ÁLGEBRA BÁSICA

INCLUYE: LÓGICA, CONJUNTOS, ÁLGEBRA
TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

EDICIÓN ACTUALIZADA

Editorial "Leonardo"
2015

Víctor Chungara Castro

EDICIÓN CORREGIDA Y AUMENTADA DE 324 PÁGINAS

ÁLGEBRA BÁSICA

I.- LÓGICA PROPOSICIONAL
II.- TEORÍA DE CONJUNTOS
III.- ÁLGEBRA BÁSICA
IV.- OPERACIONES ALGEBRAICAS
V.- PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES
VI.- FACTORIZACIÓN
VII.- FRACCIONES
VIII.- RADICALES
IX.- ECUACIONES
X. INECUACIONES
XI.- LOGARITMOS
XII.- BINOMIO DE NEWTON
XIII.- COMBINATORIA
XIV.- PROGRESIONES
XV.- NÚMEROS COMPLEJOS
XVI.- TRIGONOMETRÍA
XVII.- GEOMETRÍA ANALÍTICA

EDICIÓN 2015

REVISADA Y AUMENTADA A 17 Capítulos, 324 páginas

Víctor Chungara Castro

ÍNDICE

I.- LÓGICA PROPOSICIONAL

II.- TEORÍA DE CONJUNTOS

III.- ÁLGEBRA BÁSICA

IV.- OPERACIONES ALGEBRAICAS

V.- PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

VI.- FACTORIZACIÓN

VII.- FRACCIONES

VIII.- RADICALES

IX.- ECUACIONES

X.- INECUACIONES

XI.- LOGARITMOS

XII.- BINOMIO DE NEWTON

I.- LÓGICA PROPOSICIONAL

I.1 INTRODUCCIÓN

Las Matemáticas son una extensión de la Lógica, puede decirse desde un punto de vista filosófico que: las Matemáticas son un Lenguaje. El Lenguaje de la Ciencia.

- Los Conceptos Matemáticos básicos tienen sus raíces en las situaciones físicas que los hombres encaran en la vida, así por ejemplo, el contar es algo primitivo y básico que luego lleva al concepto abstracto de Número.
- Sin embargo un Desarrollo Matemático, exige Razonamientos Válidos, utilizando un lenguaje claro, precisándose para ello el uso de símbolos y conectivos, que eviten ambigüedades, por ello se hace necesario introducir los conceptos de: Proposición, Axioma, Teorema, etc.

I.1.2 PROPOSICIONES

Una Proposición es una colección de Palabras, Números o Símbolos, de los cuales tiene sentido el afirmar si es Verdadero o Falso. Una Proposición se representará por las letras: p, q, r, s, .., etc.

Todas las Proposiciones están asociadas a un Valor de Verdad, el cuál puede ser Verdadero (V) o Falso (F). A las Proposiciones que tienen un Valor de Verdad conocido (V o F) se los llama: ENUNCIADOS.

Ej 1.1 Son Proposiciones las siguientes colecciones de Palabras, Números o Símbolos

p: *Los libros son buenos amigos*	Tiene sentido el afirmar si es Verdadero o Falso, es una Proposición. La Proposición es Verdadera (V)
q: *Los gatos ladran*	Suponer que es Falso (F), ya indica que es Proposición.
r: *Los hombres son mas inteligentes que las mujeres*	Dependiendo del punto de vista, se indicará si es V o F. Lo importante es que sí es una Proposición.
s: $5 + (2)(4) = 13$	Tiene sentido afirmar si es V o F, es Proposición (Es V)
t: $(+)(-) = (+)$	Es una Proposición (Es F)

Ej 1.2 No son Proposiciones, estas otras colecciones de Palabras, Números, o Símbolos

El perro de mi amigo	No tiene sentido el afirmar si es V o F, por tanto no es una Proposición.
¡Hola, como estás!	No es ni V ni F, no es una Proposición
El blanco de las nubes sobre el azul del cielo	No es una Proposición.
$8 + 3 - 6$	No es ni V ni F, no es Proposición.

Se conoce como EL PRINCIPIO DEL TERCER EXCLUIDO, a aquel principio que sostiene que una Proposición solo tiene dos opciones (Es V o F), no existe una tercera alternativa.

1.1 Indicar cuales de las siguientes colecciones de Palabras, Números o Símbolos constituyen Proposiciones (p)

El cielo es azul	(p)	*El muchacho simpático*	
Cervantes escribió "DON QUIJOTE"	(p)	*El muchacho es simpático*	(p)
Las hojas verdes del árbol de la Plaza Central		$4 + 3^2 = (5)(4) - 14 \div 2$	(p)
Por una sonrisa de una mujer hermosa		$(3)(5) > 2^2 + 9$	(p)
Los aviones navegan en los mares del mundo	(p)	$(2)(1) + (2)(2) + (2)(3)$	
Lo que natura non da, San Andrés non presta	(p)	$a + b \neq b + a$	(p)
El bachiller de cerebro virgen		$(+)(+) > (+)(-)$	(p)

I.1.2 AXIOMAS

Un Axioma es una Proposición evidente por si misma; Es decir es una Proposición siempre verdadera que no admite discusión ni justificación.

Todas las Teorías Matemáticas se inician a partir de un grupo de Axiomas escogidos. La idea de Axioma puede generalizarse, sin embargo se la tomará en el sentido indicado.

I.1.3 TEOREMAS

Un Teorema es una Proposición cuya veracidad debe ser demostrada. Los Teoremas se demuestran mediante Axiomas previamente establecidos. Una colección ordenada de Teoremas, a su vez conforma una TEORÍA.

Lo indicado se esquematiza por la siguiente gráfica:

Se observa que la Teoría se basa en los Teoremas; Los Teoremas se basan en los Axiomas; Los Axiomas se basan en si mismos, entonces se constituyen en los sostenes básicos de toda la Estructura Lógica.

I.2 PROPOSICIONES COMPUESTAS

Las combinaciones de Proposiciones Simples (Vistas anteriormente), mediante Conectivos Lógicos, conforman Proposiciones Compuestas. Los Conectivos Lógicos que se estudiaran se indican en la Tabla:

CONECTIVO	OPERACIÓN ASOCIADA	SIGNIFICADO
$\sim$	Negación	No; no es cierto que:
$\wedge$	Conjunción	y
$\vee$	Disyunción Inclusiva	y/o ;uno u otro o ambos
$\veebar$	Disyunción Exclusiva	o; uno u otro, pero no ambos
$\Rightarrow$	Condicional	Si ... entonces ...
$<=>$	Bicondicional	Si y solo si

Las Operaciones Proposicionales, se definen a partir de Proposiciones cuyos Valores de verdad se conocen caracterizando luego la Proposición Final o Resultante, a través de su Valor de verdad.

Por tanto el Valor de Verdad de una Proposición Compuesta, se determinará a partir del Valor de Verdad de las Proposiciones Simples, y de acuerdo con el Conectivo Lógico que se emplee.

Existen otros Conectivos Lógicos de menor uso, como la NEGACIÓN CONJUNTA: $\downarrow$

I.3.1 TABLAS DE VERDAD

Una Tabla de Verdad es un arreglo ordenado de las posibilidades del Valor de Verdad de las Proposiciones Simples o Compuestas.

Las Tablas de Verdad permiten esquematizar en forma simple, las características del Valor de Verdad de las Proposiciones. En el estudio de cada Conectivo Lógico se indicarán sus respectivas Tablas.

I.3.2 EQUIVALENCIA LÓGICA

Dos Proposiciones Compuestas poseen Equivalencia Lógica, si sus Tablas de Verdad son Idénticas.

La Equivalencia Lógica entre las Proposiciones: P, Q se expresa mediante: $\boxed{P \equiv Q}$

El Símbolo: ≡ se lee "Equivalente" ; verificándose: $P \equiv Q$, o también: $Q \equiv P$; donde P, Q pueden ser Proposiciones Simples o Compuestas.

Por tanto, para demostrar una Equivalencia Lógica, se deben elaborar, tanto las Tablas de Verdad de P, como de Q, las que entre sí deberán ser idénticas.

I.3 LA NEGACIÓN

La Negación de la Proposición: p es la Proposición: ∼p Se obtiene anteponiendo el Conectivo: ∼ sobre: p (∼p se lee: "No p" ; o también: "No es cierto que p")

Si una Proposición es Verdadera, su Negación será Falsa; Si la Proposición es Falsa su Negación será Verdadera.

La Tabla de Verdad de la Negación es:

p	∼p
V	F
F	V

Ej 1.3 Una Proposición y su Negación correspondiente son las siguientes:

p: *Es bueno el deporte para la salud*

∼p: *No es bueno el deporte para la salud*

Anteponiendo el No (∼), a la Proposición se obtiene la Negación.

Ej 1.4 p: *Son bellas las flores*

∼p: *No son hermosas las flores* ∼p: *No es cierto que son bellas las flores*

∼p: *Son feas las flores* ∼p: *Es falso que son bellas las flores*

Diversos modos de expresión de la Negación.

Ej 1.5 Las Proposiciones pueden negarse mediante símbolos adecuados como ser:

p: $a = 2$ ∼p: $a \neq 2$

En la Simbología Matemática, la Negación del Igual (=) ; es el No es igual (≠)

q: $x > a$ ∼q: $x \not> a$

∼q: $x \leq a$

La Negación del Mayor (>); es el No es mayor (≯); o también el Menor o igual (≤).

1.2 Negar las siguientes Proposiciones:

a) p: *La Universidad es el templo de la ciencia* ∼p: *La Universidad no es el templo de la ciencia*

b) q: *El auto no es veloz.* ∼q: *El auto es veloz.*

c) r: $x < 5$ ∼r: $x \geq 5$

Una Negación Reiterada o Doble Negación equivale a la Proposición Original $\boxed{\sim(\sim p) \equiv p}$

Ej 1.6 p: *La chica es bonita* $\sim$p: *La chica no es bonita*

$\sim(\sim$p): *No es cierto que: La chica no es bonita*

q: $a(b + c) = ab + ac$ $\sim$p: $a(b + c) \neq ab + ac$

$\sim(\sim$p): *No es cierto que:* $a(b + c) \neq ab + ac$

Efectuando una Doble Negación de una Proposición.

I.4 LA CONJUNCIÓN

La Conjunción de dos Proposiciones: p, q es una Proposición Compuesta, que se obtiene combinando p, q mediante el Conectivo $\wedge$ (p $\wedge$ q, se lee "p y q")

El Valor de Verdad de la Conjunción: p $\wedge$ q es de Verdadero, cuando tanto p como q son Verdaderos, en cualquier otro caso es Falso.

La Tabla de Verdad de la Conjunción es:

p	q	p $\wedge$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ej 1.7 Se conforma una Conjunción a partir de dos Proposiciones Simples:

p: *El profesor es bueno* q: *Los alumnos son malos*

p $\wedge$ q: *El profesor es bueno y los alumnos son malos*

Intercalando entre p, q el Conectivo: $\wedge$ (y), se determina la Conjunción.

Ej 1.8 p $\wedge$ q: *Las paredes son blancas y las puertas son rojas*

p: *Las paredes son blancas* q: *Las puertas son rojas*

p $\wedge$ q: *Las Matemáticas aburren y molestan*

p: *Las Matemáticas aburren* q: *Las Matemáticas molestan*

p $\wedge$ q: $(x > 5) \wedge (x \neq 3)$ p: $(x > 5)$ q: $(x \neq 3)$

Se determinan las Proposiciones Simples a partir de una Conjunción:

1.3 Determinar el Valor de Verdad de las siguientes Conjunciones:

a) p $\wedge$ q: *Dos es un Número Par y Tres es Número Par*

p: *Dos es un Número par* q: *Tres es un Número Par*

p es V, q es F; por tanto es F la Conjunción. V $\wedge$ F $\equiv$ F

b) p $\wedge$ q: *En Invierno hace frío y* $(4 + 3 \neq 5)$

p: *En Invierno hace frío* q: $(4 + 3 \neq 5)$

p es V, q es V; por tanto es V la Conjunción V $\wedge$ V $\equiv$ V

c) p $\wedge$ q: $(a - b = b - a)$ y $(6 + 2 > 9)$

p: $(a - b = b - a)$ q: $(6 + 2 > 9)$

p es F, q es F; por tanto es F la Conjunción. F $\wedge$ F $\equiv$ F

1.4 Con las Proposiciones p: *Es Verano* ; q: *Hace calor*, escribir simbólicamente

a) *No es Verano y hace calor* $\sim$p $\wedge$ q

b) *No es Verano , hace frío* $\sim$p $\wedge$ $\sim$q

Para representar a la Conjunción suele usarse también la coma (,)

I.5 LA DISYUNCIÓN INCLUSIVA

La Disyunción Inclusiva de dos Proposiciones: p, q es una Proposición Compuesta que se obtiene combinando: p, q mediante el Conectivo $\vee$. (p $\vee$ q, se lee "p o q")

En el lenguaje común el "o" se emplea indistintamente, en sentido Inclusivo como Exclusivo. En Lógica para el "o Inclusivo", se usará "o" en el sentido de: y/o uno u otro o ambos (En el "o Exclusivo se entiende como: uno u otro pero no ambos).

Por tanto: p $\vee$ q se entenderá como: p o q o ambos a la vez.

El Valor de Verdad de la Disyunción Inclusiva: p $\vee$ q es Falso si son Falsas las dos Proposiciones, siendo Verdadero en cualquier otro caso.

La Tabla de Verdad de la Disyunción Inclusiva es:

p	q	p $\vee$ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ej 1.9 Se conforma una Disyunción Inclusiva a partir de dos Proposiciones Simples:

p: *Las rosas son rojas* q: *Los lirios son blancos*

p $\vee$ q: *Las rosas son rojas o los lirios son blancos*

Intercalando en p, q el Conectivo $\vee$, se obtiene la Disyunción.

Ej 1.10 p $\vee$ q: *Mery es una niña alegre o feliz*

p: *Mery es una niña alegre* q: *Mery es una niña feliz*

p $\vee$ q: $(3x = 12)$ *o* $(x - 1 = 3)$ p: $(3x = 12)$ q: $(x - 1 = 3)$

Se obtienen las Proposiciones Simples de una Disyunción Inclusiva

1.5 Determinar el Valor de Verdad de las siguientes Disyunciones Inclusivas:

a) p $\vee$ q: *Las aves vuelan o los peces caminan*
p: *Las aves vuelan* q: *Los peces caminan*
p es V, q es F; por tanto es V la Disyunción Inclusiva. V $\vee$ F $\equiv$ V

b) p $\vee$ q: $(a + 2a = 3a)$ *o* $(a + 0 = a)$
p: $(a + 2a = 3a)$ q: $(a + 0 = a)$
p es V, q es V; por tanto es V la Disyunción Inclusiva. V $\vee$ V $\equiv$ V

c) p $\vee$ q: *El alcohol ennoblece o* $(3 \cdot 2 + 1)$
p: *El alcohol ennoblece* q: $(3 \cdot 2 + 1)$
p es F, q es F; por tanto es F la Disyunción Inclusiva. F $\vee$ F $\equiv$ F

1.6 Con las Proposiciones p: *Ana llora* ; q: *Ana ríe* ; Escribir simbólicamente:

Ana llora o no ríe p $\vee \sim$q

Ana no llora y ríe $\sim$p $\wedge$ q

La 2ª Proposición Compuesta es la Negación de la 1ª, tal como se verá luego.

I.5.1 LA DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

La Disyunción Exclusiva de dos Proposiciones: p, q es una Proposición Compuesta que se obtiene combinando: p, q con el Conectivo $\veebar$ (p $\veebar$ q, se lee "p o exclusivo q")

Se entenderá: p $\veebar$ q, como p o q, pero no ambos a la vez.

El Valor de Verdad de la Disyunción Exclusiva: p $\veebar$ q es de Falso, si los Valores de Verdad de: p, q son iguales entre sí. Es de Verdadero si los Valores de Verdad de: p, q son diferentes entre sí. La Tabla de Verdad de la Disyunción Exclusiva es:

p	q	p $\veebar$ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ej 1.11 Se conforma una Disyunción Exclusiva a partir de dos Proposiciones Simples

p: *Hoy es Martes* q: *Mañana es Jueves*

p ⊻ q: *Hoy es Martes o mañana es Jueves*

Intercalando entre p, q el Conectivo ⊻ se conforma La Disyunción Exclusiva.

Ej 1.12 p ⊻ q: *Cuatro es un Número Par o Impar*

p: *Cuatro es un Número Par* q: *Cuatro es un Número Impar*

p ⊻ q: $(a \geq 0)$ o $(a < 0)$ p: $(a \geq 0)$ q: $(a < 0)$

Se determinan las Proposiciones Simples de Disyunciones Exclusivas:

1.7 Determinar el Valor de Verdad de las siguientes Disyunciones Exclusivas:

a) p ⊻ q: *Dos es un Número Entero o Fraccionario*

p: *Dos es un Número Entero* q: *Dos es un Número Fraccionario*

p es V, q es F; por tanto es V la Disyunción Exclusiva. V ⊻ F ≡ V

b) p ⊻ q: $(a + a = 2a)$ o $(a - a = 0)$

p: $(a + a = 2a)$ q: $(a - a = 0)$

p es V, q es V; por tanto es F la Disyunción Exclusiva. V ⊻ V ≡ F

1.8 Para una Proposición Compuesta Verdadera, indicar si el "o" que se usa es Inclusivo o Exclusivo:

a) *El bebé fue hombre o mujer*

p: *El bebé fue hombre* q: *El bebé fue mujer*

Un bebé que nace es hombre o mujer, pero no ambas cosas a la vez, por tanto el: o es Exclusivo, para una Proposición V.

b) *Te regalaré rosas o violetas*

p: *Te regalaré rosas* q: *Te regalaré violetas*

Un regalo puede incluir o rosas o violetas, por tanto el: o es Inclusivo, para una Proposición V

Cuando una Disyunción no está especificada como Inclusiva o Exclusiva, se asume que es Inclusiva.

I.6 EL CONDICIONAL

El Condicional de dos Proposiciones: p, q es una Proposición Compuesta que se obtiene combinando p, q mediante el Conectivo ⇒ (p ⇒ q se lee: "Si p entonces q").

Al Condicional se lo llama también IMPLICACIÓN; p ⇒ q se lee además como: p implica q ; también como: p es suficiente para q.

El Valor de Verdad del Condicional: p ⇒ q es Falso, cuando: p es Verdadero y q es Falso, siendo de Verdadero en cualquier otro caso.

La Tabla de Verdad del Condicional es:

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ej 1.13 Se conforma un Condicional a partir de dos Proposiciones Simples:

p: Hace frío q: *Es Invierno*

p ⇒ q: *Si hace frío entonces es Invierno*

Intercalando el Conectivo ⇒ entre: p, q se determina el Condicional.

Ej 1.14 Se determinan las Proposiciones Simples a partir de un Condicional.

p ⇒ q: *Si los alumnos estudian entonces aprobarán el curso*

p: *Los alumnos estudian* q: *Los alumnos aprobaran el curso*

p ⇒ q: *Si:* $(a = 2) \Rightarrow (3a = 6)$ p: $(a = 2)$ q: $(3a = 6)$

1.9 Determinar el Valor de Verdad de los siguientes Condicionales:

a) $p \Rightarrow q$: *Si tres es Número Impar entonces cinco es Par*
p: *Tres es Número Impar* q: *Cinco es Número Par*
p es V, q es F; por tanto es F el Condicional.

b) $p \Rightarrow q$: *Si las aves vuelan entonces* $(2a + 3a = 5a)$
p: *Las aves vuelan* q: $(2a + 3a = 5a)$
p es V, q es V; por tanto es V el Condicional.

❍ En el Condicional: $p \Rightarrow q$; a p se lo llama el ANTECEDENTE y q el CONSECUENTE.

❍ Si: $p \Rightarrow q$ es Verdadero (V), entonces se dice que: p es Condición Suficiente ; q es Condición Necesaria

❍ El Condicional puede expresarse como: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$; A su vez su Negación se expresa por: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

Ej 1.15 $p \Rightarrow q$: *Si el trabajo da salud entonces los enfermos deben trabajar*
$\sim p \vee q$: *El trabajo no da salud o los enfermos deben trabajar*
Se puede expresar de otra manera un Condicional dado.

CONDICIONALES ASOCIADOS

Dado el Condicional: $p \Rightarrow q$; los Condicionales Asociados son:

$q \Rightarrow p$: CONDICIONAL RECÍPROCO
$\sim p \Rightarrow \sim q$: CONDICIONAL CONTRARIO
$\sim q \Rightarrow \sim p$: CONDICIONAL CONTRA-RRECÍPROCO

Al Condicional Contrario se lo llama también CONVERSO; al Contrario INVERSO y al Contra-rrecíproco CONTRAPOSITIVO.

La Tabla de Verdad del Condicional y los Condicionales asociados es:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

La Tabla indica la Equivalencia Lógica del Condicional con su Contrarrecíproco; Similarmente el Recíproco es Equivalente Lógico al Contrario. (Sus Columnas son Idénticas) Por tanto:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p \quad ; \quad q \Rightarrow p \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$$

Ej 1.16 $p \Rightarrow q$: *Sí el anillo es de oro entonces el anillo es valioso*
$q \Rightarrow p$: *Si el anillo es valioso entonces el anillo es de oro*
$\sim p \Rightarrow \sim q$: *Si el anillo no es de oro entonces el anillo no es valioso*
$\sim q \Rightarrow \sim p$: *Si el anillo no es valioso entonces el anillo no es de oro*
Se determinan los Condicionales asociados a partir de un Condicional dado.

Ej 1.17 $p \Rightarrow q$: *Si lees entonces aprendes*
$\sim q \Rightarrow \sim p$: *Si no aprendes entonces no lees*
Se determina un Condicional Asociado equivalente al Condicional dado.

$p \Rightarrow q$: *Si* $(a > 3)$ *entonces* $(2a > 6)$
$\sim q \Rightarrow \sim p$: *Si* $(2a \not> 6)$ *entonces* $(a \not> 3)$
Por la equivalencia de un Condicional con su Contrarrecíproco, se puede usar cualquiera de ellos.

En el Condicional: $p \Rightarrow q$; a p se lo llama el ANTECEDENTE y q el CONSECUENTE. Si: $p \Rightarrow q$ es Verdadero (V), entonces se dice que: p es Condición Suficiente ; q es Condición Necesaria.

El Condicional se expresa por: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$; Su Negación se expresa por: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

I.7 EL BICONDICIONAL

El Bicondicional de dos Proposiciones: p, q es una Proposición Compuesta que se obtiene combinando p, q mediante el Conectivo $\Leftrightarrow$ ($p \Leftrightarrow q$ se lee: "p si y solo si q")

La Proposición Compuesta Bicondicional es Verdadera si los Valores de Verdad de p, q son iguales entre sí; en otro caso es Falso.

La Tabla de Verdad del Bicondicional es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ej 1.18 Se conforma un Condicional a partir de dos Proposiciones Simples:

p: *Juan pasea* q: *No llueve*

$p \Leftrightarrow q$: *Juan pasea si y solo si no llueve*

Intercalando entre p, q el Conectivo $\Leftrightarrow$ se conforma el Bicondicional.

Ej 1.19 $p \Leftrightarrow q$: *Hay progreso si y solo si hay esfuerzo*

p: *Hay progreso* q: *Hay esfuerzo*

$p \Leftrightarrow q$: *La cultura se difunde si y solo si existen los libros*

p: *La cultura se difunde* q: *Existen los libros*

Se determinan las Proposiciones Simples a partir de un Bicondicional

1.10 Hallar el Valor de Verdad de los siguientes Bicondicionales:

a) $p \Leftrightarrow q$: *Seis es Impar si y solo si es múltiplo de dos*

p: *Seis es impar* q: *Seis es múltiplo de dos*

p es F, q es V; luego es F el Bicondicional.

b) $p \Leftrightarrow q$: $(a + a \neq 2a)$ *si y solo si* $(aa \neq a^2)$

p: $(a + a \neq 2a)$ q: $(aa \neq a^2)$

p es F, q es F ; luego es V el Bicondicional.

El Bicondicional puede expresarse en términos de Condicionales: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

La Negación del Bicondicional es equivalente al "o Exclusivo": $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \veebar q$

1.11 Con las Proposiciones p: *El tonto sueña ;* q: $(a + b = ab)$ Escribir las siguientes Proposiciones Compuestas en forma simbólica:

a) *El tonto sueña si y solo si* $(a + b \neq ab)$ $p \Leftrightarrow \sim q$

b) $(a + b = ab)$ *si y solo si el tonto no sueña* $q \Leftrightarrow \sim p$

c) *Si el tonto sueña entonces* $(a + b = ab)$ *y si* $(a + b = ab)$ *entonces el tonto sueña*

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$

Combinando los distintos Conectivos Lógicos, pueden obtenerse otras Proposiciones Compuestas. Para determinar el Valor de Verdad de cualquier Proposición Compuesta es siempre conveniente recurrir a una Tabla de Verdad.

Para elaborar Tablas de Verdad de Proposiciones Compuestas que presenten alguna complejidad, existen dos procedimientos generales:

- ❑ El 1er Procedimiento consiste en escribir todas las posibilidades de las Proposiciones Simples, determinando luego los Valores de Verdad de cada Operación, para en forma paulatina llegar a la operación final.
- ❑ El 2do Procedimiento (Simplificado) consiste en que luego de anotar todas las posibilidades de las Proposiciones Simples, se escribe debajo de cada Operación Proposicional el Valor de Verdad correspondiente, guardando el respectivo orden. Éste es el método que en la práctica se emplea.

El número de Filas de una Tabla de Verdad es de 2^N, donde: N es el Nº de Proposiciones Simples que se emplean en la Proposición Compuesta. (Para n = 3 Proposiciones simples, se obtendrá 2^3 = 8 Filas)

Ej 1.20 Se elabora la Tabla de Verdad de : $(p \wedge q) \vee p$; por los dos Procedimientos

p	q	p ∧ q	p	(p ∧ q)∨ q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	F
F	F	F	F	F
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

Primer Procedimiento (De acuerdo a la Columna indicada)
(1) Posibilidades de: p
(2) Posibilidades de: q
(3) Resultado de: $p \wedge q$
(4) Posibilidades de: p
(5) Resultado final: $(p \wedge q) \vee p$

(p	∧	q)	∨	q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F
(1)	(3)	(2)	(5)	(4)

Segundo Procedimiento, Procedimiento simplificado
(1) Posibilidades de: p
(2) Posibilidades de: q
(3) Resultado de: $p \wedge q$ (Debajo del Conectivo ∧)
(4) Posibilidades de: p
(5) Resultado Final de: $(p \wedge q) \vee p$ (Debajo de ∨)

El Procedimiento simplificado es mas rápido y práctico y es el que se empleará posteriormente.

1.12 Hallar la Tabla de Verdad por el Procedimiento simplificado de: $(p \vee q) \Rightarrow (\sim p)$

(p	∨	q)	⇒	(∼p)
V	V	V	F	F
V	V	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V
(1)	(3)	(2)	(5)	(4)

Por el Procedimiento simplificado (De acuerdo a la Columna indicada)
(1) Posibilidades de: p (2) Posibilidades de: q
(3) Resultado de: $p \vee q$ (4) Negación de: p
(5) Resultado Final de: $(p \vee q) \Rightarrow (\sim p)$

Ej 1.21 Se elabora la Tabla de Verdad de: $(p \wedge q) \vee r$

Mediante el Procedimiento Práctico.

Note el orden de las Posibilidades de V y F para las tres Proposiciones Simples, así se consiguen todas las combinaciones posibles: $2^N = 2^3 = 8$

(1) Posibilidades de: p (2) Posibilidades de: q
(3) Posibilidades de: r
(4) Resultado de Operación: $p \wedge q$
(5) Resultado final de la Operación: $(p \wedge q) \vee r$

p	q	r	(p ∧ q)	∨ r
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	F
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

I.9.1 DEMOSTRACIONES DE EQUIVALENCIAS LÓGICAS

Las Tablas de Verdad permiten demostrar la Equivalencia Lógica de Proposiciones Simples o Compuestas, cuando los resultados obtenidos son Idénticos.

Ej 1.22

p	q	$p \wedge (p \vee q)$	
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	F	F
(1)	(2)	(4)	(3)

Se demuestra la Equivalencia Lógica: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

(1) Posibilidades de: p (2) Posibilidades de: q
(3) Resultado de: $p \vee q$ (4) Resultado de: $p \wedge (p \vee q)$

La Columna (4) es idéntica a la Columna (1) lo que demuestra la Equivalencia Lógica.

1.13 Demostrar las siguientes Equivalencias Lógicas, comparando las Columnas resultantes:

a) $p \wedge \sim q \equiv \sim(p \Rightarrow q)$

p	q	$p \wedge \sim q$		$\sim(p \Rightarrow q)$	
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	V
(1)	(2)	(4)	(3)	(6)	(5)

b) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$	
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

I.8 ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES

El Álgebra de las Proposiciones es un Álgebra que se ejecuta con las Operaciones Proposicionales antes indicadas. Se cumplen los siguientes Teoremas:

T1)	IDEMPOTENCIA	$p \wedge p \equiv p \;;\; p \vee p \equiv p$
T2)	CONMUTATIVIDAD	$p \wedge q \equiv q \wedge p \;;\; p \vee q \equiv q \vee p$
T3)	ASOCIATIVIDAD	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
T4)	DISTRIBUTIVIDAD	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T5)	DE MORGAN	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
T6)	IDENTIDAD	$p \wedge V \equiv p \;;\; p \vee F \equiv p$
T7)	ABSORCIÓN	$p \wedge F \equiv F \;;\; p \vee V \equiv V$
T8)	COMPLEMENTACIÓN	$p \wedge \sim p \equiv F \,,\; \sim(\sim p) \equiv p$ $p \vee \sim p \equiv V \,,\; \sim V \equiv F \,,\; \sim F \equiv V$

Ej 1.23 a) Se demuestran los Teoremas del Álgebra de Proposiciones T1) $p \wedge p \equiv p \;;\; p \vee p \equiv p$

p	$p \wedge p$	$p \vee p$
V	V	V
F	F	F
(1)	(2)	(3)

(1) Posibilidades del Valor de Verdad de: p
(2) Resultado de: $p \wedge p$, (3) Resultado de: $p \vee p$
La Columna: (1) es idéntica a las Columnas: (2) y (3) lo que demuestra el Teorema.

T4) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$; $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	**q**	**r**	**$p \wedge (q \vee r)$**	**$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$**	**$p \vee (q \wedge r)$**	**$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$**
V	V	V	V V	V V V	V V	V V V
V	V	F	V V	V V F	V F	V V V
V	F	V	V V	F V V	V F	V V V
V	F	F	F F	F F F	V F	V V V
F	V	V	F V	F F F	V V	V V V
F	V	F	F V	F F F	F F	V F F
F	F	V	F V	F F F	F F	F F V
F	F	F	F F	F F F	F F	F F F
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

(4), (5) Son Idénticas lo que demuestra la Primera Equivalencia.

(6), (7) Son Idénticas lo que demuestra la otra Equivalencia .

T5) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$; $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

p	**q**	**$\sim(p \wedge q)$**	**$\sim p \vee \sim q$**	**$\sim(p \vee q)$**	**$\sim p \wedge \sim q$**
V	V	F V	F F F	F V	F F F
V	F	V F	F V V	F V	F F V
F	V	V F	V V F	F V	V F F
F	F	V F	V V V	V F	V V V
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

(1), (2) Valores de: p, q

(3) Idéntico a (4)

(5) Idéntico a (6)

Ello demuestra la Equivalencia Lógica.

T6) $p \wedge V \equiv p$

$p \vee F \equiv p$

p	**V**	**F**	**$p \wedge V$**	**$p \vee F$**
V	V	F	V	V
F	V	F	F	F
(1)			(2)	(3)

(1) Posibilidades de: p

(2) Idéntico a (1); (3) Idéntico a (1)

Queda demostrado el Teorema.

1.14 Utilizando Teoremas del Álgebra de Proposiciones, simplificar las siguientes Proposiciones

a) $\sim p \wedge (p \vee q)$

$\sim p \wedge (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)$ Por **T2**, Distributividad

$\equiv (\ F\ ) \vee (\sim p \wedge q)$ Por **T8**, Complementación

$\equiv \sim p \wedge q$ Por **T7**, Absorción.

b) $(p \wedge \sim q) \wedge p$

$\equiv (\sim p \vee \sim(\sim q)) \wedge p$ Por **T5**, De Morgan

$\equiv (\sim p \vee q) \wedge p$ Por **T8**, Complementación

$\equiv p \wedge (\sim p \vee q)$ Por **T2**, Conmutatividad

$\equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)$ Por **T4**, Distributividad

$\equiv (\ F\ ) \vee (p \wedge q)$ Por **T8**, Complementación

$\equiv p \wedge q$ Por **T6**, Identidad.

c) $p \vee (p \wedge q)$

$\equiv (p \wedge V) \vee (p \wedge q)$ Por **T6**, Identidad

$\equiv p \wedge (V \vee q)$ Por **T4**, Distribut.

$\equiv p \wedge V$ Por **T7**, Absorción

$\equiv p$ Por **T6**, Identidad

d) $(p \Rightarrow q) \vee (p \vee q)$

Por: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$\equiv (\sim p \vee q) \vee (p \vee q)$ (Ver 1.13.b)

$\equiv (q \vee q) \vee (\sim p \vee p)$ Por **T3**, Asociatividad

$\equiv (q) \vee (V)$ Por **T1**, Id **T9** Compl.

$\equiv V$ Por **T7**, Absorción.

e) $p \wedge (p \Rightarrow q)$

Por: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$\equiv p \wedge (\sim p \vee q)$ (Ver 1.13.b)

$\equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)$ Por **T4**, Distribut.

$\equiv (\ F\ ) \vee (p \wedge q)$ Por **T8**, Complem.

$\equiv p \wedge q$ Por **T6**, Identidad.

I.9 TAUTOLOGÍAS, CONTRADICCIONES

Dos importantes conceptos de la Lógica Proposicional son las Tautologías y las Contradicciones.

- Una Tautología es aquella Proposición Compuesta que es Verdadera, para cualquier Valor de Verdad de sus Proposiciones Componentes.
- Una Contradicción es una Proposición Compuesta que es Falsa, para cualquier Valor de Verdad de sus Proposiciones Componentes.

Ej 1.24 Las siguientes Proposiciones Compuestas constituyen una Tautología y una Contradicción.

a) $(p \wedge q) \Rightarrow q$

p	q	$(p \wedge q) \Rightarrow p$		
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F
(1)	(2)	(4)	(5)	(3)

(1), (3) Posibilidades de: p
(2) Posibilidades de: q
(4) Resultado de: $p \wedge q$
(5) Resultado de: $(p \wedge q) \Rightarrow p$

Como se obtiene Verdadero (V) en todos los casos, se trata de una Tautología.

b) $\sim p \wedge (p \wedge q)$

p	q	$\sim p \wedge (p \wedge q)$		
V	V	F	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F
(1)	(2)	(3)	(5)	(4)

(1) Posibilidades de: p ;
(3) Negación de: p
(2) Posibilidades de: q
(4) Resultado de: $(p \wedge q)$
(5) Resultado de: $\sim p \wedge (p \wedge q)$

Se obtiene Falso (F) en todos los casos, se trata de una Contradicción.

1.15 Indicar si las siguientes Proposiciones son Tautologías o Contradicciones

a) $p \vee \sim(p \wedge q)$

p	q	$p \vee \sim(p \wedge q)$		
V	V	V	F	V
V	F	V	V	F
F	V	V	V	F
F	F	V	V	F
(1)	(2)	(5)	(4)	(3)

(1) Posibilidades de: p
(2) Posibilidades de: q
(3) Resultado de: $p \wedge q$
(4) Resultado de: $\sim(p \wedge q)$
(5) Resultado Final de: $p \vee \sim(p \wedge q)$

En el Resultado Final (5) se obtiene: V en todos los casos, es una Tautología.

b) $(p \veebar q) \wedge (p \Leftrightarrow q)$

p	q	$(p \veebar q) \wedge (p \Leftrightarrow q)$		
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V
(1)	(2)	(3)	(5)	(4)

(1) Posibilidades de: p
(2) Posibilidades de: q
(3) Resultado de: $p \veebar q$
(4) Resultado de: $p \Leftrightarrow q$
(5) Resultado Final: $(p \veebar q) \wedge (p \Leftrightarrow q)$

El Resultado Final (5), es: F en todos los casos, es una Contradicción.

Usando Propiedades de los Conectivos Lógicos es posible determinar Valores de verdad de Proposiciones compuestas, a partir de otros Valores de verdad conocidos.

1.16 Si la Proposición p es V, q es F, calcular el Valor de verdad de las Proposiciones compuestas:

a) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$

$(V \Rightarrow F) \wedge (V \vee F) \equiv (F) \wedge (V) \equiv F$

Para obtener un valor de verdad inicialmente se reemplaza lo conocido, luego por las Propiedades del Condicional y la Disyunción. Finalmente por lo conocido de la Conjunción.

b) $\sim(p \Leftrightarrow q) \wedge (p \veebar q)$

$\sim(V \Leftrightarrow F) \wedge (V \veebar F) \equiv \sim(F) \wedge (V)$

$\equiv V \wedge (V) \equiv V$

Similarmente reemplazando para luego ir simplificando.

Si se conoce que: $(\sim p \wedge r)$ es V, calcular el Valor de verdad de las Proposiciones compuestas:

c) $(\sim p \vee q) \Rightarrow \sim(s \vee r)$

Si: $(\sim p \wedge r)$ es V entonces p es F; r es V

$(\sim F \vee q) \Rightarrow \sim(s \vee V) \equiv (V \vee q) \Rightarrow \sim(V)$

$\equiv (V) \Rightarrow F \equiv F$

Analizando inicialmente la condición dada de $(\sim p \wedge r)$ es V, necesariamente debe cumplirse que ambas: $\sim p$, r sean verdaderas, a partir de ello se obtiene sus Valores.

d) $[(q \wedge \sim r) \veebar \sim p] \Rightarrow [\sim(p \wedge s) \wedge r]$

$[(q \wedge F) \veebar V] \Rightarrow [\sim(F \wedge s) \wedge V] \equiv [(F) \veebar V] \Rightarrow [\sim(F) \wedge V]$

$\equiv [V] \Rightarrow [V \wedge V]$

$\equiv [V] \Rightarrow [V] \equiv V$

Luego reemplazando y simplificando.

Note que no se conocían los valores de q, s

e) Si: $(\sim p \Rightarrow q) \vee \sim(r \wedge \sim s)$ es F, Hallar los Valores de verdad de las Proposiciones: p, q, r, s

Si: $(\sim p \Rightarrow q) \vee \sim(r \wedge \sim s)$ es F

Entonces: $(\sim p \Rightarrow q)$ es F; $\sim(r \wedge \sim s)$ es F

Si: $(\sim p \Rightarrow q)$ es F entonces: p es F; q es F

Si: $\sim(r \wedge \sim s)$ es F entonces: $(r \wedge \sim s)$ es V

Entonces r es V; s es F

Con la disyunción $\vee$, para lograr un F ambas proposiciones deben ser F.

Con el Condicional $\Rightarrow$ para lograr un F, la 1^{era} debe ser V la 2^{da} F.

Con la Conjunción $\wedge$ para lograr V, ambas deben ser V.

f) Hallar el Valor de verdad de la Proposición x, de manera que: $[x \Rightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow p$ sea F

$[x \Rightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow p \quad F$

Entonces: $[x \Rightarrow (p \wedge q)]$ es V ; p es F

Si: $[x \Rightarrow (F \wedge q)] \equiv V$; $[x \Rightarrow (F)] \equiv V$

Entonces: x es F

Con el Condicional $\Rightarrow$ para lograr un F, la 1era debe ser V, la 2da F.

En el último condicional para lograr V, necesariamente x debe ser F.

g) Hallar el Valor de verdad de x, de manera que: $[x \vee (p \wedge \sim q)] \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ sea V

$[x \vee (p \wedge \sim q)] \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \equiv V$

Entonces: $[x \vee (p \wedge \sim q)] \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \equiv V$

Si: $(p \wedge \sim q) \equiv V$ Entonces: p es V; q es F

$[x \vee (V)] \Leftrightarrow \sim(V) \equiv V$

$[V] \Leftrightarrow F \equiv V$ Conclusión falsa

Si: $(p \wedge \sim q) \equiv F$ Entonces: p es V; q es V

Entonces: p es F; q es V

Entonces: p es F; q es F

$[x \vee (F)] \Leftrightarrow \sim(F) \equiv V$; $[x \vee (F)] \Leftrightarrow V \equiv V$

Entonces: $[x \vee (F)] \equiv V$ Entonces x es V

Inicialmente ordenando la 2^{da} Proposición compuesta.

Analizando las dos opciones de $(p \wedge \sim q)$

Asumiendo que es V se llega a un imposible.

Asumiendo que es F, se logra el resultado

Note que no interesan los Valores de p, q

I.10 RAZONAMIENTOS

Un Razonamiento es una afirmación de que determinada Proposición (La Conclusión : Q),es una Conclusión de otras Proposiciones (Las Premisas: $P_1, P_2, ..., P_i$)

La notación usual para un Razonamiento es:

$$P_1, P_2, ..., P_i \vdash Q$$

Un Razonamiento es válido, si y solo si la Conjunción de las Premisas implica la Conclusión. Por tanto debe obtenerse una Tautología en:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge .... \wedge P_i) \Rightarrow Q$$

A los Razonamientos se los llama también ARGUMENTOS, a los Razonamientos Válidos se los llama: REGLAS DE INFERENCIA y a los No Válidos se los llama: FALACIAS.
Un Razonamiento no es Verdadero ni Falso, únicamente puede ser Válido o no Válido independientemente de los Valores de Verdad de sus Premisas y Conclusión.

Ej 1.25 Se analiza la Validez del siguiente Razonamiento: $p \Rightarrow q, p \vdash q$

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

p	q	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
V	V	V V V
V	F	F F V
F	V	V F V
F	F	V F V
(1)	(2)	(3) (4) (5)

En el Razonamiento dado, las Premisas son: $P_1 \equiv p \Rightarrow q$; $P_2 \equiv p$; La Conclusión: $Q \equiv q$

Para ser Razonamiento Válido, la Conjunción de las Premisas debe implicar la Conclusión o sea que debe obtenerse una Tautología en:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q.$$

En la Tabla, el Resultado Final (5) es Tautología. Por tanto el Razonamiento es válido.

Ej 1.26 Se analiza la Validez del siguiente Razonamiento: $p \vee q, q \vdash p$

$[(p \vee q) \wedge q] \Rightarrow p$

p	q	$[(p \vee q) \wedge q] \Rightarrow p$
V	V	V V V
V	F	V F V
F	V	V V F
F	F	F F V

Las Premisas y Conclusión respectivamente son: $P_1 \equiv p \vee q$; $P_2 \equiv q$; $Q \equiv p$

Debe obtenerse una Tautología en:

$[(p \vee q) \wedge q] \Rightarrow p$

Por la Tabla, no se obtiene una Tautología luego no es un Razonamiento Válido, es una Falacia.

1.17 Mostrar la Validez de los Razonamientos: $p \Rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$; $p \wedge q, p \vdash q$

p	q	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
V	V	V F F V F
V	F	F F V V F
F	V	V F F V V
F	F	V V V V V

p	q	$[(p \wedge q) \wedge p] \Rightarrow q$
V	V	V V V V
V	F	F F V F
F	V	F F V V
F	F	F F V F

Las Tablas de Verdad llegan a Tautologías, lo que verifica los Razonamientos.

Las principales Reglas de Inferencia son:

LEY DE MODUS PONENDO PONENS	$p \Rightarrow q\ ,\ p \vdash q$
LEY DE LA DOBLE NEGACIÓN	$\sim(\sim p) \vdash p$
LEY DE MODUS TOLLENDO TOLLENS	$p \Rightarrow q\ ,\ \sim q \vdash \sim p$
LEY DE LA ADJUNCIÓN	$p\ ,\ q \vdash p \wedge q$
LEY DE LA SIMPLIFICACIÓN	$p \wedge q \vdash p \quad ; \quad p \wedge q \vdash q$
LEY DE MODUS TOLLENDO PONENS	$p \vee q\ ,\ \sim p \vdash q\ ; \quad p \vee q\ ,\ \sim q \vdash p$
LEY DE ADICIÓN	$p \vdash p \vee q \quad ; \quad p \vdash p \vee r$
LEY DEL SILOGISMO HIPOTÉTICO	$p \Rightarrow q\ , q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$
LEY DEL SILOGISMO DISYUNTIVO	$p \vee q\ ,\ p \Rightarrow r\ ,\ q \Rightarrow s \vdash r \vee s$
LEY DE SIMPLIFICACIÓN DISYUNTIVA	$p \vee p \vdash p$
LEYES CONMUTATIVAS	$p \wedge q \vdash q \wedge p\ ; \quad p \vee q \vdash q \vee p$
LEYES DE MORGAN	$\sim p \wedge \sim q \vdash \sim(p \vee q) \qquad \sim p \vee \sim q \vdash \sim(p \wedge q)$

La Ley del Modus Ponendo Ponens ($p \Rightarrow q\ ,\ p \vdash q$) y la Ley del Modus Tollendo Tollens ($p \Rightarrow q\ ,\ \sim q \vdash \sim p$); fueron demostrados como Razonamientos Válidos en el Ej 1.25 y en el Problema P-1.17. De similar modo se demuestra la validez de las otras Leyes o Reglas de Inferencia.

Otra notación para las Razonamientos, consiste en colocar en columna las Premisas para luego tras una línea punteada colocar la Conclusión, que tomaría el aspecto de un Resultado.

Para el caso del Modus Ponendo Ponens, la notación seria:

$p \Rightarrow q$ Premisa
p Premisa
....
q Conclusión

Ej 1.27 Ejemplificando la Ley del Modus Ponendo Ponens, con las Proposiciones: p ; q

p: *Luis es estudioso* q: *Luis aprobará Matemáticas*

$p \Rightarrow q$: *Si Luis es estudioso entonces aprobará Matemáticas*

p: *Luis es estudioso*
....
q: *Luis aprobará Matemáticas*

Este Razonamiento es Válido, según se demostró en el Ej 1.25, ya que se obtuvo una Tautología al desarrollar la Tabla de Verdad, dada por: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

Ej 1.28 Ejemplo del Modus Tollendo Tollens ($p \Rightarrow q\ ,\ \sim q \vdash \sim p$) , con las Proposiciones: p ; q

p: *El hombre lee* q: *El hombre es culto*

$p \Rightarrow q$: *Si el hombre lee entonces es culto*

$\sim q$: *El hombre no es culto*
....
$\sim p$: *El hombre no lee*

Ej 1.29 Ejemplo del Silogismo Hipotético ($p \Rightarrow q\ ,\ q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$) , con las Proposiciones: p ; q ; r

p: *Juan es poeta* q: *Juan es pobre* r: *Juan tiene hambre*

$p \Rightarrow q$: *Si Juan es poeta entonces Juan es pobre*

$q \Rightarrow r$: *Si Juan es pobre entonces Juan tiene hambre*
....
$p \Rightarrow r$: *Si Juan es poeta entonces Juan tiene hambre*

1.18 Indicar si el siguiente Razonamiento es Válido o no es Válido:

Tienes problemas y no estas feliz
No tienes problemas
....
Estás feliz

En el Razonamiento indicado, las Proposiciones Simples son p: *Tienes penas* q: *Estás feliz*

En forma simbólica el Razonamiento está dado por las siguientes Premisas y Conclusión correspondiente:

$p \wedge \sim q$: *Tienes problemas y no estás feliz*
$\sim p$: *No tienes problemas*
....
$\sim q$: *Estas feliz*

Para verificar que el Razonamiento es válido debe haber una Tautología en: $[(p \wedge \sim q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

p	q	$[(p \wedge \sim q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
V	V	F F F F V V
V	F	V V F F V F
F	V	F F F V V V
F	F	F V F V V F
		*

Elaborando la Tabla de Verdad correspondiente a la Proposición:

$[(p \wedge \sim q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

En la Columna debajo de $\Rightarrow$ se observa una Tautología.

Por tanto el Razonamiento es válido.

Usualmente para determinar si un Razonamiento es o no válido, previamente se compara su forma simbólica con los Razonamientos Válidos conocidos, (Reglas de Inferencia) , para saber si se trata de uno de ellos, en tal caso obviamente se considerará como Válido.

Sin embargo, si el Razonamiento dado no coincide con los conocidos, su forma simbólica deberá llevarse a una Tabla de Verdad (Un Razonamiento es válido si y solo si la Conjunción de sus Premisas implica su Conclusión). Si se obtiene una Tautología el Razonamiento será Válido.

1.19 Determinar si los siguientes Razonamientos son o no válidos:

a) *Si Gus es deportista entonces Gus es fuerte*
Gus es deportista
....
Gus es fuerte

p: *Gus es deportista* ; q: *Gus es fuerte*

El Razonamiento es: $p \Rightarrow q$, $p \vdash q$

En Lenguaje Simbólico son Premisas: $p \Rightarrow q$, p. La Conclusión es: q

El Razonamiento es válido ya que comparando con las anteriores Leyes de Inferencia es la Ley del Modus Ponens.

b) *Dos es un Número Par o Entero*
Dos es un Número Entero
....
Dos es un Número Par

p: *Dos es un Número Par* ; q: *Dos es un Número Entero*

Razonamiento: $p \vee q$, $q \vdash p$

Las Premisas son: $p \vee q$, q. La Conclusión es: p

El Razonamiento no es válido. (Por la Tabla de Verdad del Ej. 27)

c) *Si el pueblo trabaja entonces progresa*
El pueblo no trabaja
....
El pueblo no progresa

p: *El pueblo trabaja* ; q: *El pueblo progresa*

El Razonamiento es: $p \Rightarrow q$, $\sim p \vdash \sim q$
Por la Tabla de Verdad en: * no se obtiene Tautología, el Razonamiento no es válido.

p	q	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim p] \Rightarrow \sim q$
V	V	V F F V F
V	F	F F F V V
F	V	V V V F F
F	F	V V V V V
		*

d) *Si comes entonces engordas*
Si comes entonces no engordas
....
No comes
p: *Comes* : q: *Engordas*
Razonamiento: $p \Rightarrow q,\ p \Rightarrow \sim q \vdash \sim p$
En: * hay Tautología, el Razonamiento es válido.(Es una Ley del Absurdo).

p	q	$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow \sim p$					
V	V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

*

e) *Si es invierno entonces hace frío*
Si hace frío entonces nieva
....
Si es invierno entonces nieva

p: *Es invierno* ; q: *Hace frío*
r: *Nieva*

Razonamiento: $p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$
En:* hay una Tautología, el Razonamiento es válido. Es la Ley del Silogismo Hipotético.

p	q	r	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$				
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

*

I.11 FUNCIONES PROPOSICIONALES

Una Función Proposicional es una colección de Palabras, Números o Símbolos que contienen una Variable x; Esta colección se convierte en una Proposición para un valor especificado de: x

La notación usual de una Función Proposicional es: $P_{(x)}$

Ej 1.30 Una Función Proposicional y dos Proposiciones que se obtienen a partir de la misma son:

$P_{(x)}$: *x es un Número Par*	Función Proposicional de Variable: x
$P_{(6)}$: 6 *es un Número Par*	La Función con: $x = 6$; Proposición: V
$P_{(3)}$: 3 *es un Número Par*	La Función con: $x = 3$; Proposición: F

Por la cuantificación se obtienen Proposiciones Generales a partir de Funciones Proposicionales. Las Funciones Proposicionales pueden contener también dos o mas Variables.

I.1.1 CUANTIFICADORES

Los Símbolos: $\forall x$; $\exists x$ .Son los Cuantificadores Universal y Existencial en: x

La notación y lectura usual de estos Cuantificadores es:

$\forall x : P_{(x)}$	**Para todo x, se verifica $P_{(x)}$**
$\exists x / P_{(x)}$	**Existe x, tal que se verifica $P_{(x)}$**

Una Función Proposicional Cuantificada es una Proposición.

Ej 1.31 $P_{(x)}$ *x es un Número Positivo*
$\forall x : P_{(x)}$ *Para todo x, x es un Número Positivo*
$\exists x : P_{(x)}$ *Existe x tal que, x es un Número Positivo*

Se trata de una Función Proposicional y su Cuantificación.

Para negar una Proposición obtenida mediante Cuantificadores se aplica:

$$\sim(\forall x : P_{(x)}) \equiv \exists x / \sim P_{(x)}$$
$$\sim(\exists x / P_{(x)}) \equiv \forall x : \sim P_{(x)}$$

Ej 1.32 Se lleva a Notación simbólica una Proposición, por Cuantificadores para luego negarla.

Todo el que persevera, triunfa — Proposición original.

$P_{(x)}$: *x persevera* : $Q_{(x)}$: *x triunfa* — Indicando Funciones Proposicionales.

$\forall x$: $P_{(x)} \Rightarrow Q_{(x)}$ — Notación Simbólica, mediante Cuantificadores.

Para todo x: *Si x persevera entonces x triunfa*

$\sim(\forall x: P_{(x)} \Rightarrow Q_{(x)}) \equiv \exists x / P_{(x)} \wedge \sim Q_{(x)}$ — Negando la Proposición por: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

Existe x tal que, *x persevera y x no triunfa*

Hay quienes perseveran y no triunfan — Expresando de dos modos la Negación.

1.20 Llevar a Notación Simbólica y luego negar las siguientes Proposiciones:

a) *Es de noche y todos duermen* — Descomponiendo la Proposición dada en Funciones Proposicionales.

$P_{(x)}$: *Es de noche* $Q_{(x)}$: *Todos duermen*

$\sim(P_{(x)} \wedge Q_{(x)}) \equiv \sim P_{(x)} \vee \sim Q_{(x)}$ — Negando por la Ley de Morgan y expresándola.

No es de noche o alguien no duerme

b) *Hay materias que aburren y no sirven*

$P_{(x)}$: *x aburre* $Q_{(x)}$: *x no sirve* — Expresando en forma Simbólica.

$\exists x / P_{(x)} \wedge Q_{(x)} \equiv$ Existe x, tal que *x aburre y no sirve*

$\sim(\exists x/ P_{(x)} \wedge Q_{(x)}) \equiv \forall x{:}\sim(P_{(x)} \wedge Q_{(x)}) \equiv \forall x{:}\sim P_{(x)} \vee \sim Q_{(x)}$ — Negando por la Ley de Morgan

Para todo x, *x no aburre o sirve* — Expresando la Negación.

Todas las Materias no aburren o sirven

c) *Todo joven es feliz* $P_{(x)}$: *x es joven* $Q_{(x)}$: *x es feliz*

$\exists x$: $P_{(x)} \Rightarrow Q_{(x)} \equiv$ Para todo x, *Si x es joven entonces es feliz* — Expresando simbólica mente.

$\sim(\exists x: P_{(x)} \Rightarrow Q_{(x)}) \equiv \exists x / P_{(x)} \wedge \sim Q_{(x)}$ — Negando

Existe x, tal que *x es joven y no es feliz* — Expresiones de la Negación.

Hay jóvenes infelices

d) *Hay autos que son veloces y seguros*

$P_{(x)}$: *x es veloz* $Q_{(x)}$: *x es seguro* — Expresando simbólicamente.

$\exists x/ P_{(x)} \wedge Q_{(x)} \equiv$ Existe x, tal que *x es veloz y seguro*

$\sim(\exists x/ P_{(x)} \wedge Q_{(x)}) \equiv \forall x: \sim P_{(x)} \vee \sim Q_{(x)}$ — Negando por Ley de Morgan.

Para todo x, *x no es veloz o no es seguro* — Expresando la Negación.

Todos los autos no son veloces o no son seguros

e) *Quien es político es charlatán*

$P_{(x)}$: *x es político* $Q_{(x)}$: *x es charlatán*

$\exists x / P_{(x)} \Rightarrow Q_{(x)} \equiv$ Existe x, tal que *x es político entonces es charlatán*

$\sim(\exists x / P_{(x)} \Rightarrow Q_{(x)}) \equiv \forall x : P_{(x)} \wedge \sim Q_{(x)}$

Para todo x, *x es político y no es charlatán*

Todos los que son políticos no son charlatanes

En todas las Proposiciones dadas, previamente se las expresa en Forma Simbólica, para luego negarlas según Reglas conocidas, posteriormente se expresa esa Negación, de dos maneras diferentes con el mismo significado.

I.12 CIRCUITOS LÓGICOS

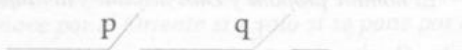
El Valor de Verdad de una Proposición puede asociarse con el comportamiento de un Circuito eléctrico con Interruptores.

Si la Proposición: p es el Interruptor de un Circuito; $\sim p$ también puede representarse por el mismo Interruptor. Llamando V (Verdadero) al estado que permite el paso de la Corriente eléctrica. Llamando F (Falso) al estado que no permite el paso de la Corriente eléctrica.

p	p es V	Estado: V , Hay paso de Corriente
$\sim$ p	p es F	Estado: F , No hay paso de Corriente

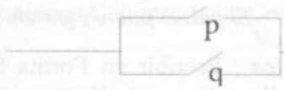
Usando dos o más Interruptores, se pueden asociar las Operaciones Proposicionales mediante, diversas disposiciones del Circuito.

$p \wedge q$



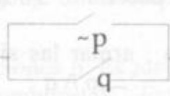
CONJUNCIÓN: Deben cerrarse p y q para que haya paso de Corriente, Conexión Serie (AND)

$p \vee q$



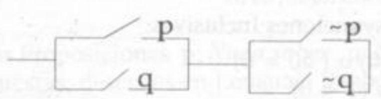
DISYUNCIÓN INCLUSIVA: Basta que solo p o solo q, se cierren para paso de corriente, Conexión Paralelo (OR)

$p \Rightarrow q$



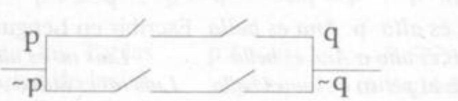
CONDICIONAL: Por $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$, Conexión Paralelo.

$p \veebar q$



DISYUNCIÓN EXCLUSIVA Por: $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$, Conexión: Serie de Paralelos

p <=>q

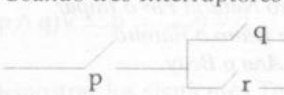


BICONDICIONAL: Por: $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$, Conexión Paralelo de Series.

Ej 1.33 Mediante Circuitos Lógicos, se esquematizan las siguientes Proposiciones:

a) $p \wedge (q \vee r)$

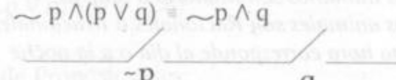
Usando tres Interruptores



b) $\sim p \wedge (p \vee q)$

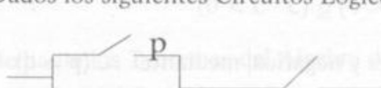
Simplificando por P-I3-15-a:

$\sim p \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge q$



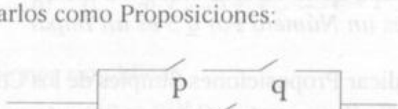
Ej 1.34 Dados los siguientes Circuitos Lógicos, expresarlos como Proposiciones:

a)



$(p \vee q) \wedge r$

b)



$(p \wedge q) \vee r$

I.- PROBLEMAS PROPUESTOS

1.1 En las siguientes colecciones de: Palabras, Símbolos. Indicar Proposiciones (p) y cuales no lo son (?)

Mery es bonita	*Las blancas nubes*	*Cuando el sol se pone sobre el mar*	p; ?; ?
$5 - 2 = 7$	*Cerebro de pájaro*	*La droga es la peste de la época*	?; ?; p
$x(a + b)$	*La antigua música clásica*	*Solo el trabajo dignifica al hombre*	?; ?; p
$(a + b)(a - b)$	*La cumbre del Illimani*	*El alcohol es el refugio del cobarde*	?; ?; p

1.2 Negar las siguientes Proposiciones:

La Religión es el opio de los pueblos *El Matrimonio es la sepultura del amor* $1 + 2 + 3 + 4 > 5$

La política es un arte *La Agronomía es el futuro de los países* $x + xx + xxx = 6x$

1.3 Indicar las Proposiciones Simples de las siguientes Conjunciones:

El avión es rápido y el barco es lento $(a - b = 0)$ *y* $(a = b)$ $(a < b)$ *y* $(a - b < 0)$

El Matrimonio y la Mortaja del cielo bajan *El hombre propone y Dios dispone y la mujer descompone*

1.4 Hallar el Valor de Verdad de las siguientes Conjunciones:

La Semana tiene 7 días y el mes tiene 12 semanas *2 es un Número Par y 3 un Impar* F; V

Las aves maúllan y vuelan $(x + 3 = 4x)$ *y* $(a - b = b - a)$ *El país es pobre y grande* F; F; V

1.5 Con las Proposiciones p: *Yo soy pobre* ; q: *Ella es rica* ; Escribir en Forma Simbólica las siguientes Proposiciones Compuestas: *Yo soy pobre y ella es rica* *Yo soy rico y ella es rica* *Yo no soy pobre y ella es pobre* *Yo soy pobre y ella es pobre*

1.6 Con p: *El Invierno es frío* ; q: *El ambiente es seco* ; armar las siguientes Proposiciones Compuestas, descritas en Lenguaje Simbólico: $p \wedge q$; $\sim p \wedge q$; $p \wedge \sim q$; $\sim(p \wedge \sim q)$

1.7 Hallar el Valor de Verdad de las siguientes Disyunciones Inclusivas:

2 es un Número Par o 3 es Par $(a + 0 = 0)$ *o* $(a0 = 0)$ V; V

Las ratas comen o vuelan $(-1 > 0)$ *o* $(1 < 0)$ V; F

1.8 Con las Proposiciones Simples p: *Luís es alto* p: *Ana es bella* Escribir en Lenguaje Simbólico las Proposiciones Compuestas: *Luís es alto o Ana es bella* *Luís no es alto o Ana es fea* *Luís es petiso o Ana es bella* *Luís no es alto o Ana no es bella*

1.9 Con p: *Las Discotecas son centros de diversión*; q: *Las Discotecas son antros de vicio*; conformar las siguientes Proposiciones: $p \vee q$; $\sim p \vee q$; $p \vee \sim q$; $\sim p \vee \sim q$

1.10 Determinar si las siguientes Disyunciones son Inclusivas (In) o Exclusivas (Ex). Asumiendo que las Proposiciones tienen un Valor de Verdad de: V

Los humanos son hombres o mujeres	*x es un Número Natural Par o Impar*	Ex Ex
Los animales son Racionales o Irracionales	*Luis es hijo de Pedro o Ramiro*	Ex Ex
Esta hora corresponde al día o a la noche	*Juan quiere a Ana o Betty*	Ex In

1.11 En las siguientes Disyunciones Exclusivas, hallar su Valor de Verdad:

El año tiene 12 semanas $\underline{o}$ *12 meses* $(3 + 4 = 9)\ \underline{o}\ (3*4 = 9)$ V; F

2 es un Número Par $\underline{o}$ *3 es un Impar* $(5 < 3)\ \underline{o}\ (5 - 3 > 0)$ F; V

1.12 Indicar Proposiciones Simples de los Condicionales y negarlos, mediante: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

Si los obreros trabajan entonces el país progresa *Si practicas entonces aprendes*

Si un estudiante protesta entonces es un rebelde sin causa *Si* $(2x = 6)$ *entonces* $(x = 3)$

Si piensas entonces existes *Si x es Par entonces x+1 es Impar*

1.13 Con p: *Juan come*; q: *Juan es gordo* ; Escribir en Lenguaje Simbólico las siguientes Proposiciones Compuestas: *Si Juan come entonces es gordo* *Si Juan no come entonces es gordo*
Si Juan no come entonces es flaco *Si Juan come entonces es flaco*

1.14 Con las Proposiciones p: *Soy feliz* ; q: *Doy gracias a Dios* ; conformar las Proposiciones Compuestas, descritas en Lenguaje Simbólico: $p \Rightarrow q$; $\sim p \Rightarrow q$; $p \Rightarrow \sim q$; $\sim p \Rightarrow \sim q$

1.15 Hallar el Valor de Verdad de los siguientes Condicionales:

Si la semana tiene 7 días entonces el mes tiene 12 días F
Si la "a" es una vocal entonces la "a" es una letra V
Si $(5 - 2 = 9)$ *entonces* $(5 + 2 = 9)$ V

1.16 Hallar los Condicionales Asociados de los siguientes Condicionales:
Si errar es humano entonces perdonar es divino *Si* $(x + 2 = 9)$ *entonces* $(x - 2 = 5)$

1.17 Hallar el Valor de Verdad de los siguientes Bicondicionales:

b es vocal si y solo si b no es una letra del Alfabeto V
El sol nace por el Oriente si y solo si se pone por el Occidente V

1.18 Con las Proposiciones p: *Crees* ; q: *Miras* Escribir en Lenguaje Simbólico las siguientes Proposiciones Compuestas: *Crees si y solo si miras* *Crees si y solo si no miras*
No crees si y solo si no miras *Es falso que: Crees si y solo si miras*

1.19 Con p: *La Matemática es la reina de las ciencias*; q: *La Matemática es la más útil de las ciencias* ;Escribir en Lenguaje Simbólico: $p \Leftrightarrow q$; $\sim p \Leftrightarrow q$; $\sim p \Leftrightarrow \sim q$; $\sim(p \Leftrightarrow \sim q)$

1.20 Con las Proposiciones p: *Es joven* ; q: *Es feliz* ;Escribir en Lenguaje Simbólico las siguientes Proposiciones Compuestas: *Es viejo y es feliz* *Es necesario ser joven para ser feliz*
Si es joven entonces es feliz *No es joven si y solo si no es infeliz*

1.21 Con las Proposiciones p: *Nada sabes* ; q: *Nada temes* ; Conformar las siguientes Proposiciones Compuestas, descritas en Lenguaje Simbólico:
$p \wedge q$; $p \vee \sim q$; $p \Rightarrow q$; $\sim q \Rightarrow p$; $p \wedge (p \Rightarrow q)$; $(p \wedge q) \Rightarrow q$

1.22 Elaborar las Tablas de Verdad de las siguientes Proposiciones Compuestas:

$p \wedge \sim q$ $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ $(p \wedge q) \Leftrightarrow q$ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$
$\sim p \vee q$ $(p \vee q) \wedge p$ $(p \veebar q) \Rightarrow p$ $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$
$p \Rightarrow \sim q$ $(p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $(p \Leftrightarrow q) \wedge p$ $(p \Leftrightarrow q) \wedge (p \veebar r)$

1.23 Demostrar, mediante Tablas de Verdad, las siguientes Equivalencias Lógicas:
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ $(p \wedge q) \vee \sim p \equiv \sim p \wedge q$, $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
$(p \wedge q) \vee \sim p \equiv \sim p \vee q$ $p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

1.24 Demostrar los siguientes Teoremas del Álgebra de Proposiciones:
T2: $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$ **T3**: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
T7: $p \wedge F \equiv F$; $p \vee V \equiv V$ **T8**: $p \wedge \sim p \equiv F$; $\sim(\sim p) \equiv p$; $p \vee \sim p \equiv V$; $\sim V \equiv F$; $\sim F \equiv V$

1.25 Mediante los Teoremas del Álgebra de Proposiciones simplificar:
$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$ $\sim(p \Leftrightarrow \sim q)$ $(p \Rightarrow p) \vee p$ $\sim p$; $p \Leftrightarrow q$; V
$(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$ $\sim(\sim p \Leftrightarrow \sim q)$ $(p \Leftrightarrow q) \veebar p$ p ; $\sim p \wedge q$; $\sim q$

1.26 Demostrar que las primeras seis son Tautologías, las restantes son Contradicciones:

$(p \Rightarrow q) \vee p$ $\quad (p \wedge q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$ $\quad \sim(p \vee q) \wedge q$ $\quad \sim(p \Rightarrow q) \wedge q$

$(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$ $\quad \sim(p \wedge q) \vee q$ $\quad ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ $\quad (p \wedge q) \wedge \sim q$

$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ $\quad (p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \wedge q)$ $\quad (p \Leftrightarrow \sim q) \wedge (p \Leftrightarrow q)$ $\quad (p \vee q) \vee \sim p$

1.27 a) Si la Proposición p es F, q es V, calcular el Valor de verdad de las Proposiciones compuestas:

$(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$ $\quad (p \veebar q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$ $\quad [(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow q$ $\quad$ V; F; V

b) Si se conoce que: $\sim(p \Rightarrow q)$ es V; calcular el Valor de las Proposiciones compuestas:

$(\sim p \vee q) \veebar (p \wedge q)$ $\quad (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$ $\quad$ F; V

c) Si se conoce que: $(\sim p \vee q)$ es F, r es V; calcular el Valor de las Proposiciones compuestas:

$(p \Rightarrow q) \wedge [r \vee (p \wedge q)]$ $\quad (p \wedge q) \Rightarrow \sim r] \Leftrightarrow \sim (p \veebar \sim q)$ $\quad$ F; V

d) Si: $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim r \vee s)$ es F; Hallar Valores de: p, q, r, s $\quad$ V, F, V, F

Si: $\sim(p \wedge q) \vee (\sim r \vee s)$ es F; Hallar Valores de: p, q, r, s $\quad$ V, V, V, F

e) Si $(\sim p \Rightarrow x) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ es V, p es F. Hallar el Valor de la Proposición x. $\quad$ F

Si $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow x] \veebar \sim (p \wedge q)$ es V, p es F. Hallar el Valor de la Proposición x. $\quad$ F

1.28 Indicar si los siguientes Razonamientos son Válidos: Va o son Falacias: Fa

$p \wedge q,\ q \vdash p$ $\quad p \vee q,\ \sim p \vdash p$ $\quad p \Leftrightarrow q,\ p \vdash q$ $\quad p \wedge q,\ \sim p \Rightarrow q \vdash \sim q$ $\quad$ Va; Va; Va; Fa

$\sim p \Rightarrow q,\ p \vdash \sim q$ $\quad p \Rightarrow q,\ \sim p \Rightarrow \sim r \vdash r \Rightarrow p$ $\quad p \Leftrightarrow q,\ q \vee r,\ \sim r \vdash \sim p$ $\quad$ Fa; Va; Fa

$\sim p \Rightarrow \sim q,\ q \vdash p$ $\quad p \Rightarrow \sim q,\ r \Rightarrow q,\ r \vdash \sim p$ $\quad p \Rightarrow q,\ q \vee r \vdash r \Rightarrow \sim p$ $\quad$ Va; Va; Fa

1.29 Determine si los siguientes Razonamientos son Válidos: Va o son Falacias: Fa

a) *Tres es impar y entero*
Tres es impar
....
Tres es entero

b) *La sonrisa es alegría o ironía*
La sonrisa es alegría
....
La sonrisa es ironía

c) *Si un hombre es saludable entonces es feliz*
Si un hombre es feliz entonces vive mucho
....
Si un hombre es saludable entonces vive mucho

d) *Si trabajo entonces como*
No como
....
No trabajo

e) *Yo leo si y solo si estudio*
Yo estudio
....
Yo leo

f) *Si hubo fuego entonces quedan cenizas*
Si quedan cenizas entonces el viento se las lleva
....
Si el viento se lleva las cenizas entonces hubo fuego

Va, Fa, Va; Va, Va, Fa

1.30 Llevar a Notación Simbólica y luego negar las siguientes Proposiciones, que contienen Cuantificadores: *Hay chicas que son bellas y capaces* $\quad$ *Es primavera y todos sonríen*

Hay amigos peores que enemigos $\quad$ *Todos los artistas son genios o locos*

Todo paso lento es seguro $\quad$ *Todo profesor es un quijote de la ciencia*

1.31 Esquematizar por Circuitos Lógicos las Proposiciones: $\quad p \wedge (q \vee r)$ $\quad p \wedge (p \wedge q)$ $\quad p \Rightarrow \sim q$ $\quad (p \Leftrightarrow q) \wedge (p \vee q)$

$p \Rightarrow (q \wedge r)$ $\quad p \vee (p \vee q)$ $\quad p \wedge (p \vee q)$ $\quad (p \veebar q) \vee (p \wedge q)$

1.32 a) Indicar el Conectivo bajo el cuál se analizan las siguientes charlas:

<u>EL</u>: *Si te presto mi libro entonces esta noche sales conmigo*
<u>ELLA</u>: *Yo no salgo contigo esta noche entonces no me prestes tu libro*

<u>EL</u>: *Si te pido que seas mi novia entonces ¿Tú me aceptarías?*
<u>ELLA</u>: *Si te digo que sí entonces ¿Tú me lo pedirías?*

b) Los caníbales de una tribu, le proponen a un misionero, que decida su suerte haciendo una declaración corta; si ésta es Verdadera será asado, si es Falsa será cocinado. ¿Con que declaración el misionero impone una 3ª solución? *(Yo seré cocinado)*

II.- TEORÍA DE CONJUNTOS

II.1 CONJUNTOS Y ELEMENTOS

Los conceptos de: Conjunto, Elemento y Pertenencia son CONCEPTOS INDEFINIBLES, es decir que carecen de definición por tratarse de ideas primitivas, intuitivamente aceptadas.

La idea de Conjunto es de que se trata de una colección, reunión o agrupación de objetos cualesquiera, estos objetos se llaman ELEMENTOS DEL CONJUNTO.

Usualmente se utilizan letras mayúsculas para designar a un Conjunto, letras minúsculas para sus Elementos. Si: x es un Elemento del Conjunto: A, la notación correspondiente es:

$x \in A$ Se lee: x pertenece a: A

Si: z no es un Elemento del Conjunto: A ; La notación correspondiente es:

$z \notin A$ Se lee: z no pertenece a: A

Un Conjunto se escribe de la siguiente manera: A = { .... } ; entre llaves se indican los Elementos del Conjunto o las Propiedades que les caracterizan.

Ej 2.1 Dado el Conjunto: A se indicará la pertenencia de sus Elementos:

$A = \{1, 2, 5\}$	El Conjunto: A posee tres Elementos: 1; 2; 5
$1 \in A$; $2 \in A$; $5 \in A$	Los Números: 1; 2; 5 pertenecen al Conjunto: A
$0 \notin A$; $3 \notin A$; $-2 \notin A$	Los Números: 0; 3; -2 no pertenecen al Conjunto: A

Ej 2.2 Dado el Conjunto: A ; el mismo puede expresarse de diversos modos:

$A = \{x, y, z\}$ $A = \{z, x, y\}$	Cambiando el orden en que se encuentran los Elementos de un Conjunto, se obtiene el mismo Conjunto.
$A = \{x, x, y, z, z, z\}$	La reiteración en la anotación de un mismo Elemento no afecta al Conjunto, que continua siendo el mismo.

En la práctica se ordenan los Elementos con alguna secuencia (Orden Alfabético, Numérico, etc.), se evi-tan reiteraciones, para así analizar mejor al Conjunto.

Para que exista un Conjunto, se deben cumplir los siguientes requisitos:

i) LA COLECCIÓN DE OBJETOS DEBE ESTAR BIEN DEFINIDA
Es decir que la pertenencia de un Elemento a un Conjunto debe estar totalmente decidida, evitando ambigüedades.

ii) NINGÚN OBJETO DEL CONJUNTO DEBE CONTARSE MAS DE UNA VEZ
Es decir que en la cuantificación de los Elementos de un Conjunto, un Elemento debe contarse solo una vez, así sea que se reitere.

iii) EL ORDEN EN QUE SE ENUMERAN LOS OBJETOS CARECE DE IMPORTANCIA
Es decir que la posición de los Elementos entre sí, no afectan al Conjunto.

II.2 DETERMINACIÓN DE CONJUNTOS

Para determinar, describir o especificar a un Conjunto, existen dos modos que son:

II.2.1 DETERMINACIÓN POR EXTENSIÓN

Consiste en la enumeración de todos los Elementos de un Conjunto.

Ej 2.3 Se determinan dos Conjuntos por Extensión:

$A = \{a, e, i, o, u\}$
$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Se anotan todos los Elementos de los Conjuntos, cinco en el Conjunto: A , diez en: B

II.2.2 DETERMINACIÓN POR COMPRENSIÓN

Consiste en el enunciado de las Propiedades, que caracterizan a los Elementos de un Conjunto. En Forma General una determinación por Comprensión se expresa por: $A = \{x/ P_{(x)}\}$. $P_{(x)}$ es la Propiedad de los Elementos de: A (/ se lee: Tal que)

Ej 2.4 Se determinan dos Conjuntos por Comprensión:

A = {x/ x es una Vocal del Alfabeto}
B = {x/ x es un Dígito}

Se indica la Propiedad que poseen los Elementos de un Conjunto.

Note que los Conjuntos de este Ej 2.4 son iguales a los del Ej 2.3.

Es conveniente familiarizarse con los siguientes Conjuntos de Números, son de amplio uso y utilidad.

$\mathbb{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	Conjunto de Números Dígitos ($\mathbb{D}$)
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, 12, ...\}$	Conjunto de Números Naturales ($\mathbb{N}$)
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$	Conjunto de Números Enteros ($\mathbb{Z}$)
$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$	Conjunto de Números Enteros Positivos ($\mathbb{Z}^+$)

En los Conjuntos de Números, expresados de la Forma: $a \le x \le b$; se toman todos los Números comprendidos entre: a, b ; que son los Extremos (a es el Extremo Inferior, b es el Superior); En el Conjunto se incluyen también estos Extremos.

Si el Conjunto se da en la Forma: $a < x < b$; No se incluyen los Extremos.

2.1 Los siguientes Conjuntos se dan por Comprensión, describirlos por Extensión

a) A = {x/ x es Dígito Par} — $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

b) B = {x/ x es una Vocal fuerte} — $B = \{a, e, o\}$

c) $C = \{x/ x \text{ es un Entero}, 2 \le x \le 5\}$ — $C = \{2, 3, 4, 5\}$

Se deben tomar todos los Números Enteros comprendidos entre: 2 hasta: 5, incluyendo a estos Extremos (< se lee: Menor que ; ≤ se lee Menor o igual que)

d) $D = \{x/ x \text{ es Entero}, 3 < x < 9\}$ — $D = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

f) $F = \{x/ 2x - 6 = 0\}$ — $F = \{3\}$

g) $G = \{x/ (x - 2)(x - 4) = 0\}$ — $G = \{2, 4\}$

Como Elementos, se deben tomar las Soluciones de la Ecuación indicada.

h) H = {x/ x es Departamento oriental} — H = {Santa Cruz, Beni, Pando}

2.2 Los siguientes Conjuntos se dan por Extensión, describirlos por Comprensión

a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$	$A = \{x/$ x es un Dígito Impar$\}$	Existen varias formas de escribir por Comprensión, que especifican al mismo Conjunto, tal como en el Conjunto C.
b) $B = \{i, u\}$	$B = \{x/$ x es vocal débil del Alfabeto$\}$	
c) $C = \{7, 8, 9\}$	$C = \{x/$ x es Entero, $7 \leq x \leq 9\}$	
	$C = \{x/$ x es Dígito, mayor o igual a 7$\}$	
	$C = \{x/ (x-7)(x-8)(x-9) = 0\}$	
d) $D = \{3, 7, 9\}$	$D = \{x/ (x-3)(x-7)(x-9) = 0\}$	
e) $E = \{+, -, \times, \div\}$	$E = \{x/$ x es signo de operación aritmética$\}$	

II.2.3 IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dos Conjuntos son Iguales entre sí, cuando constan de los mismos Elementos; La Igualdad entre los Conjuntos: A; B se escribe: $A = B$

A es igual a B si cada Elemento de A pertenece a B, y cada Elemento de B pertenece a su vez a A

Ej 2.5 Los siguientes Conjuntos: A; B son iguales entre sí. $(A = B)$

$A = \{x/$ x es un Punto Cardinal$\}$

$B = \{$Este, Oeste, Norte, Sur$\}$

El Conjunto: A se da por Descripción, B se da por Extensión, pero son iguales entre sí.

Ej 2.6 Los siguientes Conjuntos: C; D; E son iguales entre sí. $(C = D = E)$

$C = \{3, 4, 5, 6\}$

$D = \{5, 3, 6, 4\}$

$E = \{3, 3, 4, 8/2, 5, 6, 6, 6\}$

El orden o la reiteración de los Elementos de un Conjunto, no afectan al mismo, por tanto las tres presentaciones muestran al mismo Conjunto.

II.3 CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Un Conjunto es Finito si tiene: n Elementos, siendo: n un Número Entero y Positivo

Un Conjunto es Infinito si no tiene: n Elementos, asumiéndose que tiene tantos Elementos que es imposible contarlos, se dice que posee Infinitos Elementos.

Ej 2.7 $A = \{x/$ x es un Dígito Impar$\}$
$= \{1, 3, 5, 7, 9\}$

El Conjunto: A consta de cinco Elementos, es decir que: $n = 5$. Es un Conjunto Finito.

$B = \{x/$ x es un Número Par$\}$
$= \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$

El Conjunto: B consta de infinitos Elementos, es decir que: $n = \infty$. Es un Conjunto Infinito.

Ej 2.8 $\mathbb{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ Conjunto de Números Dígitos ($\mathbb{D}$) es Finito.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10, 11, 12, \ldots\}$ Conjunto de Números Naturales ($\mathbb{N}$) es Infinito.

$P = \{5, 10, 15, \ldots, 45, 50, 65, 70, \ldots\}$ Conjunto de Naturales múltiplos de 5 es Infinito.

II.4 CONJUNTO UNIVERSO Y VACÍO

Cuando se analizan Conjuntos que contienen Elementos de determinadas características, suele precisarse un Conjunto de referencia que contenga a todos esos Elementos, tal Conjunto se llama: CONJUNTO UNIVERSO. Se representa por: U

Dependiendo de su tipo o clase, un Conjunto tendrá siempre un Conjunto Universo, ya que se considera que todo Conjunto es Subconjunto de un Conjunto Universo.

Ej 2.12 Un Conjunto Universo, con dos de sus Conjuntos es:

U = {x/ x es un Dígito} = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
A = {0, 1, 2, 4, 7} ; B = {0, 2, 3, 4, 9}

A, B son Subconjuntos del Universo: U

Ej 2.13 Un Conjunto Universo, con tres de sus Subconjuntos es:

U = {x/ x es una Letra del Alfabeto Español}
= {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, ñ, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}
A = {a, c, d, k, p, q} ; B = {a, b, c, ch, d, e, f} ; C = {a, e, i, o, u}

Ej 2.14 Un Conjunto Universo con dos de sus Subconjuntos es:

U = {x/ x es un Número Entero}
= {..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, 12, ...}
A = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} ; B = {0, 2, 4, 6}

El Universo puede ser un Conjunto Finito o Infinito. En este caso es Infinito.

El Conjunto que carece de Elementos se llama CONJUNTO VACÍO, se representa por: ∅ ; o también por: { } ; El Conjunto Vacío es Subconjunto de todos los Conjuntos. (La simbología {∅} no representa al Conjunto Vacío)

Ej 2.15 A = {x/ x es un hombre vivo de 300 años} = ∅
B = {x/ x es Dígito mayor a 9} = ∅
C = {x/ x es Entero, 2x - 5 = 0} = ∅
D = {x/ x es Dígito, pero no es Natural} = {0}

A, B, C Son Conjuntos vacíos porque no contienen a ningún Elemento.

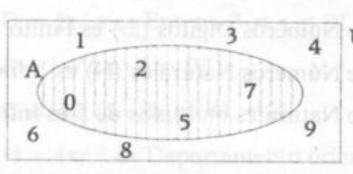
D no es un Conjunto Vacío, contiene al elemento 0.

II.3.1 DIAGRAMAS DE VENN

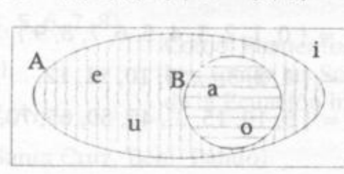
Los Diagramas de Venn son Curvas Cerradas que representan un Conjunto, indicando a sus Elementos dentro de la Curva. (Se representa al Universo por un Rectángulo)

2.5 Se representan por Diagramas de Venn los siguientes Conjuntos:

a) U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
A = {0, 2, 5, 7}



b) U = {a, e, i, o, u}
A = {a, e, o, u} ; B = {a, o}



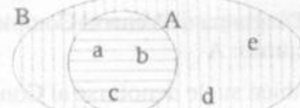
II.5 SUBCONJUNTOS

A, B son dos Conjuntos, Si todos los Elementos de A, pertenecen a B, entonces se dice que: A está incluido en B, o que A es un Subconjunto de B. La notación para indicar que A es un Subconjunto de B es: $A \subset B$

La Inclusión de Conjuntos se define como: $\boxed{A \subset B \Longleftrightarrow \forall x / x \in A \Rightarrow x \in B}$

Ej 2.9 Dados los Conjuntos: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{a, b, c, d, e\}$
se verifica que: $A \subset B$

Efectivamente todos los Elementos del Conjunto: A son también Elementos de: B. El Diagrama de Venn claramente confirma que: $A \subset B$



Ej 2.10 Entre los Conjuntos: C, D se verifica que: $D \subset C$

$C = \{x/ x \text{ es Entero}, 0 \leq x \leq 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$D = \{x/ x \text{ es Entero}, 0 \leq x \leq 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$

Desarrollando ambos Conjuntos se verifica la Inclusión.

Otras propiedades de la Inclusión son:

- Si: $A \subset B$; también puede expresarse como: $B \supset A$
- Si: A no es Subconjunto de B se escribe: $A \not\subset B$
- Si: $A \subset B$ pero $A \neq B$; entonces A es SUBCONJUNTO PROPIO de B
- Si: $A \subset B$; $B \subset A$; entonces los Conjuntos son Iguales entre sí: $A = B$

Ej 2.11 Entre los Conjuntos dados se verifican las siguientes Inclusiones:

$A = \{a, u\}$; $B = \{a, e, i, o, u\}$
$A \subset B$; $A \neq B$

Los Elementos de A son también de B, pero no son iguales. Por tanto A es Subconjunto Propio de B.

$C = \{p, q, r, s\}$; $D = \{s, r, p, q\}$
$C \subset D$; $D \subset C \Rightarrow C = D$

C, D son Iguales, C no es Subconjunto Propio de D (Tampoco D lo es de C).

2.3 Determinar las Relaciones de Inclusión que existen entre los Conjuntos:

a) $A = \{x/ x \text{ es Entero}\}$; $B = \{x/ x \text{ es Dígito}\}$
$A = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., 9, 10, 11, ...\}$
$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \Rightarrow \quad B \subset A$

B es Subconjunto Propio de A. Note que A es Infinito, B es Finito

b) $C = \{0, 2, 4, 6\}$; $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$\Rightarrow \quad C \not\subset D$; $D \not\subset C$; $C \neq D$

No se cumple ninguna Relación de Subconjuntos.

2.4 Determinar cuales de las siguientes Proposiciones son Verdaderas o Falsas:

a) $L = \{1, 3, 5\}$

$3 \in L$ (V)
$3 \subset L$ (F)
$\{3\} \in L$ (F)
$\{3\} \subset L$ (V)

b) $M = \{b, c\}$; $N = \{a, b, c\}$

$M \in N$ (F)
$M \subset N$ (V)
$N \in M$ (F)
$N \subset M$ (F)

La relación de Inclusión $\subset$ se escribe entre dos Conjuntos. La relación de Pertenencia $\in$ se escribe entre un Elemento a un Conjunto.

II.6 COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Si U es un Conjunto Universo, A es un Subconjunto de: U

El Complemento del Conjunto: A es otro Conjunto formado por los elementos que no pertenecen a: A, pero si al Universo: U ; El Complemento de : A se denota y define así:

$$\boxed{\overline{A} = \{ x / x \notin A \}}$$

En Diagrama de Venn el Complemento es la parte fuera del Conjunto: A

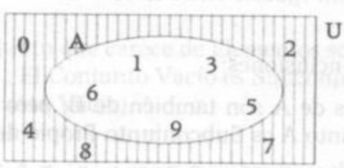
También suele denotarse al Conjunto Complemento como:

$$\overline{A} = A^c = A'$$

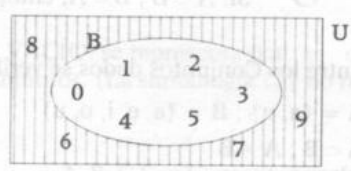
- $\overline{\overline{A}} = A$ El Complemento de un Conjunto Complemento es el Conjunto original.
- El Complemento del Conjunto Universo es el Conjunto Vacío: $\overline{U} = \varnothing$
- El Complemento del Conjunto Vacío es el Conjunto Universo: $\overline{\varnothing} = U$

Ej 2.16 Se determinan los Complementos de los Conjuntos dados: A, B ; si se toma de referencia el Conjunto Universo: U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

a) A = {1, 3, 5, 6, 9}
$\overline{A}$ = {0, 2, 4, 7, 8}

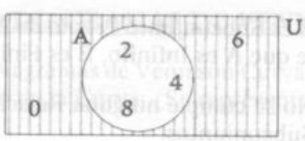


b) B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
$\overline{B}$ = {6, 7, 8, 9}

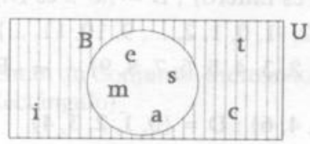


2.6 Determinar los Complementos de los Conjuntos dados, representar por Venn.

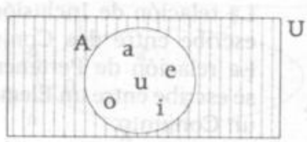
a) U = {x/ x es Dígito Par}
A = {2, 4, 8} ⇒ $\overline{A}$ = {0, 6}



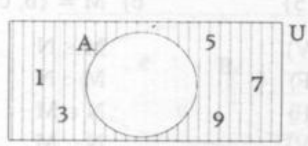
b) U = {x/ x es letra de matemáticas}
A = {x/ x es letra de mesa} ⇒ $\overline{A}$ = {c, i, t}



c) U = {x/ x es Vocal del Alfabeto}
A = {a, e, i, o, u} ⇒ $\overline{A} = \varnothing$



d) U = {1, 3, 5, 7, 9}
A = {x/ 2x - 8 = 0} ⇒ $\overline{A}$ = {1, 3, 5, 7, 9}



II.7 OPERACIONES DE CONJUNTOS

Las Operaciones entre Conjuntos determinan a su vez otros Conjuntos, de acuerdo a sus respectivas definiciones.

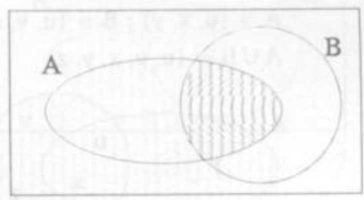
Las Principales Operaciones entre Conjuntos son: La Unión, La Intersección, La Diferencia y la Diferencia Simétrica.

II.7.1 LA INTERSECCIÓN

La Intersección de Dos Conjuntos: A, B es otro Conjunto, formado por los Elementos que pertenecen tanto a: A como a: B .La notación, definición de la Intersección es:

$$\boxed{A \cap B = \{x/ \ x \in A \wedge x \in B\}}$$

En Diagramas de Venn la Intersección puede representarse como la parte marcada.

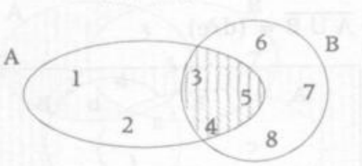


La Intersección está conformada por los elementos comunes a: A y B. Si la Intersección de dos Conjuntos es el Vacío, se dice que son Disjuntos.

Ej 2.17 Se determina la Intersección entre dos Conjuntos dados:

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A \cap B = \{3, 4, 5\}$

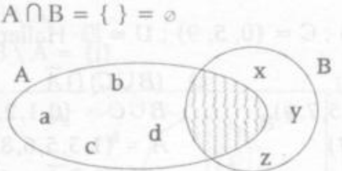


Se observa que son tres los Elementos comunes a los Conjuntos dados.

Por Diagrama de Venn se representa la Intersección de los Conjuntos.

b) $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{x, y, z\}$

$A \cap B = \{\ \} = \varnothing$



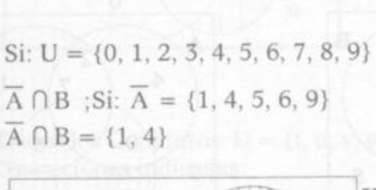
Se observa que ningún Elemento es común a los Conjuntos dados: A; B

Como la Intersección es el Vacío $\varnothing$, son Conjuntos Disjuntos.

2.7 Si: $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A = \{0, 2, 3, 7, 8\}$; $B = \{1, 2, 4, 7, 8\}$; Hallar

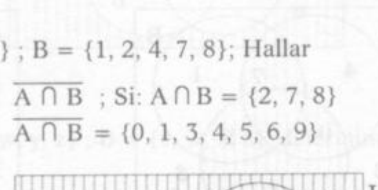
a) $\overline{A} \cap B$;Si: $\overline{A} = \{1, 4, 5, 6, 9\}$

$\overline{A} \cap B = \{1, 4\}$



b) $\overline{A \cap B}$; Si: $A \cap B = \{2, 7, 8\}$

$\overline{A \cap B} = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 9\}$

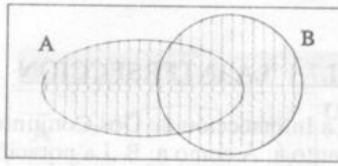


II.7.2 LA UNIÓN

La Unión entre dos Conjuntos: A, B es otro Conjunto, formado por aquellos Elementos que pertenecen tanto a: A como también los que pertenecen a: B. La notación y definición de la Unión es:

$$\boxed{A \cup B = \{x/\ x \in A \vee x \in B\}}$$

En Diagramas de Venn la Unión puede representarse como la parte marcada.

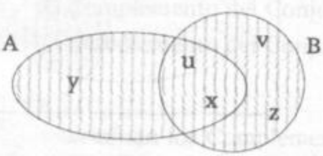


La Unión está conformada por todos los Elementos tanto de: A como los de B.

Ej 2.18 Se determina la Unión entre dos Conjuntos dados:

$A = \{u, x, y\}$; $B = \{u, v, x, z\}$

$A \cup B = \{u, v, x, y, z\}$

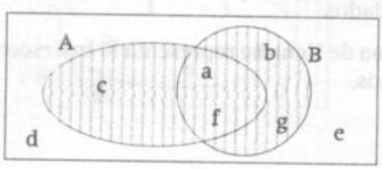


Se observa que son cinco los Elementos que aportan en total los Conjuntos dados.

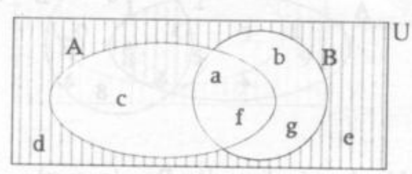
Por Diagrama de Venn se representa la Unión de los Conjuntos.

2.8 Dados los Conjuntos: $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; $A = \{a, c, f\}$; $B = \{a, b, f, g\}$; Hallar

a) $A \cup B = \{a, b, c, f, g\}$



b) $\overline{A \cup B} = \{d, e\}$



2.9 Dados los Conjuntos: $A = \{0, 2, 4, 7\}$; $B = \{1, 2, 5, 7\}$; $C = \{0, 5, 9\}$; $U = \mathbb{D}$ Hallar:

a) $(A \cap B) \cup C$

Si: $A \cap B = \{2,7\}$

$(A \cap B) \cup C = \{0,2,5,7,9\}$

b) $(A \cup C) \cap B$

Si: $A \cup C = \{0,2,4,5,7,9\}$

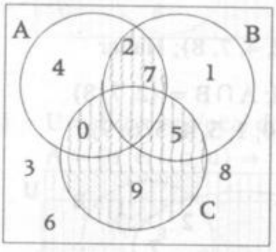
$(A \cup C) \cap B = \{2,5,7\}$

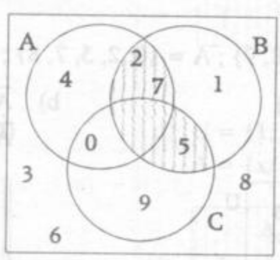
c) $(B \cup C) \cap \overline{A}$

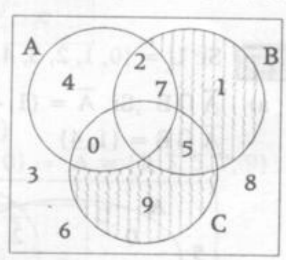
$B \cup C = \{0,1,2,5,7,9\}$

$\overline{A} = \{1,3,5,6,8,9\}$

$(B \cup C) \cap \overline{A} = \{1,5,9\}$







Las porciones marcadas o rayadas, representan los resultados de las operaciones entre conjuntos, a su vez el rectángulo que los bordea representa al Conjunto Universo.

II.7.3 LA DIFERENCIA

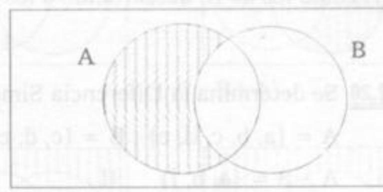
La Diferencia entre dos conjuntos A, B ; es una Operación que determina otro Conjunto, formado por los Elementos de: A pero no los de: B . La Notación y Definición de la Diferencia es:

$$\boxed{A \setminus B = \{x/\ x \in A \wedge x \notin B\}}$$

A su vez la Notación y Definición de la Diferencia de: B, A es:

$$\boxed{B \setminus A = \{x/\ x \in B \wedge x \notin A\}}$$

Por la Definición se verifica que: $A \setminus B \neq B \setminus A$; La Diferencia de Conjuntos se llama también Diferencia Antisimétrica.



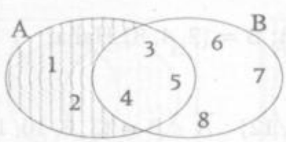
Por Diagrama de Venn la Diferencia: $A \setminus B$, puede representarse como la parte marcada.

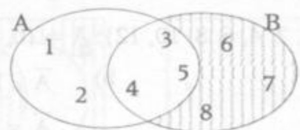
La Diferencia: $A \setminus B$ está conformada, por todos los Elementos de: A descartando a aquellos que también están en: B

Ej 2.19 Se determinan las Diferencias: $A \setminus B$; $B \setminus A$, entre dos Conjuntos dados.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A \setminus B = \{1, 2\}$ $B \setminus A = \{6, 7, 8\}$





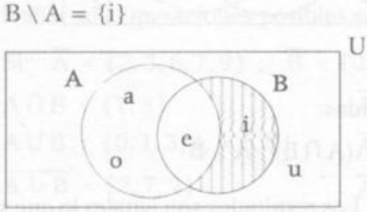
Representando por Venn las Operaciones.

Es evidente que: $A \setminus B \neq B \setminus A$

2.10 Dados los Conjuntos: $U = \{a, e, i, o, u\}$; $A = \{a, e, o\}$; $B = \{e, i\}$; Hallar:

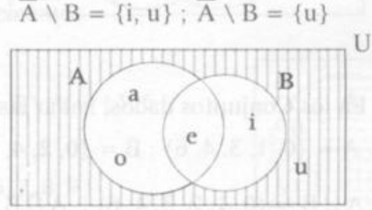
a) $B \setminus A$

$B \setminus A = \{i\}$



b) $\overline{A} \setminus B$

$\overline{A} \setminus B = \{i, u\}$; $\overline{A} \setminus B = \{u\}$



2.11 Dados los Conjuntos: $U = \{t, u, v, w, x, y, z\}$; $A = \{u, w, y, z\}$; $B = \{v, w, x, z\}$ determinar las Operaciones indicadas:

a) $A \cap \overline{B}$

Si: $\overline{B} = \{t, u, y\}$; $A \cap \overline{B} = \{u, y\}$

b) $A \setminus B = \{u, y\}$

Los resultados de ambas operaciones son idénticos, lo que sugiere una igualdad de las mismas Ver 2.12

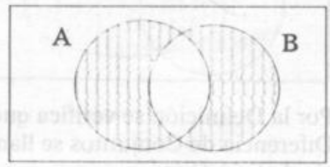
II.7.4 LA DIFERENCIA SIMÉTRICA

La Diferencia Simétrica entre dos Conjuntos: A, B, es una Operación que determina otro Conjunto, formado por los Elementos tanto de: A como de: B, pero no por los que son comunes a ambos. La Notación y Definición de la Diferencia Simétrica es:

$$\boxed{A \triangle B = \{x / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}}$$

En Diagrama de Venn la Diferencia Simétrica puede representarse por la parte marcada.

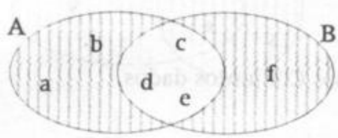
La Diferencia Simétrica está formada por todos los Elementos de A como los de B, descartando a los que son comunes.



Ej 2.20 Se determina la Diferencia Simétrica entre dos Conjuntos dados.

$A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{c, d, e, f\}$

$A \triangle B = \{a, b, f\}$

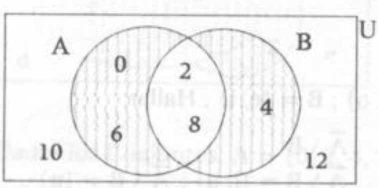


De acuerdo a la gráfica se puede interpretar la Diferencia Simétrica, como la Unión menos la Intersección.

2.12 En los Conjuntos: $U = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; $A = \{0, 2, 6, 8\}$; $B = \{2, 4, 8\}$ Hallar

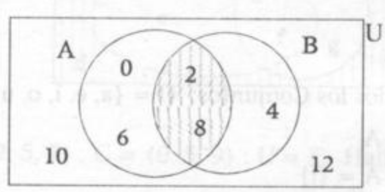
a) $A \triangle B$

$A \triangle B = \{0, 4, 6\}$



b) $\overline{A} \triangle B$

$\overline{A} = \{4, 10, 12\}$; $\overline{A} \triangle B = \{2, 8, 10, 12\}$



2.13 En los Conjuntos dados, hallar las Operaciones indicadas:

a) $A = \{0, 1, 3, 4, 6\}$; $B = \{0, 2, 4, 6\}$; Hallar: $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$; $A \triangle B$

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$; $A \cap B = \{0, 4, 6\}$

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 3\}$

$A \triangle B = \{1, 2, 3\}$

Los resultados son iguales lo que sugiere su igualdad ver 2.12.

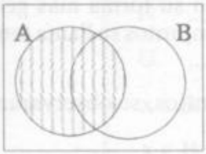
b) $C = \{m, n, o, p\}$; $D = \{p, o, n, m\}$

$C \triangle D = \{\ \} = \varnothing$

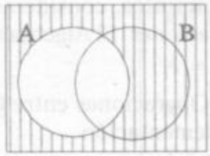
Note que: C = D ; por ello la Diferencia Simétrica es el Vacío.

Una Propiedad importante de la Diferencia Simétrica es de que: $A \triangle B = B \triangle A = \overline{A} \triangle \overline{B}$

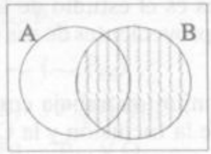
2.14 Indicar a que Operación u Operaciones, pertenecen las porciones marcadas en los siguientes Diagramas de Venn.



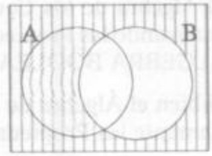
A



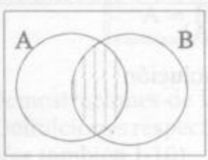
$\overline{A}$



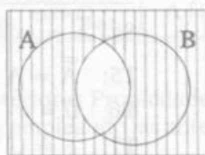
B



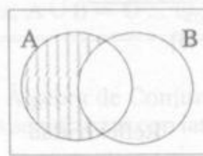
$\overline{B}$



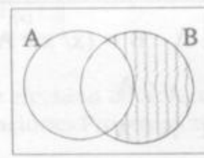
$A \cap B$



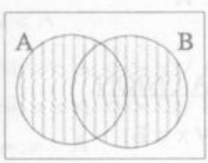
$\overline{A \cap B}$



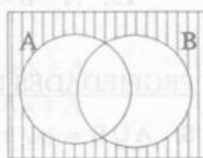
$A \setminus B$



$B \setminus A$

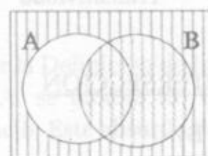


$A \cup B$

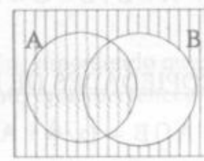


$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

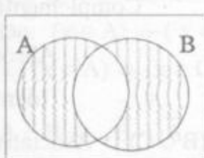
$\overline{A} \setminus B = \overline{B} \setminus A$



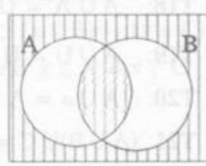
$\overline{A} \cup B = \overline{A \setminus B}$



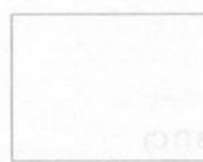
$A \cup \overline{B} = \overline{B \setminus A}$



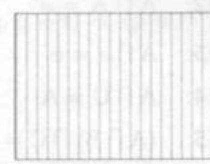
$A \triangle B$



$\overline{A \triangle B}$



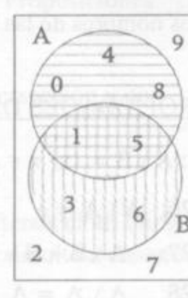
$\varnothing$



U

2.15 Dados los Conjuntos: $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A = \{0, 1, 4, 5, 8\}$; $B = \{1, 3, 5, 6\}$; Hallar sus Operaciones posibles entre sí y sus Complementos.

Si: $\overline{A} = \{2, 3, 6, 7, 9\}$; $\overline{B} = \{0, 2, 4, 7, 8, 9\}$



$A \cap B = \{1, 5\}$ $\qquad$ $\overline{A} \cap B = \{3, 6\}$ $\qquad$ $B \setminus A = \{3, 6\}$

$A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 8\}$ $\qquad$ $\overline{A} \setminus \overline{B} = \{3, 6\}$

$\overline{A \cup B} = \{2, 7, 9\}$ $\qquad$ $\overline{A \cap B} = \{0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{2, 7, 9\}$ $\qquad$ $\overline{A} \cup \overline{B} = \{0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

$A \cap \overline{B} = \{0, 4, 8\}$ $\qquad$ $A \cup \overline{B} = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$

$A \setminus B = \{0, 4, 8\}$ $\qquad$ $\overline{A} \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

$\overline{B} \setminus \overline{A} = \{0, 3, 4, 6, 8\}$ $\qquad$ $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{0, 3, 4, 6, 8\}$

$A \triangle B = \{0, 3, 4, 6, 8\}$ $\qquad$ $\overline{A} \triangle \overline{B} = \{0, 3, 4, 6, 8\}$

$A \cap \varnothing = \varnothing$ $\qquad$ $A \cup \varnothing = A$ $\qquad$ $A \setminus \varnothing = A$ $\qquad$ $\varnothing \setminus A = \varnothing$

$A \cap U = A$ $\qquad$ $A \cup U = U$ $\qquad$ $A \setminus U = \varnothing$ $\qquad$ $U \setminus A = \overline{A}$

II.8 ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

El Álgebra de los Conjuntos es el estudio de los Conjuntos, considerados en su forma mas general, analizando las Propiedades provenientes de sus Operaciones. El Álgebra de Conjuntos se llama también ÁLGEBRA BOOLEANA.

Si bien el Álgebra de los Conjuntos trabaja con las Operaciones entre Conjuntos, se observarán previamente las Propiedades de la Inclusión y la Complementación.

PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN

Si: $A \subset B = \{x / x \in A \Rightarrow x \in B\}$

T1: $\varnothing \subset A$

T2: $A \subset A$ Reflexividad

T3: $A \subseteq B,\ B \subseteq A \Rightarrow A = B$ Antisimetria

T4: $A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C$ Transitividad

PROPIEDADES DEL COMPLEMENTO

Si: $\overline{A} = \{x / x \notin A\}$

T5: $\overline{\overline{A}} = A$ Involución

T6: $\overline{U} = \varnothing$

T7: $\overline{\varnothing} = U$

T8: $\overline{A} = \overline{B} \Rightarrow A = B$

T9: $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN

Si: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

T10: $A \cap A = A$

T11: $A \cap B = B \cap A$

T12: $A \cap \overline{A} = \varnothing$

T13: $A \cap \varnothing = \varnothing$

T14: $A \cap \mathbf{U} = A$

T15: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

PROPIEDADES DE LA UNIÓN

Si: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$

T16: $A \cup A = A$ Idempotencia

T17: $A \cup B = B \cup A$ Conmutatividad

T18: $A \cup \overline{A} = U$ Complementación

T19: $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ Absorción

T20: $A \cup \varnothing = A$ Identidad

T21: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Asociatividad

T22: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Distributividad de la Intersección

T23: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Distributividad de la Unión

T24: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ Ley de: De Morgan de la Intersección

T25: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ Ley de: De Morgan de la Unión

Los nombres de las Propiedades se aplican tanto a la Intersección como la Unión

PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA

Si: $A \setminus B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

T26: $A \setminus A = \varnothing$

T27: $A \setminus B \neq B \setminus A$

T28: $A \setminus \overline{A} = A$

T29: $A \setminus \varnothing = A$

T30: $A \setminus U = \varnothing$

T31: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

DE LA DIFERENCIA SIMÉTRICA

$A \vartriangle B = \{x / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$

T32: $A \vartriangle A = \varnothing$

T33: $A \vartriangle B = B \vartriangle A$

T34: $A \vartriangle \overline{A} = U$

T35: $A \vartriangle \varnothing = A$

T36: $A \vartriangle U = \overline{A}$

T37: $A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Entre las Operaciones de Conjuntos y las Operaciones Proposicionales de Lógica, se establecen las siguientes semejanzas:

$\cap$ ... $\wedge$	$x \in \overline{A}$ ... $\sim P_{(x)}$
$\cup$ ... $\vee$	$A = A$ ... $\sim(\sim P_{(x)})$
$x \in A$ ... $P_{(x)}$	$x \in (A \cap B)$ ... $P_{(x)} \wedge Q_{(x)}$
$x \in B$ ... $Q_{(x)}$	$x \in (A \cup B)$ ... $P_{(x)} \vee Q_{(x)}$
$A \subset B$ ... $P_{(x)} \Rightarrow Q_{(x)}$	$A \cap B = \varnothing$ ... $P_{(x)}, Q_{(x)}$ Incompatibles
$A = B$ ... $P_{(x)} \Longleftrightarrow Q_{(x)}$	$A \cap B = \varnothing, A \cup B = U$ ... $Q_{(x)} \Longleftrightarrow P_{(x)}$

Las Demostraciones de las anteriores Propiedades del Álgebra de Conjuntos, se efectúan de acuerdo a las Definiciones respectivas y empleando las anteriores semejanzas con las Operaciones Proposicionales. (Ver también I-10)

Demostrando algunas Propiedades, se brinda la idea general de las restantes.

T1: $\varnothing \subset A$

Si: $\varnothing \subset A \Longleftrightarrow \forall x/\ x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$

Si: $\varnothing \not\subset A \Longleftrightarrow \exists x/\ x \in \varnothing \wedge x \notin A$

$\Rightarrow \varnothing \subset A$

Por la Definición de Inclusión, suponiendo que: $\varnothing \not\subset A$, se tendría un Elemento que pertenece al Vacío. Este absurdo lleva a: $\varnothing \subset A$.

T4: $A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C$

$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x/\ x \in A \Rightarrow x \in B$; $B \subset C \Longleftrightarrow \forall x/\ x \in B \Rightarrow x \in C$

De: $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$; $(x \in B) \Rightarrow (x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A) \Rightarrow (x \in C)$; $\forall x/\ x \in A \Rightarrow x \in C$

Por Silogismo Hipotético: $(p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

T9: $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x/\ x \in A \Rightarrow x \in B \Longleftrightarrow \forall x/ \sim(x \in B) \Rightarrow \sim(x \in A)$

$\Longleftrightarrow \forall x/\ x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

Por la Contrarrecíproca: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

T10: $A \cap A = A$

$A \cap A = \{x/\ x \in A \wedge x \in A\}$

$= \{x/\ x \in A\} = A$

Por la Definición de la Intersección y por la conocida Propiedad de las Proposiciones: $p \wedge p \equiv p$

T11: $A \cap B = B \cap A$

$A \cap B = \{x/\ x \in A \wedge x \in B\}$

$= \{x/\ x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$

Por la Definición de la Intersección y por: $p \wedge q \equiv q \wedge p$

T12: $A \cap \overline{A} = \varnothing$

$A \cap \overline{A} = \{x/\ x \in A \wedge x \in \overline{A}\} = \varnothing$

Por la Definición de la Intersección; Ningún Elemento puede pertenecer simultáneamente a: A y $\overline{A}$.

T17: $A \cup A = A$

$A \cup A = \{x/\ x \in A \vee x \in A\}$

$= \{x/\ x \in A\} = A$

Por la Definición de la Unión y por la Propiedad de Lógica Proposicional: $p \vee p \equiv p$

T21: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= \{x/\ x \in (A \cup B)\ \vee\ x \in C\}\\ &= \{x/\ (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\}\\ &= \{x/\ x \in A\ \vee (x \in B \vee x \in C)\}\\ &= \{x/\ x \in A\ \vee\ x \in (B \cup C)\}\\ &= A \cup (B \cup C)\end{aligned}$$

Por Definición de la operación de Unión de Conjuntos.

Por semejanza de Lógica a Conjuntos:

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

T22: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= \{x/\ x \in A\ \wedge\ x \in (B \cup C)\}\\ &= \{x/\ x \in A\ \wedge (x \in B \vee x \in C)\}\\ &= \{x/\ (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\}\\ &= \{x/\ x \in (A \cap B)\ \vee\ x \in (A \cap C)\}\\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C)\end{aligned}$$

Por Definición de la Intersección y por la propiedad:

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

T24: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\begin{aligned}\overline{A \cap B} &= \{x/\ x \notin (A \cap B)\} = \{x/ \sim(x \in A \cap B)\}\\ &= \{x/ \sim(x \in A \wedge x \in B)\}\\ &= \{x/ \sim(x \in A) \vee \sim(x \in B)\}\\ &= \{x/\ x \notin A \vee x \notin B\} = \overline{A} \cup \overline{B}\end{aligned}$$

Por Definición y por la propiedad de Lógica Proposicional:

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

De Morgan.

T26: $A \setminus A = \varnothing$

$$A \setminus A = \{x/\ x \in A \wedge x \notin A\} = \varnothing$$

No puede existir un Elemento que a la vez pertenezca y no a un Conjunto.

T31: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$$\begin{aligned}A \setminus B &= \{x/\ x \in A \wedge x \notin B\} = \{x/\ x \in A \wedge x \in \overline{B}\}\\ &= A \cap \overline{B}\end{aligned}$$

Por las Definiciones de Diferencia e Intersección de Conjuntos.

T33: $A \vartriangle B = B \vartriangle A$

$$\begin{aligned}A \vartriangle B &= \{x/(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}\\ &= \{x/(x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)\}\\ &= \{x/(x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \notin B \wedge x \in A)\}\\ &= B \vartriangle A\end{aligned}$$

Por la Definición y las Propiedades de Lógica:

$p \vee q \equiv q \vee p$; $p \wedge q \equiv q \wedge p$

T37: $A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$$\begin{aligned}A \vartriangle B &= \{x/(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}\\ &= \{x/[x \in A \wedge \sim(x \in B)] \vee [\sim(x \in A) \wedge (x \in B)]\}\\ &= \{x/(x \in A \vee x \in B) \wedge [\sim(x \in A) \vee \sim(x \in B)]\}\\ &= \{x/(x \in A \vee x \in B) \wedge \sim(x \in A \wedge x \in B)\}\\ &= \{x/\ x \in (A \cup B) \wedge \sim[x \in (A \cap B)]\}\\ &= \{x/\ x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}\\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B)\end{aligned}$$

Por Definición de Diferencia Simétrica y por las propiedades de Lógica Proposicional:

$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

Además por la Ley de De Morgan de las Proposiciones:

$\sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$

2.16 Usando Propiedades Algebraicas de Operaciones entre Conjuntos en cada caso indicándolas, demostrar:

a) $\overline{(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{C}} = (A \cup B) \cap C$

$$\begin{aligned} \overline{(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{C}} &= \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} \cap \overline{\overline{C}} && \textbf{T25} \\ &= (\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}) \cap \overline{\overline{C}} && \textbf{T24} \\ &= (A \cup B) \cap C && \textbf{T5} \end{aligned}$$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) &= A \cap (B \cup \overline{B}) && \textbf{T22} \\ &= A \cap U && \textbf{T18} \\ &= A && \textbf{T14} \end{aligned}$$

c) $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cap B &= (A \cap \overline{B}) \cap B && \textbf{T31} \\ &= A \cap (B \cap \overline{B}) && \textbf{T15} \\ &= A \cap \varnothing && \textbf{T12} \\ &= \varnothing && \textbf{T13} \end{aligned}$$

d) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$

$$\begin{aligned} (A \setminus C) \cup (B \setminus C) &= (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{C} && \textbf{T22} \\ &= (A \cup B) \setminus C && \textbf{T31} \end{aligned}$$

e) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cup B &= (A \cap \overline{B}) \cup B && \textbf{T31} \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) && \textbf{T23} \\ &= (A \cup B) \cap U && \textbf{T18} \\ &= A \cup B && \textbf{T14} \end{aligned}$$

f) $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = A \setminus (B \setminus C)$

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cup (A \cap C) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) \\ &= A \cap (\overline{B} \cup C) && \textbf{T22} \\ &= A\ \overline{(B \cap \overline{\overline{C}})} && \textbf{T24} \\ &= A \cap (B \setminus C) && \textbf{T31} \\ &= A \setminus (B \setminus C) && \textbf{T31} \end{aligned}$$

g) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

$$\begin{aligned} A \setminus (A \setminus B) &= A \cap (A \setminus B) && \textbf{T31} \\ &= A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} && \textbf{T31} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) && \textbf{T24} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup B) && \textbf{T5} \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) && \textbf{T22} \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) && \textbf{T12} \\ &= A \cap B && \textbf{T20} \end{aligned}$$

h) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$

$$\begin{aligned} A \setminus (A \cap B) &= A \cap \overline{(A \cap B)} && \textbf{T31} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{A} \cup \overline{B}) && \textbf{T24} \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) && \textbf{T22} \\ &= \varnothing \cup (A \cap \overline{B}) && \textbf{T12} \\ &= A \cap \overline{B} && \textbf{T20} \\ &= A \setminus B && \textbf{T31} \end{aligned}$$

i) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cup (B \setminus A) &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) && \textbf{T31} \\ &= [(A \cap \overline{B}) \cup B] \cap [(A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}] && \textbf{T23} \\ &= [(A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)] \cap [(A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})] && \textbf{T22} \\ &= [(A \cup B) \cap U] \cap [U \cap (\overline{B} \cup \overline{A})] && \textbf{T18} \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) && \textbf{T14} \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) && \textbf{T17} \\ &= (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} && \textbf{T24} \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) && \textbf{T31} \\ &= A \triangle B && \textbf{T37} \end{aligned}$$

II.9 EL CONJUNTO POTENCIA

El Conjunto Potencia del Conjunto: A es aquel Conjunto, cuyos Elementos son todos los Subconjuntos de: A . La Notación y Definición del Conjunto Potencia son:

$$\boxed{P_{(A)} = \{x/\ x \subset A\}}$$

Lo anterior significa que el Conjunto Potencia, es un Conjunto de Conjuntos.

- Por las Propiedades de la Inclusión: $\varnothing \subset A$ (T1); $A \subset A$ (T2); Todo Conjunto: A tendrá un Conjunto Potencia que contenga al menos el Vacío $\varnothing$; o al mismo Conjunto: A
- Al Conjunto Potencia de: A se lo llama también Conjunto de Partes de: A
- Si un Conjunto: A contiene n Elementos, su Conjunto Potencia contiene: 2^n Elementos

Ej 2.21 Se determina el Conjunto Potencia del Conjunto: A

$A = \{a, b, c\}$

$P_{(A)} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

A tiene 3 Elementos, su Conjunto Potencia: $2^3 = 8$ Elementos.

2.17 Determinar el Conjunto Potencia correspondiente a los siguientes Conjuntos

a) $A = \{0, 1\}$

$P_{(A)} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

Todos los Subconjuntos Posibles del Conjunto: B son 4, ya que: $2^2 = 4$.

b) $B = \varnothing$

$P_{(B)} = \{\varnothing\}$

El Vacío no contiene a ningún Elemento, por tanto su Conjunto Potencia, solo contendrá al mismo Vacío (Solo 1 Elemento $2^0 = 1$)

c) $C = \{2,4,6,8\}$ $\quad P_{c} = \{\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{2,8\}, \{4,6\}, \{4,8\}, \{6,8\}, \{2,4,6\}, \{2,4,8\}, \{2,6,8\}, \{4,6,8\}, \{2,4,6,8\}\}$

2.18 Hallar el Conjunto Potencia del Conjunto Potencia de los Conjuntos:

a) $A = \varnothing$

$P_{(A)} = \{\varnothing\}$; $P_{(P_{(A)})} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Del Conjunto: $P_{(A)}$ se halla su Conjunto Potencia.

b) $B = \{3\}$

$P_{(B)} = \{\varnothing, \{3\}\}$; $P_{(P_{(B)})} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{3\}\}, \{\varnothing,\{3\}\}\}$

Del Conjunto B (Constituido por un solo Elemento), se halla su Potencia $P_{(B)}$.

2.19 Indicar cuales de las siguientes Proposiciones son Verdaderas y cuales son Falsas, dado el Conjunto: $A = \{3, 5\}$

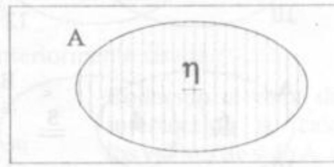
$3 \in A$	V	$\{3\} \in A$	F	$\varnothing \in A$	F	$\{\varnothing\} \in A$	F
$3 \subset A$	F	$\{3\} \subset A$	V	$\varnothing \subset A$	V	$\{\varnothing\} \subset A$	F
$3 \in P_{(A)}$	F	$\{3\} \in P(A)$	V	$\varnothing \in P_{(A)}$	V	$\{\varnothing\} \in P_{(A)}$	F
$3 \subset P_{(A)}$	F	$\{3\} \subset P_{(A)}$	F	$\varnothing \subset P_{(A)}$	F	$\{\varnothing\} \subset P_{(A)}$	V

II.10 NÚMERO DE ELEMENTOS

El Número Total de Elementos que posee un Conjunto: A se designará por: $\eta_{(A)}$

Se justifica el concepto de Número de Elementos de un Conjunto, mediante las Relaciones de Equivalencia o la Cardinalidad del Conjunto.

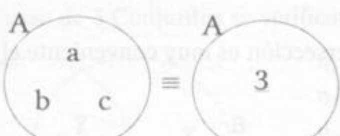
Se usará la Notación indicada en los Diagramas de Venn, para indicar el Número de Elementos de un Conjunto.



Al subrayar η, se indica cuantos Elementos tiene el Conjunto. (η no es un Elemento del Conjunto)

Al estudio del Número de elementos de un Conjunto se llama Conteo o Cardinalidad del Conjunto.

Ej 2.22 En los Diagramas de Venn, se indica el Número de Elementos del Conjunto.

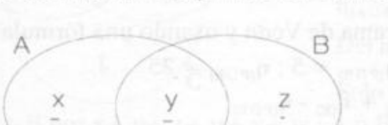


El Número de Elementos del Conjunto: A es de: $\eta_{(A)} = 3$, tales Elementos de: A son: a, b, c.

Se determina el Número de Elementos de un Conjunto, únicamente cuando se trata de un Conjunto Finito.

El Nº de Elementos del Conjunto Vacío es cero: $\eta_{(\emptyset)} = 0$

Para el caso de dos Conjuntos, sus Números de Elementos guardan las siguientes relaciones:



x: Es el Nº de Elementos del Conjunto: A, sin tomar los de la Intersección. Se dice que son los de solo A

y: Es el Nº de Elementos de la Intersección entre los Conjuntos: A, B. Se dice que son los de A y B

z: Es el Nº de Elementos del Conjunto: B, sin tomar los de la Intersección. Se dice que son los de solo B. Por tanto:

$\eta_{(A)} = x + y$ Nº Total de Elementos del Conjunto: A. Se dice que son los de A

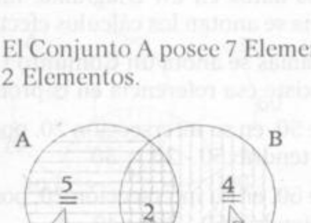
$\eta_{(B)} = y + z$ Nº Total de Elementos del Conjunto: B. Se dice que son los de B

$\eta_{(A \cap B)} = y$ Nº Total de Elementos de la Intersección. Se dice que son los de A y B

$\eta_{(A \cup B)} = x + y + z$ Nº Total de Elementos de la Unión. Se dice que son los de A o B

Luego se verifica que: $\eta_{(A \cup B)} = \eta_{(A)} + \eta_{(B)} - \eta_{(A \cap B)}$

Ej 2.23 El Conjunto A posee 7 Elementos, El Conjunto B 6 Elementos, la Intersección entre: A y B posee 2 Elementos.



En el Diagrama los valores conocidos se anotan en forma subrayada. Los valores que se calculan se los anota con doble subrayado.

El total de elementos de A es 7, se lo anota fuera del Conjunto. Si hay 2 elementos en la intersección, lógicamente como solo elementos de A se tiene: 7- 2= 5

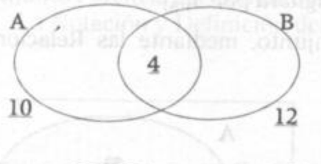
Similarmente en B hay 6, pero en solo B: 6 - 2 = 4

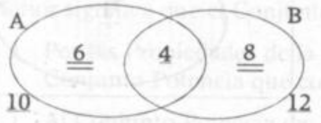
De acuerdo al Diagrama, el total de Elementos que equivale al Nº de elementos de la Unión, se dice que es el Nº de A o B, este Nº será igual a: 5 + 2 + 4 = 11

Verificando por la fórmula $\eta_{(A \cup B)} = \eta_{(A)} + \eta_{(B)} - \eta_{(A \cap B)} = 7 + 6 - 2 = 11$

Al mencionar "y" se refiere a la Intersección; Al mencionar "o" se refiere a la Unión.

