2 \times S^1$ 上不存在 Einstein 度量。*

证明. 若存在 Einstein 度量，注意到 $\dim S^2 \times S^1 = 3$，则由习题9，其截面曲率为常数 k。

若 $k \leqslant 0$，则由 Cartan-Hadamard 定理，$S^2 \times S^1$ 的万有覆盖是 $\mathbb{R}^3$，然而事实上是 $S^2 \times \mathbb{R}^1$。

若 $k > 0$，则由 Bonnet-Myers 定理，$\pi_1(S^2 \times S^1)$ 有限，但事实上 $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$。 □

例 12.12. *求常曲率空间的 Jacobi 场。*

证明. 令
$$J(t) = (\exp_x)_{*ty}(tv)$$
其中 $y, v \in T_xM$，且 $|y| = |v| = 1$，$\mathrm{g}(y, v) = 0$。则 $J(0) = 0$，$\dot{J}(0) = v \perp y$。

考虑 $f(t)=\mathrm{g}(J,\dot\gamma)$，则

$$\begin{aligned}\dot f(t)&=\mathrm{g}(\dot J,\dot\gamma)\\ \ddot f(t)&=\mathrm{g}(\ddot J,\dot\gamma)=-\,\mathrm{g}(\mathcal{R}(J,\dot\gamma)\dot\gamma,\dot\gamma)=0\end{aligned}$$

故

$$f(t)=\dot f(0)t+f(0)$$

但 $\dot f(0)=0,f(0)=0$，故 $f(t)=0$，即 $J\perp\dot\gamma$。

若截面曲率为常数 k，则

$$\mathcal{R}(X,Y)Z=-k(\mathrm{g}(X,Z)Y-\mathrm{g}(Y,Z)X)$$

将其代入 Jacobi 方程(47)，得

$$\begin{aligned}\ddot J&=-\mathcal{R}(J,\dot\gamma)\dot\gamma\\ &=k(\mathrm{g}(J,\dot\gamma)\dot\gamma-\mathrm{g}(\dot\gamma,\dot\gamma)J)\\ &=-kJ\end{aligned}$$

取沿测地线 $\gamma(t)=\exp_x(ty)$ 的标准正交标架场 $\{e_i(t)\}$，使得 $e_n(t)=\dot\gamma(t)$，则可令 $J=J^ie_i$，则函数 J^i 满足

$$\ddot J^i+k\dot J^i=0$$

这是谐振子方程，其通解为

$$J^i(t)=\lambda^iS_k(t)+\mu^iC_k(t)$$

其中

$$S_k(t)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}t) & k>0\\ t & k=0\\ \frac{1}{\sqrt{-k}}\sinh(\sqrt{-k}t) & k<0\end{cases}\qquad C_k(t)=\dot S_k(t)$$

结合初始条件 $J(0)=0$ 得

$$J^i(t)=\lambda^iS_k(t)$$

其中当 $k>0$ 时，$t=\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ 对应于共轭点。 □

命题 12.13. *对于常曲率空间，沿任一测地线 $\gamma(t)=\exp_x(ty),|y|=1$，且满足 $J(t)=(\exp_x)_{*ty}(tv),|v|=1,v\perp y$ 的 Jacobi 场可写为*

$$J(t)=S_k(t)V(t)$$

其中 $V(t)$ 是 v 沿 $\gamma(t)$ 平行移动所得到的。

定义 12.14. 一个完备的单连通的常曲率空间称为空间形式。

定理 12.15. *$K=1$ 的空间形式只有 S^n，$K=0$ 的空间形式只有 $\mathbb{R}^n$，$K=-1$ 的空间形式只有 H^n。*

证明. 若 $K \leqslant 0$，则由 Cartan-Hadamard 定理，$\exp_x\colon T_xM \longrightarrow M$ 是微分同胚，于是

$$(T_xM, (\exp_x)^* \mathrm{g}) \cong (M, \mathrm{g})$$

对任意的 $v \in T_yT_xM$，令 $v = y_1 + v_1, v_1 \perp y, y_1 \parallel y$，则

$$\begin{aligned}
|v|^2_{\exp_x} &= |(\exp_x)_{*y}(v)|^2 \\
&= |(\exp_x)_{*y}(y_1)|^2 + |(\exp_x)_{*y}(v_1)|^2 \\
&= |y_1|^2 + S_k(|y_1|)^2|v_1|^2
\end{aligned}$$

由此可知 $K = 0$ 的空间形式只有 $\mathbb{R}^n$，$K = -1$ 的空间形式只有 H^n。

若 $K = 1$，考虑

$$\exp_x\colon B_x(\pi) \subset T_xM \longrightarrow M$$

则 $(\exp_x)^* \mathrm{g}$ 是 $B_x(\pi)$ 上的黎曼度量，其表达式为

$$(\exp_x)^* \mathrm{g}(v, v) = |y_1|^2 + \sin^2(|y_1|)|v_1|^2$$

其中 $v \in T_yB_x(\pi) \cong T_xM$，$v = y_1 + v_1, v_1 \perp y, y_1 \parallel y$。

于是映射 $\exp_x$ 是等距嵌入。

又考虑 x 的共轭点 $\widetilde{x} = \exp_x(\pi y), |y| = 1$ 及相应的 $\exp_{\widetilde{x}}$，则 $B_x(\pi)$ 与 $B_{\widetilde{x}}(\pi)$ 可覆盖 M。进一步地，$\exp_x$ 与 $\exp_{\widetilde{x}}$ 可拼成等距同构 $S^n \cong M$。 $\square$

索引