2.20 De un grupo de Alumnos de la Universidad se reúnen los siguientes datos: 10 estudian Auditoría (A); 12 estudian Bioquimica (B) ; 4 estudian A y B. Calcular a) El Número Total de Alumnos; b) El Número de aquellos que estudian solo una de las carreras indicadas.





Anotandolos datos en un Diagrama de Venn. Luego efectuando cálculos se elabora otro Diagrama.

El total de elementos de A es 10, siendo 4 los de su intersección significa que el Nº de solo A es de 10 - 4 = 6. De solo B: 12 - 4 = 8

Por tanto el total es: 6 + 4 + 8 =18

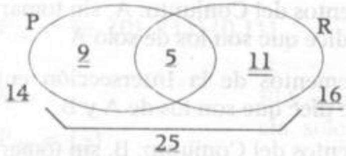
Por: $\eta_{(A\cup B)} = \eta_{(A)} + \eta_{(B)} - \eta_{(A\cap B)} = 10 + 12 - 4 = 18$

Por tanto: a) El Total de Alumnos es de: 18;
b) Estudian solo A: 6; Estudian solo B: 8

Note que al determinar el Nº de Alumnos que solo estudian una de las carreras, se toman aquellos Elementos que pertenecen a un Conjunto, pero no a los de su Intersección. Este valor se anota dentro del Conjunto (El Número total de todos los Elementos de un Ccnjunto suele colocarse fuera del mismo, siempre subrayando)

Cuando no se conoce el Número de elementos de la intersección es muy conveniente el uso de la Fórmula: $\eta_{(A\cup B)} = \eta_{(A)} + \eta_{(B)} - \eta_{(A\cap B)}$

2.21 De 25 personas, que para enterarse de noticias acuden a los Periódicos (P) y Radios (R) se observa que: 14 leen Periódicos; 5 leen Periódicos y escuchan Radio. Hallar el Nº de los que escuchan Radios y el Nº de los que solo escuchan Radio.



Por el Diagrama de Venn y usando una fórmula:

$\eta_{(P)} = 14\ ;\ \eta_{(P\cap R)} = 5\ ;\ \eta_{(P\cup R)} = 25$

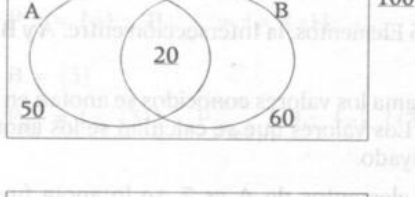
$\eta_{(P\cup R)} = \eta_{(P)} + \eta_{(R)} - \eta_{(P\cap R)}$

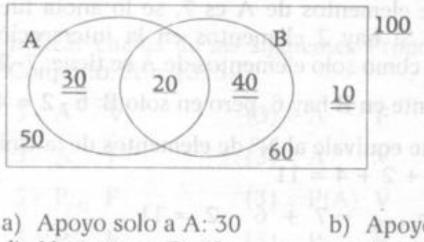
$\eta_{(R)} = \eta_{(P\cup R)} - \eta_{(P)} + \eta_{(P\cap R)} = 25 - 14 + 5 = 16$

Nº que escucha Radios: 16; Nº de solo Radios: 11

En el Nº de quienes escuchan Radio, se puede incluir a los que también leen Periódicos, pero no se los incluye en el Nº de los que solo escuchan Radio.

2.22 Efectuando una consulta política a 100 personas, se sabe que 50 apoyan al candidato A, 60 al B, 20 apoyan a ambos. Calcular a) Cuantos apoyan solo a A; b) Cuantos a A o B; c) Cuantos a ninguno; d)Cuantos no apoyan a B; e) Cuantos apoyan a un solo candidato.





Indicando los datos en un Diagrama, luego en otro Diagrama se anotan los cálculos efectuados.

En los Diagramas se anota un Conjunto Universo, porque existe esa referencia en el problema.

En A se tiene 50, en su intersección 20, por tanto en solo A se tendrá: 50 - 20 = 30

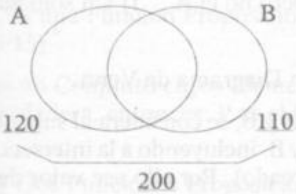
En B se tiene 60, en su intersección 20, por tanto en solo B se tendrá: 60 - 20 = 40

Sumando lo obtenido se logra que para la Unión de ambos conjuntos: 30 + 20 + 40 = 90

Descontando estos 90 de las 100 personas del total, quedan 10, los que se asume no apoyan a ninguno de los candidatos. Por tanto:

a) Apoyo solo a A: 30 b) Apoyo a A o B: 90 c) Apoyo a ninguno: 10
d) No apoyo a B: 40 e) Cuantos apoyan a un solo candidato: 30+40 = 70

2.23 Al consultar la preferencia de los televidentes sobre los canales A y B, se obtuvo que: 120 observan el canal A; 110 el canal B; 200 observan A o B.
Calcular: a) Cuantos observan A y B; b) Cuantos solo A; c) Cuantos no observan A.



Indicando los datos en un Diagrama de Venn, luego en otro Diagrama se anotan los cálculos efectuados.

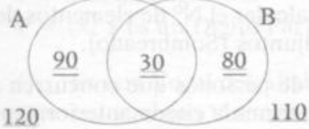
Como no se conoce el Nº de la intersección aunque si se conoce el de la Unión (140)

Empleando una fórmula anteriormente citada.

$$\eta_{(A\cup B)} = \eta_{(A)} + \eta_{(B)} - \eta_{(A\cap B)}$$

$$200 = 120 + 110 - \eta_{(A\cap B)}$$

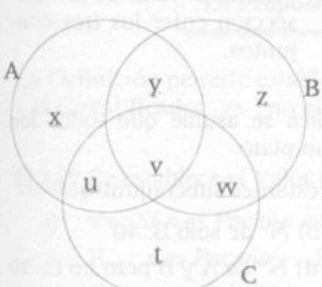
$$200 = 230 - \eta_{(A\cap B)} \Rightarrow \eta_{(A\cap B)} = 30$$



Conocido el valor de la intersección se calcula los valores de solo A, solo B. Por tanto:

a) Observan A y B: 30 b) Observan solo A: 90
c) No observan A: 80

Para el caso de 3 Conjuntos se verifican las siguientes relaciones con sus Números de Elementos:



$\eta_{(A)} = u + v + x + y$ $\eta_{(A\cup B)} = u + v + w + x + y + z$

$\eta_{(B)} = v + w + y + z$ $\eta_{(A\cup C)} = t + u + v + w + x + y$

$\eta_{(C)} = t + u + v + w$ $\eta_{(B\cup C)} = t + u + v + w + y + z$

$\eta_{(A\cap B)} = v + y$ $\eta_{(A\cup B\cup C)} = t + u + v + w + x + y + z$

$\eta_{(A\cap C)} = u + v$ $\eta_{(B\cap C)} = v + w$

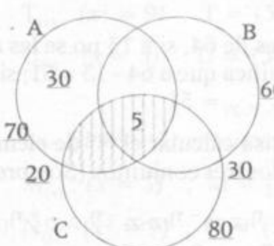
$$\eta_{(A\cup B\cup C)} = \eta_{(A)} + \eta_{(B)} + \eta_{C} - \eta_{(A\cap B)} - \eta_{(A\cap C)} - \eta_{(B\cap C)} + \eta_{(A\cap B\cap C)}$$

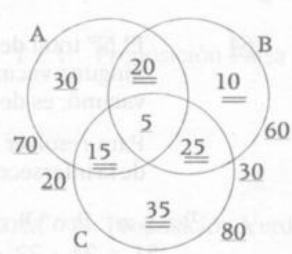
Del mismo modo se generalizan los resultados para: *n* Conjuntos.

Solo A está dado por $\underline{x}$; A y B por $\underline{v}+\underline{y}$; A y B pero no C por $\underline{y}$
A o B por $\underline{x}+ \underline{y}+ \underline{z}+ \underline{u}+ \underline{v}+ \underline{w}$; A o B pero no C por: $\underline{x}+ \underline{y}+ \underline{z}$

Sin embargo en la práctica en lugar de usar Fórmulas, es a veces preferible determinar Números de Elementos mediante la simple suma y/o resta de los datos que se conocen, colocando los resultados sobre los Diagramas de Venn.

Ej 2.24 De un grupo de Estudiantes que cursan: Álgebra (A); Botánica (B); Contabilidad © . Se obtienen los siguientes datos: 70 cursan A; 60 cursan B; 80 cursan C; 30 cursan solo A; 30 cursan B y C; 20 cursan A y C; 5 cursan A y B y C. Calcular:
a) Nº que cursa: A y B b) Nº de solo B c) Nº de A o B d) Nº Total de Estudiantes





En el primer Diagrama se anotan los datos, en el segundo se anotan los valores calculados de acuerdo a Propiedades de Número de Elementos de 3 Conjuntos.

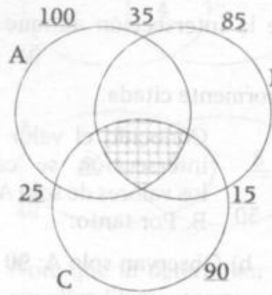
Si se dice que 20 cursan A y C, esto ocupa dos subconjuntos (Sombreado). Al ser conocido el Nº de uno de los subconjuntos (5), se calcula por diferencia el del otro subconjunto (15).

Calculando los restantes valores, por las diferencias correspondientes:

a) Nº de A y B: $\eta(A \cap B) = 5 + 20 = 25$ b) Nº solo B: $\eta_{(B\setminus(A\cup C))} = 10$
c) Nº de A o B: $\eta_{(A\cup B)} = 30+20+10+15+5+25=105$ d) Nº Total: $\eta_{(A\cup B\cup C)} = 140$

2.24 Entre los 205 concurrentes a un restaurant: 100 piden el plato A; 85 el plato B; 90 el plato C; 35 piden los platos A y B; 15 los platos B y C, 25 los platos A y C. Calcular cuantos piden:

a) Los platos A y B y C b) Solo el plato B c) Los platos B o C
d) Los platos A y B pero no el C e) Los platos B o C pero no el A f) Un solo plato
g) Dos platos h) No el plato C



Colocando los datos en un Diagrama de Venn.

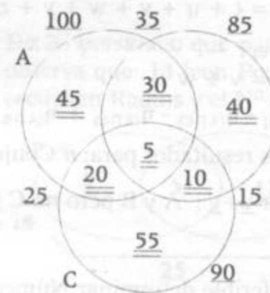
Al indicarse que 35 piden A y B, se considera al subconjunto de la intersección entre A y B, incluyendo a la intersección de los tres conjuntos (Sombreado). Por ello ese valor de 35 se anota fuera

Para resolver se precisa calcular el Nº de elementos de la intersección de los tres conjuntos (Sombreado).

Como se conoce el total de personas que concurren al restaurant (205), se usa una fórmula citada anteriormente:

$$\eta_{(A\cup B\cup C)} = \eta_{(A)} + \eta_{(B)} + \eta_{(C)} - \eta_{(A\cap B)} - \eta_{(A\cap C)} - \eta_{(B\cap C)} + \eta_{(A\cap B\cap C)}$$
$$205 = 100 + 85 + 90 - 35 - 15 - 25 + \eta_{(A\cap B\cap C)}$$
$$205 = 200 + \eta_{(A\cap B\cap C)} \Rightarrow \eta_{(A\cap B\cap C)} = 5$$

Reemplazando datos y despejando el valor de la intersección entre los tres conjuntos.



Tal como el problema lo indica se asume que todos los concurrentes piden al menos un plato.

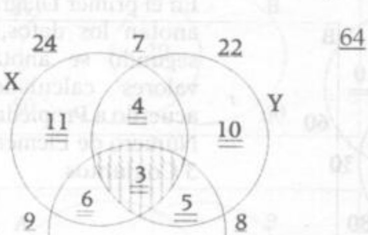
Calculando los valores de los restantes subconjuntos:

a) Nº de A y B y C: 5 b) Nº de solo B: 40
c) Nº de B o C: 160 d) Nº de A y B pero no C: 30
e) Nº de B o C pero no A: 105 f) Un solo plato: 140
g) Dos platos: 60 h) No el plato C: 115

2.25 Para vacunarlos sorpresivamente se llevan 64 niños a un Centro de salud; A 24 se les aplica la vacuna X; a 22 la Y; a 26 la Z; a 7 la X y la Y; a 8 la Y y la Z; a 9 la X y la Z; 13 niños logran escapar sin que se logre vacunarlos. Calcular a cuantos se les aplicó:

a) Solo la vacuna X b) La X y Y pero no la Z c) La X o Y
d) La X o Y pero no la Z e) Dos vacunas f) No se les aplicó la X

Colocando los datos en un Diagrama de Venn.



El Nº total de niños es de 64, si a 13 no se les aplicó ninguna vacuna, significa que a 64 - 13 =51; si se les vacunó, es decir $\eta_{(X\cup Y\cup Z)} = 51$

Para resolver se precisa calcular el Nº de elementos de la intersección de los tres conjuntos (Sombreado).

$$\eta_{(X\cup Y\cup Z)} = \eta_{(X)} + \eta_{(Y)} + \eta_{(Z)} - \eta_{(X\cap Y)} - \eta_{(X\cap Z)} - \eta_{(Y\cap Z)} + \eta_{(X\cap Y\cap Z)}$$
$$51 = 24 + 22 + 26 - 7 - 8 - 9 + \eta_{(X\cap Y\cap Z)}$$
$$51 = 48 + \eta_{(A\cap B\cap C)} \Rightarrow \eta_{(A\cap B\cap C)} = 3$$

Luego calculando los restantes valores, se obtiene:

a) Solo la X: 11 b) La X y Y pero no la Z: 4 c) La X o Y: 39
d) La X o Y pero no la Z: 25 e) Dos vacunas: 15 f) No se les aplicó la X: 40

II.11 INCLUSIÓN, IMPLICACIÓN LÓGICA

Si $P_{(x)}$ es una Función Proposicional, solamente será Verdadera para ciertos valores de su Variable: x (Ver I.15)

Si P es un Conjunto cuyos Elementos, son valores de: x que hacen que la Función Proposicional: $P_{(x)}$ sea Verdadera, entonces: P es el Conjunto de Verdad de $P_{(x)}$.

Ej 2.24 Dos Funciones Proposicionales y sus Conjuntos de Verdad son:

a) $P_{(x)}$: x es un Dígito Par
$P = \{x/ \text{ x es un Dígito Par}\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

b) $Q_{(x)}$: Es una Vocal del Alfabeto
$Q = \{x/ \text{ x es una Vocal del Alfabeto}\} = \{a, e, i, o, u\}$

Desarrollando los Conjuntos de Verdad que son: P, Q por Comprensión y por Extensión.

La Proposición: $\forall x : P_{(x)} \Rightarrow Q_{(x)}$ es Verdadera si y solo si: $P \subseteq Q$

La Definición permite establecer el Valor de Verdad de la Implicación con Funciones Proposicionales y el Cuantificador: $\forall x$; no afectando el Valor de Verdad de cada Función Proposicional.

Ej 2.25 Se establece el Valor de Verdad de las siguientes Proposiciones:

a) $\forall x$: *Si x es Paceño entonces x es Boliviano*
$P_{(x)}$: *x es Paceño* ; P = {x/ x es Paceño}
$Q_{(x)}$: *x es Boliviano*; Q = {x/ x es Boliviano}
$\Rightarrow P \subset Q$ Proposición Verdadera

Al cumplirse $P \subset Q$ la Proposición es V
Todo Paceño es Boliviano necesariamente

b) $\forall x$: *Si x es Boliviano entonces x es Paceño*
$R_{(x)}$: *x es Boliviano*; R = {x/ x es Boliviano}
$S_{(x)}$: *x es paceño* ; S = {x/ x es Paceño}
$\Rightarrow R \not\subset S$ Proposición Falsa

No se cumple: $R \subset S$
Es F, No todo Boliviano Paceño, puede ser Cruceño, Orureño.

c) $\forall x$: *Si* $(x^2 = 9)$ *entonces* $(x = 3)$
$T_{(x)} : (x^2 = 9)$; $T = \{3,-3\}$
$U_{(x)} : (x = 3)$; $U = \{3\}$ $\Rightarrow T \not\subset U$ Proposición Falsa

No se cumple: $T \subset U$
Es F Si: $3^2 = 9$, se cumple también que: $(-3)^2 = 9$; Proposición mal enunciada.
Se cumple $M \subset N$; es V

d) $\forall x$: *Si* $(x = 3)$ *entonces* $(x^2 = 9)$
$M_{(x)} : (x = 3)$; $M = \{3\}$
$N_{(x)} : (x^2 = 9)$; $N = \{3,-3\} \Rightarrow M \subset N$ Proposición Verdadera

Si $x = 3$, necesariamente se cumple que: $3^2 = 9$; Proposición bien enunciada.

2.25 Determinar si la siguiente Proposición es Verdadera o Falsa

$\forall x$: *Si x es Militar entonces x es Capitán*
$P_{(x)}$: *x es Militar* ; P = {*x/ x es Militar*}
$Q_{(x)}$: *x es Capitán* ; Q = {*x/ x es Capitán*}

No se cumple que: $P \subset Q$; por tanto la Proposición es Falsa.

II PROBLEMAS PROPUESTOS

2.1 Indicar cuales de los siguientes Conjuntos son iguales entre sí:

A = {1, a} ; B = {0, 1, 0, a, 0} ; C = {a, 1} ; D = {a, 1, a} A = C = D = H

E = {-1, -a} ; F = {0, 1, a} ; G = {1, a, 0} ; H = {1, 1, 1, a} B = F = G

2.2 Determinar por Extensión los siguientes Conjuntos, dados por Comprensión:

$A = \{x/\ x \in \mathbb{D},\ 0 \le x \le 3\}$; $B = \{x/\ x \in D,\ 4 < x < 8\}$ {0, 1, 2, 3}; {5, 6, 7}

$C = \{x/\ x$ es Par, $2 \le x < 7\}$; $D = \{x/\ x \in Z,\ 3x - 6 = 0\}$ {2, 4, 6}; {2}

$E = \{x/\ x \in Z,\ (x - 2)(x - 3)(x - 5) = 0\}$ {2, 3, 5}

$F = \{x/\ x \in D$, x es Múltiplo de 3$\}$ {3, 6, 9}

2.3 Determinar por Comprensión los siguientes Conjuntos, dados por Extensión:

A = {0, 1, 2, 3, 4} B = {2, 4, 6, 8} C = {3, 6, 9, 12, ...}

D = {..-1, 0, 1, 2, ..} E = {+, -, ·, /} F = {a, l, g, e, b, r}

2.4 a) Indicar tres Conjuntos Finitos b) Indicar tres Conjuntos Infinitos

2.5 Indicar que Conjunto es Subconjunto de otro Conjunto:

a) A = {a, b, c, d, e} ; B = {b, c, d} $B \subset A$

b) $C = \{x/\ x \in Z,\ 0 \le x \le 3\}$; $D = \{x/\ x \in Z,\ 0 \le x \le 1\}$ $D \subset C$

c) $E = \{x/\ x \in Z,\ 3 < x < 7\}$; $F = \{x/\ x \in Z,\ 3 \le x < 7\}$ $E \subset F$

d) $G = \{x/\ x \in D,\ 1 < x < 5\}$; $H = \{x/\ x \in Z,\ 2 \le x \le 4\}$ G = H

e) I = {t, u, v, w} ; J = {t, u, v, w, x} ; K = {u, v} $I \subset J$; $K \subset J$; $K \subset I$

2.6 Indicar cinco Conjuntos Vacíos.

2.7 Indicar si son Verdaderas (V) o Falsas (F) las siguientes Proposiciones:

$\varnothing = \{0\}$ $\varnothing = \{\ \}$ $\varnothing \subset A$ $\varnothing \in U$ F; V; V; F

$\varnothing = 0$ $\varnothing = \{\varnothing\}$ $\varnothing \in A$ $\varnothing \subset U$ F; F; F; V

2.8 Representar por Diagramas de Venn, los siguientes Conjuntos:

a) A = {x, y, z} ; B = {a, b, c}

b) $U = \{x/\ x \in D\}$; A = {0, 2, 4, 6, 8} ; B = {2, 4, 6}

c) $U = \{x/\ x \in D\}$; A = {1, 2, 3, 4} ; B = {3, 4, 5, 6} ; C = {6, 7, 8}

2.9 Determinar el Complemento de los siguientes Conjuntos:

a) U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} ; B = {0, 3, 5, 7, 8, 9} {6, 7, 8, 9}; {1, 2, 4, 6}

C = {x/ x es Par} ; $D = \{x/\ x \ge 3\}$ {1, 3, 5, 7, 9}; {0, 1, 2}

b) U = {a, b, c, d, e, f}

A = {a, c, e} ; B = {a, d, e, f}; C = {d, e, f, g} ; D = {a, b, c, d, e, f} {b, d, f}; {b, c}; ??; $\varnothing$

c) U = {x/ x es Triángulo}

A = {x/ x es Triángulo Equilátero} {Isósceles, Escaleno}

B = {x/ x es Triángulo Rectángulo} {Obtusángulo, Acutángulo}

2.10 Determinar la Intersección entre los siguientes Pares de Conjuntos:

a) $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ — $\{5, 6, 7\}$

b) $C = \{x/\ x \in Z, 0 \le x \le 5\}$; $D = \{x/\ x \in Z, 3 \le x \le 7\}$ — $\{3, 4, 5\}$

c) $E = \{x/\ x \in D, x > 5\}$; $F = \{x/\ x \in D, x < 8\}$ — $\{6, 7\}$

d) $G = \{x/\ x \in Z, 0 < x < 3\}$; $H = \{x/\ x \in Z, 2x - 5 = 0\}$ — $\varnothing$

2.11 Efectuar las Operaciones indicadas:

a) $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$A \cap B$; $\overline{A \cap B}$; $\overline{A} \cap B$; $A \cap \overline{B}$; $\overline{A} \cap \overline{B}$ — $\{4, 6, 8\}$; $\{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

$\{0, 2\}$; $\{3, 5, 7\}$; $\{1, 9\}$

b) $U = \{a, e, i, o, u\}$; $C = \{a, o, u\}$; $D = \{e, i, o\}$

$C \cap D$; $\overline{C \cap B}$; $\overline{C} \cap D$; $C \cap \overline{D}$; $\overline{C} \cap \overline{D}$ — $\{o\}$; $\{a, e, i, u\}$; $\{e, i\}$; $\{a, u\}$; $\varnothing$

2.12 Determinar la Unión entre los siguientes Pares de Conjuntos:

a) $A = \{0, 2, 4, 6\}$; $B = \{2, 3, 4, 5\}$ — $\{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $C = \{x/\ x \in D, x > 7\}$; $D = \{x/\ x \in D, x \ge 6\}$ — $\{6, 7, 8, 9\}$

c) $E = \{x/\ x \in Z, (x - 2)(x - 4) = 0\}$; $F = \{x/\ x \in Z, 3x - 4 = 0\}$ — $\{2, 4\}$

2.13 Efectuar las Operaciones indicadas:

a) $U = \{a, e, i, o, u\}$; $A = \{a, u\}$; $B = \{a, e, i\}$; $C = \{i, u\}$

$A \cup \overline{B}$; $\overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{B} \cup \overline{C}$; $\overline{A \cup B}$ — $\{a, o, u\}$; $\{e, i, o, u\}$; $\{a, e, o, u\}$; $\{o\}$

$\overline{A} \cup B$; $\overline{A} \cup C$; $A \cup B \cup C$ — $\{a, o, u\}$; $\{e, i, o, u\}$; $\{a, e, i, u\}$

b) $U = \{x/\ x \in D\}$; $D = \{x/\ x \ge 7\}$; $E = \{x/\ x > 5\}$; $F = \{x/\ x \le 3\}$

$D \cup E \cup \overline{F}$; $\overline{D} \cup \overline{E} \cup F$ — $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\overline{D \cup E \cup F}$; $\overline{\overline{D} \cup \overline{E} \cup \overline{F}}$; $\overline{D \cup \overline{E} \cup F}$ — $\{4, 5\}$; $\varnothing$; $\{6\}$

2.14 Dados los siguientes Conjuntos, efectuar las Operaciones indicadas:

a) $A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{a, e, i, o, u\}$; $C = \{d, e, o, p, q\}$

$A \cap B \cap C$; $A \cup B \cup C$ — $\{e\}$; $\{a, b, c, d, e, i, o, p, q, u\}$

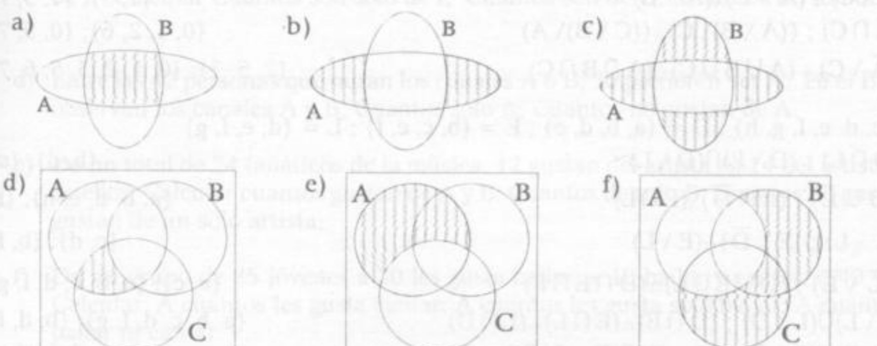
$(A \cap C) \cup B$; $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ — $\{a, d, e, i, o, u\}$; $\{a, d, e\}$

b) $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $D = \{0, 1, 3, 4\}$; $E = \{1, 2, 4, 5\}$; $F = \{3, 4, 5, 6\}$

$D \cap E \cap F$; $(D \cup E) \cap F$; $D \cap (E \cup F)$ — $\{4\}$; $\{3, 4, 5\}$; $\{1, 3, 4\}$

$(D \cup E) \cap \overline{F}$; $D \cup \overline{E} \cup \overline{F}$; $(\overline{D \cup F}) \cap E$ — $\{0, 1, 2\}$; $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7\}$; $\{2\}$

2.15 Indicar la operación que representan los siguientes Diagramas de Venn:



a) $A \cap B$

b) $A \setminus B$

c) $A \triangle B$

d) $A \cap \overline{B} \cap C$

e) $A \cap (B \cup \overline{C})$

f) $\overline{A} \cap (B \cup C)$

2.16 Determinar las Diferencias indicadas entre los siguientes Conjuntos:

$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $B = \{4, 6, 8\}$; $A \setminus B$; $B \setminus A$ — $\{0, 2\}$; $\varnothing$

$C = \{a, b, c, d\}$; $D = \{x, y, z\}$; $C \setminus D$; $D \setminus C$ — $\{a, b, c, d\}$; $\{x, y, z\}$

$E = \{x/ x \in D, x < 5\}$; $F = \{x/ x \in D, x < 3\}$; $I \setminus J$; $J \setminus I$ — $\{3, 4\}$; $\varnothing$

$G = \{m, n, o\}$; $H = \{o, n, m\}$; $G \setminus H$; $H \setminus G$ — $\varnothing$, $\varnothing$

2.17 Efectuar las Operaciones indicadas:

$U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $A = \{1, 5\}$; $B = \{5, 7, 9\}$

· $\overline{A} \setminus B$; $A \setminus \overline{B}$; $\overline{A} \setminus \overline{B}$; $\overline{B} \setminus \overline{A}$ — $\{3\}$; $\{5\}$; $\{7, 9\}$; $\{1\}$

2.18 Efectuar las Operaciones indicadas:

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $A = \{0, 1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4, 5\}$; $C = \{2, 3, 4\}$

$(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$; $(A \cup B) \setminus (B \cup C)$ — $\{0, 1, 5\}$; $\{0, 1\}$

$(A \cap B) \setminus (A \cap C)$; $(B \setminus A) \cap (B \setminus C)$ — $\varnothing$, $\{5\}$

$(\overline{A} \setminus B) \cup (\overline{B} \setminus C)$; $(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \setminus (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ — $\{0, 1\}$; $\{0, 1, 4, 5\}$

2.19 Hallar la Diferencia Simétrica entre los siguientes Pares de Conjuntos:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ — $\{0, 1, 2, 6, 7\}$

$C = \{p, q, r\}$; $D = \{x, y, z\}$ — $\{p, q, r, x, y, z\}$

$E = \{0, 2, 4\}$; $F = \{4, 2, 0\}$ — $\varnothing$

$G = \{x/ x \in Z, 0 \le x \le 3\}$; $H = \{x/ x \in Z, 4x - 8 = 0\}$ — $\{0, 1, 3\}$

$I = \{x/ x \in D, x > 7\}$; $J = \{x/ x \in D, x > 5\}$ — $\{6, 7\}$

2.20 Efectuar las Operaciones indicadas:

a) $U = \{a, e, i, o, u\}$; $A = \{a, o, u\}$; $D = \{e, o, u\}$; $E = \{u\}$

$A \vartriangle \overline{D}$; $\overline{A} \vartriangle D$; $A \vartriangle E$; $\overline{D} \vartriangle \overline{E}$ — $\{i, o, u\}$; $\{i, o, u\}$; $\{a, o\}$; $\{e, o\}$

$A \vartriangle (D \vartriangle E)$; $(A \vartriangle D) \vartriangle E$; $(\overline{A} \vartriangle D) \vartriangle (\overline{A} \vartriangle E)$ — $\{a, e, u\}$; $\{a, e, u\}$; $\{e, o\}$

b) $P = \{1, 5, 7\}$; $Q = \{1, 3, 5\}$; $R = \{5, 7, 9\}$

$(P \vartriangle Q) \vartriangle R$; $(P \vartriangle Q) \vartriangle (P \vartriangle R)$; $P \vartriangle (Q \vartriangle (Q \vartriangle R))$ — $\{3, 5, 9\}$; $\{1, 3, 7, 9\}$; $\{1, 9\}$

$P \vartriangle (Q \vartriangle R)$; $(P \vartriangle Q) \vartriangle (R \vartriangle Q)$; $Q \vartriangle (P \vartriangle (Q \vartriangle R))$ — $\{3, 5, 9\}$; $\{1, 9\}$; $\{1, 9\}$

2.21 Dados los Conjuntos, efectuar las Operaciones indicadas:

a) $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $A = \{0, 1, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 4, 6\}$; $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$(A \vartriangle B) \cap (A \vartriangle C)$; $(A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$ — $\{0, 6\}$; $\{1, 3\}$

$(A \setminus B) \vartriangle (A \setminus C)$; $(A \vartriangle C) \setminus (A \vartriangle B)$ — $\{1, 3\}$; $\{1, 5, 7\}$

$(A \cup B) \vartriangle (A \cap C)$; $((A \setminus B) \setminus C) \vartriangle ((C \setminus B) \setminus A)$ — $\{0, 1, 2, 6\}$; $\{0, 5, 7\}$

$(\overline{A} \setminus B) \vartriangle (\overline{A} \setminus C)$; $(A \cup B \cup C) \vartriangle (A \cap B \cap C)$ — $\{2, 5, 7\}$; $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

b) $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; $D = \{a, b, d, e\}$; $E = \{b, c, e, f\}$; $L = \{d, e, f, g\}$

$(D \cap E) \vartriangle (D \cap L)$; $(D \setminus E) \cap (D \setminus L)$ — $\{b, d\}$; $\{a\}$

$(D \cup \overline{E}) \cap (D \cup \overline{L})$; $(E \cap \overline{D}) \setminus (E \cap L)$ — $\{a, b, d, e, h\}$; $\{f\}$

$(E \vartriangle D) \cap (E \vartriangle L)$; $(E \setminus \overline{D}) \vartriangle (E \setminus L)$ — $\{c, d\}$; $\{b, f\}$

$(\overline{L} \setminus \overline{D}) \vartriangle (\overline{L} \setminus \overline{E})$; $(D \cup E \cup L) \vartriangle (D \cap E \cap L)$ — $\{a, c\}$; $\{a, b, c, d, f, g\}$

$(D \setminus E) \cup (E \setminus L) \cup (L \setminus D)$; $(D \cap E) \vartriangle (E \cap L) \vartriangle (L \cap D)$ — $\{a, b, c, d, f, g\}$; $\{b, d, f\}$

$(E \setminus D) \cup (L \setminus E) \cup (D \setminus L)$; $(E \vartriangle D) \cap (D \vartriangle L) \cap (L \vartriangle E)$ — $\{a, b, c, d, f, g\}$; $\varnothing$

c) $U = \{x/ \text{ x es Vocal}\}$; $A = \{x/ \text{ x es Vocal de Pedro}\}$; $B = \{x/ \text{ x es vocal de Ramiro}\}$

$A \cap B \qquad A \setminus B \qquad (A \cap B) \cup A \qquad\qquad \{o\} \quad \{e\} \quad \{e, o\}$

$A \cup B \qquad A \triangle B \qquad (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{A} \qquad\qquad \{a, e, i, o\} \quad \{a, e, i\} \quad \{a, i, u\}$

2.22 Por las Definiciones, demostrar las Propiedades del Álgebra de Conjuntos:

$A \subset A \qquad A \cup U = U \qquad A \setminus U = \varnothing \qquad A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$

$U' = \varnothing \qquad A \cup \varnothing = A \qquad A \setminus \varnothing = A \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\varnothing' = U \qquad A \cap U = A \qquad A \setminus \overline{A} = A \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cup A = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \triangle \varnothing = A \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup \overline{A} = U \qquad A \triangle U = \overline{A} \qquad \overline{A} = \overline{B} \Rightarrow A = B$

2.23 Usando las Propiedades del Álgebra de Conjuntos, demostrar:

$A \cap B = A \setminus \overline{B} \qquad \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \cap B = A \cap B \qquad A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

$A \cap B = B \setminus \overline{A} \qquad A \cup (B \setminus A) = A \cup B \qquad A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \setminus B \qquad \overline{\overline{A} \cap B} \cap B = A \cap B \qquad (A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

$\overline{A \cup B} = \overline{B} \setminus A \qquad (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \qquad A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$

2.24 Indicar si las Proposiciones son Verdaderas (V) o Falsas (F) y el porqué:

$A \in A \qquad A \subset P_{(A)} \qquad \{A\} \subset P_{(A)}$ F; F; V

$A \subset A \qquad \{A\} \in A \qquad \{0\} = \varnothing$ V; F; F

$A \in P_{(A)} \qquad \{\bar{A}\} \in P_{(A)} \qquad \varnothing \subset a$ V; F; F

2.25 Determinar el Conjunto Potencia de los siguientes Conjuntos:

$A = \{3\} \qquad C = \{a, b\} \qquad E = \{1, \{1\}\} \qquad G = \{a, e, i, o, u\}$

$B = \{\varnothing\} \qquad D = \{a, \{\varnothing\}\} \qquad F = \{1, 3, 5, 7\} \qquad H = \{2, 4, 6, 4, 2\}$

2.26 Resolver los siguientes problemas de Número de elementos de Conjuntos.

a) El Conjunto A posee 7 Elementos; B posee 9; la Intersección entre A y B posee 3. Hallar ¿Cuantos Elementos pertenecen solo a A; Cuál es el Total? 4; 13

b) Un niño desayuna con solo café durante 12 días; 8 con café y leche; 18 con leche. ¿Cuantos días desayuna con solo leche; Cuantos con café; Cuantos toma una sola cosa; Cuantos no toma leche; Cuantos días toma café o leche? 10; 20; 22; 12; 30

c) En una encuesta política a 1000 personas por su preferencia sobre partidos de Derecha (D); Izquierda (I) ; Se obtuvieron los siguientes datos: 180 son solo de D; 240 son de I y D; 460 son de I. Calcular Cuantos son solo de I; Cuantos son de D; Cuantos no son de D ni I

220; 420; 360

d) Entre las 42 personas que miran los canales A o B; 30 prefieren ver A; 20 el B. Calcular cuantos observan los canales A y B; Cuantos solo A; Cuantos no gustan de A. 8; 22; 12

e) De un total de 24 fanáticos de la música, 12 gustan del artista A; 14 del artista B; 3 de ninguno de ellos. Calcular cuantos gustan de A y B; Cuantos de solo B; Cuantos no gustan de B. Cuantos gustan de un solo artista. 5; 9; 10; 16

f) De un grupo de 85 jóvenes a 30 les gusta bailar; a 10 bailar y cantar; a 40 solamente cantar. Calcular: A cuantos les gusta cantar; A cuantos les gusta solo bailar; A cuantos no les gusta ni bailar ni cantar. 50 ; 20 ; 15

g) Entre los concurrentes asiduos a un bar se obtienen los siguientes datos: 40 piden Cerveza (C); 70 piden Cerveza o Vino (V); 15 piden Cerveza y Vino. Calcular el Nº que pide solo Cerveza y el Nº que pide solo Vino. 25; 30

2.27 Resolver los siguientes problemas de conteo de Conjuntos, mediante Diagramas de Venn

a) Para realizar sus trabajos, en una biblioteca durante cierto día. 40 lectores piden el libro A; 30 el B; 35 el C; 10 los A y B; 7 los B y C; 9 los C y A; 4 los libros A y B y C. Calcular cuantos lectores piden solo el libro A; Cuantos A o B; Cuantos A o B pero no el C; Cuantos el A y C pero no B; Cuantos no piden el A; Cuantos un solo libro; Cuantos dos libros. Cuantos lectores piden los libros A o B o C. 25; 60; 48; 5; 43; 65; 14; 83

b) En una encuesta a 2000 personas, que escuchan Radio, se obtuvieron los datos siguientes sobre las radios: Metropolitana (M); Panamericana (P); Fides (F): 580 escuchan M; 840 escuchan P; 920 escuchan F; 260 escuchan M y P; 220 escuchan M y F; 300 escuchan P y F; 100 escuchan M y P y F. Calcular: El Nº que escucha solo M; El Nº que escucha P o M; El Nº que escucha P o F pero no M; El Nº que escucha M y P pero no F; El Nº que escucha una sola radio; El Nº que escucha dos radios; El Nº que no escucha M ni P ni F
200; 1160; 1080; 160; 1080; 480; 340

c) En un centro de salud se ha atendido a 270 niños. Se les aplicó la vacuna P a 100 niños; la vacuna Q a 85; La vacuna R a 90; Solamente la P a 45; La P y Q a 35; La Q y R a 15; La P y Q y R a 5. Calcular a cuantos se les aplicó solo la vacuna Q; A cuantos la P y R ; A cuantos la P o Q; A cuantos la P o Q pero no la R; A cuantos no se les aplicó la P; A cuantos solo una vacuna; A cuantos no se les aplicó ninguna vacuna.
40 ; 25 ; 150 ; 115 ; 170; 140 ; 65

d) De un grupo de 140 personas que acuden a un centro médico, que posee tres especialistas: un Cardiólogo (C), un Gastroenterólogo (G) y un Neumólogo (N), se sabe que: 40 consultaron al C; 15 al C y G; 13 al C y N; 45 al N; 12 al G y N; 10 al C y G y N; 35 a ninguno de los especialistas. Calcular: Cuantos consultaron al G; cuantos solo al G; Cuantos a un solo especialista; cuantos a dos especialistas; cuantos a C o N; cuantos a C o N pero no a G.
50 ; 33 ; 85 ; 10 ; 72 ; 55

e) De un grupo de Estudiantes que cursan: Álgebra (A); Botánica (B); Contabilidad (C). Se obtienen los siguientes datos: 70 cursan A; 60 cursan B; 80 cursan C; 30 cursan solo A; 30 cursan B y C; 20 cursan A y C; 5 cursan A y B y C. Calcular Nº que cursa: A y B; Nº que cursa solo B; Nº que cursa A o B; Nº que cursa A o B pero no C; Nº Total de Estudiantes.
25; 10; 105; 60; 140

f) En una encuesta a 54 electores sobre sus candidatos se determinó lo siguiente: 20 tienen preferencia por el candidato A; 28 por el B; 30 por el C; 9 por A y C; 10 por A y B; 12 por B y C. Calcular: Cuantos electores apoyan a los 3 candidatos; Cuantos apoyan solo a B.
7; 13

g) En un bar sirven hamburguesas (H), pizzas (P) y sandwichs (S), de los 300 clientes de un día, se sabe que: 95 piden H; 100 piden P; 120 piden S; 25 piden H y P; 45 piden P y S; 30 piden H y S; 75 no piden ninguna de las mencionadas. Calcular: Cuantos piden H y P y S; Cuantos solo H; Cuantos H y S; Cuantos H y S pero no P; Cuantos H o S; Cuantos H o S pero no P; Cuantos piden una sola cosa; Cuantos piden dos cosas.
10 ; 50 ; 30 ; 20 ; 185 ; 125 ; 145 ; 70

h) Un grupo de 70 personas ejecutan trabajos manuales, utilizando tres materiales: barro (B), madera (M) y cartulina (C). Se sabe que todos usan barro; 29 usan madera; 40 cartulina y 11 emplean los tres materiales. Calcular: Cuantos usan solo barro (B); Cuantos usan dos materiales.
(Se toma como Universo al Conjunto de los que usan B). 12; 47

III.- ÁLGEBRA BÁSICA

III.1 ÁLGEBRA

La palabra ÁLGEBRA proviene del árabe *al-gabr* que significa Ecuación, fue usada inicialmente por el matemático árabe Al-Jwarizmi.

El Álgebra es la parte de las Matemáticas, que estudia a las cantidades en su forma más general posible.

En Aritmética las cantidades se representan por números y éstos expresan valores fijos, en cambio en Álgebra para lograr la generalización, las cantidades se representan por letras, las cuales pueden representar cualquier valor que se les vaya a asignar.

- Los Símbolos que se usan en Álgebra son los números y las letras.
- Los Números se emplean para designar cantidades conocidas y determinadas.
- Las Letras se emplean para representar toda clase de cantidades, sean éstas conocidas o desconocidas

Usualmente para las cantidades conocidas, se emplean las primeras letras del Alfabeto: $a, b, c, ..$; Para las cantidades desconocidas o Incógnitas las últimas letras: ..., x, y, z. Para representar a Números Enteros se usa las letras: m, n. Para números constantes o conocidos se emplea: k, h

Los Signos que se emplean en Álgebra son los Signos de OPERACIÓN, AGRUPACIÓN y RELACIÓN.

A) SIGNOS DE OPERACIÓN

Los Signos de Operación, son Signos que se usan para indicar las Operaciones en Álgebra, son:

$+$	Suma o Adición	$-$	Resta o Sustracción
$\cdot$	Multiplicación o Producto	$\div$	División o Cociente
^{n}	Potencia: n o Potenciación	$\sqrt[n]{\ }$	Raíz: n o Radicación

B) SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Los Signos de Agrupación, sirven para indicar que todas las cantidades encerradas se deben considerar como una sola, éstos son:

( )	Paréntesis	[ ]	Corchetes
{ }	Llaves	$\overline{\quad}$	Barra

C) SIGNOS DE RELACIÓN

Los Signos de Relación, indican el Tipo de Relación entre dos cantidades, éstos son:

$=$ **Igual**	$x = y$	Se lee: x es igual a y
$\neq$ **Diferente**	$x \neq y$	Se lee: x es diferente de y
$>$ **Mayor**	$x > y$	Se lee: x es mayor que y
$<$ **Menor**	$x < y$	Se lee: x es menor que y
$\geq$ **Mayor o igual**	$x \geq y$	Se lee: x es mayor o igual que y
$\leq$ **Menor o igual**	$x \leq y$	Se lee: x es menor o igual que y
$\equiv$ **Idéntico**	$x \equiv y$	Se lee: x es idéntico a y

III.1.1 SISTEMA NUMÉRICO

Los Números que son objeto del estudio de las Matemáticas, tienen varias formas de agruparse según el criterio con que se los clasifique.

NÚMEROS NATURALES Son aquellos que permiten contar, se representan por $\mathbb{N}$

Son Números Naturales: 1 , 2 , 3 , ... , 9 , 10 , 11 , 12 , ...

EL CERO El Cero: 0 representa la ausencia de cantidad, es considerado un Número Neutro, no posee Signo Positivo ni Negativo. Si se considera como un Número par.

NÚMEROS POSITIVOS Son aquellos Números que poseen el Signo: *Mas* (+), se representan por: $\mathbb{R}^{+}$ (Si un Número no lleva Signo, se asume que posee el Signo : +)

Son Números Positivos: $3 = +3$, 7 , 18 , 3/4 , 0.43

NÚMEROS NEGATIVOS Son aquellos Números, que poseen el signo: *Menos* (-), se representan por $\mathbb{R}^{-}$, vienen de la necesidad de efectuar Restas en todos los casos, como ser: $3 - 7 = -4$

Son Números Negativos: -5 , -12 , -0.04 , -6/7

NÚMEROS ENTEROS Es el Conjunto de Números constituidos por todos los Números Naturales, el Cero y los Números Naturales con Signo negativo. Se representan por: $\boldsymbol{Z}$

Son Números Enteros: ... , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 ....

NÚMEROS DECIMALES Es el Conjunto de Números que no son Enteros, provienen de la necesidad de efectuar la división en todos los casos.

Pueden ser Decimales Finitos como: 0.7 ; 2.375 ; 0.0025
Pueden ser Decimales Infinitos como: 0.7532145... ; 2.37589... ; 3.141592...
Pueden ser Decimales Periódicos como: 0.3333... ; 5.121212... ; 25.3454545...

NÚMEROS RACIONALES Es el Conjunto de Números que pueden expresarse como la división de dos Números enteros (Excepto el caso de que se divida entre cero), se representan por: $\boldsymbol{Q}$

Los Números Naturales, Enteros, Decimales finitos, Decimales Periódicos son Números Racionales

Son Números Racionales: $1.5 = 3 \div 2$, $0.142 = 1 \div 7$, $6 = 6 \div 1$, $-2 = -4 \div 2$, $0 = 0 \div 3$

Para expresar un número decimal en su forma racional ver P3.5

NÚMEROS IRRACIONALES Es el Conjunto de Números que no pueden expresarse como el cociente de Números enteros, son Decimales infinitos no periódicos. Se representan por $\boldsymbol{Q'}$

Son Números Irracionales: $\sqrt{2} = 1.41421356...$, $\sqrt[3]{7} = 1.91293118...$, $\pi = 3.14159265...$

NÚMEROS REALES Es la Unión de los Conjuntos de Números Racionales e Irracionales, se representan por: $\mathbb{R}$. Por tanto se dice que los Números Reales contienen a los Positivos, Cero y Negativos. A los Enteros y Fraccionarios.

NUMEROS COMPLEJOS Están constituidos por los Números Reales e Imaginarios (Ver Cap XII). Es el mayor Conjunto de Números.

Otras Clases de Números son: **NÚMEROS PRIMOS** Un Número natural se llama Primo, si y solo si, no tiene por factor a ningún Número natural, excepto la unidad o el mismo. (Del Número natural *m*, se dice que *n* es un factor, cuando existe otro Número natural *x*, tal que $m = nx$) . Por conveniencia no se considera al 1 como Primo. Son Números Primos: 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , ...

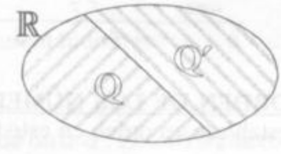
NÚMEROS NATURALES DE PEANO Son los mismos Números Naturales, a los que además se agrega el cero, se representan por $\mathbb{N}$p

Son Números Naturales de Peano: 0 , 1 , 2 , 3 , ... , 9 , 10 , 11 , 12 , ...

III.2 LOS NÚMEROS REALES

Dentro del estudio del Álgebra, toda vez que se menciona a un Número, generalmente se trata de un Número Real.

El Conjunto de los Números Reales contiene a los Números *Racionales* e *Irracionales*, por tanto contiene a los Números *Positivos*, al *Cero* y a los *Negativos*, quedando así incluidos los *Números Enteros* y *Fraccionarios*, los *Naturales*, etc.



El Conjunto de los Números Reales, se establece a partir de la aplicación progresiva de otros Conjuntos mas simples. Estrictamente este Conjunto es una Estructura Algebraica, llamada Campo, con Propiedades particulares que lo caracterizan.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

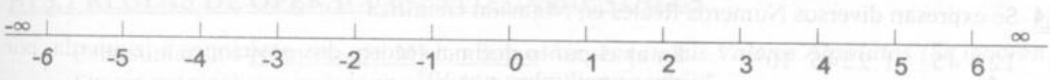
Si: a ; b ; c son Números Reales, entonces se verifican las siguientes Propiedades:

P1	$a + b = b + a$	Propiedad Conmutativa de la Suma
P2	$(a + b) + c = a + (b + c)$	Propiedad Asociativa de la Suma
P3	$a + 0 = a$	Existencia del Neutro de la Suma (El Cero)
P4	$a + (-a) = 0$	Existencia del Opuesto
P5	$a \cdot b = b \cdot a$	Propiedad Conmutativa del Producto
P6	$(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$	Propiedad Asociativa del Producto
P7	$a \cdot 1 = a$	Existencia del Neutro del Producto (El uno)
P8	$a(a^{-1}) = 1$	Existencia del Inverso ($a \neq 0$)
P9	$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	Distributividad del Producto
P10	$a > 0 ; a = 0 ; a < 0$	Tricotomía Un Número Real es Mayor o Igual o Menor a Cero (No al mismo tiempo) por tanto o es Positivo o es Cero o es Negativo.

Un estudio formal de los Números Reales llama a estas Propiedades **AXIOMAS**, desarrollando toda su Teoría a partir de los mismos.

III.2.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS REALES

Los Números Reales se representan gráficamente como Puntos de una Recta, llamada RECTA REAL. Se elige un Punto de una Recta, que representará al cero (0), este Punto servirá como referencia.



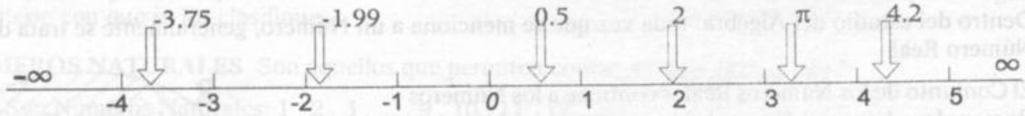
Los Enteros Positivos: 1, 2, 3, ... se ubicarán a la derecha del Cero con una Escala adecuada, que coincida con su valor. Los Enteros Negativos: -1, -2, -3, ... se ubicarán a la izquierda.

Los restantes Números Reales se asocian de manera equivalente, con los infinitos Puntos de la Recta.

LA RECTA REAL es la asociación entre Puntos de una Recta con los Números Reales, donde a cada punto le corresponde un Número y a la vez, a cada Número le corresponde un Punto.

Sobre la Recta Real se encuentran todos los Números Reales.

Ej 3.1 La Gráfica muestra la posición de los Números Reales: -3.75 ; -1.99 ; 0.5 ; 2 ; π = 3.14 ; 4.2 sobre la Recta Real.



ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES La posición de los Números Reales sobre la Recta Real, establece un orden en este Conjunto de Números.

Si sobre la Recta Real el Punto A se encuentra a la derecha del Punto B, entonces el Número que corresponde a A es mayor que el que corresponde a B, esto equivale a decir que B es menor que A

Mediante los Signos de Relación es posible expresar el orden que guardan entre sí los Números Reales.

Ej 3.2 Mediante Signos de Relación (De Desigualdad) se expresa el Orden de los Números Reales:
5 está a la Derecha de 2 entonces: $5 > 2$ (O también $2 < 5$)
-3 está a la Izquierda de 4 entonces: $-3 < 4$ (O también: $4 > -3$)

III.2.2 EL VALOR ABSOLUTO

El Valor Absoluto de un Número Real es su correspondiente valor, ignorando el Signo que lo afecta. El Valor Absoluto del Número Real: a se representa por: $|a|$

Ej 3.3 Se determinan los Valores Absolutos de los siguientes Números Reales:

$|7| = 7$ $\quad |3.75| = 3.75$

$|0| = 0$ $\quad |-\frac{6}{7}| = \frac{6}{7}$

$|-2| = 2$

El Positivo se queda como Positivo, el Negativo cambia a Positivo. El Valor Absoluto de todo Número Real será siempre un Número Positivo.

Note que el Valor Absoluto, solo modifica el Signo, sin modificar el valor de tal Número.

III.2.3 NOTACIÓN CIENTÍFICA

Otro modo de expresar a los Números Reales es la Notación científica: Consiste en escribir al Número como un entero seguido por todos sus decimales y multiplicado por una potencia de 10.

En la práctica se busca que quede un dígito diferente de cero, desplazando el punto decimal. Si es hacia izquierda se multiplica por una potencia de 10 igual al número de dígitos desplazados. Si es hacia derecha se multiplica por una potencia de 10 negativa.

Ej 3.4 Se expresan diversos Números Reales en Notación científica

a) $\underset{\leftarrow}{123.45} = 1.2345 \cdot 10^2$ En a) el punto decimal recorre dos posiciones a izquierda, por ello se multiplica por 10^2

b) $\underset{\rightarrow}{0.000956} = 9.56 \cdot 10^{-4}$ En b) para llevar el punto decimal tras el primer dígito no cero, se recorren 4 posiciones a derecha por ello se multiplica por 10^{-4}

c) $\underset{\leftarrow}{2011} = 2.011 \cdot 10^3$ En c) se asume que el punto decimal se encuentra al final del número, se recorre a izquierda 3 dígitos, se multiplica por 10^3

d) $\underset{\leftarrow}{-35.74} = -3.574 \cdot 10^1$ En d) se procede igual que en los números positivos.

e) $\underset{\rightarrow}{-0.000008} = -8 \cdot 10^{-6}$ En e) copiando el signo se lleva el punto decimal tras el único dígito 6 posiciones a derecha, por ello se multiplica por 10^{-6}

III.3 OPERACIONES FUNDAMENTALES

Las cuatro Operaciones Fundamentales de la Aritmética y el Álgebra son: La Suma, La Resta, La Multiplicación y la División.

LA SUMA La Suma o Adición de dos Números: a, b es otro Número c, representándose por: $a + b = c$

- Los Números a, b se llaman Sumandos; c es la Suma.

LA RESTA La Resta o Sustracción o Diferencia de un Número: b respecto de otro: a ; es otro Número c que se representa por: $a - b = c$

- El Número a es el Minuendo, b es el Sustraendo, c es la Resta o Diferencia.

La Resta es un caso particular de la Suma, ya que la Diferencia: $a - b$ es un Número c tal que: c sumado con b proporciona el Número a.

LA MULTIPLICACIÓN La Multiplicación o Producto de dos Números: a, b es otro Número c que se representa por: $a \cdot b = c$; Suele representarse también como: $ab = c$; $(a)(b) = c$

- Los Números: a, b se llaman Factores, c es el Producto.

LA DIVISIÓN La División o Cociente de un Número: a entre otro: b es otro Número c, se representa por: $a \div b = c$; También se representa como: $a/b = c$; $\frac{a}{b} = c$

- El Número a se llama el Dividendo, b es el Divisor, c es el Cociente.

La División entre el Cero (0) es una Operación que carece de sentido, se dice que: $\frac{a}{0}$ no existe.

La Expresión: $\frac{a}{b}$ también se llama Fracción, entonces: a es el Numerador, b es el Denominador.

La División es un caso particular de la Multiplicación, ya que el Cociente: a/b es un Número tal que multiplicado con b determina el Número a

LA REGLA DE LOS SIGNOS

Se llama Regla de los Signos, tanto para el Producto como el Cociente a las Operaciones entre Signos:

$$(+)(+) = (+) \qquad (+)(-) = (-) \qquad (-)(+) = (-) \qquad (-)(-) = (+)$$

$$\frac{(+)}{(+)} = (+) \qquad \frac{(+)}{(-)} = (-) \qquad \frac{(-)}{(+)} = (-) \qquad \frac{(-)}{(-)} = (+)$$

III.3.1 REGLAS DE OPERACIONES FUNDAMENTALES

- Para sumar dos Números del Mismo Signo: *"Se suman sus Valores Absolutos (Se ignoran sus Signos propios) y se antepone al resultado el Signo común"*.

Ej 3.5 Se suman Números del mismo Signo:

$3 + 8 = 11$ El Signo común es: + , entonces el Signo del Resultado es: +

$(-2) + (-5) = -7$ El Signo común es: -

- Para sumar dos Números de Signos Diferentes: *"Se efectúa la Diferencia entre sus Valores Absolutos y se antepone al resultado el Signo del Sumando de Mayor Valor Absoluto"*.

Ej 3.6 Se suman Números de Diferente Signo:

$9 + (-4) = 5$	El Sumando de mayor Valor Absoluto es 9, tiene Signo: + , Por tanto el resultado tiene el Signo: + (Se halla la Diferencia entre los Números: 9 ; 4)
$(-7) + 1 = -6$	El de mayor Valor Absoluto tiene Signo: -
$(-6) + 8 = 2$	El de mayor Valor Absoluto tiene Signo: +
$2 + (-5) = -3$	El de mayor Valor Absoluto tiene Signo: -

❑ Para restar un Número *b* de otro Número *a*: *"Se cambia el Signo de: b , luego se suman entre sí, aplicando las anteriores Reglas de la Suma"*.

Ej 3.7 Se restan Números de Iguales y diferentes Signos entre sí:

$8 - 5 = 8 + (-5) = 3$ Se usa la Regla de los Signos.

$3 - 7 = 3 + (-7) = -4$

$(-16) - 9 = (-16) + (-9) = -25$ Así se observa la Resta como una Suma entre dos Números de igual o diferente Signo.

$(-15) - (-8) = (-15) + 8 = -7$ Se aplican las Reglas de Operación de la Suma.

❑ Para multiplicar o dividir dos Números del mismo Signo: *"Se multiplican o dividen sus Valores Absolutos, anteponiendo al resultado el Signo: + (Por la Regla de los Signos)"*

Ej 3.8 Se multiplican y dividen Números del mismo Signo:

$(3)(7) = 21$

$(-2)(-5) = 10$

Los Signos de los Factores son iguales: +, + (Si no se indica, se asume que el Signo es +)

$6 \div 2 = 3$

$(-24) \div (-3) = 8$

Las Operaciones de Multiplicación o División se realizan ignorando los correspondientes Signos.

❑ Para multiplicar o dividir dos Números de Signos Diferentes: *"Se multiplican o dividen sus Valores Absolutos y se antepone al resultado el Signo: - (Por la Regla de los Signos)"*

Ej 3.9 Se multiplican y dividen Números de Signos Diferentes:

$(-2)(7) = -14$

$(8)(-3) = -24$

Son Números de Signos diferentes, sus Resultados poseen el Signo Negativo

$(-8) \div 4 = -2$

$35 \div (-7) = -5$

Las Operaciones de Producto y Cociente se efectúan ignorando el Signo, el que se colocará al final de acuerdo a las Reglas de los Signos.

3.1 Hallar la Suma (S), Resta (R), Multiplicación (M) y División (D) entre los siguientes Números:

a) $3 \ ; \ 12$

$S = 3 + 12 = 15$

$R = 3 - 12 = -9$

$M = 3 \cdot 12 = 36$

$D = 3/12 = 0.25$

b) $12 \ ; \ -6$

$S = 12 + (-6) = 6$

$R = 12 - (-6) = 18$

$M = (12)(-6) = -72$

$D = 12/-6 = -2$

En a), b) se efectúan las Operaciones de acuerdo a las reglas antes indicadas.

c) $-18 \ ; \ 3$

$S = -18 + 3 = -15$

$R = -18 - 3 = -21$

$M = (-18)(3) = -54$

$D = -18/3 = -6$

d) $6 \ ; \ 0$

$S = 6 + 0 = 6$

$R = 6 - 0 = 6$

$M = 6 \cdot 0 = 0$

$D = 6/0 = ??$

En d), la División no es posible, ya que si el Resultado es *x* significa:

$$\frac{6}{0} = x \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 6 = 0 \cdot x \\ 6 = 0 \quad \text{(Absurdo)} \end{array}$$

e) $0 \ ; \ 5$
$S = 0 + 5 = 5$
$R = 0 - 5 = -5$
$M = 0 \cdot 5 = 0$
$D = 0/5 = 0$

f) $0 \ ; \ 0$
$S = 0 + 0 = 0$
$R = 0 - 0 = 0$
$M = 0 \cdot 0 = 0$
$D = 0/0 = ??$

En f), la División no es posible, si el resultado fuera x:

$$\frac{0}{0} = x \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= 0 \cdot x \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

El resultado seria cualquier número x

> Siempre se debe evitar la división entre cero: $a / 0$, se la llama Operación Indefinida. En cambio la operación de 0/0 se llama Operación Indeterminada.

3.2 Hallar la Suma (S), Resta (R), Multiplicación (M) y División (D) entre los Números:

a) $8 \ ; \ 24 \ ; \ 8$
$S = 24 + 8 = 32$
$R = 24 - 8 = 16$
$M = 24 \cdot 8 = 192$
$D = 24/8 = 3$

b) $8 \ ; \ 24$
$S = 8 + 24 = 32$
$R = 8 - 24 = -16$
$M = 8 \cdot 24 = 192$
$D = 8/24 = 0.33$

Comparando a) , b) se observa:
La Suma es una Operación Conmutativa, a su resultado no le afecta el orden de los Sumandos. La Resta no es Conmutativa
La Multiplicación es Conmutativa.
La División no es Conmutativa.

3.3 Hallar la Suma (S), Resta (R), Multiplicación (M) y División (D) entre los siguientes tres Números:

$9 \ ; \ 6 \ ; \ 4$	La Suma es Asociativa. La operación es realizable
$S = 9 + (6 + 4) = (9 + 6) + 4 = 19$	agrupando de distinto modo.
$R = ??$	La Resta no es Asociativa, operación no realizable.
$M = 9(6 \cdot 4) = (9 \cdot 6)4 = 216$	La Multiplicación es Asociativa.
$D = ??$	La División no es Asociativa, operación no realizable.

PRIORIDAD DE OPERACIONES En las Operaciones Matemáticas se adopta el convenio de efectuar previamente las Operaciones de Multiplicación y División, y posteriormente las de Suma y Resta.

Ej 3.10 Se efectúan las siguientes Operaciones combinadas entre Números:

$2 + 4 \cdot 7 = 2 + 28 = 30$	Previamente el Producto, luego la Suma
$17 - 12 \div 3 = 17 - 4 = 13$	Previamente el Cociente, luego la Resta
$12 \cdot 3 + 24 \div 8 = 36 + 3 = 39$	Previamente el Producto y Cociente. luego la Suma.
$12 \cdot 3 \div 5 = 7.2$	Usando cualquier orden se obtiene mismo resultado.

III.3.2 USO DE LOS SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Los Signos de Agrupación permiten afectar a toda un Conjunto de Números o letras por determinada Operación o Signo.

Si un Signo precede a un Paréntesis (O a cualquier otro Signo de Agrupación), afecta a todo lo encerrado por los Paréntesis, debiendo emplearse la Ley de los Signos, para asignar Signos al interior. Así por ejemplo:

$$+(a - b) = +a - b = a - b$$
$$-(a - b) = -a + b$$

Las Operaciones indicadas dentro de Signos de Agrupación son prioritarias a cualquier otra, por tanto deben realizarse previamente.

Usualmente se usan antes los Paréntesis, luego los Corchetes, luego las Llaves y finalmente la Barra, sin embargo este orden no es obligatorio. También es posible repetir alguno de estos Signos.

Para simplificar Expresiones con Signos de Agrupación, existen dos modos:

- Es posible simplificar de dentro hacia afuera, consiste en efectuar previamente las Operaciones más internas o de adentro de los Signos de Agrupación, luego paulatinamente se va simplificando
- Es también posible simplificar de afuera hacia adentro, consiste en previamente asignar los Signos de todos los Números, para luego recién efectuar las Operaciones indicadas.

Ej 3.11 Se efectúan Operaciones, cuando se tienen Signos de Agrupación: $3 - \{2 - [6 - (-1)]\}$

a) $3 - \{2 - [6 - (-1)]\} = 3 - \{2 - [6 + 1]\}$
$= 3 - \{2 - 7\}$
$= 3 - \{-5\}$
$= 3 + 5$
$= 8$

Se simplifica de dentro hacia afuera:

Las Operaciones dentro de los Signos de Agrupación (Primero los paréntesis, luego los corchetes y las Llaves) se efectúan en forma previa.

Aplicando Reglas de Operaciones básicas y Leyes de los Signos.

b) $3 - \{2 - [6 - (-1)]\} = 3 - 2 + [6 - (-1)]$
$= 3 - 2 + 6 - (-1)$
$= 3 - 2 + 6 + 1$
$= 8$

Se simplifica de afuera hacia adentro, previamente se asigna Signos por Leyes de Signos.

Cualquiera de los modos señalados, se pueden emplear para efectuar la simplificación de Operaciones indicadas.

3.4 Realizar las siguientes Operaciones, indicadas entre Signos de Agrupación.

a) $5 - 8 + \{5 - [7 - (-4)]\}$
$= 5 - \overline{8 + \{5 - [7 + 4]\}}$
$= 5 - \overline{8 + \{5 - 11\}}$
$= 5 - \overline{8 - 6}$
$= 5 - \overline{2}$
$= 5 - 2 = 3$

b) $4 - \{3 - [6 + (-8) - 1]\}$
$= 4 - \{3 - [6 - 8 - 1]\}$
$= 4 - \{3 - [-3]\}$
$= 4 - \{3 + 3\}$
$= 4 - \{6\}$
$= 4 - 6 = -2$

c) $2 - \{1 - [6 - (-5)] + [3 + (-7)]\}$
$= 2 - \{1 - [6 + 5] + [3 - 7]\}$
$= 2 - \{1 - [11] + [-4]\}$
$= 2 - \{1 - 11 - 4\}$
$= 2 - \{-14\}$
$= 2 + 14$
$= 16$

d) $\overline{3 + \{4 - [6 - (-8)]\}} + \{7 - [2 - (6 - \overline{3 - 8})]\}$
$= \overline{3 + \{4 - [6 + 8]\}} + \{7 - [2 - (6 - \overline{-5})]\}$
$= \overline{3 + \{4 - [14]\}} + \{7 - [2 - (6 + 5)]\}$
$= \overline{3 + \{4 - 14\}} + \{7 - [2 - 11]\}$
$= \overline{3 + \{-10\}} + \{7 - [-9]\}$
$= \overline{3 - 10} + \{7 + 9\}$
$= \overline{-7} + \{16\} = -7 + 16 = 9$

III.3.3 OPERACIONES CON FRACCIONES

Se llama Fracción a la División indicada: $\dfrac{a}{b}$ a: es el Numerador; b: es el Denominador

Un Número Entero, se puede considerar como una Fracción de Denominador: 1, así: $7 = \dfrac{7}{1}$

Si uno de los signos (Del Numerador o del Denominador) es negativo, éste será el Signo de la Fracción (Por la Ley de los Signos)

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Para trabajar con Fracciones, se debe procurar que la Fracción esté simplificada a su mínima expresión.

Para simplificar Fracciones, se aplica la siguiente Regla: *"El valor de una Fracción no se altera si se multiplican o dividen tanto el Numerador como el Denominador, por un mismo número, diferente de Cero"*.

Se elige una multiplicación o división, de acuerdo a lo que se precise para determinada aplicación.

Ej 3.12 Se efectúa la misma Operación sobre el Numerador y Denominador:

$\frac{2}{5} = \frac{2\cdot 4}{5\cdot 4} = \frac{8}{20}$ Se multiplica por 4, la Fracción no cambia, puede verificarse por simple división.

$\frac{12}{21} = \frac{12\div 3}{21\div 3} = \frac{4}{7}$ Si se divide entre 3, la Fracción no cambia. Si bien se presentan valores diferentes para representar, el valor final es el mismo.

Para realizar ciertas Operaciones, es necesario cambiar los Denominadores, entonces para que la Fracción posea cierto Denominador requerido, será suficiente con multiplicar o dividir tanto su Numerador como Denominador, por un mismo Número.

Ej 3.13 Si se precisa que la Fracción: 5/3 posea el Denominador: 6 entonces:

$\frac{5}{3} = \frac{5\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{10}{6}$ Se multiplica tanto el Numerador como Denominador por 2, la Fracción no cambia, es la misma.

Ej 3.14 Si se precisa que una Fracción presente el menor Denominador posible:

$\frac{18}{10} = \frac{18\div 2}{10\div 2} = \frac{9}{5}$ Tanto el Numerador como Denominador, se dividen entre: 2 (La Fracción no cambia si se divide entre la misma cantidad)

Al sumar una misma cantidad, tanto al numerador como denominador, la Fracción cambia, es decir su valor no es igual al original. $\frac{a}{b} \neq \frac{a+x}{b+x}$

LA SUMA

La Suma de dos Fracciones del mismo Denominador (O Denominador común) es igual a otra Fracción que tiene por Numerador a la Suma de los Numeradores y por Denominador, el Denominador común.

La Suma de dos Fracciones de diferente Denominador, se efectúa como en el anterior caso, luego de transformar los Denominadores a un Denominador común.

Ej3.15 a) $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2+4}{5} = \frac{6}{5}$ Se efectúa la Suma de Fracciones de igual Denominador

b) $\frac{5}{6} + \frac{11}{6} = \frac{5+11}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

En las Fracciones del mismo Denominador, se copia éste y se suman sus Numeradores. Toda vez que una Fracción pueda simplificarse, hay que simplificarla.

Ej 3.16 a) $\frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{3\cdot 2}{2\cdot 2} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4} + \frac{5}{4} = \frac{6+5}{4} = \frac{11}{4}$ Se efectúa la Suma de Fracciones de diferente Denominador:

b) $\frac{5}{3} + \frac{7}{2} = \frac{5\cdot 2}{3\cdot 2} + \frac{7\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{10}{6} + \frac{21}{6} = \frac{10+21}{6} = \frac{31}{6}$ Se convierten los Denominadores a uno común.

c) $5 + \frac{2}{3} = \frac{5}{1} + \frac{2}{3} = \frac{5\cdot 3}{1\cdot 3} + \frac{2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{15+2}{3} = \frac{17}{3}$ Se considera que un Entero es una Fracción de Denominador 1

LA RESTA

La Resta de dos Fracciones del mismo Denominador (O Denominador común) es igual a otra Fracción que tiene por Numerador a la Resta de los Numeradores y por Denominador, el Denominador común.

La Resta de dos Fracciones de diferente Denominador, se efectúa como en el anterior caso, luego de transformar los Denominadores a un Denominador común.

Ej 3.17 Se efectúan Operaciones de Resta

a) $\frac{3}{7} - \frac{5}{7} = \frac{3-5}{7} = \frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}$

b) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5-4}{6} = \frac{1}{6}$

c) $\frac{5}{4} - \frac{3}{7} = \frac{5\cdot 7}{4\cdot 7} - \frac{3\cdot 4}{7\cdot 4} = \frac{35}{28} - \frac{12}{28} = \frac{35-12}{28} = \frac{23}{28}$

d) $\frac{2}{9} - 1 = \frac{2}{9} - \frac{1}{1} = \frac{2}{9} - \frac{1\cdot 9}{1\cdot 9} = \frac{2}{9} - \frac{9}{9} = \frac{2-9}{9} = \frac{-7}{9} = -\frac{7}{9}$

El Denominador es el mismo, se lo copia y se restan sus Numeradores.

En los demás casos, se convierte antes su Denominador a uno común.

En el último caso e) se efectúa la Suma y Resta de Fracciones.

e) $\frac{7}{2} + \frac{3}{5} - \frac{3}{2} = \frac{7\cdot 5}{2\cdot 5} + \frac{3\cdot 5}{5\cdot 2} - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 5} = \frac{35}{10} + \frac{6}{10} - \frac{15}{10} = \frac{35+6-15}{10} = \frac{26}{10} = \frac{26\div 2}{10\div 2} = \frac{13}{5}$

LA MULTIPLICACIÓN

La Multiplicación de dos Fracciones determina otra Fracción, cuyo Numerador es el Producto de Numeradores y cuyo Denominador es el Producto de Denominadores.

Ej 3.18 Se efectúa la Multiplicación de dos Fracciones:

$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 7} = \frac{10}{21}$

$5\cdot\frac{4}{9} = \frac{5}{1}\cdot\frac{4}{9} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 9} = \frac{20}{9}$

$\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 5} = \frac{20}{10} = 2$

Se multiplican los Numeradores y Denominadores entre sí.

En el segundo caso, se asume que el Número: 5 es como la Fracción: 5/1

En el último caso, luego de efectuar la Multiplicación, se simplifica la Fracción.

LA DIVISIÓN

La División de dos Fracciones se determina multiplicando la 1^{era} Fracción por el Recíproco de la 2da (Se obtiene el Recíproco de una Fracción, cuando se toma Su Denominador como Numerador y su Numerador como Denominador, así el Recíproco de: 3/8 es: 8/3)

Ej 3.19 $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2\cdot 4}{5\cdot 3} = \frac{8}{15}$

$\frac{3}{7} \div (-\frac{2}{9}) = \frac{3}{7}\cdot(-\frac{9}{2}) = -\frac{3\cdot 9}{7\cdot 2} = -\frac{27}{14}$

$\frac{3}{8} \div 5 = \frac{3}{8} \div \frac{5}{1} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3\cdot 1}{8\cdot 5} = \frac{3}{40}$

Se efectúa la División entre dos Fracciones:

Para dividir se invierte la 2da Fracción o Divisor (Así se obtiene el Recíproco)

Luego se multiplican las Fracciones. (Por la Reglas de Multiplicación de Fracciones).

3.6 Efectuar la Suma (S), Resta (R), Multiplicación (M) y División (D) entre las Fracciones:

a) $\frac{12}{7};\ \frac{1}{9}$

$$S = \frac{12}{7} + \frac{1}{9} = \frac{12\cdot 9}{7\cdot 9} + \frac{1\cdot 7}{9\cdot 7} = \frac{108}{63} + \frac{7}{63} = \frac{108+7}{63} = \frac{115}{63}$$

$$R = \frac{12}{7} - \frac{1}{9} = \frac{12\cdot 9}{7\cdot 9} - \frac{1\cdot 7}{9\cdot 7} = \frac{108}{63} - \frac{7}{63} = \frac{108-7}{63} = \frac{101}{63}$$

$$M = \frac{12}{7}\cdot\frac{1}{9} = \frac{12\cdot 1}{7\cdot 9} = \frac{12}{63}$$

$$D = \frac{12}{7} \div \frac{1}{9} = \frac{12}{7}\cdot\frac{9}{1} = \frac{12\cdot 9}{7\cdot 1} = \frac{108}{7}$$

b) $$\frac{3-\frac{5}{4}}{7-\frac{6}{2+\frac{8}{9}}} \qquad \frac{3-\frac{5}{4}}{7-\frac{6}{2+\frac{8}{9}}} = \frac{\frac{3}{1}-\frac{5}{4}}{7-\frac{6}{\frac{2}{1}+\frac{8}{9}}} = \frac{\frac{12-5}{4}}{7-\frac{6}{\frac{18+8}{9}}} = \frac{\frac{7}{4}}{7-\frac{6}{\frac{26}{9}}} = \frac{\frac{7}{4}}{7-\frac{\frac{6}{1}}{\frac{26}{9}}}$$

$$= \frac{\frac{7}{4}}{7-\frac{54}{26}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{1}-\frac{27}{13}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{91-27}{13}} = \frac{\cdot\frac{7}{4}}{\frac{64}{13}} = \frac{91}{256}$$

Cuando un Entero suma a una Fracción es incorrecto asumir que suma tanto al Numerador como Denominador. Lo mismo para la multiplicación. $\quad a + \frac{b}{c} \neq \frac{a+b}{a+c} \qquad a\cdot\frac{b}{c} \neq \frac{a\,b}{a\,c}$

III.3.4 NÚMEROS RACIONALES ($\mathbb{Q}$)

Son Números Racionales, aquellos que pueden expresarse como un cociente de dos Números enteros.

Obviamente si tal modo de expresión no es posible se tiene a los Números Irracionales ($\mathbb{Q}'$)

Ej 3.12 Se expresan algunos Números Racionales

a) $5 \Rightarrow 5 = \frac{5}{1}$ — Un Entero puede escribirse como tal Entero dividido entre 1, satisfaciendo así la definición de Número Racional

b) $0.25 \Rightarrow 0.25 = \frac{1}{4}$ — El 0.25 es un Decimal finito, es decir tiene un límitado número de decimales, se expresa por un simple cociente de Enteros.

c) $0.333... \Rightarrow 0.333... = \frac{1}{3}$ — El 0.333... Es un Decimal infinito, se expresa como un cociente de Enteros.

Los Números Decimales pueden ser:

Decimales Finitos, cuando el número de sus decimales es limitado. Por Ejemplo 0.25

Decimales Infinitos, cuando el número de sus decimales es ilimitado. Por Ejemplo 0.333...

A su vez los Decimales Infinitos pueden ser:

Periódicos, cuando cada cierto número de decimales éstos se repiten. Estos son Números Racionales. Por Ejemplo: 0.333... ; 5.272727...

Aperiódicos, cuando no se registra reiteración de las cifras decimales. Éstos son Números Irracionales. Por Ejemplo: $\pi = 3.14159265...$; $\sqrt{2} = 1.41421356...$

3.5 Convertir los siguientes Números Decimales a su forma racional:

a) 0.25

$$0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Se llama Forma racional a la expresión de un Número decimal, como el cociente de dos enteros.

Cuando es un decimal no periódico, se expresa como entero dividido entre una potencia de 10 igual a su número de decimales.

b) 3.745

$$3.745 = \frac{3745}{1000} = \frac{749}{200}$$

En el inciso a) por la presencia de dos decimales puede escribirse como dividido entre 100, para luego simplificar.

En el b) la presencia de tres decimales puede escribirse como dividido entre 1000, para luego simplificar (Quintas partes).

c) $0.3333... = 0.\overline{3}$

$$a = 0.3333...$$
$$\begin{array}{r} 10a = 3.333... \\ - \quad a = 0.3333... \\ \hline 9a = 3.000... \end{array}$$
$$\Rightarrow a = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Número Decimal Periódico, de periodo 1. Llamando al número como a (Los infinitos 3 se abrevian por: $\overline{3}$)

Multiplicando por 10 (Por una potencia de 10 igual a su periodo), restando luego el mismo número a. Todos los decimales se anulan

Despejando y simplificando (Sacando terceras partes). Queda así el decimal periódico, expresado en forma racional.

d) $5.272727... = 5.\overline{27}$

$$a = 5.272727...$$
$$\begin{array}{r} 100a = 527.2727... \\ - \quad a = 5.272727... \\ \hline 99a = 522.000... \end{array}$$
$$\Rightarrow a = \frac{522}{99} = \frac{58}{11}$$

e) $2.3145145... = 2.3\overline{145}$

$$a = 2.3145145...$$
$$\begin{array}{r} 10000a = 23145.145... \\ - \quad 10a = 23.145145... \\ \hline 9990a = 23122.000... \end{array}$$
$$\Rightarrow a = \frac{23122}{9990} = \frac{11561}{4995}$$

En d) el periodo es 2, se multiplica por $10^2 = 100$, luego restando, simplificando

En e) el periodo es 3 pero se multiplica por $10^4 = 10000$, por el decimal adicional que no es parte del periodo.

III.4 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una Expresión Algebraica es un Conjunto de Números y letras unidas entre sí por los Signos de Operación de: Suma, Resta, Producto, Potenciación y Radicación.

Ej 3.20 Se escriben las siguientes Expresiones Algebraicas:

$$3a^5 \quad ; \quad x^2 - 5xy + y^4 \quad ; \quad -7$$
$$a - 1 \quad ; \quad \frac{3x^7 - 2y^9}{x + y} \quad ; \quad \frac{p}{2} \quad ; \quad \sqrt{m + n}$$

Todos estas reuniones de letras números y símbolos de Operación, constituyen Expresiones Algebraicas.

III.4.1 TÉRMINOS ALGEBRAICOS

Son Expresiones Algebraicas, que contienen solo a los Signos de Operación de: Producto, Cociente, Potencia y Raíz o Radical.

Por tanto un Término Algebraico, es parte de una Expresión Algebraica (La Expresión Algebraica contiene a uno o varios Términos Algebraicos)

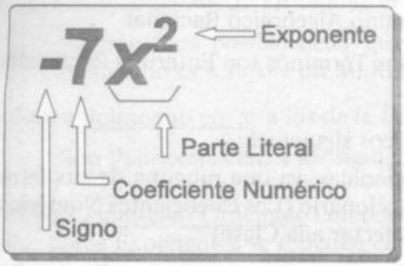
Ej 3.21

$$2x \quad ; \quad 5a^2b^4 \quad ; \quad \frac{8x^3\sqrt{y}}{z}$$
$$3x + 2y \quad ; \quad x^2 - 7xy + y^2$$

Los tres Primeros, son Términos Algebraicos.

Estos dos últimos no son Términos Algebraicos, ya que contienen Operaciones de Suma y Resta.

Todos los Términos Algebraicos contienen las siguientes partes:



El SIGNO indica la Naturaleza Positiva o Negativa del Coeficiente Numérico, si no se indica se asume que es Positivo (Signo +)

El EXPONENTE es el Número que se coloca superiormente y a la derecha de un Número o letra, que se llamará Base. Si el Exponente es Entero y Positivo indicará las veces que se toma como Factor a su Base. Si no está indicado ningún Exponente, se asume que es: 1

La PARTE LITERAL está constituida por todas las letras, con sus respectivos Exponentes

El COEFICIENTE NUMÉRICO es un Número, cuando es Entero indica las veces que se toma a la Parte literal como un Sumando. Si no se lo indica se asume que este Coeficiente es 1

Ej 3.22 Se ejemplifica el significado de un Exponente (Cuando es Entero y Positivo)

$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$ El Exponente 4 indica que la base x, se multiplica por si misma 4 veces

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ El Exponente n dice que su base se multiplica n veces.

$p^1 = p$ Se asume que el Exponente es 1 si no se lo indica.

Ej 3.23 Se ejemplifica el significado de un Coeficiente numérico (Cuando es Entero y Positivo)

$3x^2y^4 = x^2y^4 + x^2y^4 + x^2y^4$ La Parte Literal x^2y^4 se reitera 3 veces

$1m = m$ No es necesario anotar el Coeficiente: 1, se lo asume.

$4z^3 = z^3 + z^3 + z^3 + z^3$
$= z \cdot z \cdot z + z \cdot z \cdot z + z \cdot z \cdot z + z \cdot z \cdot z$ Se desarrolla el significado del Término Algebraico, que resume a todas las operaciones indicadas.

III.4.2 CLASES DE TÉRMINOS ALGEBRAICOS

TÉRMINOS SEMEJANTES Se llaman Términos Semejantes a aquellos Términos que poseen la misma Parte Literal.

Ej 3.24 $4x^2y \ ; \ 7x^2y$ Éstos dos, son Términos Semejantes, ya que la Parte Literal es la misma en los dos Términos.

$3a^5 \ ; \ a^5 \ ; \ -6a^5$ Son Términos Semejantes

$9u^4v^2 \ ; \ 3u^2v^4$ No son Términos Semejantes, la Parte Literal no es la misma.

$8ab^5 \ ; \ 8a^3b$ No son Términos Semejantes, aunque el Coeficiente es el mismo.

TÉRMINOS ALGEBRAICOS ENTEROS Un Término Algebraico es Entero, cuando ninguna de sus letras se encuentra dividiendo.

Ej 3.25 Se analiza si son Enteros o no, los siguientes Términos Algebraicos.

$3x^2y \ ; \ \dfrac{a^3b^5c}{4} \ ; \ 2$ Son Términos Algebraicos Enteros, ya que ninguna letra divide. (Un Número puede dividir sin afectar)

$\dfrac{4x^3}{y} \ ; \ \dfrac{1}{3a^4b^2} \ ; \ \dfrac{p}{q}$ No son Términos Algebraicos Enteros, ya que se tienen letras que dividen a los Términos.

TÉRMINOS ALGEBRAICOS RACIONALES Un Término Algebraico es Racional, si ninguna de sus letras está afectada por un Radical o un Exponente Fraccionario. Un Término Algebraico es Entero y Racional, cuando es a la vez Término Algebraico Entero y Término Algebraico Racional.

Una Expresión Algebraica es Entera y Racional, cuando todos sus Términos son Enteros y Racionales.

Ej 3.26 Se analiza si son Racionales o no los Términos Algebraicos siguientes:

$7a^2b \; ; \; \frac{8x}{5y^2z^3} \; ; \; \sqrt{5}\,p^2q^4$ Son Algebraicos Racionales, ya que ninguna de sus letras posee Exponente Fraccionario (Los Coeficientes Numéricos pueden tenerlos sin afectar a la Clase)

$4\sqrt{x} \; ; \; 6a^4b^{1/3} \; ; \; \frac{1}{\sqrt[3]{pq}}$ A su vez estos tres no son Términos Algebraicos Racionales.

III.4.3 CLASES DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

De acuerdo al Número de Términos que poseen, las Expresiones Algebraicas se clasifican en:

MONOMIOS.- Son Expresiones Algebraicas, que contienen un solo Término Algebraico.

BINOMIOS.- Son Expresiones Algebraicas, que contienen a dos Términos Algebraicos.

TRINOMIOS.- Son Expresiones Algebraicas, que contienen a tres Términos Algebraicos.

MULTINOMIOS.- Son Expresiones Algebraicas, que contienen a dos o más Términos Algebraicos

Ej 3.27 Se analizan los Expresiones Algebraicas de acuerdo a su Número de Términos

a) $x \; ; \; 7a^2 \; ; \; 2a^3b^2c^7d^5 \; ; \; \frac{\sqrt{5}p^2q^4}{r^3t}$ Son Monomios (Las Expresiones Algebraicas contienen un solo Término)

b) $a+b \; ; \; 8x^2y^4+5xy^7 \; ; \; \frac{1}{p}+x^3y^2z$ Son Binomios (Contienen dos Términos)

c) $x+y+z \; ; \; a+b^5c^2+d^3 \; ; \; 1+\frac{1}{xy}+\sqrt[3]{z}$ Son Trinomios (Contienen tres Términos)

d) $x^2-\frac{1}{2} \; ; \; a^2+b^4+c^6 \; ; \; 1-p+p^2-p^3$ Son Multinomios (Dos o más Términos)

POLINOMIOS Los Polinomios son Expresiones Algebraicas, que contienen dos o más Términos Algebraicos Enteros y Racionales.

Ej 3.28 Se analizan las siguientes Expresiones Algebraicas:

$7x^3-6x^2+2x+5 \; ; \; x^4y^2z+1$

$a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4 \; ; \; \frac{x}{2}+\sqrt{5}\,y$

Son Polinomios, ya que todos sus Términos son Enteros y Racionales (Ninguna letra divide o posee Exponente Fraccionario)

Ej 3.29 Se analizan las siguientes Expresiones Algebraicas:

$x^3-\frac{1}{x^3} \; ; \; p^3-p^2\frac{1}{q}+p\frac{1}{q^2}-\frac{1}{q^3}$ No son Polinomios, algunos Términos no son Enteros y Racionales (Hay letras que dividen o poseen Exponentes Fraccionarios)

$3x^2-\sqrt{x}-1 \; ; \; \sqrt[4]{x^5y^3}-\frac{1}{\sqrt{z}}+u^2$ Las Expresiones Algebraicas que no llegan a ser Polinomios, si son Multinomios..

El concepto de Multinomio es más amplio que el de Polinomio, ya que el Multinomio admite todo tipo de Términos Algebraicos, en cambio el Polinomio solo admite Términos Enteros y Racionales.

Por tanto es posible decir que todo Polinomio es también un Multinomio, pero no todo Polinomio es a su vez un Multinomio.

Se llama <u>Polinomio en: x</u>, a los de la Forma: $P_{(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$

Son Polinomios en: x los siguientes: $P_{(x)} = 3 + 5x + 4x^2$, $P_{(x)} = x^5 + 2x^3 - 7$

Se llama <u>Polinomio Ordenado</u> con respecto a una letra, a los Polinomios que contiene a determinada letra, cuyos Exponentes se ordenan en forma creciente o decreciente.

Son Polinomios Ordenados: $a^3 - 5a^2 + 4a + 9$; $3y + y^3 - 4y^5$

> En un Polinomio todas las letras de su parte literal llevan exponentes enteros y positivos.
> En un Polinomio en x, todas las potencias de x, son enteras y positivas.

<u>III.4.4 GRADOS ALGEBRAICOS</u>

GRADO RELATIVO DE TÉRMINOS El Grado Relativo de un Término (O con respecto a una letra), es el Exponente que posee la letra en el Término Algebraico.

<u>**Ej 3.30**</u> Los Grados Relativos del Término Algebraico, respecto a cada letra son

$5a^4b^2cd^7$ Con la letra: a Cuarto Grado Con la letra: b Segundo Grado
Con la letra: c Primer Grado Con la letra: d Séptimo Grado

GRADO ABSOLUTO DE TÉRMINOS El Grado Absoluto de un Término Algebraico es la suma de los Exponentes de todas sus letras.

<u>**Ej 3.31**</u> Se determina el Grado Absoluto de los siguientes Términos Algebraicos:

$7x^3yz^4$ El Grado Absoluto es: $3 + 1 + 4 = 8$ (Octavo Grado)

$-\dfrac{2p^7q^4}{r^5}$ El Grado Absoluto es: $7 + 4 - 5 = 6$ (Sexto Grado)

GRADO RELATIVO DE POLINOMIOS El Grado Relativo de un Polinomio (O con respecto a una letra), está determinado por el Mayor Exponente que tiene dicha letra en el Polinomio.

<u>**Ej 3.32**</u> $3a^2b^4 + 5ab^6 - 2a^7$ Letra: a Grado 7 ; letra: b Grado 6

$5x^4yz^3 + 3xy^2z$ Letra: x Grado 4 ; letra: y Grado 2; letra: z Grado 3

GRADO ABSOLUTO DE POLINOMIOS El Grado Absoluto de un Polinomio, es el Mayor Grado Absoluto entre sus Términos Algebraicos.

<u>**Ej 3.33**</u> $3a^2b^4 + 5ab^4 - 2a^7$ Los Grados Absolutos de cada Término son: 6 ; 5 ; 7 ; Entonces el Grado Absoluto del Polinomio es de: 7 (Séptimo Grado)

$5x^4yz^3 + 3xy^2z$ El Grado Absoluto es: 8 (Octavo Grado)

VALOR NUMÉRICO Se llama <u>Valor Numérico</u> de una Expresión Algebraica, al Número que se obtiene de sustituir las letras por valores numéricos dados, efectuando luego las Operaciones indicadas.

Ej 3.34 Se determinan los Valores Numéricos de las Expresiones Algebraicas:

$5a^2b$	$x^2y^3 - 3xy^4$ Si: $x = 0$; $y = 1$ $\Rightarrow$ $0^2 1^3 - 3\cdot 0\cdot 1^4 = 0$	Reemplazando valores dados.
Si: $a = 3$; $b = 4$	Si: $x = 1$, $y = 2$ $\Rightarrow$ $1^2 2^3 - 3\cdot 1\cdot 2^4 = -40$	
$\Rightarrow$ $5\cdot 3^2\cdot 4 = 180$	Si: $x = 6$; $y = 3$ $\Rightarrow$ $6^2 3^3 - 3\cdot 6\cdot 3^4 = -486$	

III.5 LEYES DE EXPONENTES

Las Leyes de los Exponentes son: (Considerando: $a > 0$; $b > 0$; tomando m, n Naturales)

E1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	**E4)** $(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	**E7)** $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$
E2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	**E5)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	**E8)** $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
		E9) $1^n = 1$
E3) $(a^m)^n = a^{mn}$	**E6)** $a^0 = 1$	**E10)** $0^n = 0$

Por otra parte, usando las Leyes de Exponentes y las Leyes de Signos, es posible obtener las siguientes relaciones:

$(-a)^n = a^n$ **Si: n es Par** $\qquad (-a)^n = -a^n$ **Si: n es Impar**

Por tanto se verifica que: $(-a)^4 = a^4$; $(-a)^7 = -a^7$

Ej 3.35 Verificando la 1^era^ Ley de exponentes, para m, n enteros

a) $a^m a^n = a^{m+n}$

$$a^m a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a \ldots}_{\text{m veces}}\ \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a \ldots}_{\text{n veces}}$$

$$= \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a \ldots}_{\text{(m + n) veces}} \ a^{m+n}$$

Considerando que: a^m significa que a se multiplica por si misma m veces; a^n a su vez n veces.

Por tanto se presenta un producto de a por si mismo, $m+n$ veces. Ley de exponentes verificada.

Una demostración formal requiere de los conceptos de Inducción Matemática, Ver Cap XII.4

b) $a^3 a^2 = (a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a) = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^5$

c) $\dfrac{a^5}{a^3} = \dfrac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a} = \dfrac{a\cdot a\cdot \cancel{a}\cdot \cancel{a}\cdot \cancel{a}}{\cancel{a}\cdot \cancel{a}\cdot \cancel{a}} = a\cdot a = a^2$

d) $(a^3)^2 = a^3\cdot a^3 = (a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a) = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^6$

e) $(ab)^3 = ab\cdot ab\cdot ab = (a\cdot a\cdot a)\cdot(b\cdot b\cdot b) = a^3 b^3$

Verificando otras Leyes de exponentes, que como se aprecia provienen de las anteriores Reglas de operaciones.

Las Leyes de Exponentes inicialmente se presentan y ejemplifican para Exponentes Naturales, pero luego se generaliza a Exponentes Reales.

Ej 3.36 Aplicando las Leyes de Exponentes, se efectúan las siguientes Operaciones:

a) $a^3 \cdot a^6 = a^{3+6} = a^9$

b) $x^2 \cdot x^4 \cdot x^6 = x^{2+4+6} = x^{12}$

La Ley **E1**, se expresa también como: El Producto de Potencias de la misma base, es la base elevada a la Suma de los Exponentes. Generalizando a más factores.

c) $\dfrac{a^8}{a^5} = a^{8-5} = a^3$

La Ley **E2** se expresa como: El Cociente de potencias de la misma base, es la base elevada a la Resta de los Exponentes.

d) $\dfrac{x^5 x^7}{x^8} = x^{5+7-8} = x^4$

Generalizando estas leyes se obtiene los resultados indicados.

e) $(a^3)^5 = a^{3 \cdot 5} = a^{15}$

La Ley **E3**, significa que una potencia elevada a otra potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes.

f) $(a \cdot b)^4 = a^4 \cdot b^4$

Distribuyendo la potencia 4 sobre cada factor de un producto, Ley **E4**

g) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^7 = \dfrac{a^7}{b^7}$

Distribuyendo la potencia 7 sobre un cociente, Ley **E5**

Ej 3.37 Generalizando las Leyes de Exponentes efectuar las Operaciones:

$$(x^4y^2)^5 = (x^4)^5 (y^2)^5 = x^{20} y^{10}$$

$$\left(\frac{x^6}{y^3}\right)^2 = \frac{(x^6)^2}{(y^3)^2} = \frac{x^{12}}{y^6}$$

$$\left(\frac{x^6y^4z^5}{u^2v^7}\right)^3 = \frac{(x^6)^3\,(y^4)^3\,(z^5)^3}{(u^2)^3\,(v^7)^3} = \frac{x^{18}y^{12}z^{15}}{u^6v^{21}}$$

Ej 3.38 $\dfrac{1}{a^7} = a^{-7}$ $\qquad \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^6 = (x^{-2})^6 = x^{-12}$

$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ $\qquad (\sqrt[3]{a})^6 = (a^{\frac{1}{3}})^6 = a^{\frac{1}{3}6} = a^2$

$3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 3^x \cdot 9 = 9 \cdot 3^x$ $\qquad 3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$

$3^{x-2} = 3^x \cdot 3^{-2} = 3^x \cdot \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}3^x$ $\qquad 3^{\frac{x}{2}} = (3^x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3^x}$

Manejo de exponentes.

Una Potencia del denominador sube al numerador, cambiando el Signo de su Exponente.

También es posible descomponer exponenciales usando las Leyes de Exponentes.

3.7 Indicar cual es la Respuesta correcta para cada caso:

a)
$$a^3a^2 = \begin{cases} a^{3 \cdot 2} = a^6 & \textit{Se multiplican los Exponentes de la misma base} \\ a^{3+2} = a^5 & \textit{Se suman los exponentes.} \\ a^3 & \textit{Cuando se toma el mayor exponente.} \end{cases}$$

Por las Leyes de exponentes la respuesta correcta es la segunda.

b)
$$\frac{a^8}{a^2} = \begin{cases} a^{8/2} = a^4 & \textit{Se dividen los Exponentes de la misma base} \\ a^{8-2} = a^6 & \textit{Se restan los exponentes.} \\ \dfrac{8}{2} = 4 & \textit{Cuando se simplifica a y se dividen los exponentes.} \end{cases}$$

Por las Leyes de exponentes la respuesta correcta es la segunda.

c)
$$(a^3)^4 = \begin{cases} a^{3^4} = a^{81} & \textit{La primera potencia se eleva a la otra potencia} \\ a^{3 \cdot 4} = a^{12} & \textit{Se multiplican las potencias} \\ a^{3+4} = a^7 & \textit{Se suman las potencias.} \end{cases}$$

Por las Leyes de exponentes la respuesta correcta es la segunda.

Es importante considerar la presencia de los Paréntesis.

d) $a^{2^3} = \begin{cases} a^{(2^3)} = a^8 \\ a^{2\cdot 3} = a^6 \\ a^{2+3} = a^5 \end{cases}$

La primera potencia se eleva a la segunda.
Se multiplican las potencias
Se suman las potencias.

Note que no hay paréntesis en la pregunta. Por las Leyes de exponentes la respuesta correcta es la primera.

e) $(-a)^4 = \begin{cases} a^4 \\ -a^4 \\ a^{-4} \end{cases}$

La potencia par convierte al signo negativo en positivo.
La potencia par mantiene el signo negativo como negativo.
El signo negativo se va a la potencia.

Los paréntesis indican que el signo es afectado por la potencia. La respuesta correcta es la primera.

f) $-a^8 = \begin{cases} a^8 \\ -a^8 \\ a^{-8} \end{cases}$

La potencia par convierte al signo negativo en positivo.
La potencia par mantiene el signo negativo como negativo.
El signo negativo se va a la potencia.

Al no existir paréntesis el signo no es afectado por la potencia. La respuesta correcta es la segunda.

3.8 Indicar cual de las respuestas es la correcta:

a) $(\frac{a}{b})^2 = \begin{cases} (\frac{b}{a})^{1/2} \\ (\frac{b}{a})^{-2} \end{cases}$

Al intercambiar el numerador y denominador, se invierte también la potencia.
Al intercambiar el numerador y denominador cambia el signo de la potencia.

La respuesta correcta es la segunda, porque al cambiar de posición se invierte el signo de la potencia.

b) $(\frac{\sqrt{a}}{b}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{a}{b^2}} \\ \sqrt{\frac{a}{b^{1/2}}} \end{cases}$

Al introducir el denominador dentro de la raíz cuadrada, ingresa con exponente al cuadrado.
Al introducir el denominador dentro de la raíz se eleva a la potencia de ½

La respuesta correcta es la primera, porque debe ingresar con una potencia que compense a la equivalente de la raíz (½).

3.9 Indicar si las Proposiciones son Verdaderas o Falsas:

a) $(3\,a)^2 = 3\,a^2$ F Es Falsa porque falta aplicar la potencia al coeficiente, la respuesta correcta debería ser: $3^2\,a^2$.

b) $(x+y)^3 = x^3 + y^3$ F Es Falsa, un exponente no se puede distribuir sobre una suma. El cubo de una suma no es igual a la suma de cubos. Su desarrollo requiere de los Productos Notables (Ver Cap. V)

c) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ F Es Falsa porque un radical no se puede distribuir sobre una suma. La raíz de una suma no es igual a la suma de raíces.

d) $\sqrt{x\,y} = \sqrt{x}\,\sqrt{y}$ V Es Verdadera, porque la raíz de un producto es el producto de las raíces, como consecuencia de la Ley de exponentes **E6.** La raíz cuadrada es equivalente al exponente 1 /2.

e) $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ V Es Verdadera, porque la raíz de una potencia es igual a la potencia de la raíz, es decir no afecta si antes se calcula la potencia o la raíz. consecuencia de la Ley de Exponentes **E3**

f) $-3^2 = (-3)^2$ F Es Falsa. En el primer miembro permanece el signo negativo, en el segundo por la presencia del paréntesis, cambia el signo.

III.5.1 MANEJO DE EXPONENTES

Para simplificar exponentes se deben aplicar las Leyes de Exponentes de manera cuidadosa, buscando simplificaciones. Tome muy en cuenta la presencia o ausencia de paréntesis.

Ej 3.38 Calcular los valores de las siguientes expresiones con exponentes:

a) $\dfrac{2^5 \cdot 2^7}{2^9}$ $\qquad \dfrac{2^5 \cdot 2^7}{2^9} = 2^{5+7-9} = 2^3 = 8$

b) $4^{3^2} + (4^3)^2 + 4^{(3^2)}$ $\qquad 4^{3^2} + (4^3)^2 + 4^{(3^2)} = 4^9 + 4^6 + 4^9 = 528384$

c) $\left(\dfrac{1}{\frac{1}{5^{-2}}}\right)^{1/2}$ $\qquad \left(\dfrac{1}{\frac{1}{5^{-2}}}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{1}{5^2}\right)^{1/2} = (5^{-2})^{1/2} = 5^{-2\frac{1}{2}} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5} = 0.2$

d) $9^{2^{-1}}$ $\qquad 9^{2^{-1}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

Al no existir paréntesis no es aplicable la Ley 3era de los exponentes. Previamente se opera con el último exponente.

e) $4^{2^{-1}} + 4^{-2^{-1}}$ $\qquad 4^{2^{-1}} + 4^{-2^{-1}} = 4^{\frac{1}{2}} + 4^{-(\frac{1}{2})} = 4^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{4} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

f) $9^{-4^{2^{-1}}}$ $\qquad 9^{-4^{2^{-1}}} = 9^{-4^{(\frac{1}{2})}} = 9^{-\frac{1}{4^{1/2}}} = 9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{9^{1/2}} = \dfrac{1}{3}$

g $2^{n+3} + 2^{n-3}$ $\qquad 2^{n+3} + 2^{n-3} = 2^n \cdot 2^3 + 2^n \cdot 2^{-3} = 2^n(2^3 + 2^{-3})$

$$= 2^n(2^3 + \frac{1}{2^3}) = 2^n(8 + \frac{1}{8}) = \frac{65}{8} 2^n$$

Descomponiendo por Ley de exponentes 1era.

h) $2^{3n} + 2^{-3n}$ $\qquad 2^{3n} + 2^{-3n} = (2^3)^n + (2^{-3})^n = (2^3)^n + (\dfrac{1}{2^3})^n = 8^n + (\dfrac{1}{8})^n$

i) Si: $a^a = 2$ Calcular: $a^{2a^{1+a} - a}$

$$a^{2a^{1+a}-a} = a^{2a^{1+a}} a^{-a} = a^{2aa^a} a^{-a} = a^{2a(a^a)} (a^a)^{-1} = a^{2a(2)} (2)^{-1}$$

$$= (a^a)^4 (2)^{-1} = (2)^4 (2)^{-1} = 2^3 = 8$$

Ej 3.39 Aplicando las Leyes de Exponentes, se efectúan las siguientes simplificaciones:

a) $x^9 \dfrac{1}{x^4} \sqrt{x}$

Ordenando, una potencia en el denominador sube al numerador cambiando su signo. Una raíz cuadrada equivale a una potencia de ½

$$x^9 \frac{1}{x^4} \sqrt{x} = x^9 x^{-4} x^{\frac{1}{2}} = x^{9-4+\frac{1}{2}} = x^{\frac{11}{2}}$$

El producto de potencias de la misma base es tal base elevada a la suma de las potencias.

b) $\left[x^{-1} \dfrac{1}{x^3} \sqrt{x^9}\right]^4$

Subiendo denominadores y expresando al radical, se simplifica.

$$\left[x^{-1} \frac{1}{x^3} \sqrt{x^9}\right]^4 = \left[x^{-1} x^{-3} x^{\frac{9}{2}}\right]^4 = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]^4 = x^2$$

El producto de potencias de la misma base es la base elevada a la suma de las potencias.

c) $\left\{\frac{1}{a^{2n}}\left[a^7\,(a\sqrt[5]{a})\right]^n\right\}^m$

Simplificando previamente los radicales internos como potencias fraccionarias.

$= \left\{a^{-2n}\left[a^7\,(a\,a^{\frac{1}{5}})\right]^n\right\}^m = \left\{a^{-2n}\left[a^7\,(a^{\frac{6}{5}})\right]^n\right\}^m = \left\{a^{-2n}\left[a^{\frac{41}{5}}\right]^n\right\}^m$

Por Leyes de exponentes.

$= \left\{a^{-2n}\left[a^{\frac{41n}{5}}\right]\right\}^m = \left\{a^{-2n+\frac{41n}{5}}\right\}^m = \left\{a^{\frac{31n}{5}}\right\}^m = a^{\frac{31nm}{5}}$

d) $\left(\frac{x^5y^n}{x^{4n}y^7}\right)^{-1}$

Llevando al numerador los denominadores, para ello cambia el signo de sus potencias.

$= (x^5y^nx^{-4n}y^{-7})^{-1} = (x^{5-4n}y^{n-7})^{-1} = x^{4n-5}y^{7-n}$

e) $\frac{2^3\left(\sqrt{4^5}\right)^{-n}}{\left(\sqrt[3]{8^2}\right)^n} = \frac{2^3\left(\sqrt{4^5}\right)^{-n}}{\left(\sqrt[3]{8^2}\right)^n} = \frac{2^3\left(\left(\sqrt{4}\right)^5\right)^{-n}}{\left(\left(\sqrt[3]{8}\right)^2\right)^n} = \frac{2^3\left((2)^5\right)^{-n}}{\left((2)^2\right)^n} = \frac{2^3\,2^{-5n}}{2^{2n}} = 2^3\,2^{-7n} = 2^{3-7n}$

Reordenando los exponentes dentro de las raíces. Calculando previamente las raíces.

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{x^{12}}}$ $\qquad \sqrt[3]{\frac{1}{x^{12}}} = \left(\frac{1}{x^{12}}\right)^{\frac{1}{3}} = (x^{-12})^{\frac{1}{3}} = x^{-4}$

La raíz cúbica equivale a una potencia de 1/3 . Subiendo la potencia del denominador .

g) $\sqrt{\left(\frac{a^3}{a^7}\right)^{-1}}$ $\qquad \sqrt{\left(\frac{a^3}{a^7}\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{a^7}{a^3}} = \sqrt{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{2}} = a^2$

Una potencia negativa hace que se invierta la fracción. (El Numerador pasa a denominador y viceversa)

h) $\sqrt[n]{9^{n^2-6n+5}}$ $\qquad \sqrt[n]{9^{n^2-6n+5}} = \left(9^{n^2-6n+5}\right)^{\frac{1}{n}} = 9^{\frac{n^2-6n+5}{n}} = 9^{n-6+\frac{5}{n}} = (3^2)^{n-6+\frac{5}{n}} = 3^{2n-12+\frac{10}{n}}$

i) $I = \sqrt[n]{\frac{14^n}{4^n\,2^{-n}}}$ $\qquad I = \sqrt[n]{\frac{(7\cdot2)^n}{(2^2)^n\,2^{-n}}} = \sqrt[n]{\frac{7^n\,2^n}{2^{2n}\,2^{-n}}} = \sqrt[n]{\frac{7^n\,2^n}{2^{2n-n}}} = \sqrt[n]{\frac{7^n\,2^n}{2^n}} = \sqrt[n]{7^n} = (7^n)^{\frac{1}{n}} = 7$

j) $\sqrt[4/3]{x}$

$\sqrt[4/3]{x} = x^{\frac{1}{4/3}} = x^{\frac{3}{4}} = (x^3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$

Expresando la raíz como una potencia fraccionaria, ordenando.

k) $\sqrt[n]{\frac{2^{2n}\,3^n}{15\cdot4^{n-2}+2^{2n-4}}}$

Agrupando inicialmente a las potencias de base 2, para luego simplificar.

$\sqrt[n]{\frac{2^{2n}\,3^n}{15\cdot4^{n-2}+2^{2n-4}}} = \sqrt[n]{\frac{2^{2n}\,3^n}{15\cdot(2^2)^{n-2}+2^{2n-4}}} = \sqrt[n]{\frac{2^{2n}\,3^n}{15\cdot2^{2n-4}+2^{2n-4}}} = \sqrt[n]{\frac{2^{2n}\,3^n}{16\cdot2^{2n-4}}}$

$= \sqrt[n]{\frac{2^{2n}\,3^n\,2^{-2n+4}}{16}} = \sqrt[n]{\frac{2^{2n}\,3^n\,2^{-2n}\,2^4}{16}} = \sqrt[n]{\frac{2^{2n-2n}\,3^n\,16}{16}} = \sqrt[n]{3^n} = 3$

l) $$\sqrt[n]{\frac{3^{n+1}}{\sqrt[n+2]{9\sqrt{9^n}}}} = \sqrt[n]{\frac{3^{n+1}}{\sqrt[n+2]{9\sqrt{9^n}}}} = \sqrt[n]{\frac{3^{n+1}}{\sqrt[n+2]{9\,(\sqrt{9})^n}}} = \sqrt[n]{\frac{3^{n+1}}{\sqrt[n+2]{9\,(3)^n}}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{3^{n+1}}{\sqrt[n+2]{3^2\,3^n}}} = \sqrt[n]{\frac{3^{n+1}}{\sqrt[n+2]{3^{n+2}}}} = \sqrt[n]{\frac{3^{n+1}}{3}} = \sqrt[n]{3^n} = 3$$

Reordenando el exponente dentro de la raíz. Multiplicando y simplificando.

m) $$M = \left[\left(\frac{1}{\frac{1}{x^{-3}}}\right)^{-5}\right]^2 \qquad M = \left[\left(\frac{1}{x^3}\right)^{-5}\right]^2 = \left[\left(x^{-3}\right)^{-5}\right]^2 = x^{(-3)(-5)2} = x^{30}$$

n) $$N = \frac{2^{x+5}+2^{x+4}+2^{x+3}}{2^{x+2}+2^{x+1}+2^x} \qquad N = \frac{2^x(2^5+2^4+2^3)}{2^x(2^2+2+1)} = \frac{(32+16+8)}{(4+2+1)} = \frac{56}{7} = 8$$

o) $$O = \sqrt[2n]{\frac{18^n+45^n}{2^n+5^n}} \qquad O = \sqrt[2n]{\frac{(9\cdot 2)^n+(9\cdot 5)^n}{2^n+5^n}} = \sqrt[2n]{\frac{9^n2^n+9^n5^n}{2^n+5^n}} = \sqrt[2n]{\frac{9^n(2^n+5^n)}{2^n+5^n}}$$

$$= \sqrt[2n]{9^n} = 9^{\frac{n}{2n}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$$

p) $$P = \sqrt[m-n]{\frac{x^{m+1}y^{2n}+x^{2m}y^{n+1}}{x^{m+n}y^{m+1}+x^{n+1}y^{m+n}}}$$

$$P = \sqrt[m-n]{\frac{x^m x y^n y^n + x^m x^m y y^n}{x^m x^n y^m y + x^n x y^m y^n}} = \sqrt[m-n]{\frac{x^m y^n(xy^n+x^m y)}{x^n y^m(x^m y+xy^n)}}$$

$$= \sqrt[m-n]{\frac{x^m y^n}{x^n y^m}} = \sqrt[m-n]{\frac{x^{m-n}}{y^{m-n}}} = \sqrt[m-n]{\left(\frac{x}{y}\right)^{m-n}} = \frac{x}{y}$$

Tal cual se efectúa también en los otros problemas. Se desarrollan las potencias, buscando simplificaciones.

Tome en cuenta que las Leyes de exponentes son válidas para los radicales.

q) $$Q = \frac{\sqrt[2^n-2]{(x^{2^n})^2}+x^2\sqrt[2^n-2]{x^4}}{\sqrt[2^n-2]{x^{2^n+2}}} \qquad Q = \frac{\sqrt[2^n-2]{x^{2^n\cdot 2}}+x^2\sqrt[2^n-2]{x^4}}{\sqrt[2^n-2]{x^{2^n+2}}} = \frac{x^{\frac{2^n\cdot 2}{2^n-2}}+x^2x^{\frac{4}{2^n-2}}}{x^{\frac{2^n+2}{2^n-2}}}$$

$$Q = \frac{x^{\frac{2^n\cdot 2}{2^n-2}}+x^{2+\frac{4}{2^n-2}}}{x^{\frac{2^n+2}{2^n-2}}} = \frac{x^{\frac{2^n\cdot 2}{2^n-2}}+x^{\frac{2^n\cdot 2-4+4}{2^n-2}}}{x^{\frac{2^n+2}{2^n-2}}} = \frac{x^{\frac{2^n\cdot 2}{2^n-2}}+x^{\frac{2^n\cdot 2}{2^n-2}}}{x^{\frac{2^n+2}{2^n-2}}} = \frac{2x^{\frac{2^n\cdot 2}{2^n-2}}}{x^{\frac{2^n+2}{2^n-2}}}$$

$$= 2x^{\frac{2^n\cdot 2}{2^n-2}-\frac{2^n+2}{2^n-2}} = 2x^{\frac{2^n\cdot 2-(2^n+2)}{2^n-2}} = 2x^{\frac{2^n-2}{2^n-2}} = 2x$$

Un mayor detalle del manejo de los Radicales se brinda en el capítulo VIII RADICALES, donde se usan más conceptos algebraicos.

III.4 INDUCCIÓN MATEMÁTICA

El Principio de Inducción Matemática, se emplea como un útil procedimiento para demostrar Teoremas matemáticos, que involucren a Números Naturales. Expresa:

Si $P_{(n)}$ es una Propiedad que se desea demostrar, donde $n, k \in \mathbb{N}$

i) $P_{(1)}$ es Verdadero

ii) Hipótesis: Asumiendo que $P_{(k)}$ es Verdadero

Tésis: Entonces $P_{(k+1)}$ también es Verdadero

Significa que previamente se debe verificar su validéz para: $n = 1$. Luego si es posible llegar desde la Hipótesis $P_{(k)}$ hasta la Tésis $P_{(k+1)}$; entonces se asume como válido para todo n Natural.

Ej 3.40 Se demuestra la validés de la Fórmula de suma: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$P_{(k)}$: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ Propiedad a demostrar por Inducción

i) $P_{(1)}$: $1 = \dfrac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1 = 1$ Verificando su cumplimiento para $n = 1$, reemplazando. Se cumple.

ii) Hipótesis: $P_{(k)}$: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ Planteando la Hipótesis

Tésis: $P_{(k+1)}$: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (k+1) = \dfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$ La Tésis se obtiene reemplazando $k+1$ en lugar de k.

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ Simplificando.

Demostración: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ Partiendo de la Hipótesis, que se asume como Verdadera.

$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + (k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)$ Agregamos $(k+1)$ en cada miembro de la igualdad.

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Simplificando el 2do miembro observamos que se llega a la misma expresión de la Tésis.

Por tanto, como desde la Hipótesis ha sido posible llegar a la Tésis, se considera Propiedad demostrada, siendo válida para todo Número Natural n.

3.10 Demostrar por Inducción

a) $P_{(n)}$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

i) $P_{(1)}$: $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} \Rightarrow 1 = 1$ Verificando su cumplimiento para $n = 1$.

ii) Hipótesis: $P_{(k)}$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ Planteando la Hipótesis.

Tésis: $P_{(k+1)}$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)((k+1)+1)[2(k+1)+1]}{6}$ Reemplazando $k+1$ en lugar de k.

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Dem.: $1^2+2^2+3^2+\dots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ Partiendo de la Hipótesis se agrega $(k+1)^2$ a cada miembro

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\quad\square$$

b) $P_{(n)}:\ 1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\dots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

i) $P_{(1)}:\ 1\cdot2=\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}\Rightarrow 2=2$ Verificando su cumplimiento para $n=1$.

ii) Hipótesis: $P_{(k)}:\ 1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\dots+k(k+1)=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$ Hipótesis.

Tésis: $P_{(k+1)}:\ 1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\dots+(k+1)(k+2)=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$ Reemplazando $k+1$ en lugar de k.

Dem.: $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\dots+k(k+1)=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$ Partiendo de la Hipótesis se agrega $(k+1)(k+2)$ a cada miembro.

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\dots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}\quad\square$$

Note que para demostrar se debe llegar a una conclusión general. En cambio para refutar (Demostrar que no es correcto), será suficiente mostrar un caso particular.

Ej 3.41 Se refuta: $3+6+9+12+\dots+3n=\dfrac{5n^2-3n+4}{2}$

Para $n=1$ $\quad 3=\dfrac{5\cdot1^2-3\cdot1+4}{2}\Rightarrow 3=3$

Para $n=2$ $\quad 3+6=\dfrac{5\cdot2^2-3\cdot2+4}{2}\Rightarrow 9=9$

Para $n=3$ $\quad 3+6+9=\dfrac{5\cdot3^2-3\cdot3+4}{2}\Rightarrow 18=20$

La Propiedad es correcta para: $n=1$; $n=2$. Pero no para $n=3$, por tanto es una Propiedad no válida.

De todas maneras se intentará demostrar por Inducción. Ya se verificó su cumplimiento para $n=1$

ii) Hipótesis: $P_{(k)}:\ 3+6+9+12+\dots+3k=\dfrac{5k^2-3k+4}{2}$ Planteando la Hipótesis

Tésis: $P_{(k+1)}:\ 3+6+9+12+\dots+3(k+1)$ La Tésis se obtiene reemplazando $k+1$ en lugar de k.

$$=\frac{5(k+1)^2-3(k+1)+4}{2}=\frac{5k^2+7k+6}{2}$$ Simplificando.

Demostración: $3+6+9+12+\dots+3k=\dfrac{5k^2-3k+4}{2}$ Partiendo de la Hipótesis.

$$3+6+9+12+\dots+3k+3(k+1)=\frac{5k^2-3k+4}{2}+3(k+1)$$ Agregamos $3(k+1)$ en cada miembro.

$$=\frac{5k^2-3k+4+6(k+1)}{2}=\frac{5k^2+3k+10}{2}$$ Simplificando el 2[do] miembro no se llega a la misma expresión final de la Tésis. Por tanto Propiedad no correcta.

Ej 3.42 Se demuestra que $P_{(n)}: \ n^3 + 2n$ Es divisible por 3

$P_{(n)}: \ n^3 + 2n = 3m$

La divisibilidad por 3, significa que para cualquier valor de n debe lograrse un número entero m, que cumpla con la igualdad. Por ejemplo reemplazamos $n=4$; $72 = 3m$, m es es el entero 24

i) $P_{(1)}: \ 1^3 + 2 \cdot 1 = 3m$

$3 = 3m$

Verificando su cumplimiento para $n = 1$, efectivamente, se logra un entero en m $(m = 1)$

ii) Hipótesis: $P_{(k)}: \ k^3 + 2k = 3m$

Tésis: $P_{(k+1)}: \ (k+1)^3 + 2(k+1) = 3m'$

Planteando la Hipótesis. Asumiendo que existe m. En la Tésis se debe verificar que existe m' entero.

Demostración: $(k+1)^3 + 2(k+1) = 3m'$

$(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (2k + 2) = 3m'$

$(k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 1 + 2) = 3m'$

$(k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1) = 3m'$

$3m + 3(k^2 + k + 1) = 3m'$

$3(m + k^2 + k + 1) = 3m'$

Desarrollando la Tésis.

Se obtiene la misma expresión de la Hipótesis (Supuestamente cierta), y otra expresión factorizable por 3.

Por tanto en $m' = m + k^2 + k + 1$, al ser m, k enteros, significa que m' es entero. Lo que demuestra la validez de la Propiedad.

3.11 a) Demostrar por Inducción: $5^n - 1$ Es divisible por 4

$P_{(n)}: \ 5^n - 1 = 4m$

Divisibilidad entre 4, significa que para cualquier valor de n debe lograrse un número entero m, que cumpla con la igualdad. Verificando para $n = 1$

i) $P_{(1)}: \ 5^1 - 1 = 4m \Rightarrow 4 = 4m$

ii) Hipótesis: $P_{(k)}: \ 5^k - 1 = 4m$

Tésis: $P_{(k+1)}: \ 5^{k+1} - 1 = 4m'$

Planteando la Hipótesis. Asumiendo que existe m. En la Tésis se debe verificar que existe m' entero.

Dem.: $5^{k+1} - 1 = 4m'$

$5^k 5 - 1 - 4 + 4 = 4m'$

$5^k 5 - 5 + 4 = 4m'$

$5(5^k - 1) + 4 = 4m'$

$5(4m) + 4 = 4m'$

$4(5m + 1) = 4m'$

Desarrollando la Tésis. Haciendo el artificio de restar y sumar 4. Ordenando

Se obtiene la misma expresión de la Hipótesis (Supuestamente cierta), y otra expresión factorizable por 4.

Por tanto $m' = 5m + 1$, al ser m entero, significa que m' es entero. Lo que demuestra la Propiedad.

b) $x^n - y^n$ Es divisible por $x - y$

$P_{(n)}: \ x^n - y^n = Q(x - y)$

i) $P_{(1)}: \ x^1 - y^1 = Q(x - y) \Rightarrow Q = 1$

Divisibilidad entre x-y, significa que para cualquier valor de n debe lograrse una División exacta (Sin Residuo) de Cociente Q.

ii) Hipótesis: $P_{(k)}: \ x^k - y^k = Q(x - y)$

Tésis: $P_{(k+1)}: \ x^{k+1} - y^{k+1} = Q'(x - y)$

Planteando la Hipótesis. Asumiendo que existe Q. En la Tésis se debe verificar que existe Q' Polinomio entero.

Dem.: $x^{k+1} - y^{k+1} + xy^k - xy^k = Q'(x - y)$

$x(x^k - y^k) + y^k(x - y) = Q'(x - y)$

$x[Q(x - y)] + y^k(x - y) = Q'(x - y)$

$(Qx + y^k)(x - y) = Q'(x - y)$

$\Rightarrow Q' = Qx + y^k$

Desarrollando la Tésis. Haciendo el artificio de restar y sumar xy^k

Se obtiene la misma expresión de la Hipótesis (Supuestamente cierta), y otra expresión factorizable por x-y.

III.- PROBLEMAS PROPUESTOS

3.1 a) Determine los Valores Absolutos de los siguientes Números Reales: 3; -9 ; -0.0001; 0.99 ; $-\pi$

b) Exprese en Notación científica: 325 ; 0.004 ; -2015 ; -0.0000073 ; $\sqrt{100000}$

3.2 Hallar la Suma (S), Resta (R), Multiplicación (M) y División (D) de los Números:

a) 7 ; 3 b) 4 ; -9 c) -5 ; 8 d) -2 ; -3

3.3 Simplificar: a) $7 - \{6 - [4 - (-3)]\}$ b) $9 - \{1 - [3 - (-8)]\}$ c) $1 - \{1 - [1 - (-1)]\}$

d) $3 - [2 - (-1)] + [3 - (-1)]$ e) $-\{1 + [1 - (-1)]\}$ f) $-\{2 - [3 - (-5)] + [5 - (-3)]\}$

3.4 Hallar la Suma (S), Resta (R), Multiplicación (M) y División (D) entre las Fracciones:

a) $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{5}, \frac{4}{9}$ d) $\frac{3}{7}, -\frac{1}{9}$

Hallar la Suma (S) y la Multiplicación (M) de las siguientes Fracciones:

e) $\frac{1}{4} \ \frac{3}{8}$ f) $\frac{1}{2} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{8}$ g) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ h) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}$

3.5 Expresar como cociente de enteros a los siguientes Números Racionales

0.375 ; 2.6424 ; 0.16666... ; 3.454545... ; 5.2785785... ; 13.7423423...

3.6 Expresar en forma simplificada como un Término Algebraico:

A) $a \cdot a \cdot a$ B) $x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x$ C) $-y \cdot y \cdot y \cdot y - y \cdot y \cdot y \cdot y$ D) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$

3.7 Clasificar a los siguientes Términos Algebraicos (Marque donde corresponde)

TÉRMINO	Entero	Racional	EXPRESIÓN	Entero	Racional
$7a^2b$			$x^5 + y^7$		
$7x^2/y$			$a^2 + b^2 + 1/c$		
$a/7$			$1 + 1/x + 1/x^2$		
$x^{1/2}$			$a^{1/3} + b^3$		

3.8 Clasificar a las siguientes Expresiones Algebraicas: (Marque donde corresponde)

EXPRESIÓN	Término	Monomio	Binomio	Multinomio	Polinomio
$3x^2y^5$					
$5a^3b^4c^2/d^5$					
$a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$					
$x^2 + 1/(xy) + y^2$					
$x^2y + xy^2 + \sqrt{x}\,y^4$					

3.9 Indique si los siguientes Grupos de Términos son Semejantes entre sí:

a) $3a^5b\ ,\ 7ba^5$ b) $6x^2/y\ ,\ 9x/y^2$ c) $-2a^4b^4\ ,\ -2a^4b$ d) $3x^{2n-1}\ ,\ 5x^{1-2n}$

e) $5x^3y^2z\ ,\ -2x^3yz^2,\ 6x^3y^2z^2$ f) $7p^4q^2r\ ,\ 4rq^2p^4\ ,\ -8q^2p^4r$ g) $x^n,\ x^{n-1},\ x^{2n-3}$

3.10 Cuales de las siguientes Expresiones Algebraicas son Polinomios:

a) x^2+6x+7 b) $x^3-3x^2y+7xy^2-y^3$ c) $\sqrt{a+b+c}$ d) a^2+1+a^{-2}

e) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1$ f) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1$ g) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{ab}$ h) $x^{3/2}+x^3+x^2$

3.11 Indicar los Grados Absolutos de los siguientes Términos Algebraicos:

a) $3a^5b^2c^4$ b) $5x^2$ c) 3 d) $\dfrac{7x^2y}{z^4}$ e) $\dfrac{1}{xyz}$ f) $x^5\sqrt{y_0}$

3.12 Indicar los Grados Relativos de los siguientes Polinomios:

a) $3x^2y+5xy^4$ b) $7x+x^2-3$ c) $a^2b^4+ab^3+b^2$ d) p e) $x^5y^3z+x^2y^3z^4$

3.13 Indicar los Grados Absolutos de los siguientes Polinomios:

a) $4x^6+2x^3+1$ b) $x^3-x^2y+xy^2+y^3$ c) $3x^5y^2+2xy^4-7x^3y^6$ d) $x^7+x^4y^3+1$

Hallar n, para grado absoluto 18 e) $x^{3n-1}y^{2n+4}$ f) a^{7n+3}/b^{4n-3}

3.14 Aplicando las Leyes de Exponentes, efectuar las siguientes Operaciones:

a^5a^2 ; a^5a ; $(a^3)^4$; $(abc)^4$; $(a^2b^4c^6)^3$; $x^2x^3x^6$

$\dfrac{a^7}{a^2}$; $\dfrac{a}{a^6}$; $\dfrac{x^2x^6}{x^7}$; $(x^2y^3)^4$; $(a^2b^3c^4)^5$; $(x^6)^{1/2}$

3.15 Aplicando las Leyes de Exponentes, indicar la respuesta correcta en las operaciones:

A) $a^4a^5=\begin{cases} a^{4\cdot5}=a^{20}\\ a^{4+5}=a^9\\ a^5\end{cases}$ B) $\dfrac{a^6}{a^2}=\begin{cases} a^{6/2}=a^3\\ a^{6-2}=a^4\\ 6/2=3\end{cases}$ C) $(a^5)^2=\begin{cases} a^{(5^2)}=a^{25}\\ a^{5\cdot2}=a^{10}\\ a^{5+2}=a^7\end{cases}$

D) $a^{5^2}=\begin{cases} a^{(5^2)}=a^{25}\\ a^{5\cdot2}=a^{10}\\ a^{5+2}=a^7\end{cases}$ E) $(-a)^{3^4}=\begin{cases} (-a)^{(3^4)}=(-a)^{81}=-a^{81}\\ (-a^3)^4=(-a)^{12}=a^{12}\\ (-a^3)^4=(a^3)^4=a^{12}\end{cases}$ F) $\dfrac{1}{\sqrt{a^{-1}}}=\begin{cases} a^{1/2}\\ a^{-1/2}\\ a^2\end{cases}$

G) $(a+b)^2=\begin{cases} a^2+b^2\\ a^2+2ab+b^2\\ \text{Ning.}\end{cases}$ H) $-3^2=\begin{cases} -9\\ +9\\ \text{Ning.}\end{cases}$ I) $\dfrac{1}{x^2+x^4}=\begin{cases} x^{-2}+x^{-4}\\ (x^2+x^4)^{-1}\\ \text{Ning.}\end{cases}$

3.16 Calcular: a) $\dfrac{\dfrac{2}{7}+\dfrac{4}{5}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{8}}$ b) $\dfrac{3-\dfrac{4}{5}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2+\dfrac{5}{7}}}$ c) $\dfrac{\dfrac{8}{3}}{2+\dfrac{1}{5+\dfrac{4}{9}}}$ d) $\dfrac{\dfrac{1}{7}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{7}}}$

3.17 Simplificar a su mínima expresión:

a) $\dfrac{x^7\sqrt{x^6}}{x^8}$ b) $\left[\dfrac{z^{-2}}{\sqrt[3]{z^{-8}}}\right]^9$ c) $\left[\dfrac{a^{-n}a^{m+3}}{a^{-m}a^{n-5}}\right]^{1/2}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{8^5}\ \sqrt[6]{2}}{\sqrt{4^7}}$

e) $\sqrt[mn]{\dfrac{1/a^m}{1/a^n}}$ f) $\sqrt[n]{\dfrac{6^{5n}}{2^{5n}\,3^{-5n}}}$ g) $\sqrt[n]{\dfrac{4\sqrt{4^n}}{\sqrt[3]{8^{n+1}}}}$ h) $\sqrt[n]{\dfrac{3^{2n}\sqrt{9^n}}{(1+\sqrt[3]{8})^n}}$

i) $\dfrac{9^n}{3^{n+1}}$ j) $\sqrt[n]{\dfrac{4^n}{2^{n+1}}}$ k) $\dfrac{9^n-3^n}{3^n-1}$ l) $\dfrac{3^{n+2}+3^{n+4}}{3^{n+3}+3^{n+1}}$ m) $\dfrac{8^{3^{-1}}+9^{2^{-1}}}{8^{-1}-9^{-1}}$

n) $\sqrt[n]{\dfrac{2^{n+2}}{\sqrt[n+2]{4\sqrt{4^n}}}}$ o) $\sqrt[5^n]{\dfrac{25^{5^n}+5^{1+5^n}}{5^{5^n}+5}}$ p) $\sqrt[n]{\dfrac{20^{n+1}}{4^{n+2}+2^{2(n+1)}}}$ q) $\dfrac{4^{-2^{-1}}+16^{-4^{-1}}}{4^{-1}-16^{-1}}$

3.18 Simplificar a mínima expresión:

a) $\dfrac{9^{n+1}+3^{2n+1}}{9^{n+1}-3^{2n+1}}$ b) $\dfrac{5^{x+4}-5^{x+3}+5^{x+2}}{5^{x+2}+5^{x+1}-5^x}$ c) $\sqrt[n]{\dfrac{15^n+35^n}{3^n+7^n}}$ d) $\sqrt[n]{\dfrac{90^{n+1}}{9^{n+2}+3^{2(n+1)}}}$

e) $\left\{\dfrac{x\left[x^2(x^3)^{-1}\right]^{-2}}{x^{-3^{2^2}}(x^{-3})^{2^2}\,x^{(-3)^{2^2}}}\right\}^2$ f) $\sqrt[x-1]{\dfrac{3^{x-1}+4^{x-1}+6^{x-1}}{4^{1-x}+6^{1-x}+8^{1-x}}}$ g) $\sqrt[n+1]{\dfrac{5^{n+1}+\sqrt[n-1]{\dfrac{5^{3n^2-1}+5^{2n^2-1}}{5^{2n^2}+5^{n^2}}}}{2}}$

h) $\dfrac{2^x+2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}}{2^{x-4}}$ i) $\sqrt[x]{\dfrac{2^x+2^{2x}+2^{3x}+2^{4x}}{1+2^x+2^{2x}+2^{3x}}}$

12.9 Demostrar por Inducción matemática:

a) $1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

b) $1^2+3^2+5^2+7^2+\dots+(2n-1)^2=n^2$

c) $1+4+7+\dots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

d) $2+7+12+\dots+(5n-3)=\dfrac{n(5n-1)}{2}$

e) $1+2+4+8+\dots+2^{n-1}=2^n-1$

f) $2+6+18+54+\dots+2\cdot 3^{n-1}=3^n-1$

g) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+\dots+n(n+2)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

h) $1^4+2^4+3^4+4^4+\dots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

i) $a+ar+ar^2+ar^3+\dots+ar^n=\dfrac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$

j) 3^n-1 Es divisible por 2

k) 4^n-1 Es divisible por 3

l) $3^{2n}-1$ Es divisible por 4

m) n^5+5n Es divisible por 3

n) $n^4+2n^3+n^2$ Es divisible por 4

o) $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ Es divisible por 17

p) x^n-1 Es divisible por $x-1$

q) $x^{2n}-y^{2n}$ Es divisible por $x+y$

RESPUESTAS III

3.1 a) 3 ; 9 ; 0.0001 ; 0.99 ; π b) $3.25\cdot 10^2$; $4\cdot 10^{-3}$; $-2.015\cdot 10^3$; $-7.3\cdot 10^{-6}$; $3.16\cdot 10^2$

3.2 a) 8 b) 19 c) 2 d) 4 e) -3 f) -2

3.3 a) 10; 4; 21; 2.33 b) -5; 13; -36; -0.46 c) 3; -13; -40; -0.625 d) -5; 1; 6; 0.66

3.4 a) $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{9}$; 4 b) $\frac{7}{12}$; $\frac{-1}{12}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{3}{4}$ c) $\frac{47}{45}$; $\frac{7}{45}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{27}{20}$ d) $\frac{20}{63}$; $\frac{34}{63}$; $\frac{-1}{21}$; $\frac{-27}{7}$

e) $\frac{5}{8}$; $\frac{3}{32}$ f) $\frac{7}{8}$; $\frac{1}{64}$ g) $\frac{71}{105}$; $\frac{1}{105}$ h) $\frac{25}{36}$; $\frac{1}{1944}$

3.5 $\frac{3}{8}$; $\frac{3303}{1250}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{38}{11}$; $\frac{52733}{9990}$; $\frac{7627}{555}$

3.6 a^3 ; $3x^2$; $-2y^4$; $3/x$

3.9 a) Si ; b) No ; c) No ; d) Si e) No ; f) Si ; g) No

3.10 a) Si ; b) Si ; c) No ; d) No ; e) No ; f) No ; g) No ; h) No

3.11 a) 11 ; b) 2 ; c) 0 ; d) -1 ; e) -3 ; f) 11/2

3.13 a) 6 ; b) 3 ; c) 9 ; d) 7 ; e) $n = 3$; f) $n = 4$

3.12 a) De x: 2 de y: 4 b) De x: 2 c) De a: 2 de b: 4
d) De p: 1 e) De x: 5 de y: 3 de z: 4

3.14 a^7 ; a^6 ; a^{12} ; $a^4b^4c^4$; $a^6b^{12}c^{18}$; x^{11} ; a^5 ; a^{-5} ; x ; x^8y^{12} ; $a^{10}b^{15}c^{20}$; x^3

3.15 A) a^9 B) a^4 C) a^{10} D) a^{25} E) $-a^{81}$
F) $a^{1/2}$ G) $a^2+2ab+b^2$ H) -9 I) $(x^2+x^4)^{-1}$

3.16 a) $\frac{912}{385}$ b) $\frac{627}{200}$ c) $\frac{392}{321}$ b) $\frac{8}{105}$

3.17 a) x^2 b) z^6 c) a^{m-n+4} d) $2^{-11/6}$ e) 3^{10} f) $\sqrt[n]{2}$ g) $a^{\frac{n-m}{mn}}$
h) 9 i) 3^{n-1} j) $2^{1-1/n}$ k) 3^n l) 3 m) 360 n) 2
o) 5 p) 5 q) 16/3

3.18 a) 2 b) 525/29 c) 5 d) 10 e) x^{30} f) 24 g) 5 h) 30 i) 2

IV.- OPERACIONES ALGEBRAICAS

Las principales Operaciones algebraicas son: Suma o Adición, Resta o Diferencia, la Multiplicación o Producto y la División o Cociente.

IV.1 LA SUMA ALGEBRAICA

La Suma o Adición de dos Expresiones Algebraicas llamados Sumandos, es otra Expresión algebraica, llamada Suma.

IV.1.1 SUMA DE MONOMIOS

Para sumar Monomios entre sí: *Se toman los Términos Semejantes, de los cuales se suman sus Coeficientes Numéricos, conservando en el resultado la misma Parte Literal (Términos Semejantes son aquellos que poseen la misma Parte Literal)*"

Los Coeficientes Numéricos se suman por las Reglas de Operaciones Fundamentales (Ver I-3)

Ej 4.1 Se suman dos Monomios entre sí:

$3a^2b \quad ; \quad 5a^2b$

$3a^2b + 5a^2b = 8a^2b$

La Suma es posible, porque son Términos Semejantes entre sí. Se suman los Coeficientes y se anota la misma Parte Literal.

Ej 4.2 a) $2x^3y^4 \quad ; \quad 5x^3y^4 \quad ; \quad 9x^4y^3 \quad ; \quad 6y^4x^3$

$(2x^3y^4 + 5x^3y^4 + 6x^3y^4) + 9x^4y^3 = 13x^3y^4 + 9x^4y^3$

Agrupando Términos Semejantes para sumarlos entre sí. El Término que no es Semejante se anota en el Resultado final.

b) $3p^4q^5 \quad ; \quad 7p^5q^4 \quad ; \quad 6p^4q^5 \quad ; \quad p^5q^4$

$\underline{3p^4q^5} + \underline{\underline{7p^5q^4}} + \underline{6p^4q^5} + \underline{\underline{p^5q^4}} = 9p^4q^5 + 8p^5q^4$

Considerando a los Términos Semejantes para sumarlos entre sí.

c) $4x^2yz^3 \quad ; \quad 7xy^2z^3$

$4x^2yz^3 + 7xy^2z^3 = 4x^2yz^3 + 7xy^2z^3$

No son Términos Semejantes, la Suma no es posible. Como Resultado se anotan a los mismos Términos.

4.1 Sumar los siguientes Monomios entre sí:

a) $5a^2b \quad ; \quad 3ab^2 \quad ; \quad -a^2b \quad ; \quad 4ab^2$

$\underline{5a^2b} + 3ab^2 + \underline{(-a^2b)} + 4ab^2$

$= 4a^2b + 7ab^2$

b) $4x^{m+2}y^n \quad ; \quad 3x^my^{n+1} \quad ; \quad 7x^{2+m}y^n \quad ; \quad 4y^{1+n}x^m$

$\underline{4x^{m+2}y^n} + 3x^my^{n+1} + \underline{7x^{m+2}y^n} + 4x^my^{n+1}$

$= 11x^{m+2}y^n + 7x^my^{n+1}$

Se llaman Términos Semejantes a aquellos Términos que poseen la misma Parte Literal, solo entre éstos Términos es posible la Suma o Resta Algebraica.

IV.1.2 SUMA DE POLINOMIOS

Para obtener la Suma Algebraica de Polinomios entre sí: "*Se toman todos los Términos Semejantes de cada Polinomio, para sumar sus Coeficientes Numéricos, conservando su Parte literal; Así se conforma el Polinomio de la Suma Total*"

Una Regla práctica muy conveniente, consiste en disponer los Polinomios en Columna, de manera tal que los Términos Semejantes se correspondan.

__Ej 4.3__ Se suman dos Polinomios entre sí:

$$2x^4+6x^2+2 \quad ; \quad 5x^4+3x^2+4$$

Dados los Polinomios, se los ordena para luego proceder a su Suma Algebraica.

$$(2x^4+6x^2+2)+(5x^4+3x^2+4)$$
$$=\underline{2x^4}+\underline{\underline{6x^2}}+2+\underline{5x^4}+\underline{\underline{3x^2}}+4$$
$$=7x^4+9x^2+6$$

Se buscan y se suman los Términos Semejantes, por Regla de Suma de Monomios.

$$\begin{array}{r} 2x^4+6x^2+2 \\ +\quad 5x^4+3x^2+4 \\ \hline 7x^4+9x^2+6 \end{array}$$

Otra manera de sumar Polinomios, consiste en ordenarlos en Columna, de manera que los Términos Semejantes se encuentren unos debajo de otros.

La Suma Total es otro Polinomio.

__Ej 4.4__ Se suman dos Polinomios entre sí:

$$3a^5b^2+4a^3b^4+6ab^6 \quad ; \quad 2a^5b^2+9a^4b^3+7a^3b^4$$

$$\begin{array}{rrrr} 3a^5b^2 & & +\,4a^3b^4 & +\,6ab^6 \\ 2a^5b^2 & +\,9a^4b^3 & +\,7a^3b^4 & \\ \hline 5a^5b^2 & +\,9a^4b^3 & +\,11a^3b^4 & +\,6ab^6 \end{array}$$

Los Polinomios se disponen en Columna.

Si algún Término no posee otro Término Semejante, simplemente se lo agrega en el Resultado

__Ej 4.5__ Se suman varios Polinomios entre sí:

$$2p^3-3pq \quad ; \quad 7pq+q^5 \quad ; \quad 4p^3-4q^5$$

Se ordenan los Polinomios.

$$\begin{array}{rrr} 2p^3 & -\,3pq & \\ & 7pq & +\,q^5 \\ 4p^3 & & 4q^5 \\ \hline 6p^3 & +\,4pq & -\,3q^5 \end{array}$$

En la Suma de Términos Semejantes, se usan las Reglas de Suma Aritmética entre los Coeficientes Numéricos.

Ordenando en columna a los Términos Semejantes.

4.2 Efectuar la Suma entre los siguientes Polinomios:

a) $5a^3-3a^2b-4ab^2+b^3 \; ; \; 2a^3+7a^2b-3ab^2+5b^3$

$$\begin{array}{rrrr} 5a^3 & -\,3a^2b & -\,4ab^2 & +\,b^3 \\ 2a^3 & +\,7a^2b & -\,3ab^2 & +\,5b^3 \\ \hline 7a^3 & +\,4a^2b & -\,7ab^2 & +\,6b^3 \end{array}$$

b) $4x^{n+3}+5x^{n+2}-6x^n \; ; \; 3x^{n+2}+8x^{n+1}+9x^n$

$$\begin{array}{rrrr} 4x^{n+3} & +\,5x^{n+2} & & -\,6x^n \\ & 3x^{n+2} & +\,8x^{n+1} & +\,9x^n \\ \hline 4x^{n+3} & +\,8x^{n+2} & +\,8x^{n+1} & +\,3x^n \end{array}$$

Las reglas generales de operaciones algebraicas que se definen para los Polinomios son generalizables a toda Expresión algebraica

IV.2 LA RESTA ALGEBRAICA

La Resta o Diferencia o Sustracción Algebraica de dos Expresiones Algebraicas, llamadas Minuendo y Sustraendo es otra Expresión Algebraica llamada Diferencia.

IV.4.1 RESTA DE MONOMIOS

Para restar Monomios entre sí: *"Se toman los Términos Semejantes, se restan sus Coeficientes Numéricos, conservando la misma Parte Literal en el Resultado o Diferencia"*

El Primer Monomio es el Minuendo y el Segundo es el Sustraendo.

Si los Monomios no son Términos Semejantes, no será posible la Resta.

Ej 4.6 Se restan dos Monomios:

$9a^2b^4 \quad ; \quad 6a^2b^4$

$9a^2b^4 - 6a^2b^4 = 3a^2b^4$

La Resta es posible por ser Términos Semejantes. Restando entre Coeficientes y anotando la misma Parte Literal en el Resultado.

Ej 4.7 Se restan dos Monomios:

$2pq^2r^3 \quad ; \quad -7pq^2r^3$

$2pq^2r^3 - (-7pq^2r^3) = 9pq^2r^3$

Para la Resta entre los Coeficientes Numéricos, se aplican las Reglas de Resta Aritmética. (Ver I-3)

IV.4.2 RESTA DE POLINOMIOS

Para la Resta Algebraica entre dos Polinomios: "*Se toman los Términos Semejantes correspondientes, restando sus Coeficientes numéricos, conservando la Parte literal*".

Una Regla Práctica consiste en disponer los Polinomios en columna, de manera tal que los Términos Semejantes se correspondan, otra modo consiste en aplicar la Regla de los Signos en la Resta indicada, lo que cambia todos los Signos del Sustraendo.

Ej 4.8 $9x^2 + 6x - 3 \quad ; \quad 4x^2 - 2x - 7$

Dados los Polinomios a restar.

$$(9x^2 + 6x - 3) - (4x^2 - 2x - 7)$$
$$= 9x^2 + 6x - 3 - 4x^2 + 2x + 7$$
$$= 5x^2 + 8x + 4$$

Tras aplicar la Regla de los Signos, se procede como en la Suma de Polinomios (Sumandolos Términos Semejantes)

$$\begin{array}{r} 9x^2 + 6x - 3 \\ -\quad 4x^2 - 2x - 7 \\ \hline 5x^2 + 8x + 4 \end{array}$$

Otro modo, ordenando en Columna, donde se corresponden los Términos Semejantes y restando los Coeficientes Numéricos.

$\boxed{4.3}$ Efectuar las restas entre los siguientes Polinomios:

a) $5p^3 + 6p^2q - 7pq^2 + 4q^3 \; ; \; 2p^3 - 3p^2q - 9pq^2 - q^3$

$$\begin{array}{r} 5p^3 + 6p^2q - 7pq^2 + 4q^3 \\ -\quad 2p^3 - 3p^2q - 9pq^2 - q^3 \\ \hline 3p^3 + 9p^2q + 2pq^2 + 5q^3 \end{array}$$

b) $a^2 - 5a + 1 \quad ; \quad a^2 - 3$

$$\begin{array}{r} a^2 - 5a + 1 \\ -\quad a^2 \quad\quad - 3 \\ \hline -5a + 4 \end{array}$$

IV.3 LA MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

La Multiplicación Algebraica o Producto entre dos Expresiones Algebraicas llamados FACTORES es una Operación que determina a otra Expresión Algebraica llamada PRODUCTO TOTAL.

IV.3.1 MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS

Para multiplicar Monomios entre sí: "*Se multiplican los Signos, por las Leyes de Signos, se multiplican los Coeficientes Numéricos y en la Parte Literal se aplican las Leyes de Exponentes*"

Ej 4.9 Se multiplican dos Monomios:

$6a^5b^2 \quad ; \quad 4a^3b^7$

$(6a^5b^2)(4a^3b^7) = (6\cdot4)\,a^{5+3}b^{2+7} = 24a^8b^9$

Se multiplican los Coeficientes: $6\cdot4 = 24$
En la Parte Literal se aplican Leyes de Exponentes. Ver III.5

Ej 4.10 Se multiplican algebraicamente los siguientes Monomios:

a) $2x^3y^6 \quad ; \quad -4x^2y$

$(2x^3y^6)(-4x^2y) = -8x^5y^7$

b) $-7x^3y^8 \quad ; \quad 5a^2b^6$

$(-7x^3y^8)(5a^2b^6) = -35a^2b^6x^3y^8$

Se usa la Ley de Signos, luego se multiplican los Coeficientes Numéricos.

La Parte Literal se multiplica usando las Leyes de Exponentes, se aplica III-5: El Producto de Potencias de la misma Base, es la Base elevada a la Suma de Exponentes.

> En el Ejemplo anterior, tome muy en cuenta que: $x^3x^2 = x^5$ Según las Leyes de exponentes, no siendo correcto: $x^3x^2 = x^6$ (Los exponentes se suman, no se multiplican)

4.4 Multiplicar algebraicamente los siguientes Monomios:

a) $2a^5b \quad ; \quad -3ab^2 \quad ; \quad -4a^3b^4$

$(2a^5b)(-3ab^2)(-4a^3b^4) = 24a^9b^7$

b) $-4x^2 \quad ; \quad -7x \quad ; \quad -3$

$(-4x^2)(-7x)(-3) = -84x^3$

c) $3x^n \quad ; \quad 2x^m \quad ; \quad 4x^r$

$(3x^n)(2x^m)(4x^r) = 24x^{n+m+r}$

d) $a^{4m+2} \quad ; \quad a^{3m+6}$

$(a^{4m+2})(a^{3m+6}) = a^{7m+8}$

IV.3.2 MULTIPLICAR MONOMIOS POR POLINOMIOS

Para multiplicar un Monomio por un Polinomio, se aplica la Propiedad P9 de los Números Reales (Propiedad Distributiva), que expresa:

$$\boxed{a(b + c) = ab + ac}$$

Luego se aplica la Regla de Multiplicación de Monomios, en los Productos entre Monomios que quedan.

Ej 4.11 Se efectúa la Multiplicación Algebraica de un Monomio con un Polinomio:

$9a^7 \quad ; \quad 3a^4 + 6a^2$

$(9a^7)(3a^4 + 6a^2) = (9a^7)(3a^4) + (9a^7)(6a^2)$

$= 27a^{11} + 54a^9$

Luego de distribuir el Monomio, multiplicando a cada Término del Polinomio, se multiplican como Monomios.

4.5 Multiplicar algebraicamente un Monomio con un Polinomio:

a) $8x^4y \quad ; \quad 2x^7y^2 - 3x^5y^4 + 9x^3y^6$

$$(8x^4y)(2x^7y^2 - 3x^5y^4 + 9x^3y^6) = (8x^4y)(2x^7y^2) - (8x^4y)(3x^5y^4) + (8x^4y)(9x^3y^6)$$
$$= 16x^{11}y^3 - 24x^9y^5 + 72x^7y^7$$

b) $3x^n \ ; \ 5x^{3n} - 4x^n$

$3x^n(5x^{3n} - 4x^n)$

$= 15x^{n+3n} - 12x^{n+n}$

$= 15x^{4n} - 12x^{2n}$

c) $2x^{n+1} \ ; \ 3x^{n-1} - 7x^{2n+3}$

$2x^{n+1}(3x^{n-1} - 7x^{2n+3})$

$= 6x^{n+1+n-1} - 14x^{n+1+2n+3}$

$= 6x^{2n} - 14x^{3n+4}$

d) $a^{m-n} \ ; \ a^{n-m} - a^{n+m}$

$a^{m-n}(a^{n-m} - a^{n+m})$

$= a^{m-n+n-m} - a^{m-n+n+m}$

$= 1 - a^{2m}$

IV.3.3 MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Para multiplicar Polinomios entre sí: "*Se aplica reiteradamente la Propiedad* **P9** *de los Números Reales (Distributividad)*"

Todos y cada uno de los Términos del Multiplicador, deben multiplicar a su vez a todos y cada uno de los Términos del Multiplicando. Básicamente se emplea el siguiente desarrollo:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$$
$$= ac + ad + bc + bd$$

Ej 4.12 Se multiplican algebraicamente los siguientes Polinomios:

$4a^5 + 2a^3 \quad ; \quad 9a^8 + 7a^6$

$(4a^5 + 2a^3)(9a^8 + 7a^6)$

$= (4a^5)(9a^8 + 7a^6) + (2a^3)(9a^8 + 7a^6)$

$= (4a^5)(9a^8) + (4a^5)(7a^6) + (2a^3)(9a^8) + (2a^3)(7a^6)$

$= 36a^{13} + 28a^{11} + 18a^{11} + 14a^9 = 36a^{13} + 46a^{11} + 14a^9$

Por la Distributividad:

Cada uno de los Términos del 1er Polinomio, multiplica a todos los Términos del 2do Polinomio

Multiplicando luego como Monomios.

$$\begin{array}{r} 9a^8 + 7a^6 \\ 4a^5 + 2a^3 \\ \hline 36a^{13} + 28a^{11} \\ 18a^{11} + 14a^9 \\ \hline 36a^{13} + 46a^{11} + 14a^9 \end{array}$$

Otra manera de multiplicar Polinomios, consiste en disponer de manera tal que en los Productos parciales, los Términos Semejantes queden debajo unos de otros.

La Suma indicada se realiza directamente, luego de encolumnar los Términos Semejantes.

Este modo práctico, sin embargo es aplicable solamente en el caso de multiplicación de Polinomios previamente ordenados.

4.6 Multiplicar algebraicamente los siguientes Polinomios entre sí:

a) $5x + 2 \quad ; \quad x^2 + 7x + 4$

$$\begin{array}{r} x^2 + 7x + 4 \\ 5x + 2 \\ \hline 5x^3 + 35x^2 + 20x \\ 2x^2 + 14x + 8 \\ \hline 5x^3 + 37x^2 + 34x + 8 \end{array}$$

b) $a^3 + a^2 + 1 \quad ; \quad 2a^3 + 2a + 1$

$$\begin{array}{r} 2a^3 + 2a + 1 \\ a^3 + a^2 + 1 \\ \hline 2a^6 + 2a^4 + a^3 \\ 2a^5 + 2a^3 + a^2 \\ 2a^3 + 2a + 1 \\ \hline 2a^6 + 2a^5 + 2a^4 + 5a^3 + a^2 + 2a + 1 \end{array}$$

c) $4x^3-2x^2y+7xy^2-y^3 \;;\; x^2-6xy+y^2$

$$
\begin{array}{r}
4x^3-2x^2y+7xy^2-y^3 \\
x^2-6xy+y^2 \\
\hline
4x^5-2x^4y+7x^3y^2-x^2y^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
-24x^4y+12x^3y^2-42x^2y^3+6xy^4 \qquad\qquad \\
4x^3y^2-2x^2y^3+7xy^4-y^5 \\
\hline
4x^5-26x^4y+23x^3y^2-45x^2y^3+13xy^4-y^5
\end{array}
$$

d) $x+1 \;;\; x^{n+1}+x^n+x^{n-1}$

$$
\begin{array}{r}
x^{n+1}+x^n+x^{n-1} \\
x+1 \\
\hline
x^{n+2}+x^{n+1}+x^n \qquad\quad \\
x^{n+1}+x^n+x^{n-1} \\
\hline
x^{n+2}+2x^{n+1}+2x^n+x^{n-1}
\end{array}
$$

Para multiplicar Polinomios grandes y ordenados, es muy conveniente la distribución en Columna de manera de realizar directamente las Sumas de Términos Semejantes.

4.7 Considerando las Reglas del Producto y las Leyes de exponentes, indicar la respuesta correcta:

a) $(2x^3)(4x^5)=\begin{cases}8x^{15}\\ 8x^8\\ 8x^5\end{cases}$ b) $a^5+a^3=\begin{cases}a^8\\ a^{15}\\ a^5\end{cases}$ c) $x^{2n-1}\,x^{1-2n}=\begin{cases}1\\ (x^{2n-1})^2\\ x^{-(2n-1)^2}\end{cases}$

Respectivamente las Respuestas en cada caso son a) 2da (Porque los exponentes deben sumarse); b) Ninguna (No son Términos semejantes, no hay operación alguna entre sus exponentes, no hay simplificación); c) 1^{era} (Al sumarse los exponentes queda cero. Toda base a exponente cero es 1)

d) $a+bc=\begin{cases}(a+b)(a+c)\\ (a+b)c\\ a+(bc)\end{cases}$ e) $(a+b)^2=\begin{cases}a^2+b^2\\ (a+b)(a+b)\\ 2ab\end{cases}$ f) $(a\cdot b)^3=\begin{cases}a^3\cdot b\\ a\cdot b^3\\ a^3\cdot b^3\end{cases}$

Las Respuestas son las opciones: d) 3^{era} (No hay Distributividad de la suma al producto ni agrupación de algunos Términos); e) 2da (La potencia cuadrado significa que la base se multiplica por si misma); f) 3^{era} (Por Ley de Exponentes, ambos factores se elevan a la potencia común).

IV.4 LA DIVISIÓN ALGEBRAICA

La División o Cociente algebraico entre dos Expresiones Algebraicas, llamados Dividendo y Divisor determina otra Expresión Algebraica llamada Cociente.

IV.4.1 DIVISIÓN DE MONOMIOS

Para dividir Monomios entre sí: "*Se dividen los Signos, por la Regla de los Signos, se dividen los Coeficientes Numéricos, y sobre la Parte literal se aplican las Leyes de Exponentes*"

Ej 4.13 Se dividen algebraicamente entre sí los siguientes Monomios:

a) $8a^9b^7 \;;\; 2a^3b^5$

$$\frac{8a^9b^7}{2a^3b^5}=\frac{8}{2}a^{9-3}b^{7-5}=4a^6b^2$$

Luego de dividir los Coeficientes Numéricos, en la Parte Literal, se aplican las Leyes de Exponentes.

b) $12x^4y^2 \;;\; 4x$

$$\frac{12x^4y^2}{4x}=\frac{12}{4}x^{4-1}y^2=3x^3y^2$$

Tome en cuenta que se asume que x, posee una potencia 1; la expresión de y^2 no tiene entre que dividirse, directamente se la copia en el resultado.

4.8 Dividir algebraicamente los siguientes Pares de Monomios.

a) $-12x^7y^4 \quad ; \quad 3x^2y$

$$\frac{-12x^7y^4}{3x^2y} = -\frac{12x^7y^4}{3x^2y} = -4x^5y^3$$

b) $18p^5q^4r^3 \quad ; \quad -6p^4q^4$

$$\frac{18p^5q^4r^3}{-6p^4q^4} = -\frac{18p^5q^4r^3}{6p^4q^4} = -3pr^3$$

c) $-4u^{7m}v^{3n}w \quad ; \quad -u^mv^n$

$$\frac{-4u^{7m}v^{3n}w}{-u^mv^n} = \frac{4u^{7m}v^{3n}w}{u^mv^n} = 4u^{6m}v^{2n}w$$

d) $x^{5m-3n+1} \quad ; \quad x^{2m-7n-4}$

$$\frac{x^{5m-3n+1}}{x^{2m-7n-4}} = x^{(5m-3n+1)-(2m-7n-4)} = x^{3m+4n+5}$$

IV.4.2 DIVISIÓN DE POLINOMIOS ENTRE MONOMIOS

Para dividir un Polinomio entre un Monomio, se aplica la Propiedad:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Proviene de la Distributividad de los Números Reales, luego se aplican las Reglas de División de Monomios.

Ej 4.14 Se divide un Polinomio entre un Monomio:

$12a^9 + 6a^7 \quad ; \quad 3a^4$

$$\frac{12a^9+6a^7}{3a^4} = \frac{12a^9}{3a^4} + \frac{6a^7}{3a^4}$$
$$= 4a^5 + 2a^3$$

En el Dividendo el Polinomio está constituido por varios Monomios.

Cada uno de los Monomios del Polinomio se divide entre el Monomio del Divisor, por Reglas conocidas.

4.9 Dividir algebraicamente los Polinomios entre los Monomios indicados.

a) $12p^7q^4 - 6p^3q^5 + 18p^4q^3 \quad , \quad -6p^3q^3$

$$\frac{12p^7q^4 - 6p^3q^5 + 18p^4q^3}{-6p^3q^3}$$
$$= \frac{12p^7q^4}{-6p^3q^3} - \frac{6p^3q^5}{-6p^3q^3} + \frac{18p^4q^3}{-6p^3q^3}$$
$$= -2p^4q + q^2 - 3p$$

b) $6x^{5n+2}y^{7n} - 8x^{4n-4}y^{5n} + 2x^{2n+6}y^{4n} \quad ; \quad 2x^{2n-3}y^{3n}$

$$\frac{6x^{5n+2}y^{7n} - 8x^{4n-4}y^{5n} + 2x^{2n+6}y^{4n}}{2x^{2n-3}y^{3n}}$$
$$= \frac{6x^{5n+2}y^{7n}}{2x^{2n-3}y^{3n}} - \frac{8x^{4n-4}y^{5n}}{2x^{2n-3}y^{3n}} + \frac{2x^{2n+6}y^{4n}}{2x^{2n-3}y^{3n}}$$
$$= 3x^{3n+5}y^{4n} - 4x^{2n-1}y^{2n} + x^9y^n$$

IV.4.3 DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Para dividir dos Polinomios entre sí, El Dividendo entre el Divisor, se siguen los siguientes pasos:

- Se ordenan los Polinomios, siguiendo un Orden decreciente, escribiendo luego el Dividendo y Divisor separados entre sí por Líneas verticales y horizontales.
- Se divide entre los Primeros Términos (División entre Monomios), el Resultado se coloca debajo del Divisor.
- El Resultado anterior se multiplica por el Divisor, este Producto se coloca debajo del Dividendo para luego restar. (Para efectuar esta resta directamente se puede cambiar de signos).
- La Resta obtenida a la que se agregan los Términos del Dividendo que aún no dividieron, se divide entre el Divisor, de acuerdo a Regla anterior.
- Se reiteran los pasos anteriores, hasta que el Resto sea cero o de Grado menor al Divisor.

El Resultado de la División se llama Cociente, Si la División no es exacta la Expresión que ya no puede dividirse, se llama Residuo (Al Dividendo se lo llama también Numerador y al Divisor Denominador)

Si se llama: N al Numerador, D al Denominador, C al Cociente y R al Residuo, se tiene:

$$\frac{\textbf{Numerador}}{\textbf{Denominador}} = \textbf{Cociente} + \frac{\textbf{Residuo}}{\textbf{Denominador}} \Rightarrow \frac{N}{D} = C + \frac{R}{D}$$

Esta Expresión suele llamarse Expresión General del Cociente.

Obviamente si el Residuo es cero, la Expresión anterior se reduce a:

$$\frac{\textbf{Numerador}}{\textbf{Denominador}} = \textbf{Cociente} \Rightarrow \frac{N}{D} = C$$

Ej 4.15 $6x^2 + 7x + 9 \quad ; \quad 2x + 5$

$$\begin{array}{rrr|l} 6x^2 & +7x & +9 & 2x+5 \\ \cline{4-4} -6x^2 & -15x & & 3x-4 \\ \hline & -8x & +9 & \\ & 8x & +20 & \\ \hline & & 29 & \end{array}$$

$$\frac{6x^2 + 7x + 9}{2x + 5} = 3x - 4 + \frac{29}{2x + 5}$$

Disponiendo en forma ordenada, para dividir

Dividiendo entre Primeros Términos ($6x^2$, $2x$), se obtiene: $3x$. Este 1[er] Resultado, multiplica al Divisor, que irá a restar al Dividendo (Con Signo ya cambiado para restar)

A la resta obtenida se agrega el restante Término (9), para luego volver a dividir.

El *Cociente* es: $3x - 4$, el *Residuo* es: 29

Se escribe como: Expresión General del Cociente.

4.10 Dividir algebraicamente los siguientes Pares de Polinomios entre sí:

a) $12a^3 - 4a^2 + 9a - 7 \ ; \ 3a^2 + 5a + 1$

$$\begin{array}{rrrr|l} 12a^3 & -4a^2 & +9a & -7 & 3a^2+5a+1 \\ \cline{5-5} -12a^3 & -20a^2 & -4a & & 4a-6 \\ \hline & -24a^2 & +5a & -7 & \\ & 24a^2 & +30a & +6 & \\ \hline & & 2a & -13 & \end{array}$$

$$\frac{12a^3 - 4a^2 + 9a - 7}{3a^2 + 5a + 1} = 4a - 6 + \frac{2a - 13}{3a^2 + 5a + 1}$$

b) $8x^2 - 2xy - 3y^2 \ ; \ 2x + y$

$$\begin{array}{rrr|l} 8x^2 & -2xy & -3y^2 & 2x+y \\ \cline{4-4} -8x^2 & -4xy & & 4x-3y \\ \hline & -6xy & -3y^2 & \\ & 6xy & +3y^2 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

$$\frac{8x^2 - 2xy - 3y^2}{2x + y} = 4x - 3y$$

4.11 Se sabe que la división entre: $2a^3 - 5a^2 + 4a + 16$; $a^2 - 4a + 5$; tiene el Cociente dado por: $2a + 3$; Hallar el Residuo sin efectuar la división.

Si: $\dfrac{N}{D} = C + \dfrac{R}{D} \Rightarrow \dfrac{R}{D} = \dfrac{N}{D} - C \Rightarrow R = N - CD$

A partir de la Expresión General de Cociente. Despejando el Residuo R

$R = (2a^3 - 5a^2 + 4a + 16) - (2a + 3)(a^2 - 4a + 5)$

$R = (2a^3 - 5a^2 + 4a + 16) - (2a^3 - 5a^2 - 2a + 15)$

$R = 6a + 1$

Reemplazando Numerador (N), Denominador (D) y Cociente C conocido.

4.12 Indicar la Respuesta Correcta en cada caso

a) $3a + 2 = \begin{cases} 3a \\ 5a \\ 5 \\ \text{Ning.} \end{cases}$

b) $5x^4y^2 + 3x^2y^4 = \begin{cases} 5x^4y^4 \\ 8x^4y^4 \\ 8x^6y^6 \\ \text{Ning.} \end{cases}$

c) $\dfrac{x + y}{z} = \begin{cases} \dfrac{x}{z} + y \\ \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z} \\ x + \dfrac{y}{z} \end{cases}$

Las respuestas respectivamente son: a) Ninguno; b) Ninguno (Porque en ambos casos no hay Términos Semejantes); c) La 2[da] (Por la Propiedad Distributiva del numerador al denominador)

d) $\dfrac{a}{b+c} = \begin{cases} \dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c} \\ \dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{c} \\ \dfrac{a}{b}+c \end{cases}$ e) $\dfrac{x+y}{a+b} = \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \\ \dfrac{x+y}{a}+\dfrac{x+y}{b} \\ \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a+b} \end{cases}$ f) $\dfrac{x+y}{x} = \begin{cases} 1+\dfrac{y}{x} \\ \dfrac{y}{x} \\ y \end{cases}$

Las respuestas son: d) Ninguna (No hay Distributividad sobre suma en el denominador) ; e) 3^{era} (Por la Distributividad del Numerador) y f) 1^{era} opción. (Tras distribuir y simplificar)

IV.5 TEOREMA DEL RESTO

El Teorema del Resto, llamado también Teorema del Residuo o Teorema de Horner, permite conocer el *Residuo* de una División Algebraica, sin que sea necesario efectuar la División.

El Teorema expresa: "El Residuo de dividir el Polinomio: $P_{(x)}$ entre un Binomio de la Forma: $x - a$, se obtiene sustituyendo en: x el valor de: a" (Entonces $\boldsymbol{R} = P_{(a)}$)

El Teorema se generaliza para el caso de división entre binomios de la forma $bx + c$; En tal caso se sustituye $-c/b$ en lugar de x del Polinomio $P_{(x)}$

Ej 4.16 Se determina el Residuo de un Cociente, sin dividir:

a) $3x^2+5x+4 \quad ; \quad x-2$

$P_{(x)} = 3x^2+5x+4 \quad ; \quad a = 2$

$\boldsymbol{R} = P_{(a)} = P_{(2)} = 3\cdot 2^2+5\cdot 2+4 = 26$

Llamando $P_{(x)}$ al Dividendo.

Para hallar el Residuo, se reemplaza en $P_{(x)}$ en lugar de x, al valor: 2. Tal Residuo es 26

$$\begin{array}{rl|l} 3x^2+5x+4 & & x-2 \\ \cline{3-3} -3x^2+6x & & 3x+11 \\ \cline{1-1} 11x+4 & & \\ -11x+22 & & \\ \cline{1-1} 26 & & \end{array}$$

Por simple División, se verifica el mismo resultado.

Por tanto queda confirmado el valor del Residuo: $R = 26$

b) $6x^2-5x+8 \quad ; \quad 2x-3$

$P_{(x)} = 6x^2-5x+8 \quad ; \quad a = 3/2$

$\boldsymbol{R} = P_{(a)} = P_{(3/2)} = 6\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 5\cdot\dfrac{3}{2}+8 = 14$

Para hallar el Residuo, se reemplaza en $P_{(x)}$ en lugar de x, al valor: 3/2. Tal Residuo es 14. Note que para el Teorema se usa un valor de a que sea raíz del denominador.

IV.5.1 DIVISIÓN SINTÉTICA

En la División Algebraica de Polinomios de la Forma $P_{(x)}$ entre: $x - a$, se cumplen siempre las siguientes Reglas: (Para comprobación se puede observar la anterior División efectuada)

- El Grado del Cociente es menor en uno al Grado de $P_{(x)}$
- El Coeficiente del 1er Término del Cociente es el mismo que del 1er Término de $P_{(x)}$
- El Coeficiente del 2do Término se obtiene de la Suma entre el 2do Término de $P_{(x)}$ y el Producto entre el 1er Término del Cociente con: a
- Los restantes Coeficientes del Cociente se obtiene de manera equivalente al 2do
- El Residuo se obtiene de la Suma entre el Último Término de $P_{(x)}$ y el producto del Último Término del Cociente con: a

Aplicando estas Reglas, es posible dividir directamente, esta Forma de División se llama División Sintética

Ej 4.17 Se efectúa la División del **Ej 4.16** $(3x^2+5x+4)/(x-2)$

$P_{(x)} = 3x^2 + 5x + 4$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & & 4 & 2 \\ & 3\cdot 2 = 6 & 11\cdot 2 = & 22 & \\ \hline 3 & 11 & & \underline{26} & \end{array}$$

Se disponen los Coeficientes de $P_{(x)}$, luego: $a = 2$.
Se aplican Reglas anteriores, tal como una División

Las Sumas se encuentran en la última fila.

El Residuo es el Último numero de las sumas indicadas: $R = 26$.

Los Coeficientes del Cociente son los Primeros Términos de las Sumas (Respectivamente 3 y 11), se debe recordar que su Grado es uno menor al de $P_{(x)}$, entonces tal Cociente es: $3x + 11$

b) $4x^3 - 10x^2 + 5x - 18 \;\; ; \;\; x - 3$

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & -10 & 5 & 18 & 3 \\ & 12 & 6 & 33 & \\ \hline 4 & 2 & 11 & \underline{15} & \end{array}$$

Cociente: $4x^2 + 2x + 11$; Residuo 15

Se disponen los Coeficientes de $P_{(x)}$ con $a = 3$
Directamente baja el 1^er^ Coeficiente (4). Este valor (4) se multiplica por a (3) y se coloca debajo del 2^do^ Coeficiente, para luego sumar $(-10 + 12 = 2)$

De la misma manera se procede posteriormente.

4.11 a) Calcular el valor de k, para que la división sea exacta: $6x^2 - 16x + k \;\; ; \;\; x - 2$

$$\begin{array}{rl} 6x^2 - 16x + k & \underline{|\; x - 2\;} \\ \underline{-6x^2 + 12x} & \;\; 6x - 4 \\ -4x + k & \\ \underline{+4x - 8} & \\ k - 8 & \end{array}$$

$R = P_{(a)} \;;\;\; P_{(x)} = 6x^2 - 16x + k$

$P_{(2)} = 6\cdot 2^2 - 16\cdot 2 + k$

$P_{(2)} = -8 + k = 0 \;\Rightarrow\; k = 8$

Existen dos modos para este cálculo:

Procediendo a la división por reglas usuales. Para que la división sea exacta, el residuo debe ser cero, lo obtenido como Residuo precisamente se lo iguala a cero, despejando se logra el valor de k.

Entonces el Residuo es: $k - 8 = 0 \Rightarrow k = 8$

Otro modo más práctico consiste en emplear el Teorema del Residuo, que calcula directamente el Residuo, éste se iguala a cero.

b) Para que el Residuo sea 3, calcular el valor de r en: $\dfrac{5x^2 + 12x + 7}{x + r}$

$R = P_{(a)} \;;\;\; P_{(x)} = 5x^2 + 12x + 7$

$P_{(-r)} = 5(-r)^2 + 12(-r) + 7$

$\Rightarrow\; 5r^2 - 12r + 7 = 3$

$\Rightarrow\; 5r^2 - 12r + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} r_1 = 2 \\ r_2 = 2/5 \end{array}$

Expresando como un Polinomio al numerador.

Aplicando el Teorema del Residuo, lo obtenido es el Residuo que debe ser igual a 3.

Se presenta así una Ecuación de Segundo Grado, resolviendo la misma se logra lo requerido para r. (Ver Ecuaciones Cuadráticas Cap IX.3)

c) Para que la división sea exacta hallar: m, n en: $(2x^3 + x^2 + mx + n)/(x^2 - 3x + 5)$

$$\begin{array}{rl} 2x^3 + x^2 + mx + n & \underline{|\; x^2 - 3x + 5\;} \\ \underline{-2x^3 + 6x^2 - 10x} & \;\; 2x + 7 \\ 7x^2 + (m-10)x + n & \\ \underline{-7x^2 + 21x - 35} & \\ (m+11)x + n - 35 & \end{array}$$

$R = (m+11)x + n - 35$

$(m+11)x + (n-35) = 0$

$\Rightarrow\; m + 11 = 0$

$m = -11$

$\Rightarrow\; n - 35 = 0$

$n = 35$

Dividiendo del modo habitual.

Para que el Residuo sea cero. Se igualan sus coeficientes a cero.

IV.- PROBLEMAS PROPUESTOS

4.1 Sumar entre sí los siguientes Monomios:

a) $5x^2y$; $4x^2y$ b) $3a^4b^2c$; $5a^4b^2c$; $-a^4b^2c$ c) $6m^2n$; $7mn^2$; $-8m^2n$

b) $3a$; $-b^2$; $4b^2$; a e) $2x^{m+3}y^n$; $5x^{m+3}y^n$; $-2x^{m+3}y^n$ f) p^5q^2 ; $-4p^5q^2$; $3p^5q^2$

4.2 Sumar los siguientes Polinomios:

a) $3x^2+7x+4$; $4x^2+2x+3$ c) $3a^4+4a^2b^2+5b^2$; $5a^4+6a^2b^2+2b^2$; $a^4-3a^2b^2+4b^2$

b) $4x^4+6x+1$; $5x^4+2x^3+4$ d) $3x^{m+1}+5x^m+2$; $4x^{m+1}+x^m+2$; $-3x^{m+1}+2x^m-2$

4.3 Restar los siguientes Monomios:

a) $9x^2y$; $3x^2y$ b) $7a^2b^4c^6$; $5a^2b^4c^6$ c) $8a^3b$; $-5ab^3$

d) $3x^5y^4$; $-6y^4x^5$ e) $3x^my^n$; $-5x^my^n$ f) $4x^{n+3}$; $-2x^{n+3}$

4.4 Restar los siguientes Polinomios:

a) $6x^2+7x+4$; $2x^2+3x+1$ b) $3a^6+2a^3b^3+7b^6$; $a^6-6a^3b^3+2b^6$

c) $5x^4+6x^2+1$; $4x^2+3x+6$ d) $7x^{m+n}+3x^m+6x^n$; $2x^{m+n}+9x^m+2x^n$

4.5 Multiplicar los siguientes Monomios:

a) $3x^2$ $2x^4$ b) $4x^2y^5$; $-2xy^4$ c) $2a^6b$; $-3a^2b^2$; $4ab^5$

d) $-9a^5b^2$; $-3a^4b^3$ e) $2x^my^{2n}$; $3x^{4m}y^{6n}$ f) $6p^5q$; $2p^2$; q^5 ; $4pq$

4.6 Multiplicar los siguientes Monomios por los Polinomios indicados:

a) $5a^2$; $3a^2+4a+2$ b) $6x^2y^4$; $x^2+7xy+y^2$

c) $-2ab^3$; $-5ab^2+7a^2b$ d) $3x^ny^m$; $x^{2n}+x^ny^m+y^{2m}$

4.7 Multiplicar los siguientes Polinomios entre sí:

a) $3x+4$; x^2+9x+4 b) $2x-1$; x^3+6x^2+7x-2 c) x^2+1 ; x^4+6x^2+1

d) $3x+2y$; $x^2+7xy+4y^2$ f) x^2+3x+1 ; x^2+5x+7 e) x^n+1 ; $x^{2n}+x^n+3$

4.8 Dividir los siguientes Monomios entre sí:

a) $8a^5$; $2a^3$ b) $6x^5y^9$; $-2x^2y^4$ c) $-9p^6q^9$; $-3p^2q^7$

d) $-18a^6b^4$; $6a^3b^3$ e) $6x^{3n+5}$; $2x^{n+1}$ f) $12x^{3m}y^{2n}$; $6x^my^n$

4.9 Dividir los siguientes Polinomios entre los Monomios indicados:

a) $6a^5+8a^7$; $2a^2$ b) $18x^7+12x^5+9x^4$; $3x^4$

c) $8a^2b+6ab+4ab^2$; $2ab$ d) $4x^{m+6}+3x^{m+4}+7x^{m+2}$; x^{m+1}

4.10 Dividir los siguientes Polinomios entre sí:

a) x^2+7x+6 ; $x+4$ c) $5x^2+6xy+7y^2$; $x+2y$ e) $x^5+4x^4-27x^3+44x^2-34x+12$

b) x^2-6x+8 ; $x-2$ d) $4x^3+10x^2+8x-9$; $2x+3$ x^3+7x^2-8x+6

4.11 Por el Teorema del Resto, hallar los Residuos, directamente en los Cocientes:

a) $7x^2 - 6x + 8 \;;\; x - 3$ b) $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \;;\; x + 1$

c) $8x^2 - 4x - 9 \;;\; 2x - 5$ d) $54x^3 + 27x^2 - 6x + 77 \;;\; 3x + 4$

4.12 Efectuar la División Sintética entre los siguientes Polinomios:

a) $x^2 + 8x + 6 \;;\; x - 4$ b) $x^3 - 6x^2 + 7x + 2 \;;\; x - 6$

4.13 Para división exacta. Calcular el valor de k, en a); b); c); d). En e) calcular m, n

a) $\dfrac{2x^3 - 2x^2 + kx - 15}{x - 3}$ b) $\dfrac{3x^2 - x - 10}{x - k}$ c) $\dfrac{(x + 4n)^5 - (x^5 + kn^5)}{x + 3n}$

d) $\dfrac{3x^2 + 17x - k}{x + k}$ e) $\dfrac{3x^4 + 7x^3 - 14x^2 + mx + n}{x^2 + 2x - 5}$

4.14 Si: $A = 3a^2 + 6ab - b^2 \;;\; B = 7a^2 - 9ab + 3b^2$; Calcular a) $5A - 2B$ b) $7A - 3B$

RESPUESTAS IV

4.1 a) $9x^2y$; b) $7a^4b^2c$; c) $-2m^2n + 7mn^2$; d) $4a + 3b^2$; e) $5x^{m+3}y^n$; f) 0

4.2 a) $7x^2 + 9x + 7$ b) $9x^4 + 2x^3 + 6x + 5$ c) $9a^4 + 7a^2b^2 + 11b^2$ d) $4x^{m+1} + 8x^m + 2$

4.3 a) $6x^2y$; b) $2a^2b^4c^6$; c) $8a^3b + 5ab^3$; d) $9x^5y^4$; e) $8x^my^n$; f) $6x^{n+3}$

4.4 a) $4x^2 + 4x + 3$; b) $2a^6 + 8a^3b^3 + 5b^6$; c) $5x^4 + 6x^2 - 3x - 5$; d) $5x^{m+n} - 6x^m + 4x^n$

4.5 a) $6x^6$; b) $-8x^3y^9$; c) $-24a^9b^8$; d) $27a^9b^5$; e) $6x^{5m}y^{8n}$; f) $48p^8q^7$

4.6 a) $15a^4 + 20a^3 + 10a^2$ b) $6x^4y^4 + 42x^3y^5 + 6x^2y^6$

c) $10a^2b^5 - 14a^3b^4$ d) $3x^{3n}y^m + 3x^{2n}y^{2m} + 3x^ny^{3m}$

4.7 a) $3x^3 + 31x^2 + 48x + 16$ b) $2x^4 + 11x^3 + 8x^2 - 11x + 2$ c) $x^6 + 7x^4 + 7x^2 + 1$

d) $3x^3 + 23x^2y + 26xy^2 + 8y^3$ e) $x^{3n} + 2x^{2n} + 4x^n + 3$ f) $x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 26x + 7$

4.8 a) $4a^2$; b) $-3x^3y^5$; c) $3p^4q^2$; d) $-3a^3b$; e) $3x^{2n+4}$; f) $2x^{2m}y^n$

4.9 a) $3a^3 + 4a^5$; b) $6x^3 + 4x + 3$; c) $4a + 3 + 2b$; d) $4x^5 + 3x^3 + 7x$

4.10 a) $x + 3$; $R = -6$ b) $x - 4$; $R = 0$ c) $5x - 4y$; $R = 15y^2$

d) $2x^2 + 2x + 1$; $R = -12$ e) $x^2 - 3x + 2$; $R = 0$

4.11 a) 63 b) -1 c) 31 d) 5 **4.12** a) $x + 12$; $R = 54$ b) $x^2 + 7$; $R = 44$

4.13 a) -7 b) 2; -5/3 c) 242 d) 0; 6 e) -7; 5

4.14 a) $a^2 + 48ab - 11b^2$ b) $69ab - 16b^2$

V.- PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

Los Productos y Cocientes Notables, son Productos o Cocientes de Expresiones algebraicas que se usan de manera muy frecuente, por tanto es conveniente obtener su resultado en forma inmediata. Sin embargo las Expresiones deben cumplir ciertas condiciones.

V.1 PRODUCTOS NOTABLES

Los Principales PRODUCTOS NOTABLES, que pueden verificarse efectuando la correspondiente multiplicación son:

CUADRADO DE UNA SUMA:	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$
CUADRADO DE DIFERENCIA:	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-2ab+b^2$
SUMA POR DIFERENCIA:	$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
CUBO DE UNA SUMA:	$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
CUBO DE UNA DIFERENCIA:	$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
CUADRADO DE TRINOMIO:	$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
PRODUCTO DE BINOMIOS:	$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

V.1.1 CUADRADO DE UNA SUMA

Se llama Cuadrado de una Suma a la Suma de dos Términos, elevado todo al Cuadrado.

$$\boxed{(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2}$$

Este Producto suele leerse así: "*El Cuadrado de una Suma, es el cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo*". (Se considera que el Primero o 1^er^ Término es: a, el Segundo o 2^do^ Término es: b)

La verificación, se realiza efectuando la Multiplicación indicada:

$$(a+b)^2: \quad \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \qquad \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Se aplican Procedimientos antes descritos de Multiplicación (IV.3)

Luego de simplificar, se aprecia el mismo resultado del Producto Notable.

Ej 5.1 Por el Producto Notable del Cuadrado de una Suma se efectúan los Productos directamente

a) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

b) $(5a^9 + 7b^4)^2$
$= (5a^9)^2 + 2(5a^9)(7b^4) + (7b^4)^2$
$= 5^2(a^9)^2 + 70a^9b^4 + 7^2(b^4)^2$
$= 25a^{18} + 70a^9b^4 + 49b^8$

c) $(9p^4q^2r + 1)^2$
$= (9p^4q^2r)^2 + 2(9p^4q^2r)(1) + 1^2$
$= 9^2(p^4)^2(q^2)^2(r)^2 + 18(p^4q^2r) + 1^2$
$= 81p^8q^4r^2 + 18p^4q^2r + 1$

d) $(x^m + y^{3n})^2 = (x^m)^2 + 2(x^m)(y^{3n}) + (y^{3n})^2 = x^{2m} + 2x^my^{3n} + y^{6n}$

Se considera *Primero* al Primer término (x) y *Segundo* al Segundo término (y).

Se aplica el Producto Notable.

Si se tienen que realizar operaciones de elevar al cuadrado a las varias letras de un Término, se emplean las Leyes de Exponentes. (Ver III.5)

V.1.2 CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

Se llama Cuadrado de una Diferencia, a la Resta de dos Términos, elevado todo al cuadrado.

$$\boxed{(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2}$$

Este Producto suele leerse así: "*El Cuadrado de una Diferencia, es el cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo*".

$(a - b)^2$:

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \quad\quad \\ -ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

La verificación se efectúa, realizando el Producto indicado.

Se aplican Procedimientos descritos de Multiplicación (II-1)

Luego de simplificar, se aprecia el Producto Notable.

Ej 5.2 Usando el Producto Notable del Cuadrado de una Diferencia, se efectúan los productos .

a) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Primero es el Primer Término x, *Segundo* es el Segundo Término y.

b) $(7a^3 - 9b^5)^2 = (7a^3)^2 - 2(7a^3)(9b^5) + (9b^5)^2$
$= 7^2(a^3)^2 - 126a^3b^5 + 9^2(b^5)^2$
$= 49a^6 - 126a^3b^5 + 81b^{10}$

Desarrollando por la Fórmula del Cuadrado de una Diferencia.

En las Operaciones de elevar al cuadrado a algún Término, que contenga varias letras, se usan las Leyes de Exponentes.

c) $(\sqrt{p} - 12q^4r^5)^2 = \sqrt{p}^{\,2} - 2(\sqrt{p})(12q^4r^5) + (12q^4r^5)^2$
$= p - 24\sqrt{p}\,q^4r^5 + (12)^2(q^4)^2(r^5)^2$
$= p - 24\sqrt{p}\,q^4r^5 + 144q^8r^{10}$

d) $(x^{3n} - y^{5n-1})^2 = (x^{3n})^2 - 2(x^{3n})(y^{5n-1}) + (y^{5n-1})^2$
$= x^{6n} - 2x^{3n}y^{5n-1} + y^{10n-2}$

e) $(a^{n^5} - a^{n^3})^2 = (a^{n^5})^2 - 2a^{n^5}a^{n^3} + (a^{n^3})^2$
$= a^{2n^5} - 2a^{n^5+n^3} + a^{2n^3}$

Tome en cuenta que: Se llama *Cuadrado de una diferencia* a: $(a - b)^2$
Otra operación diferente, llamada a su vez *Diferencia de cuadrados* es: $a^2 - b^2$

V.1.3 SUMA POR DIFERENCIA

Se llama Suma por Diferencia al Producto de: la Suma de dos Términos por la Diferencia de los mismos:

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Este Producto suele leerse así: "*El Producto de la Suma por la Diferencia, es igual a la Diferencia de Cuadrados*".

$$(a+b)(a-b):\quad \begin{array}{r} a + b \\ \underline{a - b} \\ a^2 + ab \\ \underline{-ab - b^2} \\ a^2 \quad\ - b^2 \end{array}$$

La verificación se efectúa, realizando el Producto, Se aplican procedimientos de Multiplicación (Ver IV.3) Tras simplificar, el resultado es el Producto Notable.

Ej 5.3 Por el Producto Notable de la Suma por la Diferencia, se efectúan:

a) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

b) $(3p^4 + 7q^8)(3p^4 - 7q^8) = (3p^4)^2 - (7q^8)^2$
$= 3^2(p^4)^2 - 7^2(q^8)^2 = 9p^8 - 49q^{16}$

c) $(6a^2b + 3)(6ab^2 - 3) = ??$

Este producto se aplica solo si los Términos en Suma son los mismos que en Diferencia. Por eso en el inciso c) no se trata de un Producto Notable. (Si se requiere este producto se deben usar reglas usuales de multiplicación, no emplear la Fórmula del Producto Notable)

d) $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = [(x^2+y^2) + xy][(x^2+y^2) - xy]$
$= (x^2+y^2)^2 - (xy)^2 = (x^2)^2 + 2x^2y^2 + (y^2)^2 - x^2y^2$
$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = x^4 + x^2y^2 + y^4$

Previamente ordenando para observar el Producto Notable de Suma por diferencia. Luego desarrollando y simplificando.

V.1.4 CUBO DE UNA SUMA

El Cubo de una Suma es la Suma de dos Términos, todo elevado al cubo o Potencia tres.

$$\boxed{(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Este Producto suele leerse así: "*El Cubo de una Suma es el cubo del primero, mas el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, mas el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, mas el cubo del segundo*".

$$(a+b)^3\quad \begin{array}{r} a + b \\ \underline{a + b} \\ a^2 + ab \\ \underline{ab + b^2} \\ a^2 + 2ab + b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ \underline{a + b} \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \underline{a^2b + 2ab^2 + b^3} \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

La verificación de este Producto Notable se efectúa realizando el Producto indicado.

Tras efectuar la primera multiplicación, su resultado se multiplica por el tercer factor.

Simplificando el resultado, se nota que es el mismo de la Fórmula del Producto Notable.

Ej 5.4 Usando el Producto Notable del Cubo de una Suma, se efectúan los Productos indicados.

a) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

b) $(2a^5b + 4c^6)^3 = (2a^5b)^3 + 3(2a^5b)^2(4c^6) + 3(2a^5b)(4c^6)^2 + (4c^6)^3$
$= 2^3(a^5)^3b^3 + 3\cdot 2^2(a^5)^2b^2(4c^6) + 3(2a^5b)4^2(c^6)^2 + 4^3(c^6)^3$
$= 8a^{15}b^3 + 48a^{10}b^2c^6 + 96a^5bc^{12} + 64c^{18}$

V.1.5 CUBO DE UNA DIFERENCIA

El Cubo de una Diferencia es la Resta de dos Términos, todo elevado al Cubo o Potencia tres.

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Este Producto suele leerse así: *"El Cubo de una Diferencia es el cubo del primero, menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, mas el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo"*

La verificación de esta Fórmula se efectúa realizando el Producto indicado (Tal como en el caso del Cubo de una Suma)

También puede verificarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a+[-b])^3\\ &= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Ej 5.5 Usando el Producto Notable del Cubo de una Diferencia, se efectúan los Productos indicados:

a) $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

b) $$\begin{aligned}(4a^5b^6c^7 - 2)^3 &= (4a^5b^6c^7)^3 - 3(4a^5b^6c^7)^2(2) + 3(4a^5b^6c^7)(2)^2 - (2)^3\\ &= 4^3(a^5)^3(b^6)^3(c^7)^3 - 3\cdot 4^2(a^5)^2(b^6)^2(c^7)^2\cdot 2 + 3\cdot 4a^5b^6c^7\cdot 4 - 8\\ &= 64a^{15}b^{18}c^{21} - 96a^{10}b^{12}c^{14} + 48a^5b^6c^7 - 8\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(a+b)^3(a-b)^3 &= [(a+b)(a-b)]^3 = [a^2 - b^2]^3\\ &= (a^2)^3 - 3(a^2)^2(b^2) + 3(a^2)(b^2)^2 - (b^2)^3\\ &= a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6\end{aligned}$$

Note la necesidad de aplicar previamente el Producto de Suma por Diferencia.

d) $$\begin{aligned}(x^{2n} - y^{n+1})^3 &= (x^{2n})^3 - 3(x^{2n})^2y^{n+1} + 3(x^{2n})(y^{n+1})^2 - (y^{n+1})^3\\ &= x^{6n} - 3x^{4n}y^{n+1} + 3x^{2n}y^{2n+2} - y^{3n+3}\end{aligned}$$

V.1.6 CUADRADO DE UN TRINOMIO

El Cuadrado de un Trinomio, es la Suma de tres Términos, elevados al Cuadrado.

$$(a+b+c)^3 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

Este Producto suele leerse así: *"El Cuadrado de un Trinomio es el cuadrado del primero, mas el cuadrado del segundo, mas el cuadrado del tercero, mas el doble producto del primero por el segundo, mas el doble producto del primero por el tercero, mas el doble producto del segundo por el tercero"*

$$(a+b+c)^2: \quad \begin{array}{l} a + b + c\\ \underline{a + b + c}\\ a^2 + ab + ac\\ \quad\;\; ab \quad + b^2 + bc\\ \quad\;\; \underline{\quad ac \quad + bc + c^2}\\ a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2\\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \end{array}$$

La verificación de este Producto Notable, se efectúa realizando el Producto indicado.

Multiplicando por Procedimientos conocidos (Ver cap. IV.3)

El Resultado Final, se ordena de manera que presente una Forma fácil de recordar.

Ej 5.6 Usando el Producto Notable del Cuadrado de un Trinomio, se efectúan los Productos indicados:

a) $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

b) $(5a^9+7b+c^4) = (5a^9)^2+(7b)^2+(c^4)^2+2(5a^9)(7b)+2(5a^9)(c^4)+2(7b)(c^4)$

$= 5^2(a^9)^2+7^2b^2+(c^4)^2+2(5a^9)(7b)+2(5a^9)(c^4)+2(7b)(c^4)$

$= 25a^{18}+49b^2+c^8+70a^9b+10a^9c^4+14bc^4$

El Producto Notable del Cuadrado de un Trinomio se generaliza, para el caso de Operaciones de Diferencia, dentro del Trinomio, usando las Leyes de Signos.

$(a+b-c)^2 = [a+b+(-c)]^2$

$= a^2+b^2+(-c)^2+2ab+2a(-c)+2b(-c)$

$= a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

$(a-b-c)^2 = [a+(-b)+(-c)]^2$

$= a^2+(-b)^2+(-c)^2+2a(-b)+2a(-c)+2(-b)(-c)$

$= a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$

Para la generalización, se procede por la Ley de los signos.

Por $-c = +(-c)$, luego se aplica la Expresión del Cuadrado de un Trinomio.

Posteriormente se simplifican los signos.

Ej 5.7 Usando la generalización del Cuadrado de un Trinomio, se efectúan los Productos:

a) $(a^5+3bc^4-6)^2 = (a^5)^2+(3bc^4)^2+(-6)^2+2(a^5)(3bc^4)+2(a^5)(-6)+2(3bc^4)(-6)$

$= a^{10}+9b^2c^8+36+6a^5bc^4-12a^5-36bc^4$

b) $(5-p^3-4q^6)^2 = 5^2+(-p^3)^2+(-4q^6)^2+2(5)(-p^3)+2(5)(-4q^6)+2(-p^3)(-4q^6)$

$= 25+p^6+16q^{12}-10p^3-40q^6+8p^3q^6$

c) $(a^2-a+1)^2(a^2+a+1)^2$

$= \{(a^2-a+1)(a^2+a+1)\}^2 = \{[(a^2+1)-a][(a^2+1)+a]\}^2$

$= \{(a^2+1)^2-a^2\}^2 = \{(a^4+2a^2+1)-a^2\}^2 = \{a^4+a^2+1\}^2$

$= (a^4)^2+(a^2)^2+1^2+2a^4a^2+2a^41+2a^21$

$= a^8+a^4+1+2a^6+2a^4+2a^2 = a^8+2a^6+3a^4+2a^2+1$

Previamente ordenando y aplicando el Producto Notable de Suma por Diferencia.

Luego se desarrolla el Cuadrado de un Trinomio.

V.1.7 PRODUCTO DE BINOMIOS

El Producto de Binomios, es el Producto de dos Binomios donde al menos un Término es común a ambos.

$$\boxed{(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab}$$

Este Producto suele leerse así: "*El Producto de dos Binomios con un Término común es el cuadrado del común, mas el producto de la suma de los diferentes por el común, mas el producto de los diferentes*"

$$(x+a)(x+b): \quad \begin{array}{r} x+a \\ x+b \\ \hline x^2 + ax \\ bx + ab \\ \hline x^2+(a+b)x+ab \end{array}$$

Básicamente esta es una Regla de Multiplicación rápida de Binomios.

La verificación del producto, se efectúa realizando el Producto indicado.

Note que se considera *Término Común* al Primero o sea: x, los Términos diferentes son: a, b .

Ej 5.8 Usando el Producto Notable del Producto de Binomios, efectuar:

$$(x+u)(x+v) = x^2 + (u+v)x + uv$$

$$(x+4)(x+7) = x^2 + (4+7)x + 4\cdot 7 = x^2 + 11x + 28$$

$$(a+9)(a+1) = a^2 + (9+1)a + 9\cdot 1 = a^2 + 10a + 9$$

$$(a^4 + 3b^2c)(a^4 + 5b^2c) = (a^4)^2 + (3b^2c + 5b^2c)a^4 + (3b^2c)(5b^2c) = a^8 + 8b^2ca^4 + 15b^4c^2$$

Este Producto Notable, permite la rápida multiplicación de Binomios de la Forma: $x + a$, donde a es Constante.

El Producto Notable del Producto de Binomios, puede generalizarse, para el caso de Operaciones de Resta, o Suma y Resta dentro de los Binomios.

$$(x+a)(x-b) = [x+a][x+(-b)]$$
$$= x^2 + [a+(-b)]x + a(-b) = x^2 + (a-b)x - ab$$

$$(x-a)(x-b) = [x+(-a)][x+(-b)]$$
$$= x^2 + [-a+(-b)]x + (-a)(-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

Para le generalización, se procede por la Ley de los Signos.

Se considera: $-a = +(-a)$, para aplicar luego la Expresión del Producto Notable original.

Simplificando signos, se llega a Expresiones fáciles de recordar para efectuarlos en forma inmediata.

Ej 5.9 Usando la generalización del Producto de Binomios, se efectúan los Productos directamente:

$$(x+7)(x-3) = x^2 + [7+(-3)]x + 7(-3) = x^2 + 4x - 21$$

$$(x+2)(x-8) = x^2 + [2+(-8)]x + 2(-8) = x^2 - 6x - 16$$

$$(x-5)(x-4) = x^2 + [(-5)+(-4)]x + (-5)(-4) = x^2 - 9x + 20$$

$$(y^3+2)(y^3+7) = y^6 + [2+7]y^3 + (2)(7) = y^6 + 9y^3 + 14$$

Este producto se puede generalizar también a otro tipo de binomios.

Los Productos Notables son útiles solo si se cumplen las condiciones que en cada caso se estipulan, o cuando se presentan las formas requeridas.

V.2 COCIENTES NOTABLES

Los Cocientes Notables son cocientes de uso frecuente, que cuando cumplen ciertas condiciones pueden desarrollarse directamente sin efectuar la división misma.

Los principales Cocientes Notables, verificables por simple división son:

Forma I $\quad \dfrac{a^n + b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1}$ $\quad$ (n Impar)

Forma II $\quad \dfrac{a^n - b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - b^{n-1}$ $\quad$ (n Par)

Forma III $\quad \dfrac{a^n + b^n}{a-b} = ??$ $\quad$ (Ningún n)

Forma IV $\quad \dfrac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}$ $\quad$ (Todo n)

En estos Cocientes deben tomarse para las Potencias n solo a Números Naturales (Son los Enteros y Positivos), las Bases a, b tanto para el Numerador como Denominador, son las mismas

Se considera Cocientes notable, cuando el Cociente es exacto (Residuo cero), La divisibilidad de cada Cociente y el Residuo puede verificarse por el TEOREMA EL RESTO.

En los Cocientes notables se cumplen las siguientes características:

- Las potencias de a, b en el Dividendo deben ser las mismas.
- El Número de Términos en cada División es precisamente de: n Términos.
- El Grado Absoluto de cada Término es de: n-1
- Los Signos siguen una secuencia en cada caso. (O Alternados o todos Positivos)

V.2.1 FORMA I

$$\boxed{\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + b^{n-1}}$$

Este es el Cociente de una Suma sobre otra Suma, su desarrollo presenta n Términos de Signos alternados.

Para que la División sea exacta (Residuo Cero), se deben tomar solo Potencias: n impares. Esto se verifica a través del Teorema del Resto:

$$\frac{a^n + b^n}{a + b}$$

Si: $a = -b$

$\Rightarrow (-b)^n + b^n = 0$

$\Rightarrow n$ es Impar

Analizando la Divisibilidad del Dividendo: $a^n + b^n$ entre el Divisor: $a+b$

Por el Teorema del Resto se reemplaza el Término Independiente del Divisor que es b con signo cambiado, en el Dividendo en lugar de a.

La Expresión resultante es el Residuo, para que este Residuo sea Cero, la Potencia n debería ser Impar.

Se verifica el resultado del Cociente Notable por simple división.

$$\begin{array}{l|l} a^n \qquad\qquad + b^n & a+b \\ \cline{2-2} \underline{-a^n - a^{n-1}b} & a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 ... + b^{n-1} \\ \quad -a^{n-1}b & \\ \quad \underline{a^{n-1}b + a^{n-2}b^2} & \\ \qquad\quad a^{n-2}b^2 ... & \end{array}$$

A medida que se divide decrece el Grado de: a, crece el de b.

De acuerdo al Dividendo y Divisor, el último Término del Cociente es: b^{n-1}

De similar modo se demuestra los casos de Divisibilidad y resultados de los otros Cocientes Notables.

Ej 5.10 Usando el Cociente Notable de la Forma I, se efectúan los Cocientes:

a) $\dfrac{a^3 + b^3}{a + b} = a^{3-1} - a^{3-2}b + b^2 = a^2 - ab + b^2$

b) $\dfrac{x^7 + y^7}{x + y} = x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6$

c) $\dfrac{p^5q^5 + 32}{pq + 2} = \dfrac{(pq)^5 + 2^5}{pq + 2} = (pq)^4 - (pq)^3 2 + (pq)^2 2^2 - (pq)2^3 + 2^4$
$= p^4q^4 - 2p^3q^3 + 4p^2q^2 - 8pq + 16$

d) $\dfrac{x^{12} + y^{15}}{x^4 + y^5} = \dfrac{(x^4)^3 + (y^5)^3}{x^4 + y^5} = (x^4)^2 - x^4y^5 + (y^5)^2$
$= x^8 - x^4y^5 + y^{10}$

Potencia: $n = 3$, Forma I, reemplazando por la Fórmula del caso.

En el caso de potencia: 3, existen tres Términos. Para potencia 7, siete Términos y así en todos los casos.

En los incisos c, d previamente se ordena para que tome la forma de Cociente Notable.

V.2.2 FORMA II

$$\boxed{\frac{a^n - b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - b^{n-1}}$$

Este es el Cociente de una Resta sobre una Suma, su desarrollo presenta n Términos de Signo Alternado.

Para que la División sea exacta (Residuo cero), la Potencia n debe ser par. La demostración de esta condición y la Expresión del Resultado se efectúa de la misma manera que en la Forma 1.

Ej 5.11 Usando el Cociente Notable de la Forma II, se efectúan los Cocientes indicados:

a) $\dfrac{x^4 - y^4}{x + y} = x^{4-1} - x^{4-2}y + x^{4-3}y^2 - y^3 = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$ — Forma II, Resta sobre Suma.

b) $\dfrac{p^6 - 1}{p + 1} = \dfrac{p^6 - 1^6}{p + 1} = p^5 - p^4 1 + p^3 1^2 - p^2 1^3 + p 1^4 - 1^5 = p^5 - p^4 + p^3 - p^2 + p - 1$ — En b) para aplicar el Cociente Notable se usa: $1 = 1^6$

c) $\dfrac{a^{12} - b^{20}}{a^3 + b^5} = \dfrac{(a^3)^4 - (b^5)^4}{a^3 + b^5} = (a^3)^3 - (a^3)^2(b^5) + (a^3)(b^5)^2 - (b^5)^3 = a^9 - a^6b^5 + a^3b^{10} - b^{15}$ — Ordenando en c)

V.2.3 FORMA III

$$\boxed{\frac{a^n + b^n}{a - b} = ?}$$

Este es el Cociente de una Suma sobre una Resta, Propiamente no es un Cociente Notable, sin embargo se lo incluye en las Formas, para aclarar que no es posible la División Exacta, ya que siempre presentará un Residuo, sea para n Par o Impar.

$\dfrac{a^n + b^n}{a - b}$ — Analizando la divisibilidad del Dividendo $a^n + b^n$ entre el Divisor $a - b$

Si: $a = b$ — Por el Teorema del Resto, se reemplaza el Término Independiente (O último) del Divisor con Signo cambiado, en el Dividendo en lugar de a

$\Rightarrow\ b^n + b^n = 0$ — La Expresión resultante es el Residuo, para que este Residuo sea cero, no existe ningún valor de: n Par o Impar que permita esta situación.

$2b^n \neq 0$ — Por tanto la División no es exacta. Es de reiterar que si bien la división es posible, ésta no es exacta, por ello no es un Cociente Notable.

En la Forma III, como su División no es exacta, se aplica la Expresión General de Cociente: (Ver IV.5)
El Residuo se calcula por el Teorema del Resto.

$$\boxed{\frac{\textbf{Dividendo}}{\textbf{Divisor}} = \textbf{Cociente} + \frac{\textbf{Residuo}}{\textbf{Divisor}}}$$

Ej 5.14 Se efectúa un Cociente de la Forma III, usando la Forma General de Cocientes:

$\dfrac{a^3 + b^3}{a - b}$; $R = 2b^n$ — Cociente de la Forma III

Si: $n = 3 \Rightarrow R = 2b^n = 2b^3$ — Determinando el Residuo, por el Teorema del Resto según se vio en el estudio de la Forma III

$\dfrac{a^3 + b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2 + \dfrac{2b^3}{a - b}$ — Reemplazando en la Expresión General de Cociente. Esta forma de escribir un cociente no exacto se llama también Algoritmo de Euclides.

Los Cocientes Notables, pueden generalizarse a diversas Expresiones, pero deben guardar las Formas Generales de alguno de sus casos posibles.

V.2.4 FORMA IV

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}$$

Cociente de una Resta sobre una Resta, su desarrollo presenta n Términos de Signo Positivo.

La División es exacta (Residuo cero), para toda Potencia n par o impar. La demostración de esta situación y la obtención de la Expresión del resultado, se determina al igual que en la Forma I.

Ej 5.12 Usando el Cociente Notable de la Forma IV, se efectúan los Cocientes indicados:

a) $\dfrac{a^4 - b^4}{a - b} = a^{4-1} + a^{4-2}b + a^{4-3}b^2 + a^{4-4}b^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

Se aplica la Expresión del resultado del Cociente Notable. Se reemplaza la Potencia: $n = 4$, Potencia Par.

b) $\dfrac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

Se reemplaza también la Potencia: $n = 5$ (Potencia Impar).

Ej 5.13 Se efectúan los siguientes Cocientes, usando alguna de las Formas de Cocientes Notables:

a) $\dfrac{x^8 - y^8}{x^2 + y^2} = \dfrac{(x^2)^4 - (y^2)^4}{(x^2) + (y^2)} = (x^2)^3 - (x^2)^2(y^2) + (x^2)(y^2)^2 - (y^2)^3 = x^6 - x^4y^2 + x^2y^4 - y^6$

Ordenando queda la Forma II. x^2, y^2 actúan como las letras a, b de la Fórmula.

b) $\dfrac{p^{20} + q^{10}}{p^4 + q^2} = \dfrac{(p^4)^5 + (q^2)^5}{(p^4) + (q^2)} = (p^4)^4 - (p^4)^3(q^2) + (p^4)^2(q^2)^2 - (p^4)(q^2)^3 + (q^2)^4 = p^{16} - p^{12}q^2 + p^8q^4 - p^4q^6 + q^8$

Se ordena para misma potencia Forma I

c) $\dfrac{a^6b^3 - 64}{a^2b - 4} = \dfrac{(a^2b)^3 - 4^3}{a^2b - 4} = (a^2b)^2 + (a^2b)4 + 4^2 = a^4b^2 + 4a^2b + 16$

Arreglando el Numerador, de acuerdo al Denominador. Queda la Forma IV.

d) $\dfrac{x^3 - y^3}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \dfrac{(x^{\frac{1}{2}})^6 - (y^{\frac{1}{2}})^6}{(x^{\frac{1}{2}}) - (y^{\frac{1}{2}})} = (x^{\frac{1}{2}})^5 + (x^{\frac{1}{2}})^4(y^{\frac{1}{2}}) + (x^{\frac{1}{2}})^3(y^{\frac{1}{2}})^2 + (x^{\frac{1}{2}})^2(y^{\frac{1}{2}})^3 + (x^{\frac{1}{2}})(y^{\frac{1}{2}})^4 + (y^{\frac{1}{2}})^5$

$= \sqrt{x}^5 + \sqrt{x}^4\sqrt{y} + \sqrt{x}^3\sqrt{y}^2 + \sqrt{x}^2\sqrt{y}^3 + \sqrt{x}\sqrt{y}^4 + \sqrt{y}^5$

$= \sqrt{x^5} + \sqrt{x^4y} + \sqrt{x^3y^2} + \sqrt{x^2y^3} + \sqrt{xy^4} + \sqrt{y^5}$

e) $\dfrac{x^{6n} + y^{3n+3}}{x^{2n} + y^{n+1}} = \dfrac{(x^{2n})^3 + (y^{n+1})^3}{x^{2n} + y^{n+1}} = (x^{2n})^2 - (x^{2n})(y^{n+1}) + (y^{n+1})^2 = x^{4n} - x^{2n}y^{n+1} + y^{2n+2}$

En d) Generalizando a potencias no enteras.

f) $\dfrac{x^3 - y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^3 + \dfrac{-2y^3}{x + y}$

Las potencias impares en una diferencia entre suma, no constituyen un Cociente notable. Pero se puede dividir algebraicamente, queda un Residuo.

5.1 Calcular k, para que se trate de un Cociente notable.

a) $\dfrac{a^5 - 32}{a - k} \Rightarrow \dfrac{a^5 - 2^5}{a - 2} = a^4 + a^3 2 + a^2 2^2 + a 2^3 + 2^4 = a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 16$

Para potencias iguales en Numerador como b^5 se tiene $32 = b^5$, entonces $b = 2$. Luego k debe ser igual a 2. Desarrollando.

b) $\dfrac{x^4 - k}{x + 3} \Rightarrow \dfrac{x^4 - 3^4}{x + 3} = x^3 - x^2 3 + x 3^2 + 3^3 = x^3 - 3x^2 + 9x + 27$

En este segundo caso, k debe ser igual a $3^4 = 81$. Desarrollando.

En el caso de cocientes con términos de diversa potencia para lograr un Cociente notable debe cumplirse que:

$$\frac{a^k \pm b^h}{a^p \pm b^q} \; ; \quad \frac{k}{p} = \frac{h}{q} = n$$

Ej 5.15 Se efectúan cálculos para lograr un Cociente notable

a) $\dfrac{a^8 - b^{12}}{a^2 - b^q} \Rightarrow \dfrac{8}{2} = \dfrac{12}{q} \Rightarrow q = 3$

Haciendo cumplir la condición se obtiene el valor de q. Desarrollando se verifica el número de términos: $r/q = 8/2 = 4$

$$\frac{(a^2)^4 - (b^3)^4}{a^2 - b^3} = (a^2)^3 + (a^2)^2(b^3) + (a^2)(b^3)^2 + (b^3)^3 = a^6 + a^4b^3 + a^2b^6 + b^9$$

b) $\dfrac{a^{2k+1} - b^{3k-1}}{a^3 - b^4} \Rightarrow \dfrac{2k+1}{3} = \dfrac{3k-1}{4} \Rightarrow k = 7$

De la condición se obtiene una Ecuación que permite obtener m

$\dfrac{a^{15} - b^{20}}{a^3 - b^4} = \dfrac{(a^3)^5 - (b^4)^5}{a^3 - b^4}$

Ordenando de manera que tome la forma de un Cociente notable.

El número de términos del desarrollo de un Cociente notable es n, si se trata de obtener directamente al término r, designado por Tr, se aplica:

$$\boxed{\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b} \Rightarrow Tr = (-1)^{r-1} a^{n-r} b^{r-1}}$$

El factor de signo $(-1)^{r-1}$ se aplica en casos I y II de los Cocientes notables. En el IV todos positivos. Para n impar el Término central es $T_{(n+1)/2}$; Para n par los Términos centrales son: $T_{n/2}$; $T_{n/2+1}$

Ej 5.16 Se obtiene directamente un Término del desarrollo de un Cociente notable

a) $\dfrac{x^7 - y^7}{x - y}$; Quinto Término:

$T_5 = a^{n-r}b^{r-1} = x^{7-5}y^{5-1} = x^2y^4$

b) $\dfrac{x^{27} - y^{36}}{x^3 - y^4} = \dfrac{(x^3)^9 - (y^4)^9}{x^3 - y^4}$; T_6

$T_6 = a^{n-r}b^{r-1} = (x^3)^{9-6}(y^4)^{6-1} = x^9y^{20}$

c) $\dfrac{x^9 + y^9}{x + y}$; *Término central:*

$T_{(n+1)/2} = T_{(9+1)/2} = T_5 \Rightarrow$ $n = 9$ *impar* Término central: 5^{to}

$T_5 = (-1)^{r-1}a^{n-r}b^{r-1}$

$= (-1)^4x^{9-5}y^{5-1} = x^4y^4$

d) $\dfrac{x^{12} - y^{12}}{x - y}$; *Término central:*

$T_{n/2} = T_6$; $T_{n/2+1} = T_7 \Rightarrow$ $n = 12$ par, Términos centrales 6^{to}, 7^{mo}

$T_6 = a^{n-r}b^{r-1} = x^{12-6}y^{6-1} = x^6y^5$

$T_7 = a^{n-r}b^{r-1} = x^{12-7}y^{7-1} = x^5y^6$

Ej 5.17 a) El desarrollo del Cociente notable tiene 9 Términos. Hallar el cuarto término:

$\dfrac{x^{4h-k} + y^{5h+k}}{x^{h-3} + y^{h-k}}$; $\dfrac{4h-k}{h-3} = \dfrac{5h+k}{h-k} = 9$

Por condición de Cociente notable. El Nº de Términos es 9.

$\begin{aligned} 4h - k &= 9(h-3) \\ 5h + k &= 9(h-k) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} h &= 5 \\ k &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \dfrac{x^{18} + y^{27}}{x^2 + y^3} = \dfrac{(x^2)^9 + (y^3)^9}{x^2 + y^3}$

Se logra un sistema de dos Ecuaciones, resolviendo (Ver Cap VII)

$T_4 = (-1)^{r-1}a^{n-r}b^{r-1} = (-1)^3(x^2)^{9-4}(y^3)^{4-1} = -x^{10}y^9$

Para lograr el Término 4, se usa la fórmula, se considera el factor de signo por tratarse del Caso I

b) En el desarrollo del Cociente notable el Quinto Término es $T_5 = x^{10}y^8$; calcular h, k

$\dfrac{x^{4h+3k-1} - y^{h+2k}}{x^{h-1} - y^{k-2}}$; $\dfrac{4h+3k-1}{h-1} = \dfrac{h+2k}{k-2} = n$

$T_5 = x^{10}y^8 = (x^{h-1})^{n-r}(y^{k-2})^{r-1} = (x^{h-1})^{n-5}(y^{k-2})^{5-1}$

Haciendo cumplir condiciones y fórmulas se establece un sistema de tres ecuaciones con las incógnitas h, k, n

$\begin{aligned} (h-1)(n-5) &= 10 \\ (k-2)4 &= 8 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} h &= 6 \\ k &= 4 \\ n &= 7 \end{aligned} \Rightarrow \dfrac{x^{35} - y^{14}}{x^5 - y^2} = \dfrac{(x^5)^7 - (y^2)^7}{x^5 - y^2}$

Resolviendo. (Caso IV, Términos todos positivos)

V.- PROBLEMAS PROPUESTOS

5.1 Por el Producto Notable del Cuadrado de una Suma o Diferencia, desarrollar:

a) $(4x+5y)^2$ c) $(a^{n-1}+a^{n+1})^2$ e) $(3a-2b)^2$ g) $(x^n-1)^2$

b) $(x^2y^3+5)^2$ d) $[(x+y)+z]^2$ f) $(a^{n-1}-a^{1-n})^2$ h) $(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x})^2$

5.2 Por el Producto Notable de la Suma por la Diferencia, desarrollar:

a) $(5a+3)(5a-3)$ b) $(7x+3y)(7x-3y)$ c) $(xy^3+4)(xy^3-4)$

d) $(a^m+1)(a^m-1)$ e) $(x^2y^3z^4+1)(x^2y^3z^4-1)$ f) $[(a+b)+1][(a+b)-1]$

5.3 Por el Producto Notable del Cubo de una Suma o Diferencia, desarrollar:

a) $(4x+5y)^3$ c) $(x^my^n+1)^3$ e) $(2a-7b)^3$ g) $(x^ny^{2n}-1)^3$

b) $(x^2y^4+1)^3$ d) $(x^{m+n}+y)^3$ f) $(x^7y^2-1)^3$ h) $(x^3-\sqrt[3]{y})^3$

5.4 Por el Producto Notable del Cuadrado de un Trinomio desarrollar:

a) $(x+2y+5z)^2$ b) $(3x-y+z^2)^2$ c) $(x^5+3y-2z)^2$ d) $(a^2-3b-c^4)^2$

5.5 Por el Producto Notable del Producto de Binomios, desarrollar:

a) $(x+5)(x+2)$ b) $(x+7)(x+3)$ c) $(x-4)(x+2)$

d) $(x-7)(x-1)$ e) $(a+9)(a-2)$ f) $(b^2+5)(b^2+2)$

5.6 Por el Cociente Notable de la Forma I (Suma sobre Suma), desarrollar:

a) $(a^5+b^5)/(a+b)$ b) $(a^9+b^9)/(a+b)$ c) $(x^{10}+y^{10})/(x^2+y^2)$

d) $(a^6+b^3)/(a^2+b)$ e) $(8x^3+27y^3)/(2x+3y)$ f) $(32x^5+y^{15})/(2x+y^3)$

5.7 Por el Cociente Notable de la Forma II (Resta sobre Suma), desarrollar:

a) $(x^8-y^8)/(x+y)$ b) $(x^8-y^8)/(x^2+y^2)$ c) $(a^4-b^2)/(a^2+b)$

d) $(16x^4-81y^4)/(2x+3y)$ e) $(256x^4-y^{12})/(4x+y^3)$ f) $(a^2-b^2)/(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$

5.8 Por el Cociente Notable de la Forma IV (Resta sobre Resta), desarrollar:

a) $(a^6-b^6)/(a-b)$ b) $(x^8-y^8)/(x^2-y^2)$ c) $(x^{10}-y^5)/(x^2-y)$

d) $(x^{20}-243y^5)/(x^4-3y)$ e) $(32x^5-y^5)/(2x-y)$ f) $(x^2-y^3)/(\sqrt[3]{x}-\sqrt{y})$

5.9 Calcular k, para que se presente un Cociente Notable:

a) $\dfrac{a^8-b^{2k}}{a-b}$ b) $\dfrac{x^3+27}{x+k}$ c) $\dfrac{625a^4-16b^4}{5a+k}$ d) $\dfrac{a^6+b^k}{a+b}$

5.10 Calcular k, h para que se obtenga un Cociente notable.

a) $\dfrac{x^{12}-y^{18}}{x^2-y^k}$ b) $\dfrac{x^{18}-y^{5k-1}}{x^3-y^{k-1}}$ c) $\dfrac{x^{5k-3}-y^{3k-1}}{x^k-y^{k-1}}$ d) $\dfrac{x^{4h+3k-2}-y^{6h+2k}}{x^k-y^{h-1}}$

5.11 Calcular el término indicado para cada desarrollo de Cociente notable:

a) $\dfrac{x^{10}-y^{10}}{x-y}$; T_6 b) $\dfrac{x^{16}-y^{40}}{x^2-y^5}$; T_5 c) $\dfrac{x^{35}+y^{14}}{x^5+y^2}$; T. central d) $\dfrac{x^{24}-y^{32}}{x^3-y^4}$; T. central

5.12 Calcular h, k de acuerdo al dato indicado para cada caso

a) $\dfrac{x^{8h-k+3} - y^{h+4k}}{x^{h-1} - y^{h-k+1}}$; Posee 9 Términos   b) $\dfrac{x^{4h+3k-2} - y^{6h+2k}}{x^{k} - y^{h-1}}$; $T_6 = x^9y^{20}$

RESPUESTAS V

5.1 a) $16x^2 + 40xy + 25y^2$ d) $x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$ f) $x^8y^4 - 2x^4y^2 + 1$
b) $x^4y^6 + 10x^2y^3 + 25$ e) $9a^2 - 12ab + 4b^2$ g) $x^{2n} - 2x^n + 1$
c) $a^4b^8c^{12} + 2a^2b^4c^6 + 1$ h) $x - 2\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x}$

5.2 a) $25a^2 - 9$ b) $49x^2 - 9y^2$ c) $x^2y^6 - 16$
d) $a^{2m} - 1$ e) $x^4y^6z^8 - 1$ f) $a^2 + 2ab + b^2 - 1$

5.3 a) $64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$ e) $8a^3 - 84a^2b + 294ab^2 - 343b^3$
b) $x^6y^{12} + 3x^4y^8 + 3x^2y^4 + 1$ f) $x^{21}y^6 - 3x^{14}y^4 + 3x^7y^2 - 1$
c) $x^{3m}y^{3n} + 3x^{2m}y^{2n} + 3x^my^n + 1$ g) $x^{3n}y^{6n} - 3x^{2n}y^{4n} + 3x^ny^{2n} - 1$
d) $x^{3m+3n} + 3x^{2m+2n}y + 3x^{m+n}y^2 + y^3$ h) $x^9 - 3x^6\sqrt[3]{y} + 3x^3\sqrt[3]{y}^2 - y$

5.4 a) $x^2 + 4y^2 + 25z^2 + 4xy + 10xz + 20yz$ b) $9x^2 + y^2 + z^4 - 6xy + 6xz^2 - 2yz^2$
c) $x^{10} + 9y^2 + 4z^2 + 6x^5y - 4x^5z - 12yz$ d) $a^4 + 9b^2 + c^8 - 6a^2b - 2a^2c^4 + 6bc^4$

5.5 a) $x^2 + 7x + 10$ b) $x^2 + 10x + 21$ c) $x^2 - 2x - 8$
d) $x^2 - 8x + 7$ e) $a^2 + 7a - 18$ f) $b^4 + 7b^2 + 10$

5.6 a) $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ b) $a^8 - a^7b + a^6b^2 - a^5b^3 + a^4b^4 - a^3b^5 + a^2b^6 - ab^7 + b^8$
c) $x^8 - x^6y^2 + x^4y^4 - x^2y^6 + y^8$ d) $a^4 - a^2b + b^2$
e) $4x^2 - 6xy + 9y^2$ f) $16x^4 - 8x^3y^3 + 4x^2y^6 - 2xy^9 + y^{12}$

5.7 a) $x^7 - x^6y + x^5y^2 - x^4y^3 + x^3y^4 - x^2y^5 + xy^6 - y^7$ b) $x^6 - x^4y^2 + x^2y^4 - y^6$
c) $a^2 - b$ d) $8x^3 - 12x^2y + 18xy^2 - 27y^3$
e) $64x^3 - 16x^2y^3 + 4xy^6 - y^9$ f) $\sqrt[3]{a^5} - \sqrt[3]{a^4b} + \sqrt[3]{a^3b^2} - \sqrt[3]{a^2b^3} + \sqrt[3]{ab^4} - \sqrt[3]{b^5}$

5.8 a) $a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$ b) $x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6$
c) $x^8 + x^6y + x^4y^2 + x^2y^3 + y^4$ d) $x^{16} + 3x^{12}y + 9x^8y^2 + 27x^4y^3 + 81y^4$
e) $16x^4 + 8x^3y + 4x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$ f) $\sqrt[3]{x}^5 + \sqrt[3]{x}^4\sqrt{y} + \sqrt[3]{x}^3\sqrt{y}^2 + \sqrt[3]{x}^2\sqrt{y}^3 + \sqrt[3]{x}\sqrt{y}^4 + \sqrt{y}^5$

5.9 a) 4   b) 3   c) $2b$ d) ??

5.10 a) $k = 3$ b) $k = 5$ c) $k = 3$ d) $h = 5$; $k = 3$

5.11 a) $T_6 = x^4y^5$ b) $T_5 = x^6y^{20}$ c) $T_4 = -x^{15}y^6$ d) $T_4 = x^{12}y^{12}$; $T_5 = x^9y^{16}$

5.12 a) $h = 7$; $k = 5$ b) $h = 5$; $k = 3$

VI.- FACTORIZACIÓN

La Factorización es el procedimiento algebraico, que permite escribir una Expresión algebraica como Producto indicado de otras Expresiones algebraicas llamadas Factores.

Usualmente se factorizan Polinomios, y sus Factores deben ser también Polinomios.

Se llama POLINOMIO PRIMO, a aquel Polinomio que no puede factorizarse. La Factorización para ser completa, debe realizarse hasta presentar POLINOMIOS PRIMOS.

Luego de factorizar un Polinomio, la simple multiplicación de sus Factores debe determinar el Polinomio original, ésta es la llamada Prueba de la Factorización.

Los Métodos para factorizar son varios, entre los principales se tienen:

1.- MÉTODO DE FACTOR COMÚN
2.- MÉTODO DE AGRUPAMIENTO DE TÉRMINOS
3.- MÉTODO DE TRINOMIO CUADRADO PERFECTO
4.- MÉTODO DE DIFERENCIA DE CUADRADOS
5.- MÉTODO DE TRINOMIOS
6.- MÉTODO DE SUMA Y RESTA DE CUBOS
7.- MÉTODO DE RUFFINI
8.- COMPLETANDO A CUADRADOS
9.- MÉTODO DEL ASPA
10.- FACTORIZACIÓN RECIPROCA

VI.1 FACTOR COMÚN

Este Método se clasifica en dos casos, cuando el Factor Común es Monomio y cuando es un Polinomio.

VI.1.1 FACTOR COMÚN MONOMIO

Se aplica cuando en todos los Términos de un Polinomio, existe cierto Monomio, éste será el FACTOR COMÚN que queda multiplicando al resto de la Expresión. En realidad se aplica la PROPIEDAD DISTRIBUTIVA de los Números Reales (P9)

$$ab + ac = a(b + c)$$

Ej 6.1 Se factoriza por el Método de Factor Común.

a) $ax + ay - az = a(x + y - z)$

b) $a^5 + a^2 = a^2(a^3 + 1)$

c) $12x^3y^8 + 8x^7y^2 = 4x^3y^2(3y^6 + 2x^4)$

d) $9x^2 + 6x^4 + 12x^6 = 3x^2(3 + 2x^2 + 4x^4)$

e) $x^{n+3} + x^{n+5} + x^{n+8} = x^{n+3}(1 + x^2 + x^5)$

Se busca el Factor Común y se lo anota multiplicando al resto de la Expresión.

Note que se aplica tanto sobre Sumas como Restas, sobre dos o más Términos. Se anotan también los factores de los coeficientes.

Se verifican los resultados, efectuando multiplicaciones.

6.1 Factorizar por el Método de Factor Común Monomio:

a) $4x^7 - 8x^5 + 6x^3 = 2x^3(2x^4 - 4x^2 + 3)$

d) $x^{7n} + x^{5n} + x^{3n} = x^{3n}(x^{4n} + x^{2n} + 1)$

b) $12a^7b^2c^4 + 6a^5b^4 + 9a^3b^6c^4 = 3a^3b^2(4a^3c^4 + 2a^2b^2 + 3b^4c^4)$

c) $x^{m+6} + x^{m+4} + x^{m+2} = x^{m+2}(x^4 + x^2 + 1)$

e) $e^{x+3} + e^{x+5} = e^x(e^3 + e^5)$

VI.1.2 FACTOR COMÚN POLINOMIO

Se aplica cuando en una Expresión Algebraica existe un Polinomio Común, este será el Factor Común, que multiplicará al resto de la Expresión.

Esta es una generalización de la PROPIEDAD DISTRIBUTIVA de los Números Reales (**P9**)

Ej 6.2 Se Factoriza por el Método de Factor Común Polinomio:

a) $(a^2 + 5b)c^7 + (a^2 + 5b)3d^4 = (a^2 + 5b)(c^7 + 3d^4)$

b) $(x^3 + y)(3x^2 + y^5) - (x + y^3)(3x^2 + y^5) = (3x^2 + y^5)\left[(x^3 + y) - (x + y^3)\right]$
$= (3x^2 + y^5)(x^3 - y^3 - x + y)$

Se toma el Polinomio común, que multiplicará al resto.

6.2 Factorizar por el Método de Factor Común Polinomio:

a) $(x^2 + 3)(a - b) - 3(a - b) = (a - b)\left[(x^2 + 3) - 3\right] = (a - b)x^2$

b) $(a - b)x + (b - a)y = (a - b)x - (a - b)y = (a - b)(x - y)$

c) $(p + 1)^9(p - 1)^2 + (p + 1)^3(p - 1)^8 = (p + 1)^3(p - 1)^2\left[(p + 1)^6 + (p - 1)^6\right]$

d) $(x^2 - x + 1)y^5 + (x^2 - x + 1)y^3 = (x^2 - x + 1)y^3(y^2 + 1)$

VI.2 AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

Este Método de Factorización se aplica a Polinomios que contiene algunos Términos con un Monomio Común y otros Términos con otro Monomio, para luego factorizar todos entre sí.

En realidad se factoriza por el Método de Factor Monomio Común, parcialmente algunos Términos, para luego factorizar por Factor Polinomio Común.

Ej 6.3 Se factoriza por Agrupación de Términos:

$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$
$= (a + b)(x + y)$

Entre el 1er y 2do Términos se factoriza x ; a su vez entre el 3er y 4to Término se factoriza el factor: y
Luego se factoriza el Polinomio común: $a + b$

$ax + bx + ay + by = a(x + y) + b(x + y)$
$= (x + y)(a + b)$

Es posible usar otro orden, llegando a lo mismo.

6.3 Factorizar por el Método de Agrupación de Términos:

a) $x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x^2 + 1)$

b) $15a + 6ab + 14b + 35 = 3a(5 + 2b) + 7(2b + 5) = (2b + 5)(3a + 7)$

c) $x^5 + x^3y^2 - x^2y^3 - y^5 = x^3(x^2 + y^2) - y^3(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(x^3 - y^3)$

d) $x^{6n} + x^{4n}y^2 + x^{2n}y^4 + y^6 = x^{4n}(x^{2n} + y^2) + y^4(x^{2n} + y^2) = (x^{2n} + y^2)(x^{4n} + y^4)$

VI.3 TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

El Método de Factorización por TRINOMIO CUADRADO PERFECTO, se aplica sobre Trinomios, que son exactamente el desarrollo de un Binomio al Cuadrado.

De acuerdo a los Productos Notables (III.1) se clasifican en dos casos, cuando se tiene el Cuadrado de una Suma y el Cuadrado de una Diferencia.

VI.3.1 TRINOMIO CUADRADO PERFECTO DE SUMAS

En este caso se debe verificar que el Trinomio es exactamente el desarrollo del Cuadrado de una Suma:

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}$$

Si se cumple tal condición, la Factorización será el Producto indicado del Cuadrado de esa Suma.

Para verificar si un Trinomio es Cuadrado Perfecto, se deben buscar Términos: a, b que elevados al cuadrado determinen al 1[er] y 3[er] Términos del Trinomio, y el doble producto de éstos, debe coincidir con el 2[do] Término del Trinomio dado.

Ej 6.4 Se factoriza por el Método de Trinomio Cuadrado Perfecto de una Suma:

$x^2 + 6xy + 9y^2$ Se verifica que el Trinomio esté ordenado.

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & + & 6xy & + & 9y^2 = (x+3y)^2 \\ \Downarrow & & \Uparrow & & \Downarrow \\ x & \Rightarrow & 2(x)(3y) & \Leftarrow & 3y \end{array}$$

Se buscan Términos que elevados al Cuadrado determinan al 1[er] y 3[er] Término del Trinomio (Se anotan debajo respectivamente). Luego se verifica que su Doble Producto determina al 2[do] Término. (Situado centralmente)

En este caso se cumple que se trata de un Trinomio Cuadrado Perfecto, por tanto su factorización queda como el Cuadrado de la Suma indicada.

Ej 6.5 Se verifican si son Trinomios Cuadrados Perfectos de una Suma.

a) $25a^2 + 20ab + 16b^2$

$$\begin{array}{ccccc} 25a^2 & + & 20ab & + & 16b^2 = \,?? \\ \Downarrow & & ? & & \Downarrow \\ 5a & \Rightarrow & 2(5a)(4b) & \Leftarrow & 4b \end{array}$$

No es Trinomio Cuadrado Perfecto, porque el Doble Producto de las Raíces del 1[er] y 3[er] Término no determinan el 2[do] Término.

Por tanto no es posible factorizar por este Método.

b) $36x^2 + 12xy - y^2$

$$\begin{array}{ccccc} 36x^2 & + & 12xy & - & y^2 = \,?? \\ \Downarrow & & & & \Downarrow \\ 6x & & & & ? \end{array}$$

No es Trinomio Cuadrado Perfecto, porque no existe un Término que elevado al cuadrado determine al 3[er] Término que es negativo ($-y^2$).

No es posible factorizar por este Método.

6.4 Factorizar por el Método de Trinomio Cuadrado Perfecto de una Suma:

a) $4a^2 + 12ab + 9b^2 = $

$$\begin{array}{ccccc} 4a^2 & + & 12ab & + & 9b^2 = (2a+3b)^2 \\ \Downarrow & & \Uparrow & & \Downarrow \\ 2a & \Rightarrow & 2(2a)(3b) & \Leftarrow & 3b \end{array}$$

Luego de verificar que se trata de Trinomio Cuadrado Perfecto se anota la factorización.

b) $9x^4 + 24x^2y^3 + 16y^6 = $

$$\begin{array}{ccccc} 9x^4 & + & 24x^2y^3 & + & 16y^6 = (3x^2+4y^3)^2 \\ \Downarrow & & \Uparrow & & \Downarrow \\ 3x^2 & \Rightarrow & 2(3x^2)(4y^3) & \Leftarrow & 4y^3 \end{array}$$

c) $x^4y + 10x^3y^2 + 25x^2y^3 = x^2y(x^2 + 10xy + 25y^2) = x^2y(x + 5y)^2$

$x \Rightarrow 2(x)(5y) \Leftarrow 5y$

Previamente se factoriza un Factor común, luego como Trinomio Cuadrado Perfecto.

VI.3.2 TRINOMIO CUADRADO PERFECTO DE RESTAS

En este caso se verifica si el Trinomio es exactamente el desarrollo del Cuadrado de una Diferencia:

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$

En el caso de que así sea, la factorización es el Producto indicado del Cuadrado de una Diferencia.

Para verificar si un Trinomio es Cuadrado Perfecto, se buscan dos Términos: a, b que elevados al Cuadrado determinen al 1^er y 3^er Términos del Trinomio, su Doble Producto debe coincidir con el 2^do Término del Trinomio dado.

Si el 2^do Término es Negativo, entonces la factorización es el Cuadrado de una Diferencia.

En realidad se calculan como: a, b las Raíces Cuadradas del 1^er y 3^er Términos del Trinomio.

Ej 6.6 Se factoriza por el Método del Trinomio Cuadrado Perfecto de una Diferencia:

$x^2 - 10xy + 25y^2$ — Se verifica que Trinomio está ordenado.

$x^2 - 10xy + 25y^2 = (x - 5y)^2$

$x \Rightarrow 2(x)(5y) \Leftarrow 5y$

Se toman las Raíces Cuadradas del 1^er y 3^er Términos (Se anotan debajo respectivamente). Luego se verifica que el Doble Producto de estas raíces sea el 2^do Término

Por tanto, si se trata de un Trinomio Cuadrado Perfecto, y su factorización es el Cuadrado de la Diferencia.

6.5 Factorizar por el Método del Trinomio Cuadrado Perfecto de una Diferencia.

a) $9a^2 - 42ab + 49b^2 = 9a^2 - 42ab + 49b^2 = (3a - 7b)^2$

$3a \Rightarrow 2(3a)(7b) \Leftarrow 7b$

b) $4x^6 - 36x^3y^3 + 81y^6 = 4x^6 - 36x^3y^3 + 81y^6 = (2x^3 - 9y^3)^2$

$2x^3 \Rightarrow 2(2x^3)(9y^3) \Leftarrow 9y^3$

En ambos casos, si se cumple con la condición de Trinomio Cuadrado perfectode una resta.

6.6 Factorizar por algún Trinomio Cuadrado Perfecto los siguientes Polinomios:

a) $64a^2b^2 + 16ab + 1 = 64a^2b^2 + 16ab + 1 = (8ab + 1)^2$

$8ab \Rightarrow 2(8ab)(1) \Leftarrow 1$

b) $1 - 10x^3y^2 + 25x^6y^4 = 1 - 10x^3y^2 + 25x^6y^4 = (1 - 5x^3y^2)^2$

$1 \Rightarrow 2(1)(5x^3y^2) \Leftarrow 5x^3y^4$

c) $x^{2m} + 2x^my^n + y^{2n} = x^{2m} + 2x^my^n + y^{2n} = (x^m + y^n)^2$

$x^m \Rightarrow 2(x^m)(y^n) \Leftarrow y^n$

Verificando en cada caso, si se trata de un Trinomio cuadrado perfecto.

Tome en cuenta que en algunos casos se trata del cuadrado de una suma y en otros de una diferencia.

d) $a^{2n+6} - 14a^{n+3}b^{5m} + 49b^{10m} = a^{2n+6} - 14a^{n+3}b^{5m} + 49b^{10m} = (a^{n+3} - 7b^{5m})^2$

$$a^{n+3} \Rightarrow 2(a^{n+3})(7b^{5m}) \Leftarrow 7b^{5m}$$

e) $16x^6 - 12x^3y^2 + 9y^4 = 16x^6 - 12x^3y^2 + 9y^4 = ??$

$$4x^3 \Rightarrow 2(4x^3)(3y^2) \Leftarrow 3y^2$$

En d) no se cumple la condición, por tanto la factorización no es posible por este Método.

VI.4 DIFERENCIA DE CUADRADOS

El Método de factorización de DIFERENCIA DE CUADRADOS, se aplica sobre Binomios, que contengan una Diferencia entre sus Términos Cuadráticos o de Potencia Par.

Esta es una aplicación del Producto Notable de la DIFERENCIA DE CUADRADOS:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

Toda vez que se presenta una DIFERENCIA DE CUADRADOS, ésta se factoriza como el Producto de una Suma por una Diferencia.

Los Términos: a, b (Que quedan en Suma y Diferencia) son las Raíces Cuadradas de las Expresiones Cuadráticas originales: a^2, b^2.

Ej 6.7 Se factoriza por el Método de la Diferencia de Cuadrados:

$x^2 - 9y^2$

$x^2 - 9y^2 = (x + 3y)(x - 3y)$

$x \quad 3y$

Se toman las Raíces Cuadradas de ambos Términos de la Diferencia de Cuadrados. (Ignorando sus signos)

El Producto indicado de la Suma por la Diferencia de estas Raíces es la Factorización.

Luego de una 1[era] Factorización, es posible reiterar este Método de Factorización, buscando otra Diferencia de Cuadrados.

Ej 6.8 Se factoriza en forma reiterada por el Método de la Diferencia de Cuadrados:

a) $25a^2 - 49b^2 = (5a)^2 - (7b)^2 = (5a + 7b)(5a - 7b)$ Tomando Raíces y factorizando.

b) $x^8 - y^8 = (x^4 + y^4)(x^4 - y^4)$
$= (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$
$= (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

Factorizando por el Método, uno de los Factores puede factorizarse nuevamente. Se reitera el procedimiento con otro Factor.

c) $a^2 + b^2 = ??$

La factorización no es posible cuando se presenta una Suma de Cuadrados.

d) $x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$
$= (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})$
$= ...$

Factorización no válida, ya que los Factores deberían ser Polinomios (No se admiten Raíces). La descomposición sería infinita si se aceptara su validez.

d) $e^{2x} - e^{2y} = (e^x + e^y)(e^x - e^y)$

6.7 Factorizar usando el Método de la Diferencia de Cuadrados:

a) $36a^8b^4c^2 - 1 = (6a^4b^2c + 1)(6a^4b^2c - 1)$ Para factorizar se considera las raíces de cada parte de los Términos.

b) $x^{2m} - y^{2n} = (x^m + y^n)(x^m - y^n)$

c) $a^{16} - 81 = a^{16} - 3^4 = (a^8 + 3^2)(a^8 - 3^2)$
$= (a^8 + 3^2)(a^4 + 3)(a^4 - 3)$ Reiterando la factorización en la Diferencia de cuadrados que aún existe.

d) $a^8 - b^6 = (a^4 + b^3)(a^4 - b^3)$ En los últimos casos, no interesa que las potencias sean diferentes

6.8 Factorizar, usando cualquier método, los siguientes Polinomios:

a) $ax^2 - ay^2 + bx^2 - by^2 = a(x^2 - y^2) + b(x^2 - y^2)$
$= (x^2 - y^2)(a + b) = (x + y)(x - y)(a + b)$

b) $a^2x - 2a^2y + 4abx - 8aby + 4b^2x - 8b^2y = x(a^2 + 4ab + 4b^2) - 2y(a^2 + 4ab + 4b^2)$
$= (a^2 + 4ab + 4b^2)(x - 2y) = (a + 2b)^2(x - 2y)$

c) $16x^{12} - 81y^4 = (4x^6)^2 - (9y^2)^2$
$= (4x^6 + 9y^2)(4x^6 - 9y^2) = (4x^6 + 9y^2)(2x^3 + 3y)(2x^3 - 3y)$

VI.5 TRINOMIOS

El Método de Factorización de Trinomios, se aplica sobre Trinomios de las Formas:

$$\boxed{x^2 + bx + c \quad ; \quad ax^2 + bx + c}$$

Para factorizar por este Método se busca que los Trinomios se expresen como un producto de dos Binomios.
De acuerdo a la Forma del Trinomio se clasifican en: Forma A y Forma B

VI.5.1 TRINOMIOS DE LA FORMA: $\boxed{x^2 + bx + c}$

En la factorización de Trinomios de esta forma (Forma A) , se siguen los siguientes pasos:

- El Trinomio Ordenado se asume que se puede descomponer como un producto de Factores que serán de la Forma: $(x \quad)(x \quad)$
- El Signo de operación en el 1^er Factor es el Signo del coeficiente: b ; el Signo del 2^do Factor es el producto de Signos de los coeficientes: b, c.
- Se buscan dos números: m, n de manera tal que su Suma sea: b, y su Producto: c (Por tanto: $m + n = b$; $m \cdot n = c$). Estos Números trabajarán con los Signos dados por el anterior paso.
- Entonces la Factorización será: $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$

Sin embargo, se debe aclarar que no todos los Trinomios de las Formas indicadas, pueden factorizarse, con Números Reales: m, n

Ej 6.9 Se factoriza por el Método de los Trinomios:

$x^2 + 8x + 15$

En el Trinomio se tiene: $b = 8$; $c = 15$. Se lo dispone como Producto de dos Factores.

$x^2 + 8x + 15 = (x + \ )(x + \ )$

El Signo de b es el Signo dentro del 1[er] Factor.

El Producto de Signos de b, c es el Signo dentro del 2[do] Factor

$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$

Se buscan dos Números de Suma b, y Producto c, esos Números son: 3 ; 5 , Porque: $3 + 5 = 8$; $3 \cdot 5 = 15$

Ej 6.10 Se factoriza por el Método de los Trinomios:

a) $x^2 - 4x - 12$

$x^2 - 4x - 12 = (x - \ )(x + \ )$

$x^2 - 4x - 12 = (x - 6)(x + 2)$

Se dispone el Trinomio como Producto de dos Binomios. Los Signos dentro de cada Binomio, se determinan por las Reglas anteriormente indicadas.

Los Números que se toman para la Factorización son: 2; 6 ya que con los Signos asignados se obtendrá que: $-6 + 2 = -4$; $(-6)(2) = -12$

b) $x^2 - 9x + 14$

$x^2 - 9x + 14 = (x - \ )(x - \ )$

$x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7)$

c) $x^2 + 4x - 32$

$x^2 + 4x - 32 = (x + \ )(x - \ )$

$x^2 + 4x - 32 = (x + 8)(x - 4)$

6.9 Factorizar por el Método de Trinomios de la Forma: $x^2 + bx + c$

a) $a^2 - a - 20$

$a^2 - a - 20 = (a - 5)(a + 4)$

b) $z^2 + 24z - 25$

$z^2 + 24z - 25 = (z + 25)(z - 1)$

c) $x^{2n} - 7x^n + 12$

$x^{2n} - 7x^n + 12 = (x^n - 3)(x^n - 4)$

d) $y^{12} - 11y^6 + 30$

$y^{12} - 11y^6 + 30 = (y^6 - 5)(y^6 - 6)$

d) $x^4 + 4x^2 + 3$

$x^4 + 4x^2 + 3 = (x^2 + 1)(x^2 + 3)$

e) $x^6 + 6x^2 + 8$

$x^6 + 6x^2 + 8 = ??$ No es de la forma requerida

VI.5.2 TRINOMIOS DE LA FORMA: $ax^2 + bx + c$

Para Factorizar Trinomios de esta Forma (Forma B), se siguen los siguientes pasos

- Se multiplica todo el Trinomio por el coeficiente: a
- Se ordena de manera que quede un Trinomio equivalente a la Forma A, se considera en lugar de: x la Expresión: ax , que se usará posteriormente.
- Se aplican todos los pasos que se usan en la Forma A
- Se divide la Expresión ya factorizada entre el coeficiente: a (Para compensar la original multiplicación efectuada)

Ej 6.11 Se factoriza por el Método de los Trinomios de la Forma B

$3x^2 - 10x + 8$

$(3x^2 - 10x + 8)3 = 3 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 10x + 3 \cdot 8$

El Trinomio a factorizar se multiplica por el Coeficiente a (Cuyo valor es: 3)

$= (3x)^2 - 10(3x) + 24$

Se ordena de manera que quede como Término Cuadrático: ax (Cuyo valor es: $3x$)

$(3x)^2 - 10(3x) + 24$

El Trinomio a factorizar ahora tiene la Forma A

$(3x)^2 - 10(3x) + 24 = (3x - \;)(3x - \;)$

Se aplican las Reglas de la Forma A para los Signos.

Se buscan dos números, de Suma: b (-10), Producto: ac (24); Esos números son 6; 4

$(3x)^2 - 10(3x) + 24 = (3x - 6)(3x - 4)$

La Factorización así obtenida se divide entre el Coeficiente: $a = 3$. Para así compensar el anterior producto por 3.

$$\frac{(3x - 6)(3x - 4)}{3} = \frac{3(x - 2)(3x - 4)}{3}$$

$= (x - 2)(3x - 4)$

Para simplificar se factoriza uno de los factores del Numerador, así se logra el Resultado Final.

Ej 6.12 Se factoriza por el Método de los Trinomios de la Forma B

$2x^2 + 3x - 20$

$(2x^2 + 3x - 20)2 = 2 \cdot 2x^2 + 2 \cdot 3x - 2 \cdot 20$

$(2x)^2 + 3(2x) - 40 = (2x + 8)(2x - 5)$

$$\frac{(2x + 8)(2x - 5)}{2} = \frac{2(x + 4)(2x - 5)}{2}$$

$= (x + 4)(2x - 5)$

$8x^2 - 10x + 3$

$(8x^2 - 10x + 3)8 = 8 \cdot 8x^2 - 8 \cdot 10x + 3 \cdot 8$

$(8x)^2 - 10(8x) + 24 = (8x - 6)(8x - 4)$

$$\frac{(8x - 6)(8x - 4)}{8} = \frac{2(4x - 3)4(2x - 1)}{2 \cdot 4}$$

$= (4x - 3)(2x - 1)$

En el 2do Trinomio, luego de factorizar, ninguno de los Factores puede simplificarse directamente entre: 8, pero descomponiendo: $8 = 4 \cdot 2$; se simplifica cada Factor.

6.10 Factorizar por el Método de los Trinomios:

a) $7x^2 + 29x + 4$

$(7x^2 + 29x + 4)7 = (7x)^2 + 29(7x) + 28$

$= (7x + 1)(7x + 28)$

$$\frac{(7x + 1)(7x + 28)}{7} = \frac{(7x + 1)7(x + 4)}{7}$$

$= (7x + 1)(x + 4)$

b) $5a^4 + 4a^2 - 1$

$(5a^4 + 4a^2 - 1)5 = (5a^2)^2 - 4(5a^2) - 5$

$= (5a^2 - 5)(5a^2 - 1)$

$$\frac{(5a^2 + 5)(5a^2 - 1)}{5} = \frac{5(a^2 + 1)(5a^2 - 1)}{5}$$

$= (a^2 + 1)(5a^2 - 1)$

c) $6y^2 + 13y - 5$

$(6y^2 + 13y - 5)6 = (6y)^2 + 13(6y) - 30$

$= (6y + 15)(6y - 2)$

$$\frac{(6y + 15)(6y - 2)}{6} = \frac{3(2y + 5)2(3y - 1)}{3 \cdot 2}$$

$= (2y + 5)(3y - 1)$

d) $3x^{2n} - x^n - 4$

$(3x^{2n} - x^n - 4)3 = (3x^n)^2 - (3x^n) - 12$

$= (3x^n - 4)(3x^n + 3)$

$$\frac{(3x^n - 4)(3x^n + 3)}{3} = \frac{(3x^n - 4)3(x^n + 1)}{3}$$

$= (3x^n - 4)(x^n + 1)$

Los Trinomios de esta forma (Forma B), también pueden factorizarse por el Método del Aspa simple (Ver VI.9) .

VI.6 SUMA Y RESTA DE CUBOS

El Método de Factorización de Suma y Resta de Cubos, se aplica sobre Expresiones Cúbicas que se suman o restan entre sí. Este Método se basa en las Expresiones:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Estas Expresiones provienen de los Cocientes Notables analizados anteriormente (III.2)

VI.6.1 FACTORIZACIÓN DE SUMA DE CUBOS

En esta Forma, se usa la Expresión:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$$

Usando el Cociente-Notable de Suma sobre Suma, se obtiene el desarrollo indicado.

$$\Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

La Potencia es Impar, por tanto el Cociente es exacto.

Despejando, se obtiene la Expresión de Factorización.

Para factorizar un Polinomio por Suma de Cubos, se toman los Términos elevados al Cubo (Se los considera como: a, b para luego aplicar el Producto indicado).

Ej 6.13 Se factoriza por Suma de Cubos:

$$x^3 + 8y^3$$

$$x^3 + (2y)^3 = (x + 2y)[x^2 - x(2y) + (2y)^2]$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$x \quad 2y \quad = (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$

Dada una Suma, se expresa como Suma de Cubos. Se toman los Términos, que están elevados al Cubo (Respectivamente x, $2y$)

Se aplica la Expresión de Producto indicado, queda así factorizado.

6.11 Factorizar por Suma de Cubos:

a) $64x^3 + 27y^3$

$$(4x)^3 + (3y)^3 = (4x + 3y)[(4x)^2 - (4x)(3y) + (3y)^2] = (4x + 3y)(16x^2 - 12xy + 9y^2)$$

b) $x^6 + y^6$

$$(x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2)[(x^2)^2 - (x^2)(y^2) + (y^2)^2] = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + x^4)$$

c) $125a^3b^3 + 1$

$$(5ab)^3 + 1^3 = [(5ab) + 1][(5ab)^2 - (5ab)(1) + 1^2] = (5ab + 1)(25a^2b^2 - 5ab + 1)$$

d) $1 + x^{6n}y^{12m}$

$$1 + (x^{2m}y^{4m})^3 = (1 + x^{2n}y^{4m})[1 - (1)(x^{2n}y^{4m}) + (x^{2n}y^{4m})^2]$$
$$= (1 + x^{2n}y^{3m})(1 - x^{2n}y^{4m} + x^{4n}y^{8m})$$

VI.6.2 FACTORIZACIÓN DE RESTA DE CUBOS

En esta Forma se usa la Expresión: $$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$ Por el Cociente Notable de Resta sobre Resta, se obtiene el desarrollo (La Potencia puede ser Par o Impar en este Cociente, para resultado exacto)

$\Rightarrow \; a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ Despejando se obtiene la Expresión Factorizada.

Para factorizar un Polinomio por Resta de Cubos, se toman los Términos elevados al Cubo. (Se los considera como: a, b para luego aplicar la Fórmula indicada)

Ej 6.14 Se factoriza por el Método de Resta de Cubos

$64x^3 - y^3$ Expresando como Resta de Cubos.

$$\underset{\Downarrow \atop 4x}{(4x)^3} - \underset{\Downarrow \atop y}{y^3} = (4x - y)\left[(4x)^2 + (4x)(y) + y^2\right]$$
$$= (4x - y)(16x^2 + 4xy + y^2)$$

Se toman los Términos, que están elevados al Cubo (Respectivamente: $4x$, y). Se usa la Fórmula de la factorización de Resta De Cubos.

6.12 Factorizar por el Método de la Resta de Cubos:

a) $125a^3 - 64b^3$ $\quad (5a)^3 - (4b)^3 = (5a - 4b)\left[(5a)^2 + (5a)(4b) + (4b)^2\right]$
$= (5a - 4b)(25a^2 + 20ab + 16a^2)$

b) $8x^{12} - 27y^6$ $\quad (2x^4)^3 - (3y^2)^3 = \left[(2x^4) - (3y^2)\right]\left[(2x^4)^2 + (2x^4)(3y^2) + (3y^2)^2\right]$
$= (2x^4 - 3y^2)(4x^8 + 6x^4y^2 + 9y^4)$

VI.6.3 SUMA Y RESTA DE POTENCIAS IGUALES

El Método de la Suma y Resta de Cubos, se generaliza, para Sumas o Restas de Potencias Iguales, usando las siguientes Fórmulas:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1})$$
$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$$

Estas Fórmulas provienen de dos casos de los Cocientes Notables (Ver III.2), presentados en forma de productos:

$\frac{x^n + y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1}$ Por el desarrollo de una Suma sobre Suma (Desarrollo válido solo para Potencias Impares: n)

$\Rightarrow \; x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1})$ Se despeja luego la Suma de Potencias.

$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1}$ Por el desarrollo de Resta sobre Resta (Desarrollo válido para Potencia: n Par o Impar)

$\Rightarrow \; x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$ Se despeja luego la Resta de Potencias.

Si se tiene una Suma de Potencias Iguales se aplica la 1^{era} Fórmula, solo en el caso de Potencias Impares. (En caso de que se presente una Suma de Potencias Pares, no será aplicable este Método)

Si se tiene una Resta de Potencias Iguales se aplica la 2da Fórmula, para el caso tanto de Potencias Pares e Impares.

Ej 6.15 Se factoriza Por Suma y Resta de Potencias Iguales:

a) $x^5 + 32y^5$

$$x^5 + (2y)^5 = (x + 2y)[x^4 - x^3(2y) + x^2(2y)^2 - x(2y)^3 + (2y)^4]$$
$$= (x + 2y)(x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 8xy^3 + 16y^4)$$

Se usa la 1^{era} Fórmula, reemplazando en ella, los Términos elevados a la Potencia: x, $2y$. (Desarrollo correcto por Potencia Impar)

b) $81x^4 - y^4$

$$(3x)^4 - y^4 = (3x - y)[(3x)^3 + (3x)^2y + (3x)y^2 + y^3]$$
$$= (3x - y)(27x^3 + 9x^2y^2 + 3xy^2 + y^3)$$

Se usa la 2da Fórmula, se reemplaza: $3x$, y (Desarrollo correcto por Potencia Par)

c) $x^4 + y^4 = ??$ No es posible aplicar la Fórmula de Suma de Potencias iguales. (Por la Potencia Par); Se factoriza por otro Método (Completando a Trinomios Cuadrados Perfectos, Ver VI.8)

6.13 Factorizar por el Método de Suma y Resta de Potencias Iguales.

a) $a^7 + 1$

$$a^7 + 1^7 = (a + 1)(a^6 - a^5 \cdot 1 + a^4 \cdot 1^2 - a^3 \cdot 1^3 + a^2 \cdot 1^4 - a \cdot 1^5 + 1^6)$$
$$= (a + 1)(a^6 - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$$

Aplicando la Suma de Potencias iguales.

b) $a^7 - 1$

$$a^7 - 1^7 = (a - 1)(a^6 + a^5 \cdot 1 + a^4 \cdot 1^2 + a^3 \cdot 1^3 + a^2 \cdot 1^4 + a \cdot 1^5 + 1^6)$$
$$= (a - 1)(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$$

Aplicando la Resta de Potencias iguales.

c) $x^6 - y^3$

$$x^6 - y^3 = (x^2)^3 - y^3 = [(x^2) - y][(x^2)^2 + (x^2)y + y^2]$$
$$= (x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$$

Ordenando los Exponentes, de manera que quede una Suma o Resta de Potencias iguales.

d) $a^{12} + b^{21}$

$$a^{12} + b^{21} = (a^4)^3 + (b^7)^3 = [(a^4) + (b^7)][(a^4)^2 - (a^4)(b^7) + (b^7)^2]$$
$$= (a^4 + b^7)(a^8 - a^4b^7 + b^{14})$$

e) $a^6b^{18}c^{12} - 64$

$$(ab^3c^2)^6 - 2^6$$
$$= [(ab^3c^2) - 2][(ab^3c^2)^5 + (ab^3c^2)^4 2 + (ab^3c^2)^3 2^2 + (ab^3c^2)^2 2^3 + (ab^3c^2)2^4 + 2^5]$$
$$= (ab^3c^2 - 2)(a^5b^{15}c^{10} + 2a^4b^{12}c^8 + 4a^3b^9c^6 + 8a^2b^6c^4 + 16ab^3c^2 + 32)$$

Para factorizar por este Método, necesariamente las potencias deben disponerse como iguales. Tome en cuenta además si tales potencias son pares o impares.

VI.7 REGLA DE RUFFINI

La Regla de Ruffini se aplica para factorizar Polinomios de grado: n

Consiste en una aplicación de la <u>División Sintética</u> (Ver II.5), del Polinomio dado entre binomios de la Forma: $x - a$, donde: a es un <u>Factor Primo</u> del Término Independiente.

- Se busca un Cociente: $C_{(x)}$ de Residuo cero, al conseguirlo, la factorización será: $(x - a)C_{(x)}$
- Este Método se llama también <u>Método de Evaluación</u>, ya que la búsqueda de <u>Residuo</u> cero es reiterativa (A veces no se consigue este <u>Residuo</u> entonces la factorización no será posible).
- En la <u>División Sintética</u> los Coeficientes del Polinomio se disponen ordenadamente, también se coloca el Término: a con el que se probará una posible factorización.

Ej 6.16 Se factoriza por la Regla de Ruffini.

$x^3 + 2x^2 + 11x - 12$

Polinomio de Grado: $n = 3$, de Término Independiente: -12 cuyos Factores primos son: 1, 2, 3, 4, 6, 12, -1, -2, -3, -4, -6, -12 ; estos son los valores que puede tomar: a

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 2 & -11 & -12 & \underline{2} \\ & 2 & 8 & -6 & \\ \hline 1 & 4 & -3 & \underline{-18} & \end{array}$$

Se efectúa la División Sintética con: $a = 2$

El Residuo no es cero (Se obtuvo -18), entonces no es posible factorizar con un binomio de la forma: $x - 2$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 2 & -11 & -12 & \underline{3} \\ & 3 & 15 & 12 & \\ \hline 1 & 5 & 4 & \underline{0} & \end{array}$$

Luego se efectúa la División con: $a = 3$. El Residuo es cero, entonces la factorización será el producto del binomio: $x - 3$ con el Cociente resultante: $C_{(x)}$

Este $C_{(x)}$ es un Polinomio de grado: 2, sus Coeficientes son los resultados de las sumas indicadas (1; 5; 4). Se completa la Factorización con el Método del Trinomio.

$$\Rightarrow \quad (x - 3)(x^2 + 5x + 4)$$
$$\Rightarrow \quad = (x - 3)(x + 1)(x + 4)$$

6.14 Factorizar por la Regla de Ruffini

a) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -2 & -13 & 38 & -24 & \underline{3} \\ & 3 & 3 & -30 & 24 & \\ \hline 1 & 1 & -10 & 8 & \underline{0} & \end{array}$$

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$$
$$= (x - 3)(x^3 + x^2 - 10x + 8)$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -10 & 8 & \underline{-4} \\ & -4 & 12 & -8 & \\ \hline 1 & -3 & 2 & \underline{0} & \end{array}$$

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$$
$$= (x - 3)(x + 4)(x^2 - 3x + 2)$$
$$= (x - 3)(x + 4)(x - 2)(x - 1)$$

b) $3a^5 - 15a^4 - 11a^3 + 55a^2 - 4a + 20$

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 3 & -15 & -11 & 55 & -4 & 20 & \underline{2} \\ & 6 & -18 & -58 & -6 & -20 & \\ \hline 3 & -9 & -29 & -3 & -10 & \underline{0} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -9 & -29 & -3 & -10 & \underline{5} \\ & 15 & 30 & 5 & 10 & \\ \hline 3 & 6 & 1 & 2 & \underline{0} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & 6 & 1 & 2 & \underline{-2} \\ & -6 & 0 & -2 & \\ \hline 3 & 0 & 1 & \underline{0} & \end{array}$$

$$3a^5 - 15a^4 - 11a^3 + 55a^2 - 4a + 20$$
$$= (a - 2)(a - 5)(a + 2)(3a^2 + 1)$$

Se aplica reiteradamente la Regla de Ruffini, hasta la factorización completa.

Ej 6.17 Se factoriza por la Regla de Ruffini:

$x^3 + 2x + 1$

Dado el Polinomio a factorizar. Note la ausencia de un Término de grado 2 (Se asume coeficiente cero)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & \underline{4} & \end{array}$$

El Término Independiente es: 1, sus Factores Primos: 1; -1

Probando la División Sintética con ambos factores, no se obtiene un Residuo cero.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ & -1 & 1 & -3 & \\ \hline 1 & -1 & 3 & \underline{-2} & \end{array}$$

Entonces la Factorización no es posible por este Método. La Regla de Ruffini no siempre permite obtener resultados en la Factorización. Pero debe probarse con todas sus alternativas (Con todos los factores primos).

VI.8 COMPLETANDO CUADRADOS

El Método de Completar a <u>Trinomios Cuadrados Perfectos</u>, es una generalización del Método de Trinomios visto anteriormente.

Consiste en Sumar y Restar Términos, de manera que se logre un Trinomio Cuadrado Perfecto, luego para terminar se aplica la Diferencia de Cuadrados u otro Método.

Ej 6.18 Se factoriza Completando a Trinomios Cuadrados Perfectos.

$x^4 + x^2y^2 + y^4$

La Expresión no es un Trinomio Cuadrado Perfecto, como se verifica por Reglas conocidas.

$$\begin{array}{ccccc} x^4 & + & x^2y^2 & + & y^4 = ?? \\ \Downarrow & & ? & & \Downarrow \end{array}$$

El Segundo Término debería ser $2x^2y^2$, pero solo se tenía a x^2y^2.

$x^2 \Rightarrow 2(x^2)(y^2) \Leftarrow y^2$

Para que si lo sea, se debe <u>Sumar</u> el Término x^2y^2 sin embargo para compensar se <u>Resta</u> el mismo Término.

$x^4 + x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 - x^2y^2$

$= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2$

Ordenando y factorizando el Trinomio Cuadrado Perfecto así obtenido.

$= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$

$= \left[(x^2 + y^2) + xy\right]\left[(x^2 + y^2) - xy\right]$

Ordenando luego como una una Diferencia de Cuadrados, se factoriza entonces como un Producto de Suma por Diferencia.

$= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

Ordenando la factorización así obtenida.

6.15 Factorizar completando a Trinomio Cuadrado Perfecto:

a) $25a^4 + 11a^2b^2 + 4b^4$

$$\begin{array}{ccccc} 25a^4 & + & 11a^2b^2 & + & 4b^2 = ?? \\ \Downarrow & & ? & & \Downarrow \end{array}$$

$5a^2 \Rightarrow 2(5a^2)(2b^2) \Leftarrow 2b^2$

$25a^4 + 11a^2b^2 + 4b^4 + 9a^2b^2 - 9a^2b^2$

$= (25a^4 + 20a^2b^2 + 4b^4) - 9a^2b^2$

$= (5a^2 + 2b^2)^2 - (3ab)^2$

$= \left[(5a^2 + 2b^2) + 3ab\right]\left[(5a^2 + 2b^2) - 3ab\right]$

$= (5a^2 + 3ab + 2b^2)(5a^2 - 3ab + 2b^2)$

b) $x^4 + y^{12}$

$$\begin{array}{ccc} x^4 & & + y^{12} = ?? \\ \Downarrow & ? & \Downarrow \end{array}$$

$x^2 \Rightarrow 2(x^2)(y^6) \Leftarrow y^6$

$x^4 + y^{12} + 2x^2y^6 - 2x^2y^6$

$= (x^4 + 2x^2y^6 + y^{12}) - 2x^2y^6$

$= (x^2 + y^6)^2 - (\sqrt{2}\,xy^3)^2$

$= \left[(x^2 + y^6) + \sqrt{2}\,xy^3\right]\left[(x^2 + y^6) - \sqrt{2}\,xy^3\right]$

$= (x^2 + \sqrt{2}\,xy^3 + y^6)(x^2 - \sqrt{2}\,xy^3 + y^6)$

c) $9x^4 + 14x^2y^4 + 25y^8$

$$9x^4 \quad - \quad 14x^2y^4 \quad + \quad 25y^8 = ??$$
$$\Downarrow \qquad ? \qquad \Downarrow$$
$$3x^2 \Rightarrow 2(3x^2)(5y^4) \Leftarrow 5y^4$$
$$9x^4 + 14x^2y^4 + 25y^8 + 16x^2y^4 - 16x^2y^4$$
$$= 9x^4 + 30x^2y^4 + 25y^8 - 16x^2y^4$$
$$= (3x^2 + 5y^4)^2 - (4xy^2)^2$$
$$= [(3x^2 + 5y^4) + 4xy^2][(3x^2 + 5y^4) - 4xy^2]$$
$$= (3x^2 + 4xy^2 + 5y^4)(3x^2 - 4xy^2 + 5y^4)$$

d) $x^4 - x^2y^2 + y^4$

$$x^4 \quad - \quad x^2y^2 \quad + \quad y^4 = ??$$
$$\Downarrow \qquad \Uparrow \qquad \Downarrow$$
$$x^2 \Rightarrow 2(x^2)(y^2) \Leftarrow y^2$$
$$x^4 - x^2y^2 + y^4 + 3x^2y^2 - 3x^2y^2$$
$$= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 3x^2y^2$$
$$= (x^2 + y^2)^2 - (\sqrt{3}\,xy)^2$$
$$= [(x^2 + y^2) + \sqrt{3}xy][(x^2 + y^2) - \sqrt{3}xy]$$
$$= (x^2 + \sqrt{3}\,xy + y^2)(x^2 - \sqrt{3}\,xy + y^2)$$

e) $e^{8x} + 1$

$$e^{8x} \qquad + \qquad 1 = ??$$
$$\Downarrow \qquad ? \qquad \Downarrow$$
$$e^{4x} \Rightarrow 2(e^{4x})(1) \Leftarrow 1$$
$$e^{8x} + 1 + 2e^{4x} - 2e^{4x}$$
$$= e^{8x} + 2e^{4x} + 1 - 2e^{4x}$$
$$= (e^{4x} + 1)^2 - (\sqrt{2}\,e^{2x})^2$$
$$= [(e^{4x} + 1) + \sqrt{2}e^{2x}][(e^{4x} + 1) - \sqrt{2}e^{2x}]$$
$$= (e^{4x} + \sqrt{2}\,e^{2x} + 1)(e^{4x} - \sqrt{2}\,e^{2x} + 1)$$

f) $x^2 + y^2$

$$x^2 \quad + \quad y^2 = ??$$
$$\Downarrow \qquad ? \qquad \Downarrow$$
$$x \Rightarrow 2xy \Leftarrow y$$
$$x^2 + y^2 + 2xy - 2xy$$
$$= (x^2 + 2xy + y^2) - 2xy$$
$$= (x + y)^2 - \sqrt{2xy}^{\,2}$$
$$= [(x + y) + \sqrt{2xy}][(x + y) - \sqrt{2xy}]$$
$$= (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y)$$

Esta factorización no es válida porque quedan letras dentro de Raíces. En concreto la Suma de cuadrados no es factorizable.

En g); h) se suman, restan Términos que permitan una posterior Factorización por agrupación.

g) $x^5 + x^4 + 1$

$$x^5 + x^4 + 1 = ??$$
$$= x^5 + x^4 + 1 + (x^3 + x^2 + x) - (x^3 + x^2 + x)$$
$$= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - (x^3 + x^2 + x)$$
$$= x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1)$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$$

h) $x^4 + 2x^2 - x + 2$

$$= (x^4 + 2x^2 - x + 2) + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x - x$$
$$= x^4 + \underline{x^3} + 2x^2 - \underline{x^3} - \underline{\underline{x^2}} - \underline{\underline{2x}} + \underline{\underline{x^2}} + \underline{\underline{x}} + 2$$
$$= x^2(x^2 + x + 2) - x(x^2 + x + 2) + (x^2 + x + 2)$$
$$= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 1)$$

VI.9 MÉTODO DEL ASPA

El Método del Aspa permite factorizar polinomios que presentan las siguientesformas:

$$ax^2 + bxy + cy^2$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$$

VI.9.1 ASPA SIMPLE

Trata de la factorización de polinomios de la forma: $ax^2 + bxy + cy^2$

Para Factorizar Trinomios de esta Forma, se siguen lo siguientes pasos:

- Se disponen los factores de ax^2 ; cy^2 en los vértices de un cuadrado imaginario
- Se verifica que la suma del producto de diagonales determine: bxy, si no se cumple, se buscan otros factores para ax^2 ; cy^2
- Los factores de la primera fila por los de la segunda dan la factorización requerida.

Ej 6.19 Por el método del Aspa simple se factoriza el Polinomio: $6x^2 + 23xy + 20y^2$

$6x^2 + 23xy + 20y^2$

$2x \quad 4y$

$3x \quad 5y \qquad (2x)(5y) + (3x)(4y) = 22xy$

Los factores de $6x^2$ pueden ser $2x$, $3x$ que se colocan en columna. Los factores de $20y^2$ pueden ser $4y$, $5y$ que se colocan en la otra columna. Haciendo la suma del producto de sus diagonales no se obtiene el Término $23xy$

$2x \quad 5y$

$3x \quad 4y \qquad (2x)(4y) + (3x)(5y) = 23xy$

$6x^2 + 23xy + 20y^2 = (2x + 5y)(3x + 4y)$

Se forma otra disposición de los factores de $20y^2$, esta vez en el producto se obtiene a $23xy$ por tanto la factorización es el producto de los Términos de la 1ᵉʳᵃ Fila por los de la 2ᵈᵃ.

Pueden establecerse otros factores y otras colocaciones, sin embargo debe buscarse que la suma del producto de sus diagonales determine $23xy$.

Ej 6.20 Por el método del Aspa simple se factoriza el Polinomio: $8x^2 - 22xy + 15y^2$

$8x^2 - 22xy + 15y^2$

$2x \quad -5y$

$4x \quad -3y \qquad (2x)(-3y) + (4x)(-5y) = -26xy$

Los factores de $8x^2$ pueden ser $2x$, $4x$. Los factores de $15y^2$ pueden ser $-5y$, $-3y$ Efectuando la suma del producto de sus diagonales no se obtiene $-22xy$

$2x \quad -3y$

$4x \quad -5y \qquad (2x)(-5y) + (4x)(-3y) = -22xy$

$8x^2 - 22xy + 15y^2 = (2x - 3y)(4x - 5y)$

Se forma otra disposición de los factores de $15y^2$, esta vez en el producto se obtiene a $-22xy$ por tanto la factorización es el producto de los Términos de las Filas.

Por el signo de $-22xy$ los factores de $15y^2$ deben ser negativos.

6.16 Factorizar por el método del Aspa simple:

a) $10x^2 + 53xy + 36y^2$

$5x \quad 4y$

$2x \quad 9y \qquad (5x)(9y) + (2x)(4y) = 53xy$

$10x^2 + 53xy + 36y^2 = (5x + 4y)(2x + 9y)$

b) $7x^2 - 9xy - 10y^2$

$7x \quad 5y$

$x \quad -2y \qquad (7x)(-2y) + x(5y) = -9xy$

$7x^2 - 9xy - 10y^2 = (7x + 5y)(x - 2y)$

c) $9x^2 - 15xy + 4y^2$

$3x \quad -4y$

$3x \quad -y \qquad (3x)(-y) + (3x)(-4y) = -15xy$

$9x^2 - 15xy + 4y^2 = (3x - 4y)(3x - y)$

d) $35x^2 - 2xy - y^2$

$5x \quad -y$

$7x \quad y \qquad (5x)y + (7x)(-y) = -2xy$

$35x^2 - 2xy - y^2 = (5x - y)(7x + y)$

VI.9.2 ASPA DOBLE

Trata de la factorización de polinomios de la forma: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$

Para factorizar polinomios de esta Forma, se siguen lo siguientes pasos

- Se disponen los factores de ax^2 ; cy^2 ; f en los vértices de dos cuadrados unidos imaginarios
- Se verifica que la suma del producto de diagonales del 1ᵉʳ cuadrado determine: bxy

- La suma del producto de las diagonales con los vértices extremos debe determinar: dx
- La suma del producto de diagonales con vértices del 2[do] cuadrado debe determinar: ey
- Los factores de la primera fila por los de la segunda serán los factores requeridos.

Ej 6.21 Por el método del Aspa doble se factoriza: $8x^2 + 14xy + 3y^2 + 32x + 23y + 30$

$$8x^2 + 14xy + 3y^2 + 32x + 23y + 30$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & 3y & 5 \\ 4x & y & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (2x)(y) + (4x)(3y) = 14xy \\ (2x)(6) + (4x)(5) = 32x \\ (3y)(6) + (y)(5) = 23y \end{array}$$

Un par de factores de $8x^2$ son $2x$, $4x$ que se colocan en columna. Los factores de $3y^2$ pueden ser $3y$, y se colocan en otra columna. Los factores de 30 pueden ser 5 , 6 se colocan en la columna final.

Efectuando la suma del producto de sus diagonales se obtienen los resultados indicados, que coinciden con los restantes términos del polinomio, por tanto la factorización es el producto de las sumas de las filas: $8x^2 + 14xy + 3y^2 + 32x + 23y + 30 = (2x + 3y + 5)(4x + y + 6)$

Si las sumas de los productos de las diagonales no coinciden con los restantes Términos, se debe buscar otra colocación (En el orden de las columnas), o buscar otros factores.

La factorización solo será posible si se obtienen exactamente los otros Términos.

Ej 6.22 Por el método del Aspa doble se factoriza: $6x^2 + 15xy + 6y^2 + 2x + 19y - 20$

$$6x^2 + 15xy + 6y^2 + 2x + 19y - 20$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & 3y & 5 \\ 2x & 2y & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (3x)(2y) + (2x)(3y) = 12xy \\ (3x)(-4) + (2x)(5) = -2x \\ (3y)(-4) + (2y)(5) = -2y \end{array}$$

Un par de factores de $6x^2$ son $3x$, $2x$ que se colocan en columna. Los factores de $6y^2$ pueden ser $3y$, $2y$ se colocan en otra columna. Los factores de -20 pueden ser 5 , -4 se ubican en la columna final.

Efectuando la suma del producto de sus diagonales se obtienen los resultados indicados, que no coinciden con los restantes términos del polinomio, se busca otra disposición:

$$6x^2 + 15xy + 6y^2 + 2x + 19y - 20$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & 6y & -5 \\ 2x & y & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (3x)(y) + (2x)(6y) = 15xy \\ (3x)(4) + (2x)(-5) = 2x \\ (6y)(4) + (y)(-5) = 19y \end{array}$$

Par de factores de $6x^2$ son $3x$, $2x$ Los factores de $6y^2$ pueden ser $6y$, y se colocan en otra columna. Los factores de -20 pueden ser -5 , 4 se ubican en la columna final.

Esta vez los productos coinciden, por tanto el producto de las filas es la factorización:

$$6x^2 + 15xy + 6y^2 + 2x + 19y - 20 = (3x + 6y - 5)(2x + y + 4)$$

Ej 6.23 Por el método del Aspa doble se factoriza: $5x^2 + 13xy + 6y^2 + 27x + 26y + 28$

$$5x^2 + 13xy + 6y^2 + 27x + 26y + 28$$

$$\begin{array}{ccc} 5x & 3y & 4 \\ x & 2y & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (5x)(2y) + x(3y) = 13xy \\ (5x)\,7 + (x)\,4 = 34x \\ (3y)\,7 + (2y)\,4 = 29y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 5x & 3y & 7 \\ x & 2y & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (5x)(2y) + x(3y) = 13xy \\ (5x)\,4 + (x)\,7 = 27x \\ (3y)\,4 + (2y)\,7 = 26y \end{array}$$

Colocando en columna los factores de $5x^2$, $6y^2$, 28

La suma del producto de diagonales solo en el 1[er] caso da un Término correcto, es necesario cambiar el orden de factores de la última columna.

Desarrollando las sumas de productos ahora si se obtienen los Términos restantes del polinomio.

$$5x^2 + 13xy + 6y^2 + 27x + 26y + 28 = (5x + 3y + 7)(x + 2y + 4)$$

6.17 Factorizar por el método del Aspa doble:

a) $3x^2 + 17xy + 10y^2 + 13x + 26y + 12$

$$\begin{array}{ccc} 3x & 2y & 6 \\ x & 5y & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (3x)(5y) + x(2y) = 17xy \\ (3x)2 + (x)6 = 12x \\ (2y)2 + (5y)6 = 34y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x^2 + 17xy + 10y^2 + 13x + 26y + 12 \\ (3x + 2y + 6)(x + 5y + 2) \end{array}$$

b) $12x^2 - 7xy - 10y^2 + 25x + 9y + 7$

$$\begin{array}{ccc} 3x & 2y & 1 \\ 4x & -5y & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (3x)(-5y) + (4x)(2y) = -7xy \\ (3x)7 + (4x)1 = 25x \\ (2y)7 + (-5y)1 = 9y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 12x^2 - 7xy - 10y^2 + 25x + 9y + 7 \\ = (3x + 2y + 1)(4x - 5y + 7) \end{array}$$

c) $6x^2 + 7xy - 5y^2 + 10x + 34y - 24$

$$\begin{array}{ccc} 2x & -y & 6 \\ 3x & 5y & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (2x)(5y) + (3x)(-y) = 7xy \\ (2x)(-4) + (3x)6 = 10x \\ (-y)(-4) + (5y)6 = 34y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 6x^2 + 7xy - 5y^2 + 10x + 34y - 24 \\ = (2x - y + 6)(3x + 5y - 4) \end{array}$$

d) $4x^2 - 22xy + 10y^2 + 21x - 51y + 27$

$$\begin{array}{ccc} 4x & -2y & 9 \\ x & -5y & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (4x)(-5y) + x(-2y) = -22xy \\ (4x)(3) + (x)9 = 21x \\ (-2y)(3) + (-5y)9 = -51y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 4x^2 - 22xy + 10y^2 + 21x - 51y + 27 \\ = (4x - 2y + 9)(x - 5y + 3) \end{array}$$

VI.9.3 ASPA DOBLE ESPECIAL

Trata de la factorización de polinomios de la forma: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$

Para factorizar polinomios de esta forma, se siguen lo siguientes pasos

- Se disponen los factores de ax^4 ; f en los vértices de un cuadrado imaginario, tal y como se tratara de un Aspa simple.
- Se efectúa la suma del producto de diagonales del cuadrado, para comparar con: cx^2, la diferencia que puede existir a su vez se descompone en dos factores que se sitúan internamente al anterior Aspa.
- La suma del producto de las diagonales entre los vértices de cada cuadrado imaginario debe determinar bx^3, dx respectivamente, caso contrario se buscan otros factores.
- Los factores de la primera fila por los de la segunda serán los factores requeridos.

Ej 6.24 Por el método del Aspa Doble Especial se factoriza: $x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10$

$x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10$

$$\begin{array}{cc} x^2 & 5 \\ x^2 & 2 \end{array} \qquad (x^2)(2) + (x^2)(5) = 7x^2$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & 4x & 5 \\ x^2 & 3x & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (x^2)(3x) + (x^2)(4x) = 7x^3 \\ (4x)(2) + (3x)(5) = 23x \end{array}$$

$$x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10$$
$$= (x^2 + 4x + 5)(x^2 + 3x + 2)$$

Descomponiendo x^4, 10 en dos factores que forman un 1er Aspa.

Efectuando la suma del producto de sus diagonales se obtiene $7x^2$, comparando con $19x^2$ del Polinomio existe la diferencia de $12x^2$ que a su vez se descompone en dos factores que se insertan al anterior Aspa.

Efectuando la suma del producto de diagonales se obtienen los restantes Términos del Polinomio a factorizar.

Ej 6.25 Por el método del Aspa Doble Especial se factoriza: $a^4 + 2a^3 - 14a^2 + 13a - 2$

$$a^4 + 2a^3 - 14a^2 + 13a - 2$$

$$\begin{array}{cc} a^2 & 2 \\ a^2 & -1 \end{array} \qquad (a^2)(-1) + (a^2)(2) = a^2$$

Descomponiendo a^4, -2 en dos factores que forman un 1er Aspa.

Efectuando la suma del producto de diagonales se obtiene a^2, comparando con $-14a^2$ del Polinomio.

$$\begin{array}{ccc} a^2 & -3a & 2 \\ a^2 & 5a & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (a^2)(5a) + (a^2)(-3a) = 2a^3 \\ (-3a)(-1) + (5a)(2) = 13a \end{array}$$

Efectuando: $-14a^2 - a^2 = -15a^2$

$$a^4 + 2a^3 - 14a^2 + 13a - 2$$
$$= (a^2 - 3a + 2)(a^2 + 5a - 1)$$

A su vez $-15a^2$ se descompone en dos factores que se insertan al anterior Aspa. Efectuando la suma del producto de diagonales se obtienen los restante Términos.

6.18 Por el método del Aspa Doble Especial, factorizar:

a) $x^4 + 9x^3 + 28x^2 + 33x + 7$

$$\begin{array}{cc} x^2 & 1 \\ x^2 & 7 \end{array} \qquad (x^2)(7) + (x^2)(1) = 8x^2 \qquad \begin{array}{r} 28x^2 \\ -\ 8x^2 \\ \hline 20x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & 4x & 1 \\ x^2 & 5x & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (x^2)(5x) + (x^2)(4x) = 9x^3 \\ (4x)(7) + (5x)(1) = 33x \end{array}$$

$$x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10 = (x^2 + 4x + 1)(x^2 + 5x + 7)$$

Descomponiendo x^4, 7 en dos factores que forman un 1^er^ Aspa.

La suma del producto de diagonales es $8x^2$, su diferencia con $28x^2$ es $20x^2$

A su vez $20x^2$ se descompone en dos factores que se insertan al Aspa. Efectuando la suma del producto de diagonales se obtienen los restante Términos.

b) $x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 39x + 20$

$$\begin{array}{cc} x^2 & 4 \\ x^2 & 5 \end{array} \qquad (x^2)(5) + (x^2)(4) = 9x^2 \qquad \begin{array}{r} 27x^2 \\ -\ 9x^2 \\ \hline 18x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & -3x & 4 \\ x^2 & -6x & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (x^2)(-6x) + (x^2)(-3x) = -9x^3 \\ (-3x)(5) + (-6x)(4) = -39x \end{array}$$

$$x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 39x + 20 = (x^2 - 3x + 4)(x^2 - 6x + 5)$$

Descomponiendo x^4, 20 en dos factores que forman un 1^er^ Aspa.

La suma del producto de diagonales es $9x^2$, la diferencia a $27x^2$, es $18x^2$

A su vez $18x^2$ se descompone en dos factores que se insertan al Aspa. La suma del producto de diagonales determina a los restante Términos.

Los signos de los factores de $18x^2$ son negativos, por que así lo exigen los restantes Términos ($-9x^3$, $-39x$).

Note que en este método de ser necesario se debe probar con diversos factores hasta lograr que en las sumas de productos de diagonales se obtengan esos restantes Términos.

Tome en cuenta que para la aplicación de los Métodos de Aspa (Simple, Doble y Especial), se requiere de factores numéricos que cumplan ciertas condiciones. Sin embargo esto no siempre se cumple. Por ejemplo es imposible hallar factores para: $x^2 + xy + 2y^2$

VI.10 OTROS MÉTODOS

Para lograr la Factorización de Polinomios de mayor complejidad, para ciertos casos especiales se dispone además de los siguientes Métodos:

VI.10.1 FACTORIZACIÓN RECÍPROCA

Un Polinomio se llama Recíproco, si los coeficientes de sus Términos simétricos son iguales entre sí. Por ejemplo en el Polinomio: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, para ser Recíproco debe cumplirse que: $a = e$; $b = d$

Para factorizar un Polinomio Recíproco se usa el Cambio de variable: $\boxed{x + \dfrac{1}{x} = u}$

Se cumple además por el Cambio de variable que: (Tal como se demuestra más adelante) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = u^2 - 2$; $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = u^3 - 3u$

Ej 6.26 Se factoriza el Polinomio Recíproco $x^4 + 9x^3 + 20x^2 + 9x + 1$

$$x^4 + 9x^3 + 20x^2 + 9x + 1$$

Note que el Polinomio es Recíproco porque los coeficientes 1^ero y último son iguales, similarmente el 2^do y el penúltimo

$$= x^2\left[x^2 + 9x + 20 + \frac{9}{x} + \frac{1}{x^2}\right]$$

Factorizando x^2 De todo el polinomio.

$$= x^2\left[(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 9(x + \frac{1}{x}) + 20\right]$$

Ordenado de manera que se pueda aplicar el Cambio de variable: $x + \dfrac{1}{x} = u$ de los Polinomios Recíprocos.

$$= x^2[(u^2 - 2) + 9(u) + 20]$$

$$= x^2[u^2 + 9u + 18]$$

Reemplazando además: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = u^2 - 2$

$$= x^2(u + 3)(u + 6)$$

$$= x^2(x + \frac{1}{x} + 3)(x + \frac{1}{x} + 6)$$

Desarrollando el polinomio para u. Factorizando por el Método del Trinomio o del Aspa Simple.

$$= x^2(\frac{x^2 + 1 + 3x}{x})(\frac{x^2 + 1 + 6x}{x})$$

$$= (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 6x + 1)$$

Retornando a la variable inicial del Cambio de variable. Ordenando y simplificando se logra la factorización.

Ej 6.27 Se Factoriza el Polinomio Recíproco $7x^4 - 6x^3 - 2x^2 - 6x + 7$

$$7x^4 - 6x^3 - 2x^2 - 6x + 7$$

Factorizando x^2

$$= x^2[7x^2 - 6x - 2 - \frac{6}{x} + \frac{7}{x^2}]$$

Ordenado para aplicar el Cambio de variable.

$$= x^2[7(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 6(x + \frac{1}{x}) - 2]$$

El polinomio para u se factoriza por el Método del Trinomio o del Aspa Simple.

$$= x^2[7(u^2 - 2) - 6(u) - 2] = x^2[7u^2 - 6u - 16]$$

$$= x^2(7u + 8)(u - 2) = x^2[7(x + \frac{1}{x}) + 8](x + \frac{1}{x} - 2)$$

$$= x^2(\frac{7x^2 + 7 + 8x}{x})(\frac{x^2 + 1 - 2x}{x}) = (7x^2 + 8x + 7)(x^2 - 2x + 1)$$

A partir del Cambio se variable se cumple que:

$$u = x + \frac{1}{x}$$

Elevando al cuadrado y simplificando, se logra la igualdad de: $u^2 - 2$ que se emplea en la Factorización Recíproca.

$$u^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2x\frac{1}{x} + (\frac{1}{x})^2$$

$$= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow u^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

De la misma manera se puede demostrar para la potencia 3, que: $u^3 - 3u = x^3 + 1/x^3$

6.19 Factorizar por el Método de la Factorización Recíproca

a) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1$

$$= x^2[x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}]$$

$$= x^2[(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 5(x + \frac{1}{x}) + 8]$$

$$= x^2[(u^2 - 2) - 5(u) + 8]$$

$$= x^2[u^2 - 5u + 6]$$

$$= x^2(u - 2)(u - 3)$$

$$= x^2(x + \frac{1}{x} - 2)(x + \frac{1}{x} - 3)$$

$$= x^2(\frac{x^2 + 1 - 2x}{x})(\frac{x^2 + 1 - 3x}{x})$$

$$= (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 3x + 1)$$

b) $3x^4 + 10x^3 + 14x^2 + 10x + 3$

$$= x^2[3x^2 + 10x + 14 + \frac{10}{x} + \frac{3}{x^2}]$$

$$= x^2[3(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 10(x + \frac{1}{x}) + 14]$$

$$= x^2[3(u^2 - 2) + 10(u) + 14]$$

$$= x^2[3u^2 + 10u + 8]$$

$$= x^2(3u + 4)(u + 2)$$

$$= x^2[3(x + \frac{1}{x}) + 4)(x + \frac{1}{x} + 2)]$$

$$= x^2(\frac{3x^2 + 3 + 4x}{x})(\frac{x^2 + 1 + 2x}{x})$$

$$= (3x^2 + 4x + 3)(x^2 + 2x + 1)$$

c) $x^5 + 1$

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$= (x + 1)x^2[x^2 - x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}]$$

$$= (x + 1)x^2[(x^2 + \frac{1}{x^2}) - (x + \frac{1}{x}) + 1]$$

$$= (x + 1)x^2[(u^2 - 2) - (u) + 1]$$

$$= (x + 1)x^2[u^2 - u - 1]$$

$$= (x + 1)x^2(u - \frac{1 + \sqrt{5}}{2})(u - \frac{1 - \sqrt{5}}{2})$$

$$= (x + 1)x^2(x + \frac{1}{x} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2})(x + \frac{1}{x} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2})$$

$$= (x + 1)(x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1)(x^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1)$$

d) $x^6 + 2x^5 + 4x^3 + 2x + 1$

$$= x^3[x^3 + 2x^2 + 4 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}]$$

$$= x^3[(x^3 + \frac{1}{x^3}) + 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 4]$$

$$= x^3[(u^3 - 3u) + 2(u^2 - 2) + 4]$$

$$= x^3[u^3 + 2u^2 - 3u]$$

$$= x^3u(u + 3)(u - 1)$$

$$= x^3(x + \frac{1}{x})(x + \frac{1}{x} + 3)(x + \frac{1}{x} - 1)$$

$$= (x^2 + 1)(x^2 + 3x + 1)(x^2 - x + 1)$$

En el inciso c), al presentarse un trinomio cuadrático, para factorizar se precisa de la fórmula de segundo grado, ya que no es posible factorizar directamente.

e) $x^4 + 1$

$$x^4 + 1 = x^2[x^2 + \frac{1}{x^2}] = x^2[u^2 - 2] = x^2[(u + \sqrt{2})(u - \sqrt{2})]$$

$$= x^2[(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2})(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2})] = x^2[\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x}\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x}]$$

$$= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

Para factorizar este Polinomio Recíproco, también puede emplearse el método de Completar a Cuadrados Perfectos (Ver VI.8)

VI.- PROBLEMAS PROPUESTOS

6.1 Factorizar por el Método de Factor Común las siguientes Expresiones Algebraicas:

a) $ax+bx+cx$ b) $a^5b^2+a^4b^4+a^2b^6$ c) $9a^6bc^2+12a^5bc^4+6a^2bc^2$

d) $6x^5y^2-9x^3y^4$ e) $(a+1)x^n+(a+1)x^m$ f) $(x^2+x+1)n+(x^2+x+1)m$

g) $x^2y^4-y^2z^4$ h) $x^4-5x^3+6x^2+7x$ i) $(x+1)(x+2)-(x+2)(x+3)$

j) $(x^2+1)a+(x^2+1)b$ k) $(a-b)p+(b-a)q$ l) $x^{2m+1}+x^{2m+3}+x^{2m+5}$

m) $(x^n+1)a^2+(x^n+1)b^2$ n) $y^{n+2}+y^n+y^{n-2}$ ñ) $(xy+1)a^5b^2+(xy+1)a^3b^4$

o) $-a-b+x(a+b)$ p) $a^8-a^6+a^4-a^2$ q) $(a-1)a^5+(a-1)a^3$

6.2 Factorizar por el Método de Agrupación de Términos:

a) $ap+aq+bp+bq$ b) $x^6+x^4+x^2+1$ c) y^3-y^2+y-1

d) $a+ab+b+1$ e) $a^3-a^2b+ab^2-b^3$ f) $axy+bxy+a+b$

g) $a+a^2-ab^2-b^2$ h) $1+2a+3b+6ab$ i) x^3+x^2y+x+y

j) $1+2a-2b-4ab$ k) $x^4+2x^3y+xy+2y^2$ l) a^3+2a^2+2a+1

6.3 Factorizar por el Método de Trinomios Cuadrados Perfectos:

a) $9x^2+30x+25$ b) $9a^2+24ab+16b^2$ c) $16a^2b^2+8ab+1$

d) $a^6+14a^3b^3+49b^6$ e) $1+4x^5y^3z+4x^{10}y^6z^2$ f) $x^8+2x^4y^2+y^4$

g) $p^2q^4r^8+2pq^2r^4+1$ h) $x^{6n}+2x^{3n}+1$ i) $x^{2n+4}+2x^{n+2}y^{2n-1}+y^{4n-2}$

j) $9a^2-6ab+b^2$ k) $x^2y^2-14xy+49$ l) $x^{2m-2}-2x^{m-1}y^{m+1}+y^{2m+2}$

m) $9x^4-30x^2y^4+25y^8$ n) $a^6b^4c^2-18a^3b^2c+81$ o) $4x^2+6xy+9y^2$

p) $a^{8n}-2a^{4n}+1$ q) $1-2a^2b^4+a^4b^8$ r) $x^{2m+2n}-2x^{m+n}+1$

6.4 Factorizar por el Método de Diferencia de Cuadrados:

a) $4a^2-9b^2$ b) $81x^2-1$ c) p^6-q^2 d) $a^2b^4-c^6$

e) $x^{16}-y^{16}$ f) $25a^8b^4c^2-1$ g) x^8-y^4 h) $9x^2+16y^2$

i) $x^{2n}-y^{2n}$ j) $x^{8n}-y^2$ k) $x^{2n+4}-y^{8n-6}$ l) $100-a^4b^8$

6.5 Factorizar por el Método de los Trinomios:

a) x^2+5x+6 g) x^4+5x^2+4 m) $4x^2+18x+8$ s) $x^2+9xy+18y^2$

b) x^2+4x-5 h) $x^{10}-x^5-6$ n) $6x^2+14x+4$ t) $x^2-4xy-12y^2$

c) x^2-6x+8 i) $x^{2n}+8x^n+15$ o) $8x^2+18x-5$ u) $a^2-4ab-96b^2$

d) $x^2-14x+48$ j) $2x^2+7x+3$ p) $3x^4+13x^2+4$ v) $8x^2+26xy+15y^2$

e) a^2+8a-9 k) $3x^2-14x+8$ q) $2x^6+7x^3+6$ w) $e^{2x}-4e^x+3$

f) a^2+a-56 l) $5x^2+4x-1$ r) $3x^{2m}+7x^m+2$ x) $3^{2x}-10\cdot 3^x+9$

6.6 Factorizar por el Método de Suma, Resta de Cubos y su Generalización:

a) a^3+64 b) $64x^3+27y^3$ c) a^3b^3+125 d) a^6b^3+1

e) x^6+y^3 f) $a^9b^6c^3+1$ g) x^6+1 h) $x^{3n}+y^{3n}$

i) a^3-8 j) $216x^3-27y^3$ k) x^3y^3-64 l) x^9y^3-1

m) x^3-y^6 n) $a^{12}b^6c^3-1$ o) x^6-1 p) $x^{3n}-y^{3n}$

q) x^7+y^7 r) x^5-y^5 s) x^6-y^6 t) x^6+y^6

u) x^5-243 v) x^4-81 w) x^9+y^9 x) $x^{10}+y^{10}$

y) x^5y^5-1 z) x^8-y^4 α) a^4b^8-1 β) $x^{12}-y^6$

γ) $x^{3n}+y^{6n}$ δ) $x^{8n}y^{4n}-1$ ϵ) x^5-y^{5n} ε) $x^5y^{5n}z^{5m}-1$

6.7 Factorizar por la Regla de Ruffini

a) $x^3-6x^2+11x-6$ b) $x^3-6x^2+5x+12$

c) $x^3-10x^2+31x-30$ d) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$

e) $x^4+10x^3+35x^2+50x+24$ f) $x^4+9x^3+28x^2+36x+16$

g) $x^5+10x^4+30x^3+20x^2-31x-30$ h) $x^5+7x^4+13x^3+x^2-14x-8$

i) $x^5+11x^4+35x^3+25x^2-36x-36$ j) $2x^4+9x^3+4x^2-21x-18$

k) x^3-3x-2 l) $x^3+x^2y-14xy^2-24y^3$

6.8 Factorizar por Completando a Trinomios Cuadrados Perfectos

a) a^4+a^2+1 d) x^4+4y^4 g) x^8+x^4+1

b) $16x^4+4x^2+1$ e) $64a^4+b^4$ h) $x^{16}+x^8y^8+y^{16}$

c) $x^4+9x^2y^2+81y^4$ f) $81x^4+4y^4$ i) $a^{12}b^{12}+a^6b^6+1$

6.9 Factorizar por el Método del Aspa simple, doble y doble especial.

a) $10x^2+23xy+12y^2$ h) $12x^2+23xy+10y^2+22x+17y+6$

b) $3x^2+13xy+4y^2$ i) $10x^2+11xy+3y^2+33x+19y+20$

c) $14x^2-19xy-3y^2$ j) $7x^2-13xy-2y^2-31x+2y+12$

d) $8x^2-22xy+15y^2$ k) $3x^2+17xy+10y^2+17x-6y-28$

e) $28a^2+27ab+5b^2$ l) $2x^2+7xy-4y^2+7x-17y-15$

f) $8a^2+43ab+15b^2$ m) $3a^2+7ab+2b^2+a-3b-2$

g) $15a^2+7ab-4b^2$ n) $6p^2+pq-q^2+7p-9q-20$

o) $x^4+7x^3+17x^2+26x+12$ q) $y^4+y^3-10y^2+5y+7$

p) $x^4-10x^3+24x^2-17x+2$ r) $a^4+5a^3-2a^2-11a-5$

s) $20a^2b^2-7ab-6$ w) $6x^2+23xy+20y^2-x-y-1$

t) $6a^4+23a^2b^2+20b^4$ x) $2x^2+2xy-12y^2-3x+41y-35$

u) $35x^{2n}+31x^ny^n-18y^{2n}$ y) $7a^2+36ab+5b^2+5a-9b-2$

v) $42x^{2m}-17x^my-15y^2$ z) $3a^2+11ab-4b^2-13a+13b^2-10$

6.10 Factorizar usando Otros Métodos (Recíprocos, etc.)

a) $x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1$
b) $x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 9x + 1$
c) $x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 7x + 1$
d) $3x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 7x + 3$
e) $8x^4 - 12x^3 + 20x^2 - 12x + 8$
f) $a^4 + 5a^3 + 6a^2 + 5a + 1$
g) $3a^4 + 7a^3 - 34a^2 - 7a + 3$
h) $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2$
i) $5x^4 + 8x^3y + 13x^2y^2 + 8xy^3 + 5y^4$
j) $x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 9x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

6.11 Factorizar usando diversos Métodos las siguientes Expresiones Algebraicas:

a) $x^5y^4 - x^4y^4 + x^3y^4 - x^2y^4$
b) $4x^3y + 12x^2y^2 + 9xy^3$
c) $x^4 - 7x^3 + 10x^2$
d) $ax^2y + bx^2y + axy^2 + bxy^2$
e) $x^5y^3 - 2x^4y^2 + x^3y$
f) $x^2y^2 + 7xy^2 + 6y^2$
g) $a^2b^3 + a^2b^2 + ab^3 + ab^2$
h) $2a^3b^2 + 20a^2b^3 + 50ab^4$
i) $x^3 + 7x^2 - 8x$
j) $8x^3 - 28x^2 + 12x$
k) $3x^4y - 14x^3y^2 + 8x^2y^3$
l) $8x^4 - 14x^3 + 3x^2$
m) $x^{5n} - 3x^{4n} + 2x^{3n}$
n) $2x^3y^2 + 3x^2y^3 - 2xy^4$
o) $6a^2b^2 - ab - 1$
p) $x^4y - x^2y^3$
q) $a^3b^2 - 4ab^4$
r) $9x^3y - 25xy^3$
s) $x^5 + x^2y^3$
t) $x^8y^5 - x^2y^8$
u) $x^4y^6 - xy^3$
v) $x^5 - 7x^4 + 7x^3 + 15x^2$
w) $2x^4y^2 - 14x^3y^2 + 8x^2y^2 + 24xy^2$
x) $21a - 11a^2 - 9a^3 - a^4$
y) $a^{10}b^2 + a^6b^6 + a^2b^{10}$
z) $16x^4 + 4x^2y^2 + y^4$
α) $x^8y^4 + x^4y^6 + y^8$
β) $x^5 - 1$
б) $3x^2 + xy - 4y^2$
γ) $2x^2 - 7xy + 3y^2$
δ) $x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1$
ε) $x^4 - 11x^3 + 32x^2 - 11x + 1$
η) $e^{x+2} - e^x$

6.12 Factorizar usando diversos artificios (Buena suerte)

a) $6x^{2n} + 23x^n + 20$
b) $6x^{2m} + 13x^my^n + 5y^{2n}$
c) $x^5 - 2x^3 - x + 1$
d) $x^5 + x^4 + 2x^3 - 1$
e) $5p^4 - 11p^2 - 4p + 1$
f) $x^5 + x^4 + 1$
g) $x^5 + x - 1$
h) $x^8 + x^4y^2 + y^4$
i) $x^2 - 4x + 2$
j) $e^{4x} + e^{2x} + 1$
k) $a^6 + 2a^5 - 3a^4 + 4a^2 + 1$
l) $x^4 + x^3 + x - 1$
m) $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$
n) $12x^2 - 15xy + 11x - 10y + 2$
o) $8y^2 + 12xy + 14y + 15x + 5$
p) $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1$
q) $x^7 + x^6 - x^5 + x^3 - 2x + 1$
r) $x^7 + x^5 + 1$
s) $x^7 + x^5 - 1$
t) $a^5 + a^4b + b^5$
u) $a^6 - a^4 + 2a^2 - 1$

RESPUESTAS VI

6.1
a) $x(a + b + c)$
b) $a^2b^2(a^3 + a^2b^2 + b^4)$
c) $3a^2bc^2(3a^4 + 4a^3c^2 + 2)$
d) $3x^3y^2(2x^2 - 3y^2)$
e) $(a + 1)(x^n + x^m)$
f) $(x^2 + x + 1)(n + m)$
g) $y^2(x^2y^2 - z^4)$
h) $x(x^3 - 5x^2 + 6x + 7)$
i) $(x + 2)(-2)$
j) $(x^2 + 1)(a + b)$
k) $(p - q)(a - b)$
l) $x^{2m+1}(1 + x^2 + x^4)$
m) $(x^n + 1)(a^2 + b^2)$
n) $y^{n-2}(y^4 + y^2 + 1)$
ñ) $(xy + 1)(a^3b^2)(a^2 + b^2)$
o) $(a + b)(x - 1)$
p) $a^2(a^6 - a^4 + a^2 - 1)$
q) $(a - 1)a^3(a^2 + 1)$

6.2
a) $(a+b)(p+q)$ b) $(x^4+1)(x^2+1)$ c) $(y-1)(y^2+1)$
d) $(b+1)(a+1)$ e) $(a^2+b^2)(a-b)$ f) $(xy+1)(a+b)$
g) $(a-b^2)(1+a)$ h) $(1+2a)(1+3b)$ i) $(x^2+1)(x+y)$
j) $(1+2a)(1-2b)$ k) $(x+2y)(x^3+y)$ l) $(a^2+a+1)(a+1)$

6.3
a) $(3x+5)^2$ b) $(3a+4b)^2$ c) $(4ab+1)^2$
d) $(a^3+7b^3)^2$ e) $(1+2x^5y^3z)^2$ f) $(x^4+y^2)^2$
g) $(pq^2r^4+1)^2$ h) $(x^{3n}+1)^2$ i) $(x^{n+2}+y^{2n-1})^2$
j) $(3a-b)^2$ k) $(xy-7)^2$ l) $(x^{m-1}-y^{m+1})^2$
m) $(3x^2-5y^4)^2$ n) $(a^3b^2c-9)^2$ o) ??
p) $(a^{4n}-1)^2$ q) $(1-a^2b^4)^2$ r) $(x^{m+n}-1)^2$

6.4
a) $(2a+3b)(2a-3b)$ e) $(x^8+y^8)(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$ h) ??
b) $(9x+1)(9x-1)$ f) $(5a^4b^2c+1)(5a^4b^2c-1)$ i) $(x^n+y^n)(x^n-y^n)$
c) $(p^3+q)(p^3-q)$ g) $(x^4+y^2)(x^2+y)(x^2-y)$ j) $(x^{4n}+y)(x^{4n}-y)$
d) $(ab^2+c^3)(ab^2-c^3)$ k) $(x^{n+2}+y^{4n-3})(x^{n+2}-y^{4n-3})$ l) $(10+a^2b^4)(10-a^2b^4)$

6.5
a) $(x+3)(x+2)$ b) $(x+5)(x-1)$ c) $(x-2)(x-4)$
d) $(x-6)(x-8)$ e) $(a+9)(a-1)$ f) $(c+8)(a-7)$
g) $(x^2+1)(x^2+4)$ h) $(x^5-3)(x^5+2)$ i) $(x^n+3)(x^n+5)$
j) $(2x+1)(x+3)$ k) $(3x-2)(x-4)$ l) $(5x-1)(x+1)$
m) $(4x+2)(x+4)$ n) $(3x+1)(2x+4)$ o) $(4x-1)(2x+5)$
p) $(3x^2+1)(x^2+4)$ q) $(2x^3+3)(x^3+2)$ r) $(x^m+2)(3x^m+1)$
s) $(x+3y)(x+6y)$ t) $(x-6y)(x+2y)$ u) $(a+8b)(a-12b)$
v) $(2x+5y)(4x+3y)$ w) $(e^x+1)(e^x+3)$ x) $(3^x-1)(3^x-9)$

6.6
a) $(a+4)(a^2-4a+16)$ b) $(4x+3y)(16x^2-12xy+9y^2)$
c) $(ab+5)(a^2b^2-5ab+25)$ d) $(a^2b+1)(a^4b^2-a^2b+1)$
e) $(x^2+y)(x^4-x^2y+y^2)$ f) $(a^3b^2c+1)(a^6b^4c^2-a^3b^2c+1)$
g) $(x^2+1)(x^4-x^2+1)$ h) $(x^n+y^n)(x^{2n}-x^ny^n+y^{2n})$
i) $(a-2)(a^2+2a+4)$ j) $(6x-3y)(36x^2+18xy+9y^2)$
k) $(xy-4)(x^2y^2+4xy+16)$ l) $(x^3y-1)(x^6y^2+x^3y+1)$
m) $(x-y^2)(x^2+xy^2+y^4)$ n) $(a^4b^2c-1)(a^8b^4c^2+a^4b^2c+1)$
o) $(x^2-1)(x^4+x^2+1)$ p) $(x^n-y^n)(x^{2n}+x^ny^n+y^{2n})$

q) $(x+y)(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)$

r) $(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

s) $(x-y)(x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5)$

t) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

u) $(x-3)(x^4+3x^3+9x^2+27x+81)$

v) $(x-3)(x^3+3x^2+9x+27)$

x) $(x^2+y^2)(x^8-x^6y^2+x^4y^4-x^2y^6+y^8)$

w) $(x+y)(x^8-x^7y+x^6y^2-x^5y^3+x^4y^4-x^3y^5+x^2y^6-xy^7+y^8)$

y) $(xy-1)(x^4y^4+x^3y^3+x^2y^2+xy+1)$

z) $(x^2-y)(x^6+x^4y+x^2y^2+y^3)$

α) $(ab^2-1)(a^3b^6+a^2b^4+ab^2+1)$

β) $(x^2+y)(x^2-y)(x^8+x^4y^2+y^4)$

γ) $(x^n+y^{2n})(x^{2n}-x^ny^{2n}+y^{4n})$

δ) $(x^{2n}y^n-1)(x^{6n}y^{3n}+x^{4n}y^{2n}+x^{2n}y^n+1)$

ϵ) $(x-y^n)(x^4+x^3y^n+x^2y^{2n}+xy^{3n}+y^{4n})$

ε) $(xyz-1)(x^4y^{4n}z^{4m}+x^3y^{3n}z^{3m}+x^2y^{2n}z^{2m}+xy^nz^m+1)$

6.7

a) $(x-1)(x-2)(x-3)$

b) $(x+1)(x-3)(x-4)$

c) $(x-2)(x-3)(x-5)$

d) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

e) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

f) $(x+1)(x+2)(x+2)(x+4)$

g) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)$

h) $(x-1)(x+1)(x+1)(x+2)(x+4)$

i) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)$

j) $(2x-3)(x+1)(x+2)(x+3)$

k) $(x-2)(x+1)(x+1)$

l) $(x+2y)(x+3y)(x-4y)$

6.8

a) $(a^2+a+1)(a-a+1)$

b) $(4x^2+2x+1)(4x^2-2x+1)$

c) $(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$

d) $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$

e) $(8a^2+4ab+b^2)(8a^2-4ab+b^2)$

f) $(9x^2+6xy+2y^2)(9x^2-6xy+2y^2)$

g) $(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$

h) $(x^8+x^4y^4+y^8)(x^8-x^4y^4+y^8)$

i) $(a^6b^6+a^3b^3+1)(a^6b^6-a^3b^3+1)$

6.9

a) $(2x+3y)(5x+4y)$

b) $(x+4y)(3x+y)$

c) $(7x+y)(2x-3y)$

d) $(2x-3y)(4x-5y)$

e) $(4a+b)(7a+5b)$

f) $(8a+3b)(a+5b)$

g) $(3a-b)(5a+4b)$

h) $(3x+2y+1)(4x+5y+6)$

i) $(2x+y+5)(5x+3y+4)$

j) $(7x+y-3)(x-2y-4)$

k) $(x+5y+7)(3x+2y-4)$

l) $(2x-y-3)(x+4y+5)$

m) $(a+2b+1)(3a+b-2)$

n) $(2p+q+5)(3p-q-4)$

o) $(x^2+5x+3)(x^2+2x+4)$

p) $(x^2-7x+1)(x^2-3x+2)$

q) $(y^2+2y-7)(y^2-y-1)$

r) $(a^2+6a+5)(a^2-a-1)$

s) $(5ab+2)(4ab-3)$

t) $(3a^2+4b^2)(2a^2+5b^2)$

u) $(7x^n+9y^n)(5x^n-2y^n)$

v) $(6x^m-5y)(7x^m+3y)$

w) $(3x+4y-1)(2x+5y+1)$

x) $(x+3y-5)(2x-4y+7)$

y) $(7a+b-2)(a+5b+1)$

z) $(a+4b-5)(3a-b+2)$

6.10

a) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 2x + 1)$

b) $(x^2 - 4x + 1)(x^2 - 5x + 1)$

c) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 3x + 1)$

d) $(x^2 + x + 1)(3x^2 + 4x + 3)$

e) $(x^2 - x + 1)(2x^2 - x + 2)$

f) $(a^2 + a + 1)(a^2 + 4a + 1)$

g) $(3a^2 + 8a + 3)(a^2 - 5a + 1)$

h) $(x^2 + x + 1)(2x - 1)(x - 2)$

i) $(5x^2 + 3xy + 5y^2)(x^2 + xy + y^2)$

j) $(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 1)$

6.11

a) $x^2y^4(x^2 + 1)(x - 1)$

b) $xy(2x + 3y)^2$

c) $x^2(x - 2)(x - 5)$

d) $xy(a + b)(x + y)$

e) $x^3y(xy - 1)^2$

f) $y^2(x + 1)(x + 6)$

g) $ab^2(a + 1)(b + 1)$

h) $2ab^2(a + 5b)^2$

i) $x(x + 8)(x - 1)$

j) $4x(2x - 1)(x - 3)$

k) $x^2y(3x - 2y)(x - 4y)$

l) $x^2(2x - 3)(4x - 1)$

m) $x^{3n}(x^n - 2)(x^n - 1)$

n) $xy^2(2x - y)(x + 2y)$

o) $(2ab - 1)(3ab + 1)$

p) $x^2y(x + y)(x - y)$

q) $ab^2(a + 2b)(a - 2b)$

r) $xy(3x + 5y)(3x - 5y)$

s) $x^2(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

t) $x^2y^5(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$

u) $xy^3(xy - 1)(x^2y^2 + xy + 1)$

v) $x^2(x + 1)(x - 3)(x - 5)$

w) $2xy^2(x + 1)(x - 2)(x - 6)$

x) $-a(a - 1)(a + 3)(a + 7)$

y) $a^2b^2(a^4 + a^2b^2 + b^4)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$

z) $(4x^2 + 2xy + y^2)(4x^2 - 2xy + y^2)$

α) $y^4(x^4 + x^2y + y^2)(x^4 - x^2y + y^2)$

β) $(x - 1)(x^2 + \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1)(x^2 + \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1)$

б) $(3x + 4y)(x - y)$

γ) $(2x - y)(x - 3y)$

δ) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 3x + 1)$

є) $(x^2 - 5x + 1)(x^2 - 6x + 1)$

η) $e^x(e + 1)(e - 1)$

6.12

a) $(3x^n + 4)(2x^n + 5)$

b) $(2x^m + y^n)(3x^m + 5y^n)$

c) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x^2 - 1)$

d) $(x^3 + x - 1)(x^2 + x + 1)$

e) $(p^2 - p - 1)(5p^2 + 5p - 1)$

f) $(x^3 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

g) $(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$

h) $(x^4 - x^2y + y^2)(x^4 + x^2y + y^2)$

i) $(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$

j) $(e^{2x} + e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)$

k) $(a^3 + 3a^2 - 1)(a^3 - a^2 + 1)$

l) $(x^2 + x - 1)(x^2 + 1)$

m) $(x^2 + \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}xy + y^2)(x^2 + \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}xy + y^2)$

n) $(4x - 5y + 1)(3x + 2)$

o) $(3x + 2y)(4y + 5)$

p) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)$

q) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$

r) $(x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$

s) $(x^2 - x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 - x - 1)$

t) $(a^2 + ab + b^2)(a^3 - ab^2 + b^3)$

u) $(a^3 - a^2 + 1)(a^3 + a^2 - 1)$

VII.- FRACCIONES

Se llaman FRACCIONES ALGEBRAICAS a los cocientes indicados de dos Expresiones Algebraicas.

En los Cocientes indicados el Dividendo se llama también Numerador, el Divisor se llama Denominador

En el caso de que tanto el Numerador como Denominador son iguales a Números reales, se tiene a los llamados Números quebrados.

Ej 7.1 Son Fracciones Algebraicas las siguientes:

$$\frac{x+1}{x+5} \quad ; \quad \frac{x^2-5x^2+6}{x^4+x^2+1} \quad ; \quad \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} \quad ; \quad \frac{3}{5}$$

Ej 7.2 En una Fracción Algebraica, se tienen las siguientes partes:

$$\frac{2x+5}{x^2+4}$$

Donde: $2x+5$ Es el Dividendo o Numerador

x^2+4 Es el Divisor o Denominador

VII.1 OPERACIONES DE FRACCIONES

Las diversas Operaciones de las Fracciones Algebraicas, básicamente siguen las mismas Reglas de Operaciones de las Fracciones Aritméticas (Ver I-3). De las cuales constituyen una generalización.

VII.1.1 SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Para un mejor manejo de las Fracciones Algebraicas, éstas deben simplificarse a su mínima expresión.

Para simplificar Fracciones, se aplica la siguiente Regla: *"El valor de una Fracción Algebraica no se altera si tanto el Numerador como Denominador, se multiplican o dividen por un misma Expresión, diferente de cero"*

$$\frac{A}{B} = \frac{Ax}{Bx}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A/x}{B/x}$$

Es muy conveniente factorizar tanto el Numerador como el Denominador, para eliminar factores iguales.

Ej 7.3 Se simplifica la siguiente Fracción Algebraica:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}$$

Dada la Fracción, se factoriza tanto en su Numerador como Denominador. (Por el Método del Trinomio)

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-9} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

Como se tiene un mismo Factor: $(x-3)$ tanto en el Numerador como Denominador, éste se elimina.

$$= \frac{x-1}{x+3}$$

Queda así una Fracción simplificada a la mínima expresión.

Tome en cuenta que no es correcto sumar o restar una misma cantidad tanto al numerador como denominador, porque en ese caso cambia la Fracción

$$\frac{A}{B} \neq \frac{A+x}{B+x} \quad ; \quad \frac{A}{B} \neq \frac{A-x}{B-x}$$

7.1 Simplificar las siguientes Fracciones Algebraicas:

a) $\dfrac{6x}{x^3}$ b) $\dfrac{12a^4b^8c^{12}}{3ab^6c^5}$ c) $\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

$\dfrac{6x}{x^3} = \dfrac{6}{x^2}$ $\dfrac{12a^4b^8c^{12}}{3ab^6c^5} = 4a^3b^2c^7$ $= \dfrac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = x^2+1$

d) $\dfrac{x^2+6x+5}{x^3+1}$ e) $\dfrac{10x^2-7xy-12y^2}{2x^2-xy-3y^2}$ Factorizando y simplificando.

$= \dfrac{(x+1)(x+5)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{x+5}{x^2-x+1}$ $= \dfrac{(2x-3y)(5x+4y)}{(x+y)(2x-3y)} = \dfrac{5x+4y}{x+y}$

f) $\dfrac{xy(a^2+b^2)+ab(x^2+y^2)}{xy(a^2-b^2)+ab(x^2-y^2)}$

Desarrollando los productos indicados en la Fracción.

$= \dfrac{a^2xy+b^2xy+abx^2+aby^2}{a^2xy-b^2xy+abx^2-aby^2} = \dfrac{ax(ay+bx)+by(bx+ay)}{ax(ay+bx)-by(bx+ay)}$

Luego factorizando tanto el numerador como denominador.

$= \dfrac{(ay+bx)(ax+by)}{(ay+bx)(ax-by)} = \dfrac{ax+by}{ax-by}$

Simplificando Factores comunes.

g) $\dfrac{a-b}{x-y} - \dfrac{b-a}{y-x}$

$\dfrac{a-b}{x-y} - \dfrac{b-a}{y-x} = \dfrac{(a-b)(-1)}{(x-y)(-1)} - \dfrac{b-a}{y-x} = \dfrac{b-a}{y-x} - \dfrac{b-a}{y-x} = 0$

Al multiplicar numerador y denominador por -1, en la 1era Fracción, se verifica que se trata de la misma 2da Fracción.

VII.2 SUMA DE FRACCIONES

Para sumar dos Fracciones Algebraicas, se presentan los siguientes casos:

VII.2.1 SI EL DENOMINADOR ES COMÚN

Cuando el Denominador de las Fracciones a sumar es el mismo:
"Se suman los Numeradores y se copia el mismo Denominador",
es decir se aplica la siguiente Regla básica:

$$\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}}$$

Ej 7.4 Se suman las siguientes Fracciones Algebraicas:

$\dfrac{x+3}{x+8} + \dfrac{2x-5}{x+8}$

Las Fracciones poseen el mismo Denominador. Sumando los Numeradores y copiando el mismo Denominador.

$\dfrac{x+3}{x+8} + \dfrac{2x-5}{x+8} = \dfrac{(x+3)+(2x-5)}{x+8} = \dfrac{3x-2}{x+8}$

Simplificando el Numerador.

7.2 Sumar las siguientes Fracciones Algebraicas:

a) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x}$ b) $\dfrac{3x+1}{x+2} + \dfrac{x^2-5}{x+2}$

$\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x} = \dfrac{3+5}{x} = \dfrac{8}{x}$ $\dfrac{3x+1}{x+2} + \dfrac{x^2-5}{x+2} = \dfrac{(3x+1)+(x^2-5)}{x+2} = \dfrac{x^2+3x-4}{x+2}$

VII.2.2 SI EL DENOMINADOR ES DIFERENTE

Cuando el Denominador de las Fracciones a sumar es diferente: "*En cada Fracción se multiplican tanto su Numerador como Denominador por Expresiones Algebraicas, que permitan que las Fracciones presenten el mismo Denominador, luego se aplica la Regla de Suma de Denominadores comunes*". Por tanto se aplica la siguiente Regla:

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}}$$

Debe recordarse que en una Fracción al multiplicar tanto su Numerador como Denominador, por una misma Expresión, la Fracción no se altera.

Ej 7.5 Se suman las siguientes Fracciones:

a) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y}$

$$\frac{3}{x}+\frac{8}{y}=\frac{3\cdot y}{x\cdot y}+\frac{8\cdot x}{y\cdot x}=\frac{3y}{xy}+\frac{8x}{xy}=\frac{3y+8x}{xy}$$

Para que tengan el mismo Denominador, en la 1^{era} debe multiplicarse a su Numerador y Denominador por: y; la 2da por: x

Una vez que poseen el mismo Denominador, se suman por la Regla de Suma de Fracciones del mismo Denominador.

b) $\frac{x+3}{x+5}+\frac{x-1}{x+7}$

$$=\frac{(x+3)(x+7)}{(x+5)(x+7)}+\frac{(x-1)(x+5)}{(x+7)(x+5)}=\frac{(x+3)(x+7)+(x+5)(x-1)}{(x+5)(x+7)}$$

$$=\frac{(x^2+10x+21)+(x^2+4x-5)}{x^2+12x+35}=\frac{2x^2+14x+16}{x^2+12x+35}$$

Las Fracciones, se multiplican por Factores que permitan presentar el mismo Denominador.

Sumando y desarrollando los productos indicados.

c) $\frac{x+1}{x^2+5}+(3x+4)$

$$=\frac{x+1}{x^2+5}+\frac{3x+4}{1}=\frac{x+1}{x^2+5}\,\frac{1}{1}+\frac{3x+4}{1}\,\frac{x^2+5}{x^2+5}=\frac{(x+1)(1)+(3x+4)(x^2+5)}{(x^2+5)\,1}$$

$$=\frac{(x+1)+(3x^3+4x^2+15x+20)}{x^2+5}=\frac{3x^3+4x^2+16x+21}{x^2+5}$$

La 2da expresión que es entera, se asume como Fracción de denominador 1.

Como consecuencia de la anterior Regla de suma de Fracciones de diferente Denominador, se puede obtener otra Regla más directa.

"Para sumar Fracciones, se coloca como Denominador del resultado al producto de los Denominadores, y como Numerador se escribe la suma de los producto de un Numerador por los restantes Denominador"

$$\boxed{\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}}$$

7.3 Sumar las siguientes Fracciones Algebraicas:

a) $\frac{2x-1}{x}+\frac{x^2}{3x+7}$

$$\frac{2x-1}{x}+\frac{x^2}{3x+7}=\frac{(2x-1)(3x+7)+(x^2)(x)}{(x)(3x+7)}$$

$$=\frac{(6x^2+11x-7)+(x^3)}{3x^2+7x}=\frac{x^3+6x^2+11x-7}{3x^2+7x}$$

b) $\frac{1}{x}+y$

$$\frac{1}{x}+y=\frac{1}{x}+\frac{y}{1}$$

$$=\frac{(1)(1)+(x)(y)}{(x)(1)}=\frac{1+xy}{x}$$

VII.3 M.C.M. Y M.C.D.

VII.3.1 m.c.m. DE NÚMEROS

Se llama Mínimo Común Múltiplo (o m.c.m.) de varias números, al menor número posible que contiene exactamente a los números originales (Que al dividirse produzca un entero).

Por ejemplo el m.c.m. de los números 6 y 8 es 24, ya que 24 al dividirse entre tales números brinda enteros. El m.c.m. de 3 y 6 y 12 es 12.

Cuando se debe calcular el m.c.m. de números grandes, un modo práctico es obtener sus factores primos por divisiones sucesivas. De ellos tomar su producto con el mayor grado.

Ej 7.6 Se determina el m.c.m. de los conjuntos de números: a) 36; 48 b) 90; 150; 120

$$\text{a)}\quad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \text{b)}\quad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad 48 = 2^4 3 \qquad 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \qquad 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \qquad 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

El número dado se divide entre el menor factor diferente de 1, que determina un entero, reiterando el procedimiento sobre el resultado.

Los m.c.m. son a) $2^4 \cdot 3^2 = 144$.
b) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$.

VII.3.2 m.c.m. DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se llama Mínimo Común Múltiplo (o m.c.m.) de varias Expresiones Algebraicas, al Producto de todos sus Factores diferentes y con el mayor grado que poseen.

El Mínimo Común Múltiplo de los denominadores de Fracciones Algebraicas, permiten mayor facilidad en la suma o resta de Fracciones.

Ej 7.7 Se determina el m.c.m. de los siguientes Polinomios: $x^2 - 5x + 6$; $x^2 - 7x + 10$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$
$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$$
$$\Rightarrow \text{m. c. m.}: \ (x - 2)(x - 3)(x - 5)$$

Factorizando cada Polinomio por procedimientos antes vistos (Ver VI.5)

Entonces el m.c.m. es el Producto de todos los Factores que contienen ambos Polinomios.

7.4 Hallar el m.c.m. de las siguientes Expresiones Algebraicas:

a) x^6y^2 ; x^6z^3

x^6y^2 ; $x^6z^3 \Rightarrow$ m.c.m.: $x^6y^2z^3$

b) x^8 ; x^4 : x^2

x^8 ; x^4 ; $x^2 \Rightarrow$ m.c.m.: x^8

Se buscan factores que están contenidos en cada Término.

c) $x^2 - 4$; $x^2 - 6x + 8$

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) \quad \Rightarrow \text{m.c.m.: } (x + 2)(x - 2)(x - 4)$$
$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$

Factorizando ambos Polinomios se considera que el m.c.m es el producto de todos los factores contenidos.

d) $x^2 - 6x + 9$; $x^2 - 9$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \quad \Rightarrow \text{m.c.m.: } (x - 3)^2(x + 3)$$
$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Factorizando se logra el m.c.m

e) $x^2 - 4x + 3$; $x^2 - 25$

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) \quad \Rightarrow \quad \text{m.c.m.: } (x - 1)(x - 3)(x + 5)(x - 5)$$
$$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

Como no hay factores comunes el m.c.m. será el producto de todos los factores.

Para sumar con rapidez las Fracciones Algebraicas se usa el m.c.m. Aplicando la siguiente Regla Práctica:

"Se calcula el m.c.m. de los denominadores de las Fracciones a sumar, este m.c.m. se anota como Denominador del resultado, luego se obtiene el Numerador del resultado como la suma de Términos obtenidos al dividir el m.c.m. entre cada Denominador, y multiplicar al Numerador correspondiente."

$$\boxed{\frac{A}{PQ} + \frac{B}{PR} = \frac{AR + BQ}{PQR}}$$

Ej 7.8 Se suman Fracciones usando el m.c.m.

$$\frac{5}{x^6y^2} + \frac{2}{x^6z^3}$$

$$= \frac{\frac{x^6y^2z^3}{x^6y^2}(5) + \frac{x^6y^2z^3}{x^6z^3}(2)}{x^6y^2z^3} = \frac{5z^3 + 2y^2}{x^6y^2z^3}$$

El m.c.m de Denominadores (Ver P-7.4) es el Denominador del resultado: $x^6y^2z^3$.

Este m.c.m. se divide entre cada Denominador, el cociente obtenido se multiplica por su correspondiente Numerador.

El Numerador del resultado será la suma de los Productos obtenidos.

$\boxed{7.5}$ Sumar las siguientes Fracciones Algebraicas, usando el m.c.m.:

a) $$\frac{x+9}{x^2-5x+6} + \frac{5x-8}{x^2-7x+10}$$

$$\frac{x+9}{(x-2)(x-3)} + \frac{5x-8}{(x-3)(x-4)} = \frac{(x+9)(x-4) + (5x-8)(x-2)}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$= \frac{(x^2+5x-36) + (5x^2-18x+16)}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{6x^2-13x-20}{x^3-9x^2+24x-20}$$

Factorizando los denominadores, para así detectar el m.c.m.

Sumando y simplificando.

b) $$\frac{3}{x^2-4} + \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{3}{(x+2)(x-2)} + \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x+2}$$

$$= \frac{(1)(3) + (x+2)(7) + (x-2)(5)}{(x+2)(x-2)} = \frac{12x+7}{(x+2)(x-2)}$$

El m.c.m.: $(x+2)(x-2)$ se divide entre cada denominador. En el 1er denominador sale 1, este valor multiplica a su numerador.

En las otras Fracciones se procede similarmente

c) $$\frac{x^2-y^2-z^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2-z^2-x^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2-x^2-y^2}{(z-x)(z-y)}$$

$$= \frac{x^2-y^2-z^2}{(x-y)(x-z)} - \frac{y^2-z^2-x^2}{(y-z)(x-y)} + \frac{z^2-x^2-y^2}{(x-z)(y-z)}$$

$$= \frac{(y-z)(x^2-y^2-z^2) - (x-z)(y^2-z^2-x^2) + (x-y)(z^2-x^2-y^2)}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

$$= \frac{2x^2(y-z) + 2y^2(z-x) + 2z^2(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = \frac{2(x-y)(x-z)(y-z)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = 2$$

Para sumar previamente se ordenan los denominadores (Cambios de signo), de manera de lograr un m.c.m.

Sumando y luego factorizando.

Simplificando.

VII.3.3 M.C.D. DE NÚMEROS

Se llama Máximo Común Divisor (o M.C.D.) de varias números, al mayor número que los divide exactamente (Es ese denominador que permite un entero en la división)

Por ejemplo el M.C.D. de los números 6 y 8 es 2; ya que los números dados pueden dividirse entre 2 dando un resultado entero. De los números 3 y 6 y 12 e l M.C.D. es 3.

Cuando se debe calcular el m.c.m. de números grandes, un modo práctico es obtener sus factores primos por divisiones sucesivas. De ellos buscar los factores comunes

Ej 7.9 Se determina el M.C.D. de los conjuntos de números: a) 36; 48 b) 90; 150; 120

a)
$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$
$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad 48 = 2^4 \cdot 3$$

b)
$$\begin{array}{r|l} 115 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$
$$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \qquad 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \qquad 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

El número dado se divide entre el menor factor diferente de 1, que determina un entero, reiterando el procedimiento sobre el resultado.

Los M.C.D. o factores comunes son a) $2^2 \cdot 3 = 12$ b) $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

VII.3.4 M.C.D. DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se llama Máximo Común Divisor (o M.C.D.) de varias Expresiones Algebraicas, al Producto de todos sus Factores comunes.

Ej 7.10 Se determina el M.C.D. de los siguientes Polinomios:

$$x^2 - 5x + 6 \quad ; \quad x^2 - 7x + 10$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \\ x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5) \end{array}\right. \Rightarrow \text{M. C. D.: } (x-2)$$

Factorizando cada Polinomio por procedimientos antes vistos (Ver VI.5)

Entonces el M.C.D. es el factor común entre los factores que contienen ambos Polinomios.

7.6 Hallar el M.C.D. de las siguientes Expresiones Algebraicas:

a) $x^6y^2 \;;\; x^6z^3$
$$x^6y^2 \;;\; x^6z^3$$
$$\Rightarrow \text{M.C.D.: } x^6$$

b) $x^8 \;;\; x^4 \;;\; x^2$
$$x^8 \;;\; x^4 \;;\; x^2$$
$$\Rightarrow \text{M.C.D.: } x^2$$

c) $x^2 - 6x + 9 \;;\; x^2 - 9$
$$x^4 - 6x + 9 = (x-3)^2(x+3)^2$$
$$x^4 - 81 = (x^2+9)(x+3)(x-3)$$
$$\Rightarrow \text{M.C.D.: } (x+3)(x-3)$$

Otro modo de hallar el M.C.D. de Polinomios de mayor complejidad es a través de divisiones sucesivas, de acuerdo al siguiente procedimiento:

Se divide el polinomio de mayor grado entre el de menor, si la división es exacta el divisor es el M.C.D. Si la división no es exacta, se divide el divisor entre el Residuo y así sucesivamente hasta llegar a una división exacta. El último divisor será el M.C.D. requerido.

Ej 7.11 Por divisiones sucesivas calcular el M.C.D. de los polinomios:

a) $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 \;;\; x^2 - 2x - 3$

$$\begin{array}{rl} x^3 - 7x^2 + 7x + 15 & \underline{|\; x^2 - 2x - 3} \\ \underline{-x^3 + 2x^2 + 3x} & \;\; x - 5 \\ -5x^2 + 10x + 15 & \\ \underline{5x^2 - 10x - 15} & \\ 0 & \end{array}$$

b) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \;;\; x^2 - 7x + 10$

$$\begin{array}{rl} x^3 - 9x^2 + 26x - 24 & \underline{|\; x^2 - 7x + 10} \\ \underline{-x^3 + 7x^2 - 10x} & \;\; x - 2 \\ -2x^2 + 16x - 24 & \\ \underline{2x^2 - 14x + 20} & \\ 2x - 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} x^2 - 7x + 10 & \underline{|\; 2x - 4} \\ \underline{-x^2 + 2x} & \;\; \frac{x}{2} - \frac{5}{2} \\ -5x + 10 & \\ \underline{5x - 10} & \\ 0 & \end{array}$$

En el primer caso la división es exacta, por tanto el M.C.D. es $x - 5$

En el segundo caso la división no es exacta, por ello se divide el divisor entre el residuo, logrando una división exacta. El M.C.D. es $x - 2$.

VII.4 MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

Para multiplicar Fracciones Algebraicas: *"Se multiplican entre sí los Numeradores y Denominadores"*, es decir se usa la siguiente Regla Básica:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

No es necesario que los Denominadores sean comunes. Simplemente se los multiplica.

Ej 7.12 Se multiplican las siguientes Fracciones:

a) $\frac{3}{x}\cdot\frac{2}{y}$

$$\frac{3}{x}\cdot\frac{2}{y}=\frac{(3)(2)}{(x)(y)}=\frac{6}{xy}$$

Se multiplican los Numeradores y Denominadores, respectivamente entre sí.

Efectuando los productos indicados, se obtendrá también una Fracción como resultado final.

b) $\frac{3x+1}{x-5}\cdot\frac{6x-7}{x+3}$

$$\frac{3x+1}{x-5}\cdot\frac{6x-7}{x+3}=\frac{(3x+1)(6x-7)}{(x-5)(x+3)}=\frac{18x^2-15x-7}{x^2-2x-15}$$

Dadas las Fracciones a multiplicar. Los Productos indicados entre Numeradores o Denominadores, se calculan por Reglas antes detalladas (Ver II-3)

c) $\frac{x-5}{x-7}\cdot\frac{6x+1}{x-5}\cdot\frac{x-7}{6x+1}$

$$\frac{x-5}{x-7}\cdot\frac{6x+1}{x-5}\cdot\frac{x-7}{6x+1}=\frac{(x-5)(6x+1)(x-7)}{(x-7)(x-5)(6x+1)}=1$$

Tras efectuar el Producto, de ser posible se simplifica la Fracción resultante, como en el inciso c)

7.7 Efectuar los siguientes productos de Fracciones Algebraicas.

a) $\frac{x}{2}\cdot\frac{7}{y}\cdot\frac{z}{3}$

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{7}{y}\cdot\frac{z}{3}=\frac{x\cdot 7\cdot z}{2\cdot y\cdot 3}=\frac{7xz}{6y}$$

b) $a\cdot\frac{b}{c}$

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{1\cdot c}=\frac{ab}{c}$$

A un entero como en b) se le asume denominador 1

c) $\frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{2x+1}$

$$=\frac{x^2(x-1)}{(x-1)(2x+1)}=\frac{x^2}{2x+1}$$

d) $\frac{x^2+1}{x^2+4}\cdot(x^2+9)$

$$=\frac{x^2+1}{x^2+4}\cdot\frac{(x^2+9)}{1}=\frac{(x^2+1)(x^2+9)}{x^2+4}=\frac{x^4+10x^2+9}{x^2+4}$$

7.8 Indicar la respuesta correcta

a) $\frac{x+y}{x+z}=\begin{cases}\frac{y}{z}\\ 1+\frac{y}{z}\\ 1+\frac{y-z}{x+z}\end{cases}$

b) $\frac{x+y}{x}=\begin{cases}1+\frac{y}{x}\\ y\\ 1+y\end{cases}$

c) $x+\frac{y}{z}=\begin{cases}\frac{x+y}{x+z}\\ \frac{x+y}{z}\\ \frac{xz+y}{z}\end{cases}$

d) $x\cdot\frac{y}{z}=\begin{cases}\frac{x\cdot y}{x\cdot z}\\ \frac{x\cdot y}{z}\\ \frac{y}{x\cdot z}\end{cases}$

En a) la 3^{era}, porque no es posible simplificar, se debe efectuar la división.

En b) la 1^{era} porque tras distribuir el numerador respecto al denominador, recién se simplifica.

En c) La 3^{era}, porque para sumar se debe asumir que el entero x posee denominador 1.

En d) La 2da, porque al multiplicar, solo se afecta al numerador.

VII.5 DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para dividir Fracciones Algebraicas: "*Se invierte la fracción que actúa como Divisor, realizando luego la multiplicación entre las fracciones así obtenidas*" Es decir se emplea la siguiente Regla:

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left[\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right] = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

Es posible también enfocar la división entre Fracciones como un cociente indicado entre dos Fracciones, para luego aplicar la Regla de: "*El producto de Extremos es el Numerador y el producto de Medios es el Denominador*"

Ej 7.13 Se efectúa la división entre las Fracciones Algebraicas:

$$\frac{9}{x} \div \frac{4}{y}$$

Se invierte a la 2da Fracción o Divisor. Así se presenta una multiplicación de Fracciones.

$$\frac{9}{x} \div \frac{4}{y} = \frac{9}{x} \cdot \frac{y}{4} = \frac{(9)(y)}{(x)(4)} = \frac{9y}{4x}$$

Se multiplica por la Regla de Multiplicación de Fracciones, donde se multiplican entre numeradores y denominadores entre si. (Ver VII.3).

$$\frac{9}{x} \div \frac{4}{y} = \frac{\frac{9}{x}}{\frac{4}{y}} = \frac{9y}{4x}$$

Planteando la misma división, esta vez como un cociente indicado. El Producto de los Extremos va como Numerador. El Producto de los Medios va como Denominador. El resultado es el mismo.

7.9 Efectuar la división entre las Fracciones:

a) $x \div \dfrac{3}{y}$ $\qquad \dfrac{x}{1} \div \dfrac{3}{y} = \dfrac{x}{1} \cdot \dfrac{y}{3} = \dfrac{x \cdot y}{1 \cdot 3} = \dfrac{xy}{3}$

b) $\dfrac{a}{b} \div x$ $\qquad \dfrac{a}{b} \div \dfrac{x}{1} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{a \cdot 1}{b \cdot x} = \dfrac{a}{bx}$

c) $\dfrac{5x-2}{x} \div \dfrac{3x+4}{x+1}$

$$\frac{5x-2}{x} \div \frac{3x+4}{x+1} = \frac{5x-2}{x} \cdot \frac{x+1}{3x+4} = \frac{(5x-2)(x+1)}{(x)(x+1)} = \frac{5x^2+3x-2}{x^2+x}$$

d) $\dfrac{x+2}{x+4} \div 3x$

$$\frac{x+2}{x+4} \div \frac{3x}{1} = \frac{x+2}{x+4} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{(x+2)(1)}{(x+4)(3x)} = \frac{x+2}{3x^2+12x}$$

VII.6 FRACCIONES COMPUESTAS

Se llaman Fracciones Compuestas a aquellas Fracciones que encierran a su vez a otras Fracciones, mediante alguna operación.

Ej 7.15 Son Fracciones Compuestas las siguientes:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \qquad \frac{a^3}{a - \frac{a}{a+\frac{1}{a+1}}} \qquad \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x+1} - \frac{y}{x-1}}$$

Note que en el Numerador o Denominador, se presentan a su vez otras Fracciones Algebraicas.

Para realizar cualquier Operación con estas Fracciones, antes se debe simplificar a su Mínima expresión.

Para simplificar Fracciones compuestas se efectúan las Operaciones, que se presentan en forma indicada, aplicándose las correspondientes Reglas de Operación entre Fracciones Algebraicas. (Tome muy en cuenta que a la Expresión entera se la asume como Fracción de Denominador 1)

Ej 7.16 Se simplifica la siguiente Fracción Compuesta:

$$\frac{1}{a-\dfrac{a}{a+1}} \qquad \frac{1}{a-\dfrac{a}{a+1}} = \frac{1}{\dfrac{a}{1}-\dfrac{a}{a+1}} = \frac{1}{\dfrac{(a+1)(a)-(1)(a)}{a+1}}$$

Se ordena el Denominador, para efectuar Suma de Fracciones.

$$= \frac{1}{\dfrac{a^2+a-a}{a+1}} = \frac{1}{\dfrac{a^2}{a+1}} = \frac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{a^2}{a+1}} = \frac{a+1}{a^2}$$

Recuerde que si no se indica un Denominador, se asume que es: 1

Sumando y simplificando. Luego se ordena para efectuar la división entre Fracciones.

7.10 Simplificar las siguientes Fracciones Compuestas:

a) $$\frac{1/(x+1)\ +\ 1/(x-1)}{1/(x-1)\ -\ 1/(x+1)}$$

$$\frac{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}} = \frac{\dfrac{(x-1)(1)+(x+1)(1)}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)(x-1)}} = \frac{\dfrac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{x+1-x+1}{(x+1)(x-1)}} = \frac{\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}}$$

$$= \frac{(2x)(x+1)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{2} = x$$

b) $$\frac{x}{x+\dfrac{x}{x-\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}}}} = \frac{x}{x+\dfrac{x}{x-\dfrac{x}{\dfrac{x-1}{x}}}} = \frac{x}{x+\dfrac{x}{x-\dfrac{x^2}{x-1}}} = \frac{x}{x+\dfrac{x}{\dfrac{x(x-1)-x^2}{x-1}}}$$

$$= \frac{x}{x+\dfrac{x}{\dfrac{-x}{x-1}}} = \frac{x}{x+\dfrac{x(x-1)}{-x}} = \frac{x}{x-(x-1)} = \frac{x}{1} = x$$

c) $$\frac{1-[a+(a+1)^{-1}](a^2+a+1)^{-1}}{1+[a+(a-1)^{-1}](a^2-a+1)^{-1}}$$

$$= \frac{1-\left[a+\dfrac{1}{a+1}\right]\dfrac{1}{a^2+a+1}}{1+\left[a+\dfrac{1}{a-1}\right]\dfrac{1}{a^2-a+1}} = \frac{1-\left[\dfrac{a^2+a+1}{a+1}\right]\dfrac{1}{a^2+a+1}}{1+\left[\dfrac{a^2-a+1}{a-1}\right]\dfrac{1}{a^2-a+1}} = \frac{1-\dfrac{1}{a+1}}{1+\dfrac{1}{a-1}} = \frac{\dfrac{a}{a+1}}{\dfrac{a}{a-1}}$$

$$\frac{a-1}{a+1}$$

d) $\left(\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}\right) \div \left(1 - \dfrac{x^2 - xy - y^2}{x^2 - y^2}\right)$

$$\frac{\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}}{1 - \dfrac{x^2 - xy - y^2}{x^2 - y^2}} = \frac{\dfrac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)(x+y)}}{\dfrac{(x^2-y^2) - (x^2 - xy - y^2)}{x^2-y^2}} = \frac{\dfrac{(x^2+2xy+y^2) - (x^2-2xy+y^2)}{x^2-y^2}}{\dfrac{(x^2-y^2) - (x^2-xy-y^2)}{x^2-y^2}}$$

$$= \frac{(x^2+2xy+y^2) - (x^2-2xy+y^2)}{(x^2-y^2) - (x^2-xy-y^2)} = \frac{4xy}{xy} = 4$$

e) $\dfrac{x^2}{x/(x-y) - y/(x+y)} + \dfrac{y^2}{x/(x+y) + y/(x-y)}$

$$\frac{x^2}{\dfrac{x}{x-y} - \dfrac{y}{x+y}} + \frac{y^2}{\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{x-y}} = \frac{x^2}{\dfrac{x(x+y) - y(x-y)}{(x-y)(x+y)}} + \frac{y^2}{\dfrac{x(x-y) + y(x+y)}{(x+y)(x-y)}}$$

$$= \frac{x^2}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}} = \frac{x^2(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + \frac{y^2(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2 - y^2$$

VII.6.1 PROPORCIONES

Las Proporciones son también cocientes indicados con diversas propiedades:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \;;\; \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \;;\; \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

Partiendo de una Proporción, se lee "*a es a b, como x es a y*". Manipulando algebraicamente, se obtienen las otras Proporciones

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{x}{y} + 1$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}$$

Partiendo de la Proporción inicial, agregando 1 a cada miembro y efectuando operaciones con Fracciones Algebraicas, se logran las Proporciones derivadas.

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \Rightarrow \frac{a}{x} + 1 = \frac{b}{y} + 1$$

Similarmente cambiando la forma de la Proporción se suma 1 y ordenando se obtiene otra Proporción derivada.

$$\frac{a+x}{x} = \frac{b+y}{y} \Rightarrow \frac{a+x}{b+y} = \frac{x}{y}$$

Se llama Fracción Propia cuando el grado del Numerador es menor al grado del Denominador. Caso contrario se llama Fracción Impropia. En las Fracciones Propias ya no es posible la división.

VII.- PROBLEMAS PROPUESTOS

7.1 Simplificar las siguientes Fracciones Algebraicas:

a) $\dfrac{6x^3}{2x}$ b) $\dfrac{18x^9y^4z^6}{9x^7z^5}$ c) $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 4x + 3}$ d) $\dfrac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4x^2y - 4xy^2}$

e) $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ f) $\dfrac{15x^2 + 14xy - 8y^2}{21x^2 + 31xy + 4y^2}$ g) $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$ h) $\dfrac{a(a+b) - b(a-b)}{(a+b)^2 - 2ab}$

i) $\dfrac{x^3(y^3+1)-y^3(x^3-1)}{x^2-xy+y^2}$ j) $\dfrac{a(b^2-1)-b(a^2-1)}{b(a+1)-a(b+1)}$ k) $\dfrac{(x-y)^2-(1-xy)^2}{(x+y)^2-(1+xy)^2}$

7.2 Efectuar la Suma entre las Fracciones:

a) $\dfrac{2}{xy}+\dfrac{7}{xy}$ b) $\dfrac{2x-1}{x+3}+\dfrac{5x+4}{x+3}$ c) $\dfrac{3x+1}{x}+\dfrac{2x-6}{x}$

d) $\dfrac{2}{a}+\dfrac{5}{b}$ e) $\dfrac{x+1}{x+5}+\dfrac{x+3}{x+2}$ f) $\dfrac{a^2}{a+1}+\dfrac{a+3}{a}$

g) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{5}$ h) $\dfrac{2x-1}{x+3}-\dfrac{5x+1}{x-3}$ i) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$

7.3 Hallar el m.c.m. de las siguientes Expresiones Algebraicas:

a) $x^8y^4z^2\ ;\ x^3y^2z^4$ b) $x^2-4x+3\ ;\ x^2-5x+6$ c) $x^2\ ;\ x^4-6x^3+8x^2$

d) $x^2-9\ ;\ x^4-10x^2+9$ e) $x^3\ ;\ x^2-4x+5\ ;\ x^3-1\ ;\ x^3-3x^2-3x-4$

7.4 Usando el m.c.m. efectuar las siguientes Sumas:

a) $\dfrac{1}{x^8y^4z^2}+\dfrac{1}{x^3y^2z^4}$ b) $\dfrac{x+7}{x^2-4x+3}+\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$ c) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-8x+7}$

d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$ e) $\dfrac{x^2-y^2-z^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2-z^2-x^2}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^2-x^2-y^2}{(z-x)(z-y)}$

7.5 Multiplicar las siguientes Fracciones Algebraicas:

a) $\dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{2}{y}$ b) $\dfrac{x+2}{x+3}\cdot\dfrac{x+1}{x+4}$ c) $(x^2-1)\cdot\dfrac{3x+2}{x+1}$

d) $\dfrac{x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2}{x^2+1}$ e) $\dfrac{3x+1}{2x+1}\cdot\dfrac{x+5}{4x-1}$ f) $\dfrac{x^2+1}{x-7}\cdot\dfrac{1}{x^2+1}$

7.6 Dividir las siguientes Fracciones Algebraicas:

a) $\dfrac{3}{x}\div\dfrac{2}{y}$ d) $\dfrac{1}{x}\div\dfrac{x+1}{x+3}$ g) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-8}\div\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+5x+6}$

b) $\dfrac{x+3}{x-1}\div\dfrac{x+1}{x+4}$ e) $\dfrac{x^2+1}{2x+3}\div\dfrac{x+1}{x}$ h) $\dfrac{x^3-8}{x^2+5x+6}\div\dfrac{x^2+2x+4}{x^2-4}$

c) $\dfrac{a}{x-1}\div\dfrac{x}{a+1}$ f) $\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\div\dfrac{1}{a}$ i) $\dfrac{(x+y)^2-2xy}{x^2-7x+12}\div\dfrac{(x-y)^2+2xy}{x^2-6x+8}$

7.7 Simplificar las siguientes Fracciones Compuestas:

a) $\dfrac{x}{x-\dfrac{1}{x}}$ b) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$ c) $\dfrac{a}{a+\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a}}}$ d) $\dfrac{2x}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

e) $\dfrac{\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}}{\dfrac{1}{a+1}}$ f) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}}$ g) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}}+\dfrac{a^2}{a^2+\dfrac{a}{1+\dfrac{a}{1-a}}}$

7.8 Efectuar las Operaciones:

a) $\dfrac{1}{(x-y)(y-z)} + \dfrac{1}{(y-z)(z-x)} + \dfrac{1}{(z-x)(x-y)}$

b) $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$

c) $\dfrac{x+y}{(y-z)(z-x)} + \dfrac{y+z}{(z-x)(x-y)} + \dfrac{z+x}{(x-y)(y-z)}$

d) $\dfrac{1}{x(x-y)(x-z)} + \dfrac{1}{y(y-x)(y-z)} + \dfrac{1}{z(z-x)(z-y)}$

e) $\dfrac{\dfrac{xy}{x+y}\left(\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}\right)}{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{xy}}$

f) $\dfrac{(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2})(a^2 - b^2)}{(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2})(a^2 + b^2)}$

g) $\left[(\dfrac{1+x}{1-3x})^2 + \dfrac{1+x}{1-3x} - 4\right] \div \left[3(\dfrac{1-x}{1-3x})^2 + \dfrac{13+13x}{1-3x} + 4\right]$

h) $\dfrac{\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{a^2}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{b^2}}$

RESPUESTAS VII

7.1 a) $3x^2$ b) $2x^2y^4z$ c) $\dfrac{x-5}{x-3}$ d) $\dfrac{1}{x-y}$ e) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

f) $\dfrac{5x-2y}{7x+y}$ g) $\dfrac{x-1}{x+1}$ h) 1 i) $x+y$ j) $ab+1$ k) 1

7.2 a) $\dfrac{9}{xy}$ b) $\dfrac{7x+3}{x+3}$ c) $\dfrac{5(x-1)}{x}$ d) $\dfrac{2b+5a}{ab}$ e) $\dfrac{2x^2+11x+17}{x^2+7x+10}$

f) $\dfrac{a^3+a^2+4a+3}{a^2+a}$ g) $\dfrac{3x}{10}$ h) $\dfrac{-3x^2-23x}{x^2-9}$ i) $\dfrac{4x^2-3x-3}{x^3-x}$

7.3 $x^8y^4z^4$; $(x-1)(x-3)(x-2)$; $x^2(x-2)(x-4)(x^2-1)(x^2-9)$; $x^3(x-1)(x-4)(x^2+x+1)$

7.4 a) $\dfrac{z^2+x^5y^2}{x^8y^4z^2}$ b) $\dfrac{3x^2-12x+15}{x^3-6x^2+11x-6}$ c) $\dfrac{x-6}{x^2-8x+7}$ d) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^3-x}$ e) 2

7.5 a) $\dfrac{6}{xy}$ b) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+7x+12}$ c) $3x^2-x-2$ d) $\dfrac{x^3}{x^4-1}$ e) $\dfrac{3x^2+16x+5}{8x^2+2x-1}$ f) $\dfrac{1}{x-7}$

7.6 a) $\dfrac{3y}{2x}$ b) $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-1}$ c) $\dfrac{a^2+a}{x^2-x}$ d) $\dfrac{x+3}{x^2+x}$ e) $\dfrac{x^3+x}{2x^2+5x+3}$

f) $\dfrac{a^3-a}{a^2+1}$ g) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-20}$ h) $\dfrac{x^2-4x+4}{x+3}$ i) $\dfrac{x-2}{x-3}$

7.7 a) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$ b) $1-x$ c) $\dfrac{a^2-1}{a^2}$ d) x^2-1 e) $\dfrac{2}{a-1}$ f) $\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$ g) $2a$

7.8 a) 0 b) 1 c) 0 d) $\dfrac{1}{xyz}$ e) x^2y^2 f) 1 g) x h) $a+b$

VIII.- RADICALES

VIII.1 RADICALES

Se llaman RADICALES o RAÍCES a las Expresiones generales de la forma:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Donde el Símbolo: $\sqrt{\ }$ se llama SIGNO RADICAL; n es el Orden; a se llama el Radicando o Expresión subradical. La Raíz de orden: 2 llamada también Raíz cuadrada, no precisa indicar el orden, así se asume siempre que: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

Los Radicales se definen en base a:

$$\sqrt[n]{a} = x \quad \Rightarrow \quad x^n = a$$

Ej 8.1 Se calculan y verifican algunos Radicales:

a) $\sqrt{9}$

$$\sqrt{9} = \begin{cases} 3 & \Rightarrow \quad 3^2 = 9 \\ -3 & \Rightarrow \quad (-3)^2 = 9 \end{cases}$$

La Raíz de Orden dos del número 9 es: 3; porque precisamente: $3^2 = 9$. También la Raíz de Orden dos de 9 es: -3; porque se cumple que: $(-3)^2 = 9$

b) $\sqrt[3]{64}$

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad \Rightarrow \quad 4^3 = 64$$

La Raíz de orden tres del número 64 es: 4; porque precisamente: $4^3 = 64$

c) $\sqrt{25a^6}$

$$\sqrt{25a^6} = \begin{cases} 5a^3 & \Rightarrow \quad (5a^3)^2 = 25a^6 \\ -5a^3 & \Rightarrow \quad (-5a^3)^2 = 25a^6 \end{cases}$$

La Raíz de orden dos de: $25a^6$ es $5a^3$ porque cumple: $(5a^3)^2 = 25a^6$, otra raíz es: $-5a^3$ porque también verifica $(-5a^3)^2 = 25a^6$

VIII.2 PROPIEDADES DE RADICALES

Los Radicales provienen de los Exponentes Fraccionarios, por tanto poseen las Propiedades de los Exponentes.

T1) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$

T2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

T3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

T4) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m} = a^{\frac{m}{n}}$

T5) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-1/n}$

T6) $\sqrt{a^2} = |a|$

Todas estas Propiedades se pueden demostrar usando las Definiciones y Leyes de los Exponentes.

Tome muy en cuenta que: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$; $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Las Raíces de acuerdo a si son de orden Par o Impar, sobre Positivos o Negativos, poseen las siguientes Propiedades:

- Las Raíces de orden par de un Número Positivo, poseen siempre dos resultados de signos opuestos, se llama RAÍZ PRINCIPAL a la Raíz Positiva.
- Las Raíces de orden par de un Número Negativo, no son Números Reales, son Números Imaginarios
- La Raíz de orden impar de un Número Positivo es un solo Número Real, también Positivo.
- La Raíz de orden impar de un Negativo es un solo Número Real, también Negativo.

IV.2.1 SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Simplificar Radicales, significa obtener Expresiones reducidas a la Mínima Expresión.

"Tanto de los Coeficientes (Números Reales) como del resto de las Expresiones Subradicales debe sacarse del Radical las mayores Raíces Perfectas, de manera que las Expresiones Subradicales que queden, no contengan Grados mayores al Orden del Radical"

Ej 8.2 Se simplifican Radicales, operando solo con la Raíz Principal:

a) $\sqrt{81}$ $\quad \sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$

81 es un Cuadrado Perfecto, ya que su Raíz es un Número entero (9), directamente su Raíz cuadrada sale del Radical.

b) $\sqrt{48}$ $\quad \sqrt{48} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{4^2}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

48 no es Cuadrado Perfecto, se descompone entre un Cuadrado perfecto y otro Número, sacando luego la correspondiente Raíz.

c) $\sqrt[3]{40}$ $\quad \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

En la Raíz cúbica, se descompone el Número, entre un Cubo perfecto y cualquier otro número. Se saca luego la Raíz cúbica.

Ej 8.3 Se simplifican los siguientes Radicales

a) $\sqrt{a^8 b^6}$ $\quad \sqrt{a^8 b^6} = \sqrt{a^8}\sqrt{b^6} = a^{\frac{8}{2}} b^{\frac{6}{2}} = a^4 b^3$

Una forma práctica de simplificar Radicales, consiste en dividir el Grado de los Términos literales entre el Orden del Radical.

b) $\sqrt{49a^6b^{10}}$ $\quad \sqrt{49a^6b^{10}} = \sqrt{7^2a^6b^{10}} = \sqrt{7^2}\sqrt{a^6}\sqrt{b^{10}} = 7a^3b^5$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$ $\quad \sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} = (x^{1/3})^{1/4} = x^{1/12} = \sqrt[12]{x}$

Un Radical sobre otro Radical, se simplifica, considerando Leyes de exponentes

Si: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} \Rightarrow \sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[12]{x}$

Otra manera es por la **T3** de los radicales.

d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$ $\quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = ((x^{1/2})^{1/2})^{1/2} = x^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{x}$

Si se presentan varios radicales, se generalizan las anteriores Propiedades.

e) $\left[\sqrt{\left[\sqrt[6]{x}\right]^8}\right]^4$ $\quad \left[\sqrt{\left[\sqrt[6]{x}\right]^8}\right]^4 = \left[\left(\left[x^{\frac{1}{6}}\right]^8\right)^{\frac{1}{2}}\right]^4 = x^{\frac{1}{6}\cdot 8\cdot\frac{1}{2}\cdot 4} = x^{\frac{32}{12}} = x^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{x^8}$

Tome en cuenta que las siguientes simplificaciones no son posibles : $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b \; ; \; \sqrt[n]{a^n + b^n} \neq a + b$

Ej 8.4 Se simplifican Radicales:

Si el Grado del Subradical, no es divisible entre el Orden de la Raíz entonces: Se descompone tal grado, de manera que si se pueda sacar la mayor potencia posible de la Raíz.

a) $\sqrt{a^9}$ $\qquad \sqrt{a^9} = \sqrt{a^8 \cdot a} = \sqrt{a^8}\sqrt{a} = a^4\sqrt{a}$

b) $\sqrt[5]{x^{23}}$ $\qquad \sqrt[5]{x^{23}} = \sqrt[5]{x^{20}x^3} = \sqrt[5]{x^{20}}\sqrt[5]{x^3} = x^4\sqrt[5]{x^3}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^7}}{\sqrt[3]{a^8}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{a^7}}{\sqrt[3]{a^8}} = \dfrac{\sqrt{a^6 a}}{\sqrt[3]{a^6 a^2}} = \dfrac{a^3\sqrt{a}}{a^2\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$

8.1 Simplificar los siguientes Radicales:

a) $\sqrt[3]{a^8 b^{10}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{a^8 b^{10}} = \sqrt[3]{a^6 a^2 b^9 b} = \sqrt[3]{a^6}\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b^9}\sqrt[3]{b} = a^2\sqrt[3]{a^2}\, b^3\sqrt[3]{b} = a^2 b^3\sqrt[3]{a^2 b}$

b) $\sqrt{\dfrac{a^4 b^{13}}{c^7}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\dfrac{a^4 b^{13}}{c^7}} = \sqrt{\dfrac{a^4 b^{12} b}{c^6 c}} = \dfrac{\sqrt{a^4}\sqrt{b^{12}}\sqrt{b}}{\sqrt{c^6}\sqrt{c}} = \dfrac{a^2 b^6\sqrt{b}}{c^3\sqrt{c}}$

VIII.2.2 OPERACIONES CON RADICALES

Para efectuar Operaciones con Radicales: *"Se aplican las Reglas de Operaciones Algebraicas, considerando a los Radicales como una Parte Literal, procurando que todos los Radicales estén ya simplificados"*

Ej 8.5 Se efectúan las siguientes Operaciones entre Radicales:

a) $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$

$3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$

Se suman tomando a los radicales como una Parte Literal, que simplemente se copia en el resultado.

b) $(3\sqrt{5})(4\sqrt{5})$

Se multiplica, usando las Leyes de Exponentes en los Radicales

$(3\sqrt{5})(4\sqrt{5}) = 12[\sqrt{5}]^2 = 12\cdot 5 = 60$

Ej 8.6 Se efectúan las siguientes Operaciones entre Radicales:

$\sqrt{12} + \sqrt{75}$

Antes de efectuar Operaciones, se deben simplificar los Radicales.

$\sqrt{12} + \sqrt{75} = \sqrt{2^2\cdot 3} + \sqrt{5^2\cdot 3} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

8.2 Efectuar las siguientes Operaciones entre Radicales:

a) $\sqrt{18} + \sqrt{8} + \sqrt{32}$

$\sqrt{18} + \sqrt{8} + \sqrt{32} = \sqrt{9\cdot 2} + \sqrt{4\cdot 2} + \sqrt{16\cdot 2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

b) $\sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{75}$

$\sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{75} = \sqrt{9\cdot 3} - \sqrt{16\cdot 3} + \sqrt{25\cdot 3} = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

c) $\sqrt{1/20} + \sqrt{1/45}$

$$\sqrt{\frac{1}{20}} + \sqrt{\frac{1}{45}} = \sqrt{\frac{1}{4\cdot 5}} + \sqrt{\frac{1}{9\cdot 5}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{1}{5}}$$

d) $\sqrt{128} - \sqrt{12} + \sqrt{98}$

$$\sqrt{128} - \sqrt{12} + \sqrt{98} = \sqrt{64\cdot 2} - \sqrt{4\cdot 3} + \sqrt{49\cdot 2} = 8\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 7\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

e) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{63} \Rightarrow \sqrt{28}\cdot\sqrt{63} = \sqrt{4\cdot 7}\sqrt{9\cdot 7} = 2\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{7} = 6(\sqrt{7})^2 = 6\cdot 7 = 42$

f) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{75} \Rightarrow \sqrt{50}\cdot\sqrt{75} = \sqrt{25\cdot 2}\cdot\sqrt{25\cdot 3} = 5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{2\cdot 3} = 25\sqrt{6}$

g) $\dfrac{\sqrt{216}}{\sqrt{12}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{216}}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{36\cdot 6}}{\sqrt{4\cdot 3}} = \dfrac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{\dfrac{6}{3}} = 3\sqrt{2}$

VIII.3 RACIONALIZACIÓN

La Racionalización es el Proceso algebraico de eliminar Radicales de los Denominadores de cualquier Fracción algebraica.

Una Expresión con Radicales es el CONJUGADO (O Factor de racionalización) de otra Expresión, si el Producto de ambas, determina una Expresión Racional (Sin Radicales).

VIII.3.1 RACIONALIZACIÓN DE RAÍCES CUADRADAS

En el caso de Raíces cuadradas: Para Racionalizar una Fracción que contenga Expresiones con Radicales se aplica la siguiente Regla: *"Se multiplican tanto el Numerador como Denominador por el Conjugado de la Expresión con Radicales"*

Si se tiene un solo Término en el Denominador, el Conjugado será la misma Raíz del Denominador.

Para el caso de que se tengan dos Términos en el Denominador, el Conjugado será la misma Expresión con el Signo Intermedio cambiado.

Ej 8.7 Se determinan los Conjugados de las siguientes Expresiones:

a) $\sqrt{x}$ De: $\sqrt{x}$ El Conjugado es: $\sqrt{x}$

Porque: $\sqrt{x}\,\sqrt{x} = (\sqrt{x}\,)^2 = x$

Si se tiene un solo Término, el Conjugado es el mismo Radical.

b) $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ De: $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ El Conjugado es: $\sqrt{7} - \sqrt{2}$

Porque: $(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2}) = \sqrt{7}^{\,2} - \sqrt{2}^{\,2} = 7 - 2 = 5$

El Conjugado de dos Términos contiene a los mismos Términos, con otro Signo intermedio.

c) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ De: $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ El Conjugado es: $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Porque: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a}\,)^2 - (\sqrt{b}\,)^2 = a - b$

Producto de Suma por Diferencia, es la Diferencia de Cuadrados.

Ej 8.8 Se racionalizan las siguientes Fracciones con Raíz Cuadrada en el Denominador:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}\,)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ $\quad \dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}}\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b}\,)^2} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

Se multiplica tanto el Numerador como Denominador por la misma Raíz que se encuentra en el Denominador.

El cuadrado elimina al radical.

Ej 8.9 Se racionalizan las siguientes Fracciones con Radicales en su Denominador.:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{6-2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

b) $\dfrac{x\,y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$$\frac{x\,y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x\,y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x\,y(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2} = \frac{x\,y\sqrt{x}-x\,y\sqrt{y}}{x-y}$$

Se multiplican tanto el Numerador como Denominador, por el Conjugado del Denominador.

Simplificando, se obtiene una Fracción sin Radicales ya en su Denominador.

8.3 Racionalizar las siguientes Fracciones:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Multiplicando y dividiendo por el Conjugado, esta 1^era^ Fracción presenta un solo Término en su denominador. Simplificando.

b) $\dfrac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$

$$\frac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}\,\frac{1-\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}(1-\sqrt{7})}{(1)^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{7}-(\sqrt{7})^2}{1-7} = \frac{\sqrt{7}-7}{-6} = \frac{7-\sqrt{7}}{6}$$

La Fracción presenta una suma en su denominador, multiplicando y dividiendo por el Conjugado

c) $\dfrac{b}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}$

$$\frac{b}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}} = \frac{b}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}} = \frac{b(\sqrt{a+b}+\sqrt{a})}{\sqrt{a+b}^{\,2}-\sqrt{a}^{\,2}}$$

$$\frac{b(\sqrt{a+b}+\sqrt{a})}{a+b-a} = \sqrt{a+b}+\sqrt{a}$$

d) $\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$

$$\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}} = \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}\,\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}} = \frac{(\sqrt{x+y})^2-2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}+(\sqrt{x-y})^2}{(\sqrt{x+y})^2-(\sqrt{x-y})^2}$$

$$= \frac{(x+y)-2\sqrt{(x+y)(x-y)}+(x-y)}{(x+y)-(x-y)} = \frac{2x-2\sqrt{x^2-y^2}}{2y} = \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}$$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

$$= \frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}}\cdot\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-\sqrt{c}^{\,2}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{a}^{\,2}+2\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}^{\,2}-c}$$

$$= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{2\sqrt{ab}+(a+b-c)}\cdot\frac{2\sqrt{ab}-(a+b-c)}{2\sqrt{ab}-(a+b-c)} = \frac{[\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\,]\,[2\sqrt{ab}-(a+b-c)]}{\left[2\sqrt{ab}\,\right]^2-(a+b-c)^2}$$

$$= \frac{[\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\,]\,[2\sqrt{ab}-a-b+c)]}{4ab-(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc)} = \frac{[\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\,]\,[2\sqrt{ab}-a-b+c)]}{-a^2-b^2-c^2+2ab+2ac+2bc}$$

En este caso luego de agrupar al denominador en dos partes se racionaliza, el resultado obtenido presenta aún un Radical, racionalizando al mismo y simplificando.

VIII.3.2 RACIONALIZACIÓN DE RAÍCES DE ORDEN: *n*

Si se tiene un solo Término en el Denominador. Para racionalizar: "*Se multiplica por otra Radical del mismo orden, pero con una Expresión Subradical modificada, de manera tal que permita eliminar el Radical del Denominador*"

Ej 8.10 Se racionalizan Fracciones con un Término en el Denominador:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}$ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}\,\dfrac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{7^2}}{7}$

Para racionalizar la Raíz Cúbica, se precisa que luego de multiplicar por un factor, dentro del Radical quede una Cantidad elevada al Cubo.

Por ello se multiplica tanto al Numerador como Denominador por la Raíz Cúbica de: 7^2

b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\,\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^4}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{x}$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}\,\dfrac{\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[4]{b^3}} = \dfrac{\sqrt[4]{a}\,\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[4]{b^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{a\,b^3}}{b}$

Si se tienen un binomio en el Denominador, para racionalizar: "*Se multiplica tanto el Numerador y Denominador por el Conjugado de la Expresión con Radicales*"

El Conjugado o *Factor de racionalización* de una Suma o Resta de Raíces iguales, será un Factor que permite llegar a una Suma o Resta de las mismas Raíces, pero elevadas a una Potencia igual a su Orden de Radical, lo que permitirá su eliminación.

Tales Factores provienen de las Factorizaciones de Sumas o Restas de Potencias iguales (Ver VI.6.3) o también de los Cocientes Notables (Ver V.2)

Ej 8.11 $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y}}$

Se busca el Conjugado de una Suma de Raíces quintas, note que se tiene una Suma en el denominador, la raiz es impar.

Para racionalizar: $\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y}$ (Raíces quintas) se debe llegar a: $(\sqrt[5]{x})^5 + (\sqrt[5]{y})^5 = x + y$

Por tanto tomando: $\sqrt[5]{x} = a$; $\sqrt[5]{y} = b$ significa que partiendo de la Forma: $(a + b)$ se debe buscar un Factor (El Conjugado) que multiplicando a: $(a + b)$; determine por resultado: $a^5 + b^5$

Por la regla de Factorización de VI.6.3 se tiene : $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

La Forma Algebraica del 2do Factor es el Conjugado. Por tanto para Raíces quintas el Conjugado es:

$$(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$
$$\left(\sqrt[5]{x}^{\,4} - \sqrt[5]{x}^{\,3}\sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{x}^{\,2}\sqrt[5]{y}^{\,2} - \sqrt[5]{x}\,\sqrt[5]{y}^{\,3} + \sqrt[5]{y}^{\,4}\right)$$

Racionalizando:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y}} \cdot \frac{\sqrt[5]{x}^{\,4} - \sqrt[5]{x}^{\,3}\sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{x}^{\,2}\sqrt[5]{y}^{\,2} - \sqrt[5]{x}\,\sqrt[5]{y}^{\,3} + \sqrt[5]{y}^{\,4}}{\sqrt[5]{x}^{\,4} - \sqrt[5]{x}^{\,3}\sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{x}^{\,2}\sqrt[5]{y}^{\,2} - \sqrt[5]{x}\,\sqrt[5]{y}^{\,3} + \sqrt[5]{y}^{\,4}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{x}^{\,4} - \sqrt[5]{x}^{\,3}\sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{x}^{\,2}\sqrt[5]{y}^{\,2} - \sqrt[5]{x}\,\sqrt[5]{y}^{\,3} + \sqrt[5]{y}^{\,4}}{\sqrt[5]{x}^{\,5} + \sqrt[5]{y}^{\,5}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{x}^{\,4} - \sqrt[5]{x}^{\,3}\sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{x}^{\,2}\sqrt[5]{y}^{\,2} - \sqrt[5]{x}\,\sqrt[5]{y}^{\,3} + \sqrt[5]{y}^{\,4}}{x + y}$$

Generalizando, cuando se trata de racionalizar una Suma o Resta de Radicales de Orden n, en el denominador de una Fracción, se presentan los siguientes casos:

Forma de denominador		Conjugado	Resultado
$\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$	n impar	$\sqrt[n]{x}^{\,n-1}-\sqrt[n]{x}^{\,n-2}\sqrt[n]{y}+\sqrt[n]{x}^{\,n-3}\sqrt[n]{y}^{\,2}\ldots+\sqrt[n]{y}^{\,n-1}$	$\sqrt[n]{x}^{\,n}+\sqrt[n]{y}^{\,n}=x+y$
	n par	$\sqrt[n]{x}^{\,n-1}-\sqrt[n]{x}^{\,n-2}\sqrt[n]{y}+\sqrt[n]{x}^{\,n-3}\sqrt[n]{y}^{\,2}-\ldots-\sqrt[n]{y}^{\,n-1}$	$\sqrt[n]{x}^{\,n}-\sqrt[n]{y}^{\,n}=x-y$
$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}$	n par o impar	$\sqrt[n]{x}^{\,n-1}+\sqrt[n]{x}^{\,n-2}\sqrt[n]{y}+\sqrt[n]{x}^{\,n-3}\sqrt[n]{y}^{\,2}+\ldots+\sqrt[n]{y}^{\,n-1}$	$\sqrt[n]{x}^{\,n}-\sqrt[n]{y}^{\,n}=x-y$

Ej 8.12 Se racionaliza una Fracción con radicales de orden 3 en el Denominador.

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$

Si: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a=\sqrt[3]{x}\,;\quad b=\sqrt[3]{y}$

Se requiere llegar a: $(\sqrt[3]{x})^3+(\sqrt[3]{y})^3$

De la Forma: $a-b$

Para llegar a: a^3-b^3, se debe multiplicar por la Forma: a^2+ab+b^2

O directamente usando la anterior Tabla, se logra la racionalización.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}^{\,2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{x}^{\,2}}{\sqrt[3]{x}^{\,2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{x}^{\,2}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x}^{\,2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{x}^{\,2}}{\sqrt[3]{x}^{\,3}-\sqrt[3]{y}^{\,3}}=\frac{\sqrt[3]{x}^{\,2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{x}^{\,2}}{x-y}$$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$

Si: $a^4-b^4=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$

$a=\sqrt[4]{x}\,;\quad b=\sqrt[4]{y}$

De la Forma: $a-b$

Para llegar a: a^4-b^4, se debe multiplicar por la Forma: $a^3-a^2b+ab^2-b^3$

O directamente por la Tabla.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\cdot\frac{\sqrt[4]{x}^{\,3}-\sqrt[4]{x}^{\,2}\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}^{\,2}-\sqrt[4]{y}^{\,3}}{\sqrt[4]{x}^{\,3}-\sqrt[4]{x}^{\,2}\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}^{\,2}-\sqrt[4]{y}^{\,3}}$$

$$=\frac{\sqrt[4]{x}^{\,3}-\sqrt[4]{x}^{\,2}\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}^{\,2}-\sqrt[4]{y}^{\,3}}{\sqrt[4]{x}^{\,4}-\sqrt[4]{y}^{\,4}}=\frac{\sqrt[4]{x}^{\,3}-\sqrt[4]{x}^{\,2}\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}^{\,2}-\sqrt[4]{y}^{\,3}}{x-y}$$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}}$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{1}{\sqrt[6]{x^3}+\sqrt[6]{y^2}},$$

Racionalizando para Radical de orden 6, que se considera afecta a ambos.

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}^{\,5}-\sqrt{x}^{\,4}\sqrt[3]{y}+\sqrt{x}^{\,3}\sqrt[3]{y}^{\,2}-\sqrt{x}^{\,2}\sqrt[3]{y}^{\,3}+\sqrt{x}\sqrt[3]{y}^{\,4}-\sqrt[3]{y}^{\,5}}{\sqrt{x}^{\,5}-\sqrt{x}^{\,4}\sqrt[3]{y}+\sqrt{x}^{\,3}\sqrt[3]{y}^{\,2}-\sqrt{x}^{\,2}\sqrt[3]{y}^{\,3}+\sqrt{x}\sqrt[3]{y}^{\,4}-\sqrt[3]{y}^{\,5}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}^{\,5}-\sqrt{x}^{\,4}\sqrt[3]{y}+\sqrt{x}^{\,3}\sqrt[3]{y}^{\,2}-\sqrt{x}^{\,2}\sqrt[3]{y}^{\,3}+\sqrt{x}\sqrt[3]{y}^{\,4}-\sqrt[3]{y}^{\,5}}{\sqrt{x}^{\,6}-\sqrt[3]{y}^{\,6}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}^{\,5}-\sqrt{x}^{\,4}\sqrt[3]{y}+\sqrt{x}^{\,3}\sqrt[3]{y}^{\,2}-\sqrt{x}^{\,2}\sqrt[3]{y}^{\,3}+\sqrt{x}\sqrt[3]{y}^{\,4}-\sqrt[3]{y}^{\,5}}{x^3-y^2}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt[3]{y})(x^2+x\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{y^4})}{x^3-y^2}$$

VIII.3.3 RADICALES DOBLES

Se llama Radical doble a un radical de la forma: $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, que en ciertos casos puede reducirse a la suma de dos Radicales de la forma:

$$\boxed{\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}}$$

Se desarrollan fórmulas para obtener los valores de x, y.

$$\begin{aligned} \sqrt{a+\sqrt{b}} &= \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ \sqrt{a-\sqrt{b}} &= \sqrt{x} - \sqrt{y} \\ \hline \sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} &= 2\sqrt{x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}}{2}, \quad x = \left(\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}}{2}\right)^2$$

Considerando las expresiones de suma y resta.

Sumando entre si, despejando luego $\sqrt{x}$

$$x = \frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}^{\,2} + 2\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a-\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}^{\,2}}{2^2}$$

Despejando x (Elevando al cuadrado), desarrollando y simplificando.

$$x = \frac{a+\sqrt{b} + 2\sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} + a - \sqrt{b}}{4}$$

$$x = \frac{2a + 2\sqrt{a^2-b}}{4} = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$$

Similarmente (Restando) se obtiene el valor de y.

$$\Rightarrow \sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Reemplazando en la expresión sugerida, se logra la conversión del Radical doble en suma de dos Radicales simples.

Sin embargo esta reducción solo es aplicable cuando se obtiene un entero en $\sqrt{a^2-b}$

Ej 8.13 Se simplifica la expresión de Radical doble: $\sqrt{7+\sqrt{40}}$

$$\sqrt{7+\sqrt{40}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Asumiendo que se puede presentar como la suma de dos radicales.

$$x = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} = \frac{7+\sqrt{7^2-40}}{2} = \frac{7+\sqrt{9}}{2} = \frac{7+3}{2} = 5$$

$$y = \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} = \frac{7-\sqrt{7^2-40}}{2} = \frac{7-\sqrt{9}}{2} = \frac{7-3}{2} = 2$$

Calculando x, y de acuerdo a fórmulas antes deducidas.

$$\Rightarrow \sqrt{7+\sqrt{40}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

Expresión simplificada.

VIII.3.4 SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Usando las Propiedades de los Radicales y las Leyes de Exponentes es posible simplificar expresiones que presentan varios radicales.

Ej 8.14 Se simplifican radicales:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}$ $\qquad \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x}}} = \left[\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{24}} = \sqrt[24]{x}$

Un radical equivale a un exponente fraccionario.

b) $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{x}}}}}_{n \text{ veces}}$ $\qquad \sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{x}}}} = \left[\left(x^{\frac{1}{2}\cdots}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2^n}} = \sqrt[2^n]{x}$

c) $x = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$ Calcular x

$x = \sqrt{6+\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}_{x}} \Rightarrow x = \sqrt{6+x}$

$x^2 = (\sqrt{6+x})^2 \Rightarrow x^2 = 6+x \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ x = -2 \end{matrix}$

Si el número de radicales es infinito, el valor de x no será afectado si se asume que el valor de x es también igual a todos los términos excepto la 1[era] raíz.

Elevando al cuadrado y resolviendo la Ecuación cuadrática (Ver Cap VII.3)

El valor total de x es 3.

d) $x^{x^4} = 64$ Calcular x

$x^{x^4} = 8^2 = 8^{\frac{8}{4}} = \left(8^{\frac{1}{4}}\right)^8 = \left(8^{\frac{1}{4}}\right)^{8^{\frac{4}{4}}} = \left[\left(8^{\frac{1}{4}}\right)^{8^{\frac{1}{4}}}\right]^4 = \left[\left(\sqrt[4]{8}\right)^{\sqrt[4]{8}}\right]^4$

$\Rightarrow x = \sqrt[4]{8}$

Ordenando el 64 de manera que tenga una forma equivalente a la del 1[er] miembro.

e) $\sqrt[n]{x^n\sqrt[n]{x^{n^2}\sqrt[n]{x^{n^3}\sqrt[n]{x^{n^4}\ldots\sqrt[n]{x^{n^n}}}}}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{x^{n^2}x^{n^2}\sqrt[n]{x^{n^3}\sqrt[n]{x^{n^4}\ldots\sqrt[n]{x^{n^n}}}}}}$

$= \sqrt[n]{\sqrt[n]{x^{2n^2}\sqrt[n]{x^{n^3}\sqrt[n]{x^{n^4}\ldots\sqrt[n]{x^{n^n}}}}}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{x^{2n^3}x^{n^3}\sqrt[n]{x^{n^4}\ldots\sqrt[n]{x^{n^n}}}}}}$

$= \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{x^{3n^3}\sqrt[n]{x^{n^4}\ldots\sqrt[n]{x^{n^n}}}}}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{x^{4n^4}\ldots\sqrt[n]{x^{n^n}}}}}}$

$= \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\ldots\sqrt[n]{x^{nn^n}}}}}} = \sqrt[n^n]{x^{nn^n}} = (x^{nn^n})^{\frac{1}{n^n}} = x^{\frac{nn^n}{n^n}} = x^n$

Por propiedad de Radicales.

Cada vez que a ingresa a una raíz de orden n queda como a^n

Considere:

$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a} = a^{\frac{1}{n^2}}$

e) $\dfrac{a+3-\sqrt{a^2-9}}{a+3+\sqrt{a^2-9}} + \dfrac{a+3+\sqrt{a^2-9}}{a+3-\sqrt{a^2-9}}$

Si: $u = a+3$

$v = \sqrt{a^2-9}$

$\dfrac{u-v}{u+v} + \dfrac{u+v}{u-v} = \dfrac{(u-v)^2+(u+v)^2}{(u+v)(u-v)} = \dfrac{2(u^2+v^2)}{u^2-v^2}$

$= 2\dfrac{(a+3)^2+\sqrt{a^2-9}^2}{(a+3)^2-\sqrt{a^2-9}^2} = 2\dfrac{(a^2+6a+9)+(a^2-9)}{(a^2+6a+9)-(a^2-9)}$

$= 2\dfrac{2a^2+6a}{6a+18} = 2\dfrac{2a(a+3)}{6(a+3)} = \dfrac{2a}{3}$

Por la forma de la Expresión con Radicales, se hace conveniente realizar dos cambios de variable.

Haciendo operaciones y simplificando.

Volviendo a los Términos iniciales y simplificando.

VIII.- PROBLEMAS PROPUESTOS

8.1 Simplificar los siguientes Radicales:

$\sqrt{x^6y^8}$ $\quad \sqrt[3]{a^6b^3c^{12}}$ $\quad \sqrt[4]{x^{20}y^8}$ $\quad \sqrt{\dfrac{9x^{12}}{y^4}}$ $\quad \sqrt[5]{\dfrac{32a^{20}b^5}{c^{15}}}$ $\quad \sqrt[3]{\dfrac{8p^{15}q^{12}}{27r^3}}$

$\sqrt{20}$ $\quad \sqrt[3]{16}$ $\quad \sqrt[4]{162}$ $\quad \sqrt{a^7}$ $\quad \sqrt[4]{x^{21}}$ $\quad \sqrt[3]{x^{11}y^{16}}$

8.2 Efectuar las siguientes Operaciones con Radicales:

$\sqrt{18}+\sqrt{50}$ $\quad \sqrt{98}+\sqrt{50}-\sqrt{32}$ $\quad \sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}$ $\quad \sqrt{75}\cdot\sqrt{12}$ $\quad \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

$\sqrt{48}+\sqrt{12}$ $\quad \sqrt{45}-\sqrt{5}+\sqrt{20}$ $\quad \sqrt[5]{96}+\sqrt[5]{3072}$ $\quad \sqrt{63}\cdot\sqrt{112}$ $\quad \sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}$

8.3 Racionalizar las siguientes Fracciones:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ g) $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$ i) $\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}+a}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{a-b}}$ d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ h) $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}$ j) $\dfrac{a-b}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}$

8.4 Racionalizar las siguientes Fracciones con Radicales de Orden: n

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ e) $\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ g) $\dfrac{x-y}{\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}}$ i) $\dfrac{x-y}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{y}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ f) $\dfrac{1}{x-\sqrt[3]{x^3-1}}$ h) $\dfrac{x-64}{\sqrt[6]{x}+2}$ j) $\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

8.5 Simplificar los Radicales dobles: $\sqrt{8+\sqrt{48}}$; $\sqrt{6+\sqrt{20}}$; $\sqrt{8-\sqrt{28}}$; $\sqrt{11-4\sqrt{6}}$

8.6 Simplificar, racionalizando cuando se requiera:

a) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}$ c) $\dfrac{2ab}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}}$

RESPUESTAS VIII

8.1 x^3y^4 ; a^2bc^4 ; x^5y^2 ; $\dfrac{3x^6}{y^2}$; $\dfrac{2a^4b}{c^3}$; $\dfrac{2p^5q^4}{3r}$

$2\sqrt{5}$; $2\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[4]{2}$; $a^3\sqrt{a}$; $x^5\sqrt[4]{x}$; $x^3y^5\sqrt[3]{x^2y}$

8.2 $8\sqrt{2}$; $8\sqrt{2}$; $7\sqrt[3]{2}$; 30 ; $\sqrt[6]{x}$; $6\sqrt{3}$; $4\sqrt{5}$; $6\sqrt[5]{3}$; 84 ; $\sqrt[60]{x}$

8.3 a) $\sqrt{5}$ c) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ e) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$ g) $\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ i) $\sqrt{a^2+b^2}-a$

b) $\dfrac{\sqrt{a-b}}{a-b}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ f) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ h) $\dfrac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}$ j) $\sqrt{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

8.4 a) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{81}}{3}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{x}$ g) $\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[6]{x^4y}+\sqrt[6]{x^3y^2}+\sqrt[6]{x^2y^3}+\sqrt[6]{xy^4}+\sqrt[6]{y^5}$

e) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$ f) $x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{(x^3-1)^2}$ h) $\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt[6]{x^4}+4\sqrt[6]{x^3}-8\sqrt[6]{x^2}+16\sqrt[6]{x}-32$

i) $\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1$ j) $\sqrt{x^3}-\sqrt{x^2}\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}=(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x})(x+\sqrt{x})$

8.5 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; $\sqrt{5}+1$; $\sqrt{7}-1$; $\sqrt{8}-\sqrt{3}$ **8.6** a) $2ab$ b) a/b c) $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-\sqrt{ab(a+b)}$

IX.- ECUACIONES

IX.1 ECUACIONES

Antes de establecer el concepto de Ecuación se precisa del concepto previo de IDENTIDAD.

Se llama IDENTIDAD a la igualdad entre dos Expresiones. Igualdad que será cierta para todos los Valores numéricos definidos que se vayan a tomar.

Ej 9.1 Son Identidades las siguientes Igualdades:

$x^2 - 4x = x(x - 4)$ La 1^era^ igualdad se cumple para todos los valores de: x

$\dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ La 2^da^ igualdad se cumple para todos los valores de: x excepto cuando $x = 1$; por que no está definida para ese valor.

Se llama ECUACIÓN a la igualdad entre dos Expresiones, igualdad que será cierta solo para ciertos valores de la Variables, con las que se definen las Expresiones.

Se llaman SOLUCIONES o RAÍCES a esos valores que permiten la igualdad en una ECUACIÓN.

Ej 9.2 Son Ecuaciones las siguientes igualdades:

$5x - 1 = 2x + 8$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

La 1^era^ y 2^da^ igualdad son Ecuaciones, ya que son igualdades ciertas, solo para algunos valores de la Incógnita: x

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 14 \\ 2x - 5y = 3 \end{array}\right]$$

Estas dos últimas igualdades constituyen un Sistema de Ecuaciones, donde las igualdades son ciertas solo para algunos valores de: x, y

Ej 9.3 En una Ecuación se destacan las siguientes partes:

$5x - 1 = 2x + 8$

$5x - 1$ Es el 1^er^ Miembro
$2x + 8$ Es el 2^do^ Miembro
x es la Variable o Incógnita

La igualdad es cierta siempre y cuando, la Variable: x tome el valor de: 3 ; En todo otro caso la igualdad no se cumple. Por tanto la SOLUCIÓN o RAÍZ de la Ecuación es: 3

RESOLVER UNA ECUACIÓN significa, hallar sus Soluciones o Raíces.

- El origen de una Ecuación se da en todas las situaciones prácticas de la vida, con el objetivo de hallar sus SOLUCIONES.
- Las Ecuaciones se clasifican por el Grado que poseen sus Variables y por el Número de estas Variables
- También se clasifican de acuerdo a si se tiene una o varias Ecuaciones, que requieren de una Solución común (SISTEMA DE ECUACIONES).

IX.2 ECUACIONES LINEALES

Se llaman Ecuaciones Lineales, a aquellas Ecuaciones que presentan Incógnitas de grado: 1 ; Una Ecuación Lineal con una Incógnita presenta la siguiente Forma General:

$$\boxed{a x + b = 0}$$

Donde: a, b son Constantes (Números Reales); x es la Incógnita. Una Ecuación Lineal de una Incógnita, solo podrá tener una Solución o Raíz.

Para resolver estas Ecuaciones, se debe considerar un principio básico de las Ecuaciones que indica: "*Si se realiza la misma operación en ambos miembros de una Ecuación, la Igualdad subsiste*".

Como consecuencia de ese Principio, se obtiene la Regla práctica de la TRASPOSICIÓN DE TÉRMINOS, que consiste en que si un Término realiza una cierta operación en un miembro, pasando al otro miembro de la Ecuación, realizará precisamente la operación inversa.

En la TRASPOSICIÓN DE TÉRMINOS se deben priorizar las operaciones de suma y resta y luego las de producto o cociente.

Despejar la Incógnita, significa efectuar la Trasposición de Términos, hasta obtener el valor de la Incógnita que permite resolver la Ecuación.

Ej 9.4 Se resuelven las siguientes Ecuaciones Lineales con una Incógnita:

a) $3x + 4 = 10 \Rightarrow 3x + 4 = 10$

$$3x = 10 - 4$$
$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3}$$
$$x = 2$$

$$3\cdot 2 + 4 = 10 \Rightarrow 10 = 10$$

Se efectúa la Trasposición de Términos. El: 4 que sumaba en el 1^er miembro, pasa a restar en el 2^do.

Luego de efectuar tal resta. El: 3 que multiplicaba en el 1^er miembro, pasa a dividir al 2^do.

Así queda calculada la Solución o raíz de la Ecuación.

Reemplazando la Raíz $x = 2$ en la Ecuación original, se obtendrá la Identidad: $10 = 10$; esta es la prueba de que la Ecuación está correctamente resuelta.

b) $\frac{x}{4} - 3 = 2 \Rightarrow \frac{x}{4} = 2 + 3$

$$\frac{x}{4} = 5$$
$$x = 5\cdot 4 = 20$$

En b) Por Trasposición: El 3 que resta en el 1^er miembro, pasa a sumar al 2^do miembro. Luego el 4 que divide en el 1^er miembro, pasa a multiplicar al 2^do. Así se llega a obtener la Raíz: 20.

Ej 9.5 Se resuelve la siguiente Ecuación Lineal:

$$5x - 1 = 2x + 8 \Rightarrow 5x - 2x = 8 + 1$$
$$3x = 9$$
$$x = \frac{9}{3} = 3$$

Previamente se ordena, de manera que en el 1^er miembro solo tenga Términos con la Variable, en el 2^do miembro solo Términos Constantes.

Simplificando y despejando x.

9.1 Se resuelven las siguientes Ecuaciones Lineales:

a) $\frac{4x + 5}{3} = \frac{3x + 1}{2}$

$$2(4x + 5) = 3(3x + 1)$$
$$8x + 10 = 9x + 3$$
$$8x - 9x = 3 - 10$$
$$-x = -7 \quad /\times(-1)$$
$$x = 7$$

b) $\frac{x - 4}{2} - \frac{5}{6} = \frac{x + 1}{3}$

$$\frac{x - 4}{2} - \frac{5}{6} = \frac{x + 1}{3} \quad /\times 6$$
$$3(x - 4) - 5 = 2(x + 1)$$
$$3x - 17 = 2x + 2$$
$$x = 19$$

En a) los denominadores pasan a multiplicar.

En b) para eliminar todos los denominadores se multiplica toda la Ecuación por 6.

IX.3 ECUACIONES CUADRÁTICAS

Se llaman Ecuaciones Cuadráticas, a aquellas Ecuaciones que presentan Incógnitas de grado: 2 ; Una Ecuación Cuadrática con una Incógnita presenta la siguiente Forma General:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde: a, b, c son Constantes reales, x es la Incógnita. Una Ecuación Cuadrática posee hasta dos Soluciones o Raíces. (Sin embargo tales Soluciones no necesariamente son Números Reales)

Para resolver estas Ecuaciones, existen dos modos: por Factorización y por la Fórmula de Segundo grado.

IX.3.1 POR FACTORIZACIÓN

Para resolver una Ecuación Cuadrática por Factorización se debe considerar el siguiente Principio: "*Si un Producto es igual a cero, basta que uno de los Factores sea igual a cero*"

Se ordena la Ecuación, llevándola a su Forma General, para luego factorizar (Por el Método del Trinomio Ver Capítulo VI.5). Luego cada Factor se iguala a cero, determinando así su resolución.

Ej 9.6 Se resuelve por Factorización la Ecuación Cuadrática:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Dada la Ecuación Cuadrática.

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

Se factoriza usando el Método del trinomio.

$$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$
$$\Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$

Cada uno de los Factores, se iguala a cero, resolviendo luego las Ecuaciones Lineales que se presentan.

$$\text{Si: } x = -1 \Rightarrow (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$$
$$0 = 0$$
$$\text{Si: } x = 3 \Rightarrow 3^2 - 2\cdot 3 - 3 = 0$$
$$0 = 0$$

Verificando resultados:

Se reemplazan las Raíces en la Ecuación, como en cada caso se llega a una Identidad, los resultados si son correctos.

9.2 Resolver las siguientes Ecuaciones Cuadráticas:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$(x - 2)(x - 4) = 0$$
$$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$
$$\Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$$

b) $3x^2 + 2x - 16 = 0$

$$3x^2 + 2x - 16 = 0$$
$$(3x + 8)(x - 2) = 0$$
$$\Rightarrow 3x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{8}{3}$$
$$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

IX.3.2 POR FÓRMULA DE SEGUNDO GRADO

Para resolver Ecuaciones por la Fórmula de Segundo grado, simplemente se reemplaza en la Fórmula de Segundo grado.

$$\text{Si: } ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Será suficiente con ordenar la Ecuación e identificar claramente a los Coeficientes: a; b; c de la Forma General de Ecuación de Segundo grado, para luego reemplazar.

Ej 9.7 Se resuelve por la Fórmula de Segundo grado la Ecuación cuadrática:

$x^2 + 7x + 10 = 0$ — Dada la Ecuación cuadrática

$\Rightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = 7 \\ c = 10 \end{matrix}$ Si: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — Comparando con la Forma General de Ecuación de Segundo grado, se identifican los Coeficientes: $a; b; c$

$\Rightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-7 \pm 3}{2}$ — Reemplazado luego en la Fórmula de Segundo grado y simplificando

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{-7+3}{2} = -2 \; ; \; x_2 = \dfrac{-7-3}{2} = -5$ — De acuerdo a cada signo de la Raíz cuadrada, se obtienen las Raíces de la Ecuación.

9.3 Demostrar la Fórmula de Segundo grado

Si: $ax^2 + bx + c = 0$ — Forma General de Ecuación de 2do grado.

$x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \dfrac{b}{a}x = -\dfrac{c}{a}$ — Dividiendo toda la Ecuación entre: a $(a \neq 0)$; Dejando Términos con: x en el 1er miembro

$x^2 + \dfrac{b}{a}x + (\dfrac{b}{2a})^2 = (\dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{c}{a}$ — Sumando a ambos miembros de la Igualdad la Expresión: $(b/2a)^2$; para así Completar Cuadrados en el 1er miembro (Ver V.1.1)

$(x + \dfrac{b}{2a})^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ — Expresando como Cuadrado de un Binomio en el 1er miembro y efectuando operaciones en el 2do

$x + \dfrac{b}{2a} = \pm\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ — El Cuadrado del 1er miembro se presenta como Raíz Cuadrada en el 2do miembro. (Toda Raíz Cuadrada posee los dos signos)

$x = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — Despejando: x. Ordenando, se obtiene la Fórmula de Segundo grado.

9.4 Resolver por la Fórmula de Segundo grado, las Ecuaciones Cuadráticas

a) $3x^2 + 5x - 8 = 0$

$\Rightarrow \begin{matrix} a = 3 \\ b = 5 \\ c = -8 \end{matrix}$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3(-8)}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-5 \pm 11}{6}$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{-5 + 11}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{-5 - 11}{6} = -\dfrac{16}{6} = -\dfrac{8}{3}$

b) $4x^2 - 9x + 3 = 0$

$\Rightarrow \begin{matrix} a = 4 \\ b = -9 \\ c = 3 \end{matrix}$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4} = \dfrac{9 \pm 5.74}{8}$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{9 + 5.74}{8} = \dfrac{14.74}{8} = 1.84$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{9 - 5.74}{8} = \dfrac{3.24}{8} = 0.41$

c) Hallar la Ecuación de Segundo grado cuyas raíces son -5; 2/3

Si: $\begin{matrix} x_1 = -5 \\ x_2 = \dfrac{2}{3} \end{matrix} \Rightarrow (x + 5)(x - \dfrac{2}{3}) = 0 \Rightarrow x^2 + \dfrac{13}{3}x - \dfrac{10}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 13x - 10 = 0$

DISCRIMINANTE El Discriminante (D) de una Ecuación de Segundo grado se define como:

$$\boxed{\textbf{Si: } ax^2 + bx + c = 0 \;\Rightarrow\; D = b^2 - 4ac}$$

El Discriminante en realidad es la Expresión subradical de la Fórmula de Segundo grado. Permite analizar características de las raíces de una Ecuación, se verifican los siguientes casos:

i) Si: $D > 0$ Si el Discriminante es Positivo, en la Ecuación de Segundo grado existen dos Raíces Reales, diferentes entre sí.

ii) Si: $D = 0$ Si el Discriminante es Cero, en la Ecuación de Segundo grado existen dos Raíces Reales, iguales entre sí.

iii) Si: $D < 0$ Si el Discriminante es Negativo, en la Ecuación de Segundo grado no existen Raíces Reales, las Raíces contienen Números Imaginarios.

Ej 9.8 Se analiza el Discriminante de una Ecuación de Segundo grado:

$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$
$$\Rightarrow a = 3 \;;\; b = 8 \;;\; c = 5$$
$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4\cdot 3\cdot 5 = 4$$
$$\Rightarrow D > 0 \;\exists \text{ dos Raíces Reales}$$

Identificando Coeficientes. Reemplazando en la Expresión del Discriminante.

El Discriminante es Positivo, entonces existen dos Raíces reales, diferentes entre sí.

Es posible verificar que las Raíces son: $x_1 = -1 \,;\, x_2 = -\dfrac{5}{3}$

9.5 Calcular k para que la siguiente Ecuación Cuadrática posea dos Raíces Reales iguales.

$$x^2 - 6x + k = 0$$
$$\text{Si: } D = b^2 - 4ac = 0$$
$$D = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot k = 0$$
$$36 - 4k = 0 \Rightarrow k = 9$$

Para Raíces iguales, el Discriminante debe ser cero.

Calculando el Discriminante de la Ecuación, e igualando a cero, se obtiene: $k = 9$. Se puede verificar luego que las Raíces de la Ecuación: $x^2 - 6x + 9 = 0$; son: 3; 3

IX.3.3 PROPIEDADES DE RAÍCES

Dos Propiedades muy importantes de las Raíces de una Ecuación Cuadrática son:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \;;\; \text{Si las Raíces son: } r_1 \;;\; r_2 \qquad \Rightarrow r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \;;\; r_1\cdot r_2 = \frac{c}{a}}$$

Si: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \;;\; r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para demostrar se considera que las dos soluciones por la Fórmula de Segundo grado, respectivamente son r_1; r_2 (Una se obtiene tomando la suma al radical, la otra tomando la resta)

$$r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Efectuando la suma y simplificando se verifica la 1era Propiedad.

$$r_1\cdot r_2 = \left[\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$
$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Efectuando el producto y simplificando se verifica la 2da Propiedad.

9.6 a) Hallar: k ; para que el Producto de raíces de la Ecuación $(k-2)x^2 - 21x + 10k = 0$; sea 20.

$$\text{Entonces: } a = k - 2 \;;\; b = -21 \;;\; c = 10k$$
$$\text{Si: } r_1\cdot r_2 = \frac{c}{a} = \frac{10k}{k-2} \Rightarrow \frac{10k}{k-2} = 20 \Rightarrow k = 4$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 21x + 40 = 0 \Rightarrow r_1 = 8 \;;\; r_2 = 5/2$$

El Producto de las raíces es de: c/a, reemplazando c, a de la Ecuación

Resolviendo se obtiene: $k = 4$

Así se obtiene la Ecuación y raíces.

b) Hallar: k ; para que una raíz sea triple de la otra en: $x^2 - 8x + k = 0$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si:} & r_2 = 3r_1 & \\ r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} & \Rightarrow \quad r_1 + r_2 = -\dfrac{-8}{1} & \\ r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} & \quad r_1 \cdot r_2 = \dfrac{k}{1} & \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} r_1 + 3r_1 = 8 \\ r_1 \cdot 3r_1 = k \end{array}\right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ r_1 = 2\,;\ r_2 = 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow k = 12 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

Entre la condición de una Raíz triple de la otra y las Propiedades de las raíces, se arma un Sistema de tres Ecuaciones con tres Incógnitas. Ver Cap IX.5.6

Las raices son 2; 6

c) Hallar: k ; para que una raíz exceda a la otra en 5; en la Ecuación: $x^2 - kx + 14 = 0$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si:} & r_2 = r_1 + 5 & \\ r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} & \Rightarrow \quad r_1 + r_2 = -\dfrac{-k}{1} & \\ r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} & \quad r_1 \cdot r_2 = \dfrac{14}{1} & \end{array}\right] \begin{array}{l} r_1 \cdot (r_1 + 5) = 14 \\ r_1^2 + 5r_1 - 14 = 0 \\ \Rightarrow (r_1 + 7)(r_1 - 2) = 0 \\ r_1 = -7 \Rightarrow r_2 = -2 \\ r_1 = 2 \Rightarrow r_2 = 7 \end{array}$$

$$\Rightarrow k = -9 \Rightarrow x^2 + 9x + 14 = 0$$
$$\Rightarrow k = 9 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

Entre la condición (Una Raíz excede a la otra en 5) y las Propiedades, se arma un Sistema de Ecuaciones. Reemplazando la 1[era] en la 3[era] Ecuación se presenta una Ecuación cuadrática.

Se llaman **Raíces simétricas** cuando $r_1 + r_2 = 0$; Se llaman **Raíces recíprocas** cuando: $r_1 r_2 = 1$

9.7 a) Calcular k para Raíces simétricas

$$3x^2 + kx - 12 = 0$$
$$\text{Si: } r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$$
$$\Rightarrow k = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}$$

b) Calcular k para Raíces recíprocas

$$kx^2 - 10x + 3 = 0$$
$$\text{Si: } r_1 r_2 = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow c = a = k = 3$$
$$\Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1/3 \end{array}$$

Se usan las Propiedades de las Raíces de una Ecuación cuadrática.

IX.4 ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

Se llaman Ecuaciones de grado superior, a aquellas Ecuaciones que presentan Incógnitas de grado mayor a 2; Una Ecuación de grado superior con una Incógnita presenta la siguiente Forma general:

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0}$$

Una Ecuación de grado: n posee n Soluciones o Raíces. Sin embargo no siempre todas las Raíces son Números Reales. (Cuando una Raíz no es Número Real se dice directamente que no existe solución real)

Para resolver Ecuaciones de grado superior se recurre a la Factorización, entre otros Métodos de Factorización es muy conveniente el Método de la Regla de Ruffini (Ver VI.7)

Ej 9.9 Se resuelve la Ecuación de grado superior:

$$x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$$

Dada una Ecuación de grado superior (Grado 3)

$$x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$$
$$(x-3)(x+1)(x+4) = 0$$
$$\Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$
$$\Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

Factorizando por el Método de Ruffini (Ver Ej 6.16)

Para que el producto de varios Factores sea cero, basta que alguno sea igual a cero.

Entonces: igualando cada Factor a cero y resolviendo como Ecuaciones Lineales.

9.7 Resolver las siguientes Ecuaciones de grado superior:

a) $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

$(x-2)(x-3)(x+4) = 0$

$\Rightarrow (x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

$\Rightarrow (x-3) = 0 \Rightarrow x_2 = 3$

$\Rightarrow (x+4) = 0 \Rightarrow x_3 = -4$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$(x^2-4)(x^2-1) = 0$

$(x+2)(x-2)(x+1)(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2$

$\Rightarrow (x-2) = 0 \Rightarrow x_2 = 2$

$\Rightarrow (x+1) = 0 \Rightarrow x_3 = -1$

$\Rightarrow (x-1) = 0 \Rightarrow x_4 = 1$

c) $x^3 - 1 = 0$

$x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow (x-1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1$

$\Rightarrow (x^2+x+1) = 0$

$\nexists$ Sol. Real

d) $x^3 - 9x^2 + 19x - 10 = 0$

$(x-2)(x^2-7x+5) = 0$

$\Rightarrow (x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

$\Rightarrow (x^2-7x+5) = 0$

$\Rightarrow x_2 = 6.19 \; ; \; x_3 = 0.81$

e) $x^4 + 9x^3 + 20x^2 + 9x + 1 = 0$

$(x^2+3x+1)(x^2+6x+1) = 0$

$\Rightarrow (x^2+3x+1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -0.38 \; ; \; x_2 = -2.62$

$\Rightarrow (x^2+6x+1) = 0$

$\Rightarrow x_3 = -0.17 \; ; \; x_4 = -5.83$

Factorizando por el Método de Recíprocas (Ver Ej 6.26)

Resolviendo luego por la Fórmula de 2do grado.

IX.5 SISTEMAS DE ECUACIONES

Se llama SISTEMA DE ECUACIONES al Conjunto de dos o mas Ecuaciones, donde lo que se busca es una SOLUCIÓN COMÚN DEL SISTEMA, que satisfaga a todas las Ecuaciones. Las Ecuaciones de un Sistema, pueden contener a varias Variables o Incógnitas.

IX.5.1 SISTEMAS LINEALES

Un Sistema de Ecuaciones Lineales, es un Conjunto de dos o más Ecuaciones Lineales. La Forma general de un Sistema de: *m* Ecuaciones con: *n* Incógnitas lineales es la siguiente:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + \dots + n_1 z &= k_1 \\ a_2 x + b_2 y + \dots + n_2 z &= k_2 \\ &\dots\dots \\ a_m x + b_m y + \dots + n_m z &= k_m \end{aligned}$$

Si el Número de Ecuaciones es igual al de Incógnitas, se dice que es un Sistema Compatible.

SISTEMAS CON DOS ECUACIONES

Analizando el caso particular de un Sistema de dos Ecuaciones con dos Incógnitas, se llegarán a conclusiones que luego pueden generalizarse a Sistemas con más Ecuaciones e Incógnitas.

La Forma General de un Sistema de dos Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas es la siguiente:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$$

Donde: x, y son las Incógnitas; a_1, b_1, a_2, b_2 son los Coeficientes del Sistema; c_1, c_2 son los Términos Independientes.

Para resolver estos Sistemas, existen diversos Métodos entre los principales se tiene los siguientes:

- MÉTODO DE SUSTITUCIÓN
- MÉTODO DE SUMAS Y RESTAS
- MÉTODO DE IGUALACIÓN
- MÉTODO DE DETERMINANTES

Se estudiaran cada uno de estos Métodos en los Sistemas de dos Ecuaciones, para luego generalizar a Sistemas con más Ecuaciones. Dentro del estudio del Álgebra Lineal, existen además otros Métodos, que permiten mayor celeridad en la resolución.

IX.5.2 POR SUSTITUCIÓN

Para resolver un Sistema de Ecuaciones por Sustitución: "*Se despeja una de las Incógnitas en una de las Ecuaciones, para reemplazar en la otra Ecuación, queda así una Ecuación con una sola Incógnita*"

Ej 9.10 Se resuelve un Sistema de de dos Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas, por Sustitución

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 11 \\ 9x + 3y = 48 \end{array}\right]$$

Llamando (E1) y (E2) a cada Ecuación del Sistema

$2x + y = 11 \quad$ (E1)

$9x + 3y = 48 \quad$ (E2)

En la Ecuación (E1), se despeja: y

De: (E1) $\Rightarrow \; y = 11 - 2x \quad (*)$

La Expresión de: y así obtenida se reemplaza en la Ecuación (E2). Queda así una Ecuación con una sola Incógnita (x)

En: (E2) $\Rightarrow \; 9x + 3(11 - 2x) = 48$

$9x + 33 - 6x = 48$

$3x = 15 \;\Rightarrow\; x = 5$

Resolviendo para: x se obtiene: $x = 5$

Reemplazando en la Ecuación: (*), que es la Ecuación donde se despejó y, se obtendrá el valor de: y

En: $(*) \Rightarrow y = 11 - 2\cdot 5 = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 1 \end{array}$

En el Método de Sustitución, se puede despejar cualquiera de las Incógnitas en cualquiera de las Ecuaciones. Sin embargo es conveniente elegir aquella Incógnita que permita un despeje mas rápido y cómodo. En el anterior Sistema, era más conveniente despejar: y en la Ecuación (E1)

9.8 Por el Método de Sustitución, resolver los siguientes Sistemas de Ecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 5y = 13 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (E1) \\ (E2) \end{array}$

De: (E1) $\Rightarrow \; x = \dfrac{5 - 3y}{2} \quad (*)$

En: (E2) $\Rightarrow \; 4\left(\dfrac{5 - 3y}{2}\right) + 5y = 13$

$\dfrac{4(5 - 3y) + 2(5y)}{2} = 13$

$-2y + 20 = 2(13)$

$\Rightarrow y = -3$

En: $(*) \;\Rightarrow\; x = \dfrac{5 - 3(-3)}{2} = 7$

$\Rightarrow x = 7 \; ; \; y = -3$

b) $\begin{array}{l} 3x + y = 7 \\ 6x + 2y = 9 \end{array}$

$3x + y = 7 \quad$ (E1)

$6x + 2y = 9 \quad$ (E2)

De: (E1) $\Rightarrow \; y = 7 - 3x \quad (*)$

En: (E2) $\Rightarrow \; 6x + 2(7 - 3x) = 9$

$6x + 14 - 6x = 9$

$-14 = 9 \quad ??$

Por el Método quedan eliminadas ambas Incógnitas, presentándose el absurdo: ($-14 = 9$). Por tanto no Existe Solución para el Sistema.

IX.5.3 POR IGUALACIÓN

Para resolver un Sistema de Ecuaciones por Igualación: "*Se despeja la misma Incógnita de todas las Ecuaciones, para luego igualar entre sí cada despeje, quedando así una Ecuación con una sola Incógnita*"

Ej 9.11 Se resuelve un Sistema de Ecuaciones por Igualación:

$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 14 \\ 5x - y = 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (E1) \\ (E2) \end{array}$

Dado un Sistema de dos Ecuaciones, dos Incógnitas

Llamando (E1); (E2) respectivamente a las Ecuaciones del Sistema

De: (E1) $\Rightarrow \; x = 14 - 3y \quad (*)$

De: (E2) $\Rightarrow \; x = \dfrac{6 + y}{5}$

Despejando la misma Incógnita: x de ambas Ecuaciones.

$\Rightarrow \; 14 - 3y = \dfrac{6+y}{7}$ Luego usando el principio de que dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.

$5(14 - 3y) = 6 + y$
$70 - 15y = 6 + y$ Igualando entre sí ambos despejes obtenidos, queda una Ecuación con una sola Incógnita (y)

$-15y - y = 6 - 70 \Rightarrow y = 4$ Resolviendo la Ecuación que queda (Es una Ecuación Lineal con una Incógnita), se obtiene: $y = 4$

En: $(*)$ $x = 14 - 3\cdot 4 = 2$

$\Rightarrow x = 2 \; ; \; y = 4$ Reemplazando en la Ecuación (*), se logra el valor de: x

9.9 Por el Método de Igualación, resolver los siguientes Sistemas de Ecuaciones:

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 29 \\ 4x + 5y &= 53 \end{aligned}\right]$ $\begin{matrix}(E1)\\(E2)\end{matrix}$

De: $(E1) \Rightarrow x = \dfrac{29 - 3y}{2}$ $(*)$

De: $(E2) \Rightarrow x = \dfrac{53 - 5y}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{29 - 3y}{2} = \dfrac{53 - 5y}{4}$

$4(29 - 3y) = 2(53 - 5y)$
$116 - 12y = 106 - 10y$
$-2y = -10 \Rightarrow y = 5$

En: $(*)$ $x = \dfrac{29 - 3\cdot 5}{2} = 7 \Rightarrow \begin{matrix} x = 7 \\ y = 5 \end{matrix}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x + y &= 7 \\ 6x + 2y &= 9 \end{aligned}\right]$ $\begin{matrix}(E1)\\(E2)\end{matrix}$

De: $(E1) \Rightarrow y = 7 - 3x$ $(*)$

De: $(E2) \Rightarrow y = \dfrac{9 - 6x}{2}$

$\Rightarrow 7 - 3x = \dfrac{9 - 6x}{2}$

$2(7 - 3x) = 9 - 6x$
$14 - 6x = 9 - 6x$
$14 = 9$??

$\Rightarrow$ No Existe Solución

Ver también el Problema P-9.8-b

IX.5.4 POR SUMAS Y RESTAS (O REDUCCIÓN)

Para resolver un Sistema de Ecuaciones por Sumas y Restas: "*Las Ecuaciones se multiplican por Números, que permitan luego que tras una Suma o Resta de Ecuaciones, se elimine alguna de las Incógnitas, quedando así una sola Ecuación con una Incógnita*"

Es preciso recordar que si se multiplica ambos miembros de una Igualdad por una misma cantidad (Diferente de cero), la Igualdad no cambia

Ej 9.12 Se resuelve un Sistema de Ecuaciones por el Método de Sumas y Restas:

$\left.\begin{aligned} x + 7y &= 22 \\ 2x + 5y &= 17 \end{aligned}\right]$ Dado un Sistema de dos Ecuaciones con dos Incógnitas.

$\begin{aligned} x + 7y &= 22 \quad (E1)\times 2 \\ 2x + 5y &= 17 \quad (E2)\times -1 \end{aligned}$

Para eliminar a la Incógnita: x conviene multiplicar la 1^{era} Ecuación (E1) por: 2 ; la 2da Ecuación (E2) por (-1)

De esa manera al sumar ambas Ecuaciones, queda una sola Ecuación con una sola Incógnita.

$$\begin{array}{r} 2x + 14y = 44 \\ + \; -2x - 5y = -17 \\ \hline 0 + 9y = 27 \\ \Rightarrow y = 3 \end{array}$$

Resolviendo para la Incógnita: y

Luego reemplazando en la 1^{era} Ecuación (E1) se obtendrá el valor de la otra Incógnita.

En: (E1) $x + 7\cdot 3 = 22 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow x = 1 \; ; \; y = 3$

Otra manera para eliminar la Incógnita: x es multiplicar la 1^{era} Ecuación (E1) por: 2; luego efectuar la resta entre ecuaciones.

En este Método es conveniente analizar a las incógnitas, buscando a aquella que es más fácil de eliminar.

9.10 Por el Método de Sumas y Restas, resolver los Sistemas de Ecuaciones:

a) $\left.\begin{aligned} 7x + 5y &= 43 \\ 3x + 2y &= 18 \end{aligned}\right]$

$7x + 5y = 43 \quad E1 \times 3$

$3x + 2y = 18 \quad E2 \times -7$

$$\begin{array}{r} 21x + 15y = 129 \\ + \; -21x - 14y = -126 \\ \hline 0 + y = 3 \Rightarrow y = 3 \end{array}$$

En: (E1) $7x + 5 \cdot 3 = 43$

$\Rightarrow x = 4$

$\Rightarrow x = 4 \; ; \; y = 3$

b) $\left.\begin{aligned} 3x + y &= 7 \\ 6x + 2y &= 9 \end{aligned}\right]$

$3x + y = 7 \quad E1 \times (-2)$

$6x + 2y = 9 \quad E2$

$$\begin{array}{r} -6x - 2y = -14 \\ + \; 6x + 2y = 9 \\ \hline 0 = 5 \end{array}$$

?? No Existe Solución

Aplicando el Método, quedan eliminadas ambas Incógnitas, por tanto No Existe Solución. (Ver P-9.8-b; P-9.9-b)

Si se aplica otro método, la conclusión sería la misma, es decir no existe solución.

El Método de Sumas y Restas, permite eliminar rápidamente a una de las Incógnitas del Sistema. Sin embargo las Operaciones realizadas en este Método, deben ser efectuadas en forma inmediata, es decir por simple inspección.

IX.5.5 DETERMINANTES

Se llama Determinante a un arreglo de cantidades, llamadas *Elementos*, en Filas y Columnas. Un Determinante de Orden: 2 posee la siguiente Forma General:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

- Donde: a_1, b_1 son los Elementos de la 1era Fila; a_2, b_2 son los Elementos de la 2da Fila
- a_1, a_2 son los Elementos de la 1era Columna; b_1, b_2 son los Elementos de la 2da Columna.
- a_1, b_2 son los Elementos de la Diagonal principal; b_1, a_2 son los de la Diagonal secundaria.

El valor de un Determinante es el Producto de los Elementos de la Diagonal principal, menos el producto de los elementos de la Diagonal secundaria:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Ej 9.13 Se halla el valor de un Determinante de orden: 2

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 7$$

Aplicando la regla.

Entre el producto de los Elementos de la Diagonal principal y el producto de la Diagonal secundaria, se efectúa la resta.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 9 \cdot 2 = 0$$

El valor del determinante que se obtiene puede ser positivo, cero o negativo.

El DETERMINANTE DE UN SISTEMA, es el Determinante que se obtiene con los Coeficientes de las Incógnitas de un Sistema, plenamente ordenado.

Ej 9.14 Se halla el Determinante de un Sistema de dos Ecuaciones con dos Incógnitas.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 7y &= 13 \\ 5x + 3y &= 18 \end{aligned}\right| \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

El Determinante de este Sistema está conformado por los Coeficientes de las Incógnitas.

El Valor del determinante será: $2 \cdot 3 - 5 \cdot 7 = -29$

Si el Determinante de un Sistema es cero ($\Delta = 0$), entonces el Sistema no posee una Solución única. Es decir que caben otras dos posibilidades:

1) Que existan infinitas soluciones
2) Que simplemente no exista solución.

IX.5.6 RESOLUCIÓN POR DETERMINANTES

Para resolver un Sistema de Ecuaciones por Determinantes, se aplica la Regla de Cramer: *"Una Incógnita se calcula como el cociente de dos Determinantes. En el Numerador está un Determinante donde partiendo del Determinante del Sistema, su Columna de Coeficientes de la Incógnita, se reemplaza por los Términos Independientes. En el Denominador se toma el Determinante del Sistema"*

Ej 9.15 Se resuelve un Sistema de dos Ecuaciones con dos Incógnitas por Determinantes:

$$\begin{array}{l} 2x + 7y = 13 \\ 5x + 3y = 18 \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 18 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{13 \cdot 3 - 7 \cdot 18}{2 \cdot 3 - 5 \cdot 7} = \frac{-87}{-29} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 18 - 5 \cdot 13}{2 \cdot 3 - 5 \cdot 7} = \frac{-29}{-29} = 1$$

$$\Rightarrow x = 3 \ ; \ y = 1$$

Para calcular: x se tiene un Cociente de Determinantes.

En el Numerador, partiendo del Determinante del Sistema, se ha reemplazado la Columna de los Coeficientes de x: $\begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix}$ por $\begin{matrix} 13 \\ 18 \end{matrix}$ que es la columna de los Términos Independientes.

En el Denominador, se tiene el Determinante del Sistema.

Calculando Determinantes y dividiendo resultados queda calculado: x

Se procede de similar modo para calcular: y

9.11 Por Determinantes, resolver los siguientes Sistemas de Ecuaciones:

a) $\begin{array}{l} 5x - 4y = 18 \\ 2x + 3y = 21 \end{array}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 18 & -4 \\ 21 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{54 + 84}{15 + 8} = \frac{138}{23} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 18 \\ 2 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{105 - 36}{15 + 8} = \frac{69}{23} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = 6 \\ y = 3 \end{array}$$

b) $\begin{array}{l} 3x + 4y = 11 \\ 6x + 8y = 22 \end{array}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 22 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0} = ?$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 6 & 22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0} = ?$$

La 2da Ecuación presenta la Operación de: 0/0 (Indeterminación); esta operación no posee un resultado directo. Por tanto se trata de un Sistema que no posee una Solución única.

- Puede tratarse de un Sistema, que posee una sola Ecuación con dos incógnitas. Se muestra como una Ecuación y un múltiplo de ella. (Geométricamente se representan como una sola Recta), en este caso existirán infinitas soluciones.

  En el anterior inciso b). Multiplicando por: 2 la 1era Ecuación se obtiene la 2da.

> Para aplicar el Método de Determinantes, necesariamente el Sistema debe estar correctamente ordenado, es decir las columnas de incógnitas deben corresponderse.

SISTEMAS CON TRES ECUACIONES

Los Sistemas de tres Ecuaciones Lineales con tres Incógnitas, poseen la siguiente Forma General:

$$\boxed{\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}}$$

Para resolver estos Sistemas se aplican los mismos Métodos de los Sistemas de dos Ecuaciones con dos Incógnitas.

Es particularmente útil el Método de Sumas y Restas o Reducción, que permite eliminar Incógnitas. Pero en la práctica, el Método más usado es el de Determinantes.

Todas las consideraciones y Reglas Prácticas de los Sistemas con dos Ecuaciones, se generalizan a Sistemas con mas Ecuaciones.

Ej 9.16 Se resuelve por Sumas y Restas un Sistema de tres Ecuaciones con tres Incógnitas Lineales:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 7 \\ 3x + y + z &= 10 \\ 2x + 4y + 3z &= 19 \end{aligned}\right] \qquad \begin{aligned} x + 2y - z &= 7 & (E1) \\ 3x + y + z &= 10 & (E2) \\ 2x + 4y + 3z &= 19 & (E3) \end{aligned}$$

Se aplica el Método de Sumas y Restas. (Llamado también de Reducción) Llamando: E1; E2; E3 respectivamente a cada Ecuación.

$$\begin{array}{rl} x + 2y - z = 7 & (E1) \\ + \; 3x + y + z = 10 & (E2) \\ \hline 4x + 3y \quad = 17 & \end{array}$$

Sumando directamente las Ecuaciones: E1; E2; queda una Ecuación, de la que se ha eliminado la Incógnita: z

$$\begin{array}{rl} -9x - 3y - 3z = -30 & (E2 \times -3) \\ + \; 2x + 4y + 3z = 19 & (E3) \\ \hline -7x + y \quad = -11 & \end{array}$$

Luego multiplicando por -3 la Ecuación E2 y sumando con E3, nuevamente queda otra Ecuación donde se ha eliminado a la misma Incógnita z.

$$\Rightarrow \begin{aligned} 4x + 3y &= 17 & (E4) \\ -7x + y &= -11 & (E5) \end{aligned}$$

Con las Ecuaciones resultantes de las Sumas, se conforma un nuevo Sistema de dos Ecuaciones con dos Incógnitas, que respectivamente se llamarán: E4; E5

$$\begin{array}{rl} 4x + 3y = 17 & (E4) \\ + \; -21x - 3y = 33 & (E5 \times -3) \\ \hline -25x \quad = 50 & \Rightarrow x = 2 \end{array}$$

Sumando E4 al Producto de E5 por: -3; queda eliminada la Incógnita: y

Despejando: x

En: E5 $\quad -7 \cdot 2 + y = -11 \Rightarrow y = 3$

En: E2 $\quad 3 \cdot 2 + 3 + z = 10 \Rightarrow z = 1$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Reemplazando luego el valor conocido de: x en E5, se calcula y.

Finalmente reemplazando en E2, se calcula el valor de: z

En el Método de Determinantes, es necesario aplicar la Regla de Sarrus, para el desarrollo de un Determinante de tres por tres:

Esta Regla establece que: *"Agregando como 4ta y 5ta Fila las mismas 1era y 2da Fila, el Determinante es igual a la Suma de los Productos de las Diagonales Principales restada por la Suma de los Productos de las Diagonales Secundarias"*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{aligned} &[aei + dhc + gbf] \\ -&[gec + ahf + dbi] \end{aligned}$$

Ej 9.17 Se calcula un Determinante de tres por tres:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &[2\cdot7\cdot9 + 5\cdot8\cdot1 + 4\cdot3\cdot2] \\ -&[4\cdot7\cdot1 + 2\cdot8\cdot2 + 5\cdot3\cdot9] \\ &[190] - [195] = -5 \end{aligned}$$

Ej 9.18 Se resuelve un Sistema de tres por tres por Determinantes:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 13 \\ x + 6y - 2z &= 1 \\ 4x - 2y + 5z &= 30 \end{aligned}\right]$$

Dado un Sistema de tres Ecuaciones con tres Incógnitas.

La Incógnita: x es el Cociente de dos Determinantes.

Por la Regla de Cramer antes mencionada: En el Numerador, partiendo del determinante del Sistema, se reemplaza la Fila de los coeficientes de: x por los Términos Independientes.

En el denominador está el Determinante del Sistema. Calculando Determinantes y dividiendo se logra el valor de x.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 30 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-39}{-13} = 3$$

Se procede de modo equivalente para calcular la otra incógnita: y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 30 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-13}{-13} = 1$$

Sin embargo para calcular la última Incógnita: z es más rápido reemplazar los resultados obtenidos en: x, y en la 1^{era} Ecuación del Sistema.

En: E1 $\quad 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + z = 13$
$\Rightarrow \quad z = 4$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

Para verificar que el resultado es correcto, en cualquiera de las Ecuaciones del sistema se reemplazan los valores obtenidos.

Si los resultados son correctos, tras reemplazar se debe obtener una Identidad.

Si el Determinante del Sistema es cero (En el denominador), se asume que el Sistema no posee una Solución única. Las opciones que si posee son de que tenga infinitas soluciones o de que no exista ninguna Solución.

9.12 Resolver los siguientes Sistemas de Ecuaciones:

a) $$\left.\begin{aligned} 5x + 2y + 4z &= 26 \\ 4x - 7y + 8z &= 38 \\ 3x + 6y + 9z &= 6 \end{aligned}\right]$$

$$\begin{aligned} 5x + 2y + 4z &= 26 \quad (E1) \\ 4x - 7y + 8z &= 38 \quad (E2) \\ 3x + 6y + 9z &= 6 \quad (E3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -10x - 4y - 8z &= -52 \quad (E1 \times -2) \\ + \quad 4x - 7y + 8z &= 38 \quad (E2) \\ \hline -6x - 11y \quad &= -17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 36x - 63y + 72z &= 342 \quad (E2 \times 9) \\ + \quad -24x - 48y - 72z &= -48 \quad (E3 \times -8) \\ \hline 12x - 111y \quad &= 294 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -6x - 11y &= -14 \quad (E4) \\ 12x - 111y &= 294 \quad (E5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -12x - 22y &= -28 \quad (E4 \times 2) \\ + \quad 12x - 111y &= 294 \quad (E5) \\ \hline -133y &= 266 \Rightarrow y = -2 \end{aligned}$$

En: (E5) $\quad 12x - 111(-2) = 294 \quad \Rightarrow x = 6$
En: (E1) $\quad 5\cdot 6 + 2(-2) + 4z = 26 \quad \Rightarrow z = 0$
$\Rightarrow \; x = 6 \;;\; y = -2 \;;\; z = 0$

b) $$\left.\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 15 \\ 5x - 4y - 2z &= 10 \\ 3x - 5y + 7z &= 9 \end{aligned}\right]$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 3 & 5 \\ 10 & -4 & -2 \\ 9 & -5 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -4 & -2 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-904}{-226} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 & 5 \\ 5 & 10 & -2 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & -4 & -2 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-452}{-226} = 2$$

En: (E1) $\quad x + 3y + 5z = 15$
$\quad 4 + 3\cdot 2 + 5z = 15 \Rightarrow z = 1$
$\Rightarrow \; x = 4 \;;\; y = 2 \;;\; z = 1$

Resolviendo por los Métodos de Sumas y Restas y Determinantes. Se aprecia como más práctico el de Determinantes.

c) $\left.\begin{matrix} x+4y+2z=9 \\ 3x+2y+z=7 \\ 4x+6y+3z=8 \end{matrix}\right]$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0} = ??$$

Resolviendo el Sistema se registra : 0/0 (Indeterminación)

Esto lleva a la conclusión de que alguna Ecuación se reitera en el Sistema. (O que alguna Ecuación se obtiene a partir de las otras dos). Entonces el Sistema no contendría precisamente a tres Ecuaciones.

Por tanto al existir mas Incógnitas (3) que Ecuaciones (2); el Sistema posee infinitas Soluciones.

Esas Soluciones se obtienen, dando un valor para una Incógnita y resolviendo el Sistema que queda. (De dos Ecuaciones con dos Incógnitas Ver SISTEMAS INDETERMINADOS en IX.7)

IX.5.6 SISTEMAS DE GRADO SUPERIOR

Los Sistemas de Ecuaciones de grado Superior, son Conjuntos de Ecuaciones, que contienen a Incógnitas de grado Superior.

Para resolver estos Sistemas, se pueden aplicar los mismos Métodos de los Sistemas de las Ecuaciones Lineales (Excepto el Método de Determinantes).

Ej 9.19 Se resuelve un Sistema de Ecuaciones de grado Superior, propiamente con dos Incógnitas, de grado dos. $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=13 \\ 2x-y=4 \end{matrix}\right]$

$x^2+y^2=13$ (E1) $\quad 2x-y=4$ (E2) — Sistema de Ecuaciones, Llamando E1, E2 a las Ecuaciones. Aplicando el MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

De: (E2) $\Rightarrow y = 2x-4 \quad (*)$ — De la Ecuación: (E2), se despeja la Incógnita: y

En: (E1) $\Rightarrow x^2+(2x-4)^2 = 13$

$$x^2+4x^2-16x+16 = 13$$
$$5x^2-16x+3 = 0$$
$$(x-3)(5x-1) = 0$$

El despeje de: y; se reemplaza luego en la Ecuación: E1. Desarrollando el Cuadrado de Diferencia y simplificando, se obtiene una Ecuación Cuadrática de una variable. Resolviendo ésta por Factorización.

$x-3=0 \Rightarrow x_1 = 3 \; ; \; 5x-1=0 \Rightarrow x_2 = 1/5$

En: $(*) \Rightarrow y = 2\cdot3-4 = 2$

En: $(*) \Rightarrow y = 2\cdot1/5-4 = -18/5$

$\Rightarrow (x_1,y_1) = (3,2)$; $(x_2,y_2) = (1/5,-18/5)$

Los resultados, se reemplazan en (*); para obtener valores de: y. Existen dos pares de Soluciones.

9.13 Resolver los siguientes Sistemas de Ecuaciones de grado Superior:

a) $\left.\begin{matrix} x^2+xy=12 \\ y^2+xy=4 \end{matrix}\right]$ $\begin{matrix} (E1) \\ (E2) \end{matrix}$

De: (E1) $\Rightarrow y = \dfrac{12-x^2}{x} \quad (*)$

En: (E2) $\left(\dfrac{12-x^2}{x}\right)^2 + x\,\dfrac{12-x^2}{x} = 4$

$$\frac{(12-x^2)^2 + x^2(12-x^2)}{x^2} = 4 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$12(12-x^2) = 4x^2 \Rightarrow x = \pm 3$$

En: $(*) \quad y = \dfrac{12-3^2}{3} = 1 \quad y = \dfrac{12-(-3)^2}{-3} = -1$

Resolviendo por sustitución. Despejando y de la 1era Ecuación.

Reemplazando luego en la 2da Ecuación, se logran los dos resultados: (3,1); (-3,-1)

Sin embargo este sistema admite otras interesantes formas de solución: Por ejemplo sumando y luego restando entre sí a las ecuaciones.

Entre todas las opciones de solución es conveniente emplear la que ofrece el camino más simple.

b) $\left.\begin{array}{l} x^3 + y^3 = 9 \\ x^3 - y^3 = 7 \end{array}\right]$

$$\begin{array}{rl} & x^3 + y^3 = 9 \quad (E1) \\ + & x^3 - y^3 = 7 \quad (E2) \\ \hline & 2x^3 + 0 = 16 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad 2x^3 - 16 = 0$

$2(x-2)(x^2+2x+4) = 0$

$(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$

En: (E1) $2^3 + y^3 = 9$

$\Rightarrow y^3 - 1 = 0$

$(y-1)(y^2+y+1) = 0$

$\Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow (x,y) = (2,1)$

c) $\left.\begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x - y = 1 \end{array}\right]$

$x^2 + xy + y^2 = 37 \quad (E1)$

$x - y = 1 \quad (E2)$

De: (E2) $\Rightarrow$

$y = x - 1 \quad (*)$

$x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 = 37$

$x^2 - x - 12 = 0$

$(x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 4 \; ; \; x_2 = -3$

En: $(*)$ $y = 4 - 1 = 3$

En: $(*)$ $y = -3 - 1 = -4$

$(x_1,y_1) = (4,3)$;

$(x_2,y_2) = (-3,-4)$

d) $\left.\begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 84 \\ x - \sqrt{xy} + y = 6 \end{array}\right]$

$x^2 + 2xy + y^2 = 84 + xy$

$(x+y)^2 = 84 + xy \quad (E1)$

$x + y = 6 + \sqrt{xy} \quad (E2)$

$(x+y)^2 = (6 + \sqrt{xy})^2$

$84 + xy = 6^2 + 12\sqrt{xy} + xy$

$\sqrt{xy} = \dfrac{84 - 6^2}{12} = 4$

$\Rightarrow xy = 16$

(E2) $x + y = 6 + \sqrt{16}$.

$\Rightarrow y = 10 - x \Rightarrow$

$x(10-x) = 16 \Rightarrow$

$x^2 - 10x + 16 = 0$

$x_1 = 2 \; ; \; x_2 = 8 \Rightarrow$

$(x_1,y_1) = (2,8) \; ; \; (x_2,y_2) = (8,2)$

IX.6 ECUACIONES CON RADICALES

Se llaman Ecuaciones con Radicales, a aquellas que contienen a su Incógnita, dentro de un Radical. Para resolver una Ecuación con Radicales, se aplica la siguiente Regla: *"Se separa en uno de los miembros de la Ecuación a la Expresión con Radicales, para luego elevar ambos miembros de la Igualdad a una Potencia que elimine al Radical"*

Sin embargo en las Ecuaciones con Radicales, siempre se deben verificar resultados, ya que al elevar a Potencias, se introduce ciertas Soluciones, llamadas *Soluciones Extrañas*, que no satisfacen a la Ecuación, por tanto no son Soluciones de la Ecuación.

Ej 9.20 Se resuelven Ecuaciones con Radicales:

a) $\sqrt{x-3} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x-3} = 2$

$(\sqrt{x-3})^2 = (2)^2$

$x - 3 = 4$

$\Rightarrow x = 7$

Si: $x = 7 \Rightarrow \sqrt{7-3} - 2 = 0 \Rightarrow 2 - 2 = 0$

Ordenando de manera que quede en el 1^er miembro de la Igualdad, solo la Expresión con Radicales.

Elevando al Cuadrado ambos miembros de la Igualdad. El Cuadrado elimina la Raíz, despejando: x

Verificando el resultado, Reemplazando en la Ecuación original la Solución obtenida, determina una Identidad, entonces la Solución es válida.

b) $\sqrt[3]{x+1} - 2 = 0$

$\sqrt[3]{x+1} = 2$

$(\sqrt[3]{x+1})^3 = 2^3$

$x + 1 = 8 \Rightarrow x = 7$

Si: $x = 7 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{7+1} - 2 = 0$

$2 - 2 = 0$

En el caso se tiene una Raiz cúbica, por tanto se debe elevar ambos miembros al cubo.

Previamente se separa el Radical.

Resolviendo finalmente se obtiene: $x = 7$

Verificando el resultado por reemplazo, se verifica que la Solución es válida.

Ej 9.21 Se resuelve una Ecuación que contiene dos Radicales:

a) $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1$

Separando en un miembro de la Ecuación a un solo Radical.

$\sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{x-1}$

Elevando al Cuadrado

$(\sqrt{x+4})^2 = (1+\sqrt{x-1})^2$

En el 1[er] miembro queda eliminado el Radical, en el 2[do] se desarrolla por el Cuadrado de una Suma.

$x+4 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{x-1} + (\sqrt{x-1})^2$

Simplificando y ordenando para que quede solo un Radical en un miembro.

$x+4 = 1 + 2\sqrt{x-1} + x - 1$

$\sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 = 2^2$

Volviendo a elevar al Cuadrado. Resolviendo la Ecuación que queda

$x-1 = 4 \Rightarrow x = 5$

$\text{Si: } x = 5 \Rightarrow \sqrt{5+4} - \sqrt{5-1} = 1$

$3 - 2 = 1$

Verificando el resultado, se aprecia que éste si es válido.

Si la Ecuación contiene varios Radicales, será necesario, elevar a una Potencia varias veces, hasta eliminar todos los Radicales.

9.14 Resolver las siguientes Ecuaciones con Radicales:

a) $x - \sqrt{x-3} - 5 = 0$

$x - \sqrt{x-3} - 5 = 0$

$\sqrt{x-3} = x-5$

$(\sqrt{x-3})^2 = (x-5)^2$

$x - 3 = x^2 - 10x + 25$

$x^2 - 11x + 28 = 0$

$(x-7)(x-4) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 7 \ ; \ x_2 = 4$

$\text{Si: } x = 7 \Rightarrow 7 - \sqrt{7-3} = 5$

$5 = 5$ Válido

$\text{Si: } x = 4 \Rightarrow 4 - \sqrt{4-3} = 5$

$3 = 5$ No válido

b) $\sqrt{2x+7} - \sqrt{x-5} = \sqrt{x}$

$\sqrt{2x+7} - \sqrt{x-5} = \sqrt{x}$

$\sqrt{2x+7} = \sqrt{x-5} + \sqrt{x}$

$(\sqrt{2x+7})^2 = (\sqrt{x-5} + \sqrt{x})^2$

$2x + 7 = x - 5 + 2\sqrt{x-5}\sqrt{x} + x$

$\sqrt{(x-5)x} = 6$

$(\sqrt{(x-5)x})^2 = 6^2 \Rightarrow (x-5)x = 36$

$x^2 - 5x - 36 = 0$

$(x-9)(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 9 \ ; \ x_2 = -4$

$\text{Si: } x = 9 \Rightarrow \sqrt{2\cdot 9+7} - \sqrt{9-5} = \sqrt{9}$

$5 - 2 = 3$ Válido

$\text{Si: } x = -4 \Rightarrow \sqrt{2(-4)+7} - \sqrt{-4-5} = \sqrt{-4}$

$\sqrt{-1} - \sqrt{-9} = \sqrt{-4}$ No válido

En b) la Segunda Solución no es válida, ya que introduce Raíces Cuadradas de Negativos.

9.15 Resolver las siguientes Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x-2}} = 2 \qquad \dfrac{1}{\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{x-2}} = \dfrac{1}{\dfrac{1(x-2) - 1\cdot 1}{1(x-2)}} = \dfrac{1/1}{\dfrac{x-3}{x-2}} = \dfrac{x-2}{x-3} = 2$

$\Rightarrow x - 2 = 2(x-3) \Rightarrow x = 4$

Se efectúan operaciones entre Fracciones algebraicas.

b) $\dfrac{6}{x} + \dfrac{x}{2} = 4 \qquad \dfrac{6}{x} + \dfrac{x}{2} = 4 \Rightarrow \dfrac{12 + x^2}{2x} = 4 \qquad (x-2)(x-6) = 0$

$12 + x^2 = 8x \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = 6$

Se hace la suma logrando así una Ecuación cuadrática.

c) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 6$

$$\begin{array}{ll} \text{Si: } x = u^4 & \text{Si } u = 2 \Rightarrow x = u^4 = 2^4 = 16 \\ \sqrt[4]{u^4} + \sqrt{u^4} = 6 & \sqrt[4]{16} + \sqrt{16} = 6 \\ u + u^2 = 6 & 2 + 4 = 6 \ \text{Válido} \\ u^2 + u - 6 = 0 & \text{Si } u = -3 \Rightarrow x = u^4 = (-3)^4 = 81 \\ (u+3)(u-2) = 0 & \sqrt[4]{81} + \sqrt{81} = 6 \\ u = -3 \ ; \ u = 2 & 3 + 9 = 6 \ \text{No Válido} \end{array}$$

Previamente se hace un Cambio de variable, así el Sistema presenta la forma de Ecuación cuadrática.

Resolviendo por factorización

Luego de obtener resultados para u, se calcula x, se verifica si satisfacen a la Ecuación inicial. Así solo es válida la solución $x = 16$.

d) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 2$

$\dfrac{8}{x} - \dfrac{6}{y} = 2$

$$\text{Si: } u = \frac{1}{x} \ ; \ v = \frac{1}{y} \Rightarrow \begin{array}{ll} 2u + 3v = 2 & (E1) \\ 8u - 6v = 2 & (E2) \end{array}$$

$$\text{De: (E1)} \Rightarrow u = \frac{2 - 3v}{2} \quad (*) \qquad \text{En: (E2)} \ 8\left(\frac{2 - 3v}{2}\right) - 6v = 2$$

$$4(2 - 3v) - 6v = 2$$
$$8 - 12v - 6v = 2$$
$$-18v = -6 \Rightarrow v = 1/3$$

$$\text{En: } (*) \ u = \frac{2 - 3v}{2} = \frac{2 - 3(1/3)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{u} = \frac{1}{1/2} = 2 \ ; \ y = \frac{1}{v} = \frac{1}{1/3} = 3 \Rightarrow (x,y) = (2,3)$$

Se efectúan Cambios de variable, así se presenta la forma de un Sistema Lineal.

Resolviendo por el Método de Sustitución.

Luego de obtener resultados para v, se reemplaza en (*) para obtener u.

Según los cambios se obtienen los valores de x, y

e) $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x^2 - 4x - 1}$

$\text{Si: } u = x^2 - 4x \Rightarrow u - 3 = \sqrt{u - 1}$

$$\begin{array}{lll} (u-3)^2 = u - 1 & \text{En: } u - 3 = \sqrt{u-1} & u = 5 \\ u^2 - 6u + 9 = u - 1 & \text{Verificando:} & x^2 - 4x = 5 \\ u^2 - 7u + 10 = 0 & u = 5 \Rightarrow 5 - 3 = \sqrt{5-1} & x^2 - 4x - 5 = 0 \\ (u-5)(u-2) = 0 & \qquad 2 = 2 \ \text{Válido} & (x-5)(x+1) = 0 \\ \Rightarrow u = 5 \ ; \ u = 2 & u = 2 \Rightarrow 2 - 3 = \sqrt{2-1} & \Rightarrow x = 5 \ ; \ x = -1 \\ & \qquad -1 = \sqrt{-1} \ \text{No Válido} & \end{array}$$

Cambio de variable sobre la misma expresión de ambos miembros.

Resolviendo para u. Los resultados de u, se verifican, siendo válido solo uno de ellos.

Reemplazando en el cambio de variable.

f) $\sqrt{x^2 + 3x - 4} - \sqrt{x^2 + 3x - 24} = 2$

Los Radicales son parecidos, eso permite usar el artificio de expresar como un cociente, según la siguiente regla que proviene de la Diferencia de cuadrados:

$$\text{Si: } (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$\sqrt{x^2 + 3x - 4} - \sqrt{x^2 + 3x - 24} = 2$$

$$\frac{(x^2 + 3x - 4) - (x^2 + 3x - 24)}{\sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^2 + 3x - 24}} = 2$$

$$\frac{20}{\sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^2 + 3x - 24}} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^2 + 3x - 24} = 10$$

Reemplazando los Radicales en la regla indicada y simplificando queda una suma de Radicales.

Sumando la ecuación inicial con la obtenida:

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{x^2 + 3x - 4} - \sqrt{x^2 + 3x - 24} = 2 \\ + & \sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^2 + 3x - 24} = 10 \\ \hline & 2\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 12 \end{array}$$

Finalmente simplificando y resolviendo la ecuación que queda con un solo Radical (Elevando al cuadrado)

$$\sqrt{x^2+3x-4} = 6 \Rightarrow x^2+3x-4 = 36 \Rightarrow x^2+3x-40 = 0 \Rightarrow x = -8$$
$$(x+8)(x-5) = 0 \qquad x = 5$$

g) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y}+5\sqrt{x-y} = 8\\ 3\sqrt{x+y}+2\sqrt{x-y} = 11\end{array}\right]$ Si: $u = \sqrt{x+y}$, $v = \sqrt{x-y}$

Se efectúan Cambios de variable, así el Sistema presenta la forma de un Sistema Lineal.

$u+5v = 8$ (E1) De: (E1) $\Rightarrow$ En: (E2) $3(8-5v)+2v = 11$

$3u+2v = 11$ (E2) $u = 8-5v$ $(*)$ $24-15v+2v = 11$

$-13v = -13 \Rightarrow v = 1$

Resolviendo por Sustitución.

En: $(*) \Rightarrow u = 8-5v = 8-5(1) = 3$

$$3 = \sqrt{x+y} \Rightarrow x+y = 9$$
$$1 = \sqrt{x-y} \Rightarrow x-y = 1$$
$$\begin{array}{r} x+y = 9\\ x-y = 1\\ \hline 2x = 10\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 5\\ y = 9-x\\ y = 4\end{array}$$

Los resultados para u, v; se reemplaza en los cambios de variable efectuados, así se logra otro Sistema Lineal.

Resolviendo: $x = 5$, $y = 4$

h) $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}+\sqrt[3]{y} = 5\\ 7\sqrt{x}-2\sqrt[3]{y} = 17\end{array}\right]$ Si: $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt[3]{y}$

Los Cambios de variable, hacen que el Sistema presenta la forma Lineal.

$u+v = 5$ (E1) De: (E1) $\Rightarrow$ En: (E2) $7(5-v)-2v = 17$

$7u-2v = 17$ (E2) $u = 5-v$ $(*)$ $-9v+35 = 17 \Rightarrow v = 2$

Resolviendo por Sustitución. Despejando u de la 1^{era} para reemplazar en la 2da.

En: $(*) \Rightarrow$

$u = 5-v$ $\qquad u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 = 3^2 = 9$

$u = 5-2 = 3$ $\qquad v = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = v^3 = 2^3 = 8$

j) $\left.\begin{array}{l}x^2y+xy^2 = 12\\ x+y = 4\end{array}\right]$

$$\Rightarrow xy(x+y) = 12 \qquad \Rightarrow x+\frac{3}{x} = 4 \qquad \text{Si: } x = 1 \Rightarrow y = 3$$
$$xy(4) = 12 \qquad x^2-4x+3 = 0 \qquad \text{Si: } x = 3 \Rightarrow y = 1$$
$$y = \frac{3}{x} \qquad (x-1)(x-3) = 0 \qquad \Rightarrow (1,3)\ ;\ (3,1)$$

Factorizando y reemplazando la 2da Ecuación

Resolviendo para x.

ECUACIONES LITERALES Son aquellas Ecuaciones que presentan letras como coeficentes o términos independientes de una Ecuación, se resuelven usando los mismos procedimientos que las Ecuaciones usuales, pero el resultado se expresa en términos de esas letras.

Ej 9.22 Se resuelven algunas Ecuaciones Literales

a) $ax+b = c \Rightarrow x = \dfrac{c-b}{a}$ b) $ax^2+bx+c = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

c) $\dfrac{x+a}{x+b} = c$

$$x+a = c(x+b)$$
$$x+a = cx+cb$$
$$x-cx = cb-a$$
$$x(1-c) = cb-a$$
$$\Rightarrow x = \frac{cb-a}{1-c}$$

d) $\dfrac{x+a}{x+b} = \dfrac{x+c}{x+d}$

$$(x+a)(x+d) = (x+c)(x+b)$$
$$x^2+(a+d)x+ad = x^2+(c+b)x+cb$$
$$(a+d)x-(c+b)x = cb-ad$$
$$x(a+d-c-b) = cb-ad$$
$$\Rightarrow x = \frac{cb-ad}{a+d-c-b}$$

IX.7 APLICACIONES DE ECUACIONES

Las Ecuaciones se aplican en todos los campos de la actividad humana.

Para lograr que una Ecuación tenga aplicación, es muy conveniente ordenar los datos, de manera tal que permitan expresar en forma de Ecuación a una situación práctica que se presente en la vida real.

Se llama Modelo Matemático a la Expresión Algebraica que represente a una situación real.

Ej 9.23 *La Suma de edades de un hijo y su padre es 72 años, si el padre posee el doble de la edad de su hijo, hallar las edades.*

$$x + 2x = 72$$
$$3x = 72$$
$$\Rightarrow x = 24$$

Si: x Es la edad del hijo; $2x$ Es la edad del padre $\Rightarrow x + 2x = 72$ Suma de las edades. Resolviendo se obtiene que la edad del hijo es de 24, entonces la del padre deberá ser de 48.

9.16 Resolver los siguientes problemas de Aplicaciones de Ecuaciones:

a) *Hallar las edades de Antonio y Bruno, si Bruno es mayor con tres años que Antonio, y la suma de sus edades es 21*

Si: x: Edad de Antonio; $x + 3$: Edad de Bruno; $\Rightarrow x + (x + 3) = 21$

$$x + (x + 3) = 21$$
$$2x = 18 \Rightarrow x = 9$$

Resolviendo la Edad de Antonio es: $x = 9$; por tanto de acuerdo a esto, la edad de Bruno será: $9 + 3 = 12$

b) *Hallar las edades de los niños: A y B, sabiendo que B es mayor con 2 años que A, el producto de sus edades es 63*

$$x(x + 2) = 63$$
$$x^2 + 2x - 63 = 0$$
$$(x + 9)(x - 7) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = -9 \quad ; \quad x_2 = 7$$

Si: x: Edad de A $\quad x + 2$: Edad de B $\quad \Rightarrow x(x + 2) = 63$

Resolviendo la Ecuación de Segundo grado. Solo se considera la solución de: $x = 7$ (Una edad no puede ser Negativa)

El niño: A tiene $x = 7$ años, B tiene $x + 2 = 9$ años.

c) *La suma de tres números enteros consecutivos es 24, calcularlos*

x $\quad$ 1er número
$x + 1$ $\quad$ 2do número
$x + 2$ $\quad$ 3er número

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 24$$
$$3x + 3 = 24$$
$$\Rightarrow x = 7$$

Por tanto los tres números consecutivos son: 7, 8, 9

d) *Hallar dos Números, si su Suma es de: 29 y su Resta es de: 7*

Si: x: Es uno de los Números $\Rightarrow x + y = 29$ Es la Suma de Números
Si: y: Es es otro Número $\quad x - y = 7$ Es la Resta de Números

$$\begin{array}{rl} & x + y = 29 \\ + & x - y = 7 \\ \hline & 2x = 36 \Rightarrow x = 18 \Rightarrow y = 11 \end{array}$$

Resolviendo el Sistema de Ecuaciones obtenido por el Método de Sumas y restas. Un Número es 18, el otro Número es 11

e) *Hallar el Número de gallinas y vacas que se encuentran en una granja, sabiendo que el total de cabezas es 23 y el total de patas es 62.*

Si: x: Nº de gallinas $\Rightarrow 2x$: Nº de patas de gallinas
y: Nº de vacas $\Rightarrow 4y$: Nº de patas de vacas

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} x + y = 23 & (E1) \\ 2x + 4y = 62 & (E2) \end{array}$$

De: (E1) $\quad y = 23 - x$
En: (E2) $\quad 2x + 4(23 - x) = 62 \Rightarrow -2x + 92 = 62 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow y = 8$

Resolviendo el Sistema por el Método de Sustitución.

Entonces el Nº de gallinas es de: $x = 15$ y el de vacas es de: $y = 8$

f) *Hallar dos Números, si su Suma es* 11 *y su Producto es* 28

Si: x, y : Son los Números $\Rightarrow x + y = 11\ ;\ xy = 28\ ;$ Es la Suma y Producto de Números.

$$x + y = 11 \quad (E1) \qquad \text{De: } E1 \Rightarrow y = 11 - x$$
$$x y = 28 \quad (E2) \qquad \text{En: } E2 \Rightarrow x(11 - x) = 28$$

Resolviendo el Sistema de Ecuaciones que se presenta.

$$x^2 - 11x + 28 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \Rightarrow y = 7 \\ x = 7 \Rightarrow y = 4 \end{matrix}$$

Por tanto un par es (4,7) el otro es (7,4)

g) *Hallar un número: Si la suma de sus dos cifras es* 8; *el número de unidades es el triple de las decenas.*

Si: x es la cifra de decenas, y la de unidades, el número de dos cifras es de la forma: $x{\cdot}10 + y$

$$x + y = 8 \quad (E1) \qquad E2 \text{ en } E1 \Rightarrow x + 3x = 8$$
$$y = 3x \quad (E2) \qquad \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 6$$

Planteando las condiciones y resolviendo el Sistema.

Si el Número es: $x{\cdot}10 + y = 2{\cdot}10 + 6 = 26$

Por tanto el Número es 26

h) *Hallar un número: Si la suma de sus dos cifras es* 10; *cuando a tal número se le agrega* 18 *sus cifras quedan invertidas.*

$$\begin{matrix} x + y = 10 \\ x{\cdot}10 + y + 18 = y{\cdot}10 + x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x + y = 10 & (E1) \\ 9x - 9y = -18 & (E2) \end{matrix}$$

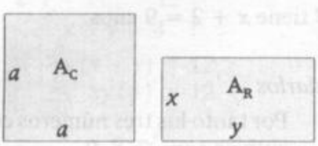
Si: x es la cifra de decenas, y la de unidades, el número de dos cifras es de la forma: $x{\cdot}10 + y$

$$\begin{array}{r} 9x + 9y = 90 \\ +\ \underline{9x - 9y = -18} \\ 18x = 72 \end{array} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ y = 6 \end{matrix}$$

Si el Número es: $x{\cdot}10 + y = 4{\cdot}10 + 6 = 46$

Invirtiendo sus cifras es de la forma: $y{\cdot}10 + x$

h) *El Área de un Cuadrado* (A_C) *excede en* 3 *cm*^{3} *al Área de un Rectángulo* (A_R)*. Sabiendo que el lado del cuadrado es* 3 *cm mayor que el ancho del Rectángulo y* 4 *cm más pequeño que la altura de éste. Hallar el lado del cuadrado.*



$$a = x + 3\ ;\ a = y - 4$$
$$A_C = (x + 3)(y - 4)\ ;\ A_R = xy$$

De acuerdo a la gráfica

$$\begin{matrix} (x + 3)(y - 4) = xy + 3 \\ x + 3 = y - 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -4x + 3y = 15 \\ x - y = -7 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 6 \\ y = 13 \end{matrix} \Rightarrow a = 9$$

IX.8 OTRAS ECUACIONES

En un estudio formal de la Teoría de Ecuaciones, se contemplan características especiales de ciertas Ecuaciones y Sistemas. Casos especiales de esas Ecuaciones son:

IX.7.1 ECUACIONES BINOMIAS

Son Ecuaciones que constan de dos Términos, uno de los cuales es independiente de la incógnita, su forma general es:

$$\boxed{x^n \pm A = 0}$$

Para resolver estas Ecuaciones se emplea la factorización de acuerdo al caso.

Ej 9.24 a) $x^2 - 9 = 0$

$$(x + 3)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ x = -3 \end{matrix}$$

Se trata de una Ecuación Binomia de grado dos, se resuelve factorizando por Diferencia de Cuadrados.

b) $x^3 + 8 = 0$

Ecuación Binomia de grado tres. Factorizando por Suma de cubos (Ver IV-7)

$$(x+2)(x^2-2x+4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -2 \ ; \ x^2 - 2x + 4 = 0$$

Se obtiene una 1^{era} Solución Real ($x = -2$)

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{-3}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 1 + \sqrt{3}\,i \\ x_3 = 1 - \sqrt{3}\,i \end{array}$$

El 2do factor se intenta resolver por la Ecuación de Segundo grado. Sin embargo se obtienen soluciones No Reales (Complejas). Note que se reemplaza: $\sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}\,i$

Por tanto de las tres Soluciones que muestra la Ecuación solo una es Real.

IX.7.2 ECUACIONES TRINOMIAS

Las Ecuaciones Trinomias presentan la forma general:

$$\boxed{a(x^n)^2 + bx^n + c = 0}$$

Las Ecuaciones Trinomias se resuelven por los métodos de las Ecuaciones de Segundo grado, para luego resolver la Ecuación binomia que así se obtiene.

Ej 9.25 Se resuelven las Ecuaciones Trinomias:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$$(x^2)^2 - 13(x^2) + 36 = 0$$

Expresando como una Ecuación Trinomia.

$$(x^2-9)(x^2-4) = 0$$

$$(x+3)(x-3)(x+2)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -3 \ ; \ x_2 = 3 \ ; \ x_3 = -2 \ ; \ x_4 = 2$$

Factorizando se obtienen dos Ecuaciones Binomias. Terminando de factorizar.

b) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

$$(x^3)^2 - 9(x^3) + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x^3-1)(x^3-8) = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 \ ; \ x_2 = 2$$

Factorizando por el Método del Trinomio y por Sumas y Restas de Cubos.

Los factores cuadráticos se resuelven por la fórmula de segundo grado, pero las soluciones son No Reales. Por tanto de las seis soluciones posibles, solo dos son Reales.

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_3 = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} \ ; \ x_4 = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_5 = -1+\sqrt{3}\,i \ ; \ x_6 = -1-\sqrt{3}\,i$$

IX.7.3 ECUACIONES Y SISTEMAS INDETERMINADOS

Se llama Ecuación Indeterminada a la Ecuación que posee más de una incógnita o variable.
Una Ecuación Indeterminada posee infinitas soluciones.

Ej 9.26 Se resuelve la Ecuación Indeterminada: $3x - y - 7 = 0$

$$3x - y - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 7$$

Si: $x = 1 \Rightarrow y = -4$ Si: $x = 3 \Rightarrow y = 2$

Si: $x = 2 \Rightarrow y = -1$ Si: $x = 0 \Rightarrow y = -7$

Se despeja una de las Incógnitas de la Ecuación. Reemplazando valores arbitrarios en la otra incógnita, se logran diversos valores de y. Así se logran infinitas soluciones.

Otra alternativa para analizar Sistemas Indeterminados, siempre que sean Lineales, lo brinda el Álgebra Lineal, a través de los métodos de Gauss.

Se generaliza el concepto de Ecuación Indeterminada a Sistemas que poseen más Incógnitas que Ecuaciones, obteniéndose así Sistemas Indeterminados.

Ej 9.27 Se resuelve un Sistema Indeterminado de dos Ecuaciones con tres Incógnitas:

$$\begin{aligned} 3x - y - z &= -9 \\ -x + 2y + z &= 17 \end{aligned}$$

Para resolver el Sistema, se despejan dos de las Incógnitas del Sistema.

$$\Rightarrow z = 3x - y + 9 = 17 + x - 2y \qquad x = x$$

Despejando z, de ambas Ecuaciones e igualando entre sí, se logra despejar y.

$$\Rightarrow y = 8 - 2x \qquad \Rightarrow y = 8 - 2x$$
$$\Rightarrow z = 3x - (8 - 2x) + 9 = 5x + 1 \qquad z = 5x + 1$$

Reemplazando esa expresión de y en una de las expresiones de z, se logra expresar a las incógnitas y, z en términos de x. Asignando valores arbitrarios en x se obtienen las infinitas soluciones del Sistema.

Si: $x = 1 \Rightarrow y = 6 \; ; \; z = 6$
Si: $x = 2 \Rightarrow y = 4 \; ; \; z = 11$
Si: $x = 3 \Rightarrow y = 2 \; ; \; z = 16$

Ej 9.28

$$\begin{aligned} 7x - 2y - z + 2u &= 5 \\ 17x - 2y - z - 3u &= -15 \\ 11x - y - 2z + u &= 4 \end{aligned}$$

Sistema de tres ecuaciones, con cuatro incógnitas. Para resolver, se despejan tres de las Incógnitas del Sistema, procurando expresarlas en términos de una sola variable.

$$\Rightarrow u = \frac{5 - 7x + 2y + z}{2} = 4 - 11x + y + 2z$$
$$u = \frac{15 + 17x - 2y - z}{3} = 4 - 11x + y + 2z$$

Despejando u, de todas las Ecuaciones e igualando entre sí, se logra ordenar como un Sistema de dos Ecuaciones con tres Incógnitas.

$$\Rightarrow \begin{aligned} 50x - 5y - 7z &= -3 \\ 15x - 3z &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} z &= 5x - 1 \\ y &= 3x + 2 \end{aligned}$$

Como en el Ejemplo anterior se logra despejar z, luego y.

$$\Rightarrow u = 4 - 11x + (3x + 2) + 2(5x - 1) = 2x + 4$$
$$(x, 3x + 2, 5x - 1, 2x + 4)$$

Reemplazando esas expresiones de y, z en una de las expresiones de u, se logra expresar a las incógnitas y, z, u en términos de x.

Si: $x = 1 \Rightarrow y = 5 \; ; \; z = 4 \; ; \; u = 6$
Si: $x = 2 \Rightarrow y = 8 \; ; \; z = 9 \; ; \; u = 8$
Si: $x = 3 \Rightarrow y = 11 \; ; \; z = 14 \; ; \; u = 10$

Asignando valores arbitrarios en x se obtienen las infinitas soluciones del Sistema.

Para resolver un Sistema que presenta más Ecuaciones que Incógnitas: Se toman tantas Ecuaciones como Incógnitas haya, luego se resuelve este nuevo Sistema. Posteriormente se reemplazan los resultados obtenidos en las Ecuaciones no consideradas inicialmente, si se verifican, significa que el Sistema si tiene Solución, caso contrario se dice que el Sistema no posee Solución.

Ej 9.29 a)

$$\begin{aligned} x + 3y &= 9 \\ 2x + 5y &= 16 \\ 4x - 2y &= 8 \end{aligned}$$

El Sistema presenta tres Ecuaciones con dos Incógnitas.

$$\Rightarrow \begin{aligned} x + 3y &= 9 \\ 2x + 5y &= 16 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Para resolver, se toman las dos primeras Ecuaciones, conformando un Sistema de dos Ecuaciones con dos Incógnitas. Resolviendo ese Sistema.

$$\Rightarrow 4x - 2y = 8$$
$$4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 8$$

Reemplazando los resultados en la Ecuación tercera, se aprecia que si se cumple la misma. Por tanto el Sistema si tiene Solución ($x = 3$, $y = 2$)

b)

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 14 \\ 2x + 5y &= 13 \\ 4x + 3y &= 15 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \begin{aligned} 3x + 2y &= 14 \\ 2x + 5y &= 13 \end{aligned} \quad \Rightarrow x = 4 \; ; \; y = 1$$

El Sistema tiene tres Ecuaciones con dos Incógnitas.

Para resolver, se toman las dos primeras Ecuaciones, armando un Sistema de dos por dos. Resolviendo.

$$\Rightarrow 4x + 3y = 15$$
$$4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \neq 15$$

Reemplazando los resultados en la Ecuación tercera, se aprecia que no se cumple la misma. Por tanto el Sistema no tiene Solución.

IX.- PROBLEMAS PROPUESTOS

9.1 Resolver las siguientes Ecuaciones Lineales, con una Incógnita:

a) $3x + 2 = 8$ b) $2x + 1 = 5x - 11$ c) $3y + 1 = 15$ d) $x(x - 2) = x^2 - 10$

e) $5 - 2x = -7$ f) $6 - 4x = 14 - 5x$ g) $9 - 5z = 2$ h) $\dfrac{x + 2}{3} = \dfrac{2x + 1}{5}$

9.2 Resolver las siguientes Ecuaciones de grado dos:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$ b) $2x^2 + 5x - 7 = 0$ c) $x^2 + 4x + 2 = 0$ d) $x^2 - 10x + 25 = 0$

e) $x^2 - x - 6 = 0$ f) $3x^2 - 8x + 4 = 0$ g) $x^2 - 6x + 4 = 0$ h) $6x^2 - 11x + 3 = 0$

i) $x^2 + 7x + 10 = 0$ j) $5x^2 + 2x + 9 = 0$ k) $x^2 + 2x + 8 = 0$ l) $8x^2 + 18x - 5 = 0$

9.3 Hallar los valores de k, para que se cumplan las siguientes condiciones:

a) *k para que la Ecuación tenga Raíces Reales iguales entre si:* $x^2 + kx + 9 = 0$

b) *k para que la Suma de Raíces sea* 10 *si:* $x^2 - 2kx + 21 = 0$

c) *k para que el Producto de Raíces sea* 6 *si:* $(k - 2)x^2 - 5x + 2k = 0$

d) *k para que una Raíz exceda a la otra en* 2 *si:* $9x^2 - 24x + k = 0$

e) *k para que una Raíz sea el triple de la otra si:* $kx^2 - 20x + 25 = 0$

f) *k para que una Raíz sea el doble de la otra si:* $2kx^2 + 3x + k = 0$

g) *k para que una Raíz exceda a la otra en* 3 *si:* $x^2 + (2k + 5)x + k = 0$

h) *k para que las Raíces sean* 3 *y* 5 *si:* $kx^2 - 16x + 15k = 0$

i) *k para que las Raíces sean Simétricas si:* $x^2 + (k - 7)x - 25 = 0$

j) *k para que las Raíces sean Recíprocas si:* $kx^2 - (k^2 + 1)x + 4 = 0$

k) *k para que las Raíces sean Simétricas si:* $(k + 1)(2x^2 + 3x) = (k - 1)(6x + 100)$

l) *k para que la suma de Raíces sea igual a su producto si:* $3x^2 + kx + 16 = 0$

m) $\dfrac{x^2 + px}{qx + r} = \dfrac{k - 1}{k + 1}$ *k para que las Raíces sean Simétricas; k para que las Raíces sean Recíprocas; k para que la suma de Raíces sea igual a su producto.*

9.4 Resolver las siguientes Ecuaciones de Grado superior:

a) $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$ e) $x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120$ i) $x^4 - 1 = 0$

b) $x^3 - 7x^2 + 2x + 40 = 0$ f) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ j) $x^5 - 1 = 0$

c) $x^3 - x^2 - 7x - 20 = 0$ g) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ k) $x^6 - 1 = 0$

d) $2x^3 - 7x^2 + x + 10 = 0$ h) $6x^4 + 23x^3 + 28x^2 + 13x + 2 = 0$ l) $x^4 + 1 = 0$

9.5 Resolver los siguientes Sistemas de Ecuaciones:

a) $\begin{aligned} x + 5y &= 13 \\ 2x + y &= 8 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + 7y &= 11 \\ 3x - 2y &= 14 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 3x + 4y &= 27 \\ 2x + 5y &= 32 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 9x + 2y &= 0 \\ 8x + y &= -7 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x + 4y &= 30 \\ 9x - 2y &= 4 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 2x + 9y &= 3 \\ 3x + 2y &= -7 \end{aligned}$ g) $\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ 6x + 3y &= 8 \end{aligned}$ h) $\begin{aligned} 7x + 3y &= 7 \\ 2x - 5y &= 0 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} 5x + 3y &= 19 \\ 4x + 7y &= 6 \end{aligned}$ j) $\begin{aligned} 3x + 7y &= 28 \\ 4x + 3y &= 12 \end{aligned}$ k) $\begin{aligned} 5x - 2y &= 20 \\ 7x - 4y &= 22 \end{aligned}$ l) $\begin{aligned} 3x + 5y &= 0 \\ 2x + 7y &= 0 \end{aligned}$

9.6 Resolver los siguientes Sistemas de Ecuaciones:

a) $\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 17 \\ 3x + y + 5z &= 22 \\ 2x + 7y + 4z &= 23 \end{aligned}$
b) $\begin{aligned} x + 2y + 7z &= 23 \\ 4x + 3y + z &= 18 \\ 5x + y + 8z &= 25 \end{aligned}$
c) $\begin{aligned} 4x + 2y + z &= 3 \\ 5x + 3y + 2z &= 1 \\ 7x + 5y + 6z &= -5 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x + 4y + 7z &= 9 \\ 3x - 5y + 2z &= 8 \\ 5x + 9y - 4z &= 6 \end{aligned}$
e) $\begin{aligned} x + 2y + z &= 18 \\ 3x + 4y + 2z &= 19 \\ 4x - 3y - 3z &= 4 \end{aligned}$
f) $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + 4y + 6z &= 18 \\ 3x + 6y + 9z &= 12 \end{aligned}$

9.7 Resolver los siguientes Sistemas de Ecuaciones:

a) $\begin{aligned} x + 2y + 3z + 5u &= 27 \\ 4x + 7y + 2z + 3u &= 33 \\ 2x + 4y + 3z + 5u &= 32 \\ 3x + 5y + 4z + 2u &= 34 \end{aligned}$
b) $\begin{aligned} x + 7y + 2z + 3u &= 15 \\ 2x + 3y + 3z + 2u &= 11 \\ 3x + 2y + 4z + 5u &= 27 \\ 4x + 3y + 5z + 2u &= 13 \end{aligned}$
c) $\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= 13 \\ 2x + 3y + 4z + 5u &= 19 \\ 4x + y + 8z + 7u &= 33 \\ 3x - 2y + 5z - 4u &= 19 \end{aligned}$

9.8 Resolver los siguientes Sistemas de Ecuaciones de Grado superior:

a) $\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ x^2 + 4y &= 16 \end{aligned}$
b) $\begin{aligned} 3x - 2y &= 10 \\ x + y^2 &= 5 \end{aligned}$
c) $\begin{aligned} 2x + 5y &= 31 \\ x^2 + y^2 &= 34 \end{aligned}$
d) $\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 13 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ x^2 + y &= 3 \end{aligned}$
f) $\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 9 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$
g) $\begin{aligned} x^2 + 3xy &= 28 \\ x^2 - 5y^2 &= 11 \end{aligned}$
h) $\begin{aligned} x^3 - y^3 &= 19 \\ x^2y - xy^2 &= 6 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 13 \\ xy &= 6 \end{aligned}$
j) $\begin{aligned} x^2 + xy &= 20 \\ y^2 + xy &= 5 \end{aligned}$
k) $\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 35 \\ x^2 - xy + y^2 &= 7 \end{aligned}$
l) $\begin{aligned} x + xy + y &= 11 \\ x^2y + xy^2 &= 30 \end{aligned}$

9.9 Resolver las siguientes Ecuaciones con Radicales:

a) $\sqrt{x+1} + 2 = 5$
b) $\sqrt{2x+10} - 1 = 3$
c) $\sqrt{5x-1} - 2 = 0$
d) $\sqrt{x+4} + x = 8$
e) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = 5$
f) $\sqrt{2x+4} - \sqrt{3x-14} = 2$
g) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = \sqrt{x-3}$
h) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{x+3}$
i) $\sqrt{3x-3} + \sqrt{x} = 5$
j) $x - \sqrt{3x-11} = 5$
k) $\sqrt{x^2+7} + \sqrt{x^2-5} = 6$
l) $\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x} = 3$

9.10 Resolver las siguientes Ecuaciones Binomias:

a) $x^2 - 16 = 0$
b) $x^3 - 1 = 0$
c) $x^3 + 27 = 0$
d) $x^4 - 1 = 0$
e) $x^4 - 16 = 0$
f) $x^5 - 1 = 0$
g) $x^4 + 1 = 0$
h) $x^8 - 1 = 0$

9.11 Resolver las siguientes Ecuaciones Trinomias:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
b) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$
c) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
d) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$
e) $e^{2x} - 6e^x + 5 = 0$
f) $Log^2 x - 3 Log x + 2 = 0$

9.12 Resolver las siguientes Ecuaciones Indeterminadas:

a) $2x + 3y = 12$
b) $4x + 7y = 56$
c) $\begin{aligned} x + 2y + z &= 7 \\ 3x + y + z &= 10 \end{aligned}$
d) $\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 8 \\ 2x - y + 4z &= 17 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x + 2y + z + 3u &= 16 \\ 2x + y + 2z + u &= 15 \\ 3x + 4y + z + u &= 26 \end{aligned}$
f) $\begin{aligned} 4x + 3y + 2z + u &= 27 \\ 2x + 5y + 3z - u &= 24 \\ 5x + 2y + 4z + u &= 39 \end{aligned}$
g) $\begin{aligned} 2x + 3y + 2z - u &= 19 \\ 3x + y + 4z + u &= 30 \\ x - y + 3z + 2u &= 16 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ 5x + 2y &= 19 \\ 4x + 7y &= 26 \end{aligned}$
i) $\begin{aligned} x + 5y &= 25 \\ 3x - 4y &= -1 \\ 7x + y &= 39 \end{aligned}$
j) $\begin{aligned} 5x + 2y &= 43 \\ 4x + 3y &= 40 \\ 3x + 4y &= 25 \end{aligned}$

9.13 Resolver las Ecuaciones y Sistemas siguientes:

a) $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 6$

b) $\sqrt{2x+6} - \sqrt[4]{2x+6} = 2$

c) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$

d) $\dfrac{6}{x} + \dfrac{10}{y} = 7$
$\dfrac{12}{x} + \dfrac{8}{y} = 8$

e) $\dfrac{8}{\sqrt{x-y}} + \dfrac{5}{\sqrt{x-2y}} = 9$
$\dfrac{6}{\sqrt{x-y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2y}} = 4$

f) $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}} = 8$

g) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}} = 4$

l) $\dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{2} = 4$

m) $\dfrac{5}{x-2} + \dfrac{x+3}{2} = 6$

h) $\sqrt{7 + \sqrt{x}} - 3 = 0$

i) $\sqrt{x^2 - x - 6} - \sqrt{x^2 - x - 17} = 1$

n) $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} = 6$

j) $\sqrt{x^2 + x - 8} = \sqrt[3]{x^2 + x - 4}$

k) $x^2 + 5x - 19 = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$

o) $x - \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 69$

9.14 Resolver las Ecuaciones literales:

a) $3x^2 - 10ax + 3a^2 = 0$

b) $\dfrac{x-a}{a} - \dfrac{x}{x-a} = 0$

c) $\dfrac{a + \dfrac{b}{x}}{a - \dfrac{b}{x}} = c$

d) $\dfrac{a}{1 + \dfrac{b}{x-b}} = b$

9.14 Resolver los siguientes Problemas de aplicación, mediante Ecuaciones.

a) Calcular las edades de dos hermanos, el mayor tiene el doble de años que el menor, la suma de ambos es 18.

b) Hace 4 años la edad de A era el triple de B, dentro de 1 año será el doble. Calcular edades.

c) Calcular dos números si su suma es 22, el cociente del mayor sobre el menor es de 3 con un residuo de 2.

d) Calcular un número de dos dígitos, si la suma de unidades mas el de decenas es 10; cuando se invierte el orden de los dígitos el número resultante será el doble del original menos uno.

e) Un niño tiene 10 Bs entre 7 monedas de 1 y de 2 Bs. Calcular las monedas de cada valor.

f) Un joven gasta 500 $us al comprar un celular y un MP4, luego los vende en 490 $us, perdiendo 20 % en el celular y ganando 10 % en el MP4, calcular los precios originales.

g) Se requiere preparar 100 Kg de alimento balanceado con 12 % de calorías. Se dispone de maíz con un 10 % y soya con un 15 % de calorías. Calcular las cantidades necesarias de maíz y soya.

h) La suma de edades del padre, la madre y el hijo es 75 años, el padre es mayor con 3 años a la madre, ésta tiene el cuádruple de la edad de su hijo. Calcular las edades de cada persona.

i) La edad de un padre es la suma de edades de la madre mas el hijo mas uno, hace 2 años la edad del padre era 10 veces la del hijo, dentro de 2 años la madre tendrá cuatro veces la del hijo. Calcular las edades de cada miembro de la familia.

j) Una persona tiene 32 Bs entre 14 monedas de 1 Bs, 2 Bs y 5 Bs. El número de monedas de 2 Bs son el doble de las de 5 Bs. Calcular el número de monedas de cada valor.

k) Un terreno rectangular de área 4800 m^2, es aumentado en 40 m en su ancho y reducido en 20 m en su largo, manteniendo su área. Calcular sus dimensiones originales.

l) Los cuadrados de las edades de A y de B suman 65; su producto es 28. Calcular tales edades.

m) En un número de dos cifras, el dígito de las unidades excede en 4 al de las decenas. Si se divide ese número entre otro que se obtiene al invertir los dígitos se obtiene 7/4. Hallar tal número.

RESPUESTAS IX

9.1 a) 2 b) 4 c) 14/3 d) 5 e) 6 f) 8 g) 7/5 h) 7

9.2 a) 1; 4 b) 1; -7/2 c) -0.59; -3.41 d) 5; 5 e) -2; 3 f) 2; 2/3
g) 5.24; 0.76 h) 3/2; 1/3 i) -2; -5 j) $\nexists$ k) $\nexists$ l) -5/2; 1/4

9.3 a) $k = \pm 6$ b) 5 c) 3 d) 7 e) 3 f) ± 1 g) -2 h) 2 i) 7 j) 4 k) 3
l) -16 m) $k = (q+p)/(q-p)$; $k = (r-1)/(r+1)$; $k = (1+q+p)/(1+q-p)$

9.4 a) 1;3;4 b) -2;4;5 c) 4 d) -1;2;5/2 e) 2;3;4;5 f) 1;2;3;4
g) -2;-3;2;3 h) -2; -1; -1/2; -1/3 i) 1; -1 j) 1 k) 1; -1 l) $\nexists$

9.5 a) (3,2) b) (4,1) c) (1,6) d) (-2,9) e) (2,7) f) (-3,1)
g) $\nexists$ h) (35/41, 14/41) i) (5,-2) j) (0,4) k) (6,5) l) (0,0)

9.6 a) (2,1,3) b) (1,4,2) c) (3,-4,-1) c) (2,0,1) d) (7,3,5) e) $\nexists$

9.7 a) (3,1,4,2) b) (2,0,-1,5) c) (2,1,3,0)

9.8 a) (2,3); (6,-5) b) (4,1); (20/9, -5/3) c) (3,5); (37/29, 165/29) d) (3,1); (-1,3)
e) $(\pm 1, 2)$; $(\pm 2, -1)$ f) (2,1); (1,2) g) (4,1); (-4,-1) h) (3,2); (-2,-3)
i) $(\pm 2, \pm 3)$; $(\pm 3, \pm 2)$ j) (4,1); (-4,1) k) (2,3); (3,2) l) (1,5); (5,1)

9.9 a) 8 b) 3 c) 1 d) 5 e) 7 f) 6 g) 7 h) 6 i) 4 j) 9 k) ± 3 l) 0, 4

9.10 a) 4, -4 b) 1, $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$ c) 3, $\dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}\,i}{2}$ d) 1, -1, i, -i e) 2, -2, 2i, -2i

f) 1, -1, $\pm\sqrt{\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}}$ g) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i$ h) ± 1, $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i$, $\pm i$

9.11 a) 2, -2, 3, -3 b) 1, -1, 4, -4 c) 1, 2, $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$, $-1 \pm \sqrt{3}\,i$ d) 0, 2 e) 0, 1.61 f) 10, 100

9.12
a) $\left(x, \dfrac{12-2x}{3}\right)$; (3,2) e) $\left(x, \dfrac{42-5x}{8}, \dfrac{38-7x}{8}, \dfrac{3x+2}{8}\right)$; (2,4,3,1)

b) $\left(x, \dfrac{56-7y}{4}\right)$; (4,7) f) $\left(x, \dfrac{6-x}{3}, \dfrac{21-2x}{3}, \dfrac{21-5x}{3}\right)$; (3,1,5,2)

c) $(x, 2x-3, 13-5x)$; (2,1,3) g) $\left(x, \dfrac{5x-19}{2}, \dfrac{29-5x}{2}, \dfrac{9x-37}{3}\right)$; (5,3,2,4)

d) $(x, 7-2x, 6-x)$; (2,3,4) h) (3,2) i) (5,4) j) $\nexists$

9.13 a) 81 b) 5 c) 1 d) (3,2) e) (7,3) f) 7 g) ± 3 h) 4
i) 7; -6 j) 3; -4 k) 3; -8; 2.11; -7.11 l) 4 m) 4; 7 n) 64 o) 81

9.14 a) 12; 6 b) 19; 9 c) 17; 5 d) 37 e) 4; 3 f) 200; 300 $us g) 60; 40 Kg
h) 35; 32; 8 i) 32; 26; 5 j) 5; 6; 3 k) 80; 60 m l) 7; 4 m) 84

X.- INECUACIONES

X.1 INECUACIONES

Las Inecuaciones, son Ecuaciones que en lugar de un signo de Igualdad, poseen signos de Desigualdad.

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Las Desigualdades (> Mayor, < Menor), cumplen con las siguientes Propiedades:

D1 Si: $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a > b,\ a = b,\ a < b$	**D8** Si: $a > b;\ c > 0 \Rightarrow ac > bc$ $a > b;\ c < 0 \Rightarrow ac < bc$
D2 Si: $a > b,\ b > c \Rightarrow a > c$	
D3 Si: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$	**D9** Si: $a > b;\ c > d \Rightarrow a + c > b + d$
D4 Si: $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$	**D10** Si: $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$
D5 $1 \in \mathbb{R}\quad 1 > 0$	**D11** Si: $0 \le a < b;\ 0 \le c < d \Rightarrow ac < bd$
D6 Si: $a > b \Rightarrow -a < -b$	**D12** Si: $b \ge 0 \Rightarrow a^2 > b \Leftrightarrow a > \sqrt{b},\ a < -\sqrt{b}$
D7 Si: $ab > 0 \begin{array}{l} \Rightarrow a > 0 \text{ y } b > 0 \\ \Rightarrow a < 0 \text{ y } b < 0 \end{array}$	**D13** Si: $b > 0 \Rightarrow a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

X.1.1 INTERVALOS

Se llama Intervalo real al conjunto de Números reales de la Recta real (Ver cap. III), comprendidos entre un extremo inferior a y otro superior b.

Se llama Intervalo cerrado cuando incluye a sus extremos (O los contiene en el conjunto), se escribe: $a \le x \le b$ también como: $[a, b]$

Se llama intervalo abierto, cuando no incluye a sus extremos, se escribe: $a < x < b$ o también: $]a, b[$

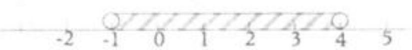
Pueden presentarse también Intervalos Semiabiertos o Semicerrados, si es que se incluye a uno solo de sus extremos. Para graficar Intervalos se traza una barra sobre la recta real entre los extremos, usando los Puntos llenos (●) y los vacíos (○), para representar respectivamente la inclusión o no de extremos.

Ej 10.1 Se traza la grafica de los Intervalos:

a) $-1 \le x \le 4$

También se expresa por $[-1, 4]$ Intervalo cerrado.

b) $2 < x < 6$

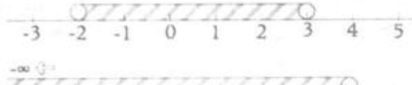


Intervalo abierto; $]2, 6[$

c) $-2 < x \le 3$

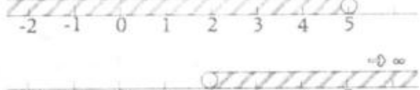
Intervalo semicerrado o semiabierto; $]-2, 3]$

d) $x \le 5$



Intervalo semicerrado o semiabierto; se asume que se inicia en el $-\infty$; $]-\infty, 5]$

e) $x > 2$



Intervalo abierto; se asume que se extiende hasta el ∞ ; $]2, \infty[$

No son Intervalos reales las siguientes expresiones incorrectas: $3 < x > 8$ $\quad 2 \le x \le \infty$ $\quad 2 > x < 6$ $\quad -\infty \le x \le 9$

La expresión: $7 > x > 3$ es un Intervalo real, pero no es recomendable su uso, siendo preferible expresarlo en la forma: $3 < x < 7$

OPERACIONES ENTRE INTERVALOS Dado que los Intervalos son Conjuntos, entre ellos se definen las Operaciones de Conjuntos de: Unión, Intersección, Diferencia y Complemento. (Ver cap II)

Ej 10.2 En los Intervalos: I_1: $-1 < x \le 4$; I_2: $1 \le x \le 5$ se efectúan las Operaciones:

Unión $\quad I_1 \cup I_2 \quad -1 < x \le 5$

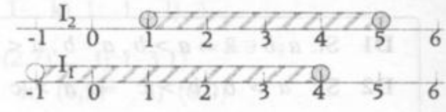
Intersección $\quad I_1 \cap I_2 \quad 1 \le x \le 4$

Diferencia $\quad I_1 \setminus I_2 \quad -1 < x < 1$

$\quad I_2 \setminus I_1 \quad 4 < x \le 5$

Complemento $\quad \overline{I_1} \quad -\infty < x \le -1$; $4 < x < \infty$

$\quad \overline{I_2} \quad -\infty < x < 1$; $5 < x < \infty$



Los resultados se obtienen a partir de las gráficas de los Intervalos.

SOLUCIÓN DE INECUACIONES La Solución de una Inecuación está constituida por uno o varios Intervalos de Números Reales. Por tanto toda vez que quede resuelta una Inecuación, su Solución se la debe expresar como un Intervalo.

Las Inecuaciones se clasifican entre:

X.2 INECUACIONES LINEALES

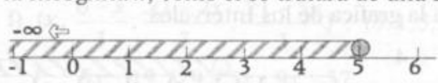
Son Inecuaciones que poseen Incógnitas Lineales (De grado: 1)

Para resolver Inecuaciones Lineales, se procede tal y como en las Ecuaciones Lineales. Además se debe tomar en cuenta que al multiplicar ambos miembros de una Desigualdad por un número negativo, la Desigualdad se invierte: **TD.8**

Ej 10.3 Se resuelve la Inecuación Lineal: $2x - 3 \le 7$

$$2x - 3 \le 7$$
$$2x \le 7 + 3$$
$$2x \le 10$$
$$x \le 10/2$$
$$\Rightarrow x \le 5$$

Despejando la Incógnita x, como si se tratara de una Ecuación:



A partir de la gráfica se obtiene el Intervalo de solución, que también se expresa como: $\Rightarrow -\infty < x \le 5$; $]-\infty, 5]$

La Inecuación contiene también a la Igualdad, por ello se deben incluir a los Extremos en el Intervalo de solución (Colocar el signo de igual para los extremos). Sin embargo se debe tener cuidado de nunca incluir a $-\infty$, ∞ ya que no son Números Reales.

Se debe interpretar claramente que todos los Números Reales comprendidos dentro del Intervalo de Solución, son precisamente soluciones de la Ineciación.

10.1 Resolver las Inecuaciones Lineales, graficar las soluciones

a) $13 - 4x < 1$

$$\begin{aligned} -4x &< 1 - 13 \\ -4x &< -12 \qquad \cdot(-1) \\ 4x &> 12 \Rightarrow x > 3 \end{aligned}$$

Para despejar la incógnita, se multiplica por un número negativo (-1), esto hace además que la Desigualdad se invierta por la Propiedad **D8** de las Desigualdades.

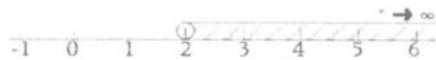
$3 < x < \infty$

$\Rightarrow \;]3, \infty[$

b) $8 + 4x \leq 5x + 6$

$$\begin{aligned} 4x - 5x &\leq 6 - 8 \\ -x &\leq -2 \qquad \cdot(-1) \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

Luego de reordenar la Inecuación, se multiplica por (-1), lo que invierte la Desigualdad (Propiedad **D8**)



$2 \leq x < \infty$

$\Rightarrow \; [2, \infty[$

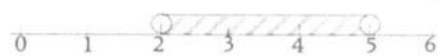
10.2 Resolver las siguientes Inecuaciones Lineales:

a) $1 \leq 2x - 3 \leq 7$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & 2x - 3 & \leq & 7 \\ +3 & & +3 & & +3 \\ \hline 4 & \leq & 2x & \leq & 10 \\ \div 2 & & \div 2 & & \div 2 \\ \hline 2 & \leq & x & \leq & 5 \end{array}$$

La Inecuación posee dos desigualdades, para despejar x, se suma la misma cantidad: 3 a los tres miembros de la desigualdad, luego se divide todo entre 2, para que así quede despejado: x

Cs: $2 \leq x \leq 5 \Rightarrow [2, 5]$



b) $-1 \leq 5 - 3x < 8$

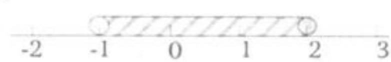
$$\begin{array}{ccccc} -1 & \leq & 5 - 3x & < & 8 \\ -5 & & -5 & & -5 \\ \hline -6 & \leq & -3x & < & 3 \\ \cdot(-1) & & \cdot(-1) & & \cdot(-1) \\ \hline 6 & \geq & 3x & > & -3 \\ \div 3 & & \div 3 & & \div 3 \\ \hline 2 & \geq & x & > & -1 \end{array}$$

$\Rightarrow \; -1 < x \leq 2$

Efectuando operaciones sobre lòs tres miembros:

Se resta: 5; se multiplica por (-1), lo que invierte las Desigualdades; dividiendo luego entre 3, para terminar de despejar.

Por la Equivalencia de: "a es mayor que b" con " b es menor que a", se escribe el resultado en otro sentido.



Cs: $-1 < x \leq 2 \quad ; \quad]-1, 2]$

Se debe notar que con respecto a las Ecuaciones, las Inecuaciones presentan interesante diferencias:

- Los resultados de las Ecuaciones son Números Reales. En cambio los resultados de las Inecuaciones son Intervalos reales.
- Recordando que se entiende por Trasposición de Términos, al efecto de que un Término que suma pasa a restar al otro miembro, o que aquel que multiplica pasa a dividir. etc.

  La Trasposición de constantes o variables es plenamente válida en las Ecuaciones. En las Inecuaciones se puede efectuar Trasposiciones de constantes, o la suma y resta de variables, pero nunca pasar a multiplicar o dividir de variables.
- Se debe tener sumo cuidado con ciertas operaciones:

  Multiplicar ambos miembros por cualquier constante ese válido en las Ecuaciones, sin embargo no es así en Inecuaciones, ya que al multiplicar por negativos, se invierte la desigualdad.

  Elevar al cuadrado ambos miembros es válido en Ecuaciones (Evitando a las Soluciones extrañas), pero en Inecuaciones solo se puede aplicar cuando ambos miembros són positivos.

Tome muy en cuenta las Propiedades de las Desigualdades (Ver Cap X.1)

X.3 INECUACIONES: CUADRÁTICA, SUPERIOR

Las Inecuaciones Cuadráticas son aquellas que poseen Incógnitas de grado dos. Las Inecuaciones de grado mayor o superior poseen Incógnitas de grado mayor a dos.

Estas Inecuaciones, se resuelven por el método de: REGLA DE LOS SIGNOS, que requiere de los siguientes pasos:

① Se ordena la Inecuación con respecto a cero (Se lleva todo a un miembro de la Desigualdad)

② Se factoriza la Inecuación, hallando así sus raíces (Son valores donde la expresión se hace 0)

③ Las raíces se ubican sobre la Recta Real, que así queda dividida en varios Intervalos

④ Se elige un valor cualquiera, interior a un Intervalo, para reemplazar en la Inecuación, de acuerdo a la Proposición así obtenida, el Intervalo del que se tomó el valor será o no de solución

⑤ La Regla de los signos, dice que a un Intervalo de solución le sigue otro de no solución y así alternadamente, puesto que toda expresión al acercarse a cero por su raíz cambia de signo.

Ej 10.4 Se resolverá por la Regla de los signos: $x^2 + 8 < 6x$

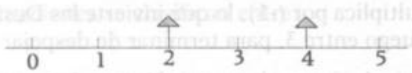
Inecuación Cuadrática $\qquad x^2 + 8 < 6x$

① Refiriendo la Inecuación a cero, trasladado todo al 1^er^ miembro $\qquad x^2 - 6x + 8 < 0$

② Factorizando. Las raíces de la Inecuación son: 2 ; 4 $\qquad (x - 2)(x - 4) < 0$

Raíces: $x = 2$; $x = 4$

③ Se ubican las raíces en la Recta Real, como pequeñas flechas que separan a Intervalos.



Así la Recta Real, queda dividida entre tres Intervalos: $-\infty < x < 2$; $2 < x < 4$; $4 < x < \infty$

④ Se reemplaza luego un valor cualquiera interior a un Intervalo, lo que servirá como prueba para detectar si ese Intervalo es o no de Solución.

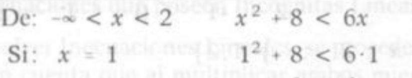
De: $-\infty < x < 2$ $\qquad x^2 + 8 < 6x$ $\qquad$ Inecuación original. Reemplazando el valor cual quiera 1, que es interior al 1^er^ Intervalo.

Si: $x = 1$ $\qquad 1^2 + 8 < 6 \cdot 1$

$9 < 6$ $\qquad$ (F) Proposición Falsa

Por tanto 1 no es Solución de la Inecuación, consecuentemente no lo es, el Intervalo donde se encuentra ese valor de 1.

⑤ Luego por alternabilidad se determina si son o no de Solución los restantes Intervalos.



$-\infty < x < 2$ No es Intervalo de Solución.

$2 < x < 4$ Es Intervalo de Solución.

$4 < x < \infty$ No es Intervalo de Solución

El Conjunto Solución es: Cs: $2 < x < 4$; que escrito de otra manera es:]2,4[

Note que a un Intervalo de No Solución (F), le sigue otro de Solución (V), de haber más Intervalos, esta alternabilidad proseguiría.

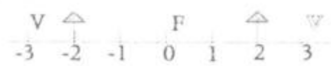
Esta es la situación que origina el nombre del método: Regla de los signos. La Ecuación cambia de signo, cada vez que atraviesa la Recta Real. Este Método se justifica usando conceptos de Funciones, cuyas gráficas atraviesan a la Recta real, en las raíces.

10.3 Por la Regla de signos, resolver las Inecuaciones Cuadráticas y de Grado superior:

a) $x^2 \geq 4$

$$x^2 - 4 \geq 0$$
$$(x+2)(x-2) \geq 0$$

Si: $x = 3 \Rightarrow x^2 \geq 4$
$$3^2 \geq 4$$
$$9 \geq 4 \quad (V)$$



Factorizando, las raíces son: -2; 2. Ubicandolas sobre la Recta Real, ésta queda dividida en tres Intervalos.

Tomando un valor interior (3) a un Intervalo y reemplazando en la Inecuación original.

La Proposición así obtenida es verdadera, entonces el valor reemplazado ($x = 3$) y el Intervalo al que pertenece son de Solución.

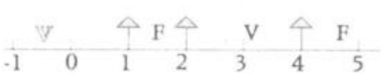
Alternadamente los Intervalos son o no de Solución.

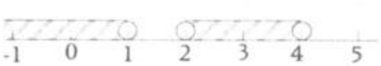
El Conjunto Solución posee dos Intervalos, note la inclusión de extremos, ya que la Inecuación original contenía además a la Igualdad. (Pero nunca se incluye a $-\infty$ ni a ∞) Cs: $-\infty < x \leq -2 \;;\; 2 \leq x < \infty$

b) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 < 0$

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 < 0$$
$$(x-1)(x-2)(x-4) < 0$$

Si: $x = 0 \qquad x^3 - 7x^2 + 14x - 8 < 0$
$$0^3 - 7\cdot 0^2 + 14\cdot 0 - 8 < 0$$
$$-8 < 0 \quad (V)$$





Inecuación de Grado superior (Grado tres)

Factorizando por Ruffini, las raíces son: 1; 2; 4. Ubicandolas sobre la Recta Real, ésta se divide en cuatro Intervalos.

Reemplazando 0, se obtiene una proposición verdadera (V), entonces el valor tomado de 0 es de Solución, su Intervalo también lo es.

Por alternabilidad, se detectan si son o no de Solución los restantes Intervalos.

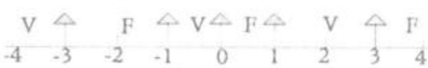
Se considera Conjunto Solución a la Unión de dos Intervalos).

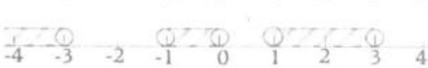
Cs: $-\infty < x < 1 \;,\; 2 < x < 4$

c) $x^5 + 9x \leq 10x^3$

$$x^5 - 10x^3 + 9x \leq 0$$
$$x(x+1)(x-1)(x+3)(x-3) \leq 0$$

Si: $x = 2 \Rightarrow 2^5 + 9\cdot 2 \leq 10\cdot 2^3$
$$50 \leq 80 \quad (V)$$





Inecuación de Grado superior (5)

Ordenando. Factorizando. Ubicando las raíces, ésta se divide en 6 Intervalos.

Reemplazando 2 se obtiene: V; luego el Intervalo donde está: 2; es de Solución.

No se reemplaza: $x = 0$; por no ser interior a algún Intervalo, es mas bien un extremo.

En el Conjunto Solución se incluyen los extremos, ya que la Inecuación original, contiene también a la igualdad. (Nunca se debe incluir a $\infty, -\infty$)

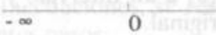
Cs: $-\infty < x \leq -3 \;,\; -1 \leq x \leq 0 \;,\; 1 \leq x \leq 3$

El valor a reemplazar para observar si un intervalo es o no de solución, debe ser un valor interior, nunca una raíz o extremo del Intervalo.

10.4 Por la Regla de los signos, resolver las siguientes Inecuaciones especiales:

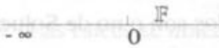
a) $x^2 + 9 < 0$

$x^2 + 9 < 0$



Si: $x = 0 \quad 0^2 + 9 < 0$

$\Rightarrow \quad 9 < 0 \quad (F)$



No se puede factorizar, por tanto la Inecuación no posee raíces. Toda la Recta Real se constituye en un solo Intervalo

Reemplazando un valor interior al único Intervalo en la Inecuación original, se obtiene (F).

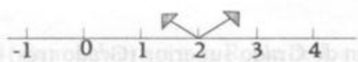
Por tanto: 0 no es Solución, consecuentemente no es Solución el Intervalo al que pertenece.

Como el único Intervalo (Que es toda la Recta Real) no es Solución, entonces ningún Número Real es Solución.

Como Conjunto solución solo se puede escribir al Vacío *Cs*: $\varnothing$

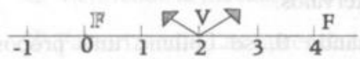
c) $x^2 - 4x + 4 < 0 \qquad x^2 - 4x + 4 < 0$

$(x-2)(x-2) < 0$



Si: $x = 0 \qquad 0^2 - 4\cdot 0 + 4 < 0$

$4 < 0 \quad (F)$



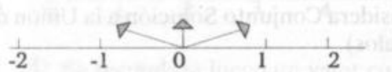
Al factorizar se logran dos raíces iguales entre sí. Se ubican las dos raíces sobre la Recta Real, asumiendo que existe un Intervalo entre los Extremos 2 y 2 (Tal Intervalo no contiene elementos)

Reemplazando un valor, en la Inecuación original, se logra una Proposición Falsa: F. Alternadamente los restantes Intervalos son o no de Solución.

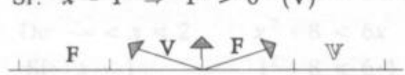
Sin embargo como el Intervalo de Solución no contiene a ningún elemento, el Conjunto Solución es el Vacío. Cs: $2 < x < 2 \Rightarrow Cs$: $\varnothing$

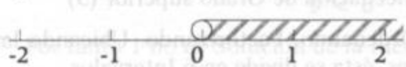
d) $x^3 > 0$

$(x-0)(x-0)(x-0) > 0$



Si: $x = 1 \Rightarrow 1^3 > 0 \quad (V)$





La Inecuación Cúbica, posee tres raíces iguales en cero. Ubicándolas sobre la Recta real.

Reemplazando un valor, se obtiene Verdadero (V)

Por el Método, se determinan los Intervalos de Solución, tome en cuenta que el intervalo: $0 < x < 0$, no contiene a ningún Número real.

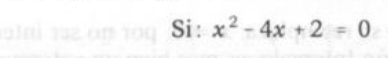
Los Intervalos de la forma: $a < x < a$ no contienen a ningún elemento, entonces: $a < x < a = \varnothing$

Cs: $0 < x < 0 \;,\; 0 < x < \infty = 0 < x < \infty$

e) $x^2 - 4x + 2 \le 0$

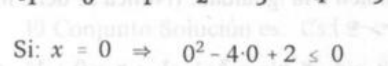
Si: $x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3.41 \\ x_2 = 0.59 \end{matrix}$

$(x - 3.41)(x - 0.59) \le 0$



Si: $x = 0 \Rightarrow 0^2 - 4{\cdot}0 + 2 \le 0$

$2 \le 0 \quad (F)$



En este caso no es posible factorizar. Las raíces se obtienen asumiendo que se tiene una Ecuación de 2do grado y resolviendo por la fórmula correspondiente.

Esas raíces constituyen también raíces de la Inecuación.

Empleando el Método del modo habitual.

La solución es el Intervalo:

$0.59 \le x \le 3.41$

X.4 INECUACIONES ALGEBRAICAS

Las Inecuaciones Algebraicas, son Inecuaciones donde la incógnita se encuentra dentro de una Expresión Algebraica., esta incógnita puede tener potencias negativas o fraccionarias.

Las Inecuaciones Algebraicas, se resuelven generalizando el método de La Regla de los signos.

Ej 10.5 Se resuelve una Inecuación Algebraica por el Método de la Regla de los signos:

$$\frac{6}{x-1} < 2 \qquad \frac{6}{x-1} - 2 < 0$$

Refiriendo la Inecuación respecto a cero, es decir, llevando todo al 1er miembro dejando solo a 0 en el 2do

$$\frac{6-2(x-1)}{x-1} < 0$$

$$\frac{-2(x-4)}{x-1} < 0$$

Luego efectuando la resta de fracciones. Ordenando y factorizando tanto el numerador como denominador, para buscar raíces.

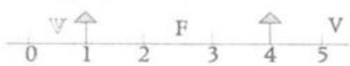
La raíz por el numerador está en: $x = 4$; la raíz por el denominador está en: $x = 1$. (El -2 del numerador no afecta)

Ubicando raíces sobre la Recta Real. Reemplazando un valor, se obtiene verdadero (V)

$$\text{Si: } x = 0 \Rightarrow \frac{6}{x-1} < 2$$

$$\frac{6}{0-1} < 2 \Rightarrow -6 < 2 \quad (V)$$

Por tanto, el valor reemplazado es Solución, asimismo el Intervalo de donde se tomó el valor.



Por alternabilidad se determinan si los restantes Intervalos son de Solución.

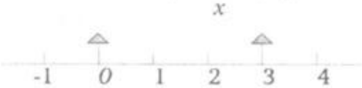
$$Cs: \ -\infty < x < 1 \ ; \ 4 < x < \infty$$

En la Inecuación inicial, no es correcto enviar a multiplicar el denominador del 1er miembro al 2do. Ya que tal denominador contiene a la incógnita, por tanto no se conoce su signo. De ser positivo mantendrá la desigualdad, pero de ser negativo invierte la desigualdad. Por tanto al existir incertidumbre no se puede efectuar esa operación.

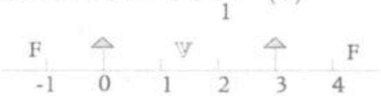
10.5 Resolver las siguientes Inecuaciones Algebraicas por la Regla de los signos

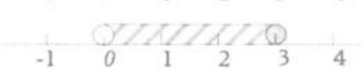
a) $$1 \le \frac{3}{x} \qquad 1 - \frac{3}{x} \le 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{x} \le 0$$



$$\text{Si: } x = 1 \Rightarrow 1 \le \frac{3}{1} \quad (V)$$





Conjunto Solución $Cs: \ 0 < x \le 3$

Por el igual de la Inecuación inicial:

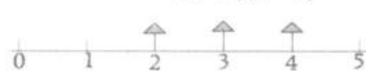
Solo se incluye uno de los Extremos (3), el otro no (0). Para evitar la división entre cero de la Inecuación original.

b) $$\frac{x-1}{x-2} \le \frac{x-5}{x-4} \qquad \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-5}{x-4} \le 0$$

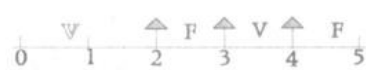
$$\frac{(x-1)(x-4) - (x-5)(x-2)}{(x-2)(x-4)} \le 0$$

$$\frac{(x^2-5x+4) - (x^2-7x+10)}{(x-2)(x-4)} \le 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(x-3)}{(x-2)(x-4)} \le 0$$



$$\text{Si: } x = 0 \Rightarrow \frac{0-1}{0-2} \le \frac{0-5}{0-4} \Rightarrow 0.5 \le 1.25 \quad (V)$$



$$Cs: \ -\infty < x < 2 \ ; \ 3 \le x < 4$$

X.- PROBLEMAS PROPUESTOS

10.1 Resolver las Inecuaciones

a) $5x - 3 \le 7$
b) $6x - 1 \ge 3x + 11$
c) $6 - x \le 1$
d) $4x + 1 \ge 7x - 5$
e) $x(x-3) \ge x^2 - 6$
f) $1 \le 2x - 7 \le 3$
g) $-1 \le 3x - 7 \le 8$
h) $1 \le 5 - 2x \le 3$
i) $-3 \le 7 - 5x \le 22$
j) $x^2 + 15 \le 8x$
k) $x^2 - 4 \le 3x$
l) $x^2 + 12 \ge 8x$
m) $x^2 - 8 \ge 2x$
n) $x^2 - 16 \le 0$
o) $x^2 - 9 \ge 0$
p) $x^2 + 11 \le 8x$
q) $x^2 + 25 \le 0$
r) $x^2 + 25 \le 10x$
s) $x^3 \le 4x$
t) $x^3 > 9x$
u) $x^3 + 2x + 8 \le 5x^2$
v) $x^3 + 20 \ge 5x^2 + 4x$
w) $x^4 + 16 < 17x^2$
x) $2x^5 + 72x \le 26x^3$
y) $x^3 - 8 \le 0$
z) $(x-2)^3 \le 0$
α) $x^4 + 1 < 0$

10.2 Resolver las Inecuaciones

a) $1 \le \dfrac{2}{x}$
b) $1 \le \dfrac{2}{x-2}$
c) $\dfrac{x-3}{x-4} \ge \dfrac{x-1}{x-2}$
d) $\dfrac{x-2}{x-1} \le \dfrac{x-6}{x-3}$
e) $\dfrac{3x-1}{x+2} \le \dfrac{x+1}{x-3}$
f) $\dfrac{x}{x-4} \ge \dfrac{x-4}{x}$
g) $\dfrac{x^2-4}{x^2-9} \le 0$
h) $\dfrac{x^2+4}{x^2+9} \ge 0$

10.3 Resolver las Ecuaciones en Valor absoluto:

a) $3|x| - 6 = 0$
b) $|x-5| - 2 = 0$
c) $|x| + x = 8$
d) $|x-4| = x-4$
e) $|x|^2 + 5|x| - 6 = 0$
f) $|x|^2 - 8|x| + 15 = 0$

10.4 Resolver las Inecuaciones en Valor absoluto:

a) $|3x-9| \le 6$
b) $|2x-7| \le 1$
c) $|4x-6| \ge 2$
d) $|2x-7| \ge 3$
e) $|x-2| \le x$
f) $|x-2| \le |x-4|$
g) $|x-3| \le |x-7|$
h) $|2x-3| \le |x+2|$

RESPUESTAS X

10.1
a) $x \le 2$
b) $x \ge 4$
c) $x \ge 5$
d) $x \le 2$
e) $x \le 2$
f) $4 \le x \le 5$
g) $2 \le x \le 5$
h) $1 \le x \le 2$
i) $-3 \le x \le 2$
j) $3 \le x \le 5$
k) $-1 \le x \le 4$
l) $-\infty < x \le 2$; $6 \le x < \infty$
m) $-\infty < x \le -2$; $4 \le x \le \infty$
n) $-4 \le x \le 4$
o) $-\infty < x \le -3$; $3 \le x < \infty$
p) $1.76 \le x \le 6.24$
q) $\varnothing$
r) $x = 5$
s) $-\infty < x \le -2$; $0 \le x \le 2$
t) $-3 < x < 0$; $3 < x < \infty$
u) $-\infty < x \le -1$; $2 \le x \le 4$
v) $-2 \le x \le 2$; $5 \le x < \infty$
w) $-4 < x < -1$; $1 < x < 4$
x) $-\infty < x \le -3$; $-2 \le x \le 0$; $2 \le x \le 3$
y) $x \le 2$
z) $-\infty < x \le 2$; $2 \le x \le 2$
α) $\varnothing$

10.2
a) $0 < x \le 2$
b) $2 < x \le 4$
c) $-\infty < x \le 2$; $4 < x \le \infty$
d) $-\infty < x \le 0$; $1 < x < 3$
e) $-2 < x \le 1/2$; $3 < x \le 5$
f) $0 < x \le 2$; $4 < x < \infty$
g) $-3 < x \le -2$; $2 \le x < 3$
h) $\forall x$

10.3
a) ± 2
b) $3; 7$
c) 4
d) $x \ge 4$
e) ± 1
f) $\pm 3;\ \pm 5$

10.4
a) $1 \le x \le 5$
b) $3 \le x \le 4$
c) $-\infty < x \le 1$; $2 \le x < \infty$
d) $-\infty < x \le 2$; $5 \le x < \infty$
e) $1 \le x < \infty$
f) $-\infty < x \le 3$
g) $-\infty < x \le 5$
h) $1/3 \le x \le 5$

X.6.2 INECUACIONES EN VALOR ABSOLUTO

Las Inecuaciones en Valor absoluto, son Inecuaciones que contienen a la Incógnita, afectada por el Valor absoluto.

Para resolver estas Inecuaciones, es suficiente con desarrollar el Valor absoluto, usando los Teoremas **TA**, **TB** del Valor absoluto, para luego aplicar los conocidos métodos de resolución de Inecuaciones (Regla de los signos, etc.)

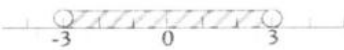
TA Si: $|P_{(x)}| < a$ $\Rightarrow$ $-a < P_{(x)} < a$

TB Si: $|P_{(x)}| > a$ $\Rightarrow$ $-\infty < P_{(x)} < -a \;,\; a < P_{(x)} < \infty$

Ej 10.7 Se resolverán las siguientes Inecuaciones con Valor absoluto:

a) $|x| < 3$

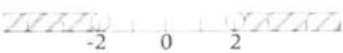
$-3 < x < 3$ Aplicando **TA**, se desarrolla el Valor absoluto, queda así un Intervalo.



Graficando el Intervalo de Solución.

b) $|x| > 2$

$-\infty < x < -2 \;,\; 2 < x < \infty$ Aplicando **TB**, se desarrolla el Valor absoluto, quedan así dos Intervalos.



Graficando los Intervalos de Solución.

10.7 Resolver las siguientes Inecuaciones en Valor absoluto:

a) $|3x - 9| \le 6$

Aplicando **TA** sobre la Inecuación.

$$\begin{array}{ccccc} -6 & \le & 3x-9 & \le & 6 \\ +9 & & +9 & & +9 \\ \hline 3 & \le & 3x & \le & 15 \\ \div 3 & & \div 3 & & \div 3 \\ \hline 1 & \le & x & \le & 5 \end{array}$$

Sumando: 9 a los tres miembros de la Inecuación, para así buscar el despeje de: x. Dividiendo entre: 3 a los tres miembros de la Inecuación.

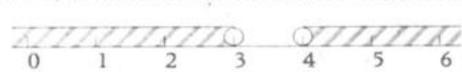
Intervalo de Solución:
$1 \le x \le 5$

b) $|2x - 7| > 1$

Desarrollando por **TB**

$$\begin{array}{ccccc} -\infty & < & 2x-7 & < & -1 \\ +7 & & +7 & & +7 \\ \hline -\infty & < & 2x & < & 6 \\ \div 2 & & \div 2 & & \div 2 \\ \hline -\infty & < & x & < & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & < & 2x-7 & < & \infty \\ +7 & & +7 & & +7 \\ \hline 8 & < & 2x & < & \infty \\ \div 2 & & \div 2 & & \div 2 \\ \hline 4 & < & x & < & \infty \end{array}$$

Para despejar x de las dos Inecuaciones se suma: 7, se divide entre: 2 a los tres miembros.



En las operaciones note que: $\infty + a = \infty$; $\infty \cdot a = \infty$; $\infty \div a = \infty$

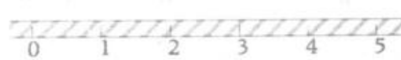
c) $|x| < -4$

$4 < x < -4$

La Inecuación no se cumple para ningún $x \in \mathbb{R}$ ya que el Valor absoluto siempre será positivo no puede ser menor a -4

d) $|x| > -2$

$-\infty < x < 2 \;,\; -2 < x < \infty$



La Inecuación sí se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que el Valor absoluto siempre será positivo, siendo siempre mayor a -2

XI.2 PROPIEDADES

Las principales Propiedades de los Logaritmos son:

$$\textbf{T1)}\quad Log\, x\, y = Log\, x + Log\, y$$

$$\textbf{T2)}\quad Log\, \frac{x}{y} = Log\, x - Log\, y$$

$$\textbf{T3)}\quad Log\, x^{y} = y\, Log\, x$$

Todas estas Propiedades, provienen de la definición de Logaritmos y las Leyes de Exponentes, por tanto su demostración se las efectúa en esos términos.

Note en las Propiedades que los logaritmos solo tienen efecto cuando afectan a un producto, cociente o potencia.

Demostrando la Propiedad: **T1)**

Si: $Log\, x = M \Rightarrow 10^M = x$

$Log\, y = N \Rightarrow 10^N = y$ — Si los Logaritmos de los Números: *x; y* respectivamente son: *M; N*; por la definición correspondiente de Logaritmos.

$x\, y = 10^M\, 10^N$

$x\, y = 10^{M+N}$ — Multiplicando y aplicando una Ley de los Exponentes.

$\Rightarrow Log\, xy = M + N$ — Por la definición de Logaritmos. $M + N$ constituye el Logaritmo de: xy

$Log\, xy = Log\, x + Log\, y$

De similar modo se demuestran las otras dos Propiedades de Logaritmos, antes indicadas.

Ej 11.3 Se desarrolla por Propiedades de Logaritmos:

a) $Log\,(x^5 y^8)$

$Log\,(x^5 y^8) = Log\,(x^5) + Log\,(y^8)$ — El Logaritmo de un producto es igual a la suma de los Logaritmos.

$= 5\, Log\, x + 8\, Log\, y$ — El Logaritmo de una Potencia es el Exponente por el Logaritmo de su Base.

b) $Log\, \dfrac{a^5 b^2}{c^3}$

$Log\, \dfrac{a^5 b^2}{c^3} = Log\,(a^5 b^2) - Log\,(c^3)$ — El Logaritmo de un Cociente es igual a la resta de Logaritmos.

$= Log\,(a^5) + Log\,(b^2) - Log(c^3)$ — Luego por el Logaritmo de un Producto.

$= 5\, Log\, x + 2\, Log\, b - 3\, Log\, c$ — Aplicando el Logaritmo de Potencia.

c) $Log\, \sqrt[3]{x}$ — Para aplicar el Logaritmo de un Radical, éste se expresa como una Potencia Fraccionaria.

$Log\, \sqrt[3]{x} = Log\,(x^{1/3}) = \dfrac{1}{3} Log\, x = \dfrac{Log\, x}{3}$ — Por Propiedad del Logaritmo de una Potencia.

d) $Log\, \sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^5 c^2}}$

$$Log\, \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^5 c^2}} = Log\left[\left(\frac{a^3}{b^5 c^2}\right)^{1/6}\right] = \frac{1}{6} Log\,\left(\frac{a^3}{b^5 c^2}\right) = \frac{1}{6}\left[Log\, a^3 - Log\,(b^5 c^2)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[Log\, a^3 - (Log\, b^5 + Log\, c^2)\right] = \frac{1}{6}\left[3\, Log\, a - 5\, Log\, b - 2\, Log\, c\right]$$

e) $Log\,(a^5 + b^8)$ — El Logaritmo no puede hacer desarrollo alguno, no tiene efecto sobre una suma de potencias.

$Log\,(a^5 + b^8) = Log\,(a^5 + b^8)$

XI.- LOGARITMOS

XI.1 LOGARITMO DE UN NÚMERO

Se llama *Logaritmo de un Número*, a aquel Exponente al que se debe elevar determinada Base, para obtener el Número.

Si: A es el Logaritmo del Número: x, siendo la Base: 10

$$Log_{10}\, x = A \quad \Rightarrow \quad 10^A = x$$

Solamente es posible el cálculo del Logaritmo de un Número Positivo ($x > 0$). (Al calcular Logaritmos de Números Negativos o del cero, no es un Número Real lo que se obtiene).

Ej 11.1 Se verifican los siguientes Logaritmos:

$Log_{10}\, 1000 = 3 \quad \Rightarrow \quad 10^3 = 1000$

$Log_{10}\, 6 = 0.778 \quad \Rightarrow \quad 10^{0.778} = 6$

La verificación se hace por la definición de Logaritmos.

La Base de un Sistema de Logaritmos, puede ser cualquier Número Real positivo, diferente de 1

Las bases mas usuales son el Número: 10 y el Número Natural: e ($e = 2.718281....$)

- Si la Base es: 10 se escribe: $Log\, x$ (Logaritmo Decimal o Vulgar)
- Si la Base es: e se escribe: $Ln\, x$ (Logaritmo Neperiano o Natural)

Si no se especifica la base, se asume que tal base de logaritmos es 10

En la práctica para hallar el *Logaritmo de un Número*, se recurre a Calculadoras, que poseen Sistemas de Logaritmos con las dos Bases usuales, antes indicadas.

Ej 11.2 Se determinan algunos Logaritmos por Calculadora:

$Log\ 2 = 0.301029995$	$Ln\ 2 = 0.69314718$
$Log\ 35 = 1.544068044$	$Ln\ 35 = 3.555348061$
$Log\ 296 = 2.471291711$	$Ln\ 296 = 5.690359454$
$Log(-2) = \nexists$	$Ln(-0.45) = \nexists$

No es posible el cálculo del Logaritmo de un Negativo en ninguna base. Porque en la definición:

$$Log_{10}\, x = A \Rightarrow 10^A = x$$

10^A No puede ser negativo.

Algunos valores notables de los Logaritmos son:

- El Logaritmo de la misma Base es: 1 $\quad Log_A\, A = 1$ (Por tanto, $Log\, 10 = 1$; $Ln\, e = 1$)
- El Logaritmo de: 1 en cualquier Base es igual a 0 $\quad Log_A\, 1 = 0$
- El Logaritmo de: 0 en cualquier Base no es un Número Real, sin embargo se representa por: $Log_A\, 0 = -\infty$

XI.2 PROPIEDADES

Las principales Propiedades de los Logaritmos son:

Todas estas Propiedades, provienen de la definición de Logaritmos y las Leyes de Exponentes, por tanto su demostración se las efectúa en esos términos.

Note en las Propiedades que los logaritmos solo tienen efecto cuando afectan a un producto, cociente o potencia.

T1) $Log\, x\, y = Log\, x + Log\, y$

T2) $Log\, \dfrac{x}{y} = Log\, x - Log\, y$

T3) $Log\, x^{y} = y\, Log\, x$

Demostrando la Propiedad: **T1)**

Si: $Log\, x = M \Rightarrow 10^M = x$

$Log\, y = N \Rightarrow 10^N = y$ — Si los Logaritmos de los Números: *x; y* respectivamente son: *M; N*; por la definición correspondiente de Logaritmos.

$x\, y = 10^M\, 10^N$

$x\, y = 10^{M+N}$ — Multiplicando y aplicando una Ley de los Exponentes.

$\Rightarrow Log\, xy = M + N$ — Por la definición de Logaritmos. $M + N$ constituye el Logaritmo de: xy

$Log\, xy = Log\, x + Log\, y$

De similar modo se demuestran las otras dos Propiedades de Logaritmos, antes indicadas.

Ej 11.3 Se desarrolla por Propiedades de Logaritmos:

a) $Log\,(x^5 y^8)$

$Log\,(x^5 y^8) = Log(x^5) + Log(y^8)$ — El Logaritmo de un producto es igual a la suma de los Logaritmos.

$= 5\, Log\, x + 8\, Log\, y$ — El Logaritmo de una Potencia es el Exponente por el Logaritmo de su Base.

b) $Log\, \dfrac{a^5 b^2}{c^3}$

$Log\, \dfrac{a^5 b^2}{c^3} = Log\,(a^5 b^2) - Log\,(c^3)$ — El Logaritmo de un Cociente es igual a la resta de Logaritmos.

$= Log\,(a^5) + Log\,(b^2) - Log(c^3)$ — Luego por el Logaritmo de un Producto.

$= 5\, Log\, x + 2\, Log\, b - 3\, Log\, c$ — Aplicando el Logaritmo de Potencia.

c) $Log\, \sqrt[3]{x}$

$Log\, \sqrt[3]{x} = Log\,(x^{1/3}) = \dfrac{1}{3} Log\, x = \dfrac{Log\, x}{3}$

Para aplicar el Logaritmo de un Radical, éste se expresa como una Potencia Fraccionaria.

Por Propiedad del Logaritmo de una Potencia.

d) $Log\, \sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^5 c^2}}$

$$Log\, \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^5 c^2}} = Log\left[\left(\frac{a^3}{b^5 c^2}\right)^{1/6}\right] = \frac{1}{6} Log\,\left(\frac{a^3}{b^5 c^2}\right) = \frac{1}{6}\left[Log\, a^3 - Log\,(b^5 c^2)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[Log\, a^3 - (Log\, b^5 + Log\, c^2)\right] = \frac{1}{6}\left[3\, Log\, a - 5\, Log\, b - 2\, Log\, c\right]$$

e) $Log\,(a^5 + b^8)$

$Log\,(a^5 + b^8) = Log\,(a^5 + b^8)$ — El Logaritmo no puede hacer desarrollo alguno, no tiene efecto sobre una suma de potencias.

11.1 Indicar la Respuesta correcta para las siguientes operaciones de Logaritmos:

a) $Log(x+y) = \begin{cases} Log\,x\ Log\,y \\ Log(x\,y) \\ Log\,x + Log\,y \\ \text{Ninguna} \end{cases}$ b) $\dfrac{Log\,x}{Log\,y} = \begin{cases} Log\,(x-y) \\ Log\,x - Log\,y \\ Log\,\dfrac{x}{y} \\ \text{Ninguna} \end{cases}$ c) $Log\,(x^7) = \begin{cases} Log\,(7\,x) \\ 7\,Log\,x \\ (Log\,x)^7 \\ \text{Ninguna} \end{cases}$

Respectivamente las Respuestas son: a) Ninguna b) Ninguna. Ya que no existe Propiedad alguna sobre el Logaritmo de una suma ni sobre el cociente entre Logaritmos. A su vez en c) 2^da donde se usa la propiedad del logaritmo de una potencia.

d) $(Log\,x)^3 = \begin{cases} 3\,Log\,x \\ Log(x^3) \\ Log^3\,x \\ \text{Ninguna} \end{cases}$ e) $Log\,\sqrt{x} = \begin{cases} \dfrac{Log\,x}{2} \\ \sqrt{Log\,x} \\ Log^{1/2}\,x \\ \text{Ninguna} \end{cases}$ f) $Log\,\dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{1}{Log\,x} \\ -Log\,x \\ Log(1-x) \\ \text{Ninguna} \end{cases}$

Las Respuestas: d) 3^era Porque no hay propiedad alguna, siendo más bien otra forma de notación, e) 1^era (Por el Logaritmo de una potencia), f) 2^da (Tras desarrollar el Logaritmo de un cociente)

Interesantes Propiedades de los Logaritmos, que permiten simplificar Exponenciales son:

$$\boxed{x = 10^{Log\,x}\ ;\ \ x = e^{Ln\,x}\ ;\ \ x = a^{Log_a x}}$$

Ej 11.4 Se efectúan simplificaciones de Exponenciales y Logaritmos.

a) $9^{Log_9 x}$ $\qquad 9^{Log_9 x} = x$

b) $10^{2\,Log\,x}$ $\qquad 10^{2\,Log\,x} = 10^{Log(x^2)} = x^2$

c) $e^{\frac{Ln\,x}{5}}$ $\qquad e^{\frac{Ln\,x}{5}} = e^{\frac{1}{5}Ln\,x} = e^{Ln\,(x^{1/5})} = x^{1/5} = \sqrt[5]{x}$

d) $7^{-Log_7 x}$ $\qquad 7^{-Log_7 x} = 7^{Log_7 (x^{-1})} = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

e) 3^x $\qquad 3^x = e^{Ln\,(3^x)} = e^{x\,Ln\,3} = e^{(Ln\,3)\,x}$

La Exponencial de base 9 se anula con el Logaritmo de base 9.

En b) Para simplificar, previamente el coeficiente 2 se lo lleva como exponente, por una Propiedad de logaritmos. Y similarmente luego.

En el inciso e) se expresa una exponencial, usando a la base *e*.

XI.3 CAMBIO DE BASE

Para hallar el *Logaritmo de un Número*, en una Base diferente de las usuales de: 10 o *e*, se aplica la siguiente Fórmula:

Donde: *A* es la base conocida (10 o *e*); *B* es la nueva Base; siendo: *x* el Número cuyo Logaritmo en base *B* se busca.

$$\boxed{Log_B\,x = \frac{Log_A\,x}{Log_A\,B}}$$

La Demostración de esta Fórmula, arranca de la definición de Logaritmos.

Si: $Log_B\,x = M \;\Rightarrow\; B^M = x$ — Considerando inicialmente una Base: *B*

$Log_A\,x = Log_A\,(B^M)$ — Aplicando Logaritmos en Base: *A* a ambos miembros de la Igualdad. Usando una Propiedad de Logaritmos, en el Segundo miembro de la Igualdad.

$Log_A\,x = M\,Log_A\,B$

$\Rightarrow\ M = \dfrac{Log_A\,x}{Log_A\,B} \;\Rightarrow\; Log_B\,x = \dfrac{Log_A\,x}{Log_A\,B}$ — Despejando: *M*. Reemplazando: *M*, queda demostrada la Fórmula.

Ej 11.5 Se calcula un Logaritmo, con Base: 5

$$Log_5 625 \qquad \text{Si: } Log_B x = \frac{Log_A x}{Log_A B}$$

Tomando: $x = 625$; se quiere calcular su logaritmo en la nueva Base: $B = 5$.

$$Log_5 625 = \frac{Log_{10} 625}{Log_{10} 5} = \frac{2.795880017}{0.698970004} = 4$$

Por la Fórmula y usando Logaritmos con Base conocida: 10.

$$Log_5 625 = \frac{Log_{10} 625}{Log_{10} 5} = \frac{Log_{10} 5^4}{Log_{10} 5} = \frac{4\, Log_{10} 5}{Log_{10} 5} = 4$$

Calculando de dos modos, por la fórmula y por una potencia conocida. No es necesario indicar que la nueva base es 10, se la anota para mayor énfasis. Verificando: $5^4 = 625$

11.2 Calcular los siguientes Logaritmos con Base diferente de las usuales:

a) $Log_{12} 1500$

$$Log_{12} 1500 = \frac{Log_{10} 1500}{Log_{10} 12} = \frac{3.176091}{1.079181} = 2.943056$$

Aplicando la Fórmula del Cambio de Base. Como conocida se emplea la Base: 10

b) $Log_{\sqrt{2}} 64$

$$Log_{\sqrt{2}} 64 = \frac{Log_{10} 64}{Log_{10} \sqrt{2}} = \frac{1.806180}{0.150515} = 12$$

$$Log_{\sqrt{2}} 64 = \frac{Log_{10} 64}{Log_{10} \sqrt{2}} = \frac{Log_{10} (2^6)}{Log_{10} (2^{1/2})} = \frac{6\, Log_{10} (2)}{\frac{1}{2} Log_{10} (2)} = 12$$

En b) el resultado puede no ser exacto, por ello se calcula también de otro modo, aprovechando que hay una potencia exacta y por propiedades.

En c, d) No es posible el cálculo, ya que la base debe ser Positiva, además el número cuyo Logaritmo se busca debe ser positivo.

c) $Log_{-2} 128$ $\qquad$ $Log_{-2} 128 = ??$

d) $Log_5 (-25)$ $\qquad$ $Log_5 (-25) = ??$

La Base debe ser necesariamente Positiva, porque los Exponenciales que definen a los Logaritmos, a su vez se definen solo para Bases Positivas.

e) $A = Log_4 64 - 4\, Log_2 \sqrt{8} + 27\, Log_8 \sqrt[3]{2}$

$$= \frac{Log\, 64}{Log\, 4} - 4\frac{Log \sqrt{2^3}}{Log\, 2} + 27\frac{Log \sqrt[3]{2}}{Log\, 8} = \frac{Log\, 4^3}{Log\, 4} - 4\frac{Log\, 2^{3/2}}{Log\, 2} + 27\frac{Log\, 2^{1/3}}{Log\, 2^3}$$

$$= \frac{3\, Log 4}{Log\, 4} - 4\frac{\frac{3}{2} Log 2}{Log\, 2} + 27\frac{\frac{1}{3} Log 2}{3\, Log\, 2} = 3 - 4\,\frac{3}{2} + 27\,\frac{(1/3)}{3} = 3 - 6 + 3 = 0$$

Efectuando Cambios de base y simplificando.

f)

$$5^{-3 Log_5 x} + 2^{Log_8 x} + 6^{\frac{3}{Log_x 6}} = 5^{Log_5 (x^{-3})} + 2^{\frac{Log_2 x}{Log_2 8}} + \left(6^{\frac{1}{Log_x 6}}\right)^3$$

$$= (x^{-3}) + \left(2^{Log_2 x}\right)^{\frac{1}{Log_2 8}} + \left(6^{\frac{Log_6 x}{Log_6 6}}\right)^3 = x^{-3} + (x)^{\frac{1}{Log_2 2^3}} + \left(6^{\frac{Log_6 x}{1}}\right)^3$$

$$= x^{-3} + (x)^{\frac{1}{3}} + \left(6^{Log_6 x}\right)^3 = x^{-3} + (x)^{\frac{1}{3}} + (x)^3 = \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x} + x^3$$

Para simplificar se emplean Propiedades de exponenciales, y cambio de base de logaritmos procurando llegar a la forma y uso de $a^{Log_a u} = u$

Otra Propiedad útil es: $a^{\frac{1}{Log_N a}} = N$; cuya demostración es:

$$a^{\frac{1}{Log_N a}} = N = a^{Log_a N} = a^{\frac{Log_N N}{Log_N a}} = a^{\frac{1}{Log_N a}}$$

Aplicando la Propiedad: $a^{Log_a u} = u$ En el 2^{do} miembro Luego por la fórmula de Cambio de base, llevando a la nueva base N. Por tanto se cumple que:

$$5^{\frac{1}{Log_6 5}} = 6 \qquad 7^{\frac{1}{Log 7}} = 10 \qquad 3^{\frac{2}{Log 3}} = \left(3^{\frac{1}{Log 3}}\right)^2 = 10^2 = 100, \qquad 4^{\frac{3}{Log_2 4}} = \left(4^{\frac{1}{Log_2 4}}\right)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

XI.3.1 ANTILOGARITMOS

Un Antilogaritmo es en realidad una Exponencial de Base igual a la Base del Logaritmo.

Si la Base del Logaritmo es: $10 \Rightarrow Antilog\; x = 10^x$

Si la Base del Logaritmo es: $e \Rightarrow Antiln\; x = e^x$

En particular los Antilogaritmos se emplean para resolver Ecuaciones Logarítmicas. Antiguamente, al cálculo de Antilogaritmos, se llamaba el *Problema Inverso de los Logaritmos*.

Se llama Cologaritmo al logaritmo del inverso, es decir: $Colog\, A = Log\,\frac{1}{A}$

Ej 11.6 Se efectúan calculos, usando las expresiones anteriores de Antilogaritmos.

a) $Antilog\, 3 = 10^3 = 1\,000$ c) $Antilog_2\, 5 = 2^5 = 32$

b) $Antiln\, 5 = e^5 = 148.41$ d) $Antilog_3\, 7 = 3^7 = 2187$

Para calcular Antilogaritmos de base 10 o e, en calculadoras se tiene disponibles las teclas de: 10^x, e^x.

XI.4 ECUACIONES EXPONENCIALES

Se llaman Ecuaciones Exponenciales, a aquellas ecuaciones, que contienen a la Incógnita en el Exponente de algún Número Real.

Para resolver Ecuaciones Exponenciales: *Se separa en uno de los miembros de la Ecuación a la Expresión con Exponencial, para luego aplicar Logaritmos en ambos miembros de la Igualdad"*

Ej 11.7 Se resuelve una Ecuación Exponencial: $2^x - 32 = 0$

$$2^x - 32 = 0$$
$$2^x = 32$$
$$Log(2^x) = Log(32)$$
$$x\, Log\, 2 = Log\, 32 \Rightarrow$$
$$x = \frac{Log\, 32}{Log\, 2} = \frac{1.505149}{0.301029} = 5$$

Se separa en uno de los miembros a la Expresión con Exponenciales. Se aplica Logaritmos a ambos miembros de la Igualdad.

Se aplica la Propiedad: **T3** de los Logaritmos, la que permite bajar la incógnita del exponente.

Despejando: x Determinando los Logaritmos respectivos y dividiendo, se logra el resultado de la Ecuación.

En algunos casos, se hace necesario aplicar pasos correspondientes a los diferentes Tipos de Ecuación, como los vistos en el Cap. IX

11.4 Resolver las siguientes Ecuaciones Exponenciales:

a) $3^{2x-7} - 27 = 0$

$$3^{2x-7} - 27 = 0$$
$$3^{2x-7} = 27$$
$$Log\,(3^{2x-7}) = Log\, 27$$
$$(2x-7)\, Log\, 3 = Log\, 27$$
$$\Rightarrow \quad 2x - 7 = \frac{Log\, 27}{Log\, 3} = 3$$
$$2x - 7 = 3$$
$$\Rightarrow x = 5$$

b) $2^{3x-15} - 4^{x^2-46} = 0$

$$2^{3x-15} = 4^{x^2-46}$$
$$Log\,(2^{3x-15}) = Log\,(4^{x^2-46})$$
$$(3x-15)\, Log\, 2 = (x^2-46)\, Log\, 4$$
$$(3x-15) = (x^2-46)\,\frac{Log\, 4}{Log\, 2}$$
$$(3x-15) = (x^2-46)\, 2$$
$$2x^2 - 3x - 77 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 7 \;;\; x_2 = -\frac{11}{2}$$

Luego de simplificar la Ecuación Exponencial se llega a una Ecuación de segundo grado, cuyas raíces se obtiene por modos ya conocidos.

c) $x^{x^x} - 16 = 0$

$$x^{x^x} - 16 = 0$$
$$x^{x^x} = 16$$
$$x^{x^x} = 2^{2^2}$$
$$\Rightarrow x = 2$$

d) $x^x = \dfrac{1}{\sqrt[9]{3}}$

$$x^x = \left[\frac{1}{3}\right]^{\frac{1}{9}} = \left[\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{9}}$$
$$x^x = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{27}} \Rightarrow x = \frac{1}{27}$$

En c), d), se hace necesario reagrupar Términos, de manera que se verifiquen igualdades que permitan obtener el resultado. Note que no se usan logaritmos, solo Propiedades de exponentes.

e) $4^{2^x} - 2^{8^x} = 0$

$$4^{2^x} = 2^{8^x}$$
$$Log(4^{2^x}) = Log(2^{8^x})$$
$$2^x Log\,4 = 8^x Log\,2$$
$$\frac{8^x}{2^x} = \frac{Log\,4}{Log\,2}$$
$$\left(\frac{8}{2}\right)^x = 2 \Rightarrow$$
$$4^x = 2$$
$$Log\,4^x = Log\,2$$
$$x\,Log\,4 = Log\,2$$
$$\Rightarrow x = \frac{Log\,2}{Log\,4} = 0.5$$

f) $e^x - e^{-x} = 1$

$$e^x - e^{-x} - 1 = 0 \quad * e^x$$
$$e^{2x} - 1 - e^x = 0$$
$$(e^x)^2 - (e^x) - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$e^x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1(-1)}}{2\cdot 1}$$
$$e^x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tomando solo la raíz positiva

$$\Rightarrow Ln(e^x) = Ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$x\,Ln\,e = Ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$x = Ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0.48$$

Multiplicando por e^x, ambos miembros.

Se llega a una Ecuación cuadrática, resoluble por la Fórmula de 2^do^ grado.

Debe cuidarse que los Logaritmos se apliquen sobre positivos, por ello se toma la raíz positiva.

Otro modo es con el cambio de variable: $e^x = u \Rightarrow e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{u}$

g) $\dfrac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \dfrac{3}{5}$

$$5(2^x - 2^{-x}) = 3(2^x + 2^{-x}) \quad *(2^x)$$
$$5(2^{2x} - 1) = 3(2^{2x} + 1)$$
$$5\cdot 2^{2x} - 5 = 3\cdot 2^{2x} + 3$$
$$2\cdot 2^{2x} = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 4$$
$$\Rightarrow x = 1$$

h) $3^x + 3^y = 36$
$3^x - 3^y = 18$

Si: $u = 3^x$; $v = 3^y$

$$u + v = 36 \Rightarrow u = 36 - v \Rightarrow$$
$$u - v = 18 \Rightarrow (36 - v) - v = 18$$
$$\Rightarrow v = 9 \Rightarrow u = 27$$
$$u = 3^x = 27 \Rightarrow x = 3$$
$$v = 3^y = 9 \Rightarrow y = 2$$

En el último caso se tiene un Sistema de ecuaciones, previamente efectuando Cambios de variable, se presenta un Sistema Lineal.

i) $8^x - 4^x + 2^x - 456 = 0$

Ordenando:

$$(2^3)^x - (2^2)^x + 2^x - 456 = 0$$
$$(2^x)^3 - (2^x)^2 + 2^x - 456 = 0$$

Si: $u = 2^x$

$$u^3 - u^2 + u - 456 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 1 & -456 & \underline{\ 8\ } \\ & 8 & 56 & 456 & \\ \hline 1 & 7 & 57 & \underline{\underline{0}} & \end{array}$$

$$\Rightarrow (u - 8)(u^2 + 7u + 57) = 0$$
$$\Rightarrow u = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$$

j) $9^x + 3^{x+2} - 3^2 = 17\cdot 3^x$

Ordenando:

$$(3^2)^x + 3^x 3^2 - 9 = 17\cdot 3^x$$
$$3^{2x} + 3^x(3^2 - 17) - 9 = 0$$
$$(3^x)^2 - 8\cdot 3^x - 9 = 0$$

Si: $u = 3^x \Rightarrow u^2 - 8u - 9 = 0$

$$(u - 9)(u + 1) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} u = 9 \\ u = -1 \end{array}$$
$$\Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$$
$$\Rightarrow 3^x = -1 \Rightarrow \nexists \text{ Solución}$$

Ordenando adecuadamente los exponenciales se las convierte en Ecuaciones de 3^er^ y 2^do^ grado.

XI.5 ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Son Ecuaciones Logarítmicas, aquellas Ecuaciones, que presentan su incógnita afectada por Logaritmos.

Para resolver una Ecuación Logarítmica, se aplican las definiciones o los Antilogaritmos, según se precise. Cuando sea necesario se deben emplear las Propiedades o Cambios de Base que se requieran.

Ej 11.8 Se resuelve la siguiente Ecuación Logarítmica: $Log\,(3x - 8) - 2 = 0$

$Log\,(3x - 8) - 2 = 0$ Separando en un miembro de la Ecuación a la expresión con Logaritmos.

$Log\,(3x - 8) = 2$

$(3x - 8) = Antilog\,2$ Despejando, el Logaritmo del 1^er^ miembro pasa como Antilogaritmo al 2^do^ miembro.

$3x - 8 = 10^2$ Por definición de Antilogaritmo.

$3x - 8 = 100$

$\Rightarrow\ x = \dfrac{108}{3} = 36$ Despejando: x, queda totalmente resuelta la Ecuación.

11.5 Resolver las siguientes Ecuaciones Logarítmicas:

a) $Log\,(7x^2 + 1) - 3 = 0$

$$Log\,(7x^2 + 1) - 3 = 0$$
$$Log\,(7x^2 + 1) = 3$$
$$(7x^2 + 1) = Antilog\,3$$
$$7x^2 + 1 = 10^3 = 1000$$
$$x = \sqrt{\frac{1000 - 1}{7}} = 11.95$$

b) $Log\,(x + 1) + Log\,(x - 2) = 1$

$$Log\big[(x + 1)(x - 2)\big] = Log\,10$$
$$(x + 1)(x - 2) = 10$$
$$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 4\ ;\ x_2 = -3$$
$$\text{Si: } x = 4 \Rightarrow Log(4 + 1) + Log(4 - 2) = 1$$
$$1 = 1 \quad \text{Válido}$$
$$\text{Si: } x = -3 \Rightarrow Log(-3 + 1) + Log(-3 - 2) = 1$$
$$Log(-2) + Log(-5) = 1 \quad ?? \quad \text{No válido}$$

c) $\sqrt{Log\sqrt{x}} = 0.5$

$$\sqrt{Log\sqrt{x}} = 0.5$$
$$\left(\sqrt{Log\sqrt{x}}\right)^2 = (0.5)^2$$
$$Log\sqrt{x} = 0.25$$
$$\sqrt{x} = Antilog\,0.25$$
$$\sqrt{x} = 10^{0.25}$$
$$\sqrt{x} = 1.7783$$
$$(\sqrt{x})^2 = (1.7783)^2$$
$$\Rightarrow x = 3.1623$$

d) $Log\,x = Ln\,2x$

$$Log\,x = Ln\,2x$$
$$Log\,x = \frac{Log\,2x}{Log\,e}$$
$$Log\,e = \frac{Log\,2x}{Log\,x}$$
$$Log\,e = \frac{Log\,2 + Log\,x}{Log\,x}$$
$$Log\,x = \frac{Log\,2}{Log\,e - 1}$$
$$Log\,x = -0.5321 \Rightarrow$$
$$x = 10^{-0.5321} = 0.2937$$

e) $\dfrac{Log_{\sqrt{2}}\,(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})}{1 + Log_2(x - 4)} = 1$

$$\frac{\dfrac{Log\,(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})}{Log\,\sqrt{2}}}{1 + \dfrac{Log\,(x - 4)}{Log\,2}} = 1$$
$$\frac{\dfrac{Log\,(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})}{\frac{1}{2}Log\,2}}{\dfrac{Log\,2 + Log\,(x - 4)}{Log\,2}} = 1$$
$$\frac{2\,Log\,(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})}{Log\,[2\,(x - 4)]} = 1$$
$$Log\,(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})^2 = Log\,(2x - 8)$$
$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})^2 = 2x - 8$$
$$2x - 2\sqrt{x^2 - 9} = 2x - 8$$
$$\sqrt{x^2 - 9} = 4 \Rightarrow x = 5$$

En d) Note la necesidad de convertir a una misma base de Logaritmos, usando la fórmula al respecto para convertir $Ln\,2x$ a logaritmos decimales.

En e) se cambia todo a Logaritmos decimales. De las soluciones 5, -5; solo es válida 5

11.6 Resolver las siguientes Ecuaciones Logarítmicas:

a) $Log_4\left[Log_3(Log_2 x)\right] = 0$

En esta Ecuación, Logaritmos de diversa base afectan a la incógnita x

$$Log_4\left[Log_3(Log_2 x)\right] = 0$$
$$\left[Log_3(Log_2 x)\right] = Antilog_4 0 = 4^0$$
$$Log_3(Log_2 x) = 1$$
$$(Log_2 x) = Antilog_3 1 = 3^1$$
$$Log_2 x = 3$$
$$x = Antilog_2 3 = 2^3 \Rightarrow x = 8$$

Al despejar, el Logaritmo de base 4 pasa al 2do miembro como Antilogaritmo de base 4, tomando en cuenta la Propiedad:

$$Antilog_a u = a^u$$

Similarmente se despejan los Logaritmos de otras bases.

b) $Log(2x^2 - 5x + 4) = 0$

$$2x^2 - 5x + 4 = Antilog\, 0$$
$$2x^2 - 5x + 4 = 10^0 = 1$$
$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$
$$(2x - 3)(x - 1) = 0$$
$$\Rightarrow x = 3/2\ ;\ x = 1$$

c) $Log_x 81 = 4$

$$81 = Antilog_x 4$$
$$81 = x^4$$
$$x = \sqrt[4]{81} = 3$$

En c), la incógnita es la Base Resolviendo por la definición de Logaritmos.

Despejando luego a la incógnita x.

d) $Log_2 x + Log_4 x + Log_8 x = \dfrac{11}{2}$

$$\frac{Log\,x}{Log\,2} + \frac{Log\,x}{Log\,4} + \frac{Log\,x}{Log\,8} = \frac{11}{2}$$
$$\frac{Log\,x}{Log\,2} + \frac{Log\,x}{Log\,2^2} + \frac{Log\,x}{Log\,2^3} = \frac{11}{2}$$
$$\frac{Log\,x}{Log\,2} + \frac{Log\,x}{2\,Log\,2} + \frac{Log\,x}{3\,Log\,2} = \frac{11}{2}$$
$$\frac{Log\,x}{Log\,2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] = \frac{11}{2}$$
$$\frac{Log\,x}{Log\,2}\left[\frac{11}{6}\right] = \frac{11}{2} \Rightarrow \frac{Log\,x}{Log\,2} = 3$$
$$Log\,x = 3\,Log\,2 = Log\,2^3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$$

En forma previa se convierten todos los logaritmos de diversa Base a Base 10 (Que no se anota, se la supone)

Luego por Propiedades de Logaritmo, factorizando y simplificando se logra el resultado.

En h) Se considera que $1 = Log_2 2$, luego se ordena y agrupa los Logaritmos del 2do miembro.

En i) se tiene un Sistema de ecuaciones, efectuando Cambios de variable, queda un Sistema Lineal que se resuelve por el Método de Sustitución.

h) $\dfrac{Log_2 x}{1 + Log_2(3x - 40)} = 1$

$$Log_2 x = 1 + Log_2(3x - 40)$$
$$\text{Considerando: } 1 = Log_2 2$$
$$Log_2 x = Log_2 2 + Log_2(3x - 40)$$
$$Log_2 x = Log_2\left[2(3x - 40)\right]$$
$$\Rightarrow x = 2(3x - 40)$$
$$x = 6x - 80 \Rightarrow x = 16$$

i) $3\,Log\,x + 2\,Log\,y = 12$
$4\,Log\,x - Log\,y = 5$

$$\text{Si: } u = Log\,x\ ;\ v = Log\,y$$
$$\begin{matrix} 3u + 2v = 12 \\ 4u - v = 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} v = 4u - 5 \Rightarrow \\ 3u + 2(4u - 5) = 12 \end{matrix}$$
$$\Rightarrow u = 2 \Rightarrow v = 3$$
$$u = Log\,x = 2 \Rightarrow x = Antilog\,2 = 100$$
$$v = Log\,y = 3 \Rightarrow y = Antilog\,3 = 1\,000$$

En el último inciso, se imponen Cambios de variable, para así lograr un Sistema Lineal, tras resolver se debe volver a las variables iniciales.

XI.- PROBLEMAS PROPUESTOS

11.1 Hallar los siguientes Logaritmos: a) $Log\ 5$ b) $Log\ 240$ c) $Log\ 1000$
d) $Log(-2)$ e) $Ln\ 5$ f) $Ln\ 240$ g) $Ln\ 1000$ h) $Ln(-2)$

11.2 a) Demostrar las Propiedades de Logaritmos: **T2** y **T3**
b) Demostrar que el Cociente: $Log\ A/Ln\ A$ es Constante, para todo A
c) Demostrar que el Logaritmo de la misma Base es siempre: 1 ($Log_a a = 1$)
d) Demostrar: $a^x = e^{(Ln a)x}$; $Log_a b = \dfrac{1}{Log_b a}$; $Log_{1/b} A = -Log_b A$; $x = 10^{Log\,x}$; $x = e^{Ln\,x}$

11.3 Desarrollar por Logaritmos:
a) $Log\left(\dfrac{x^7 y^2}{z^4}\right)$ b) $Log\ \sqrt[3]{x}$ c) $Log\ \dfrac{x^2+y^4}{z^3}$ d) $Log\ \sqrt[5]{\dfrac{x^2}{y^3}}$ e) $Ln\ \sqrt[n]{\dfrac{x-u}{y+v}}$

11.4 Calcular los siguientes Logaritmos de diversa Base.
a) $Log_2 64$ b) $Log_5 100$ c) $Log_7 2401$ d) $Log_{12} 864$ e) $Log_{-4} 256$ e) $Log_3(-81)$

11.5 Calcular los siguientes Logaritmos y exponenciales de diversa Base.

a) $Log_3\left(\dfrac{1}{81}\right)$ b) $Log_{\sqrt{3}} 3 + Log_3 27 + Log_9 81$ c) $3^{-Log_3(1/5)}$ d) $2^{-Log_5(1/25)}$

e) $Log_a\left(\dfrac{1}{a^2}\right)$ f) $5^{Log_4 3 \cdot Log_5 4}$ g) $\dfrac{1}{1+Log_a bc} + \dfrac{1}{1+Log_b ac} + \dfrac{1}{1+Log_c ab}$

h) $3^{Log_{1/3}(2)}$ i) $2^{Log_4 2 \cdot Log_2 4 \cdot Log_7 7}$ j) $\dfrac{Log_2 4 + Log_{1/4} 4}{Log_3 243 + Log_{1/3} 81}$ k) $\dfrac{9^{Log_3 x}}{5^{Log_{25} x}}$

l) $4^{\frac{1}{Log_3 4}} + 8^{\frac{1}{Log_2 8}}$ m) $3^{Log_9 x} + 5^{\frac{2}{Log_x 5}}$ n) $\dfrac{25^{1/(2Log_{49}25)} + 2Log_2[Log_2(Log_2 7^{2Log_7 4})]}{3^{1/Log_4 3} + 3^{-1/Log_2 3} + \sqrt{3}(2^{-1/Log_3 4})}$

11.6 Resolver las siguientes Ecuaciones Exponenciales:
a) $3^x - 243 = 0$ c) $5^{2x-6} - 625 = 0$ e) $3^{3x-17} - 9^{x-5} = 0$ g) $8^{2^x} - 2^{4^x} = 0$
b) $4^{3x-9} - 64 = 0$ d) $2^{x^2-1} - 4^{x+1} = 0$ f) $2^{x^2+1} - 3^{x^2-1} = 0$ h) $7^{3x^2+3} - 7^{x^2+7x} = 0$

11.7 Resolver las siguientes Ecuaciones Exponenciales:
a) $2^x + 2^{-x} = 5/2$ b) $3^x - 3^{-x} = 80/9$ c) $9^x - 3^x - 72 = 0$ d) $4^x + 2^x - 72 = 0$

e) $\dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \dfrac{40}{41}$ f) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 3$ g) $Log(8^{Log\,x}) - Log(2^{Log\,x}) = Log(x^{Log\,x})$

h) $2^x + 2^y = 24$, $2^x - 2^y = 8$ i) $2^{x+3} + 2^y = 130$, $2^x - 2^{y+2} = 8$ j) $3^{\sqrt{x}} + 9^{\sqrt{y}} = 108$, $2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{y}} = 63$ k) $8 \cdot 2^x = 2^y$, $81^x = 27(3^{2y-3})$

l) $8^x - 5 \cdot 4^x + 2 \cdot 2^x + 8 = 0$ m) $5^{x+2} - 7 \cdot 3^{x+1} = 5^{x+3} - 3^{x+4}$ n) $3^{2x-6} - 3^{x-2} - 54 = 0$

o) $3^{4^x} = 9$ p) $2^{3^{8^x}} = 512$ q) $3^{4^{2^x}} = 9$ r) $4^{4^x} = \sqrt{2}$

11.8 Resolver las siguientes Ecuaciones Logarítmicas:

a) $Log(9x+1) - 2 = 0$ e) $Log(x^2 - 5x - 4) = 1$ i) $Log(x-2) + Log(x-5) = 1$

b) $7\,Log^2(8x+3) = 9$ f) $Log(3x^2 - 13x + 5) = 0$ j) $Log(x-2) - Log(x-11) = 1$

c) $Ln(8x-7) - 4 = 0$ g) $Log_3(5x-1) - 2 = 0$ k) $Log(x^2 - 81) - Log(x-9) = 2$

d) $27Ln^3(4x-1) = 8$ h) $Log_{\sqrt{2}}(3x-5) - 8 = 0$ l) $Log\,x + Log(x-1) - Log(x-3) = 1$

11.9 Resolver las siguientes Ecuaciones Logarítmicas:

a) $Log_x(64) = 3$

b) $Log_x(100) = 3$

c) $Log_x 4 = x$

d) $Log_{3/x} 25 = 2$

e) $Log_{\sqrt{x}} 49 = 4$

f) $Log_2(x+y) = 3$; $Log_2(x-y) = 1$

g) $Log_x 64 = Log_2\sqrt{8}$

h) $Log\,x + 4\,Log\,y = 12$; $3\,Log\,x - 2\,Log\,y = 8$

i) $Log_2^2 x - Log_3^2 y = 12$; $Log_2 x + Log_3 y = 6$

j) $Log_x y^3 + Log_y x^3 = 10$; $Log_2 x + Log_2 y = 4$

k) $Log_{1/4}(x^3) = Log_3\sqrt{27}$

l) $Log_5\{Log_4[Log_3(Log_2 x)]\} = 0$

m) $Log_{1/2}[Log_4(Log_3 x)] = 1$

n) $\dfrac{Log_3 x}{1 + Log_3(x-78)} = 2$

o) $Log_3 x \cdot Log_x 2x \cdot Log_{2x} n = Log_x x^2$

p) $Log_3 x + Log_x 3 = 3 + Log_x(1/3)$

11.10 Verificar que: a) $\dfrac{Log(Log\,a)}{Log\,a} = Log_a(Log\,a)$ b) $\dfrac{b^{\frac{Log(Log\,b)}{Log\,b}}}{Log\,b} = 1$ c) $7^{-\frac{5}{Log_2 7}} = \dfrac{1}{32}$

d) Demostrar Si: $a^2 + b^2 = 7ab$ entonces $Log(\dfrac{a+b}{3}) = \dfrac{1}{2}(Log\,a + Log\,b)$

RESPUESTAS X

11.1 0.698970 ; 2.380211 ; 3 ; ∄ ; 1.609438 ; 5.480639 ; 6.907755 ; ∄

11.3 a) $7Log\,x + 2Log\,y - 4Log\,z$ b) $\dfrac{Log\,x}{3}$ d) $\dfrac{2Log\,x - 3Log\,y}{5}$ e) $\dfrac{Log(x-u) - Log(y+v)}{n}$
c) $Log(x^2 + y^4) - 3Log\,z$

11.4 6 ; 2.861353 ; 4
2.721057 ; ∄ ; ∄

11.5 a) -4 b) 7 c) 5 d) 4 e) -2 g) 1 h) 1/2
f) 3 i) 2 j) 1 k) $x^{3/2}$ l) 5 m) $\sqrt{x} + x^2$ n) 2

11.6 a) 5 b) 4 c) 5 d) 3; -1 e) 7 f) ±2.102147 g) 1.5850 h) 3; 1/2

11.7 a) ±1 b) 2 c) 2 d) 3 e) 2 f) 1.82 g) 4 h) (4,3) i) (4,1)
j) (9,4) k) (3,6) l) 1; 2 m) -1 n) 5 o) 1/2 p) 1/3 q) -1 r) 1

11.8 a) 11 b) 1.3264 c) 7.6998 d) 0.7369 e) -2; 7 f) 1/3; 4
g) 2 h) 7 i) 7 j) 12 k) 91 l) 5

11.9 a) $x = 4$ b) $\sqrt[3]{100}$ c) 2 d) 3/5 e) 7 f) (5,3) g) 16
h) $x = 10^4$; $y = 10^2$ i) (16,9) j) (2,8); (8,2) k) 1/2 l) 2^{81}
m) 9 n) 81 o) $n = 9$ p) 9; 3

XII.- BINOMIO DE NEWTON

XII.1 BINOMIOS A POTENCIA: n

Los Binomios de la forma: $(a+b)^n$ en sus desarrollos para diversos valores de: n poseen ciertas características, las que pueden establecerse por diversos modos o reglas.

Si por los métodos usuales de Multiplicación de Polinomios (III.3), se efectúan los productos indicados, se obtendrán los siguientes desarrollos:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = (a+b) = a+b$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$\ldots$$

En todos estos Desarrollos, se cumplen ciertas regularidades, lo que permite determinar las siguientes Propiedades:

T1) Si la Potencia es: n el Número de Términos es de: $n+1$

T2) El 1er Término del Binomio: a posee inicialmente la Potencia: n, que gradualmente va decreciendo, hasta desaparecer del último Término del desarrollo (Exponente 0)

T3) El 2do Término del Binomio: b no está presente en el desarrollo inicialmente (Exponente 0), para luego crecer gradualmente hasta la Potencia: n

T4) El Grado Absoluto (Suma de los Grados de: a, b) es igual a: n, en todos los Términos del desarrollo.

T5) Los Coeficientes de los Términos del desarrollo son simétricos, así el Coeficiente del primero es igual al último, el segundo es igual al penúltimo y así sucesivamente.

T6) El Coeficiente del Primer Término del desarrollo es: 1; el del Segundo Término, es igual a la Potencia: n del Binomio.

T7) Si un Coeficiente se multiplica por el Exponente de: a y luego se divide entre el Exponente de: b mas uno, se obtendrá el Coeficiente del siguiente Término.

T8) La suma de todos los Coeficientes del desarrollo es igual a: 2^n

Todas estas Propiedades, muestran que existe una cierta regularidad en los desarrollos de Binomios, elevados a una Potencia: n, que permitirá plantear una Fórmula general.

El *Teorema del Binomio*, precisamente establece esa Fórmula general, que permite desarrollar un Binomio, elevado a un Exponente: n

Existen varios modos de desarrollo de un binomio a potencia n, pero para ello son precisos los siguientes conceptos previos:

XII.1.1 FACTORIALES

El Factorial de un Número Natural: n se define:
(Como caso especial se tiene: $0! = 1$)

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

Ej 12.1 Se calculan los siguientes Factoriales:

$4!$
$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

$7!$
$7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5040$

$1!$ $\quad$ $0!$
$1! = 1$ $\quad$ $0! = 1$

$(-5)!$ $\quad$ $(\frac{7}{2})!$

$(-5)! = \nexists$ $\quad$ $(\frac{7}{2})! = \nexists$

Aplicando la definición de Factoriales.

Las Calculadoras permiten el cálculo de Factoriales. Sin embargo por el alto valor que alcanzan los Factoriales, algunas Calculadoras, solo pueden calcular hasta 69!

En estos casos, se aplica la definición como casos especiales.

En estos casos últimos, no es posible el cálculo, porque los Factoriales se definen solo para Números positivos y enteros.

Una generalización de los factoriales que permite trabajar con fraccionarios es la Función Gamma.

PROPIEDADES Dada la definición de Factoriales, se cumplen las siguientes Propiedades:

T1) $n! = n(n-1)!$ $\qquad$ **T3)** $(m+n)! \neq m! + n!$

T2) $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1$ $\qquad$ **T4)** $(m\cdot n)! \neq m!\cdot n!$

Ej 12.2 Se ejemplifican las Propiedades de los Factoriales:

a) $6! = 6\cdot 5! = 6\cdot 5\cdot 4! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!$
$= 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$

Se emplea reiteradamente la Propiedad: **T1)** $n! = n(n-1)!$

b) $\dfrac{8!}{7!} = \dfrac{8\cdot 7!}{7!} = 8$

c) $\dfrac{75!}{73!} = \dfrac{75\cdot 74\cdot 73!}{73!} = 75\cdot 74 = 5550$

Se emplea la Propiedad: **T2)** $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1$

XII.1.2 NÚMEROS COMBINATORIOS

Los *Números Combinatorios* (Llamados también *Números Binómicos*), se definen para los Números naturales: $n; r$ de la siguiente manera:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \qquad n \geq r$$

Ej 12.3 Se calculan algunos Números Combinatorios:

a) $\dbinom{5}{3}$ $\qquad \dbinom{5}{3} = \dfrac{5!}{(5-3)!3!} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(2\cdot 1)(3\cdot 2\cdot 1)} = \dfrac{120}{(2)(6)} = 10$

Por definición de Número Combinatorio.

b) $\dbinom{7}{6}$ $\qquad \dbinom{7}{6} = \dfrac{7!}{(7-6)!6!} = \dfrac{7!}{1!6!} = \dfrac{5040}{1\cdot 720} = 7$

c) $\binom{4}{9} = \nexists$ d) $\binom{5}{-2} = \nexists$

En c) no se cumple la condición de que el primer número sea mayor o igual al otro. No existe Combinatorio.
En d) no deberían emplearse Números negativos.

e) $\binom{78}{75}$

$$\binom{78}{75} = \frac{78!}{(78-75)!\,75!} = \frac{78\cdot 77\cdot 76\cdot 75!}{3!\,75!} = \frac{78\cdot 77\cdot 76}{3!} = 76076$$

El valor de los factoriales de 78 y 75 es demasiado alto, excede a la capacidad de las calculadoras usuales. Se hace necesario usar Propiedades.

PROPIEDADES Dada la definición de Combinatorios, se cumplen las Propiedades:

T1) $\binom{n}{n} = 1$ **T2)** $\binom{n}{0} = 1$ **T3)** $\binom{n}{1} = n$ **T4)** $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

T5) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ **T6)** $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$

Estas Propiedades pueden demostrarse aplicando la definición de Combinatorios.

Ej 12.4 Se demuestran propiedades de los Combinatorios:

T1) $\binom{n}{n} = 1$

Si: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1$$

En general se cumple:

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+k}{n+k} = 1$$

T4) $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

$$\frac{n!}{(n-r)!\,r!} + \frac{n!}{(n-(r-1))!\,(r-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!}$$

$$\frac{n!}{(n-r)!\,r\,(r-1)!} + \frac{n!}{(n-r+1)\,(n-r)!\,(r-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!}$$

$$\frac{n!\,(n-r+1) + n!\,r}{(n-r+1)\,(n-r)!\,r\,(r-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!}$$

$$\frac{n!\,[(n-r+1) + r]}{(n-r+1)!\,r!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!}$$

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!}$$

Ej 12.5 Se calcula el valor de n de: $\binom{n+2}{n} = 21$

Si: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \Rightarrow \binom{n+2}{n} = \frac{(n+2)!}{[(n+2)-n]!\,n!} = 21$

Por la definición de Número Combinatorio.

$$\frac{(n+2)\,(n+1)\,n!}{2!\,n!} = \frac{(n+2)\,(n+1)}{2} = 21$$

Desarrollando el factorial del numerador y simplificando.

$$\Rightarrow\ n^2 + 3n - 40 = 0 \ \Rightarrow\ \begin{matrix} n = 5 \\ n = -8 \end{matrix} \ \Rightarrow\ \binom{7}{5} = 21$$

Tomando la Solución positiva de la Ecuación de 2do grado.

> Los Factoriales y Combinatorios se pueden calcular directamente por Calculadora, mediante las teclas ***n!*** , ***nCr*** respectivamente

XII.2 TEOREMA DEL BINOMIO

El Teorema del Binomio de Newton, expresa que un Binomio elevado a una Potencia: n se desarrolla bajo la siguiente Fórmula:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

Ej 12.6 Se desarrollan los siguientes Binomios, por el Teorema del Binomio:

a) $$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1!}a^{3-1}b + \frac{3(3-1)}{2!}a^{3-2}b^2 + \frac{3(3-1)(3-2)}{3!}a^{3-3}b^3$$
$$= a^3 + \frac{3}{1}a^2b + \frac{3(2)}{2}ab^2 + \frac{3(2)(1)}{6}b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

b) $$(a+b)^5 = a^5 + \frac{5}{1!}a^{5-1}b + \frac{5(5-1)}{2!}a^{5-2}b^2 + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!}a^{5-3}b^3 +$$
$$\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}a^{5-4}b^4 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{5!}a^{5-5}b^5$$
$$= a^5 + \frac{5}{1}a^4b + \frac{5(4)}{2}a^3b^2 + \frac{5(4)(3)}{6}a^2b^3 + \frac{5(4)(3)(2)}{24}ab^4 + \frac{5(4)(3)(2)(1)}{120}b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

El desarrollo se prolonga hasta encontrar al 2[do] Término del Binomio (b), elevado a la Potencia n (El siguiente Coeficiente será cero)

12.1 Desarrollar por el Binomio de Newton:

a) $(3x+y^2)^4 \qquad n = 4 \ ; \ a = 3x \ ; \ b = y^2$

$$(3x+y^2)^4 = (3x)^4 + \frac{4}{1!}(3x)^{4-1}y^2 + \frac{4(4-1)}{2!}(3x)^{4-2}(y^2)^2 +$$
$$\frac{4(4-1)(4-2)}{3!}(3x)^{4-3}(y^2)^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{4!}(3x)^{4-4}(y^2)^4$$
$$= 3^4x^4 + 4\cdot 3^3x^3y^2 + 6\cdot 3^2x^2y^4 + 4\cdot 3xy^6 + 1y^8$$
$$= 81x^4 + 108x^3y^2 + 54x^2y^4 + 12xy^6 + y^8$$

Se reemplaza en la Fórmula, para luego simplificar por Leyes de Exponentes.

b) $(x-y)^3$

$(x-y)^3 = [x+(-y)]^3 \qquad n = 3 \ ; \ a = x \ ; \ b = -y$

$$(x+y)^3 = x^3 + \frac{3}{1!}x^{3-1}(-y) + \frac{3(3-1)}{2!}x^{3-2}(-y)^2 + \frac{3(3-1)(3-2)}{3!}x^{3-3}(-y)^3$$
$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

En el desarrollo de una Diferencia a una Potencia: n, los signos que se logran, son alternados.

c) $\sqrt{a+b} \ ; \ n = 1/2$

$$(a+b)^{1/2} = a^{1/2} + \frac{1/2}{1!}a^{1/2-1}b^1 + \frac{1/2(1/2-1)}{2!}a^{1/2-2}b^2 + \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)}{3!}a^{1/2-3}b^3 + \dots$$
$$= a^{1/2} + \frac{1}{2}a^{-1/2}b - \frac{1}{8}a^{-3/2}b^2 + \frac{3}{48}a^{-5/2}b^3 + \dots$$

Por la potencia no entera el desarrollo posee infinitos Términos, es decir el desarrollo no llega a un final.

XII.2.1 TRIÁNGULO DE PASCAL

Los Coeficientes de los Desarrollos obtenidos poseen una Forma general, que pueden describirse mediante el *Triángulo de Pascal*:

Si: $n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1

Note que cada Coeficiente se obtiene como la Suma de los dos números situados inmediatamente encima. El desarrollo puede proseguir, hasta una Potencia: n

Todos los Coeficientes del Triángulo de Pascal, pueden describirse de mejor manera, usando Números Combinatorios.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Desarrollando cada Combinatorio, se verifica que se obtiene el mismo Triángulo de Pascal.

El Teorema del Binomio de Newton, entonces toma la siguiente Forma:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r}$$

La demostración por Inducción Matemática, se efectúa posteriormente en el Ej 12.10

Ej 12.7 Se desarrolla por el Binomio de Newton con Combinatorios: $(a+b)^4$

$$(a+b)^4 = \sum_{r=0}^{4} \binom{4}{r} a^{4-r} b^r$$

Reemplazando en: $n = 4$, y desarrollando los Combinatorios, por la definición antes establecida.

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^{4-1} b + \binom{4}{2} a^{4-2} b^2 + \binom{4}{3} a^{4-3} b^3 + \binom{4}{4} a^{4-4} b^4$$

$$= \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a b^3 + \binom{4}{4} b^4$$

$$= \frac{4!}{(4-0)!\,0!} a^4 + \frac{4!}{(4-1)!\,1!} a^3 b + \frac{4!}{(4-2)!\,2!} a^2 b^2 + \frac{4!}{(4-3)!\,3!} a b^3 + \frac{4!}{(4-4)!\,4!} b^4$$

$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

12.2 Desarrollar por el Binomio de Newton con Números Combinatorios:

$$(x^3 + 7y)^5 \qquad n = 5 \;;\; a = x^3 \;;\; b = 7y$$

$$(x^3 + 7y)^5 = \sum_{r=0}^{5} \binom{5}{r} (x^3)^{5-r} (7y)^r$$

$$= \binom{5}{0}(x^3)^5(7y)^0 + \binom{5}{1}(x^3)^{5-1}(7y)^1 + \binom{5}{2}(x^3)^{5-2}(7y)^2 + \binom{5}{3}(x^3)^{5-3}(7y)^3 + \binom{5}{4}(x^3)^{5-4}(7y)^4 + \binom{5}{5}(x^3)^{5-5}(7y)^5$$

$$= \binom{5}{0}x^{15} + \binom{5}{1}7x^{12}y + \binom{5}{2}49x^9y^2 + \binom{5}{3}343x^6y^3 + \binom{5}{4}2401x^3y^4 + \binom{5}{5}16807y^5$$

$$= (1)x^{15} + (5)7x^{12}y + (10)49x^9y^2 + (10)343x^6y^3 + (5)2401x^3y^4 + (1)16807y^5$$

$$= x^{15} + 35x^{12}y + 490x^9y^2 + 3430x^6y^3 + 12005x^3y^4 + 16807y^5$$

El Triángulo de Pascal y los Números Binómicos, solo se pueden emplear cuando la potencia n es entero positivo. Si no se cumple esta condición, deberá emplearse el Teorema del Binomio.

12.3 Desarrollar por el Binomio de Newton, con Números Combinatorios:

a) $(2xy - 1)^4 = [2xy + (-1)]^4 = \sum_{r=0}^{4} \binom{4}{r} (2xy)^{4-r}(-1)^r \qquad n = 4 \;;\; a = 2xy \;;\; b = -1$

$$(2xy-1)^4 = \binom{4}{0}(2xy)^4 + \binom{4}{1}(2xy)^3(-1)^1 + \binom{4}{2}(2xy)^2(-1)^2 + \binom{4}{3}(2xy)^1(-1)^3 + \binom{4}{4}(-1)^4$$

$$= \binom{4}{0}16x^4y^4 - \binom{4}{1}8x^3y^3 + \binom{4}{2}4x^2y^2 - \binom{4}{3}2xy + \binom{4}{4}1$$

$$= (1)16x^4y^4 - (4)8x^3y^3 + (6)4x^2y^2 - (4)2xy + (1)1$$

$$= 16x^4y^4 - 32x^3y^3 + 24x^2y^2 - 8xy + 1$$

Por tratarse de una resta en el binomio, los signos del desarrollo son alternados.

b) $(x^3y - 5z^2)^9 = [x^3y + (-3z^2)]^9 = \sum_{r=0}^{9} \binom{9}{r} (x^3y)^{9-r}(-3z^2)^r \qquad n = 9 \;;\; a = x^3y \;;\; b = -3z^2$

$$= \binom{9}{0}(x^3y)^{9-0}(-3z^2)^0 + \binom{9}{1}(x^3y)^{9-1}(-3z^2)^1 + \binom{9}{2}(x^3y)^{9-2}(-3z^2)^2 + \binom{9}{3}(x^3y)^{9-3}(-3z^2)^3$$

$$+ \binom{9}{4}(x^3y)^{9-4}(-3z^2)^4 + \binom{9}{5}(x^3y)^{9-5}(-3z^2)^5 + \binom{9}{6}(x^3y)^{9-6}(-3z^2)^6 + \binom{9}{7}(x^3y)^{9-7}(-3z^2)^7$$

$$+ \binom{9}{8}(x^3y)^{9-8}(-3z^2)^8 + \binom{9}{9}(x^3y)^{9-9}(-3z^2)^9$$

$$= x^{27}y^9 - 27x^{24}y^8 + 324x^{21}y^7 - 2268x^{18}y^6z^6 + 10206x^{15}y^5z^8 - 30618x^{12}y^4z^{10}$$

$$+ 61236x^9y^3z^{12} - 78732x^6y^2z^{14} + 59049x^3y^1z^{16} - 19683z^{18}$$

XII.3 TÉRMINOS DEL DESARROLLO

El Término: $r + 1$ del desarrollo del Binomio: $(a + b)^n$, se obtiene reemplazando en:

$$\boxed{\binom{n}{r} a^{n-r} b^r}$$

Si de un desarrollo se desea obtener el Término Sexto, se toma: $r = 5$

Si de un desarrollo se desea obtener el Término Noveno, se toma: $r = 8$

Ej 12.8 Se obtiene un Término indicado del desarrollo de un Binomio:

a) Quinto Término de: $(a + b)^{12}$

En: $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r \Rightarrow n = 12 \;;\; r = 4$

$\Rightarrow \binom{12}{4} a^{12-4} b^4 = 495\, a^8 b^4$

Para el Término Quinto, se tomará: $r = 4$

Como la Potencia es: $n = 12$, se reemplazan estos datos en la expresión general.

Calculando el Combinatorio, se obtiene el Término requerido.

b) Sexto Término de: $(x - y)^{14}$

$(x - y)^{14} = [x + (-y)]^{14}$

En: $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r \Rightarrow \begin{matrix} n = 14 \;;\; r = 5 \\ a = x \;;\; b = -y \end{matrix}$

$\Rightarrow \binom{14}{5} x^{14-5} (-y)^5 = -2002\, x^9 y^5$

Esta vez se tiene una resta en el Binomio, y considerando que se puede expresar como una suma. Se aplican las mismas reglas

Para el Término Sexto, se tomará: $r = 5$

Como la Potencia es: $n = 14$, se reemplazan estos datos en la expresión general.

Así se obtiene el Término requerido.

12.4 Hallar el Término indicado en los siguientes Binomios:

Séptimo Término de: $(x^2 + 3y)^{10}$

En: $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r \qquad n = 10 \;;\; r = 6 \;;\; a = x^2 \;;\; b = 3y$

$\Rightarrow \binom{10}{6} (x^2)^{10-6} (3y)^6 = (210)(x^2)^4 3^6 y^6 = 153090\, x^8 y^6$

Se considera $r = 6$, para el séptimo Término.

Reemplazando en la expresión general de un Término del desarrollo.

XII.3.1 TÉRMINOS CENTRALES

- En un desarrollo de Binomio a Potencia: n Par, el Término Central es el: $r = \frac{n}{2}$
- En un desarrollo de Binomio a Potencia: n Impar, los dos Términos Centrales se obtienen con: $r = \frac{n-1}{2} \;;\; r = \frac{n+1}{2}$

Ej 12.9 a) Se calcula el Término Central del desarrollo del Binomio: $(a + b)^8$

En: $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r \quad \Rightarrow r = \frac{8}{2} = 4$

$\Rightarrow$ Quinto Término $\binom{8}{4} a^{8-4} b^4 = 70 a^4 b^4$

La Potencia es Par ($n = 8$)

Entonces con: $r = 4$ se debe hallar el Quinto Término, que será el Término Central del desarrollo del Binomio.

b) Se calcula el Término Central del desarrollo del Binomio: $(a+b)^{15}$

En: $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r \Rightarrow r = \dfrac{15-1}{2} = 7 \;;\; r = \dfrac{15+1}{2} = 8$

$\Rightarrow$ Octavo Término $\binom{15}{7} a^{15-7} b^7 = 6435 a^8 b^7$

$\Rightarrow$ Noveno Término: $\binom{15}{8} a^{15-8} b^8 = 6435 a^7 b^8$

La Potencia es Impar, por tanto posee dos Términos Centrales.

Con: $r = 7$; $r = 8$ son respectivamente el Octavo y Noveno Término.

12.5 a) Términos centrales de $(x^3 y - 3z^2)^9$

$(x^3y - 3z^2)^9 = [x^3y + (-3z^2)]^9$ Potencia Impar

En: $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r \Rightarrow r = \dfrac{9-1}{2} = 4 \;;\; r = \dfrac{9+1}{2} = 5 \Rightarrow$

Quinto Término $\binom{9}{4} (x^3y)^{9-4} (-3z^2)^4 = 10206\, x^{15} y^5 z^8$

Sexto Término: $\binom{9}{5} (x^3y)^{9-5} (-3z^2)^5 = -30618\, x^{12} y^4 z^{10}$

Identificando partes del desarrollo binómico.

Por ser de potencia impar existen dos Términos centrales.

Verifique resultados de acuerdo al P.12.3.b

b) Término que corresponde a un grado 22 en el desarrollo de $(x^6 + 1/\sqrt{x})^8$

$(x^6 + \dfrac{1}{\sqrt{x}})^8$ En: $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{8}{r} (x^6)^{8-r} (\dfrac{1}{\sqrt{x}})^r = \binom{8}{r} x^{48 - (\frac{13r}{2})}$

$48 - \dfrac{13r}{2} = 22 \Rightarrow r = \dfrac{52}{13} = 4 \Rightarrow$ Quinto término

Reemplazando.

Igualando el grado obtenido a 22 y resolviendo.

12.6 Hallar el Término de grado doce y de grado cero en el desarrollo del binomio: $(x^2 + \dfrac{1}{x^4})^{18}$

En: $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r \Rightarrow a^{n-r} b^r \;;\; n = 18$

$(x^2)^{n-r} (\dfrac{1}{x^4})^r = (x^{2(n-r)})(x^{-4r}) = x^{2(n-r)-4r}$

$\Rightarrow 2(n-r) - 4r = 12 \Rightarrow r = \dfrac{2n-12}{6} = \dfrac{24}{6} = 4$

$\Rightarrow 2(n-r) - 4r = 0 \Rightarrow r = \dfrac{n}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$

Para grado 12
Quinto Término $\binom{18}{4} (x^2)^{18-4} (\dfrac{1}{x^4})^4 = 3060\, x^{28} \dfrac{1}{x^{16}} = 18564\, x^{12}$

Para grado 0
Séptimo Término $\binom{18}{6} (x^2)^{18-6} (\dfrac{1}{x^4})^6 = 18564\, x^{24} \dfrac{1}{x^{24}} = 18564$

En la expresión general de un Término de desarrollo, se toma la parte literal. (Descartando el coeficiente)

Simplificando exponentes, e igualando el exponente a la potencia 12 en un caso y a 0 en otro. Despejando r.

Con $r = 4$ el término de potencia 12 es el quinto. Con $r = 6$, el Término de grado cero es el séptimo.

Tome en cuenta que el Término Independiente es precisamente el de grado cero.

Ej 12.10 Se demuestra por Inducción la Fórmula del Binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

$$P_{(1)}:\quad (a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}a^{1-1}b = 1a + 1a^0b = a+b$$

Se cumple para $n = 1$

$$P_{(k)}:\quad (a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \binom{k}{3}a^{k-3}b^3 + \dots + \binom{k}{k}b^k$$

Hipótesis

$P_{(k+1)}$:

Tésis

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^kb + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \binom{k+1}{3}a^{k-2}b^3 + \dots + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

Para la Demostración se multiplica ambos miembros de la Hipótesis por $(a+b)$, multiplicando luego todo por a y b en el 2do miembro.

$$(a+b)^k(a+b) = \left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \binom{k}{3}a^{k-3}b^3 + \dots + \binom{k}{k}b^k\right](a+b)$$

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^kb + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{3}a^{k-2}b^3 + \dots + \binom{k}{k}ab^k +$$

$$\binom{k}{0}a^kb + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \binom{k}{3}a^{k-3}b^4 + \dots + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]a^kb + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right]a^{k-1}b^2 + \left[\binom{k}{3} + \binom{k}{2}\right]a^{k-2}b^3 + \dots + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

Considerando las siguientes Propiedades: (Ver Ej 12.4)

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} \quad ; \quad \binom{k}{r} + \binom{k}{r-1} = \binom{k+1}{r} \quad ; \quad \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

$$= \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^kb + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \binom{k+1}{3}a^{k-2}b^3 + \dots + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

A partir de la Hipótesis se llegó a la Tesis, lo que demuestra el Binomio de Newton, para $n \in \mathbb{N}$

XII.- PROBLEMAS PROPUESTOS

12.1 Calcular los Factoriales y operaciones indicadas:

a) $1!+2!+3!+4!+5!$ b) $(3^2)!-(3!)^2$ c) $70!$ d) $3!\cdot 4!$ e) $(-4)!$ f) $(\sqrt{9})!$

g) $\frac{6!}{0!} - \frac{6!}{1!}$ h) $(\frac{6!}{5!})^2$ i) $\sqrt[3]{\frac{6!}{4!}}$ j) $\frac{73!}{70!}$ k) $\frac{3246!}{3245!}$ l) $\sqrt[3!]{64}$ m) $(\frac{3}{5})!$

12.2 Calcular los Combinatorios y operaciones indicadas:

a) $\binom{17}{10}$ b) $\binom{12}{7} - \binom{12}{5}$ c) $\binom{n}{n-1}$ d) $\binom{n+1}{r+1} \div \binom{n}{r}$ e) $\binom{6}{9}$ f) $\binom{5}{-2}$

h) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$ i) $\binom{31}{0}+\binom{31}{1}+\binom{31}{2}+\ldots+\binom{31}{31}$

12.3 Demostrar las siguientes Propiedades:

$$\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r} \quad ; \quad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n \quad \binom{n}{n}-\binom{n}{0}=0$$

12.4 Desarrollar por el Binomio de Newton: a) $(a+b)^6$ b) $(2xy+1)^5$ c) $(p^3-5q)^6$

d) $(x-y)^{1/2}$ e) $(1+x)^{1/3}$

12.5 Desarrollar usando Números Combinatorios: a) $(a+b)^6$ b) $(2xy+1)^5$ c) $(p^3-5q)^6$

12.6 En los Binomios dados, hallar los Términos indicados:

a) $(x+y)^9$ 4$^{\text{to}}$ Término b) $(x+y)^{15}$ 10$^{\text{mo}}$ Término c) $(x^2-7y)^8$ 6$^{\text{to}}$ Término

d) $(x^4+3y)^{10}$ Ter. Central e) $(x^5+2y)^{11}$ Ter. Central f) $(3x-y^4)^{13}$ Ter. Central

12.7 Hallar el Coeficiente del Término con la Parte literal indicada:

a) $(a+b)^9$; a^3b^6 b) $(x-y)^{14}$; x^5y^9 c) $(x^2+y^5)^8$; x^6y^{25} d) $(3x^4-2y^2)^{10}$; $x^{20}y^{10}$

12.8 a) Términos de grado 56 y 0 en: $(x^8-1/x^2)^{12}$

b) Términos de grado 12; 0 en: $\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)^{12}$ c) Términos de grado 10; 0 en: $\left(x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$

RESPUESTAS XII

12.1 a) 153 b) 362160 c) $1.1977\cdot10^{100}$ d) 144 e) ∄ f) 6 g) 0

h) 36 i) 2 j) 373176 k) 3246 l) 2 k) ∄

12.2 a) 19448 b) 0 c) n d) $\dfrac{n+1}{r+1}$ e) ∄ f) ∄ g) $2^5=32$ h) 2^{31}

12.4 a) $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

b) $32x^5y^5+80x^4y^4+80x^3y^3+40x^2y^2+10xy+1$

c) $p^{18}-30p^{15}q+375p^{12}q^2-2500p^9q^3+9375p^6q^4-18750p^3q^5+15625q^6$

d) $x^{1/2}-\dfrac{1}{2}x^{-1/2}y-\dfrac{1}{8}x^{-3/2}y^2-\dfrac{3}{48}x^{-5/2}y^3-\ldots$ e) $1+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{18}x^2+\dfrac{10}{162}x^3-\dfrac{80}{1944}x^4+\ldots$

12.6 a) $84x^6y^3$ b) $5005x^6y^9$ c) $-941192x^6y^5$ d) $61236x^{20}y^5$

e) $14784x^{30}y^5$; $29568x^{25}y^6$ f) $3752892x^7y^{24}$; $-1250964x^6y^{28}$

12.7 a) 84 b) -2002 c) 56 d) -1959552

12.8 a) $r=4$ (Quinto Término) ; ∄ para grado cero.

b) $r=4$ (Quinto T.) ; $r=6$ (Séptimo T.) c) $r=4$ (Quinto T.) ; $r=8$ (Noveno T.)

XIII.- COMBINATORIA

XIII.1 TEORÍA COMBINATORIA

La Teoría Combinatoria es el estudio de las Permutaciones, Variaciones, Combinaciones y Particiones. Se busca calcular el número de posibilidades lógicas de algún suceso, sin necesidad de enumerar detalladamente.

Se procura también obtener fórmulas generales (O Modelos matemáticos), para tener directamente el número de opciones de cada suceso.

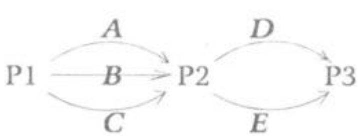
XIII.1.1 TEOREMA FUNDAMENTAL

El Teorema Fundamental de la Teoría Combinatoria, expresa: "*Si un suceso puede ocurrir de* ***n*** *maneras y una de ellas puede realizarse a su vez de* ***m*** *maneras, entonces ambos sucesos pueden ocurrir de* ***m n*** *maneras diferentes*"

Este Teorema se generaliza al caso de más sucesos.

Ej 13.1 Ejemplificando el Teorema Fundamental:

Una persona debe viajar desde el punto P1 hasta el punto intermedio P2 y luego hasta el punto final P3, asumiendo que desde P1 hasta P2 existen 3 líneas de movilidades (***A, B, C***) y desde P2 hasta P3 a su vez existen 2 movilidades (***D, E***).



Las posibilidades de tomar movilidades son:

A D	*B D*	*C D*
A E	*B E*	*C E*

Por tanto el número total de posibilidades es de 6. Note que este resultado se obtenía también multiplicando las posibilidades del primer viaje (3) por las del segundo (2).

Ej 13.2 Ejemplificando el Teorema Fundamental:

a) Si una dama desea combinar sus 5 vestidos con 4 sombreros. Entonces existirán $5 \cdot 4 = 20$ maneras diferentes de armar su vestimenta.

b) Para tomar sus dos materias libres de un semestre de estudios un estudiante debe elegir entre 3 idiomas y 5 asignaturas libres. Entonces existirán $3 \cdot 5 = 15$ posibilidades de llevar sus materias libres.

c) En una fiesta existen 8 jóvenes y 5 señoritas. Entonces podrán armarse hasta $8 \cdot 5 = 40$ parejas posibles. (Siempre y cuando cada pareja esté formada por un joven y una señorita)

d) Un joven tiene 3 amigas y está invitado a dos fiestas, el número de opciones para salir con una de sus amigas a una fiesta es de: $3 \cdot 2 = 6$

d) Un viaje debe realizarse con tres escalas entre P1 y P4:

Para ir del punto inicial P1 hasta P2 existen 2 líneas de ómnibus. Para ir desde P2 hasta P3 existen 4 líneas. Finalmente para desde P3 llegar a P4 existen 3 líneas de ómnibus.

Entonces existen: $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ maneras de combinar movilidades (Ver Ej 13.1 y note la generalización del Teorema).

XIII.2 PERMUTACIONES

Se entiende por Permutación de cierto número de objetos a la disposición de todos ellos en un orden determinado.

Ej 13.3 Se ejemplifica una Permutación

Las letras x, y, z pueden disponerse de las siguientes maneras:

xyz , zxy , yzx , yxz , xzy , zyx

Es decir existen un total de 6 Permutaciones. La Permutación de n elementos puede representarse como: $P(n)$; P_n

El Número total de permutaciones puede obtenerse mediante:

$$\boxed{P_n = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!}$$

Tome en cuenta que si se van a permutar n elementos, tomando uno de ellos tendrá n opciones de ubicación. El 2[do] elemento tendrá solo n-1 opciones de ubicación. El 3[ero] tendrá n-2 ubicaciones y así sucesivamente de manera que por el Teorema Fundamental el total será: $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$

Ej 13.4 Se ejemplifica el cálculo de una Permutación

Las letras x, y, z al disponerse de diversos modos constituyen una Permutación (Ver Ej 13.3). Como presentan a 3 elementos puede calcularse como:

$P(3) = 3! = 6$

Es decir existen un total de 6 permutaciones, como se verificó anteriormente (Ej 13.3)

Ej 13.5 Se ejemplifica el cálculo de una Permutación

Calcular el número total de palabras que pueden obtenerse con todas las letras de la palabra **ROCA** (No interesa si las palabras tienen un real significado)

Las letras **R, O, C, A** al disponerse de diversos modos constituyen una Permutación. Desarrollando todas las alternativas posibles se tiene:

ROCA	**ROAC**	**RCOA**	**RCAO**	**RAOC**	**RACO**
ORCA	**ORAC**	**OCRA**	**OCAR**	**OARC**	**OACR**
CARO	**CAOR**	**CRAO**	**CROA**	**COAR**	**CORA**
ARCO	**AROC**	**ACRO**	**ACOR**	**AORC**	**AOCR**

Efectivamente las Permutaciones son: $P(4) = 4! = 24$

Ej 13.6 Se ejemplifica el cálculo de Permutaciones:

a) Calcular el número total de modos como pueden formar en fila india, un total de 10 soldados.

Se trata de una Permutación de 10 elementos $P(10) = 10! = 3628800$

b) Calcular el número total de modos como pueden posar para una foto un grupo de 6 amigos que deben situarse sobre una sola fila.

Se trata de una Permutación de 6 elementos $P(6) = 6! = 720$

c) Calcular el número total de modos en que se puede disponer en un anaquel de muestra, 8 CD de música diferentes.

Se trata de una Permutación de 8 elementos $P(8) = 8! = 40320$

> En las Permutaciones, si afecta el orden en que se disponen los elementos. Así la disposición xy es diferente de yx.

13.1 Resolver los siguientes Problemas de Permutaciones:

a) Para elaborar un código de señales, en un barco se dispone de cuatro banderas de diferente color. ¿De cuantas maneras se puede mostrarlas?.

$P(4) = 4! = 24$ Con las 4 banderas será posible efectuar hasta 24 señales. (Una mezcla de los 4 colores será una señal)

b) Un equipo de futbol dispone de 11 jugadores, como el arquero y centro delantero son inamovibles de su puesto. ¿De cuantas maneras se puede colocar a los restantes jugadores?

$11 - 2 = 9$
$P(9) = 9! = 362880$

De los 11 elementos, se debe descontar a los dos inamovibles. Con los restantes se calcula la Permutación de 9 elementos.

c) Al ordenar una fila de 5 escolares, se observa que 3 de ellos insisten en permanecer juntos, ¿De cuantas maneras es posible ordenarlos?.

Asumiendo que los escolares son **A, B, C, D, E**, y **A, B, C** son los que deben permanecer juntos. Por tanto a **A, B, C** se los puede considerar como un solo elemento

ABCDE	**ABCED**
DEABC	**EDABC**
DABCE	**EABCD**

$P(3) = 3! = 6$

Note que así quedan solo 3 elementos a ordenar.

d) Al ordenar una fila de 5 escolares, se observa que 4 de ellos insisten en permanecer juntos, ¿De cuantas maneras es posible ordenarlos?.

Asumiendo que los escolares son **A, B, C, D, E**, y **A, B, C, D** son los que deben permanecer juntos. Por tanto a **A, B, C, D** se los puede considerar como un solo elemento

ABCDE **EABCD** $P(2) = 2! = 2$ Note que así quedan solo 2 elementos a ordenar.

e) Un jugador de cartas dispone de 9 de ellas, todas diferentes entre sí, para ordenarlas observa que 4 siguen una secuencia perfecta, de manera que conviene mantenerlas juntas, de cuantas maneras será posible ordenar todas las cartas.

$P(6) = 6! = 720$ Las 4 cartas en secuencia, se pueden considerar como un solo elemento, por tanto quedarán 6 elementos a ordenar.

f) 5 personas deben posar para una foto, uno de ellos cumple años, de manera que debe quedar siempre al centro. De cuantas maneras pueden colocarse las restantes personas para la foto.

Asumiendo que el cumpleañero es **X** y las restantes personas son: **A, B, C, D**

ABXCD	**ACXBD**	**ADXBC**	**CDXAB**	**BCXAD**	**BDXAC**
ABXDC	**ACXDB**	**ADXCB**	**CDXBA**	**BCXDA**	**BDXCA**
BAXCD	**CAXBD**	**DAXBC**	**DCXAB**	**CBXAD**	**DBXAC**
BAXDC	**CAXDB**	**DAXCB**	**DCXBA**	**CBXDA**	**DBXCA**

$P(4) = 4! = 24$ De las 5 personas, descontando uno que tiene posición fija, se podrán disponer como una variación de 4 elementos.

XIII.2.1 PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

En la Permutación de n elementos, asumiendode que un elemento esté reiterado n_1 veces, otro elemento a su vez se repita n_2 veces, y así sucesivamente, entonces el total de Permutaciones de los n elementos es:

$$P_n = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ ...}$$

Ej 13.7 Se ejemplifica el cálculo de una Permutación con repetición. Se trata de calcular el número de palabras que puede obtenerse con todas las letras de la palabra **CARA**

CARA	**CAAR**	**CRAA**
AACR	**AARC**	**ACRA**
ARCA	**ACAR**	**ARAC**
RACA	**RCAA**	**RAAC**

Si bien el total de elementos o letras es de 4; se observa que se repite la letra A . Entonces: es una Permutación con repetición, donde $n = 4$; $n_1 = 2$

$$P_4 = \frac{n!}{n_1!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

El número total de palabras que pueden formarse con las letras de la palabra **CARA** es de 13.

Ej 13.8 Se ejemplifica el cálculo de una Permutación con repetición. Se trata de calcular el número de palabras que puede obtenerse con todas las letras de la palabra **MATEMATICAS**

$$P_{11} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3!} = \frac{11!}{2!\ 3!\ 2!} = 1663200$$

Si bien el total de elementos o letras es de $n = 11$; se observa que se repiten algunas letras, como ser la letra **M** dos veces $n_1 = 2$; La letra **A** tres veces $n_2 = 3$; La letra **T** dos veces $n_3 = 2$.

13.2 Se resuelven los siguientes problemas de Permutaciones con repetición.

a) Cuantas palabras pueden formarse con todas las letras de la palabra: **AMADA**.

$$P_5 = \frac{n!}{n_1!} = \frac{5!}{3!} = 20$$

Se trata de una Permutación con repetición, ya que la letra A, se reitera 3 veces.

b) Cuantas palabras pueden formarse con todas las letras de la palabra: **COCHABAMBA**.

$$P_{10} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3!} = \frac{10!}{2!\ 3!\ 2!} = 151200$$

Permutación con repetición. La letra **C** se repite 2 veces, la **A** 3 veces, la *B* 2 veces.

c) Se dispone de 6 banderines, uno rojo, uno amarillo, uno verde y tres azules, cuantos señales pueden realizarse combinando todos estos banderines.

$$P_6 = \frac{n!}{n_1!} = \frac{6!}{3!} = 120$$

Se trata de una Permutación con repetición, ya que el color azul de tres banderines se repite.

d) Se trata de colocar 5 libros iguales de Álgebra, 4 de Botánica y 2 de Lenguaje. ¿De cuantas maneras es posible ordenarlos?

$$P_{11} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3!} = \frac{11!}{5!\ 4!\ 2!} = 6930$$

Se trata de una Permutación de 11 elementos, donde respectivamente se repiten 5, 4 y 2 elementos.

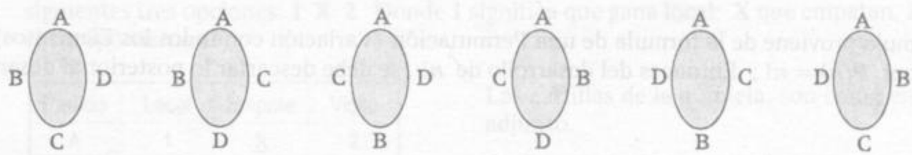
XIII.2.2 PERMUTACIONES CIRCULARES

En el caso de que se distribuyan los elementos alrededor de una circunferencia, se llama Permutación circular ***Pc(n)***

En la Permutación circular el número de modos es: $Pc(n) = (n-1)!$

Ej 13.9 Se ejemplifica el cálculo de una Permutación Circular.

Si alrededor de una mesa circular deben situarse las cuatro personas **A, B, C, D**



Si bien el total de elementos o personas es de $n = 4$; se observa que el total de modos como pueden acomodarse alrededor de una mesa es: $(n-1)! = (4-1)! = 3! = 6$

13.3 Resolver los siguientes Problemas de Permutaciones Circulares.

a) Un total de 12 personas se sientan alrededor de una mesa circular, de cuantas maneras pueden situarse.

$$Pc(n) = (n-1)! \;\Rightarrow\; Pc(12) = (12-1)! = 11! = 39916800$$

b) De un total de 10 personas que deben tomarse de las manos formando un círculo, 3 deben estar siempre juntas entre sí. ¿De cuantas maneras pueden situarse?

$$Pc(n) = (n-1)! \;\Rightarrow\; Pc(7) = (7-1)! = 720$$

c) Un grupo de 4 caballeros y 4 damas deben situarse alrededor de una mesa, si deben sentarse en forma alternada. ¿De cuantos modos es esto posible?.

Caballeros: $P_c(4) = (4-1)! = 6$
Damas: $P(4) = 4! = 24$
$P_c(4) \cdot P(4) = 6 \cdot 24 = 144$

Por la Permutación Circular de los 4 Caballeros. La Permutación de las Damas no es circular, porque éstas pueden permutarse sobre la referencia ya existente de la posición de los Caballeros.

Aplicando luego el Teorema Fundamental de la Teoría Combinatoria.

XIII.3 VARIACIONES

Se entiende por Variación de cierto número de elementos, a la disposición de una parte de ellos en un orden determinado.

Puede interpretarse una Variación, como una Permutación donde no se toma el total de sus elementos.

Ej 13.10 Se ejemplifica una Variación

Las letras ***x, y, z*** tomadas de dos en dos pueden disponerse de las siguientes maneras:

xy, yx, xz, zx, yz, zy

Es decir existe un total de 6 variaciones. Note que una Variación es xy, otra Variación diferente es yx

Las Variaciones se representan por: $V(n,r)$, donde n es el número total de elementos y r es el número de elementos que se toman para cada Variación.

La Variación $V(n,r)$ puede representarse también como: nVr ; $V_{n,r}$; V^r_n

El Número total de la Variación $V(n,r)$ se calcula por:

$$\boxed{V(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Esta fórmula proviene de la fórmula de una Permutación (Variación con todos los Elementos) que se calcula por $P(n) = n!$; Entonces del desarrollo de $n!$, se debe descartar lo posterior al desarrollo de $(n-r)!$

Ej 13.11 Se ejemplifica el cálculo de una Variación.

Las letras ***x, y, z*** tomadas de dos en dos constituyen una Variación (Ver Ej 13.10) puede expresarse como: $V(3,2)$

$$V(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$

Es decir existen un total de 6 variaciones.

13.4 Resolver los siguientes Problemas de Variaciones:

a) En una librería se dispone de 5 libros nuevos, pero el estante de muestras solo permite mostrar tres libros a la vez. ¿De cuantas maneras es posible efectuar las muestras?

$$V(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$$

Se trata de una Variación de 5 elementos tomados de 3 en 3

b) Para formar carteles se dispone de los números de plástico **1, 2, 3, 4, 5, 6.** ¿Cuantos números de cuatro cifras es posible mostrar en un cartel?

$$V(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360$$

Se trata de una variación de 6 elementos tomados de 4 en 4.

c) Con 3 de las letras de la palabra **DIABLO**, ¿Calcular hasta cuantas palabras se pueden formar?.

$$V(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{720}{6} = 120$$

Se trata de una Variación de 6 elementos tomados de 3 en 3.

En las actuales calculadoras, para calcular una Variación, se emplea la tecla $nVr = V(n,r)$, en otros modelos se representa por: $nPr = P(n,r)$. Usualmente se anota el valor de n, la tecla y luego el valor de r.

XIII.3.1 VARIACIONES CON REPETICIÓN

Si los Elementos de una variación pueden reiterarse, entonces se tiene la VARIACIÓN CON REPETICIÓN.

El total de modos como puede darse una variación con repetición es: $V_c(n,r) = n^r$

Ej 13.12 Se ejemplifica una variación con repetición

A partir de los dígitos: 0, 1, 2 se trata de calcular la cantidad de números de 3 cifras que pueden formarse, si es que se admite la repetición de estos dígitos

00	01	02	$V_c(3,2) = 3^2 = 9$
11	10	20	
22	12	21	Por tanto existirán 9 números de dos cifras.

Ej 13.13 En el juego de la quiniela se trata de acertar los resultados en los partidos de futbol de un campeonato con 14 equipos. Para cada partido se tiene las opciones de marcar alguna de las siguientes tres opciones: **1 X 2** Donde **1** significa que gana local; **X** que empatan, **2** que gana el equipo visitante.

Partido	Local	Empate	Visita
A	1	$\underline{X}$	2
B	$\underline{1}$	X	2
C	1	X	$\underline{2}$
D	1	X	$\underline{2}$
E	$\underline{1}$	X	2
F	$\underline{1}$	X	2
G	1	$\underline{X}$	2
H	$\underline{1}$	X	2
I	1	$\underline{X}$	2
J	$\underline{1}$	X	2
K	1	X	$\underline{2}$
L	$\underline{1}$	X	2
M	1	$\underline{X}$	2
N	$\underline{1}$	X	2

Las cartillas de la quiniela, son como en el gráfico adjunto.

Se dice que se hace una sola apuesta, cuando para cada partido se marca solo una vez.

Por ejemplo en el partido C, se marca que va a ganar el equipo visitante.

Para calcular el número de apuestas posibles, se debe considerar que se trata de una VARIACIÓN CON REPETICIÓN de $n = 3$ elementos, tomados 14 veces.

Por tanto: $V_c(n,r) = n^r$

$$V_c(3,14) = 3^{14} = 4\,782\,969$$

XIII.4 COMBINACIONES

Se entiende por Combinación de cierto número de elementos, a la disposición de una parte de ellos en un orden determinado.

Puede interpretarse una Combinación como una Variación donde no interesa el orden en que se encuentran sus Elementos.

Ej 13.14 Se ejemplifica una Combinación

Las letras x, y, z tomadas de dos en dos pueden disponerse de las siguientes maneras:

$xy,\ yx,\ xz,\ zx,\ yz,\ zy$

Sin embargo como el orden no interesa, es decir la Combinación xy es igual a yx, entonces quedan las Combinaciones: $xy,\ yz,\ zx$

Es decir existen un total de 3 Combinaciones. Las Combinaciones se representan por: ***C(n,r)***, donde n es el número total de elementos y r es el número de elementos que se toman para cada Combinación.

La Combinación ***C(n,r)*** puede representarse también como: nCr ; $C_{n,r}$; C_n^r

El Número total de las Combinaciones $C(n,r)$ se calcula por:

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)\ldots 2\cdot 1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}}$$

Note que el número total de Combinaciones puede calcularse por los Números Binómicos o Combinatorios analizados en el anterior Capítulo (Binomio de Newton) $C(n,r) = \binom{n}{r}$

En las actuales calculadoras, para calcular un Número Combinatorio o Binómico, se emplea la tecla $nCr = C(n,r)$. Usualmente se anota el valor de n, la tecla y luego el valor de r.

Ej 13.15 Se ejemplifica el cálculo de una Combinación: Las letras ***x, y, z*** tomadas de dos en dos constituyen una Combinación (Ver Ej 13.13) puede calcularse como:

$$C(3,2) = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{6}{2\cdot 1} = 3$$

Es decir existen un total de 3 Combinaciones.

Ej 13.16 Se ejemplifica el cálculo de una Combinación

Un campeonato de futbol se realiza con la participación de los 5 equipos: A, B, C, D, E. Donde deben jugar todos contra todos en una sola rueda, se trata de calcular el número de partidos que en total deben jugarse en este campeonato.

Considerando que el partido entre los equipos AB es el mismo que el partido BA, se trata de calcular las Combinaciones de 5 elementos tomados de dos en dos:

AB AC AD AE
BC BD BE
CD CE
DE

$$C(5,2) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{120}{2\cdot 6} = 10$$

Según se aprecia, detallando las combinaciones posibles o calculando por la fórmula, el número total es 10.

13.5 **Resolver los siguientes Problemas de Combinaciones:**

a) **De un curso de 12 alumnos, de cuantas maneras se puede elegir 5 representantes**

$$C(12,5) = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5!\,(12-5)!} = 792$$

Se trata de una Combinación de 12 elementos tomados de 5 en 5.

b) **De un curso de 12 alumnos, de cuantas maneras se puede elegir 5 representantes, si uno de estos alumnos necesariamente debe estar entre los representantes**

$$C(11,4) = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4!\,(11-4)!} = 330$$

Si uno de los 12 alumnos, necesariamente debe ser elegido, entonces solo se debe hacer la combinación de 4 en 4 entre los 11 restantes.

c) **De un curso de 12 alumnos, de cuantas maneras se puede elegir 5 representantes, si 3 de los alumnos no deben estar nunca entre los representantes.**

$$C(9,5) = \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = 126$$

Si 3 de los 12 alumnos, no deben ser elegidos, entonces solo se debe hacer la combinación de 5 en 5 entre los 9 restantes.

d) De un grupo de 12 alumnos, donde 4 son mujeres, de cuantas maneras se pueden armar grupos de 3 alumnos, donde necesariamente en cada grupo debe haber una mujer.

$$C(12,3) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = 220$$

Sin considerar si se trata de hombres o mujeres se calcula el total de Combinaciones de 4 en 4.

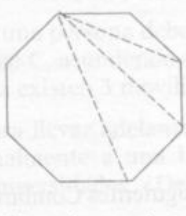
$$C(8,3) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = 56$$

Si se descartan la 4 mujeres, se hallan las combinaciones de solo hombres,las que se deben descartar del total..

$$C(12,3) - C(8,3) = 220 - 56 = 164$$

La resta determina lo requerido.

e) Cuantas diagonales pueden trazarse en un Octógono



Un Octógono posee 8 vértices, el número de rectas que pueden trazarse entre esos 8 puntos es el número de combinaciones de 8 elementos tomados de 2 en 2.

$$C(8,2) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = 28$$

Sin embargo de esas rectas deben descontarse las que constituyen los lados del Octógono (8), por tanto el número de diagonales es: 28 - 8 = 20.

f) De un grupo de 9 hombre y 7 mujeres, se debe elegir una representación formada por 3 hombres y 2 mujeres. ¿De cuantas maneras es posible elegir dicha representación?

$$C(9,3) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = 84$$

Considerando solo a los hombres se calcula el núme ro de modos de elegir 3 representantes.

$$C(7,2) = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = 21$$

Considerando solo a mujeres se calcula el número de modos de elegir 2 representantes.

$$C(9,3) \cdot C(7,2) = 84 \cdot 21 = 1764$$

Por el Teorema fundamental se multiplica las posibilidades de un suceso por los del otro.

g) De un grupo de 10 personas se debe elegir una Directiva formada por un Presidente y 3 vocales. ¿De cuantas maneras es posible elegir esta Directiva?

Presidente: 10 maneras

$$C(9,3) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = 84$$

Luego de elegir un Presidente quedan 9 miembros de los que se eligen 3 vocales (Se asume que cada vocal posee el mismo valor dentro de la Directiva)

$$10 \cdot C(9,3) = 10 \cdot 84 = 840$$

Por el Teorema Fundamental se multiplican los modos del primer suceso por los del segundo.

h) De un grupo de 10 personas se debe elegir una Directiva formada por un Presidente un Tesorero y 3 vocales. ¿De cuantas maneras es posible elegir esta Directiva?

Presidente: 10 maneras

Tesorero: 9 maneras

Luego de elegir un Presidente quedan 9 miembros, tras elegir el Tesorero quedan 8, de los que se eligen 3 vocales.

$$C(8,3) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = 56$$

$$10 \cdot 9 \cdot C(8,3) = 10 \cdot 9 \cdot 56 = 5040$$

Por el Teorema Fundamental se multiplican los modos del primer suceso por los del segundo y por los del tercero.

i) En una fiesta están 8 jóvenes y 6 señoritas. ¿Hasta cuantas parejas pueden formarse?

$8 \cdot 6 = 48$

Si una pareja debe estar formada por un joven y una señorita se usa el Teorema fundamental.

$$C(14,2) = \binom{14}{2} = \frac{14!}{2!\,(14-2)!} = 91$$

Si una pareja puede estar formada entre jóvenes o entre señoritas entre sí, se debe calcular las Combinaciones de 14 elementos tomados de 2 en 2.

XIII.4.1 TOTAL DE COMBINACIONES

El Número total de las Combinaciones que se puede lograr a partir de n elementos tomados de diversas maneras se calcula por:

$$\boxed{N_{(C)} = 2^n - 1}$$

Ej 13.17 Se ejemplifica el cálculo del total de las Combinaciones.

Del total de letras ***A, B, C*** tomadas de diversa manera se tienen las siguientes Combinaciones:

A	*B*	*C*	De 1 en 1	Tres combinaciones
AB	*AC*	*BC*	De 2 en 2	Tres combinaciones
ABC			De 3 en 3	Una combinación.

Es decir existen un total de 7 Combinaciones, se verifica por: $N_{(C)} = 2^3 - 1 = 7$

13.6 Calcular el número total de Combinaciones en los siguientes Problemas:

a) Calcular hasta cuantas Combinaciones es posible realizar con cinco monedas de diferente valor (De 2 \$; 1 \$; 0.50 \$; 0.20 \$ y de 0.10 \$)

$N_{(C)} = 2^5 - 1 = 31$

Como el número de elementos es de $n = 5$; usando la fórmula del caso.

b) Para salir un fin de semana, un muchacho tiene 4 amigas, si tiene las opciones de salir solo con una o dos o tres o con las cuatro amigas. Calcular el número total de opciones de salida de este hábil muchacho.

$N_{(C)} = 2^4 - 1 = 15$

$15 + 1 = 16$

Considerando a las 4 muchachas como elementos, el total de Combinaciones es de 15. Sin embargo como existe también la opción de salir solo. El total de opciones es de 16.

c) En una tienda de alquiler de videos, un cliente se enfrenta a la posibilidad de llevar uno, dos o tres o cuatro o cinco vídeos diferentes. ¿De cuantas maneras puede alquilar los videos?

$N_{(C)} = 2^5 - 1 = 31$

El cliente puede llevar diversas Combinaciones de vídeos. El total de opciones es de 31.

d) Un bebedor consuetudinario, tiene en su mesa una copa de ron, una de whisky, una de cerveza y otra de vino. Inicialmente se propone no tomar ninguna copa, luego piensa si no sería mejor tomar una sola, luego piensa si puede tomar dos, luego tres y finalmente las 4 copas. ¿De cuantas maneras puede tomar las copas?

$N_{(C)} = 2^4 - 1 = 15$

$15 + 1 = 16$

Considerando las 4 copas, como elementos. Sin embargo como existe también la opción de no tomar ninguna. El total de opciones es de 16.

XIII.- PROBLEMAS PROPUESTOS

13.1 Calcular la cantidad de modos en que se producen los siguientes eventos:

a) Una dama desea combinar los colores de sus 4 blusas con sus 6 faldas. Calcular el número de modos como puede mezclar sus prendas de vestir.

b) A 5 niños se les ofrece 5 juguetes diferentes, si cada niño debe quedarse con solo un juguete. ¿De cuantas maneras pueden distribuirse dichos juguetes?.

c) En una fiesta existen 12 jóvenes y 11 señoritas. ¿Cuantas parejas pueden armarse?. Se asume que cada pareja debe estar compuesta por un joven y una señorita.

d) Si una persona debe viajar desde el punto A hasta el punto intermedio B y luego hasta el punto final C, asumiendo que desde A hasta B existen 5 líneas de movilidades y desde B hasta C a su vez existen 3 movilidades.

e) Para llevar adelante sus estudios, un niño debe ingresar a una Escuela, luego a un colegio y finalmente a una Universidad. En su ciudad el niño dispone de 8 escuelas, 5 colegio y 2 Universidades. ¿De cuantas maneras puede llevar adelante sus estudios ?

f) Al ingresar a una mina,un minero puede hacerlo a travez de dos puertas (A, B); luego se le presentan 4 túneles (P, Q, R, S), para desembocar en 3 corredores (X, Y, Z). De cuantas maneras puede avanzar el minero ?

g) Al lanzar un dado existen 6 posibles resultados, calcular cuantos posibles resultados se dan al lanzar 5 dados en el clásico juego del cacho.

h) En el llamado Juego de la Cédula, se trata de obtener al azar un número de Carnet de Identidad, de 7 cifras. Calcular la cantidad de números que se pueden obtener, si se considera que para cualquiera de las cifras se dispone de todos los Dígitos (Del 0 al 9), excepto en la primera cifra, donde no debe ir el cero.

13.2 Resolver los siguientes problemas de Permutaciones:

a) Calcular el número de modos en que pueden formar fila un total de 5 soldados.

b) Calcular la cantidad de maneras en que se pueden mostrar 8 libros en un muestrario.

c) Calcular el número de modos en que pueden formar fila un total de 10 soldados, si dos de ellos necesariamente deben colocarse al principio.

d) Calcular el número de palabras que se pueden formar con todas las letras de la palabra **SUCRE**.

e) Calcular el número de palabras que se pueden formar con todas las letras de: **MURCIÉLAGO**.

f) Calcular el número de palabras que se pueden formar con todas las letras de: **ORURO**.

g) Calcular el número de palabras que se pueden formar con todas las letras de: **COCODRILO**.

h) Con un grupo de 3 damas y 3 caballeros se debe ordenar una columna, donde el primero debe ser un caballero y luego deben estar alternados. ¿De cuantas maneras se puede formar la columna?

13.3 Resolver los siguientes Problemas de Variaciones

a) Calcular el número de palabras de 3 letras que pueden formarse con las letras de la palabra **MUJER**.

b) Calcular el número de palabras de 5 letras que pueden formarse con las letras de la palabra **MURCIÉLAGO**.

c) En una ciudad, las placas de movilidades deben mostrar 2 vocales y 3 números, sin repetir alguno de ellos. Si se dispone de 5 vocales y 10 números. Hallar el número de placas que se pueden elaborar.

d) De un curso de 10 alumnos se debe premiar a los tres mejores. ¿De cuantas maneras es posible elegir a los premiados?

e) Si se pueden usar los dígitos 1, 2, 3, 4, 5. ¿Cuantos números de 3 cifras pueden formarse, si ningún dígito se repite?; ¿Cuantos números de 3 cifras pueden formarse, si los dígitos se repiten?

13.4 Resolver los siguientes Problemas de Combinaciones:

a) Calcular el número de partidos en un campeonato de futbol que cuenta con 10 equipos, si el campeonato es de todos contra todos en una sola rueda.

b) Calcular el número de partidos en un campeonato de futbol que cuenta con 10 equipos, si el campeonato es de 2 series de a 5 equipos en una sola rueda.

c) En un club de 25 socios debe elegirse un Presidente un Tesorero y 5 vocales. ¿De cuantas maneras puede elegirse esta directiva?

d) Un entrenador tiene un equipo de 8 jugadores de basketball. ¿De cuantas maneras puede mandar a la cancha al equipo de 5 jugadores?

e) De un lote de 12 juguetes, un niño debe escoger solo a 4. ¿De cuantas maneras puede llevar a cabo su elección?

13.5 Resolver los siguientes problemas:

a) Un joven desea salir un fin de semana con una muchacha, si dispone de los teléfonos de 5 muchachas y sabe que puede ir a una Discoteca, un Karaoke o un Cine. ¿Calcular el número de modos como puede pasar el fin de semana?

b) En una urna se tienen 5 bolitas con los números: 1, 2, 3, 4, 5. ¿Cuantas números diferentes de 3 cifras es posible obtener?

c) Un ama de casa dispone solo de 4 manteles diferentes para colocar sobre 6 mesas. ¿De cuantas maneras puede distribuir sus manteles?

d) Un grupo de 12 damas se reúne para tomar el té y jugar a las cartas. Si se dispone de tres mesas de a 4 sillas cada una. Calcular el número de modos como pueden ubicarse las damas.

e) De un grupo de 6 libros, de cuantas maneras se puede elegir uno o más libros

RESPUESTAS XIII

13.1 a) 24 b) 25 c) 132 d) 15 e) 80 f) 24 g) $6^5 = 7776$ h) $9 \cdot 10^6$

13.2 a) 120 b) 40320 c) 40320 d) 120 e) 3628800 f) 30 g) 30240 h) 36

13.3 a) 60 b) 30240 c) 14400 d) 720 e) 60 ; 125

13.4 a) 45 b) 20 c) 270270 d) 56 e) 495

13.5 a) 15 b) 60 c) 360 d) 495 e) 63

XIV.- PROGRESIONES

Las Progresiones son sucesiones de números, que presentan una cierta regularidad entre ellos. Las principales son: La Progresión Aritmética, la Progresión Geométrica y la Progresión Armónica.

XIV.1 PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Usualmente a una Progresión Aritmética se la designa por P.A.

Se llama Progresión Aritmética a una sucesión de números, donde a partir del primer número se obtienen los restantes sumando al anterior una cantidad constante, esta cantidad constante se llama Diferencia (d) de la P.A.

Ej 14.1 Son Progresiones Aritméticas (P.A.) Las siguientes sucesiones de números:

a) 5 , 8 , 11 , 14 , 17 , ... P.A. de Diferencia $d = 3$. (Note que la Diferencia es la cantidad constante entre dos números sucesivos)

b) -2 , 4 , 10 , 16 , 22 , ...

c) 27 , 22 , 17 , 12 , 7 , ...

Las otras dos P.A. poseen Diferencia de: $d = 6$ y $d = -5$.

XIV.1.1 TÉRMINO ENÉSIMO DE P.A.

Para un estudio matemático de las P.A. se deben buscar los Términos enésimos o Términos generales que definen a la P.A.

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

$$\dots = \dots$$

$$a_n = a_{n-1} + d = (a_1 + (n-2)d) + d = a_1 + (n-1)d$$

Partiendo de un número cualquiera a_1 , que se constituye en el Primer Término.

El segundo número es el primer número más la Diferencia d.

Ordenando los restantes números, expresando en términos del primero y de la Diferencia d

Finalmente se logra la Expresión o Fórmula general del Término enésimo: a_n

Ej 14.2 Se analiza una Progresión Aritmética (P.A.), con su Término enésimo.

$$5 , 8 , 11 , 14 , 17 , \dots$$

$$a_1 = 5 , a_2 = 8 , a_3 = 11 , \dots , d = 3$$

Nombrando a los Términos de la P.A. (La Diferencia d es 3). El primer Término es: $a_1 = 5$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$= 5 + (n-1)3$$

El Término enésimo a_n se obtiene de acuerdo a la Fórmula general anteriormente deducida

$$a_3 = 5 + (3-1)3 = 11$$

$$a_7 = 5 + (7-1)3 = 23$$

Calculando otros Términos, para el tercer Término a_3, se reemplaza $n = 3$ en la fórmula del Término enésimo. Para a_7, se reemplaza $n = 7$

Si se encuentra alguna dificultad en determinar a la Diferencia de una P.A. es suficiente con restar dos Términos sucesivos: $d = a_{n+1} - a_n$

14.1 Obtener el Término Enésimo y los Términos a_9, a_{15} en las P.A.

a) $3, 7, 11, 15, 19, \dots$

$\Rightarrow d = a_{n+1} - a_n = 7 - 3 = 4$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$= 3 + (n-1)4$

$a_9 = 5 + (9-1)3 = 29$

$a_{15} = 5 + (15-1)3 = 47$

b) $2/5, 9/10, 7/5, 19/10, 12/5, \dots$

$\Rightarrow d = a_{n+1} - a_n = \dfrac{9}{10} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2}$

$a_n = a_1 + (n-1)d = \dfrac{2}{5} + (n-1)\dfrac{1}{2}$

$a_9 = \dfrac{2}{5} + (9-1)\dfrac{1}{2} = \dfrac{22}{5}$

$a_{15} = \dfrac{2}{5} + (15-1)\dfrac{1}{2} = \dfrac{37}{5}$

14.2 Hallar los Términos a_1, a_{15} en la P.A. donde: $a_{12} = 68$; $d = 6$

$a_{12} = 68$; $d = 6$; $a_n = a_1 + (n-1)d$

$\Rightarrow a_1 = a_n - (n-1)d = a_{12} - (12-1)d$

$a_1 = 68 - (12-1)6 = 2 \Rightarrow a_n = 2 + (n-1)6$

$a_{15} = a_1 + (15-1)d = 2 + (15-1)6 = 86$

Si se conocen un solo Término a_{12} y la Diferencia d de la P.A.

De la Fórmula del Término Enésimo, se despeja previamente al Término a_1

14.3 Hallar los Términos a_1, a_{15} en la P.A. donde: $a_5 = 33$; $a_9 = 61$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$\Rightarrow a_5 = a_1 + (5-1)d = 33$

$a_9 = a_1 + (9-1)d = 61$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + 4d &= 33 \\ a_1 + 8d &= 61 \end{aligned}\right] \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= 5 \\ d &= 7 \end{aligned}$$

$a_n = 5 + (n-1)7 \Rightarrow a_{15} = 5 + (15-1)7 = 103$

Por la Fórmula del Término Enésimo.

Reemplazando los valores conocidos de a_5 ; a_9.

Se conforma un Sistema de dos Ecuaciones con dos incógnitas (a_1 ; d), su resolución se la efectúa por algún método conocido.

Nuevamente por la Fórmula del Término Enésimo se calcula el Término requerido.

14.4 Hallar el número de Términos de la siguiente P.A:

$4, 9, 14, \dots, 89$

$a_n = a_1 + (n-1)d$; $a_1 = 4$; $d = 5$

$\Rightarrow n = \dfrac{a_n - a_1}{d} + 1 = \dfrac{89-4}{5} + 1 = 18$

Por la fórmula del Término Enésimo, despejando n, ya que se conocen a la Diferencia d, y los Términos primero y final a_1, a_n

14.5 a) Hallar el valor de x, de manera que los Términos formen una P. A.

$6x - 10$, $2x + 7$, $5x + 3$, ...

$d = a_{n+1} - a_n$

$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$(2x+7) - (6x-10) = (5x+3) - (2x+7)$

$-4x + 17 = 3x - 4 \Rightarrow x = 3$

Para que los Términos sean parte de una P.A., la Diferencia entre Término y Término debe ser constante.

Planteando que esa Diferencia (d) sea constante, se obtiene $x = 3$; reemplazando tal valor se obtiene los términos que son: 8, 13, 18,...

b) Los tres ángulos interiores de un triángulo rectángulo forman una P. A. , calcularlos:

$x, x+d, x+2d \Rightarrow \alpha - d, \alpha, \alpha + d$

$$\left.\begin{aligned} (x) + (x+d) + (x+2d) &= 180° \\ x + 2d &= 90° \end{aligned}\right] \Rightarrow \begin{aligned} x &= 30° \\ d &= 30° \end{aligned}$$

$\Rightarrow 30°$; $60°$; $90°$

Considerando que la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es de 180°.

Por ser rectángulo, un ángulo (Necesariamente el mayor) es de 90°

XIV.1.2 SUMA DE LOS PRIMEROS TÉRMINOS

Para obtener el valor de la suma de los primeros n Términos se emplea la fórmula:

$$S = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

La deducción de estas fórmulas es:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$

Desarrollando la Suma.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S = a_1 + [a_1 + d] + [a_1 + 2d] + [a_1 + 3d] + \dots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d]$$

$$S = a_1 + [a_1 + d] + [a_1 + 2d] + \dots + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d]$$

$$S = [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-3)d] + \dots + [a_1 + d] + a_1$$

$$2S = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \dots + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow \quad 2S = n[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S = \frac{n}{2}[a_1 + \{a_1 + (n-1)d\}]$$

$$S = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

Reordenando la expresión de Suma (S) y volviendo a escribir la misma en otro orden (Del último al primer Término). Sumando miembro a miembro, se observa que todos los Términos son iguales entre sí.

Considerando que son n Sumandos se obtiene la expresión de $2S$, despejando se logra una fórmula para S.

Desarrollando y usando la fórmula del Término enésimo, se logra otra fórmula para la Suma.

Ej 14.3 Efectuando la Suma de los Términos de una P.A.

a) 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41

Considerando que la P.A. presenta 10 Términos ($n = 10$) ; $d = 4$

$$S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{10}{2}[2\cdot 5 + (10-1)4] = 230$$

$$S = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = \frac{10}{2}[5 + 41] = 230$$

Reemplazando en la fórmula que requiere de la Diferencia d, o en la fórmula que requiere del último Término a_n se logra el mismo resultado.

Note que la suma entre términos equidistantes (Entre el 1^ero y el último, el 2^do y el penúltimo, etc.) Es de un valor constante (46), tal como acontece en toda P.A. con número limitado de términos.

b) Efectuando la Suma de los 20 primeros Términos de: 3, 10, 17, 24, 31, ...

$$S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \quad ; \quad d = 7 \; ; \; a_1 = 3$$

$$S = \frac{20}{2}[2\cdot 3 + (20-1)7] = 1390$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{20} = 3 + (20-1)7 = 136$$

$$S = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = \frac{20}{2}[3 + 136] = 1390$$

Considerando que la P.A. presenta 20 Términos ($n = 20$) $a_1 = 3$; $d = 7$

Reemplazando en la fórmula que requiere de la Diferencia d, o en la fórmula que requiere del último Término a_n se obtiene el mismo resultado.

c) Efectuando la Suma de los 50 primeros Números Impares: 1, 3, 5, 7, 9, ...

$$1, 3, 5, 7, \dots \quad ; \quad d = 2 \; ; \; a_1 = 1$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{50} = 1 + (50-1)2 = 99$$

$$S = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = \frac{50}{2}[1 + 99] = 2500$$

Calculando previamente el Término 50, entre los impares se tiene: $d = 2$

Considerando $a_1 = 1$; $d = 2$, se puede demostrar que la suma de los n primeros impares es igual a n^2

14.4 a) En la P.A., cuya suma de los 12 primeros Términos es 456, siendo $a_{12} = 71$; obtener a_1 y el Término Enésimo.

$$S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \; ; \; a_n = a_1 + (n-1)d$$

Por la Fórmula de Suma y Término Enésimo.

$$\Rightarrow \; 456 = \frac{12}{2}[2a_1 + (12-1)d]$$
$$71 = a_1 + (12-1)d$$

Reemplazando valores conocidos de Suma y del Término a_{12}. Se conforma un Sistema de dos Ecuaciones con dos incógnitas (a_1 ; d).

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 12a_1 + 66d = 456 \\ a_1 + 11d = 71 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 5 \\ d = 6 \end{array}$$

Entonces la Fórmula del Término Enésimo es: $a_n = 5 + (n-1)6$

b) En la PA: 12, 15, 18, 21, ... ; La Suma de los n Primeros Términos es 1665, calcular n

$$a_1 = 12 \; ; \; d = 3 \; ; \; S = 1665$$

En los datos se tiene a_1 ; d

$$S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow 1665 = \frac{n}{2}[2 \cdot 12 + (n-1)7]$$

Reemplazando en la Fórmula de Suma, desarrollando se logra una Ecuación de Segundo grado.

$$\Rightarrow n^2 + 7n - 1110 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} n_1 = 30 \\ n_2 = -37 \end{array}$$

La única Solución válida es $n = 30$ Términos.

XIV.1.3 MEDIOS ARITMÉTICOS

Dados dos números: a, b: Donde a es el primer Término y b es el último, se pueden introducir n números, de manera tal que incluyendo a, b se obtenga una Progresión Aritmética.

$$\underbrace{a, \underbrace{\_\_, \_\_, \_\_, \ldots,}_{n \text{ Términos}} b}_{n+2 \text{ Términos}}$$

Note que de esta manera existirán $n+2$ Términos siendo a al el primero, b el $n+2$ Término (Es decir el Último Término).

Deduciendo una expresión para b. A su vez la Diferencia d se obtiene despejando:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \; ; \; a = a_1$$

$$b = a_{n+2} = a_1 + (n+2-1)d = a + (n+1)d \Rightarrow d = \frac{b-a}{n+1}$$

Ej 14.5 Introducir cinco Medios Aritméticos entre: 4 y 22

$$a = a_1 = 4 \; ; \; b = a_{5+2} = 22 \; ; \; n = 5$$

$$d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{22-4}{5+1} = 3 \Rightarrow 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22$$

El Primer y último Término son 4 y 22 respectivamente, calculando la Diferencia d. Desarrollando la P.A.

XIV.2 PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Usualmente a una Progresión Geométrica se la designa por P.G.

Se llama Progresión Geométrica a una sucesión de números, donde a partir del primer número se obtienen los restantes multiplicando al anterior por una cantidad constante, esta cantidad constante se llama Razón de Progresión (r)

Ej 14.6 Son Progresiones Geométricas (P.G.) Las siguientes sucesiones de números:

a) 4 , 12 , 36 , 108 , 324 , ...

b) -2 , -10 , -50 , -250 , -1250 , ...

c) $16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

Progresión Geométrica de Razón 3. (Note que ese es el factor constante entre dos números sucesivos)

Las otras dos P.G. poseen Razón de 5 y ½ respectivamente.

XIV.2.1 TÉRMINO ENÉSIMO DE P.G.

Para un estudio matemático de las P.G. se deben buscar los Términos enésimos o Términos generales que definen a la P.G.

a_1

$a_2 = a_1 r \qquad = a_1 r$

$a_3 = a_2 r = (a_1 r) r \qquad = a_1 r^2$

$a_4 = a_3 r = (a_1 r^2) r \qquad = a_1 r^3$

$a_5 = a_4 r = (a_1 r^3) r \qquad = a_1 r^4$

.... = ...

$a_n = a_{n-1} r = (a_1 r^{n-2}) r = a_1 r^{n-1}$

Partiendo de un número cualquiera, diferente de cero, como Primer Término a_1

El segundo Término es el primer Término multiplicado por la Razón r.

Ordenando los restantes números y expresando en términos del primero y de la Razón.

Finalmente se puede expresar el Término enésimo o Fórmula general a_n de la P.G.

La suma indicada de todos los Términos de una Progresión geométrica se llama Serie Geométrica.

Ej 14.7 Se analiza una Progresión Geométrica (P.G.), con su Término enésimo.

$4\ ,\ 12\ ,\ 36\ ,\ 108\ ,\ 324\ ,\ \ldots$

$a_1 = 4\ ,\ a_2 = 12\ ,\ a_3 = 36\ ,\ \ldots\ ,\ r = 3$

$a_n = a_1 r^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$

$a_3 = 4 \cdot 3^{3-1} = 36\ ;\ \ a_7 = 4 \cdot 3^{7-1} = 2916$

Nombrando a los Términos de la P.G. (La Razón r es 3)

El Término enésimo es a_n de acuerdo a la fórmula antes deducida

Calculando otros Términos.

Para determinar la Razón de una P.G. es suficiente con dividir dos Términos sucesivos: $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

14.7 a) Si en una P. G. $a_5 = 768\ ;\ a_8 = 49152$ Calcular $a_1\ ;\ a_{10}$

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_5 = a_1 r^4 = 768\ ;\ a_8 = a_1 r^7 = 49152$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 r^4 = 768 \\ a_1 r^7 = 49152 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{a_1 r^7}{a_1 r^4} = r^3 = \frac{49152}{768}$$

$$\Rightarrow\ r = 4\ ;\ \ a_1 = \frac{a_5}{r^4} = \frac{768}{4^4} = 3$$

$$\Rightarrow\ a_n = 3 \cdot 4^{n-1}\ ;\ \ a_{12} = 3 \cdot 4^{12-1} = 786432$$

Partiendo del Término Enésimo, reemplazando los valores: $a_5\ ;\ a_8$.

Se obtiene un Sistema de dos Ecuaciones con dos incógnitas (a_1, r), dividiendo entre ecuaciones para resolver.

Conocido r y a_5 se puede calcular a_1

Obtenido el Término Enésimo, reemplazando se logra cualquier otro Término.

b) Si en una P. G. $a_2 = 96\ ;\ a_4 = 216$ Calcular $a_1\ ;\ a_7$:

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 r = 96 \\ a_4 = a_1 r^3 = 216 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{a_1 r^3}{a_1 r} = r^2 = \frac{216}{96}$$

$$\Rightarrow\ r = \frac{3}{2}\ ;\ a_1 = 64\ ;\ a_7 = 64 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{7-1} = 729$$

Partiendo del Término Enésimo, reemplazando los valores $a_2\ ;\ a_4$.

Se obtiene un Sistema de dos Ecuaciones con dos incógnitas, dividiendo entre sí para resolver.

XIV.2.2 SUMA DE LOS PRIMEROS TÉRMINOS

Para obtener el valor de la suma de los primeros n Términos de una P.G. se emplea la fórmula:

$$\boxed{S = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}}$$

La deducción de esta fórmula es la siguiente:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S = a_1 + [a_1 r] + [a_1 r^2] + [a_1 r^3] + \dots + [a_1 r^{n-2}] + [a_1 r^{n-1}]$$

Desarrollando la Suma y reordenando.

$$\begin{array}{rl} S = & a_1 + [a_1 r] + [a_1 r^2] + [a_1 r^3] + \dots + [a_1 r^{n-2}] + [a_1 r^{n-1}] \\ -\ Sr = & \quad\ a_1 r + [a_1 r^2] + [a_1 r^3] + [a_1 r^4] + \dots + [a_1 r^{n-1}] + [a_1 r^n] \\ \hline S - Sr = & a_1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 - a_1 r^n \end{array}$$

$$\Rightarrow S(1-r) = a_1(1-r^n)$$

$$S = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1}$$

Ordenando la expresión de Suma (S) y multiplicando la misma por la Razón r. Restando miembro a miembro y despejando S.

$$S = \frac{(a_1 r^{n-1}) r - a_1}{r-1} = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$$

Ordenado la fórmula y considerando la expresión del Término último, se logra otra fórmula para el caso de que se conozca al último Término.

Ej 14.8 Efectuando la Suma de los Términos de una P.G: 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768

$$a = 3 \qquad S = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1} = 3\frac{2^9 - 1}{2-1} = 1533$$

$$r = 2$$

$$n = 9 \qquad S = \frac{a_n r - a_1}{r-1} = \frac{768 \cdot 2 - 3}{2-1} = 1533$$

La P.G. presenta 9 Términos, $n = 9$; $r = 2$

Por la fórmula que requiere de la Razón r, o en la fórmula que requiere del último Término se logra el mismo resultado.

Note que el producto de términos equidistantes (Entre 1^{ero} por último, 2do por penúltimo, etc.). Es de un valor constante (2304) como acontece en toda P.G. con número limitado de términos.

Ej 14.9 a) Efectuando la Suma de los 10 primeros Términos de: 2, 8, 32, 128, 512,...

$$S = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1} \ ; \quad \begin{array}{l} r = 4 \\ a_1 = 2 \\ n = 10 \end{array} \qquad S = 2\frac{4^{10} - 1}{4-1} = 699050$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 4^9 = 524280$$

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r-1} = \frac{a_{10} r - a_1}{r-1} = \frac{524280 \cdot 4 - 2}{4-1} = 699050$$

Considerando $n = 10$; $d = 4$

Reemplazando en la fórmula que requiere de la Razón r, o en la fórmula que requiere del último Término se obtiene el mismo resultado.

b) La Suma de los n primeros Términos de: 2, 6, 18, 54, ... es 531440. Calcular n

$$S = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1} \Rightarrow n = \frac{Log[1 + (r-1)S/a_1]}{Log\, r}$$

De la Fórmula de Suma de una PG se despeja n (Con logaritmos)

$$S = 531440 \ ; a_1 = 2 \ ; r = 3 \Rightarrow n = \frac{Log[1 + (3-1)531440/2]}{Log\, 3} = 12$$

Reemplazando los datos de la PG

c) Una leyenda de la creación del Ajedrez, relata que un agradecido rey prometió darle al inventor de este juego, como premio, lo que le pidiera. Este astuto inventor arrancó una sonrisa del rey al pedir un grano de trigo por la 1^{era} casilla, 2 granos por la 2da, 4 por la 3^{era} y así sucesivamente para todas las casillas del tablero. Calcular el total de granos que debería recibir.

$$\begin{array}{l} PG: \ 1, \ 2, \ 4, \ 8, \ 16, \ \dots, \\ \qquad 2^0, \ 2^1, \ 2^2, \ 2^3, \ 2^4, \ \dots, \ 2^{64-1} \end{array}$$

Se trata de una Progresión geométrica de $r = 2$; $n = 64$ (Las 64 casillas del tablero de ajedrez)

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 1 \cdot 2^{64-1} = 9.22 \cdot 10^{18}$$

$$S = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1} = 1\frac{2^{64} - 1}{2-1} = 1.84 \cdot 10^{19}$$

Calculando tanto el último término como la suma que son inmensas, se concluye que el rey ni con toda la producción del mundo podía cumplir su promesa.

XIV.2.3 SUMA INFINITA

Una Progresión infinita es aquella que posee infinitos Términos.

En una Progresión Geométrica infinita si la Razón es menor a uno ($r < 1$), se logra la suma de sus infinitos Términos mediante:

$$\boxed{S = a_1 \frac{1}{1-r}}$$

La deducción de esta fórmula es la siguiente:

Partiendo de la fórmula de Suma de una Progresión Geométrica, tomando en cuenta que si son infinitos Términos $n = \infty$

$$S = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Cuando la Razón es menor a uno, se considera que todo número menor a uno elevado a potencia infinita es igual a cero. Reemplazando y simplificandose verifica la fórmula.

$$\text{Si: } r < 1 \Rightarrow r^{\infty} = 0$$

$$S = a_1 \frac{0 - 1}{r - 1} = a_1 \frac{1}{1 - r}$$

Cuando la Razón es menor a uno, los Términos van decreciendo en valor. Es decir se trata de una Progresión descendente. Solo en este caso es aplicable la Fórmula de suma infinita.

Ej 14.10 Hallar el valor de la suma de todos los Términos de las siguientes P.G. infinitas

a) $\frac{5}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{18}, \frac{5}{54}, \frac{5}{162}, \dots, 0$

La Razón r se determina como el cociente entre dos términos consecutivos

$$a_1 = \frac{5}{2} \quad ; \quad r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{5/6}{5/2} = \frac{1}{3}$$

La razón es menor a uno, por tanto es aplicable la fórmula para Serie infinita.

$$S = a_1 \frac{1}{1-r} = \frac{5}{2} \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{15}{4}$$

b) $48, 24, 12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots, 0$

La Razón r es el cociente entre dos términos consecutivos

$$a_1 = 48 \quad ; \quad r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

La razón es menor a uno, por tanto es aplicable la fórmula para Serie infinita.

$$S = a_1 \frac{1}{1-r} = 48 \frac{1}{1 - 1/2} = 96$$

XIV.2.4 MEDIOS GEOMÉTRICOS

Dados dos números: a, b: Donde a es el primer Término y b es el último, se pueden introducir n números, de manera tal que incluyendo a, b se obtenga una Progresión Geométrica.

$$\underbrace{a, \underbrace{\_, \_, \_, \dots,}_{n \text{ Términos}} b}_{n+2 \text{ Términos}}$$

Note que de esta manera existirán $n+2$ Términos siendo a el primero, b el $n+2$ Término.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad ; \quad a = a_1$$

$$b = a_{n+2} = a_1 r^{n+2-1} = a r^{n+1}$$

Deduciendo una expresión para el último Término que es b.

$$\Rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

A su vez la Razón r se obtiene despejando:

Ej 14.11 Introducir cinco Medios Geométricos entre: 2 y 1458

$$a = a_1 = 2 \quad ; \quad b = a_{5+2} = 1458 \quad ; \quad n = 5$$

El Primer y último Término son 2 y 1458 respectivamente, calculando la Razón r.

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[6]{\frac{1458}{2}} = 3$$

Colocando los cinco Medios Geométricos en la P.G. obtenida.

$$2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458$$

14.8 Entre 162 y 32 introducir un cierto número de Medios Geométricos, de manera que la suma de todos los Términos sea de 422

$$a = a_1 = 162 \qquad b = a_n = 32 \qquad S = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} = 162 \frac{r^n - 1}{r - 1} = 422$$

Por la fórmula de Suma de los Primeros Términos de una P.G y por la Fórmula de Término Enésimo

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 162\, r^{n-1} = 32$$

Conformando un Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (r, n). Despejando r^n y reemplazando.

$$\Rightarrow r^n = \frac{32r}{162} \Rightarrow 162 \frac{(32r/162) - 1}{r - 1} = 422$$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{3}\ ;\ n = 5 \Rightarrow 162, 108, 72, 48, 32$$

Como el Nº total de Términos es 5, se concluye que se precisa de 3 Medios Geométricos para lograr esa Suma de 422.

XIV.3 PROGRESIÓN ARMÓNICA

Usualmente a una Progresión Armónica se la designa por P.H.

Tres números a, b, c están en Progresión Armónica cuando se cumple la relación:

$$\boxed{\frac{a}{c} = \frac{a - b}{b - c}}$$

Ej 14.12 Son Progresiones Armónicas (P.H.) Las siguientes sucesiones de números:

a) $a = 6,\ b = 4,\ c = 3 \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{a - b}{b - c} \Rightarrow \dfrac{6}{3} = \dfrac{6 - 4}{4 - 3} = 2$

b) $a = 5,\ b = 8,\ c = 20 \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{a - b}{b - c} \Rightarrow \dfrac{5}{20} = \dfrac{5 - 8}{8 - 20} = \dfrac{1}{4}$

Progresiones Armónicas, ya que se cumple la definición.

Una Propiedad muy importante de las P.H. es que sus recíprocos están en P.A.

Ej 14.13 $a = 6,\ b = 4,\ c = 3 \Rightarrow \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3} \Rightarrow d = \dfrac{1}{12}$

Los recíprocos del Ejemplo anterior, efectivamente constituyen una Progresión Aritmética de Diferencia: $d = 1/12$

XIV.- PROBLEMAS PROPUESTOS

14.1 En las Progresiones Aritméticas, hallar el Término que sigue y el Término Enésimo.

a) $3, 8, 13, ...$ b) $7, 13, 19, ...$ c) $-6, -2, 2, ...$ d) $64, 59, 54, ...$ e) $35, 32, 29, ...$ f) $7, 13, 19, ...$ g) $7, 15/2, 8, ...$ h) $12, 19/2, 7, ...$

14.2 Hallar el Término indicado para cada Progresión Aritmética.

a) $7, 11, 15, ...\ ;\ a_{10}$ b) $54, 48, 42, ...\ ;\ a_9$ c) $3, 11, 19, ...\ ;\ a_8$

d) $-7, -3, 1, ...\ ;\ a_{12}$ e) $\frac{7}{2}, 6, \frac{17}{2}, ...\ ;\ a_8$ f) $9, \frac{29}{3}, \frac{31}{3}, ...\ ;\ a_{10}$

14.3 Hallar el Término indicado en las P.A. que tienen a los Términos indicados

a) $a_8 = 33\ ;\ a_4 = 17\ ;\ a_1$ b) $a_9 = 62\ ;\ a_7 = 48\ ;\ a_5$ c) $a_1 = 9\ ;\ a_6 = 39\ ;\ a_{10}$ d) $a_4 = 52\ ;\ a_6 = 46\ ;\ a_9$ e) $a_5 = 13\ ;\ a_9 = 19\ ;\ a_{11}$ f) $a_6 = 19/2\ ;\ a_{10} = 15/2\ ;\ a_{15}$

14.4 Hallar la Suma de los primeros Términos indicados en las P.A.

a) 3 , 5 , 7 , ... ; 10 Tér. c) 5 , 9 , 13 , ... ; 8 Tér. e) 7 , 17/2 , 10 , ... ; 11 Tér.
b) 6 , 13 , 20 , ... ; 9 Tér. d) 61 , 58 , 55 , ... ; 10 Tér. f) 12 , 23/2 , 11 , ... ; 15 Tér.
g) La suma de todos los números de dos dígitos, múltiplos de 3.

14.5 Entre el 1[er] y último Término indicados de las P.A., interpolar el N° de Términos señalados

a) 3 ; 19 ; 3 Medios b) 68 ; 14 ; 5 Medios c) 5 ; 89 ; 6 Medios
d) 2 ; 26 ; 5 Medios e) 7 ; 22 ; 5 Medios f) 12 ; 8 ; 5 Medios

14.6 En las Progresiones Geométricas, hallar el Término que sigue y el Término Enésimo.

a) 3 , 12 , 48 , ... c) 4 , −20 , 100 , ... e) 100 , 20 , 4 , ... g) 5/3 , 5/6 , 5/12 , ...
b) 15 , 105 , 735 , ... d) −6 , 18 , −54 , ... f) 144 , 48 , 16 , ... h) 7/2 , 7/3 , 14/9 , ...

14.7 Hallar el Término indicado para cada Progresión Geométrica.

a) 5 , 10 , 20 , ... ; a_9 b) 4 , −12 , 36 , ... ; a_8 c) 64 , 32 , 16 , ... ; a_7
d) −6 , 18 , −54 , ... ; a_8 e) $\frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{5}{9}, \ldots ; a_{10}$ f) $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{20}, \ldots ; a_6$

14.8 Hallar el Término indicado en las P.G. que tienen a los Términos indicados

a) $r = 3 ;\ a_6 = 486 ;\ a_1$ c) $a_4 = 686 ;\ a_5 = 4802 ;\ a_1$ e) $a_6 = 96 ;\ a_4 = 24 ;\ a_1$
b) $r = 4 ;\ a_6 = 5120 ;\ a_3$ d) $a_3 = 50 ;\ a_5 = 625/2 ;\ a_1$ f) $a_7 = 186624 ;\ a_4 = 5184 ;\ a_3$

14.9 Hallar la Suma de los primeros Términos indicados en las P.G.

a) 5 , 15 , 45 , ... ; 6 Tér. c) 7 , 28 , 112 , ... ; 8 Tér. e) 32 , 40 , 50 , ... ; 10 Tér.
b) 12 , 18 , 27 , ... ; 7 Tér. d) 128 , 64 , 32 , ... ; 8 Tér. f) 36 , 24 , 16 , ... ; 10 Tér.

14.10 Entre el 1[er] y último Término indicados de las P.G., interpolar el N° de Términos indicados

a) 4 ; 324 ; 3 Medios b) 4 ; 12500 ; 4 Medios c) 243 ; 16 ; 4 Medios
d) 7 ; 9072 ; 3 Medios e) 64 ; 729 ; 5 Medios f) 1 ; 4096 ; 5 Medios

14.11 a) En la P.A.: 5, 9, 13, ... ; la Suma de sus n primeros Términos es 860, calcular n.
b) En la P.G.: 256, 384, 576, ... ; la Suma de sus n primeros Términos es 19171 calcular n.
c) En la P.A.: de $a_n = 50$; $n = 17$; $S = 442$; Calcular la diferencia: d
Calcular x en: d) $3 + 7 + 11 + \ldots + x = 465$ e) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{16} - \ldots = 0$

14.12 a) Calcular el valor de x, para obtener una P.A. en: $x - 1$, $3x - 5$, $2x + 3$
b) Calcular el valor de x, para obtener una P.G. en: $2x - 8$, $x + 1$, $4x - 2$

14.13 a) Ahorrando un comerciante guarda el 1[er] sábado del año la suma de 20 Bs, al 2[do] sábado 25 Bs luego al 3[ero] 30 Bs y así. Calcular cuanto ahorra el cabo de las 52 semanas del año.
b) Un atleta el 1[er] día de un mes corre 2.4 Km, si decide correr 0.3 Km adicionales cada día. Calcular la distancia que recorre el día 30 del mes. Calcular la distancia total que ha corrido.

c) Una persona consigue un préstamo de 1000 \$us de un usurero, con un interés compuesto del 3% mensual, cuánto deberá pagar si decide hacerlo todo en junto al cabo de 2 años.

d) A las 8.00 am un chisme sobre un artista es contado por una dama a 4 personas, cada una de ellas en promedio lo cuenta a otras 4 personas cada 30 minutos. Entendiendo que en cada cuento se toma una persona nueva, calcular cuantas personas se enteran del chisme a las 12.00

e) Desde el piso se lanza una pelota hasta una altura de 20 m, al caer rebota alcanzando en cada rebote los 2/3 de la altura anterior. Calcular la distancia total recorrida por la pelota hasta su detención definitiva.

RESPUESTAS XIV

14.1 a) $18\ ;\ 3+(n-1)5$ b) $25\ ;\ 7+(n-1)6$ c) $6\ ;\ -6+(n-1)4$ d) $49\ ;\ 64-(n-1)5$ e) $26\ ;\ 35-(n-1)3$ f) $23\ ;\ 7+(n-1)6$ g) $\dfrac{17}{2}\ ;\ 7+(n-1)\dfrac{1}{2}$ h) $\dfrac{9}{2}\ ;\ 12-(n-1)\dfrac{5}{2}$

14.2 a) 43 b) 6 c) 59 d) 37 e) 21 f) 15

14.3 a) 5 b) 34 c) 63 d) 49 e) 22 f) 5

14.4 a) 120 b) 306 c) 152 d) 475 e) 319/2 f) 255/2 g) 1665

14.5 a) 7 , 11 , 15 b) 59 , 50 , 41 , 32 , 23 c) 17 , 29 , 41 , 53 , 65 d) 6 , 10 , 14 , 18 , 22 e) $\dfrac{19}{2}, 12, \dfrac{29}{2}, 17, \dfrac{39}{2}$ f) $\dfrac{34}{3}, \dfrac{32}{3}, 10, \dfrac{28}{3}, \dfrac{26}{3}$

14.6 a) $192\ ;\ 3\cdot 4^{n-1}$ b) $5145\ ;\ 15\cdot 7^{n-1}$ c) $-500\ ;\ 4(-5)^{n-1}$ d) $162\ ;\ (-6)(-3)^{n-1}$ e) $\dfrac{4}{5}\ ;\ 100\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$ f) $\dfrac{16}{3}\ ;\ 144\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ g) $\dfrac{5}{24}\ ;\ \dfrac{5}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ h) $\dfrac{28}{27}\ ;\ \dfrac{7}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

14.7 a) 1280 b) 8748 c) 1 d) 13122 e) 640/19683 f) 243/1280

14.8 a) 2 b) 80 c) 2 d) 8 e) 3 f) 144

14.9 a) 1820 b) 6177/16 c) 152915 d) 255 e) 1064.09 f) 106.13

14.10 a) 12 , 36 , 108 b) 20 , 100 , 500 , 2500 c) 162 , 54 , 36 , 24 d) 42 , 252 , 1512 e) 96 , 144 , 216 , 324 , 486 f) 4 , 16 , 64 , 256 , 1024

14.11 a) $n = 20$ b) $n = 9$ c) $d = 3$ d) $x = 59$ e) $x = 1/3$

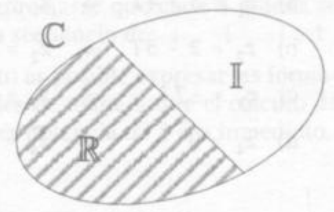
14.12 a) $x = 4$ b) $x = 5$

14.13 a) 7670 \$us b) 11.1 Km; 202.5 Km c) 1973 \$us d) 120 m e) 26

XV.- NÚMEROS COMPLEJOS

En Álgebra Básica usualmente se trabaja solo con Números Reales, sin embargo en un estudio más completo de las Matemáticas se incluyen a los Números Complejos que incluye tanto a los Números Reales como a los Números Imaginarios.

El Conjunto de los Números Complejos está constituido por el Conjunto de los Números Reales y el Conjunto de los Números Imaginarios.



La Unidad Imaginaria es i; se define mediante: $i = \sqrt{-1}$

Al Conjunto de los Números Complejos usualmente se designa por: $\mathbb{C}$; Un Número Complejo se designa por z; posee la forma general siguiente:

$$\boxed{z = a + b\,i}$$

Donde: a, b son Números Reales; i es la Unidad Imaginaria; a es la Parte Real y b es la Parte Imaginaria; También suelen expresarse como Pares Ordenados: $z = (a,b)$

Un Número Imaginario Puro posee la Forma: bi (b es un Número Real)

Ej 15.1 Se ejemplifica la notación de Números Complejos

a) $z = 5 + 2i = (5,2)$ Es un Número Complejo descrito en dos Formas

b) $z = 3i = \sqrt{-9} = (0,3)$ Es un Número Imaginario Puro, descrito en dos Formas

c) $z = 7 = (7,0)$ Es un Número Real Puro, que es parte de los Números Complejos

XV.1 IGUALDAD DE COMPLEJOS

Dos Números Complejos: z_1 , z_2 son iguales si y solo si, tanto sus Partes Reales como sus Partes Imaginarias son iguales entre sí.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si: } z_1 = a + b\,i \quad ; \quad z_2 = c + d\,i \\ \qquad z_1 = z_2 \quad \Rightarrow \quad a = c \quad ; \quad b = d \end{array}}$$

Ej 15.2 Comparando dos Números Complejos

$$\begin{array}{l} z_1 = 6 + 4i \\ z_2 = u + vi \\ z_1 = z_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} u = 6 \\ v = 4 \end{array} \end{array}$$

Para que se cumpla la igualdad, necesariamente las Partes Real e Imaginaria deben ser iguales entre si.

XV.2 CONJUGADO Y MÓDULO

XV.2.1 CONJUGADO DE UN COMPLEJO

El Conjugado: $\bar{z}$ de un Número Complejo z; se denota y define del siguiente modo:

$$\boxed{\textbf{Si: } z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi}$$

Ej 15.3 Se determinan los Conjugados de los siguientes Números Complejos:

a) $z_1 = 3 + 4i \Rightarrow \overline{z_1} = 3 - 4i$

b) $z_2 = 2 - 5i \Rightarrow \overline{z_2} = 2 + 5i$

c) $z_3 = -7i \Rightarrow \overline{z_3} = 7i$

d) $z_4 = 9 \Rightarrow \overline{z_4} = 9$

Se aprecia que el Conjugado de un Número Complejo es otro Número Complejo. (Simplemente se cambia el signo de su Parte Imaginaria)

Ciertas operaciones se simplifican usando el Conjugado (Por ejemplo la división de Complejos)

XV.2.2 MÓDULO DE UN COMPLEJO

El Módulo $|z|$ de un Número Complejo, se denota y define del siguiente modo:

$$\boxed{z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Note que el Módulo de un Número Complejo es un Número Real.

Ej 15.4 Se determinan los Módulos de los siguientes Números Complejos:

a) $z_1 = 4 + 3i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

b) $z_2 = 2 - 5i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = 5.41$

c) $z_3 = -3i \Rightarrow |z_3| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$

Usando la definición se verifica que el Módulo es efectivamente un Número Real.

Se cumplen las Propiedades: $|z| = |\bar{z}|$; $z\bar{z} = |z|^2$

Demostrando la primera Propiedad:

$|z| = |\bar{z}|$ Planteando la Igualdad a demostrar.

$|(a + bi)| = |(a - bi)|$ Dado un Número Complejo cualquiera, se plantea además su correspondiente Conjugado.

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Por la definición de Módulo, se cumple plenamente que: $b^2 = (-b)^2$, por tanto queda demostrada la Propiedad.

Entre los Números Complejos, no existe relación de orden, es decir no se puede afirmar que un Número Complejo sea mayor o menor a otro.

XV.3 POTENCIAS DE LA UNIDAD

Con la Unidad Imaginaria, se verifican las siguientes Propiedades:

$$i = \sqrt{-1} \quad ; \quad i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 i = (-1)\,i = -i$$
$$i^4 = (i^3)\,i = (-i)\,i = -i^2 = -(-1) = 1$$
$$i^5 = (i^4)\,i = (1)\,i = i$$
$$i^6 = (i^5)\,i = (i)\,i = i^2 = -1$$
$$i^7 = (i^6)\,i = (-1)\,i = -i$$
$$i^8 = (i^7)\,i = (-i)\,i = -(i^2) = -(-1) = 1$$
$$i^9 = (i^8)\,i = (1)\,i = i$$
$$\ldots = \ldots$$
$$\Rightarrow i^{4n} = 1 \; ; \; i^{4n+1} = i \; ; \; i^{4n+2} = -1 \; ; \; i^{4n+3} = -i$$

Las dos primeras potencias se definen del modo indicado.

Para simplificar las restantes potencias se descompone entre la potencia inmediata inferior e *i*. Usando el resultado calculado para simplificar.

Puede apreciarse que cada 4 grados se repite la secuencia de: i , -1 , $-i$, 1

Por tanto es posible expresar las fórmulas finales de manera que el cálculo de cualquier potencia de *i*, sea inmediato.

Ej 15.5 Efectuando Operaciones entre potencias de la Unidad Imaginaria.

a)
$$i^{12} = i^{4\cdot 3+0} = i^0 = 1$$
$$i^{10} = i^{4\cdot 2+2} = i^2 = -1$$
$$i^{15} = i^{4\cdot 3+3} = i^3 = -i$$
$$i^{21} = i^{4\cdot 5+1} = i^1 = i$$
$$i^{100} = i^{4\cdot 25+0} = i^0 = 1$$

Para hallar el valor de una potencia de la Unidad Imaginaria *i*, se descompone dicha potencia entre el mayor múltiplo de 4 y un residuo. Eliminando luego tal múltiplo, se considera que:

$$i^0 = 1 \; ; \; i^1 = i \; ; \; i^2 = -1 \; ; \; i^3 = -i \; ; \; i^4 = 1$$

b) $i^{20} - 1$

$$i^{20} - 1 = i^{4\cdot 5+0} - 1 = i^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Para efectuar operaciones, antes se simplifica la potencia de la Unidad Imaginaria. Simplificando luego.

$i^{25} - i^3$

$$i^{25} - i^3 = i^{4\cdot 6+1} - i^3 = i - (-i) = 2i$$

Para efectuar la simplificación del cociente tras simplificar la potencia de la Unidad Imaginaria, se hacen operaciones.

$$\frac{i^{34} - 1}{i^{19} + i^5}$$

$$\frac{i^{34} - 1}{i^{19} + i^5} = \frac{i^{4\cdot 8+2} - 1}{i^{6\cdot 3+1} + i^{4\cdot 1}} = \frac{i^2 - 1}{i + i} = \frac{-1-1}{2i}$$
$$= \frac{-1}{i} = \frac{-1}{i}\,\frac{i}{i} = \frac{-i}{i^2} = \frac{-i}{-1} = i$$

Al quedar la Unidad Imaginaria en el denominador, se multiplica y divide por la misma unidad *i*, para así subirla al numerador.

c)
$$\frac{1}{i^7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{i^{4\cdot 1+3}} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i}$$
$$= -\frac{1}{i} = -\frac{1}{i}\,\frac{i}{i} = -\frac{i}{i^2} = -\frac{i}{-1} = i$$

Para simplificar la potencia en el denominador se descompone del modo habitual

Luego para eliminar a *i* del denominador, se multiplica y divide por la misma *i*, para luego simplificar.

d) i^2

$$i^2 = i\cdot i = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\,(-1)} = \sqrt{1} = 1$$
$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

Algebraicamente se obtienen dos resultados posibles. Ante la duda simplemente se decide definir que: $i^2 = -1$. Éste será el valor definitivo de esta potencia.

XV.4 OPERACIONES CON COMPLEJOS

Las Operaciones básicas entre Números Complejos, se definen del siguiente modo:

Si: $z_1 = a + bi \quad ; \quad z_2 = c + di$

SUMA: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Para sumar dos Números Complejos, se suman sus Partes Real e Imaginaria entre sí.

RESTA: $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Para restar dos Números Complejos, se restan sus Partes Real e Imaginaria entre sí.

PRODUCTO: $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$

$$= ac + adi + bci + bd(-1) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Para multiplicar dos Números Complejos, se desarrolla el producto de un binomio por otro, para simplificar considerando que: $i^2 = -1$. Luego se agrupan las Partes Real e Ima-ginaria.

COCIENTE: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{a + bi}{c + di}\,\dfrac{c - di}{c - di} = \dfrac{ac - adi + bci - bd(-1)}{c^2 - cdi + dic - d^2 i^2}$

$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i$$

Para dividir dos Números Complejos, se multiplica y divide por el Conjugado del denominador, simplificando se observa que en el denominador queda un Número Real. Luego se agrupan las Partes Real e Imaginaria.

Ej 15.6 Se efectúan todas las Operaciones Básicas entre: $z_1 = 13 + 26i \; ; \; z_2 = 7 + 4i$

a) $z_1 + z_2 = (13 + 26i) + (7 + 4i) = 20 + 30i$

b) $z_1 - z_2 = (13 + 26i) - (7 + 4i) = 6 + 22i$

Al sumar y restar, se suman o restan las Partes Real e Imaginaria entre sí.

c) $z_1 \cdot z_2 = (13 + 26i)(7 + 4i) = 91 + 52i + 182i + 104i^2$

$$= 91 + 234i + 104(-1) = -13 + 234i$$

Al Multiplicar se desarrolla todo el producto, para luego simplificar.

d) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{13 + 26i}{7 + 4i} = \dfrac{13 + 26i}{7 + 4i}\,\dfrac{7 - 4i}{7 - 4i}$

$$= \frac{91 + 182i - 52i - 104i^2}{49 - 28i + 28i - 16i^2} = \frac{91 + 130i - 104(-1)}{49 - 16(-1)}$$

$$= \frac{195 + 130i}{65} = \frac{195}{65} + \frac{130i}{65} = 3 + 2i$$

Para dividir se multiplica y divide por el Conjugado del denominador, para luego simplificar y ordenar.

La operación de potencia se analiza posteriormente.

Las operaciones de producto y cociente se simplifican considerablemente usando la Forma Polar de los Números Complejos, tal como más luego se verifica.

15.1 Si: $z_1 = 3 - 4i$; $z_2 = 2 + 3i$; Calcular las siguientes Operaciones:

a) $z_1 + \overline{z_2}$

$$z_1 + \overline{z_2} = (3 - 4i) + (2 - 3i) = 5 - 7i$$

b) $|z_1 + z_2|$

$$|z_1 + z_2| = |(3 - 4i) + (2 + 3i)| = |5 - i| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = 5.1$$

c) $|z_1|\, z_2$

$$|z_1|\, z_2 = |3 - 4i|\,(2 + 3i) = \sqrt{3^2 + (-4)^2}\,(2 + 3i) = 5\,(2 + 3i) = 10 + 15i$$

d) $z_1 \cdot z_2 + 5$

$$z_1 \cdot z_2 + 5 = (3 - 4i)(2 + 3i) + 5 = 6 + 9i - 8i - 12i^2 + 5 = 6 + i - 12(-1) + 5 = 23 + i$$

e) $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} = \frac{(3 - 4i) - (2 + 3i)}{(3 - 4i) + (2 + 3i)} = \frac{1 - 7i}{5 - i}$$

$$= \frac{1 - 7i}{5 - i}\,\frac{5 + i}{5 + i} = \frac{5 + i - 35i - 7i^2}{25 + 5i - 5i - i^2}$$

$$= \frac{5 - 34i - 7(-1)}{25 - (-1)} = \frac{12 - 34i}{26} = \frac{6}{13} - \frac{17}{13}\,i$$

Efectuando en forma previa la resta y suma de Complejos, tanto en el numerador como denominador.

Luego multiplicando y dividiendo por el Conjugado del denominador.

Simplificando y ordenando.

f) z_1^2

$$z_1^2 = (3 - 4i)^2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot 4i + (4i)^2 = 9 - 24i + 16(i^2) = 9 - 24i + 16(-1) = -7 - 24i$$

Para elevar el Número Complejo al cuadrado, se eleva el binomio de acuerdo a reglas conocidas. Simplificando luego las potencias de *i*.

g) z_2^3

$$z_2^3 = (2 + 3i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 3i + 3\cdot 2(3i)^2 + (3i)^3 = 8 + 36i + 54(i^2) + 27(i^3) = 8 + 36i + 54(-1) + 27(-i) = -46 + 9i$$

Para elevar el Número Complejo al cubo, se eleva el binomio de acuerdo a reglas conocidas. Simplificando luego las potencias de *i*.

XV.5 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

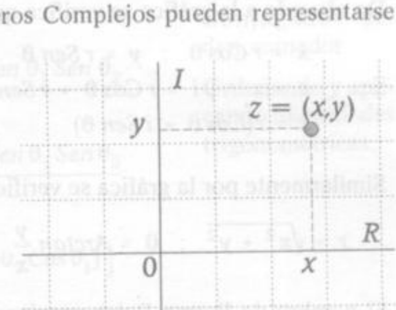
Usando un Sistema de Coordenadas Rectangulares, Los Números Complejos pueden representarse como Puntos en el Plano, haciendo coincidir el Complejo: $z = x + yi$ con el Punto de Coordenadas: (x,y)

Por tanto: La Parte Real (x) se lleva sobre el Eje de Abscisas (X) ;Se llamará EJE REAL.

La Parte Imaginaria (y) se lleva sobre el Eje de Ordenadas (Y); Se llamará EJE IMAGINARIO.

A este Plano se lo llama EL PLANO COMPLEJO o DIAGRAMA DE ARGAND.

En la gráfica adjunta se representa en forma general al Número Complejo: $z = x + yi$



Ej 15.7 Se representan gráficamente los siguientes Números Complejos:

$z_1 = 4 + 2i$

$z_2 = -2 + 3i$

$z_3 = -1 - i$

$z_4 = 2$

Ubicando los Números Complejos sobre el Plano Complejo.

Como z_4 es un Número que contiene solo Parte Real, se grafica sobre el Eje Real.

15.2 Dados los Complejos: $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 3 + 4i$; Representar gráficamente:

a) $2z_2 - z_1$

$2z_2 - z_1 = 2(3 + 4i) - (1 + 2i)$ Resta de Complejos

$= 5 + 6i$

b) $\overline{z_2} \Rightarrow \overline{z_2} = 3 - 4i$ Conjugado de Número Complejo.

c) $\dfrac{1}{5} z_1 \cdot z_2$ Producto de Complejos

$\dfrac{1}{5} z_1 \cdot z_2 = \dfrac{1}{5}(1 + 2i)(3 + 4i)$

$= \dfrac{1}{5}(-5 + 10i) = -1 + 2i$

d) $|z_2| \Rightarrow |z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Módulo de Complejo. El Módulo es un Número Real, se grafica sobre el Eje Real.

XV.6 FORMA POLAR DE COMPLEJOS

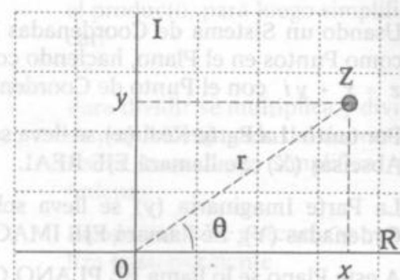
El Número Complejo: $z = x + yi$, está en la Forma Binómica, se puede llevar a otra forma de expresión llamada: FORMA POLAR.

De acuerdo a la gráfica se verifica que:

$$x = r\,Cos\,\theta \quad ; \quad y = r\,Sen\,\theta$$

$$z = x + yi = r\,Cos\,\theta + r\,Sen\,\theta\, i$$

$$z = r(Cos\,\theta + i\,Sen\,\theta)$$



Similarmente por la gráfica se verifica que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \theta = Arctan\,\frac{y}{x}$$

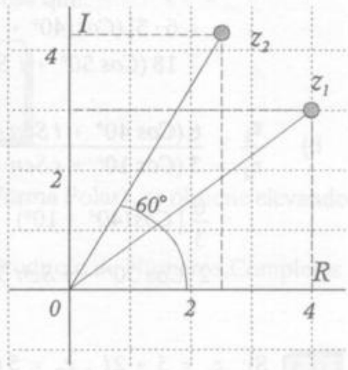
El nombre de Forma Polar proviene del hecho de que: (r,θ) son las Coordenadas de un Punto en el Plano, en el Sistema de Coordenadas Polares.

Ej 15.8 Dado el Número Complejo en Forma Binómica: z_1 se expresará en Forma Polar

Dado el Número Complejo en Forma Polar: z_2 se expresará en Forma Binómica.

$$z_1 = 4 + 3i$$
$$\Rightarrow \quad x = 4 \quad ; \quad y = 3$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$
$$\theta = Arctan\frac{y}{x} = Arctan\frac{3}{4} = 36.87°$$
$$z_1 = 5(Cos\,36.87° + i\,Sen\,36.87°)$$

Usando las fórmulas de conversión, para pasar de Binómicas a Polares.



$$z_2 = 5(Cos\,60° + i\,Sen\,60°)$$
$$x = r\,Cos\,\theta = 5\,Cos\,60° = 2.50$$
$$y = r\,Sen\,\theta = 5\,Sen\,60° = 4.33$$
$$z_2 = (2.50\,,4.33)$$

Conversión, para pasar de Polares a Binómicas.

El Producto y Cociente de Números Complejos, se simplifica notablemente usando la Forma Polar, ya que se verifican las relaciones:

$$z_1 = r_1(Cos\,\theta_1 + i\,Sen\,\theta_1) \quad ; \quad z_2 = r_2(Cos\,\theta_2 + i\,Sen\,\theta_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left[Cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,Sen(\theta_1 + \theta_2)\right]$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[Cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,Sen(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

Estas Relaciones de Producto y Cociente pueden demostrarse fácilmente usando las Propiedades Trigonométricas del Seno y Coseno:

$$z_1 = r_1(Cos\,\theta_1 + i\,Sen\,\theta_1) \quad ; \quad z_2 = r_2(Cos\,\theta_2 + i\,Sen\,\theta_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1(Cos\,\theta_1 + i\,Sen\,\theta_1)\cdot r_2(Cos\,\theta_2 + i\,Sen\,\theta_2)$$
$$= r_1 r_2\left[Cos\,\theta_1\,Cos\,\theta_2 + i\,Cos\,\theta_1\,Sen\,\theta_2 + i\,Sen\,\theta_1\,Cos\,\theta_2 + i^2 Sen\,\theta_1\,Sen\,\theta_2\right]$$
$$= r_1 r_2\left[(Cos\,\theta_1\,Cos\,\theta_2 - Sen\,\theta_1\,Sen\,\theta_2) + i\,(Cos\,\theta_1\,Sen\,\theta_2 + i\,Sen\,\theta_1\,Cos\,\theta_2)\right]$$
$$= r_1 r_2\left[Cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,(Sen\,(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

Desarrollando el producto y usando Identidades trigonométricas.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(Cos\,\theta_1 + i\,Sen\,\theta_1)}{r_2(Cos\,\theta_2 + i\,Sen\,\theta_2)}\,\frac{(Cos\,\theta_2 - i\,Sen\,\theta_2)}{(Cos\,\theta_2 - i\,Sen\,\theta_2)}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{Cos\,\theta_1\,Cos\,\theta_2 - i\,Cos\,\theta_1\,Sen\,\theta_2 + i\,Sen\,\theta_1\,Cos\,\theta_2 - i^2 Sen\,\theta_1\,Sen\,\theta_2}{Cos^2\theta_2 - i^2\,Sen^2\theta_2}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{Cos\theta_1\,Cos\theta_2 + i\,(Sen\theta_1\,Cos\theta_2 - Sen\theta_2\,Cos\theta_1) - (-1)Sen\theta_1\,Sen\theta_2}{Cos^2\theta_2 - (-1)\,Sen^2\theta_2}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\,(Cos\theta_1\,Cos\theta_2 + Sen\theta_1\,Sen\theta_2) + i\,(Sen\theta_1\,Cos\theta_2 - Sen\theta_2\,Cos\theta_1)\,\right]$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\,Cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,Sen(\theta_1 - \theta_2)\,\right]$$

Multiplicando y dividiendo por el Conjugado del denominador.

Ordenando y aplicando Identidades trigonométricas.

Ej 15.9 Con los Complejos: $z_1 = 6(Cos\,40° + i\,Sen\,40°)$; $z_2 = 3(Cos\,10° + i\,Sen\,10°)$ se efectúan las Operaciones de Producto y Cociente.

a) $z_1 \cdot z_2 = [6\,(Cos\,40° + i\,Sen\,40°)]\,[3\,(Cos\,10° + i\,Sen\,10°)]$

$= 6 \cdot 3[(Cos(40° + 10°) + i\,Sen(40° + 10°)]$

$= 18\,(Cos\,50° + i\,Sen\,50°)$

Para el Producto se multiplican los Módulos y se suman los Argumentos.

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{6\,(Cos\,40° + i\,Sen\,40°)}{3\,(Cos\,10° + i\,Sen\,10°)}$

$= \dfrac{6}{3}\,[\,Cos(40° - 10°) + i\,Sen(40° - 10°)\,]$

$= 2\,(Cos\,30° + i\,Sen\,30°)$

Para el Cociente se dividen Módulos (r) y se restan Argumentos (θ).

Note que las operaciones de Producto y Cociente se simplifican notablemente al usar estas propiedades de la Forma Polar.

15.3 Si: $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 5\,(Cos\,20° + i\,Sen\,20°)$ Efectuar las Operaciones:

a) $z_1 \cdot z_2$

$z_1 = 3 + 2i$; $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3.6$

$\theta = Arctan\,\dfrac{y}{x} = Arctan\,\dfrac{2}{3} = 33.69°$

$z_1 = 3.6\,(Cos\,33.69° + i\,Sen\,33.69°)$

$z_1 \cdot z_2 = [3.6\,(Cos\,33.69° + i\,Sen\,33.69°)]\,[5\,(Cos\,20° + i\,Sen\,20°)]$

$= 18\,(Cos\,53.69° + i\,Sen\,53.69°)$

Para poder efectuar el Producto, deben expresarse los Complejos en una misma forma.

Pasando todo a Polares.

b) z_1/z_2 $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3.6\,(Cos\,33.69° + i\,Sen\,33.69°)}{5\,(Cos\,20° + i\,Sen\,20°)}$

$= \dfrac{3.6}{5}[Cos(33.69° - 20°) + i\,Sen(33.69° - 20°)]$

$= 0.72\,(Cos\,13.69° + i\,Sen\,13.69°)$

Para efectuar el cociente se aplica una propiedad de la Forma Polar de los Números Complejos.

Dividiendo entre los r, y restando los ángulos.

c) z_2^2 $\quad z_2^2 = z_2\,z_2 = 5\,(Cos\,20° + i\,Sen\,20°)\;5\,(Cos\,20° + i\,Sen\,20°)$

$= 5^2\,[\,(Cos\,(20° + 20°) + i\,Sen\,(20° + 20°)\,]$

$= 25\,(Cos\,40° + i\,Sen\,40°)$

Elevar al cuadrado significa multiplicar por si mismo.

d) z_2^3 $\quad z_2^3 = z_2\,z_2\,z_3 = 5\,(Cos\,20° + i\,Sen\,20°)\;5\,(Cos\,20° + i\,Sen\,20°)\;5\,(Cos\,20° + i\,Sen\,20°)$

$= 5^3\,[\,(Cos\,(20° + 20° + 20°) + i\,Sen\,(20° + 20° + 20°)\,]$

$= 125\,(Cos\,60° + i\,Sen\,60°)$

Elevar al cubo significa multiplicar tres veces por si mismo al Número Complejo.

Para calcular potencias de un Número Complejo es preferible utilizar el Teorema de De-Moivre, que se cita posteriormente.

XV.7 TEOREMA DE DE-MOIVRE

El Teorema de De-Moivre sobre cualquier Número Complejo: z expresa que:

$$z = r\,(Cos\,\theta + i\,Sen\,\theta)$$
$$\Rightarrow z^n = r^n\,(Cos\,n\theta + i\,Sen\,n\theta)$$

Por tanto la Potencia Enésima del Número Complejo (Expresado en Forma Polar), se obtiene elevando a n-potencia el Módulo: r y multiplicando por: n el Argumento: θ

El Teorema de De-Moivre es una generalización de la Propiedad del Producto de Números Complejos. (Ver Prob.15.3-c, 15.3-d)

Ej 15.10 Se elevan a las Potencias Segunda y Quinta el Complejo: z

$z = 4\,(Cos\,12° + i\,Sen\,12°)$ Número Complejo en Forma Polar

$z^n = r^n\,(Cos\,n\theta + i\,Sen\,n\theta)$ Aplicando el Teorema de De-Moivre.

$z^2 = 4^2[\,Cos(2\cdot 12°) + i\,Sen(2\cdot 12°)\,]$
$= 16\,(Cos\,24° + i\,Sen\,24°)$

Elevando al cuadrado por el Teorema, note que r se eleva al cuadrado y que el argumento θ, se multiplica por 2.

$z^5 = 4^5[\,Cos(5\cdot 12°) + i\,Sen(5\cdot 12°)\,]$
$= 1024\,(Cos\,60° + i\,Sen\,60°)$

Elevando a la Quinta Potencia y aplicando el Teorema.

15.4 Dado: $z = 5 + i$ Hallar z^6 expresado en Forma Binómica.

$z = 5 + i$ El Número Complejo presenta su Forma Binómica.

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = 5.1$

$\theta = Arctan\,\dfrac{y}{x} = Arctan\,\dfrac{1}{5} = 11.31°$

Para aplicar el Teorema de De-Moivre previamente se lleva a la Forma Polar .

$z = 5.1\,(Cos\,11.31° + i\,Sen\,11.31°)$ Forma Polar del Número Complejo.

$z^6 = 5.1^6[\,(Cos(6\cdot 11.31°) + i\,Sen(6\cdot 11.31°)\,]$ Teorema de De-Moivre.

$= 17576\,(Cos\,67.86° + i\,Sen\,67.86°)$ Calculando la Potencia pedida de z^6 en Forma Polar.

$= 17576\;Cos\,67.86° + i\;17576\;Sen\,67.86°$

$= 6624 + 16280\,i$ Luego se expresa z^6 en Forma Binómica, efectuando la multiplicación..

$$(5 + i)^6 = 5^6 + 6\cdot 5^5 i + 15\cdot 5^4 i^2 + 20\cdot 5^3 i^3 + 15\cdot 5^2 i^4 + 6\cdot 5\cdot i^5 + i^6$$
$$= 15625 + 18750i + 9375(-1) + 2500(-i) + 375(1) + 30(i) + (-1)$$
$$= 6624 + 16280i$$

Otro modo de calcular la potencia sexta es elevando a la sexta potencia de acuerdo a la fórmula del Binomio de Newton. Sin embargo la cantidad de operaciones y simplificaciones a realizar, hace que este modo sea menos adecuado.

Es preferible usar el Teorema de De-Moivre.

XV.8 RAÍCES ENÉSIMAS

El Teorema de De-Movre es aplicable a todo Número Real en el exponente, es así que pueden calcularse Raíces utilizando Potencias de la Forma: $1/n$; Entonces:

$$z = r(Cos\,\theta + i\,Sen\,\theta) \Rightarrow z^{1/n} = r^{1/n}(Cos\frac{\theta + k360°}{n} + i\,Sen\frac{\theta + k360°}{n})$$

Considerando una Propiedad Trigonométrica que expresa que para cualquier Valor Entero de: k se verifican las igualdades:

$$Cos\,\theta = Cos(\theta + k360°) \quad ; \quad Sen\,\theta = Sen(\theta + k360°)$$

Para determinar las n-raíces Enésimas diferentes que posee todo Número Complejo se aplica:

$$z = r(Cos\,\theta + i\,Sen\,\theta)$$
$$= r(Cos(\theta + k360°) + i\,Sen(\theta + k360°))$$

Usando una identidad trigonométrica.

$$z^{1/n} = r^{1/n}(Cos\frac{\theta + k360°}{n} + i\,Sen\frac{\theta + k360°}{n})$$

Aplicando el Teorema de De-Moivre, tomando una potencia: $1/n$

Asignando luego a: k los valores de: $0, 1, 2, 3, \ldots, n\text{-}1$; se obtendrán las n Raíces requeridas del Número Complejo dado. (Si se asignan valores mayores a n-1 en k, se obtendrán las mismas raíces calculadas anteriormente).

Si se grafican en el Plano Complejo las raíces obtenidas, se obtendrán los vértices de polígonos regulares de n lados, inscritos a circunferencias de radio igual a la raiz n de su Módulo

Ej 15.11 Dado un Número Complejo se calcularán las tres Raíces Cúbicas que posee:

$$z = 8(Cos\,60° + i\,Sen\,60°)$$

$$z^{1/n} = r^{1/n}(Cos\frac{\theta + k360°}{n} + i\,Sen\frac{\theta + k360°}{n})$$

Aplicando el Teorema de De-Moivre para Raíces Cúbicas.

$$z^{1/3} = r^{1/3}(Cos\frac{\theta + k360°}{3} + i\,Sen\frac{\theta + k360°}{3}) \; ; \; k = 0, 1, 2$$

Reemplazando los valores permitidos para k (0, 1, 2)

$$z^{1/3} = 8^{1/3}(Cos\frac{60° + k360°}{3} + i\,Sen\frac{60° + k360°}{3})$$

$$k = 0 \Rightarrow z_1 = 2(Cos\frac{60° + 0\cdot 360°}{3} + i\,Sen\frac{60° + 0\cdot 360°}{3})$$
$$= 2(Cos\,20° + i\,Sen\,20°) = 1.88 + 0.68\,i$$

Luego expresando en Forma Binómica.

$$k = 1 \Rightarrow z_2 = 2(Cos\frac{60° + 1\cdot 360°}{3} + i\,Sen\frac{60° + 1\cdot 360°}{3})$$
$$= 2(Cos\,140° + i\,Sen\,140°) = -1.53 + 1.28\,i$$

$$k = 2 \Rightarrow z_3 = 2(Cos\frac{60° + 2\cdot 360°}{3} + i\,Sen\frac{60° + 2\cdot 360°}{3})$$
$$= 2(Cos\,260° + i\,Sen\,260°) = -0.34 - 1.97\,i$$

Graficando las Raíces éstas quedan simétricamente ubicadas en el Plano Complejo sobre un Radio: R = r (Módulo del Complejo)

15.5 Determinar las Raíces indicadas para los siguientes Números Complejos:

a) $z = 1$; $z^{1/5}$

$$z = x + yi \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = Arctan\,\frac{y}{x}$$

$$z = 1 + 0i \qquad r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \qquad \theta = Arctan\,\frac{0}{1} = 0°$$

$$z = 1 + 0i = 1\,(Cos\,0° + i\,Sen\,0°)$$

$$z = r(Cos\,\theta + i\,Sen\,\theta) \;\Rightarrow\; z^{1/n} = r^{1/n}(Cos\,\frac{\theta + k360°}{n} + i\,Sen\,\frac{\theta + k360°}{n})$$

$$z^{1/5} = 1^{1/5}(Cos\,\frac{0° + k360°}{5} + i\,Sen\,\frac{0° + k360°}{5})$$

$$k = 0 \Rightarrow z_1 = 1\,(Cos\,\frac{0° + 0\cdot 360°}{5} + i\,Sen\,\frac{0° + 0\cdot 360°}{5})$$

$$= (Cos\,0° + i\,Sen\,0°) = 1 + 0i$$

$$k = 1 \Rightarrow z_2 = 1\,(Cos\,\frac{0° + 1\cdot 360°}{5} + i\,Sen\,\frac{0° + 1\cdot 360°}{5})$$

$$= (Cos\,72° + i\,Sen\,72°) = 0.31 + 0.95\,i$$

$$k = 2 \Rightarrow z_3 = 1\,(Cos\,\frac{0° + 2\cdot 360°}{5} + i\,Sen\,\frac{0° + 2\cdot 360°}{5})$$

$$= (Cos\,144° + i\,Sen\,144°) = -0.81 + 0.59\,i$$

$$k = 3 \Rightarrow z_4 = 1\,(Cos\,\frac{0° + 3\cdot 360°}{5} + i\,Sen\,\frac{0° + 3\cdot 360°}{5})$$

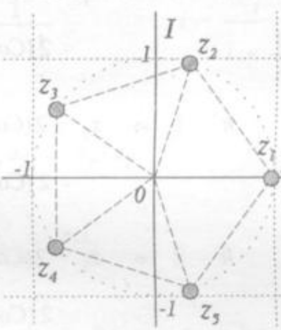
$$= (Cos\,216° + i\,Sen\,216°) = -0.81 - 0.59\,i$$

$$k = 4 \Rightarrow z_5 = 1\,(Cos\,\frac{0° + 4\cdot 360°}{5} + i\,Sen\,\frac{0° + 4\cdot 360°}{5})$$

$$= (Cos\,288° + i\,Sen\,288°) = 0.31 - 0.95\,i$$

La gráfica de las cinco Raíces muestra una distribución simétrica, sobre una Circunferencia de Radio 1.

Se constituyen en los vértices de un polígono regular de 5 lados.



A esta operación se la llama Cálculo de raíces de la unidad.

b) $z = 4\,(Cos\,90° + i\,Sen\,90°)$; $z^{1/2}$

Calculando las dos raíces cuadradas del Número Complejo dado.

$$z^{1/n} = r^{1/n}(Cos\,\frac{\theta + k360°}{n} + i\,Sen\,\frac{\theta + k360°}{n})$$

Aplicando el Teorema de De-Moivre para el caso de raíces enésimas.

$$z^{1/2} = r^{1/2}(Cos\,\frac{\theta + k360°}{2} + i\,Sen\,\frac{\theta + k360°}{2}) \;;\; k = 0, 1$$

$$z^{1/2} = 4^{1/2}(Cos\,\frac{30° + k360°}{2} + i\,Sen\,\frac{30° + k360°}{2})$$

$$k = 0 \Rightarrow z_1 = 2\,(Cos\,\frac{90° + 0\cdot 360°}{2} + i\,Sen\,\frac{90° + 0\cdot 360°}{2})$$

Como se trata de raíces cuadradas los valores permitidos de k son 0, 1.

$$= 2\,(Cos\,45° + i\,Sen\,45°) = 1.41 + 1.41\,i$$

$$k = 1 \Rightarrow z_2 = 2\,(Cos\,\frac{90° + 1\cdot 360°}{2} + i\,Sen\,\frac{90° + 1\cdot 360°}{2})$$

$$= 2\,(Cos\,135° + i\,Sen\,135°) = -1.41 - 1.41\,i$$

c) $z = \sqrt{192} + 8i \quad ; \quad z^{1/4}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\sqrt{192}^2 + 8^2} = 16$

$\theta = Arctan\,\dfrac{y}{x} = Arctan\,\dfrac{8}{\sqrt{192}} = 30°$

Para poder aplicar las expresiones de cálculo de las raíces, previamente se debe llevar el Número Complejo a la forma Polar.

$z = 16\,(Cos\,30° + i\,Sen\,30°)$ Forma Polar del Número Complejo

$z^{1/n} = r^{1/n}\,(Cos\,\dfrac{\theta + k360°}{n} + i\,Sen\,\dfrac{\theta + k360°}{n})$ Por el Teorema de De-Moivre.

$z^{1/4} = r^{1/4}\,(Cos\,\dfrac{\theta + k360°}{4} + i\,Sen\,\dfrac{\theta + k360°}{4})\ ;\ k = 0, 1, 2, 3$ Adaptando al caso de raíces cuartas.

$z^{1/4} = 16^{1/4}\,(Cos\,\dfrac{30° + k360°}{4} + i\,Sen\,\dfrac{30° + k360°}{4})$ Reemplazando.

$k = 0 \Rightarrow z_1 = 2(Cos\,\dfrac{30° + 0 \cdot 360°}{4} + i\,Sen\,\dfrac{30° + 0 \cdot 360°}{4})$

$= 2\,(Cos\,7.5° + i\,Sen\,7.5°) = 1.98 + 0.26\,i$

Como se trata de raíces cuartas, k puede tomar los valores de 0, 1, 2, 3.

Reemplazando en cada caso y simplificando de manera que la raíz quede expresada en forma binómica.

$k = 1 \Rightarrow z_2 = 2(Cos\,\dfrac{30° + 1 \cdot 360°}{4} + i\,Sen\,\dfrac{30° + 1 \cdot 360°}{4})$

$= 2\,(Cos\,97.5° + i\,Sen\,97.5°) = -0.26 + 1.98\,i$

$k = 2 \Rightarrow z_3 = 2(Cos\,\dfrac{30° + 2 \cdot 360°}{4} + i\,Sen\,\dfrac{30° + 2 \cdot 360°}{4})$

$= 2\,(Cos\,187.5° + i\,Sen\,187.5°) = -1.98 - 0.26\,i$

$k = 3 \Rightarrow z_4 = 2(Cos\,\dfrac{30° + 3 \cdot 360°}{4} + i\,Sen\,\dfrac{30° + 3 \cdot 360°}{4})$

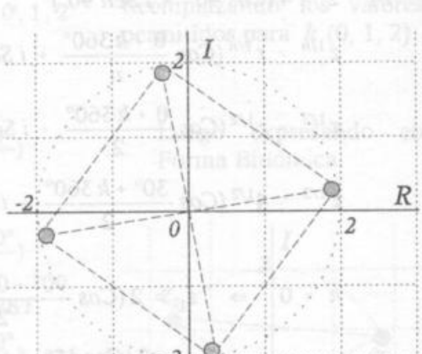
$= 2\,(Cos\,277.5° + i\,Sen\,277.5°) = 0.26 - 1.98\,i$

Efectuando la representación gráfica de las cuatro raíces en el Plano Complejo.

Se aprecia que las raíces están simétricamente situadas sobre una Circunferencia de Radio 2, cuyo centro está en el Origen del Plano Complejo.

Las raíces se constituyen en los vértices de un cuadrado.

La circunferencia es de radio 2, porque 2 es la raíz cuarta de su Módulo.



XV.- PROBLEMAS PROPUESTOS

15.1 Hallar los valores de x, y; para: $z_1 = z_2$; Si: $z_1 = 5 + 13i$; $z_2 = (x - y) + (x + y)i$

15.2 Hallar el Conjugado $\bar{z}$ de: $z_1 = 6 + 9i$; $z_2 = 3 - 7i$; $z_3 = 4i$; $z_4 = -5$

15.3 Hallar el Módulo $|z|$ de los Números Complejos z

$z_1 = 3 + 4i$; $z_2 = 8 - 6i$; $z_3 = 12 + 5i$; $z_4 = 2 + 4i$; $z_5 = -7i$; $z_6 = 6$

15.4 Demostrar que: $z\bar{z} = |z|^2$

15.5 Calcular las siguientes potencias de la Unidad Imaginaria i.

a) i^{17} ; i^{22} ; i^{27} ; i^{32} ; i^{50} ; i^{-1} ; i^{-6}

b) $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$; $i^{-1} + i^{-2} + i^{-3} + i^{-4} + i^{-5}$

c) $\dfrac{1}{i^{10}}$; $\dfrac{i^4 - 1}{i^8 + 1}$; $\dfrac{i^6 + i^2}{1 - i^2}$; $\dfrac{i - i^{15}}{1 + i^4}$

d) $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{i}}}}$; $\dfrac{5i}{i + \dfrac{i}{i - \dfrac{i}{i - \dfrac{1}{i}}}}$

15.6 Si: $z_1 = 2 + 5i$; $z_2 = 7 + 3i$ efectuar: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 z_2$; z_1 / z_2

15.7 Si: $z_1 = 5 + 2i$; $z_2 = 3 + 4i$ efectuar: $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$; $|z_2| z_1$; z_1^2 ; $z_1 \bar{z}_1$

15.8 Representar gráficamente en el Plano Complejo a los Números Complejos:

$z_1 = 3 + 2i$ $z_3 = -1 + 2i$ $z_5 = -3i$ $z_7 = 3 - i$

$z_2 = 4 + i$ $z_4 = 2 + 2i$ $z_6 = -2$ $z_8 = 4 - 4i$

15.9 Llevar a la forma Polar los siguientes Números Complejos:

$z_1 = 4 + 3i$ $z_4 = -2i$ $z_7 = \sqrt{2} + i$

$z_2 = 8 - 6i$ $z_5 = 3i$ $z_8 = 1 + \sqrt{3}\, i$

$z_3 = 12 + 5i$ $z_6 = 5$ $z_9 = 1 + i$

15.10 Llevar a la forma Binómica los siguientes Números Complejos:

$z_1 = 4(Cos\, 30° + i\, Sen\, 30°)$ $z_4 = 8(Cos\, 45° + i\, Sen\, 45°)\, i$

$z_2 = 3(Cos\, 25° + i\, Sen\, 25°)$ $z_5 = (Cos\, 90° + i\, Sen\, 90°)$

$z_3 = 5(Cos\, 20° + i\, Sen\, 20°)$ $z_6 = 6(Cos\, 180° + i\, Sen\, 180°)$

15.11 Efectuar $z_1 z_2$; z_1 / z_2 directamente desde la Forma polar entre los Complejos:

$z_1 = 8(Cos\, 50° + i\, Sen\, 50°)$ $z_1 = 10(Cos\, 75° + i\, Sen\, 75°)$

$z_2 = 2(Cos\, 30° + i\, Sen\, 30°)$ $z_2 = \sqrt{3} + 3i$

$z_1 = 12(Cos\, 45° + i\, Sen\, 45°)$ $z_1 = 12 + 5i$

$z_2 = 4(Cos\, 15° + i\, Sen\, 15°)$ $z_2 = 4(Cos\, 0° + i\, Sen\, 0°)$

15.12 Por el Teorema de De-Moivre calcular las siguientes Potencias de Complejos:

$z_1 = 3\,(Cos\,20° + i\,Sen\,20°)\quad ;\ z_1^2\ ;\ z_1^5 \qquad z_3 = \sqrt{2} + i\quad ;\ z_3^2\ ;\ z_3^4$

$z_2 = 2\,(Cos\,15° + i\,Sen\,15°)\quad ;\ z_2^3\ ;\ z_2^6 \qquad z_4 = 1 + \sqrt{3}\,i\quad ;\ z_4^4\ ;\ z_4^6$

15.13 Calcular todas las raíces enésimas indicadas de los siguientes Números Complejos:

a) $z = 3 + 4i\ ;\ z^{1/3}$ b) $z = 12 + 4\sqrt{7}\,i\ ;\ z^{1/4}$ c) $z = i\ ;\ z^{1/5}$

RESPUESTAS XV

15.1 $x = 9\ ;\ y = 4$

15.2 $\overline{z_1} = 6 - 9i \qquad \overline{z_2} = 3 + 7i \qquad \overline{z_3} = -4i \qquad \overline{z_4} = -5$

15.3 $|z_1| = 5 \qquad |z_2| = 10 \qquad |z_3| = 13 \qquad |z_4| = 4.47 \qquad |z_5| = 7 \qquad |z_6| = 6$

15.5 a) $i\ ;\ -1\ ;\ -i\ ;\ 1\ ;\ -1\ ;\ -i\ ;\ -1$ b) $i\ ;\ -1$ c) $-1\ ;\ 0\ ;\ -1\ ;\ i$

d) $2 - i\ ;\ 3 + 4i$

15.6 $z_1 + z_2 = 9 + 8i\ ;\ z_1 - z_2 = -5 + 2i\ ;\ z_1 z_2 = -1 + 41i\ ;\ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

15.7 $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} = \dfrac{1}{25} - \dfrac{7}{25}i\ ;\ |z_2|\,z_1 = 25 + 10i\ ;\ z_1^2 = 21 + 20i\ ;\ z_1\overline{z_1} = 29$

15.9

$z_1 = 5(Cos\,36.87° + i\,Sen\,36.87°) \qquad z_4 = 2(Cos\,90° - i\,Sen\,90°) \qquad z_7 = \sqrt{3}\,(Cos\,45° + i\,Sen\,45°)$

$z_2 = 10(Cos\,36.86 - i\,Sen\,36.86) \qquad z_5 = 3\,(Cos\,90° + i\,Sen\,90°) \qquad z_8 = 2(Cos\,60° + i\,Sen\,60°)$

$z_3 = 13(Cos\,22.62° + i\,Sen\,22.62°) \qquad z_6 = 5(Cos\,0° + i\,Sen\,0°) \qquad z_9 = \sqrt{2}\,(Cos\,45° + i\,Sen\,45°)$

15.10 $z_1 = 3.5 + 2i\ ;\ z_2 = 2.7 + 1.3i\ ;\ z_3 = 4.7 + 1.7i\ ;\ z_4 = 5.7 + 5.7i\ ;\ z_5 = i\ ;\ z_6 = -6$

15.11

$z_1 z_2 = 16\,(Cos\,80° + i\,Sen\,80°) \qquad z_1 z_2 = 34.6\,(Cos\,135° + i\,Sen\,135°)$

$z_1 / z_2 = 4\,(Cos\,20° + i\,Sen\,20°) \qquad z_1 / z_2 = 2.89(Cos\,15° + i\,Sen\,15°)$

$z_1 z_2 = 48\,(Cos\,60° + i\,Sen\,60°) \qquad z_1 z_2 = 52(Cos\,22.62 + i\,Sen\,22.62°)$

$z_1 / z_2 = 3\,(Cos\,30° + i\,Sen\,30°) \qquad z_1 / z_2 = 3.25(Cos\,22.62° + i\,Sen\,22.62°)$

15.12

$z_1^2 = 9\,(Cos\,40° + i\,Sen\,40°) \qquad z_3^2 = 3\,(Cos\,90° + i\,Sen\,90°)$

$z_1^5 = 243(Cos\,100° + i\,Sen\,100°) \qquad z_3^4 = 9\,(Cos\,180° + i\,Sen\,180°)$

$z_2^3 = 8\,(Cos\,45° + i\,Sen\,45°) \qquad z_4^4 = 16\,(Cos\,240° + i\,Sen\,240°)$

$z_2^6 = 64\,(Cos\,90° + i\,Sen\,90°) \qquad z_4^6 = 64(Cos\,360° + i\,Sen\,360°)$

15.13 a) $z_1 = 1.63 + 0.52i\ ;\ z_2 = -1.26 + 1.15i\ ;\ z_3 = -0.36 - 1.67i$

b) $z_1 = 1.97 + 1.36i\ ;\ z_2 = -0.36 + 1.97i\ ;\ z_3 = -1.97 - 0.36i\ ;\ z_4 = 0.36 - 1.97i$

c) $z_1 = 0.95 + 0.31i\ ;\ z_2 = i\ ;\ z_3 = -0.95 + 0.31i\ ;\ z_4 = -0.59 - 0.81i\ ;\ z_5 = 0.59 - 0.81i$

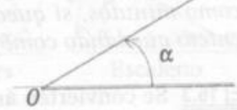
XVI.- TRIGONOMETRÍA

XVI.1 ÁNGULOS

ÁNGULOS Se considera que un ángulo es la unión de dos Semirrectas, con un punto común inicial. Tal como las semirrectas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$

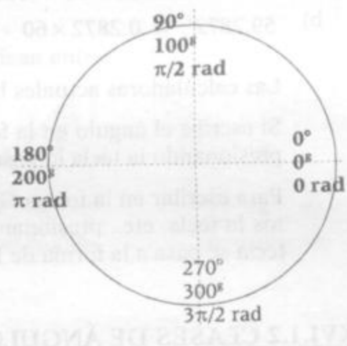
Cuando se toma el Semieje positivo de las abscisas, como una de las Semirrectas, se llama Ángulo trigonométrico, que así queda determinado por la otra Semirrecta.

Para designar a un ángulo se emplean las letras del alfabeto griego: α, β, γ, ... etc. También se emplean letras mayúsculas o tres letras unidas siendo la letra central la que designa al ángulo. En la figura el ángulo es *AOB*. El ángulo está en *O*.



XVI.1.1 MEDIDA DE ÁNGULOS

Para medir ángulos existen tres Sistemas básicos:



SEXAGESIMAL (DEG) En este Sistema, una Circunferencia comprende 360° (360 Grados Sexagesimales)

Un Grado sexagesimal (°) se divide en 60 Minutos ('), un Minuto se divide en 60 Segundos (")

CENTESIMAL (GRAD) En este Sistema una Circunferencia comprende 400^g (400 Grados Centesimales)

Un Grado (^{g}) se divide en 100 Minutos (^{m}), Un Minuto se divide en 100 Segundos (^{s})

RADIÁNICO (RAD) En este Sistema una Circunferencia se divide en 2π Radianes.

Para convertir una medida de ángulo de un Sistema a otro, se recurre a la equivalencia dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} 360° &= 400^g = 2\pi \text{ rad} \\ 180° &= 200^g = \pi \text{ rad} \end{aligned}}$$

Ej 16.1 Se convierten ángulos de un sistema a los otros

Se usa el Método de Factores de conversión, donde un ángulo con unidades de un sistema, se multiplica por una fracción que equivale a 1, como ser $200^g/180°$, de modo que al simplificar se cambian las unidades.

La fracción se la obtiene de la equivalencia anteriormente indicada.

a) 45° Grados Sexagesimales

A Centesimal: $45° = 45° \dfrac{200^g}{180°} = 50^g$

A Radiánico: $45° = 45° \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{\pi}{4}$ rad

b) 150^g Grados Centesimales

A Sgs: $150^g = 150^g \dfrac{180°}{200^g} = 135°$

A Rad: $150^g = 150^g \dfrac{\pi \text{ rad}}{200^g} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad

c) $\dfrac{\pi}{6}$ radianes

A Sgs: $\dfrac{\pi}{6}\text{ rad} = \dfrac{\pi}{6}\text{ rad}\dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 30°$

A Cent.: $\dfrac{\pi}{6}\text{ rad} = \dfrac{\pi}{6}\text{ rad}\dfrac{200^g}{\pi \text{ rad}} = 33.33^g$

En la práctica son de mayor uso los grados sexagesimales, que se escriben en la Forma de Grado, minuto, segundo (73°15'45") o como Fracción de grado (73.2625°) es decir a un número con decimales.

Para cambiar de la primera a la segunda forma, se emplea:

"Los B minutos se dividen entre 60; los C segundos entre 3600, sumando se logra expresar como Fracción de grado".

$$A°B'C'' = A° + \frac{B'}{60} + \frac{C''}{3600}$$

Ej 16.2 Se convierten ángulos de la forma: Grado, minuto, segundo a Fracción de grado

a) $73°15'45'' = 73° + \frac{15'}{60} + \frac{45''}{3600} = 73.2625°$

b) $15°30'24'' = 15° + \frac{30'}{60} + \frac{24''}{3600} = 15.506667°$

Empleando la fórmula.

En el segundo caso al obtenerse un decimal infinito, se toman tantos decimales como la precisión del caso lo requiera.

Si un ángulo sexagesimal se expresa como Fracción de grado y se debe llevar a la forma de Grado, minuto, segundo. Se emplea: "*La parte decimal se multiplica por* 60, *de este resultado el entero queda como minutos, si quedan decimales se los multiplica por* 60 *otra vez, este resultado se redondea a entero quedando como segundos*"

Ej 16.3 Se convierten ángulos en forma de fracción de grado, a la forma de: Grado, minuto, segundo

a) $35.23°: \Rightarrow 0.23 \times 60 = 13.80 \Rightarrow 0.80 \times 60 = 48 \Rightarrow 35°13'48''$

b) $59.2872°: \Rightarrow 0.2872 \times 60 = 17.232 \Rightarrow 0.232 \times 60 = 13.92 \Rightarrow 59°17'14''$

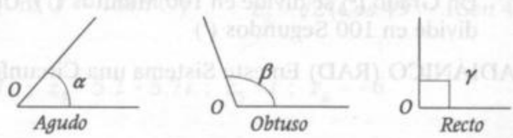
Note el redondeo en b)

Las calculadoras actuales hacen estas conversiones directamente, usando la tecla [° ' ''].

Si escribe el ángulo en la forma de fracción de grado, presionando [=] lo obtiene en pantalla, presionando la tecla lo pasa a la forma de grado, minuto, segundo.

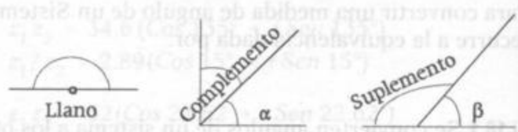
Para escribir en la forma Grado, minuto, segundo, se anotan los grados luego la tecla, los minutos la tecla, etc., presionando [=] lo obtiene en pantalla luego usando [Shift] o [←] mas la tecla se pasa a la forma de Fracción de grado.

XVI.1.2 CLASES DE ÁNGULOS



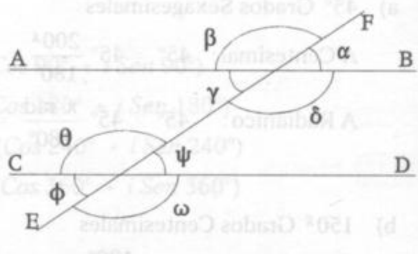
Se llama Ángulo Agudo cuando es menor a 90°

Ángulo Obtuso es mayor a 90°, pero menor a 180°. Ángulo Recto cuando es igual a 90°. Ángulo Llano cuando es igual a 180°.



Ángulo Complementario al ángulo restante para llegar a 90°. Ángulo Suplementario es el ángulo restante para llegar a 180°.

Cuando se presenta la disposición de la gráfica:



Las Rectas *AB*; *CD* son paralelas. Se llama Secante a la Recta EF. Entre los ángulos se cumplen las relaciones:

Se llaman Ángulos externos: α, β, ϕ, ω.
Son ángulos internos: γ, δ, θ, ψ

Se llaman Ángulos alternos entre α, ϕ
Similarmente entre β, ω; Entre γ, ψ; Entre δ, θ

Se llaman Ángulos correspondientes entre: α, ψ. Similarmente entre: β, θ; Entre γ, ϕ; Entre δ, ω
Entre α, γ son iguales por ser opuestos por el vértice. Similarmente entre ψ, ϕ ; Entre β, δ; Entre θ, ω
Entre γ, ψ son iguales por ser alternos internos (Similarmente entre δ, θ)
Entre β, ω son iguales por ser alternos externos (Similarmente entre α, ϕ).

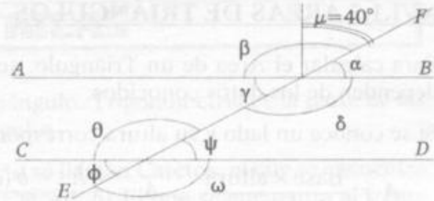
Ej 16.4 Si se conoce el valor de $\mu = 40°$, se tiene:

$\alpha = 90° - 40° = 50°$ Por ser complemento de μ

$\beta = 180° - 50° = 130°$ Por ser suplemento de α

Por tanto: $\alpha = \gamma = \psi = \phi = 50°$

$\beta = \delta = \theta = \omega = 130°$

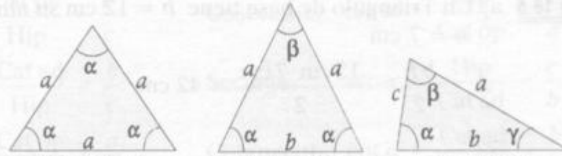


XVI.1.3 TRIÁNGULOS

Un Triángulo presenta tres lados y tres ángulos interiores cuya suma es 180°. De acuerdo a la longitud de sus lados los Triángulos se clasifican entre:

TRIÁNGULO EQUILÁTERO Con los tres lados iguales entre si, por tanto sus tres ángulos interiores son también iguales

T. ISÓSCELES Posee dos lados iguales entre sí, por tanto dos de sus ángulos son también iguales.



Equilátero Isósceles Escaleno

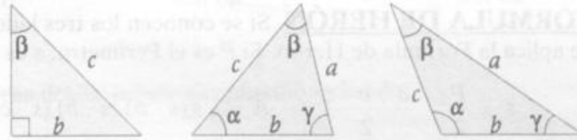
T. ESCALENO Posee los tres lados diferentes entre si, por tanto sus tres ángulos interiores son también diferentes.

De acuerdo al valor de sus ángulos interiores los Triángulos se clasifican entre:

T. RECTÁNGULO Cuando presenta un ángulo recto, 90°

T. ACUTÁNGULO Cuando todos sus ángulos son agudos

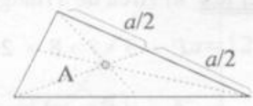
T. OBTUSÁNGULO Cuando presenta un ángulo obtuso.



Rectángulo Acutángulo Obtusángulo

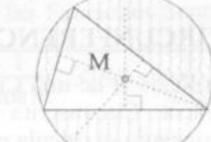
T. OBLICUÁNGULO Si ninguno de sus ángulos es de 90°

Mediana **A** de un Triángulo es la recta entre el punto medio de un lado y su vértice opuesto. La intersección de Medianas se llama Baricentro, se asume que en este punto se concentra la masa de la lámina triangular.

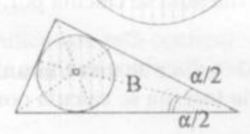


Altura **H** de un Triángulo es la recta perpendicular a un lado hasta el vértice opuesto. La intersección de las Alturas se llama Ortocentro.

Mediatriz **M** de un Triángulo es la recta perpendicular al punto medio de un lado. La intersección de las Mediatrices se llama Circuncentro, se constituye en el centro de una Circunferencia circunscrita.

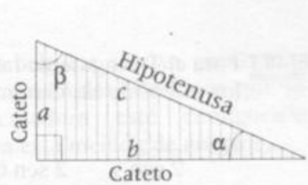


Bisectriz de un ángulo es la recta que la divide en dos. Bisectriz de un Triángulo **B** es aquella que dividiendo el ángulo de un vértice se prolonga hasta el lado opuesto. La intersección de las Bisectrices se llama Incentro, se constituye en centro de la Circunferencia inscrita.



XVI.1.4 TEOREMA DE PITÁGORAS

En un Triángulo Rectángulo el lado más largo y opuesto al ángulo recto se llama Hipotenusa c, los otros lados son los catetos a, b.

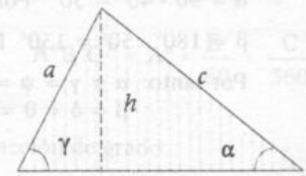


El Teorema de Pitágoras expresa: "En un Triángulo Rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa". Es decir se verifica que: $a^2 + b^2 = c^2$

XVI.1.5 ÁREAS DE TRIÁNGULOS

Para calcular el Área de un Triángulo, se emplean fórmulas que dependen de los datos conocidos.

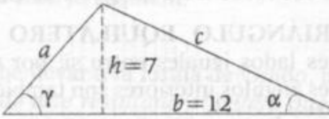
Si se conoce un lado y su altura correspondiente:



$$A = \frac{\text{Base} \times \text{altura}}{2} \qquad A = \frac{b\,h}{2} = \frac{b\,(a \operatorname{sen} \gamma)}{2} = \frac{1}{2}\,a\,b \operatorname{sen} \gamma$$

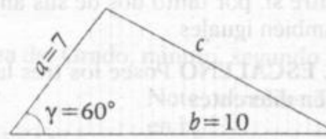
$$A = \frac{b\,h}{2} \qquad A = \frac{b\,h}{2} = \frac{b\,(c \operatorname{sen} \alpha)}{2} = \frac{1}{2}\,b\,c \operatorname{sen} \alpha$$

Ej 16.5 a) Un Triángulo de base tiene $b = 12$ cm su altura es $h = 7$ cm



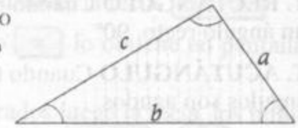
$$A = \frac{b\,h}{2} = \frac{12\,\text{cm}\ 7\,\text{cm}}{2} = 42\ \text{cm}^2$$

b) Un Triángulo tiene lados: $a = 7$ cm; $b = 10$ cm; el ángulo entre ambos es $\gamma = 60°$ (Ver gráfica)



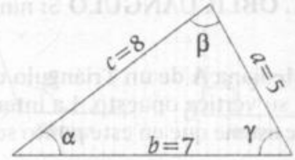
$$A = \frac{1}{2}\,a\,b \operatorname{sen} \gamma = \frac{1}{2}\,7 \cdot 10 \operatorname{sen} 60° = 30.31\ \text{cm}^2$$

FÓRMULA DE HERÓN Si se conocen los tres lados de un Triángulo se aplica la Fórmula de Herón. Si P es el Perímetro; s es el Semiperímetro



$$s = \frac{P}{2} = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

Ej 16.6 a) Área de Triángulo de lados: $a = 5$ cm ; $b = 7$ cm ; $c = 8$ cm



$$P = 5 + 7 + 8 = 20\ ;\quad s = \frac{P}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

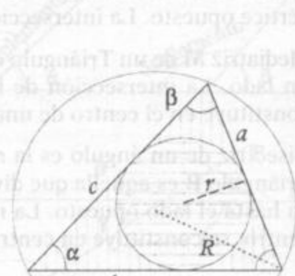
$$A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} = \sqrt{10\,(10-5)\,(10-7)\,(10-8)}$$

$$A = \sqrt{10\,(5)\,(3)\,(2)} = \sqrt{300} = 17.32\ \text{cm}^2$$

CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA E INSCRITA

El Radio R de una Circunferencia Circunscrita a un Triángulo se calcula por:

$$R = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{2 \operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{2 \operatorname{sen} \gamma}$$



El Radio r de una Circunferencia Inscrita se calcula por:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$$

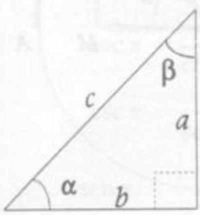
Ej 16.7 Para el Triángulo de lados de: $a = 5$ cm $b = 7$ cm ; $c = 8$ cm, se calcula que $\gamma = 60°$, por tanto los radios de las Circunferencias circunscrita e inscrita son:

$$R = \frac{c}{2 \operatorname{sen} \gamma} = \frac{7}{2 \operatorname{sen} 60°} = 4.04\ \text{cm} \qquad r = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}} = 1.73\ \text{cm}$$

XVI.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

TRIGONOMETRÍA Etimológicamente significa Medida de triángulo. Trigonometría es la parte de las Matemáticas que estudia las relaciones y medidas de los Triángulos.

En un Triángulo Rectángulo, los lados adyacentes al ángulo recto se llaman Catetos, el que se encuentra al lado del ángulo α que se considera, es el Cateto adyacente (Cat Ad: b) El que se encuentra al frente de ese ángulo se llama Cateto opuesto (Cat Op: a) el restante lado mayor y opuesto al ángulo recto es la Hipotenusa (Hip: c).



Se definen las siguientes Funciones trigonométricas de un ángulo agudo α:

Seno: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{Cat op}}{\text{Hip}} = \dfrac{a}{c}$ Cosecante: $\csc\alpha = \dfrac{\text{Hip}}{\text{Cat op}} = \dfrac{c}{a}$

Coseno: $\cos\alpha = \dfrac{\text{Cat ad}}{\text{Hip}} = \dfrac{b}{c}$ Secante: $\sec\alpha = \dfrac{\text{Hip}}{\text{Cat ad}} = \dfrac{c}{b}$

Tangente: $\tan\alpha = \dfrac{\text{Cat op}}{\text{Cat ad}} = \dfrac{a}{b}$ Cotangente: $\cot\alpha = \dfrac{\text{Cat ad}}{\text{Cat op}} = \dfrac{b}{a}$

En base al mismo Triángulo, pero considerando el otro ángulo agudo β. Las definiciones son:

$\operatorname{sen}\beta = \dfrac{\text{Cat op}}{\text{Hip}} = \dfrac{b}{c}$ $\tan\beta = \dfrac{\text{Cat op}}{\text{Cat ad}} = \dfrac{b}{a}$ $\csc\beta = \dfrac{\text{Hip}}{\text{Cat op}} = \dfrac{c}{b}$

$\cos\beta = \dfrac{\text{Cat ad}}{\text{Hip}} = \dfrac{a}{c}$ $\cot\beta = \dfrac{\text{Cat ad}}{\text{Cat op}} = \dfrac{a}{b}$ $\sec\beta = \dfrac{\text{Hip}}{\text{Cat ad}} = \dfrac{c}{a}$

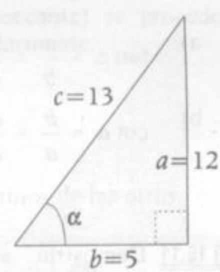
Ej 16.8 Se calculan las Funciones Trigonométricas del Triángulo Rectángulo indicado:

Si: $a = 12$; $b = 5$; $c = 13$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{Cat op}}{\text{Hip}} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{12}{13}$ $\csc\alpha = \dfrac{\text{Hip}}{\text{Cat op}} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{13}{12}$

$\cos\alpha = \dfrac{\text{Cat ad}}{\text{Hip}} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{5}{13}$ $\sec\alpha = \dfrac{\text{Hip}}{\text{Cat ad}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{13}{5}$

$\tan\alpha = \dfrac{\text{Cat op}}{\text{Cat ad}} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{12}$ $\cot\alpha = \dfrac{\text{Cat ad}}{\text{Cat op}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{12}{5}$



Para obtener el valor de la Función Trigonométrica de un ángulo, actualmente se recurre a una calculadora. Usualmente las Calculadoras científicas poseen las teclas de cálculo de las Funciones Seno, Coseno y Tangente. (Ver Ej 16.9)

Para obtener los valores de las Funciones Cotangente, Secante o Cosecante, use los recíprocos:

$\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Verifique que en la pantalla de su calculadora esté el símbolo **D** o **Deg** que significa que está configurado para trabajar con ángulos sexagesimales. Si debe trabajar con otra medida de ángulos configure para Centesimal **G** o **Gra**. Para Radiánico debe observar **R** o **rad**.

Ej 16.9 Se calculan los siguientes valores de Funciones Trigonométricas

$\operatorname{sen} 30° = 0.5000$

$\cos 45° = 0.7071$

$\tan 60° = 1.7320$

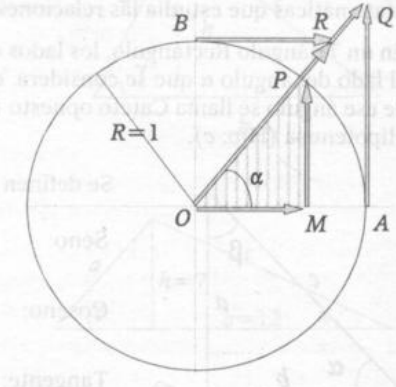
$\operatorname{sen} 28.45° = 0.4764$

$\csc 25° = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 25°} = 2.3662$

$\sec 40° = \dfrac{1}{\cos 40°} = 1.3054$

Los ángulos se dan en Grados sexagesimales. Verifique que su calculadora esté configurada para esta medida de ángulos.

Función es un concepto matemático que requiere de varias condiciones para su plena validez, sin embargo en este texto se usará esta palabra para designar a las diversas Relaciones de lados de un Triángulo, que conforman las Relaciones Trigonométricas. Las anteriores definiciones inicialmente trabajan sobre ángulos agudos (Menores a 90°), luego se generaliza.



Las Funciones Trigonométricas, se generalizan en base a una Circunferencia Trigonométrica (De Radio 1)

A partir del Triángulo Rectángulo, para el ángulo α, las siguientes Longitudes, representan a las funciones indicadas:

$\overline{MP}$: **sen** α	$\overline{OR}$: **csc** α
$\overline{OM}$: **cos** α	$\overline{OQ}$: **sec** α
$\overline{AQ}$: **tan** α	$\overline{BR}$: **cot** α

XVI.3 RELACIONES ENTRE FUNCIONES

Entre las Funciones trigonométricas se cumplen diversidad de relaciones, plenamente demostrables a partir de sus anteriores definiciones:

Ej 16.10 Demostrar: a) $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ b) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

a) $\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a/c}{b/c} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

b) $\cot\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{b/c}{a/c} = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

En las definiciones de tan, cot se divide tanto numerador como denominador entre c

Así se llega a las definiciones conocidas de sen α ; cos α

Ej 16.11 Demostrar: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$; $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$

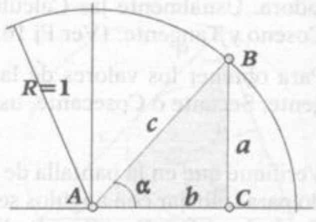
Trabajando con el Triángulo rectángulo de ABC inscrito al Círculo Trigonométrico (Radio 1)

$a^2 + b^2 = c^2$ Aplicando Pitágoras

$\dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{c^2}{c^2}$ Dividiendo entre c^2 simplificando.

$\left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = 1$ Por definición

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 1^{era} Identidad



$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \qquad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Dividiendo la 1^{era} Identidad entre $\operatorname{sen}^2\alpha$

Luego dividiendo entre: $\cos^2\alpha$ y simplificando.

Usando las anteriores relaciones básicas es posible expresar todas y cada una de las Funciones Trigonométricas en términos de cualquier otra.

Ej 16.12 Se expresan las restantes Funciones en términos de seno, coseno y tangente

$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$

Si: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}$

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x}$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}$

$\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Previamente se expresa en términos de seno.

Se emplean las Relaciones básicas entre Funciones trigonométricas.

Si: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$\cos x = \cos x$

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$

Luego se expresa en términos de coseno.

A términos de tangente.

$\operatorname{sen} x$:

Si: $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} \Rightarrow \tan^2 x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow$

$\tan^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$

A partir de la definición, por una igualdad antes demostrada, se eleva al cuadrado y se despeja seno

$\cos x$:

Si: $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \left(\dfrac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}\right)^2 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$

Procediendo similarmente

$\cot x$: $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

$\sec x$: Si: $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \sec x = \sqrt{1 + \tan^2 x}$

$\csc x$: Si: $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\sqrt{1 + \tan^2 x}}{\tan x}$

Para expresar en términos de las otras Funciones (cotangente, secante y cosecante) se procede similarmente.

La tabla presenta un detalle de expresión de una Función Trigonométrica en términos de las otras.

	sen	cos	tan	cot	sec	csc
sen		$\sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\dfrac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$	$\dfrac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x}$	$\dfrac{1}{\csc x}$
cos	$\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\dfrac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$	$\dfrac{1}{\sec x}$	$\dfrac{\sqrt{\csc^2 x - 1}}{\csc x}$
tan	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}$	$\dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$		$\dfrac{1}{\cot x}$	$\sqrt{\sec^2 x - 1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\csc^2 x - 1}}$
cot	$\dfrac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x}$	$\dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$		$\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 x - 1}}$	$\sqrt{\csc^2 x - 1}$
sec	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}$	$\dfrac{1}{\cos x}$	$\sqrt{1 + \tan^2 x}$	$\dfrac{\sqrt{1 + \cot^2 x}}{\cot x}$		$\dfrac{\csc x}{\sqrt{\csc^2 x - 1}}$
csc	$\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\dfrac{\sqrt{1 + \tan^2 x}}{\tan x}$	$\sqrt{1 + \cot^2 x}$	$\dfrac{\sec x}{\sqrt{\sec^2 x - 1}}$	

XVI.3.1 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una Identidad Trigonométrica es una igualdad que contiene a las Funciones Trigonométricas, válida para todos los valores de su ángulo.

Para demostrar una Identidad Trigonométrica, se efectúan conversiones y reemplazos en las Funciones de manera de verificar una igualdad plena entre ambos miembros. Para ello son importantes las siguientes Identidades Básicas:

$\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\csc\alpha = 1/\mathrm{sen}\,\alpha$
$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$	$\sec\alpha = 1/\cos\alpha$
$\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$	$\cot\alpha = 1/\tan\alpha$
$\tan\alpha = \dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$	$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}$

Se estila trabajar con uno solo de los miembros (El más complejo), hasta que tome la forma del otro. Sin embargo si se presentan dificultades, es posible trabajar con el otro o con ambos miembros.

Ej 16.13 a) $\mathrm{sen}\,\alpha = 1 - \dfrac{\cos^2\alpha}{1 + \mathrm{sen}\,\alpha}$ b) $\dfrac{1 - \mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \mathrm{sen}\,\alpha}$ c) $\dfrac{1 - 2\cos^2\gamma}{\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma} = \tan\gamma - \cot\gamma$

a) $$\mathrm{sen}\,\alpha = 1 - \frac{\cos^2\alpha}{1 + \mathrm{sen}\,\alpha}$$

Identidad Trigonométrica, modificando y reemplazando, se debe llegar a una Igualdad plena.

$$= \frac{1(1 + \mathrm{sen}\,\alpha) - \cos^2\alpha}{1 + \mathrm{sen}\,\alpha}$$

Se efectúa la resta indicada entre fracciones en el 2[do] miembro.

$$= \frac{(1 - \cos^2\alpha) + \mathrm{sen}\,\alpha}{1 + \mathrm{sen}\,\alpha}$$

Agrupando el numerador, de manera que se presente una conocida igualdad: $1 - \cos^2\alpha = \mathrm{sen}^2\alpha$

$$= \frac{(\mathrm{sen}^2\alpha) + \mathrm{sen}\,\alpha}{1 + \mathrm{sen}\,\alpha}$$

$$= \frac{\mathrm{sen}\,\alpha(1 + \mathrm{sen}\,\alpha)}{1 + \mathrm{sen}\,\alpha} = \mathrm{sen}\,\alpha$$

Factorizando y simplificando, queda demostrada la Identidad.

b) $$\frac{1 - \mathrm{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\beta}{1 + \mathrm{sen}\,\beta}$$

Con operaciones en el 2[do] miembro. Multiplicando tanto numerador como denominador por: $1 - \mathrm{sen}\,\alpha$.

$$= \frac{\cos\beta}{1 + \mathrm{sen}\,\beta}\,\frac{1 - \mathrm{sen}\,\beta}{1 - \mathrm{sen}\,\beta}$$

$$= \frac{\cos\beta(1 - \mathrm{sen}\,\beta)}{1^2 - \mathrm{sen}^2\beta} = \frac{\cos\beta(1 - \mathrm{sen}\,\beta)}{\cos^2\beta}$$

$$= \frac{1 - \mathrm{sen}\,\beta}{\cos\beta}$$

Así se logra el producto notable de la diferencia de cuadrados en su denominador, que lleva a una igualdad conocida: $1 - \mathrm{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$

Simplificando, queda demostrada la Identidad.

$$\frac{1 - \mathrm{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\beta}{1 + \mathrm{sen}\,\beta}$$

$$(1 - \mathrm{sen}\,\beta)(1 + \mathrm{sen}\,\beta) = (\cos\beta)(\cos\beta)$$

$$1^2 - \mathrm{sen}^2\beta = \cos^2\beta$$

$$\cos^2\beta = \cos^2\beta$$

Otra manera de demostrar la misma Identidad es trabajando con ambos miembros.

Pasando a multiplicar al otro miembro los denominadores. Por producto notable de suma por diferencia, simplificando.

c) $$\frac{1 - 2\cos^2\gamma}{\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma} = \tan\gamma - \cot\gamma$$

Las Funciones del 2[do] miembro se expresan en términos de seno y coseno.

$$= \frac{\mathrm{sen}\,\gamma}{\cos\gamma} - \frac{\cos\gamma}{\mathrm{sen}\,\gamma} = \frac{\mathrm{sen}^2\gamma - \cos^2\gamma}{\cos\gamma\ \mathrm{sen}\,\gamma}$$

$$= \frac{(1 - \cos^2\gamma) - \cos^2\gamma}{\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma} = \frac{1 - 2\cos^2\gamma}{\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma}$$

Efectuando la resta entre fracciones y aplicando una identidad básica del $\mathrm{sen}^2 x$. Simplificando.

16.1 Demostrar las siguientes Identidades:

a) $$\operatorname{sen} x = \frac{\sec x}{\tan x + \cot x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x}} = \frac{1(\cos x \operatorname{sen} x)}{\cos x\ (1)} = \operatorname{sen} x$$

b) $$\sec^4 x - \sec^2 x = \tan^4 x + \tan^2 x$$
$$= (\tan^2 x)(\tan^2 x + 1)$$
$$= (\sec^2 x - 1)(\sec^2 x)$$
$$= \sec^4 x - \sec^2 x$$

c) $$1 - 2\sec^2 x = \tan^4 x - \sec^4 x$$
$$= (\tan^2 x + \sec^2 x)(\tan^2 x - \sec^2 x)$$
$$= [(\sec^2 x - 1) + \sec^2 x][(\sec^2 x - 1) - \sec^2 x]$$
$$= [2\sec^4 x - 1][-1] = 1 - 2\sec^2 x$$

d) $$\frac{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = 1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Para facilitar la resolución en esta y la siguiente, se trabaja con ambos miembros de la igualdad.

Pasando a multiplicar al otro miembro.

$$\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta = (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$
$$= \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$$
$$= \operatorname{sen}\theta - (1 - \cos^2\theta)\cos\theta + \cos\theta - \operatorname{sen}\theta(1 - \operatorname{sen}^2\theta)$$
$$= \operatorname{sen}\theta - \cos\theta + \cos^3\theta + \cos\theta - \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^3\theta$$
$$= \operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta$$

e) $$\frac{\operatorname{sen} x - \cos x + 1}{\operatorname{sen} x + \cos x - 1} = \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x}$$
$$(\operatorname{sen} x - \cos x + 1)\cos x = (\operatorname{sen} x + \cos x - 1)(\operatorname{sen} x + 1)$$
$$\operatorname{sen} x\cos x - \cos^2 x + \cos x = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x\cos x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + \cos x - 1$$
$$-\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x - 1$$
$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$$

XVI.3.2 SIMPLIFICACIONES

Para simplificar las expresiones de Funciones trigonométricas, se emplean las mismas Identidades básicas, hasta llegar a mínima expresión.

Ej 16.14 Se simplifican las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $$A = \cos^2 x\tan x - \operatorname{sen}^2 x\cot x = \cos^2 x\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen}^2 x\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cos x\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x\cos x = 0$$

b) $$B = \frac{2\cos^3 x - \cos x}{\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\cos x[2\cos^2 x - 1]}{\operatorname{sen} x[1 - 2\operatorname{sen}^2 x]} = \frac{\cos x[2(1 - \operatorname{sen}^2 x) - 1]}{\operatorname{sen} x[1 - 2\operatorname{sen}^2 x]}$$
$$= \frac{\cos x[1 - 2\operatorname{sen}^2 x]}{\operatorname{sen} x[1 - 2\operatorname{sen}^2 x]} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$$

c) $$C = \frac{\cos^3\alpha + \operatorname{sen}^3\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha}\ ;\ \text{Si: } \operatorname{sen} x\cos x = \frac{1}{2}$$
$$= \cos^2 x - \cos x\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$$
$$= (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) - \cos x\operatorname{sen} x$$
$$= 1 - \cos x\operatorname{sen} x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Simplificando por Cocientes notables del caso: $\frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2$

Luego reemplazando la condición dada.

XVI.4 FUNCIONES DE ÁNGULOS MAYORES

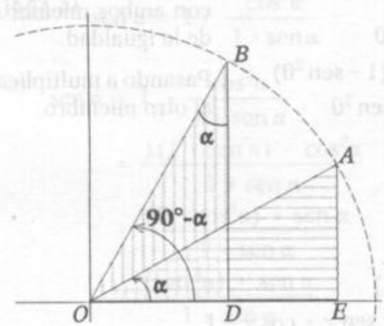
Las Funciones Trigonométricas de ángulos agudos se generalizan a ángulos mayores. Mediante el cálculo del Complemento, Suplemento, Explemento y Opuesto de un ángulo se logra el cálculo de ángulos mayores, mediante propiedades muy interesantes.

XVI.4.1 FUNCIONES DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Dos ángulos son Complementarios si su suma es 90°. Así el Complemento de α es: 90°- α. Se verifican las igualdades:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{sen(90^\circ - \alpha) = cos\,\alpha} & \mathbf{cos(90^\circ - \alpha) = sen\,\alpha} & \mathbf{tan(90^\circ - \alpha) = cot\,\alpha} \\ \mathbf{csc(90^\circ - \alpha) = sec\,\alpha} & \mathbf{sec(90^\circ - \alpha) = csc\,\alpha} & \mathbf{cot(90^\circ - \alpha) = tan\,\alpha} \end{array}$$

Efectuando la construcción geométrica: $\overline{AE} = \overline{OD}$; $\overline{OE} = \overline{BD}$; $\overline{OA} = \overline{OB}$



$\text{sen}\,\alpha = \overline{AE}/\overline{OA}$; $\cos\alpha = \overline{OE}/\overline{OA}$; $\tan\alpha = \overline{AE}/\overline{OE}$

$\csc\alpha = \overline{OA}/\overline{AE}$; $\sec\alpha = \overline{OA}/\overline{OE}$; $\cot\alpha = \overline{OE}/\overline{AE}$

$\text{sen}(90° - \alpha) = \overline{BD}/\overline{OB} = \overline{OE}/\overline{OA} = \cos\alpha$

$\cos(90° - \alpha) = \overline{OD}/\overline{OB} = \overline{AE}/\overline{OA} = \text{sen}\,\alpha$

$\tan(90° - \alpha) = \overline{BD}/\overline{OD} = \overline{OE}/\overline{AE} = \cot\alpha$

$\cot(90° - \alpha) = \overline{OD}/\overline{BD} = \overline{AE}/\overline{OE} = \tan\alpha$

$\sec(90° - \alpha) = \overline{OB}/\overline{OD} = \overline{OA}/\overline{AE} = \csc\alpha$

$\csc(90° - \alpha) = \overline{OB}/\overline{BD} = \overline{OA}/\overline{OE} = \sec\alpha$

Del mismo modo se demuestran otras fórmulas para Suplementarios o Explementarios.

Ej 16.15 Se cumple que: $\text{sen}\,35° = \text{sen}(90° - 55°) = \cos 55°$ $\quad \tan 20° = \tan(90° - 70°) = \cot 70°$

XVI.4.2 FUNCIONES DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Dos ángulos son Suplementarios si su suma es 180°. Así el Suplemento de α es: 180°- α. Se verifican:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{sen(180^\circ - \alpha) = sen\,\alpha} & \mathbf{cos(180^\circ - \alpha) = -cos\,\alpha} & \mathbf{tan(180^\circ - \alpha) = -tan\,\alpha} \\ \mathbf{csc(180^\circ - \alpha) = csc\,\alpha} & \mathbf{sec(180^\circ - \alpha) = -sec\,\alpha} & \mathbf{cot(180^\circ - \alpha) = -cot\,\alpha} \end{array}$$

Ej 16.16 Se cumple: $\text{sen}\,120° = \text{sen}(180° - 60°) = \text{sen}\,60°$ $\quad \cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30°$

XVI.4.3 FUNCIONES DE ÁNGULOS EXPLEMENTARIOS

Dos ángulos son Explementarios si su suma es 360°. Así el Explemento de α es: 360°- α. Se verifican:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{sen(360^\circ - \alpha) = -sen\,\alpha} & \mathbf{cos(360^\circ - \alpha) = cos\,\alpha} & \mathbf{tan(360^\circ - \alpha) = -tan\,\alpha} \\ \mathbf{csc(360^\circ - \alpha) = -csc\,\alpha} & \mathbf{sec(360^\circ - \alpha) = sec\,\alpha} & \mathbf{cot(360^\circ - \alpha) = -cot\,\alpha} \end{array}$$

Ej 16.17 Se cumple: $\text{sen}\,290° = \text{sen}(360° - 70°) = -\text{sen}\,70°$ $\quad \cos 300° = \cos(360° - 300°) = \cos 60°$

XVI.4.4 FUNCIONES DE ÁNGULOS OPUESTOS

Dado el ángulo α, se define como su opuesto a: $-\alpha$. Se verifican las igualdades:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha & \cos(-\alpha) = \cos\alpha & \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \\ \csc(-\alpha) = -\csc\alpha & \sec(-\alpha) = \sec\alpha & \cot(-\alpha) = -\cot\alpha \end{array}}$$

Ej 16.18 Se cumple que: $\text{sen}(-25°) = -\text{sen}\,25°$ $\quad\cos(-60°) = \cos 60°$ $\quad\tan(-48°) = -\tan 48°$

Si: $\text{sen}\,30° = 1/2$; Calcular $\text{sen}\,150°$; $\text{sen}\,330°$

$\text{sen}\,150° = \text{sen}(180° - 30°) = \text{sen}\,30° = 1/2$; $\quad\text{sen}\,330° = \text{sen}(360° - 30°) = -\text{sen}\,30° = -1/2$

XVI.4.5 ÁNGULOS NOTABLES

Son aquellos ángulos especiales por sus características y por su uso frecuente, cuyos valores deben ser memorizados debido a su constante uso.

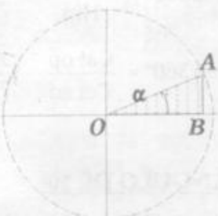
ÁNGULO DE 0° Dentro de un Círculo Trigonométrico (De Radio 1), se tiene $\overline{OA} = 1$

cuando $\alpha = 0°$ se tiene $\overline{AB} = 0$; $\overline{OB} = \overline{OA} = 1$. Entonces:

$$\text{sen}\,0° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Hip}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} = \frac{0}{\overline{AO}} = 0 \qquad \csc 0° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat op}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AO}}{0} = \infty$$

$$\cos 0° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Hip}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = 1 \qquad \sec 0° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat ad}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = 1$$

$$\tan 0° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Cat ad}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{0}{\overline{OB}} = 0 \qquad \cot 0° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Cat op}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB}}{0} = \infty$$



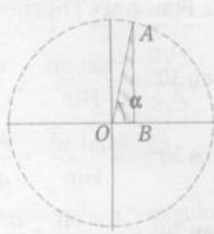
ÁNGULO DE 90° Dentro de un Círculo Trigonométrico (De Radio 1), se tiene $\overline{OA} = 1$

cuando $\alpha = 90°$ se tiene $\overline{OB} = 0$; $\overline{AB} = \overline{OA} = 1$. Entonces:

$$\text{sen}\,90° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Hip}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = 1 \qquad \csc 90° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat op}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Hip}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{0}{\overline{OA}} = 0 \qquad \sec 90° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat ad}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{0} = \infty$$

$$\tan 90° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Cat ad}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{0} = \infty \qquad \cot 90° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Cat op}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{0}{\overline{AB}} = 0$$



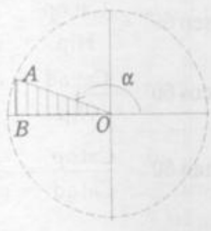
ÁNGULO DE 180° Dentro de un Círculo Trigonométrico (De Radio 1), se tiene $\overline{OA} = 1$

cuando $\alpha = 180°$ se tiene $\overline{AB} = 0$; $\overline{OB} = -\overline{OA} = -1$. Entonces:

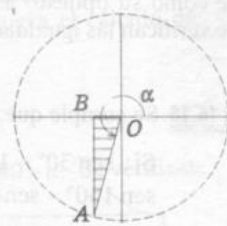
$$\text{sen}\,180° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Hip}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{0}{\overline{OA}} = 0 \qquad \csc 180° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat op}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}}{0} = \infty$$

$$\cos 180° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Hip}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{-\overline{OA}}{\overline{OA}} = -1 \qquad \sec 180° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat ad}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{-\overline{OA}} = -1$$

$$\tan 180° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Cat ad}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{0}{\overline{OB}} = 0 \qquad \cot 180° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Cat op}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB}}{0} = \infty$$



ÁNGULO DE 270° Dentro de un Círculo Trigonométrico (De Radio 1), se tiene $\overline{OA} = 1$ cuando $\alpha = 270°$ se tiene $\overline{OB} = 0$; $\overline{AB} = -\overline{OA} = -1$. Entonces:

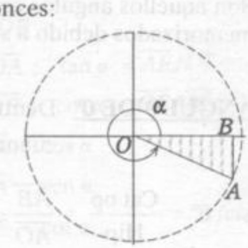


$$\operatorname{sen}270° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Hip}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{-\overline{OA}}{\overline{OA}} = -1 \qquad \csc 270° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat op}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}}{-\overline{OA}} = -1$$

$$\cos 270° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Hip}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{0}{\overline{OA}} = 0 \qquad \sec 270° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat ad}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{0} = \infty$$

$$\tan 270° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Cat ad}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{0} = \infty \qquad \cot 270° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Cat op}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{0}{\overline{AB}} = 0$$

ÁNGULO DE 360° Dentro de un Círculo Trigonométrico (De Radio 1), se tiene $\overline{OA} = 1$ cuando $\alpha = 360°$ se tiene $\overline{AB} = 0$; $\overline{OB} = \overline{OA} = 1$. Entonces:

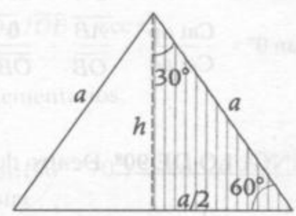


$$\operatorname{sen}360° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Hip}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} = \frac{0}{\overline{AO}} = 0 \qquad \csc 360° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat op}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AO}}{0} = \infty$$

$$\cos 360° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Hip}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = 1 \qquad \sec 360° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat ad}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = 1$$

$$\tan 360° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Cat ad}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{0}{\overline{OB}} = 0 \qquad \cot 360° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Cat op}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB}}{0} = \infty$$

ÁNGULO DE 30°



En un Triángulo equilátero (Lados iguales), los ángulos interiores son de 60°

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow$$

Con la construcción geométrica de la gráfica, se calcula la altura:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

Luego reemplazando en las definiciones de Funciones Trigonométricas

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$\operatorname{sen}30° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Hip}} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \qquad \csc 30° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat op}} = \frac{a}{a/2} = 2$$

$$\cos 30° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Hip}} = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}a/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat ad}} = \frac{a}{h} = \frac{a}{\sqrt{3}a/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 30° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Cat ad}} = \frac{a/2}{h} = \frac{a/2}{\sqrt{3}a/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Cat op}} = \frac{h}{a/2} = \frac{\sqrt{3}a/2}{a/2} = \sqrt{3}$$

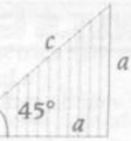
ÁNGULO DE 60° Sobre la misma gráfica anterior:

$$\operatorname{sen}60° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Hip}} = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}a/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc 60° = \frac{a}{h} = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat op}} = \frac{a}{\sqrt{3}a/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Hip}} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \qquad \sec 60° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat ad}} = \frac{a}{a/2} = 2$$

$$\tan 60° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Cat ad}} = \frac{h}{a/2} = \frac{\sqrt{3}a/2}{a/2} = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Cat op}} = \frac{a/2}{h} = \frac{a/2}{\sqrt{3}a/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ÁNGULO DE 45° En un Triángulo isósceles rectángulo (De dos lados iguales, un ángulo de 90°), los otros ángulos son de 45°, se cumple que:



$$a^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}\,a$$

$$\text{sen } 45° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Hip}} = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \csc 45° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat op}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}\,a}{a} = \sqrt{2}$$

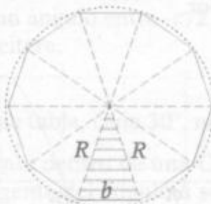
$$\cos 45° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Hip}} = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec 45° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat ad}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}\,a}{a} = \sqrt{2}$$

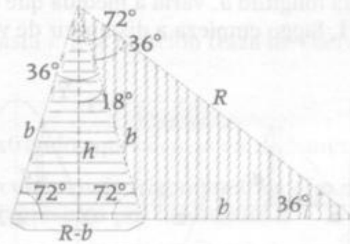
$$\tan 45° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Cat ad}} = \frac{a}{a} = 1 \qquad \cot 45° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Cat op}} = \frac{a}{a} = 1$$

ÁNGULO DE 18° Tomando un Decágono regular inscrito en una Circunferencia de Radio $R = 1$

El Decágono se divide en 10 Triángulos Isosceles, considerando uno de ellos. Su ángulo interior es 360°/10=36°

Dentro de uno de esos 10 Triángulos se construye otro Triángulo Isósceles interiormente, donde se cumple que:





$$\frac{R}{b} = \frac{b}{R-b} \Rightarrow b^2 + Rb - R^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4(-R^2)}}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

Con la misma gráfica, se obtienen las Funciones de 36° y 72°

$$R - b = R - \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{R}{2}(3-\sqrt{5}) \; ; \; h^2 + \left(\frac{R-b}{2}\right)^2 = b^2 \Rightarrow h = \frac{R}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$\text{sen } 18° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Hip}} = \frac{(R-b)/2}{b} = \frac{R(3-\sqrt{5})/4}{R(\sqrt{5}-1)/2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}-1)} \qquad \csc 18° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat op}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{3-\sqrt{5}}$$

$$\cos 18° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Hip}} = \frac{h}{b} = \frac{(R\sqrt{10-2\sqrt{5}})/4}{R(\sqrt{5}-1)/2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}-1)} \qquad \sec 18° = \frac{\text{Hip}}{\text{Cat ad}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$\tan 18° = \frac{\text{Cat op}}{\text{Cat ad}} = \frac{(R-b)/2}{h} = \frac{R(3-\sqrt{5})/4}{(R\sqrt{10-2\sqrt{5}})/4} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \qquad \cot 18° = \frac{\text{Cat ad}}{\text{Cat op}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{3-\sqrt{5}}$$

La siguiente es una tabla de los ángulos notables, de todas las Funciones Trigonométricas. Los ángulos están expresados en Grados Sexagesimales y Radianes:

Grado Rad	0° 0	30° π/6	45° π/4	60° π/3	90° π/2	120° 2π/3	135° 3π/4	150° 5π/6	180° π	270° 3π/2	360° 2π
sen	0	1/2	√2/2	√3/2	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1	0
cos	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1/2	-√2/2	-√3/2	-1	0	1
tan	0	√3/3	1	√3	∞	-√3	-1	-√3/3	0	-∞	0
cot	∞	√3	1	√3/3	0	-√3/3	-1	-√3	-∞	0	∞
sec	1	2√3/3	√2	2	∞	-2	-√2	-2√3/3	-1	∞	1
csc	∞	2	√2	2√3/3	1	2√3/3	√2	2	∞	-1	∞

XVI.5 GRÁFICAS

Tomando radianes sobre el Eje de abscisas, se obtienen las gráficas de las Funciones Trigonométricas:

FUNCIÓN SENO

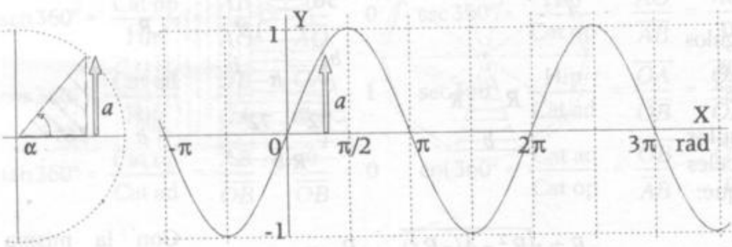
Elaborando una tabla, donde se indican los ángulos de 15 en 15°, mostrando su equivalencia en Radianes.

Note que el máximo valor que toma la Función es 1. El mínimo es -1. Lo que confirma el Rango anteriormente indicado.

Geométricamente dentro de una Circunferencia trigonométrica (De radio 1) el seno se representa por el cateto opuesto (a) del ángulo α

Esa longitud a, varia a medida que crece el ángulo desde cero hasta llegar a 1, luego empieza a disminuir de valor.

x		y
Deg	Rad	seno
0	0	0.00
15	$\pi/12$	0.26
30	$\pi/6$	0.50
45	$\pi/4$	0.71
60	$\pi/3$	0.87
75	$5\pi/12$	0.97
90	$\pi/2$	1.00
105	$7\pi/12$	0.97
120	$2\pi/3$	0.87
135	$3\pi/4$	0.71
150	$5\pi/6$	0.50
165	$11\pi/12$	0.26
180	π	0.00
195	$13\pi/12$	-0.26
210	$7\pi/6$	-0.50
225	$5\pi/4$	-0.71
240	$4\pi/3$	-0.87
255	$17\pi/12$	-0.97
270	$3\pi/2$	-1.00
285	$19\pi/12$	-0.97
300	$5\pi/3$	-0.87
315	$7\pi/4$	-0.71
330	$11\pi/6$	-0.50
345	$23\pi/12$	-0.26
360	2π	0.00



Note que para un ángulo entre 0 (0°) hasta 2π (360°) la curva traza una onda completa. Cada 2π (360°) se reitera otra onda.

FUNCIÓN COSENO

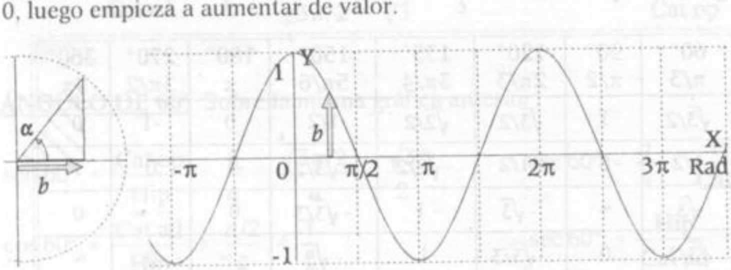
Elaborando una tabla, cada 30°, con su equivalencia en Radianes.

El máximo valor que toma es 1. El mínimo es -1.

Geométricamente dentro de una Circunferencia trigonométrica (De radio 1) el coseno se representa por el cateto adyacente (b) del ángulo α

Esa longitud b, varia a medida que crece el ángulo, desde 1 hasta llegar a 0, luego empieza a aumentar de valor.

x		y
Deg	Rad	coseno
0	0	1.00
30	$\pi/6$	0.87
60	$\pi/3$	0.50
90	$\pi/2$	0.00
120	$2\pi/3$	-0.50
150	$5\pi/6$	-0.87
180	π	-1.00
210	$7\pi/6$	-0.87
240	$4\pi/3$	-050
270	$3\pi/2$	0.00
300	$5\pi/3$	0.50
330	$11\pi/6$	0.87
360	2π	1.00



Note que para un ángulo entre 0 hasta 2π la curva traza una onda completa. Cada 2π se reitera otra onda.

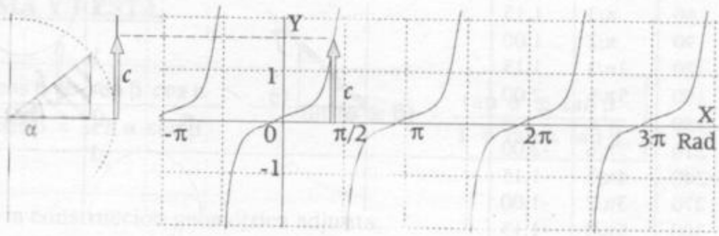
FUNCIÓN TANGENTE

Elaborando una tabla, cada 30°, con su equivalencia en Radianes.

x		y
Deg	Rad	tan
0	0	0.00
30	$\pi/6$	0.58
60	$\pi/3$	1.73
90	$\pi/2$	∞
120	$2\pi/3$	-1.73
150	$5\pi/6$	-0.58
180	π	0.00
210	$7\pi/6$	0.58
240	$4\pi/3$	1.73
270	$3\pi/2$	∞
300	$5\pi/3$	-1.73
330	$11\pi/6$	-0.58
360	2π	0.00

Geométricamente dentro de una Circunferencia trigonométrica (De radio 1) la tangente del ángulo α se representa por la longitud c

En 90° y sus múltiplos impares $(2n+1)90°$, la Función no está definida, lo que se representa por ∞. Es decir la longitud c crece indefinidamente.



Note que para un ángulo entre $-\pi/2$ hasta $\pi/2$ la Función traza una curva que cada π se reitera.

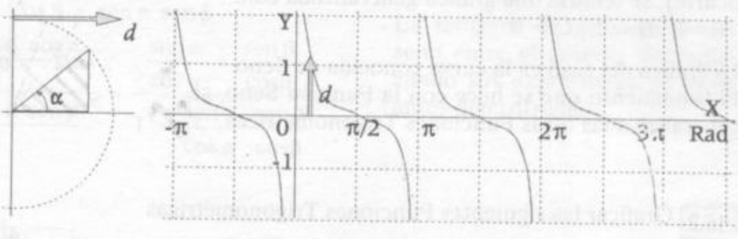
FUNCIÓN COTANGENTE

Elaborando una tabla, cada 30°, mostrando equivalencia en Radianes.

x		y
Deg	Rad	cot
0	0	∞
30	$\pi/6$	1.73
60	$\pi/3$	0.58
90	$\pi/2$	0.00
120	$2\pi/3$	-0.58
150	$5\pi/6$	-1.73
180	π	∞
210	$7\pi/6$	1.73
240	$4\pi/3$	0.58
270	$3\pi/2$	0.00
300	$5\pi/3$	-0.58
330	$11\pi/6$	-1.73
360	2π	∞

Geométricamente dentro de una Circunferencia trigonométrica (De radio 1) la cotangente del ángulo α se representa por la longitud d

En 0° y los múltiplos de 180°, la Función no está definida, lo que se representa por ∞. Es decir la longitud d crece indefinidamente.



Note que para un ángulo entre 0 hasta π (180°) la Función traza una curva que cada π se reitera.

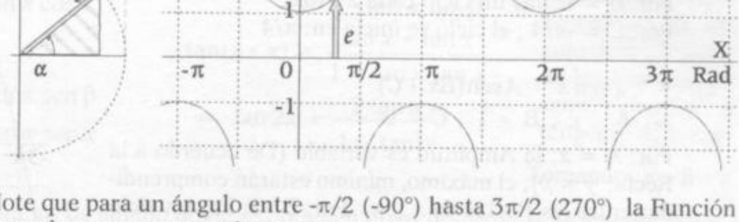
FUNCIÓN SECANTE

Elaborando una tabla, cada 30°, mostrando su equivalencia en Radianes.

x		y
Deg	Rad	sec
0	0	1.00
30	$\pi/6$	1.15
60	$\pi/3$	2.00
90	$\pi/2$	∞
120	$2\pi/3$	-2.00
150	$5\pi/6$	-1.15
180	π	-1.00
210	$7\pi/6$	-1.15
240	$4\pi/3$	-2.00
270	$3\pi/2$	∞
300	$5\pi/3$	2.00
330	$11\pi/6$	1.15
360	2π	1.00

Geométricamente dentro de una Circunferencia trigonométrica (De radio 1) la secante del ángulo α se representa por la longitud e

En 90° y sus múltiplos impares $(2n+1)90°$, la Función no está definida, lo que se representa por ∞. Es decir la longitud e crece indefinidamente.



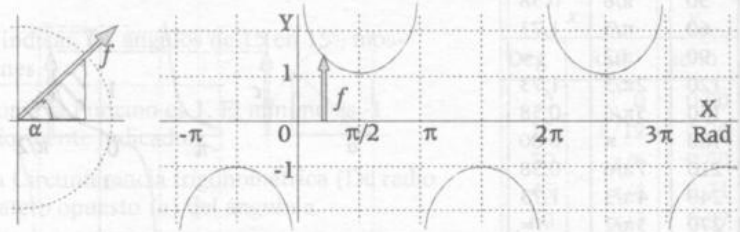
Note que para un ángulo entre $-\pi/2$ (-90°) hasta $3\pi/2$ (270°) la Función traza dos curvas que cada 2π se reiteran.

FUNCIÓN COSECANTE Elaborando una tabla cada 30°, mostrando su equivalencia en Radianes.

x		y
Deg	Rad	cosec
0	0	∞
30	π/6	2.00
60	π/3	1.15
90	π/2	1.00
120	2π/3	1.15
150	5π/6	2.00
180	π	∞
210	7π/6	-2.00
240	4π/3	-1.15
270	3π/2	-1.00
300	5π/3	-1.15
330	11π/6	-2.00
360	2π	∞

Geométricamente dentro de una Circunferencia trigonométrica (De radio 1) la cosecante del ángulo α se representa por la longitud f

En 180° y sus múltiplos la Función no está definida, lo que se representa por ∞. Es decir la longitud f crece indefinidamente.



Note que para un ángulo entre 0 (0°) hasta 2π (360°) la Función traza dos curvas que cada 2π (360°) se reiteran.

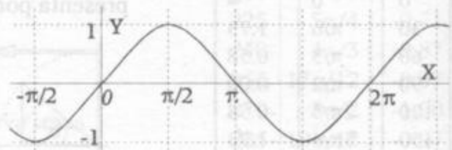
Las gráficas de las Funciones Trigonométricas generales, pueden obtenerse, escribiendo como:

$$y = A\operatorname{sen}(Bx + C)$$

A: Amplitud (Valor Máximo)
B: Frecuencia (Ciclos por 2π Rad)
C: Fase (Ángulo de inicio: -C)

Si A; B; C fuesen constantes (Lo que no siempre ocurre), se tendría una gráfica generalizada con:
$A = 1$; $B = 1$; $C = 0$

La gráfica del caso es la curva conocida de Seno.
El tratamiento que se hace con la Función Seno, se generaliza a las otras Funciones Trigonométricas.

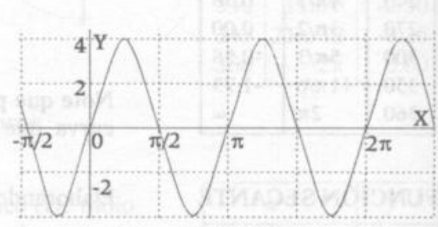


16.2 Graficar las siguientes Funciones Trigonométricas

a) $y = 4\operatorname{sen} 2x$ Si: $y = 4\operatorname{sen} 2x = A\operatorname{sen}(Bx + C)$

$\Rightarrow A = 4\ ;\ B = 2\ ;\ C = 0$

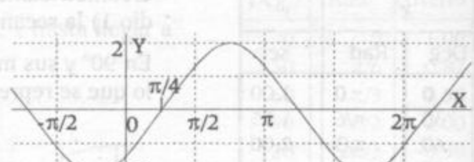
Por: $A = 4$; el Valor máximo que alcanza es: 4 (A su vez el mínimo es -4)
Por: $B = 2$; se tendrá dos ciclos (2 ondas completas) cada 2π Rad de ángulo sobre el Eje X.
Por: $C = 0$; el inicio de la 1[era] onda será en: 0



b) $y = 2\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4}) = A\operatorname{sen}(Bx + C)$

$\Rightarrow A = 2\ ;\ B = 1\ ;\ C = -\pi/4$

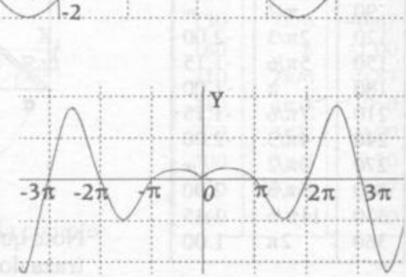
Por: $A = 2$; el máximo y mínimo son 2 y -2
Por: $B = 1$; hay un ciclo cada 2π Rad
Por: $C = -\pi/4$; el ciclo se inicia en: π/4



c) $y = x\operatorname{sen} x = A\operatorname{sen}(Bx + C)$

$\Rightarrow A = x\ ;\ B = 1\ ;\ C = 0$

Por: $A = x$; la Amplitud es variable (De acuerdo a la Recta: $y = x$); el máximo, mínimo estarán comprendidas entre las Rectas de x ; $-x$. Por: B=1; hay un ciclo cada 2π Rad. Por: C=0; el ciclo se inicia en 0.



XVI.6 FUNCIONES DE SUMAS Y RESTAS

Cuando las Funciones trigonométricas afectan a una suma o resta o doble ángulo es importante el uso de fórmulas que las simplifican. Se tienen los siguientes casos.

XVI.6.1 FUNCIONES DE SUMA Y RESTA

a) $\mathbf{sen(\alpha \pm \beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta \pm sen\,\beta\,cos\,\alpha}$

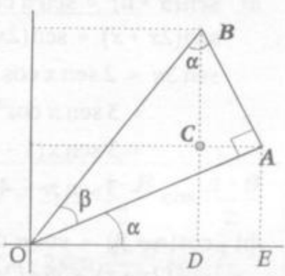
b) $\mathbf{cos(\alpha \pm \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta \mp sen\,\alpha\,sen\,\beta}$

c) $\mathbf{tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tan\,\alpha \pm tan\,\beta}{1 \mp tan\,\alpha\,tan\,\beta}}$

Se demuestran estas fórmulas por la construcción geométrica adjunta:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{DB}{OB} = \frac{DC+CB}{OB} = \frac{EA+CB}{OB} = \frac{EA}{OA}\frac{OA}{OB} + \frac{BA}{OB}\frac{CB}{BA}$$
$$= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OD}{OB} = \frac{OE-DE}{OB} = \frac{OE-CA}{OB} = \frac{OE}{OA}\frac{OA}{OB} - \frac{CA}{BA}\frac{BA}{OB}$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$



$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

La tangente es el cociente del seno entre el coseno. Reemplazando sus expresiones de suma antes demostradas.

Similarmente se demuestra:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$;\ \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

XVI.6.2 FUNCIONES DE ÁNGULO DOBLE

a) $\mathbf{sen\,2x = 2\,sen\,x\cos x}$ **b)** $\mathbf{cos\,2x = cos^2x - sen^2x}$ **c)** $\mathbf{tan\,2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$
$\operatorname{sen}(x+x) = \operatorname{sen}x\cos x + \operatorname{sen}x\cos x$
$\Rightarrow\ \operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$

b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\cos(x+x) = \cos x\cos x - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}x$
$\Rightarrow\ \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

c) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(x+x) = \dfrac{\tan x + \tan x}{1-\tan x\tan x}$

$\Rightarrow\ \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

Se demuestran las Relaciones Trigonométricas de ángulo doble, a partir de las fórmulas de seno, coseno y tangente de suma

Tomando: $\alpha = \beta = x$

Usando reiteradamente estas fórmulas de ángulo doble se obtienen otros desarrollos de ángulos pares

Ej 16.19

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 4x &= 2\operatorname{sen} 2x \cos 2x \\ &= 2(2\operatorname{sen} x \cos x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \\ &= 4\operatorname{sen} x \cos^3 x - 4\operatorname{sen}^3 x \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 4x &= \cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x \\ &= (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2 - (2\operatorname{sen} x \cos x)^2 \\ &= \cos^4 x - 6\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \operatorname{sen}^4 x \end{aligned}$$

XVI.6.3 FUNCIONES DE ÁNGULO TRIPLE

a) $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$ b) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ c) $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$

Se demuestran las Relaciones Trigonométricas de Seno, Coseno y Tangente de ángulo triple a partir de las fórmulas de Seno, Coseno y Tangente de una suma antes demostradas, tomando: $\alpha = 2x$, $\beta = x$

a)
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \operatorname{sen}(2x+x) &= \operatorname{sen}(2x)\cos x + \operatorname{sen} x\cos(2x) \Rightarrow \\ \operatorname{sen} 3x &= 2\operatorname{sen} x\cos x\cos x + \operatorname{sen} x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \\ &= 3\operatorname{sen} x\cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x \\ &= 3\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^3 x \\ &= 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(2x+x) &= \cos(2x)\cos x - \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen} x \Rightarrow \\ \cos 3x &= (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cos x - (2\operatorname{sen} x\cos x)\operatorname{sen} x \\ &= \cos^3 x - 3\operatorname{sen}^2 x\cos x \\ &= \cos^3 x - 3(1-\cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \\ \tan(2x+x) &= \frac{\tan(2x) + \tan x}{1 - \tan(2x)\tan x} \\ \tan 3x &= \frac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\tan x} \\ &= \frac{\dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-\tan^2 x}}{\dfrac{1 - 3\tan^2 x}{1-\tan^2 x}} \\ &= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} \end{aligned}$$

XVI.6.4 FUNCIONES DE ÁNGULO OPUESTO

a) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ b) $\cos(-x) = \cos x$ c) $\tan(-x) = -\tan x$

Se demuestran las Relaciones Trigonométricas de Seno, Coseno y Tangente de ángulo negativo por las fórmulas de Seno, Coseno y tangente de una resta antes indicadas, tomando: $\alpha = 0$; $\beta = x$

a)
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \operatorname{sen}(0-x) &= \operatorname{sen} 0\cos x - \operatorname{sen} x\cos 0 \\ \Rightarrow \operatorname{sen}(-x) &= 0\cdot\cos x - \operatorname{sen} x\cdot 1 \\ \operatorname{sen}(-x) &= -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(0-x) &= \cos 0\cos x + \operatorname{sen} 0\operatorname{sen} x \\ \Rightarrow \cos(-x) &= 1\cdot\cos x + 0\cdot\operatorname{sen} x \\ \cos(-x) &= \cos x \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \\ \tan(0-x) &= \frac{\tan 0 - \tan x}{1 + \tan 0\tan x} \\ \tan(-x) &= \frac{0 - \tan x}{1 + 0\cdot\tan x} \\ \Rightarrow \tan(-x) &= -\tan x \end{aligned}$$

XVI.6.5 FUNCIONES CUADRÁTICAS

a) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ b) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ c) $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

Las demostraciones se realizan a partir de fórmulas de seno y coseno de un ángulo doble antes demostradas:

a) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

b) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

c) $\tan^2 x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\frac{1 - \cos 2x}{2}}{\frac{1 + \cos 2x}{2}} \Rightarrow \tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

Usando las mismas relaciones anteriores, tomando como ángulo: $\alpha = 2x$, despejando se obtienen las Fórmulas de Ángulo Medio:

$$\text{a) } \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \text{b) } \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \qquad \text{c) } \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

XVI.6.6 TRANSFORMACIÓN DE SUMAS EN PRODUCTOS

$$\text{a) } \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad \text{b) } \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\text{c) } \cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad \text{d) } \cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

$$\text{e) } \tan A + \tan B = \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos A \cos B} \qquad \text{f) } \tan A - \tan B = \frac{\operatorname{sen}(A-B)}{\cos A \cos B}$$

Se demuestra la Fórmula a)

A partir de las fórmulas de suma y resta de ángulos. Sumando miembro a miembro.

Efectuando cambios de variable y resolviendo el Sistema de ecuaciones que así se presenta. Reemplazando las soluciones del Sistema.

Similarmente se demuestran las otras relaciones

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

$\left.\begin{aligned}\alpha + \beta &= A\\ \alpha - \beta &= B\end{aligned}\right] \Rightarrow \begin{aligned}\alpha &= (A + B)/2\\ \beta &= (A - B)/2\end{aligned} \Rightarrow$

$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

Ej 16.20 $\operatorname{sen} 70° + \operatorname{sen} 20° = 2\operatorname{sen}\dfrac{70° + 20°}{2}\cos\dfrac{70° - 20°}{2} = 2\operatorname{sen} 45° \cos 25°$

$\cos 90° + \cos 30° = 2\cos\dfrac{90° + 30°}{2}\cos\dfrac{90° - 30°}{2} = 2\cos 60° \cos 30°$

$\tan 25° + \tan 20° = \dfrac{\operatorname{sen}(25° + 20°)}{\cos 25° \cos 20°} = \dfrac{\operatorname{sen} 45°}{\cos 25° \cos 20°}$

XVI.6.7 PRODUCTOS EN SUMAS

Para lograr la conversión de un producto de Funciones Trigonométricas en suma, se verifican las siguientes relaciones:

$$\text{a) } \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\text{b) } \cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$\text{c) } \operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)]$$

XVI.7 TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las Funciones Trigonométricas Inversas, se definen:

$\text{sen}\,\alpha = x \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\,x = \text{sen}^{-1}x$	$\csc\alpha = x \Rightarrow \alpha = \text{arccsc}\,x = \text{sen}^{-1}(1/x)$
$\cos\alpha = x \Rightarrow \alpha = \arccos x = \cos^{-1}x$	$\sec\alpha = x \Rightarrow \alpha = \text{arcsec}\,x = \cos^{-1}(1/x)$
$\tan\alpha = x \Rightarrow \alpha = \arctan x = \tan^{-1}x$	$\cot\alpha = x \Rightarrow \alpha = \text{arccot}\,x = \tan^{-1}(1/x)$

Las Funciones Trigonométricas Inversas se definen y escriben correctamente de la forma arcsen x, sin embargo en la actualidad con el uso de las calculadoras, se procura simplificar esta notación, escribiendo como $\text{sen}^{-1}x$; $\cos^{-1}x$; $\tan^{-1}x$. Tome en cuenta que: $\text{sen}^{-1}x \neq \dfrac{1}{\text{sen}\,x}$

Sin embargo no debe confundirse entre el Inverso con la Función Inversa, tal como se aprecia en el esquema el Inverso de sen α es la csc α. En cambio la Función Inversa de sen α es: arcsen x y así similarmente en las otras Funciones.

$$\text{sen}\,\alpha \xrightarrow{\text{Inverso}} \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \csc\alpha$$

$$\text{sen}\,\alpha \xrightarrow{\text{Función Inversa}} \text{arcsen}\,x = \text{sen}^{-1}x$$

Las Funciones Trigonométricas Inversas, proceden así "Dado un número: x, se trata de hallar el ángulo: α que corresponde, de acuerdo a una Función Trigonométrica"

Usualmente en las calculadoras, para obtener las Funciones Trigonométricas, se debe presionar previamente la tecla de Función Inversa (Shift), luego la Función Trigonométrica. Por ejemplo para obtener arcsen 0.5, se presiona $\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{\sin^{-1}}$ 0.5 $\boxed{=}$ En la pantalla debe observarse $\sin^{-1}0.5$; el resultado debe ser 30°.

También se debe verificar que la calculadora esté configurada para el sistema de ángulos que se emplea, en este caso en el Sistema Sexagesimal. Usualmente en la pantalla debe apreciarse su símbolo **Deg** o **D**.

Ej 16.21

$$\text{sen}\,\alpha = 0.5 \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\,0.5 = \text{sen}^{-1}0.5 = 30°$$

$$\tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \arctan\sqrt{3} = \tan^{-1}\sqrt{3} = 60°$$

$$\cot\alpha = 5 \Rightarrow \alpha = \text{arccot}\,5 = \arctan\frac{1}{5} = \tan^{-1}(\frac{1}{5}) = 11.31°$$

$$\sec\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \text{arcsec}\,2 = \arccos\frac{1}{2} = \cos^{-1}(\frac{1}{2}) = 60°$$

$$\csc\alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \alpha = \text{arccsc}\,\frac{5}{4} = \text{arcsen}\,\frac{4}{5} = \text{sen}^{-1}(\frac{4}{5}) = 53.13°$$

Se calculan valores de Funciones Trigonométricas Inversas, mediante una calculadora.

Las Funciones cot, sec, csc no están disponibles en calculadoras, pero se calcula de acuerdo a las relaciones indicadas.

XVI.7.1 VALORES PRINCIPALES

Cuando se calcula: arcsen 0.5 el valor que se observa en una calculadora es 30°, sin embargo debido a que todo ángulo se reitera cada 360°; son también correctos los resultados de 390°; 750°; ...; etc.

Para obtener un valor práctico (Y además para satisfacer el concepto de Función como tal), se toman los VALORES PRINCIPALES, que estarán restringidos de la siguiente manera: (Se indica tanto en grados sexagesimales como en radianes)

$y = \text{arcsen}\,x \quad [-90°, 90°] \;\; ([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

$y = \arccos x \quad [0°, 180°] \;\; ([0, \pi])$

$y = \arctan x \quad]-90°, 90°[\;\; (]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$

$y = \text{arccsc}\,x \quad]-180°, -90°[\cup]0°, 90°[\;\; (]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]0, \frac{\pi}{2}[)$

$y = \text{arcsec}\,x \quad]-180°, -90°[\cup]0°, 90°[\;\; (]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]0, \frac{\pi}{2}[)$

$y = \text{arccot}\,x \quad]0, 90°[\;\; (]0, \pi[)$

XVI.7.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES INVERSAS

Se obtienen las gráficas de las Funciones Trigonométricas Inversas, considerando en el Eje de abscisas X al NúmeroReal x. En el Eje de Ordenadas al ángulo y en radianes.

En trazo continuo se muestran los valores principales:

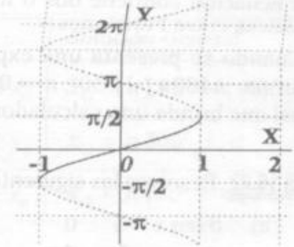
FUNCIÓN ARCOSENO

Elaborando una tabla. Para valores como 1 se obtiene $\pi/2$; $5\pi/2$; $9\pi/2$,... lo que hace que se obtenga una onda infinita.

Pero los valores principales están restringidos a $-\pi/2 < \text{arcsen}\, x < \pi/2$

Si se intercambiaran los Ejes: X; Y la gráfica seria equivalente a la de: $y = \text{sen}\, x$

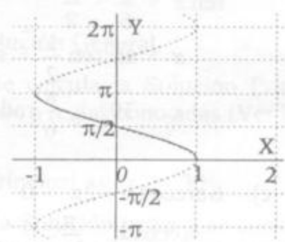
x	y
-1	$-1.37 = -\pi/2$
-0.5	$-0.52 = -\pi/6$
0	0
0.5	$0.52 = \pi/6$
1	$1.57 = \pi/2$



FUNCIÓN ARCOCOSENO

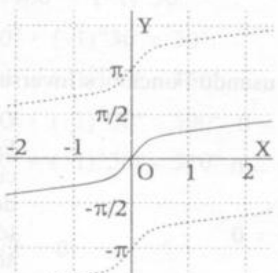
La gráfica de: $y = \arccos x$, es la curva segmentada, sin embargo para que sea Función se restringe.

x	y
-1	$3.14 = \pi$
-0.5	$2.09 = 2\pi/3$
0	$1.57 = \pi/2$
0.5	$1.05 = \pi/6$
1	0



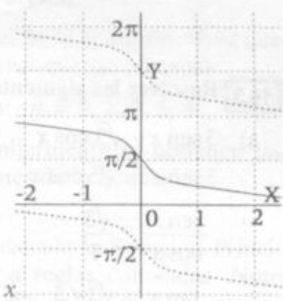
FUNCIÓN ARCOTANGENTE

x	y
-2	-1.10
-1	-0.78 $= -\pi/4$
0	0
1	0.78 $= \pi/4$
2	1.10



FUNCIÓN ARCOCOTANGENTE

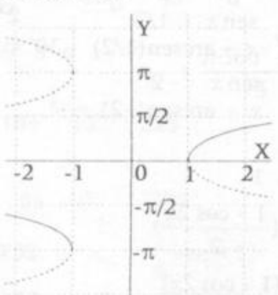
x	y
-2	2.68
-1	2.35 $= 3\pi/4$
0	∄
1	0.78 $= \pi/4$
2	0.46



$$\text{arccot}\, x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

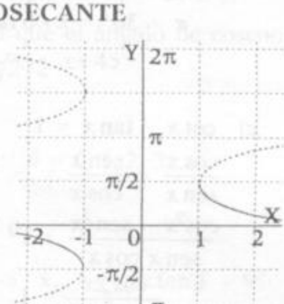
FUNCIÓN ARCOSECANTE

x	y
-2	-2.09 -$2\pi/3$
-1	-3.14 $= -\pi$
0	∄
1	0
2	1.04 $= \pi/3$



FUNCIÓN ARCOCOSECANTE

x	y
-2	-0.52 $= -\pi/6$
-1	-1.57 $= -\pi/2$
0	∄
1	1.57 $= \pi/2$
2	0.52 $= \pi/6$



Otras Propiedades importantes de las Funciones Trigonométricas Inversas son:

$$\text{arcsen}\, x + \text{arcsen}\, y = \text{arcsen}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$$

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

XVI.7.3 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se llama Ecuación Trigonométrica cuando la incógnita está afectada por una Función Trigonométrica

Para resolver se despeja tal incógnita empleando la Función Trigonométrica Inversa que se requiera. Si la Ecuación contiene dos o más Funciones, se procura reducir a una sola, empleando las relaciones básicas entre Funciones.

Cuando se presenta una expresión como: arcsen(½), los resultados que se tiene son infinitos de la forma: $n180+(-1)^n 30°$; $n = 0,1,2,...$. Sin embargo en la práctica es suficiente con tomar el Valor principal que brinda una calculadora (30°)

Ej 16.22 Resolver las siguientes Ecuaciones Trigonométricas, usando Funciones Inversas:

a) $6\,\text{sen}\, x - 3 = 0$

$$\text{sen}\, x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x = \text{arcsen}\,\frac{1}{2} = \text{sen}^{-1}(\frac{1}{2})$$

$$x = 30° = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$$

Despejando x. La Función seno pasa de un miembro de la ecuación al otro como arcoseno.

b) $3\tan^2 x + 1 = 10$

$$\tan^2 x = (\tan x)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$x = \arctan\sqrt{3} = \tan^{-1}\sqrt{3}$$

$$x = 60° = 1.05\ \text{Rad}$$

c) $6\arccos x - 2\pi = 0$

$$\arccos x = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \cos\frac{\pi}{3} = 0.5$$

Ordenando la Ecuación, La Función arcocoseno pasa de un miembro de la ecuación al otro como coseno.

d) $5\arctan\sqrt[3]{x} + 1 = 6$

$$\arctan\sqrt[3]{x} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = \tan 1 = 1.56$$

$$x = (1.56)^3 = 3.78$$

16.3 Resolver las siguientes Ecuaciones Trigonométricas, usando Funciones Inversas:

a) $3\,\text{sen}\, x - \sqrt{3}\cos x = 0$

$$3\,\text{sen}\, x = \sqrt{3}\cos x$$

$$\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan x = \sqrt{3}/3 \Rightarrow$$

$$x = \arctan\sqrt{3}/3$$

$$x = 30° = \pi/6\,\text{rad}$$

b) $3\tan x - 2\cos x = 0$

$$3\,\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} - 2\cos x = 0$$

$$\frac{3\,\text{sen}\, x - 2\cos^2 x}{\cos x} = 0$$

$$3\,\text{sen}\, x - 2(1 - \text{sen}^2 x) = 0\cos x$$

$$2\,\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen}\, x - 2 = 0$$

$$(2\,\text{sen}\, x - 1)(\text{sen}\, x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$2\,\text{sen}\, x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{sen}\, x = 1/2 \\ x = \text{arcsen}(1/2) = 30° \end{array}$$

$$\text{sen}\, x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{sen}\, x = -2 \\ x = \text{arcsen}(-2) = \nexists \end{array}$$

Ordenando las Ecuaciones. Procurando que queden expresadas en términos de una sola Función.

En b) luego de factorizar, cada factor se iguala a cero.

c) $\cot x - \tan x = 1$

$$\frac{\cos x}{\text{sen}\, x} - \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = 1$$

$$\frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\text{sen}\, x\cos x} = 1$$

$$\frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2x} = 1$$

$$2\cot 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}\,\text{arccot}\,\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}\arctan 2 = 31.72°$$

d) $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$

$$(\frac{1 - \cos 2x}{2})^2 + (\frac{1 + \cos 2x}{2})^2 = 1$$

$$\frac{(1 - \cos 2x)^2 + (1 + \cos 2x)^2}{4} = 1$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x = 4$$

$$2 + 2\cos^2 2x = 4 \Rightarrow \cos^2 2x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\arccos(\pm 1) = \left[\begin{array}{l} 0° \\ 90° \end{array}\right.$$

En c) se calcula el arcocotangente, mediante el arcotangente

XVI.7.4 SOLUCIONES GENERALES

Se llama Solución General de una Ecuación Trigonométrica, a todos los valores que satisfacen a la misma, sea que estén o no incluidas en los intervalos de Valores Principales de las Funciones Trigonométricas Inversas.

Para obtener las Soluciones Generales x_G, se procede tal y como en la búsqueda de Soluciones Principales x_P, sin embargo al calcular el valor de una Trigonométrica Inversa se emplea la siguiente tabla de obtención de Valores generales:

Ecuación		Solución General
$\operatorname{sen}\alpha = A$	$\alpha = k\,x_G$	$x_G = n\,180° + (-1)^n\alpha$
$\cos\alpha = A$	$\alpha = k\,x_G$	$x_G = n\,360° \pm \alpha$
$\tan\alpha = A$	$\alpha = k\,x_G$	$x_G = n\,180° + \alpha$

Donde n debe ser entero ($n \in \mathbb{Z}$), $\alpha = kx_G$ es el ángulo que determina al valor A, luego se debe despejar la Solución general x_G

Ej 16.23 Resolver las siguientes Ecuaciones Trigonométricas, obtener la Solución General

a) $6\operatorname{sen} x - 3 = 0$

$$\operatorname{sen} x_P = \frac{1}{2} \Rightarrow x_P = \operatorname{arcsen}(\frac{1}{2}) = \operatorname{sen}^{-1}(\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow x_P = 30° = 0.52\ \text{rad} = \frac{\pi}{6}\ \text{rad}$$

$$\operatorname{sen} x_G = 1/2\ ;\ x_G = 30° = \alpha$$

$$\Rightarrow x_G = n\,180° + (-1)^n\alpha\ ;\ n = 0, 1, 2, ...$$

$$x_G = n\,180° + (-1)^n 30°$$

$$x_G = 0\cdot 180° + (-1)^0 30° = 30°$$

$$x_G = 1\cdot 180° + (-1)^1 30° = 150°$$

$$x_G = 2\cdot 180° + (-1)^2 30° = 390°$$

$$x_G = 3\cdot 180° + (-1)^3 30° = 510° ....$$

Inicialmente se calcula la Solución Principal, de acuerdo a reglas conocidas (Ver Ej 7.1)

La Solución Principal es: $x_P = 30°$

Para obtener la Solución general se considera que para lograr el valor de 1, el ángulo debe ser 30°, en este caso $\alpha = x_G$

Fórmula para el arcsen

Solución General de la Ecuación. Note que $n \in \mathbb{Z}$. (En n se reemplazan enteros)

Calculando para: $n = 0, 1, 2, 3, 4$

Procediendo similarmente se obtienen las infinitas soluciones de la Ecuación

b) $2\cos 3x - \sqrt{2} = 0$

$$\cos 3x_P = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_P = \frac{1}{3}\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 15°$$

$$\cos 3x_G = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3x_G = 45° = \alpha$$

$$3x_G = n\,360° \pm \alpha \qquad x_G = \frac{n\,360° \pm \alpha}{3}$$

$$n = 0, 1, 2, ...$$

$$x_G = 15°;\ 105°;\ 135°;\ 225°;\ ...$$

Inicialmente se calcula la Solución Principal, de acuerdo a reglas conocidas. Note que el ángulo de cos es $3x$

La Solución Principal es: $x_P = 15°$

Tome en cuenta que el ángulo de coseno que determina $\sqrt{2}/2$ es 45°

Despejando x_G

Calculando para: $n = 0, 1, 2, 3, ...$

c) $100\operatorname{sen} 4x - 53 = 0$

$$\operatorname{sen} 4x_P = 0.53 \Rightarrow x_P = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1} 0.53 = 8°$$

$$\operatorname{sen} 4x_G = 0.53 \Rightarrow 4x_G = 32° = \alpha$$

$$4x_G = n\,180° + (-1)^n\alpha\ ;\ n = 0, 1, 2, ...$$

$$x_G = \frac{n\,180° + (-1)^n 32°}{4}$$

$$x_G = 8°;\ 37°;\ 98°;\ 127°;\ 188°;\ ...$$

d) $\tan 5x - 1 = 0$

$$\tan 5x_P = 1 \Rightarrow x_P = \frac{1}{5}\arctan 1 = 9°$$

$$\tan 5x_G = 1 \Rightarrow 5x_G = 45° = \alpha$$

$$5x_G = n\,180° + \alpha\ ;\ n = 0, 1, 2, ...$$

$$x_G = \frac{n\,180° + 45°}{5}$$

$$x_G = 9°;\ 45°;\ 81°;\ 117°;\ ...$$

XVI.8 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Usualmente se llaman datos de un Triángulo a los valores de sus tres lados y de sus tres ángulos, ocasionalmente se usa como dato el Área. (Ver XI.1-5)

Resolución de un Triángulo, significa calcular precisamente los valores de todos esos datos, para ello se utilizan definiciones y relaciones entre las Funciones Trigonométricas, y otras características de un Triángulo

Se presentan dos casos generales de Resolución de Triángulos, de acuerdo al tipo de Triángulo.

XVI.8.1 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Para resolver Triángulos Rectángulos, se precisa de al menos dos datos, uno de ellos debe ser un lado. Solo dos datos porque de antemano se conoce que en un Triángulo Rectángulo uno de los ángulos es 90°

Ej 16.23 Se resuelven los Triángulos Rectángulos que presentan los siguientes datos:

a) $a = 12$; $b = 5$

Se conocen dos catetos, por ser Triángulo Rectángulo, ya se conoce que: $\gamma = 90°$

$$c^2 = a^2 + b^2 \;;\; c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

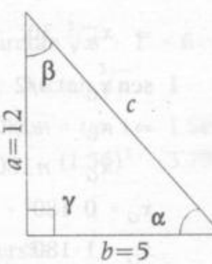
Por el Teorema de Pitágoras. Despejando c

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) = 67.38°$$

Cálculo del ángulo α que corresponde.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha - \gamma$$
$$\beta = 180° - 67.38° - 90° = 22.62°$$

La suma de los ángulos interiores es 180°. Reemplazando y calculando β.



Por tanto: $a = 12$; $b = 5$; $c = 13$; $\alpha = 67.38°$; $\beta = 22.62°$; $\gamma = 90°$

b) $a = 8$; $c = 10$

Se conocen un cateto y la hipotenusa, por ser Rectángulo: $\gamma = 90°$

$$c^2 = a^2 + b^2 \;;\; b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

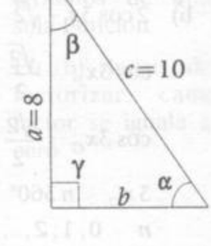
Por Pitágoras.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{8}{10}\right) = 53.13°$$

Cálculo del ángulo α.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha - \gamma$$
$$\beta = 180° - 53.13° - 90° = 36.87°$$

La suma de los ángulos interiores es 180°



Por tanto: $a = 8$; $b = 6$; $c = 10$; $\alpha = 53.13°$; $\beta = 36.87°$; $\gamma = 90°$

c) $a = 11$; $\alpha = 60°$

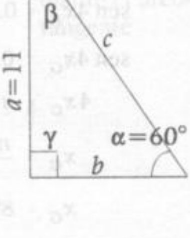
Se conocen un cateto y un ángulo, por ser Rectángulo: $\gamma = 90°$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha - \gamma$$
$$\beta = 180° - 60° - 90° = 30°$$

Los ángulos interiores suman 180°

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{11}{\operatorname{sen}60°} = 12.70$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\tan\alpha} = \frac{11}{\tan 60°} = 6.35$$

Se calcula b, c, buscando Funciones que dependan de tales lados y de un lado que ya se conoce (a)



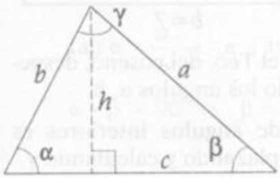
Por tanto: $a = 11$; $b = 6.35$; $c = 12.70$; $\alpha = 60°$; $\beta = 30°$; $\gamma = 90°$

XVI.8.2 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Se llama Triángulo Oblicuángulo cuando ninguno de sus ángulos es recto. Para resolver estos Triángulos , son necesarios los siguientes Teoremas:

TEOREMA DEL SENO

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}}$$



Para su demostración se considera un Triángulo acutángulo:

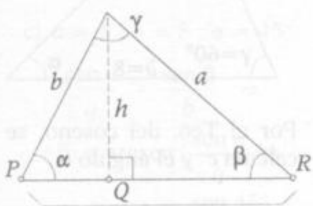
$$\left.\begin{array}{l} h = b\operatorname{sen}\alpha \\ h = a\operatorname{sen}\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \; b\operatorname{sen}\alpha = a\operatorname{sen}\beta \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

De similar modo se verifica la igualdad con el tercer miembro. La validez del teorema se generaliza a todo tipo de Triángulos.

TEOREMA DEL COSENO

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

Para su demostración se considera un Triángulo acutángulo:



$$a^2 = h^2 + \overline{QR}^2 = h^2 + (\overline{PR} - \overline{PQ})^2 = h^2 + (c - \overline{PQ})^2$$
$$a^2 = (b\operatorname{sen}\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2$$
$$a^2 = b^2\operatorname{sen}^2\alpha + c^2 - 2cb\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha$$
$$a^2 = b^2(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \; b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad ; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

De similar modo al Teorema indicado para a, se demuestran las otras igualdades para calcular b o c

La validez del Teorema se generaliza a todo tipo de Triángulos.

TEOREMA DE LAS TANGENTES

$$\boxed{\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan(\alpha-\beta)/2}{\tan(\alpha+\beta)/2}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Para su demostración se considera el anterior Teorema del seno

$$\frac{a-b}{a} = \frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} \; ; \; \frac{a+b}{a} = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Por proporciones (O también restando 1 a ambos miembros de la igualdad, en el otro caso sumando 1)

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta} = \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$$

Dividiendo entre las igualdades y aplicando la Fórmula de conversión a productos

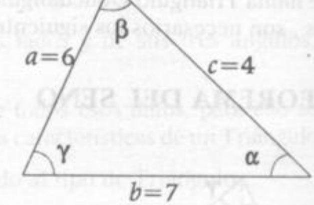
$$= \frac{\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}} \, \frac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$

Simplificando y ordenando para usar la relación básica de: $\tan x = \operatorname{sen}x/\cos x$

Para resolver Triángulos Oblicuángulos, se precisa de al menos tres datos, uno de ellos debe ser un lado.

Ej 16.24 Se resuelven Triángulos Oblicuángulos que presentan los siguientes datos:

a) $a = 6 \,;\; b = 7 \,;\; c = 4$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{7^2+4^2-6^2}{2\cdot 7\cdot 4}\right) = 58.81°$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6^2+4^2-7^2}{2\cdot 6\cdot 4}\right) = 86.42°$$

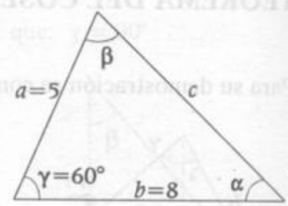
Por el Teo. del coseno, despejando los ángulos α, β.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - \alpha - \beta$$
$$\gamma = 180° - 58.81° - 86.42° = 34.77°$$

La suma de ángulos interiores es 180°, reemplazando y calculando γ.

Por tanto: $a = 6$; $b = 7$; $c = 4$; $\alpha = 58.81°$; $\beta = 86.42°$; $\gamma = 34.77°$

b) $a = 5 \,;\; b = 8 \,;\; \gamma = 60°$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cos 60° = 49 \Rightarrow c = 7$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

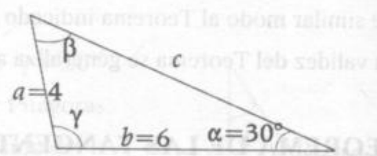
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{8^2+7^2-5^2}{2\cdot 8\cdot 7}\right) = 38.21°$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - \alpha - \beta$$
$$\gamma = 180° - 60° - 38.21° = 81.79°$$

Por el Teo. del coseno, se calcula c y el ángulo α.

Por tanto: $a = 5$; $b = 8$; $c = 7$; $\alpha = 38.21°$; $\beta = 81.79°$; $\gamma = 60°$

c) $a = 4 \,;\; b = 6 \,;\; \alpha = 30°$



$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow$$

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{6}{4}\operatorname{sen}30°\right) = 48.59°$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - \alpha - \beta$$
$$\gamma = 180° - 30° - 48.59° = 101.41°$$

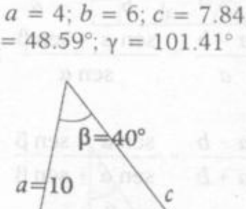
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \Rightarrow c = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}a = \frac{\operatorname{sen}101.41°}{\operatorname{sen}30°}4 = 7.84$$

Por el Teo. del seno, se calcula β

Por el Teo. del seno, se calcula c

Por tanto: $a = 4$; $b = 6$; $c = 7.84$; $\alpha = 30°$; $\beta = 48.59°$; $\gamma = 101.41°$

d) $a = 10 \,;\; \beta = 40° \,;\; \gamma = 80°$



$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - \beta - \gamma$$
$$\alpha = 180° - 40° - 80° = 60°$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \Rightarrow b = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}a = \frac{\operatorname{sen}40°}{\operatorname{sen}60°}10 = 7.42$$

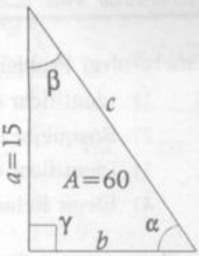
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \Rightarrow c = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}a = \frac{\operatorname{sen}80°}{\operatorname{sen}60°}10 = 11.37$$

Por Teo. del seno, se calculan b, c

Por tanto: $a = 10$; $b = 7.42$; $c = 11.37$; $\alpha = 60°$; $\beta = 40°$; $\gamma = 80°$

16.4 Se resuelven Triángulos que presentan los siguientes datos:

a) Triángulo Rectángulo de: $A = 60$; $a = 15$



Se conocen su Área y un cateto, por ser rectángulo: $\gamma = 90°$

$$A = \frac{ab}{2} \Rightarrow b = \frac{2A}{a} = \frac{2\cdot 60}{15} = 8$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{a}{b} = \tan^{-1}\frac{15}{8} = 61.93°$$

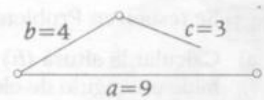
$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 180° - 61.93° = 28.07°$$

Por el Área de un Triángulo rectángulo, donde el cateto a es la altura.

Calculando α

Por tanto: $a = 15$; $b = 8$; $c = 17$; $\alpha = 61.93°$; $\beta = 28.07°$

b) $a = 9$; $b = 4$; $c = 3$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{9^2 + 4^2 - 3^2}{2\cdot 9\cdot 4}\right) = \cos^{-1}(1.22) = \nexists$$

No existe un Triángulo con estos lados. El arccos no está definido para valores mayores a 1

Esta situación proviene de la necesidad de que en todo Triángulo la suma de dos de sus lados debe ser siempre mayor al tercer lado. Esta condición no se cumple en este caso.

c) $a = 5$; $b = 8$; $\alpha = 45°$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \Rightarrow$$

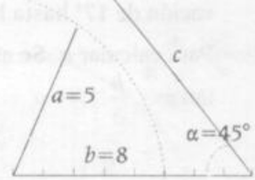
$$\beta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} b\right)$$

$$\beta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}45°}{5} 8\right)$$

$$\beta = \operatorname{arcsen}(1.13) = \nexists$$

No existe un Triángulo con estos lados. El arcsen no está definido para valores mayores a 1.

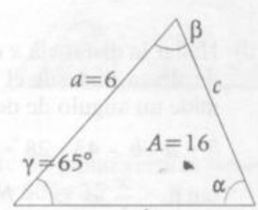
Esta situación proviene de que los datos no pueden llegar a constituir un Triángulo, según la gráfica a debería ser mayor a 5, ya que no alcanza a coincidir con el lado c.



d) $a = 4$; $b = 6$; $\alpha = 65°$; $\beta = 50°$

Se dispone de cuatro datos lo que hace inconsistente al problema, ya que trabajando con tres de estos datos se obtendrá diferentes resultados que con otros tres datos. Por tanto no existe un único Triángulo de resolución. Se considera un Problema no válido.

e) $a = 6$; $\gamma = 65°$; $A = 16$ (Triángulo Oblicuángulo)



Se conoce un lado, un ángulo y el valor de su Área. Por una fórmula (Ver X.1-1) de Área del triángulo se obtiene el lado b

$$A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma \Rightarrow b = \frac{2A}{a\operatorname{sen}\gamma} = \frac{2\cdot 16}{6\operatorname{sen}65°} = 4.41$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow$$

$$c = \sqrt{6^2 + 4.41^2 - 2\cdot 6\cdot 4.41\cos 65°} = 5.75$$

Por el Teo. del coseno se obtiene c.

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}a$$

Por el Teo. del seno se obtiene α

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen}65°}{5.75} 6\right) = 71.03°$$

Por la suma de ángulos interiores de un Triángulo se obtiene β

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha - \gamma$$

$$\beta = 180° - 71.03° - 65° = 43.97°$$

Por tanto: $a = 6$; $b = 4.41$; $c = 5.75$

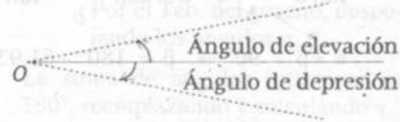
$\alpha = 71.03°$; $\beta = 43.97°$; $\gamma = 65°$

XVI.9 APLICACIONES PRÁCTICAS

Para resolver Problemas de Aplicación de Trigonometría, son convenientes las siguientes reglas:

1) Identificar claramente el concepto que se desea calcular
2) Bosquejar una gráfica, incluyendo las datos de que se dispone
3) Identificar el tipo de Triángulo que se presenta (Triángulo u Oblicuángulo)
4) Elegir Relaciones o Teoremas Trigonométricos a emplear de acuerdo a los datos conocidos.

Se llama Ángulo de elevación al ángulo que se encuentra por encima del punto de observación. Ángulo de depresión es el que se encuentra por debajo del punto de observación.

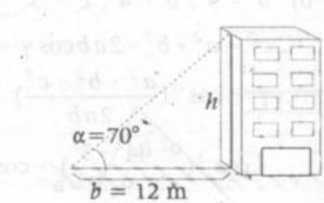


16.5 Se resuelven Problemas de Aplicación:

a) Calcular la altura (h) de un edificio, si a 12 ms (b) de su base se mide un ángulo de elevación de $\alpha=70°$ a la cúspide del edificio.

Para calcular h. Se asume un Triángulo Rectángulo.

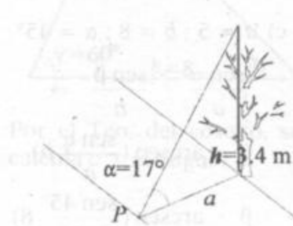
$$\tan\alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\tan\alpha = 12\tan 70° = 32.97\,m$$



b) Calcular el ancho de un rio (a) si desde un punto de observación P perpendicular al cauce, se observa en la ribera opuesta un árbol de 3.4 m de altura, desde P se mide un ángulo de elevación de 17° hasta la copa del árbol.

Para calcular a. Se asume un Triángulo Rectángulo.

$$\tan\alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow a = \frac{h}{\tan\alpha} = \frac{3.4}{\tan 17°} = 11.12\,m$$



c) Una persona de estatura $h=1.71$ m, observa que la longitud de su sombra es de $s=2.96$ m calcular el ángulo α de elevación que en ese instante presenta el sol. Si en su región el sol sale a las 6.00, que hora es.

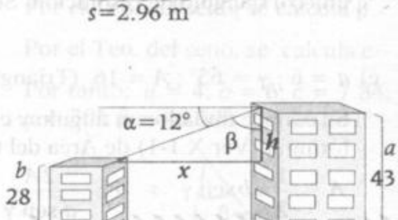
$$\tan\alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{h}{s}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1.71}{2.96}\right) = 30°$$

Cada hora representa 15° (360°/24): Son las 8.00

d) Hallar la distancia x entre dos edificios de 43 y 28 m de altura, si desde el borde superior del más alto se mide un ángulo de depresión de 12° al otro.

$$h = a - b = 43 - 28 = 15\,\text{m} \; ; \; \alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 78°$$

$$\tan\beta = \frac{x}{h} \Rightarrow x = h\tan\beta = 15\tan 78° = 70.57\,\text{m}$$

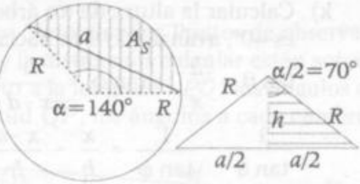


e) Calcular el ancho de una calle, si se dispone de una escalera de 12m, a partir de un punto fijo de la base, apoyando la escalera sobre un muro se logra un ángulo de elevación de 30°, apoyando sobre el muro opuesto mide 40°.

$$\cos\alpha = \frac{a}{d} \; ; \; \cos\beta = \frac{b}{d} \; ; \; x = a + b$$

$$x = d\cos\alpha + d\cos\beta = 12\cos 30° + 12\cos 40° = 22.47\,m$$

f) Hallar la longitud de cuerda a subtendida por un ángulo de 140°, en una circunferencia de Radio 12 cm. Calcular el área del Triángulo y Sector así formados.

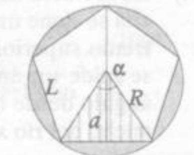


$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{R} \Rightarrow a = 2R\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = 2\cdot 12\operatorname{sen}70° = 22.55\,\text{cm}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{R} \Rightarrow h = R\cos\frac{\alpha}{2} = 12\cos 70° = 4.10\,\text{cm}$$

$$A_{Triang} = \frac{a\,h}{2} = \frac{22.55\cdot 4.10}{2} = 46.23\,\text{cm}\ ;\ A_{Sect} = \frac{R^2}{2}\alpha\,\text{rad} = \frac{12^2}{2}\frac{140°\,\pi}{180°} = 175.93\,\text{cm}^2$$

g) Calcular el lado (L), Perímetro (P) y Área de un Pentágono inscrito en una Circunferencia de radio R = 10 cm.



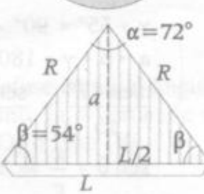
$$\alpha = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{5} = 72° \qquad \begin{aligned}\alpha + \beta + \beta &= 180°\\ \Rightarrow\ \beta &= 54°\end{aligned}$$ Angulo interno del Pentágono, de 5 lados

$$\cos\beta = \frac{L/2}{R} \Rightarrow \begin{aligned}L &= 2R\cos\beta\\ L &= 2\cdot 10\cos 54° = 11.76\end{aligned}$$ Cálculo de β, todo Triángulo tiene 180° internos.

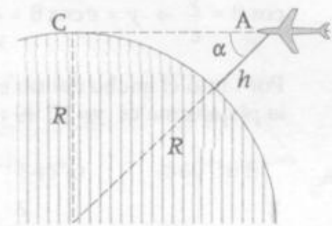
$$P = 5L = 5\cdot 11.76 = 58.78$$ Perímetro del Pentágono

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{a}{R} \Rightarrow \begin{aligned}a &= R\operatorname{sen}\beta\\ a &= 10\operatorname{sen}54° = 8.09\end{aligned}$$ El apotema (altura) es a

$$A = 5\frac{La}{2} = 5\frac{11.76\cdot 8.09}{2} = 237.76\,\text{cm}^2$$ Área, tomando los 5 Triángulos que tiene



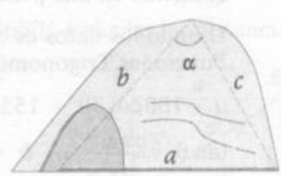
h) Un avión desde un punto A del espacio, observa al punto C en el horizonte de la tierra con un ángulo de depresión de α=86°. Calcular su altura, asumiendo que la tierra es una esfera de Radio R = 6500 Km



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{R}{R+h} \Rightarrow R + h = \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$h = \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha} - R = \frac{6500}{\operatorname{sen}86°} - 6500 = 15.87\,\text{Km}$$

i) Calcular la longitud de un túnel a través de un cerro, las distancias desde su cima a la entrada y salida son: b = 82 m; c = 96 m, entre ambas se tiene un ángulo de α = 72°



Por el Teorema del Coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$a = \sqrt{82^2 + 96^2 - 2\cdot 82\cdot 96\cos 72°} = 105.24\,\text{m}$$

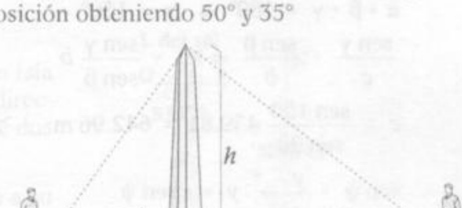
j) Hallar la altura de un obelisco, si dos personas enfrentadas, están sobre un plano vertical separadas 81 m, miden los ángulos de elevación desde su posición obteniendo 50° y 35°

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{u}{h}\ ;\ \frac{1}{\tan\beta} = \frac{v}{h}\ ;\ u + v = d$$

$$\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} = \frac{u}{h} + \frac{v}{h} = \frac{u+v}{h} = \frac{d}{h}$$

$$h = \frac{d}{\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}} = \frac{81}{\frac{1}{\tan 50°} + \frac{1}{\tan 35°}}$$

$$= 35.73\,\text{m}$$

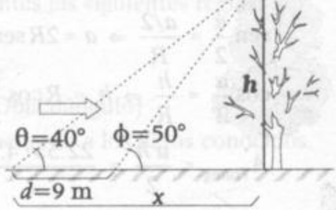


k) Calcular la altura de un árbol (h), de base inaccesible. Desde cierto punto el ángulo de elevación es 40°, avanzando 9 m hacia la base del árbol, el nuevo ángulo de elevación es 50°.

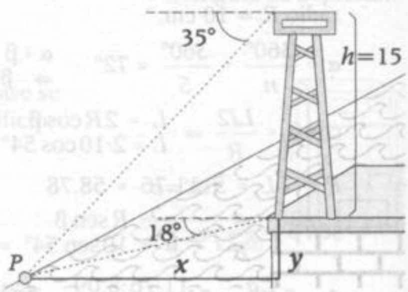
$$\tan\theta = \frac{h}{x}\ ;\ \tan\phi = \frac{h}{x-d}\ ;\ d = 9\text{ m}$$

$$\frac{1}{\tan\theta} - \frac{1}{\tan\phi} = \frac{x}{h} - \frac{x-d}{h} = \frac{x-(x-d)}{h} = \frac{d}{h}$$

$$h = \frac{d}{\frac{1}{\tan\theta} - \frac{1}{\tan\phi}} = \frac{9}{\frac{1}{\tan 40°} - \frac{1}{\tan 50°}} = 25.52\text{ m}$$



l) En la ribera de un río se yergue una plataforma, sobre ella se tiene una torre de 15 m de altura, desde su extremo superior hacia un punto P de la orilla opuesta se mide un ángulo de depresión de 35°. Ese mismo ángulo desde la base de la torre es de 18°. Calcular el ancho del río x, calcular la altura de la plataforma y.



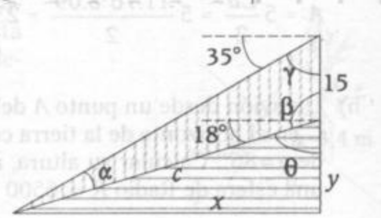
$\gamma + 35° = 90° \Rightarrow \gamma = 55°\ ;\ \beta = 18° + 90° = 108°$

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha = 17°\ ;\ 18° + \theta = 90° \Rightarrow \theta = 72°$

$$\frac{\text{sen}\,17°}{15} = \frac{\text{sen}\,55°}{c} \Rightarrow c = \frac{\text{sen}\,55°}{\text{sen}\,17°}15 = 42.03$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c\,\text{sen}\,\theta = 42.03\,\text{sen}\,72° = 39.97$$

$$\cos\theta = \frac{y}{c} \Rightarrow y = c\cos\theta = 42.03\cos 72° = 12.99$$



Por tanto el ancho del río es $x = 39.97$ m; el alto de la plataforma es $y = 12.99$ m.

g) Calcular la altura de un cerro (h), si un topógrafo en el punto inicial O mide un ángulo de elevación θ=60°, luego de avanzar 150 m hacia la base del cerro, debe proseguir otros 180 m, pero ascendiendo en una pendiente de 30°. En ese punto mide la elevación que es de 80°

Usando los datos es conveniente armar varios Triángulos rectángulos u otros, donde aplicar las Funciones Trigonométricas.

$u = 180\cos 30° = 155.88\text{ m}\ ;\ v = 180\,\text{sen}\,30° = 90\text{ m}$

$$\tan\theta = \frac{b+v}{p+u} \Rightarrow b = (p+u)\tan\theta - v$$

$b = (150 + 155.88)\tan 60° - 90 = 439.81\text{ m}$

$\psi = 80° \Rightarrow \alpha = 10°\ ;\ \beta + \omega = 30°\ ;\ \omega = 10° \Rightarrow \beta = 20°$

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 150°$

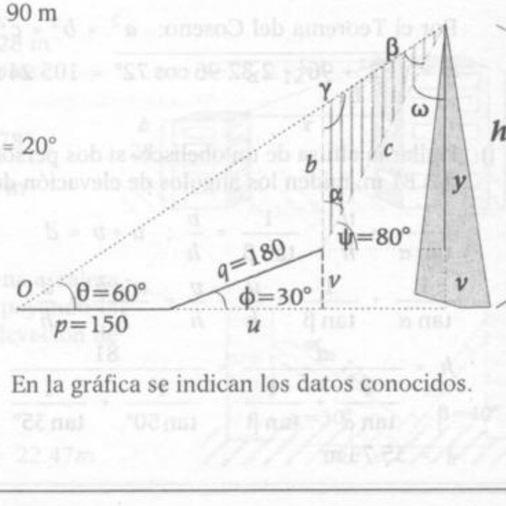
$$\frac{\text{sen}\,\gamma}{c} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} \Rightarrow c = \frac{\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\beta}b$$

$$c = \frac{\text{sen}\,150}{\text{sen}\,20}439.81 = 642.96\text{ m}$$

$$\text{sen}\,\psi = \frac{y}{c} \Rightarrow y = c\,\text{sen}\,\psi$$

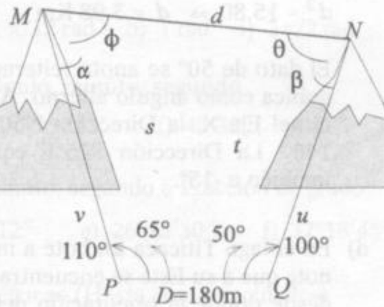
$y = 642.96\,\text{sen}\,80° = 633.19\text{ m}$

$h = y + v = 633.19 + 90 = 723.19\text{ m}$



En la gráfica se indican los datos conocidos.

h) Se trata de calcular la distancia entre las cumbres de dos cerros. Se toman dos Puntos de observación P, Q separados por una distancia de 180 m, esta longitud y la distancia a calcular están sobre un plano sobre el que se miden ángulos. Desde P y con respecto a la longitud $\overline{PQ}$, los ángulos a cada cumbre son 110°, 65°. Desde Q y con respecto a la longitud $\overline{QP}$, los ángulos a cada cumbre son 50°; 100°



$\alpha + 50° + 110° = 180° \Rightarrow \alpha = 20°$

$\beta + 65° + 100° = 180° \Rightarrow \beta = 15°$

En PMQ $\dfrac{\operatorname{sen} 20°}{180} = \dfrac{\operatorname{sen} 50°}{v} \Rightarrow v = 403.16$

En PNQ $\dfrac{\operatorname{sen} 100°}{t} = \dfrac{\operatorname{sen} 15°}{180} \Rightarrow t = 684.90$

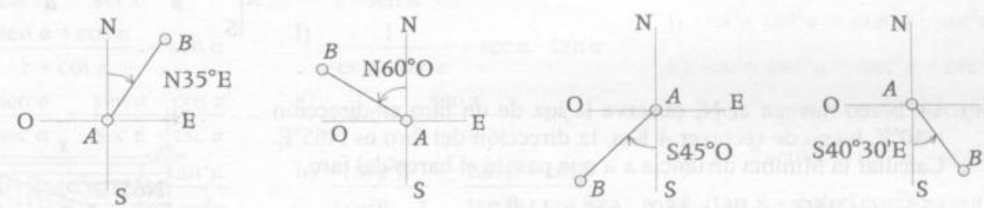
En PMN $d^2 = v^2 + t^2 - 2vt\cos(110 - 65°)$

$\Rightarrow d = 491.05$ m

XVI.9.1 ORIENTACIONES

En navegación, la orientación de un Punto B con respecto a otro Punto A, se define como el ángulo entre la Recta Norte-Sur y una semirrecta, que partiendo de A pasa por B. Por tanto la orientación se describe como el ángulo desde la semirrecta Norte (N) o Sur (S) hacia el Oeste (O) o Este (E)

Ej 16.26 Se describen algunas orientaciones de navegación:



Ej 16.27 Se resuelven los siguientes Problemas de Aplicación, usando direcciones:

a) Partiendo del Punto A, un barco ha navegado 20 Km en dirección N65°E. Calcular las distancias que ha recorrido hacia el Norte y hacia el Este.

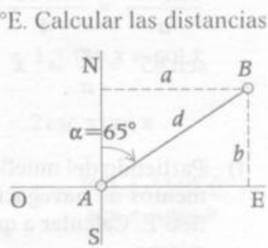
$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{d} \Rightarrow a = d\operatorname{sen}\alpha$

$a = 20\operatorname{sen}65° = 18.13$ Km

$\cos\alpha = \dfrac{b}{d} \Rightarrow b = d\cos\alpha$

$b = 20\cos 65° = 8.45$ Km

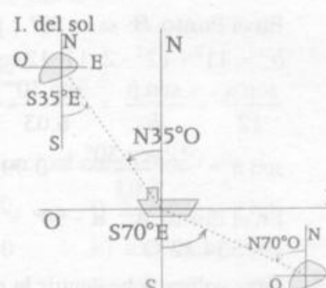
Trabajando con el Triángulo rectángulo que encierra al ángulo de orientación, que debe medirse a partir de la semirrecta que indica el Norte, hacia el Este.



b) En el lago Titicaca un barco de la naval observa a la Isla del sol en dirección N35°O, a la Isla de la luna en dirección S70°E. Calcular las direcciones del barco desde dos observadores situados en cada una de las islas.

La Isla del sol se encuentra a N35°O del barco, pero a su vez el barco está a S35°E de la isla.

La Isla de la luna se encuentra a S70°E del barco, pero a su vez el barco está a N70°O de la isla.

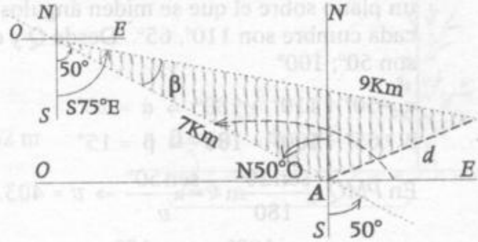


c) Partiendo del Punto A, un barco navega 7 Km en dirección N50°O. Luego 9 Km en dirección S75°E. Calcular la distancia d a que se encuentra del Punto de inicio A.

$\beta = 75° - 50° = 25°$ Cálculo de β para usar el Teorema del coseno.

$d^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cos 25°$

$d^2 = 15.80 \Rightarrow d = 3.98 \text{ Km}$



El dato de 50° se anota reiteradamente en la gráfica como ángulo alterno. A partir del habitual Eje X, la Dirección N50°O equivale a 140°. La Dirección S75°E equivale a 345° también a -15°.

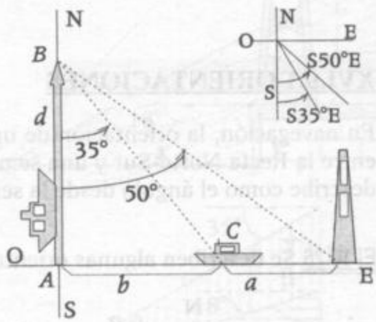
d) En el lago Titicaca un bote a motor desde un Punto A se dirige al Norte a 12 millas/h, al partir nota que a su Este se encuentra un catamarán C anclado y un faro. Al cabo de 2h llega al Punto B desde donde la orientación del catamarán es S35°E y el faro de S50°E. Calcular la distancia entre ambos.

$d = v\,t = 12 \dfrac{\text{millas}}{\text{h}} 2\text{h} = 24 \text{ millas}$

$\tan 35° = \dfrac{b}{d} \Rightarrow b = d \tan 35° = 24 \tan 35° = 16.80$

$\tan 50° = \dfrac{a+b}{d} \Rightarrow a = d \tan 50° - b$

$a = 24 \tan 50° - 16.80 = 11.80 \text{ millas}$



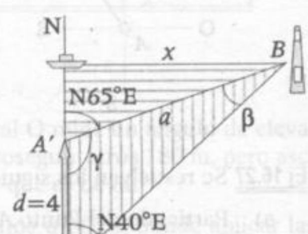
e) Un barco navega al N, observa la luz de un faro en dirección N40°E, luego de recorrer 4 Km, la dirección del faro es N65°E. Calcular la Mínima distancia x a que pasará el barco del faro.

$65° + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - 65° = 115°$

$40° + \gamma + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 180° - 40° - \gamma = 25°$

$\dfrac{\text{sen } 40°}{a} = \dfrac{\text{sen } 25°}{4} \Rightarrow a = \dfrac{\text{sen } 40°}{\text{sen } 25°} 4 = 6.08$

$\text{sen } 65° = \dfrac{x}{a} \Rightarrow x = a \,\text{sen } 65° = 6.08 \,\text{sen } 65° = 5.51 \text{ Km}$



f) Partiendo del muelle A, un barco avanza 11 Km en dirección N50°O, debido a fallas de sus instrumentos de navegación debe volver, pero luego de 12 Km observa que tomó la errada dirección S80°E. Calcular a que distancia se encuentra del muelle y que dirección debe tomar para volver al mismo.

En el Punto B: $\omega = 50°$; $\beta = 80° - 50° = 30°$

$b^2 = 11^2 + 12^2 - 2 \cdot 11 \cdot 12 \cos 30° \Rightarrow b = 6.03$

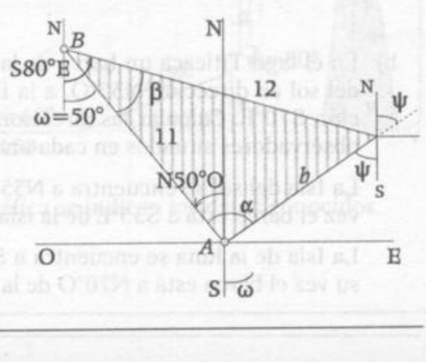
$\dfrac{\text{sen } \alpha}{12} = \dfrac{\text{sen } \beta}{b} = \dfrac{\text{sen } 30°}{6.03} \Rightarrow$

$\text{sen } \alpha = \dfrac{12 \,\text{sen } 30°}{6.03} = 0.9949 \Rightarrow \alpha = 84.22°$

En el Punto A: $\alpha - 50° = \psi = 34.22°$

$\Rightarrow$ S34.22°O

Para volver debe seguir la dirección S34.22°O



XVI.- PROBLEMAS PROPUESTOS

16.1 Convertir los ángulos dados en un sistema de medida a los otros.

a) $90°$ b) $36°$ c) $21.60°$ d) 120^g e) 60^g f) 25^g g) $\pi/12$ rad h) 1 rad i) $3\pi/2$ rad

16.2 Convertir la fracción de grado sexagesimal a la forma de Grado, minuto, segundo

a) $76.47°$ b) $43.28°$ c) $27.1250°$ d) $35.8425°$ e) $76.3333°$ f) $47.32°$

16.3 Convertir los grados sexagesimales de la forma de Grado, minuto, segundo a Fracción de grado

a) $38°16'12''$ b) $25°28'48''$ c) $81°02'15''$ d) $47°19'12''$ e) $26°15'30''$ f) $37°18'45''$

16.4 Obtener los valores de las siguientes Funciones Trigonométricas (Hasta con 4 decimales)

a) $\operatorname{sen} 24°$ c) $\cos 72°$ e) $\operatorname{sen} 50^g$ g) $\tan 45°$ i) $\sec 60°$

b) $\operatorname{sen} 76°30'15''$ d) $\cos 25.0125°$ f) $\cos(\pi/6)$ h) $\cot 30°$ j) $\csc 45°$

16.5 Expresar las restantes Funciones Trigonométricas en términos de la cotangente y secante

16.6 Demostrar las Identidades Trigonométricas:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\csc\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{1 + \cot\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\sec\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \csc\alpha}$

d) $1 - 2\sec^2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

e) $\dfrac{\cos\alpha}{1 + \operatorname{sen}\alpha} = \sec\alpha - \tan\alpha$

f) $\dfrac{1}{\sec\alpha + \tan\alpha} = \sec\alpha - \tan\alpha$

g) $\cot x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \csc x$

h) $\dfrac{\sec^2\beta}{\tan^2\beta - 1} = \dfrac{\tan\beta + \cot\beta}{\tan\beta - \cot\beta}$

i) $\cos^2\alpha\,\tan\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\cot\alpha$

j) $\cos^2\alpha\,\cot^2\alpha = \cos^2\alpha - \cot^2\alpha$

k) $\sec^2\alpha\,\csc^2\alpha = \sec^2\alpha + \csc^2\alpha$

l) $2\operatorname{sen}^2\alpha - 1 = \operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha$

m) $1 - 2\sec^2\alpha = \tan^4\alpha - \sec^4\alpha$

n) $(\tan x + \cot x)\cos^2 x = \cot x$

o) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \dfrac{\sec x + \csc x}{\sec x - \csc x}$

p) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x\cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{\tan x}{1 - \tan^2 x}$

q) $\dfrac{1 - \operatorname{sen}\alpha}{(\sec\alpha - \tan\alpha)^2} = 1 + \operatorname{sen}\alpha$

r) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \tan x}{\cot x + \csc x} = \operatorname{sen} x\tan x$

s) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x} + \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x} = 2\sec^2 x$

t) $\dfrac{\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x}{\cos x - 2\cos^3 x} = -\tan x$

u) $\dfrac{\tan x}{1 - \cot x} + \dfrac{\cot x}{1 - \tan x} = 1 + \tan x + \cot x$

v) $\dfrac{1}{\sec x - 1} + \dfrac{1}{\sec x + 1} = 2\csc x\cot x$

w) $\dfrac{\tan x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{1 - \tan^2 x} = 1 - \dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

x) $\dfrac{\sec x - \cos x}{\csc x - \operatorname{sen} x} = \tan^3 x$

y) $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1 = \dfrac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - 1}$

z) $\dfrac{\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha}{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha} = \tan\alpha$

16.7 Resolver las Ecuaciones Trigonométricas, indicando el valor principal como resultado

a) $6\operatorname{sen} x - 3 = 0$ d) $8\operatorname{sen} 3x - 4 = 0$ g) $\csc x - 2 = 0$ j) $2\arcsen x - 60° = 0$

b) $2\cos^2 x - 1 = 0$ e) $10\cos 2x - 5 = 0$ h) $\sec^2 x - 2 = 0$ k) $\arccos 3x - 60° = 0$

c) $400\tan x = 231$ f) $2\tan^2 x - 6 = 0$ i) $2\cot^2 x - 6 = 0$ l) $\arctan 2x - 45° = 0$

16.8 Resolver las Ecuaciones Trigonométricas, indicando el Valor principal como resultado

a) $6\operatorname{arcsen}(x/4) - \pi = 0$
b) $3\arccos(x/2) - \pi = 0$
c) $8\arctan(x/3) - 2\pi = 0$
d) $\operatorname{arccsc} x - 30° = 0$
e) $\operatorname{arcsec} x - 45° = 0$
f) $\operatorname{arccot} x - 30° = 0$
g) $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$
h) $\operatorname{sen}^2 x - 3\cos^2 x = 0$
i) $4\cos^2 x - 4\operatorname{sen} x = 1$

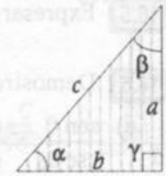
16.9 Resolver las Ecuaciones Trigonométricas, indicando el Valor principal como resultado

a) $\tan x - 2\operatorname{sen} x = 0$
b) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$
c) $\sec x + \tan x = \sqrt{3}$
d) $\tan x - 2\operatorname{sen}^2 x = 0$
e) $5\cos^2 x + 13\operatorname{sen} x = 11$
f) $2\tan^2 x + \sec^2 x = 10$
g) $4\operatorname{sen}^4 x - 7\operatorname{sen}^2 x = -3$
h) $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = 1/2$
i) $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 0$
j) $\operatorname{sen} 4x = \cos 2x$
k) $\operatorname{sen} 2x = \cos 3x$
l) $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x = 3\cos 2x$

16.10 Resolver las Ecuaciones Trigonométricas, indicando Valores generales como resultado

a) $3\operatorname{sen} x - 3 = 0$
b) $6\operatorname{sen} 3x - 3 = 0$
c) $2\operatorname{sen} 4x - \sqrt{3} = 0$
d) $2\cos 5x - \sqrt{2} = 0$
e) $1000\cos 3x - 891 = 0$
f) $\tan 6x - \sqrt{3} = 0$

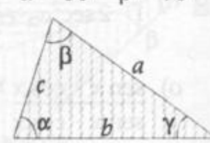
16.11 Resolver los Triángulos Rectángulos; Los datos son para el Triángulo adjunto



a) $a = 3 \quad b = 4$
b) $a = 5 \quad c = 8$
c) $b = 4 \quad c = 6$
d) $a = 10 \quad \alpha = 30°$
e) $b = 7 \quad \alpha = 60°$
f) $c = 12 \quad \alpha = 35°$
g) $\alpha = 35° \quad \beta = 55°$
h) $a = 4 \quad c = 2$
i) $a = 6 \quad \alpha = 120°$
j) Triang. Isosc. $a = 6$
k) Área: $A = 30 \quad a = 5$
l) Área: $A = 54 \quad c = 15$

16.12 Resolver los Triángulos Oblicuángulos; Los datos son para el Triángulo adjunto

a) $a = 4 \quad b = 6 \quad c = 7$
b) $a = 7 \quad b = 9 \quad c = 8$
c) $a = 10 \quad b = 18 \quad c = 12$
d) $b = 5 \quad c = 8 \quad \alpha = 60°$
e) $b = 16 \quad c = 11 \quad \beta = 40°$
f) $a = 12 \quad b = 14 \quad \gamma = 48°$
g) $a = 7 \quad b = 8 \quad \alpha = 45°$
h) $a = 9 \quad b = 8 \quad \alpha = 70°$
i) $a = 5 \quad \alpha = 50° \quad \beta = 70°$
j) $a = 6 \quad \alpha = 40° \quad \beta = 65°$
k) $a = 14 \quad \beta = 45° \quad \gamma = 75°$
l) $a = 8 \quad \alpha = 100° \quad \beta = 30°$
m) Triang. Isosc. $a = b \quad c = 6 \quad \gamma = 40°$
n) Triang. Isosc. $a = b = 4 \quad \alpha = \beta = 50°$
o) Área: $A = 40\sqrt{3} \quad a = 10 \quad b = 16$



16.13 Resolver los siguientes Problemas de Aplicación práctica de la Trigonometría.

a) Calcular la altura (h) de una torre, si a 25 ms (b) de su base se mide un ángulo de elevación hacia su cúspide de $\alpha = 65°$

b) Calcular la altura (h) de un edificio, si desde su parte más alta con respecto a un punto P de la tierra a 42 m de la base del edificio, se mide un ángulo de depresión de 35°

c) Calcular el Área de un terreno rectangular cuya diagonal mide 520 m, esta diagonal forma un ángulo de 36° con uno de los lados.

d) Calcular la estatura de una persona, si su sombra mide 1.20 m, una línea que se inicia en el extremo de la sombra y pasa exactamente por encima de su cabeza da un ángulo de elevación hacia el sol de 54°

e) Desde el punto más alto de un buque a 8.6 m sobre el nivel del mar, se mide 3° como ángulo de depresión hacia una balsa. Calcular la distancia a nivel del mar entre buque y balsa.

f) Calcular el ancho de un río si desde un punto de observación P, en forma perpendicular al recorrido del río, se observa en la orilla opuesta un árbol de 7.2 m de altura, cuya copa desde el observador P muestra un ángulo de elevación de 17°

g) Calcular el ancho mínimo de un río si en una de las orillas se establece un trayecto entre los puntos P, Q distanciados en 36m. Desde tal trayecto se miden ángulos de separación de 65° y 80° hacia el punto R de la otra orilla.

h) Hallar la altura de un árbol, si dos personas enfrentadas (Con el árbol entre ellos), están sobre un plano vertical separadas 42 m, miden los ángulos de elevación a la copa del árbol obteniendo 25° y 60°

i) En cierto instante un avión se encuentra entre dos observadores sobre tierra, separados por 3240 m, éstos miden sus ángulos de elevación de 62° y 51° hacia el avión. Calcular la altura a que se encuentra y las distancias hacia los observadores.

j) Calcular el lado (L), Perímetro (P) y Área de un Heptágono inscrito en una Circunferencia de radio R = 10 cm.

k) Calcular la altura de un cerro, cuya base es inaccesible. Desde cierto punto el ángulo de elevación es 35°, avanzando 18 m hacia la base del cerro, el nuevo ángulo de elevación es 55°.

l) Para medir la altura (h) de un cerro de base inaccesible, se planta en su cima un poste de 2.8 m de altura. Desde un punto de observación sobre la tierra se aprecia que el ángulo de elevación a la cúspide del poste es de 40°, a la cima del cerro es de 38°

m) Desde la parte más alta de un edificio A de 38 m de altura, se mide un ángulo de depresión de 25° hacia la cima de otro edificio B de menor altura, separado en 17 m. Calcular la altura de B

n) Hallar la altura de una estatua, la altura del pedestal sobre el que se encuentra es 3.6 m, desde un punto de observación los ángulos de elevación a las cúspides del pedestal y de la estatua son 25°; 45°

o) Calcular las alturas de una estatua y del pedestal sobre el que se encuentra. Si desde un punto de observación los ángulos de elevación a las cúspides del pedestal y de la estatua son 15°; 24°. Avanzando 8.6 m hacia la estatua se mide un ángulo de elevación a su cúspide de 44°

p) En la ribera de un río se yergue un faro de 25 m de altura sobre la cima de una colina, desde su extremo superior hacia un punto P de la orilla opuesta se mide un ángulo de depresión de 32°. Ese mismo ángulo desde la base del faro es de 14°. Calcular el ancho del río a, la altura de la colina h.

q) Calcular la altura de un cerro (h), si un topógrafo en el punto inicial O mide un ángulo de elevación de θ=55°. Luego de avanzar 90 m hacia la base del cerro, debe proseguir otros 120 m, pero ascendiendo en una pendiente de 25°. En ese punto mide la elevación que es de 70°. Calcular también la distancia desde O hasta la base del cerro.

r) Calcular la distancia entre las cumbres de dos cerros. Se toman dos Puntos de observación P, Q separados por una distancia de 420 m, esta longitud y la distancia a calcular están sobre un plano sobre el que se miden ángulos. Desde P y con respecto a la longitud $\overline{PQ}$, los ángulos a cada cumbre son 130°, 45°. Desde Q y con respecto a la longitud $\overline{QP}$, los ángulos a cada cumbre son 30°; 100°

s) Calcular la estatura de una persona cuya longitud de sombra es de 0,68 m, luego de una hora esa longitud es 1.28 m

t) Desde lo alto de un faro de 62 m de altura se divisa una lancha a 11° de ángulo de depresión, avanzando hacia el faro, luego de 3 minutos dicho ángulo es de 16°. Calcular su velocidad.

16.14 Resolver los siguientes Problemas de Aplicación relativos a Direcciones, de la Trigonometría.

a) A partir del barco A, el barco B se encuentra a 18 Km al N, el C a 24 Km al E. Indicar la orientación del barco C respecto de B.

b) Un barco avanza en la dirección N64°E a una velocidad de 3 millas/hora. Al cabo de 2 horas Calcular la longitud total recorrida, la longitud en dirección Norte y en dirección Este

c) Partiendo del punto O, un barco avanza 6 Km en dirección N55°E, luego otros 9 Km en dirección S70°O. Calcular la distancia a que se encuentra del punto inicial O.

d) Un barco inicialmente se encuentra en línea con dos torres marinas a su Este, luego de avanzar 21 millas al N, las torres quedan en las direcciones: S40°E; S75°E. Calcular la distancia entre torres.

e) Un barco avanza al E, divisando un faro en dirección N65°E, luego de recorrer 1850 m, el faro queda en N50°E. Si el barco mantiene su dirección, calcular su mínima distancia al faro.

RESPUESTAS XVI

16.1 a) 100^g; $\pi/2$ rad b) 40^g; $\pi/5$ rad c) 24^g; 0.12π rad d) $108°$; 0.6π rad
e) $54°$; 0.3πrad f) $22.5°$; $\pi/8$ rad g) $15°$; 16.67^g h) $57.29°$; 63.66^g i) $270°$; 300^g

16.2 a) $76°28'12''$ b) $43°16'48''$ c) $27°07'30''$ d) $35°50'33''$ e) $76°20'$ f) $47°19'12''$

16.3 a) 38.27° b) 25.48° c) 81.0375° d) 47.32° e) 26.2583° f) 37.3125°

16.4 a) 0.4067 c) 0.3090 e) 0.7071 g) 1.0000 i) 2.0000
b) 0.9724 d) 0.9062 f) 0.8660 h) 1.7320 j) 1.4142

16.5 Ver Tabla de XVI.5

16.7 a) 30° b) 45° c) 30° d) 10° e) 30° f) 60° g) 30° h) 45°
i) 30° j) 1/2 k) 1/6 l) 1/2

16.8 a) 2 b) 1 c) 3 d) 2 e) $\sqrt{2}$ f) $\sqrt{3}$ g) 45° h) 60° i) 30°

16.9 a) 60° b) 0°, 90° c) 30° d) 0°, 45° e) 37° f) 60° g) 60° h) 30°
i) 90° j) 15° 45° k) 18° l) 30°, 40.65°

16.10 a) 90°, 450°, 810°,... b) 10°, 50°, 130°, 170°,... c) 15° 30° 105°, 120°,...
d) −9° 9°, 63°, 81°, 135°,.. e) −9°, 9°, 111°, 129°, 231°,... f) 10°, 40°, 70°, 100°,..

16.11 a) $c = 5$ $\alpha = 36.87°$ $\beta = 53.13°$
b) $b = \sqrt{39}$ $\alpha = 38.68°$ $\beta = 51.32°$
c) $a = 2\sqrt{5}$ $\alpha = 48.19°$ $\beta = 41.81°$
d) $c = 20$ $b = 17.32$ $\beta = 60°$
e) $a = 12.12$ $c = 14$ $\beta = 30°$
f) $a = 6.88$ $b = 9.83$ $\beta = 55°$
g) $\nexists$ h) $\nexists$ i) $\nexists$
j) $b = 6$ $c = 6\sqrt{2}$ $\alpha = 45°$ $\beta = 45°$
k) $b = 12$ $c = 13$ $\alpha = 22.62°$ $\beta = 67.38°$
l) $a = 12$ $b = 9$ $\alpha = 36.87°$ $\beta = 53.13°$

16.12 a) $\alpha = 34.77°$ $\beta = 58.81°$ $\gamma = 86.42°$
b) $\alpha = 48.19°$ $\beta = 73.40°$ $\gamma = 58.41°$
c) $\alpha = 31.59°$ $\beta = 109.47°$ $\gamma = 38.94°$
d) $a = 7$ $\beta = 38.21°$ $\gamma = 81.79°$
e) $a = 10.36$ $\beta = 96.97°$ $\gamma = 43.03°$
f) $c = 10.73$ $\alpha = 56.20°$ $\beta = 75.80°$
g) $c = 9.78$ $\beta = 53.91°$ $\gamma = 81.09°$
h) $c = 7.68$ $\beta = 56.64°$ $\gamma = 53.36°$
i) $b = 6.13$ $c = 5.65$ $\gamma = 60°$
j) $b = 8.46$ $c = 9.02$ $\gamma = 75°$
k) $b = 11.43$ $c = 15.61$ $\alpha = 60°$
l) $b = 4.06$ $c = 6.22$ $\gamma = 50°$
m) $a = b = 8.77$ $\alpha = \beta = 70°$
n) $c = 5.14$ $\gamma = 80°$
o) $c = 14$ $\alpha = 38.21°$ $\beta = 81.79°$ $\gamma = 60°$

16.13 a) 53.61 m b) 29.41 m c) 128 582.84 m² d) 1.65 m e) 164.09 m f) 23.55 m
g) 56.02 m h) 16.43 m i) 2416.22 m; 2735.40 m; 3107.80 m
j) L = 8.68 cm; P =60.74 cm ; A = 273.64 cm² k) 24.73 m l) h = 37.84 m m) 30.07 m
n) 4.12 m o) 2.83 m; 4.28 m p) a = 66.57 m; h = 16.60 m
q) h = 536.22 m; d = 375.47 m r) 905.40 m s) 1.74 m t) 2.05 Km/hora

16.14 a) S53.13°E b) 6 millas; 2.63 millas; 5.39 millas c) 3.56 Km
d) 60.75 millas e) 1941.74 m

XVII.- GEOMETRÍA ANALÍTICA

La GEOMETRÍA ANALÍTICA, es el estudio de la Geometría mediante un Sistema de coordenadas. En este Capítulo se estudia a la Geometría Analítica del Plano.

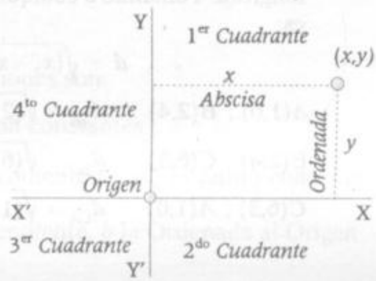
Se entiende por Lugar geométrico, al conjunto de puntos que satisfacen una Ecuación matemática.

Los problemas básicos de la Geometría Analítica son:

I.- Dada una Ecuación matemática, hallar su Lugar geométrico
II.- Dado un Lugar geométrico, hallar su Ecuación matemática.

XVII.1 SISTEMA DE COORDENADAS

Un Sistema de Coordenadas Cartesianas en el Plano es un Conjunto de dos Rectas Reales perpendicularmente dispuestas, que dividen al Plano en cuatro cuadrantes, donde un punto se asocia al Par ordenado (x,y)



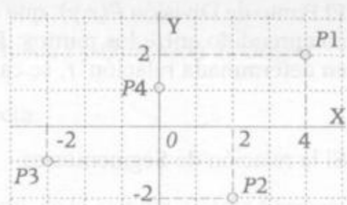
La Recta Real horizontal X'OX es el Eje de abscisas o Eje X.
La Recta Real Vertical Y'OY es el Eje de ordenadas o Eje Y

La distancia de un punto P al Eje de ordenadas se llama *Abscisa x*; La distancia al Eje de abscisas se llama *Ordenada y*

Para describir un punto se escribe (x,y), donde previamente se indica la *Abscisa* x, luego la *Ordenada* y

Ej 17.1 En el Plano se grafican los puntos:
$P1(4,2)$; $P2(2,-2)$; $P3(-3,-1)$; $P4(0,1)$

De acuerdo a las anteriores convenciones, se ubican los puntos en el Sistema de Coordenadas en el Plano. Se elige una adecuada escala en los Ejes Coordenados.



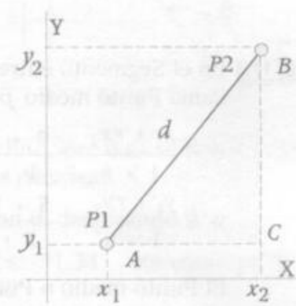
XVII.1.1 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La mínima distancia entre los puntos: $P1(x_1, y_1)$; $P2(x_2, y_2)$ está sobre la Recta que los une y se calcula por la Fórmula:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Verificando la fórmula, si: $A = P1(x_1,y_1)$; $B = P2(x_2,y_2)$

Las longitudes: $\overline{AC}$; $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ son:



$\overline{AC} = x_2 - x_1$; $\overline{BC} = y_2 - y_1$

$\overline{AB} = d$; Donde d es la distancia entre $P1$, $P2$

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ Por el Teorema de Pitágoras.

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

De la raíz cuadrada, se toma la raíz positiva, por tanto la distancia se considera siempre positiva.

Ej 17.2 a) Distancia entre los puntos $P1(0,2)$; $P2(1,-1)$ b) Si $d = 5$; $P3(3,2)$; $P4(7,t)$; calcular t

a) Si: $P1(0,2) \Rightarrow x_1 = 0 \;;\; y_1 = 2$; $P2(1,-1) \Rightarrow x_2 = 1 \;;\; y_2 = -1$

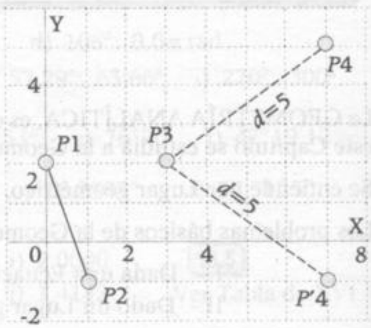
Si: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(1-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10} = 3.16$

b) Si: $P3(3,2) \Rightarrow x_3 = 3 \;;\; y_3 = 2$; $P4(7,t) \Rightarrow x_4 = 7 \;;\; y_4 = t$

Si: $d = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} = 5$

$= \sqrt{(7-3)^2 + (t-2)^2} = 5 \Rightarrow \begin{matrix} t = 5 \\ t = -1 \end{matrix}$



17.1 Demostrar que el Triángulo entre los puntos $A(1,0)$; $B(2,4)$; $C(6,3)$ es Isósceles.

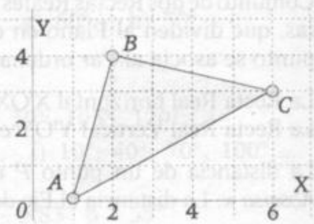
Para la demostración será suficiente con verificar que dos lados del Triángulo son de la misma longitud. Tomando a cualquiera de los puntos (A, B o C) como $P1$ o $P2$, la distancia entre puntos es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$A(1,0)$; $B(2,4)$ $\quad d_{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{17}$

$B(2,4)$; $C(6,3)$ $\quad d_{BC} = \sqrt{(6-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{17}$

$C(6,3)$; $A(1,0)$ $\quad d_{CA} = \sqrt{(1-6)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{34}$



XVII.1.1 PUNTO DE DIVISIÓN

El Punto de División $P(x,y)$; que divide al Segmento comprendido entre los puntos: $P1(x_1,y_1)$; $P2(x_2,y_2)$ en determinada relación r, se calcula por:

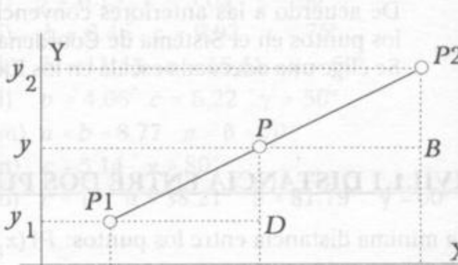
$$\boxed{x = \frac{x_1 + r\,x_2}{1 + r} \;;\; y = \frac{y_1 + r\,y_2}{1 + r}}$$

Si la relación de Segmentos es: $r = \dfrac{P_1 P}{P P_2}$

Por Triángulos Semejantes se verifica que:

$$r = \frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{P_1 D}{P B} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r}$$

$$r = \frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{P D}{P_2 B} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \Rightarrow y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}$$

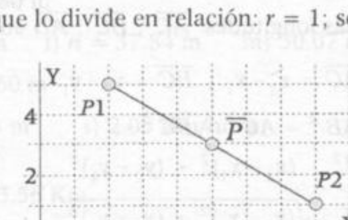


Ej 17.3 En el Segmento entre los puntos $P1(2,5)$; $P2(8,1)$; el punto que lo divide en relación: $r = 1$; se llama Punto medio $\overline{P}(\overline{x},\overline{y})$ (Queda situado en la mitad)

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r} = \frac{2 + 1 \cdot 8}{1 + 1} = 5 \Rightarrow \overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r} = \frac{5 + 1 \cdot 1}{1 + 1} = 3 \Rightarrow \overline{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

El Punto medio o Punto con relación $r = 1$ es $\overline{P}(5,3)$

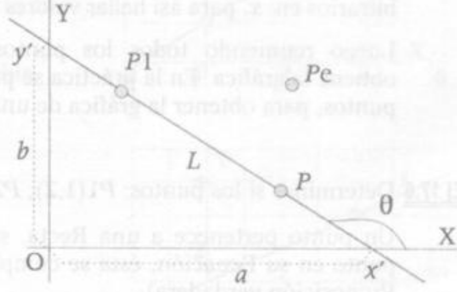


XVII.2 LA RECTA

La Recta es el Lugar geométrico de puntos, que satisfacen a una Ecuación Lineal con dos variables de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

Son características de una Recta:



L: Es el Símbolo de la Recta

PENDIENTE: Es la Tangente del ángulo de inclinación de la Recta: $m = Tan\ \theta$

ABSCISA AL ORIGEN: Segmento $x'O$ (a)

ORDENADA AL ORIGEN: Segmento $y'O$ (b)

Los puntos: $P(x,y)$; $P_1(x_1,y_1)$ están sobre la Recta

El punto: $P_e(x_e,y_e)$ no pertenece a la Recta.

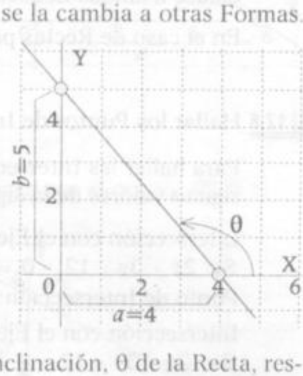
XVII.2.1 ECUACIONES DE LA RECTA

De acuerdo a las características de la Recta, sus principales Ecuaciones son:

EC. GENERAL	$Ax + By + C = 0$	A, B, C son constantes
EC. PUNTO-PENDIENTE	$y - y_1 = m(x - x_1)$	m es la pendiente (x_1,y_1) es punto conocido
EC. PENDIENTE-ORDENADA	$y = mx + b$	m es la pendiente, b la Ordenada al Origen
EC. CARTESIANA O DE DOS PUNTOS	$\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Dos puntos conocidos son: (x_1,y_1); (x_2,y_2)
EC. REDUCIDA O ABSCISA-ORDENADA	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$	a, b son la Abscisa y Ordenada al Origen.

Según se aprecia son suficientes dos datos, para especificar a una Recta.

Ej 17.4 La Recta L: $5x + 4y - 20 = 0$; está expresada en Forma General, se la cambia a otras Formas.



$5x + 4y - 20 = 0$ Ecuación en su Forma General

$\Rightarrow y = -\dfrac{5}{4}x + 5$ Forma Pendiente-Ordenada, despejando y ($m = -5/4$; $b = 5$)

$y - 0 = -\dfrac{5}{4}(x - 4)$ Forma Punto-Pendiente, el punto conocido es $(x_1,y_1) = (4,0)$

Si: $5x + 4y = 20$

$\dfrac{5x}{20} + \dfrac{4y}{20} = \dfrac{20}{20}$ Dividiendo todo entre 20, simplificando se logra la Forma Reducida ($a = 4$; $b = 5$)

$\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = 1$

Se calcula el ángulo de inclinación, θ de la Recta, respecto al Eje positivo de las Abscisas: X

Si: $m = -\dfrac{5}{4} \Rightarrow Tan\ \theta = -\dfrac{5}{4}$

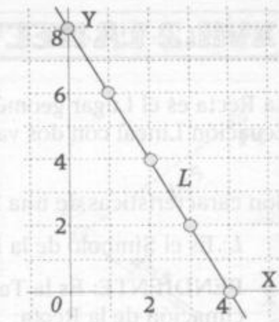
Considerando que: $m = \tan\theta$, despejando θ

$\Rightarrow \theta = Arctan(-\dfrac{5}{4})$

$= -51.34° = 128.66°$

El ángulo que se obtiene es: -51.34°, sin embargo su Suplemento es: $\theta = 128.66°$

Ej 17.5 Graficar la Recta de Ecuación: $2x + y - 8 = 0$



La gráfica se obtiene a partir de una tabla:

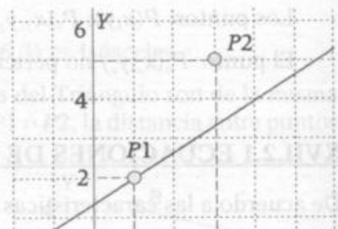
Si: $2x + y - 8 = 0$
Despejando: $y = 8 - 2x$

x	y
0	8
1	6
2	4
3	2
4	0

Para armar la tabla, se asignan valores arbitrarios en: x, para así hallar valores de: y

Luego reuniendo todos los puntos, se obtiene la gráfica. En la práctica se precisan de solo dos puntos, para obtener la gráfica de una Recta.

Ej 17.6 Determinar si los puntos: $P1(1,2)$; $P2(3,5)$; pertenecen a la Recta: $2x - 3y + 4 = 0$



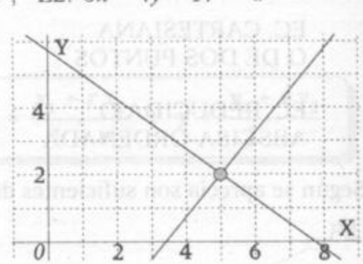
Un punto pertenece a una Recta, si al reemplazar tal punto en su Ecuación, ésta se cumple. (Se obtiene una Proposición verdadera)

$2x - 3y + 4 = 0$ Reemplazando $P1(1,2)$, se aprecia que la ecuación se cumple.

$2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 = 0$
$0 = 0$ Luego reemplazando $P2(3,5)$ la Ecuación no se cumple.

$2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 4 = 0$ Por tanto $P1$ pertenece a la Recta
$-5 \neq 0$ (Ya que satisface su Ecuación);
$P2$ no pertenece a la Recta (No satisface su Ecuación)

Ej 17.7 Hallar la Intersección entre las Rectas: $L1$: $3x + 4y - 23 = 0$; $L2$: $5x - 4y - 17 = 0$

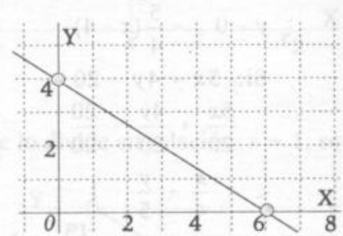


El Lugar geométrico de Intersección de dos Rectas es un punto. Este punto se halla resolviendo el Sistema de dos Ecuaciones, con dos Incógnitas, que conforman las dos Ecuaciones de Recta.

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y - 23 = 0 \\ 5x - 4y - 17 = 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 2 \end{array}$$

Por tanto el Punto de Intersección es $P(5,2)$; que satisface a ambas Ecuaciones de Recta.
En el caso de Rectas paralelas, no existe un Punto de intersección.

Ej 17.8 Hallar los Puntos de Intersección con los Ejes Coordenados de la Recta L: $2x + 3y - 12 = 0$



Para hallar las Intersecciones con los Ejes : X; Y se asignan valores de la siguiente manera:

Intersección con el Eje Y, haciendo: $x = 0$
Si: $2x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 3y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4$
Punto de Intersección: (0,4)
Intersección con el Eje X, haciendo: $y = 0$
Si: $2x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow x = 6$
Punto de Intersección: (6,0)

Una manera rápida de trazar una gráfica de Recta es obtener los puntos de intersección con los Ejes, luego trazar la Recta sobre tales Puntos.

17.2 Hallar las Ecuaciones Generales de Rectas, que poseen las siguientes características:

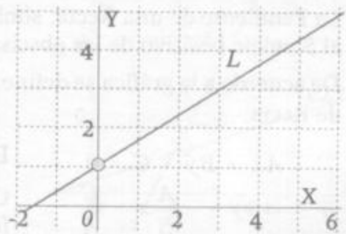
a) Pendiente: $m = 2/3$; Ordenada al Origen: $b = 1$

Usando la Ecuación de Pendiente-Ordenada al Origen (Ya que se dispone de esos datos)

$y = mx + b$ Reemplazando datos: $m = 2/3$; $b = 1$.

$y = \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow$ Luego ordenando se logra la Recta en su forma de Ecuación General.

$2x - 3y + 3 = 0$ La gráfica se obtiene por una tabla.



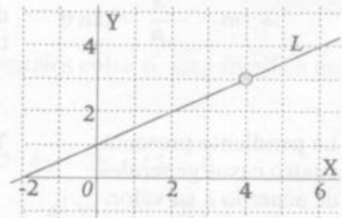
b) Pendiente: $m = 1/2$; Pasa por el punto $P1(4,3)$

Usando la Ecuación de Punto-Pendiente

$y - y_1 = m(x - x_1)$ Reemplazando datos: $m = 1/2$; $P1(4,3)$

$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 4)$ Ordenando se llega a la forma de Ecuación General de Recta.

$x - 2y + 2 = 0$



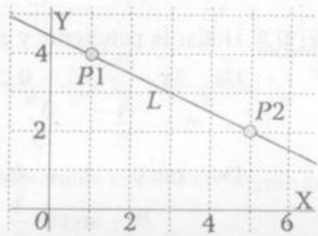
c) Pasa por dos puntos: $P1(1,4)$; $P2(5,2)$

Usando la Ecuación Cartesiana o de Dos puntos

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Reemplazando datos: $P1(1,4)$; $P2(5,2)$

$\frac{y - 4}{x - 1} = \frac{2 - 4}{5 - 1}$ Simplificando y ordenando se llega a la Ecuación General.

$x + 2y - 9 = 0$



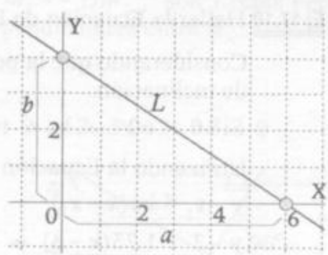
d) Intersecta a la Abscisa y Ordenada en: 6; 4 respectivamente

Por la Ecuación Reducida o de Abscisa-Ordenada

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ Reemplazando datos: $a = 6$; $b = 4$, son los valores de intersección con los Ejes coordenados. Luego simplificando.

$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$

$2x + 3y - 12 = 0$ Ecuación General.



e) Su Ordenada al Origen es 4 ; pasa por $P1(5,1)$

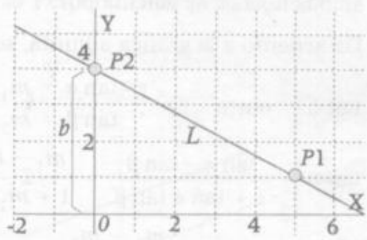
Si la Recta posee Ordenada al Origen: $b = 4$ puede asumirse que pasa por el punto: $P2(0,4)$

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Como además se sabe que la Recta pasa por $P1(5,1)$ se usa la Ecuación de los Dos puntos:

$\frac{y - 1}{x - 5} = \frac{4 - 1}{0 - 5}$

$\frac{y - 1}{x - 5} = -\frac{3}{5}$ Reemplazando datos: $P1(5,1)$; $P2(0,4)$

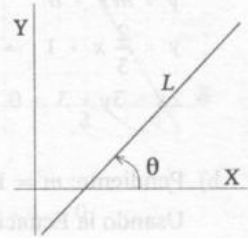
$3x + 5y - 20 = 0$ Simplificando y ordenando. Ecuación General.



XVII.2.2 PENDIENTE DE UNA RECTA

La Pendiente de una Recta, simbolizada por m ; es la Tangente de su ángulo de inclinación, respecto al Semieje positivo de las abscisas.

De acuerdo a la gráfica se define: $m = \tan\theta$, Por otro lado, partiendo de la Forma general de Ecuación de Recta:



$$Ax + By + C = 0$$

Despejando: y

$$\Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A}$$

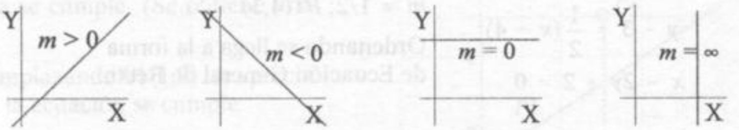
Comparando con la Ecuación de la forma de Punto-Pendiente.

$$y = mx + b$$

$$\Rightarrow m = -\frac{A}{B} = \tan\theta$$

Entonces es posible conocer la pendiente de la Recta como el coeficiente de: x, cuando y está despejado.

La pendiente presenta cuatro casos generales, de acuerdo a su valor:



Ej 17.9 Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la Recta: $3x - 5y - 6 = 0$

De: $3x - 5y - 6 = 0$

En la Ecuación general de recta dada, se tiene que: $A = 3; B = -5; C = -6$

$$\Rightarrow m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-5} = \frac{3}{5}$$

Reemplazando se obtiene el valor de la pendiente m

De: $\tan\theta = m \Rightarrow \theta = \arctan m$

$$\theta = \arctan\frac{3}{5} = 30.96°$$

De la definición de pendiente se despeja el valor del ángulo de inclinación θ

Ej 17.10 Hallar la Ecuación de Recta que pasa por el punto: $P1(3,2)$ con ángulo de inclinación de 60°

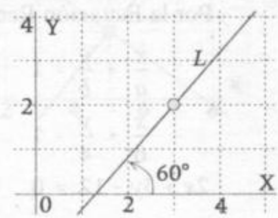
Considerando que la pendiente es la Tangente del ángulo de inclinación.

Si: $\theta = 60° \Rightarrow m = \tan\theta = \tan 60° = 1.73$

Utilizando la Ecuación del Punto-Pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 1.73(x - 3) \Rightarrow 1.73x - y - 3.19 = 0$$



XV1.2.2 ÁNGULO ENTRE RECTAS

Si: m_1, m_2 son las pendientes de las Rectas: $L1$, $L2$; El ángulo ϕ, entre ambas Rectas, se calcula por:

$$\phi = \arctan\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

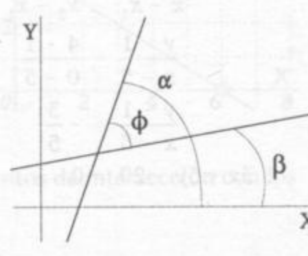
De acuerdo a la gráfica adjunta, se verifica la relación:

$$\tan\phi = \tan(\alpha - \beta) \; ; \quad \tan\alpha = m_1 \quad \tan\beta = m_2$$

$$\tan\phi = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow \phi = \arctan\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Por la fórmula de la tangente de una resta de ángulos, reemplazando y despejando ϕ.



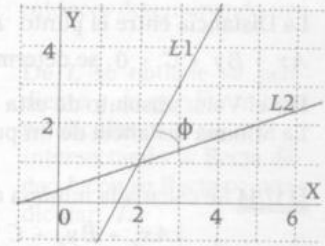
Ej 17.11 Se halla el ángulo entre las Rectas $L1: 2x - y - 3 = 0$; $L2: x - 3y + 1 = 0$

Se determinan las pendientes de las Rectas y se aplican las correspondientes Fórmulas:

$$L1:\ 2x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow m_1 = 2$$

$$L2:\ x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{3}$$

$$\phi = \arctan\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \arctan\frac{2 - 1/3}{1 + 2\cdot 1/3} = \arctan 1 = 45°$$



XVII.2.4 PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Dos Rectas son Paralelas (∥), cuando sus ángulos de inclinación son iguales entre si, esto significa que también serán iguales sus pendientes entre sí.

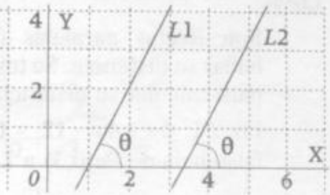
Ej 17.12 Las Rectas: $L1$, $L2$ son Paralelas (∥) $L1: 2x - y - 2 = 0$; $L2: 4x - 2y - 13 = 0$

Para verificar, se determinan sus pendientes

$$L1:\ 2x - y - 2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$L2:\ 4x - 2y - 13 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{-2} = 2$$

Como: $m_1 = m_2$, entonces las Rectas son Paralelas.



Dos Rectas son Perpendiculares , cuando sus ángulos de inclinación comprenden entre sí un ángulo de 90°, entonces por el Cap. XVII.2.2 se tiene:

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \quad \text{Si: } \phi = 90° \Rightarrow \tan 90° = \infty$$

$$\infty = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow 1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Por tanto si las Rectas poseen pendientes que cumplan con: $m_1 = -1/m_2$; son Rectas Perpendiculares entre sí.

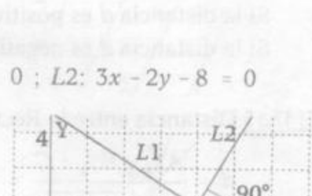
Ej 17.13 Las Rectas $L1$, $L2$ son Perpendiculares (⊥) $L1: 2x + 3y - 14 = 0$; $L2: 3x - 2y - 8 = 0$

Para verificar, se determinan sus pendientes:

$$L1:\ 2x + 3y - 14 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{3}$$

$$L2:\ 3x - 2y - 8 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Como: $m_1 = 1/m_2$ Por tanto son Perpendiculares



17.3 De la Recta: $2x - 5y + 3 = 0$ Hallar su Paralela por $P1(7,2)$, su Perpendicular por $P2(3,4)$

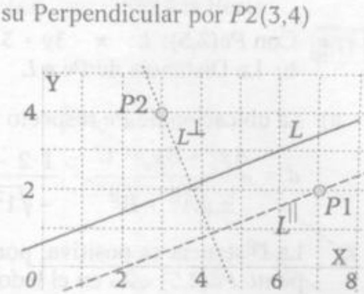
$$L:\ 2x - 5y + 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-5} = \frac{2}{5}$$

La Recta Paralela con: $m^{\parallel} = m = 2/5$

$$y - y_1 = m\ (x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \frac{2}{5}(x - 7) \Rightarrow 2x - 5y - 4 = 0$$

La Recta Perpendicular con $m^{\perp} = -1/m = -5/2$

$$y - y_2 = m^{\perp}(x - x_2) \Rightarrow y - 4 = -\frac{5}{2}(x - 3) \Rightarrow 5x + 2y - 23 = 0$$



XVII.2.5 DISTANCIA DE PUNTO A RECTA

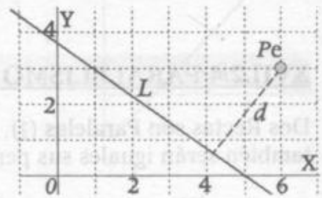
$$d = \left| \frac{Ax_e + By_e + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

La Distancia entre el punto $Pe(x_e, y_e)$ a la Recta: $Ax + By + C = 0$, se determina por:

Por el Valor absoluto de esta fórmula, la Distancia, siempre será positiva.
La Mínima distancia de un punto a una Recta sigue una trayectoria perpendicular a la Recta.

Ej 17.14 Se calcula la mínima distancia entre el punto $Pe(6,3)$ a la Recta L: $3x + 4y - 15 = 0$

$$d = \left| \frac{Ax_e + By_e + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 - 15}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = 3$$

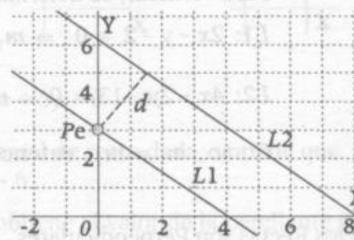


Se toma: $A = 3$, $B = 4$, $C = -15$, $x_e = 5$, $y_e = 3$
En otro caso, si se tratara de calcular la Distancia de Recta al Origen de coordenadas, se toma como Pe al Origen $(0,0)$

17.4 Entre las Rectas: $L1$: $3x + 4y - 12 = 0$; $L2$: $6x + 8y - 45 = 0$; Hallar la Mínima distancia.

Son Rectas paralelas (Misma pendiente). Para hallar su distancia. Se toma un punto de una Recta, para calcular su distancia respecto a la otra Recta.
En $L1$: $3x + 4y - 12 = 0$; Si: $x = 0 \Rightarrow y = 3$
Distancia de $Pe(0,3)$ a $L2$: $6x + 8y - 45 = 0$

$$d = \left| \frac{Ax_e + By_e + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{6 \cdot 0 + 8 \cdot 3 - 45}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \right| = 2.1$$



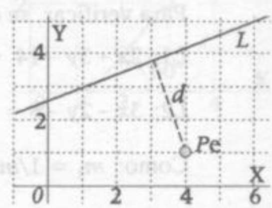
Cuando interesa saber si el punto $Pe(x_e,y_e)$ con respecto a la Recta L está en el mismo lado que el Origen de coordenadas $Po(0,0)$; se usa la Fórmula:

$$d = \frac{Ax_e + By_e + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

El signo a tomarse de la raíz, debe ser contrario al signo de: C
Si la distancia d es positiva, $Pe(x_e,y_e)$ está en el otro lado de la Recta que el origen $Po(0,0)$
Si la distancia d es negativa, $Pe(x_e,y_e)$ está en el mismo lado de la Recta que el origen $Po(0,0)$

Ej 17.15 Distancia entre la Recta L: $2x - 5y + 13 = 0$ Hasta $Pe(4,1)$

$$d = \frac{Ax_e + By_e + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{2 \cdot 4 + (-5)1 + 13}{-\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = -2.97$$

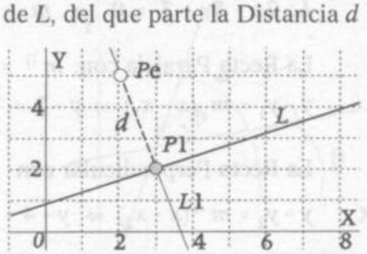


Como la distancia es negativa, entonces el punto $P_e(4,1)$ está en el mismo lado que el origen $Po(0,0)$. De la raíz se tomó el signo negativa, porque C es positivo.

17.5 Con $Pe(2,5)$; L: $x - 3y + 3 = 0$; determinar: a) Si Pe está en el mismo lado que el origen b) La Distancia de Pe a L c) El punto P_1 de L, del que parte la Distancia d

a) La ubicación de Pe respecto a L

$$d = \frac{Ax_e + By_e + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 3}{-\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = 3.16$$



La Distancia es positiva, por tanto respecto a L el punto $Pe(2,5)$ está en el lado opuesto al origen.

b) La distancia de Pe a L es la calculada anteriormente en Valor absoluto $d = |3.16| = 3.16$

c) La distancia antes calculada posee una trayectoria perpendicular a L; entonces determinando una Recta perpendicular a: L (Ver XVII.2.4); que pase por $Pe(2,5)$

$$x - 3y + 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \Rightarrow m^{\perp} = -\frac{1}{m} = -3$$

De L se obtiene su pendiente y su pendiente perpendicular.

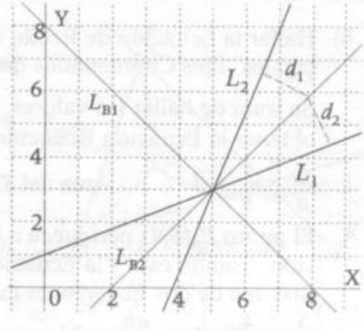
$$y - y_e = m^{\perp}(x - x_e) \Rightarrow y - 5 = -3(x - 2) \Rightarrow L1\text{: } 3x + y - 11 = 0$$

Intersectando la Recta dada: L con su Recta perpendicular: $L1$

$$\left.\begin{array}{l} L\text{: } x - 3y + 3 = 0 \\ L1\text{: } 3x + y - 11 = 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array} \Rightarrow P_1(3,2)$$

17.6 Hallar las Ecuaciones de las Bisectrices a: $2x - 5y + 5 = 0$; $5x - 2y - 19 = 0$

Una Bisectriz entre Rectas, tendrá puntos situados a la misma distancia de ambas Rectas. Si $P(x,y)$ pertenece a la Recta Bisectriz sus distancias a $L1$, $L2$ son:



De $P(x,y)$ a $L1$ $\quad 2x - 5y + 5 = 0$ $\qquad d_1 = \dfrac{2x - 5y + 5}{\pm\sqrt{29}}$

De $P(x,y)$ a $L2$ $\quad 5x - 2y - 19 = 0$ $\qquad d_2 = \dfrac{5x - 2y - 19}{\pm\sqrt{29}}$

$$\text{Si: } d_1 = d_2 \Rightarrow \frac{2x - 5y + 5}{\pm\sqrt{29}} = \frac{5x - 2y - 19}{\pm\sqrt{29}}$$

Igualando las distancias y simplificando. De acuerdo a los signos de las raíces, las bisectrices son: L_{B1}: $x + y - 8 = 0$, L_{B2}: $x - y - 2 = 0$

HAZ DE RECTAS Para determinar una Recta, se precisan de al menos dos datos o características. Si solo se dispone de un dato, se determinará un Haz de Rectas, o Familia de Rectas, las que entre sí presentan un dato o característica común.

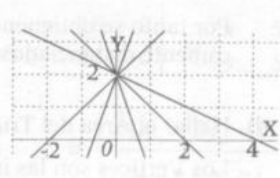
Ej 17.16 a) $y = 2x + c$

Es una Familia de Rectas, que tienen por dato común su pendiente: $m = 2$. Las Rectas toman valores diferentes de Ordenada al Origen (c)

b) $y = c\,x + 2$

Es una Familia de Rectas, que tienen por dato común, su Ordenada al Origen ($b = 2$)

Las Rectas pueden tomar valores diferentes de pendiente.



17.7 Hallar las Ecuaciones de la Familia de Rectas (O Haz de Rectas), paralelas a la Recta: $3x + 4y - 12 = 0$, que disten: c unidades de ella.

De la distancia de Punto a Recta: (XVII.2.5)

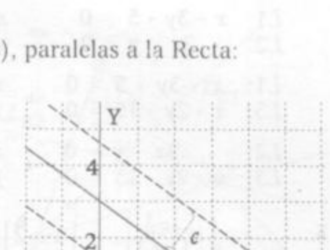
$$d = \frac{Ax_e + By_e + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Tomando: $(x_e, y_e) = (x,y)$ un punto cualquiera, considere que la distancia es: $d = c$

$$c = \frac{3x + 4y - 12}{\pm\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3x + 4y - 12}{\pm 5}$$

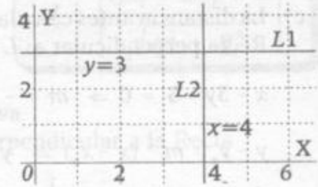
$$\Rightarrow 3x + 4y - 12 \pm 5c = 0$$

Por tanto la Familia de Rectas (Dos) se expresa en términos de c.



XVII.2.7 PROBLEMAS DIVERSOS DE LA RECTA

17.8 a) Graficar las Rectas $L1: \; y - 3 = 0$; $L2: 2x - 8 = 0$



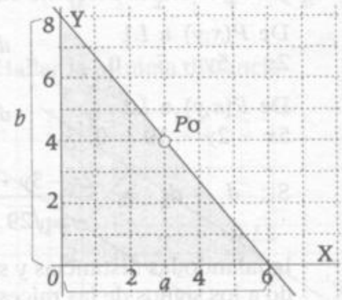
En $L1$: $y - 3 = 0$; se observa que la Ecuación es independiente de la variable x, por tanto su gráfica es paralela al Eje X. Si $L1: \; y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

Su pendiente $m = 0$, Ángulo: $\theta = \arctan 0 = 0°$

En $L2$: $2x - 8 = 0$; la Ecuación es independiente de y ; por tanto paralela al Eje Y $\quad L2: \; 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \; \Rightarrow m = 1/0 = \infty \quad \Rightarrow \theta = \arctan \infty = 90°$

En general las Rectas de la forma: $y = b$, son Rectas paralelas al Eje X (Horizontales)
Las Rectas de la forma $x = a$; son Rectas paralelas al Eje Y (Verticales)

b) Hallar la Ecuación de Recta, que pasa por el punto $P_0(3,4)$; formando un Triángulo de Área 24, con los Ejes Coordenados del Primer Cuadrante.



Se trata de hallar los valores a, b (Ver la gráfica) para obtener la Ecuación Reducida de la Recta:

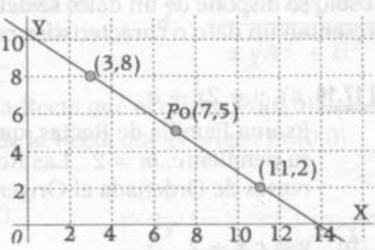
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{Área del Triangulo: } A = \frac{ab}{2} = 24$$

El punto $P_0(3,4)$ pertenece a la Recta, satisface su Ecuación, usando ésta y la Ecuación de Área, se obtiene un Sistema de dos Ecuaciones cuyas incógnitas son: a, b

$$\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = 1 \; ; \; \frac{ab}{2} = 24 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$$

$$\Rightarrow a = 6 \; ; \; b = 8 \qquad\qquad 4x + 3y - 24 = 0$$

c) Dado el punto $P_0(7,5)$ que pertenece a la Recta L: $3x + 4y - 41 = 0$; hallar otro punto P sobre la Recta L, que diste 5 unidades de P_0



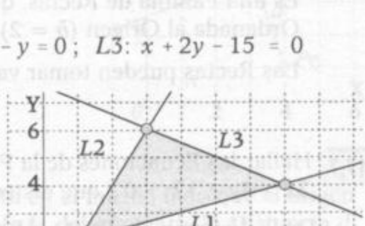
Armando un Sistema de dos Ecuaciones con dos Incógnitas, entre la Ecuación de distancia entre dos puntos que es igual a 5 y la Ecuación de la Recta L.

$$\begin{array}{ll} d = \sqrt{(x-7)^2 + (y-5)^2} = 5 & \\ L: \qquad 3x + 4y - 41 = 0 & \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 11 \;\Rightarrow\; y = 2 \\ x = 3 \;\Rightarrow\; y = 8 \end{array}$$

Por tanto se obtienen 2 puntos: (11,2); (3,8) simétricamente distanciados de P_0 en 5 unidades.

d) Hallar el Área del Triángulo entre $L1$: $x - 3y + 5 = 0$; $L2$: $2x - y = 0$; $L3$: $x + 2y - 15 = 0$

Los Vértices son las intersecciones entre Rectas:



$$\begin{array}{l} L1: \; x - 3y + 5 = 0 \\ L2: \quad 2x - y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array} \Rightarrow P1(1,2)$$

$$\begin{array}{l} L1: \; x - 3y + 5 = 0 \\ L3: \; x + 2y - 15 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 4 \end{array} \Rightarrow P2(7,4)$$

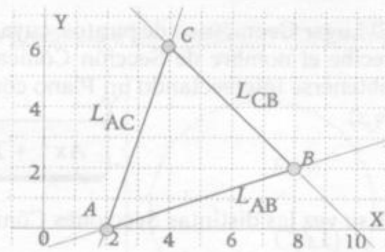
$$\begin{array}{l} L2: \quad 2x - y = 0 \\ L3: \; x + 2y - 15 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 6 \end{array} \Rightarrow P3(3,6)$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[(1 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 3 \cdot 2) - (2 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1)\right] = \frac{1}{2}[52 - 32] = 10$$

El Área del Triángulo, ubicado entre tres puntos se halla a través de un Determinante.

e) Hallar las Ecuaciones de los Lados del Triángulo ubicado entre los puntos: $A(2,0)$; $B(8,2)$; $C(4,6)$; Hallar luego el Baricentro, Ortocentro e Incentro.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ Ecuaciones de los lados, por la Ecuación de Dos puntos:



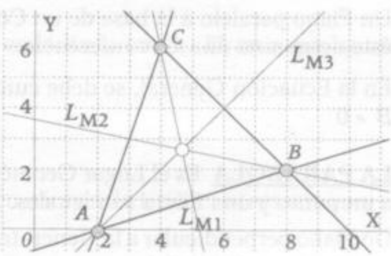
$A(2,0)$ $B(8,2)$ L_{AB}: $\dfrac{y - 0}{x - 2} = \dfrac{2 - 0}{8 - 2} \Rightarrow x - 3y - 2 = 0$

$A(2,0)$ $C(4,6)$ L_{AC}: $\dfrac{y - 0}{x - 2} = \dfrac{6 - 0}{4 - 2} \Rightarrow 3x - y - 6 = 0$

$B(8,2)$ $C(4,6)$ L_{BC}: $\dfrac{y - 2}{x - 8} = \dfrac{6 - 2}{4 - 8} \Rightarrow x + y - 10 = 0$

El **Baricentro** es el Punto de Intersección de las Medianas, cuyas Ecuaciones se determinan entre un Punto medio de dos Vértices y el Vértice opuesto.

El Punto medio entre los Vértices: A, B es: $\overline{P_{AB}}(5,1)$.



Entre este Punto medio y el Vértice opuesto $C(4,6)$, se halla la Ecuación de L_{M1} entre dos puntos. Similarmente se obtienen: L_{M2}, L_{M3}

L_{M1}: $\dfrac{y - 1}{x - 5} = \dfrac{6 - 1}{4 - 5} \Rightarrow 5x + y - 26 = 0$

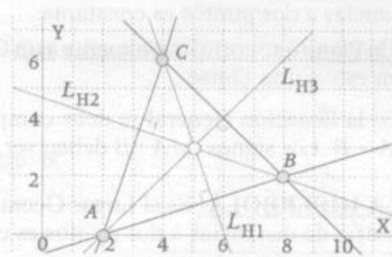
L_{M2}: $x + 5y - 18 = 0$; L_{M3}: $x - y - 2 = 0$

En la intersección de dos de las Medianas está el Baricentro, este punto se halla resolviendo el Sistema:

$$\left.\begin{array}{l} L_{M1}:\ 5x + y = 26 \\ L_{M2}:\ x + 5y = 18 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x = 14/3 \\ y = 8/3 \end{array}$$

Ortocentro es el Punto de intersección de las Alturas, éstas se determinan usando una Recta Perpendicular a un lado, que pase por el Vértice opuesto.

Si: L_{AB}: $x - 3y - 2 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{1}{3} \Rightarrow m = -3$



El Vértice opuesto es $C(4,6)$, para la Perpendicular a: L_{AB} se usa la Ecuación de Punto-Pendiente.

$y - y_o = m\ (x - x_o)$; $m = -3$; $P_o(4,6)$

$y - 6 = -3(x - 4) \Rightarrow L_{H1}$: $3x + y = 18$

Similarmente L_{H2}: $x + 3y = 14$; L_{H2}: $x - y = 2$

Intersectando entre dos de las Alturas, se obtiene el Ortocentro.

$$\left.\begin{array}{l} L_{H1}:\ 3x + y - 18 = 0 \\ L_{H2}:\ x + 3y - 14 = 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 3 \end{array}$$

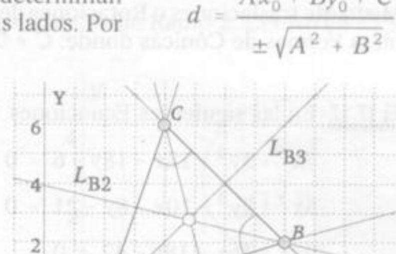
Incentro es Punto de intersección de Bisectrices, las que se determinan con el concepto de que se encuentran a igual distancia de sus lados. Por la Ecuación de distancia de punto a Recta:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Entre: L_{AB}, L_{AC} $\quad \dfrac{1x - 3y - 2}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \dfrac{3x - 1y - 6}{-\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$: L_{B3}

Entre: L_{AB}, L_{BC} $\quad \dfrac{1x - 3y - 2}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \dfrac{1x + 1y - 10}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$: L_{B2}

Entre: L_{AC}, L_{BC} $\quad \dfrac{3x - 1y - 6}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \dfrac{1x + 1y - 10}{-\sqrt{1^2 + 1^2}}$: L_{B1}



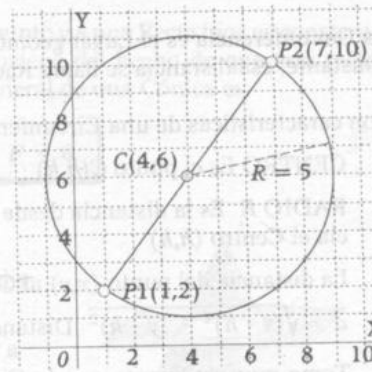
El Punto de intersección entre dos de las Rectas Bisectrices es el Incentro: $x = 4.76$; $y = 2.76$

En las Ecuaciones de distancia se toman signos de modo que el punto quede dentro del Triángulo

17.9 Hallar la Ecuación y gráfica de Circunferencia, que posee un Diámetro entre $P1(1,2)$; $P2(7,10)$

La distancia entre los puntos $P1$, $P2$; determinará el Diámetro de la Circunferencia, la mitad de tal Diámetro es el Radio.

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (10-2)^2}$$
$$= 10 \Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow R = 5$$



El Punto medio entre $P1$, $P2$ es el Centro:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+7}{2} = 4 \; ; \; \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+10}{2} = 6$$

Luego $C(h,k) = (4,6)$; Reemplazando en la Ecuación de Circunferencia con Centro en (h,k)

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \Rightarrow (x-4)^2 + (y-6)^2 = 5^2$$

Ej 17.20 Se completan cuadrados en: a) $x^2 + bx$; b) $x^2 + 8x$; c) $x^2 - 5x$

Completar Cuadrados, es el procedimiento algebraico, que procura presentar a una Expresión algebraica, como un Binomio al cuadrado, bajo los siguientes pasos:

a) Si: $x^2 + bx$ — Considerando que la variable es: x , el coeficiente lineal es: b

$(x + \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2$ — Se forma un binomio al cuadrado, tomando a la variable con la mitad del coeficiente lineal $(b/2)$, restando luego el cuadrado de esa mitad.

b) Si: $x^2 + 8x$

$(x + \frac{8}{2})^2 - (\frac{8}{2})^2$

$(x+4)^2 - 16$

c) Si: $x^2 - 5x$

$(x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2$

$(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$

Note que siempre se resta el cuadrado de la mitad, así sea que dentro del Binomio haya suma o resta.

Desarrollando los cuadrados y simplificando, las Expresiones pueden volver a su forma original.

Si bien existen otros métodos para Completar cuadrados, el método indicado es el más práctico. En las Cónicas de Geometría Analítica, éste es el método que se aplicará.

Ej 17.21 Se calcula el Centro y Radio de la Circunferencia: $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$

La Ecuación de Circunferencia está en su Forma general, para determinar su Centro y su Radio es preciso Completar cuadrados, para sus dos variables: x, y llevando la Ecuación a la Forma de Centro en el punto: (h,k)

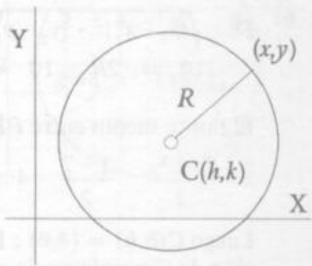
$x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$	Ecuación original, Forma General
$x^2 - 6x \quad + y^2 - 10y = 2$	Ordenando Términos, para: x, y
$(x-3)^2 - 3^2 + (y-5)^2 - 5^2 = 2$	Completando cuadrados, para cada una de las variables.
$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 36$	Reordenando y simplificando
$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 6^2$	Expresando al cuadrado: $36 = 6^2$
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$	Comparando con la Ecuación General de Circunferencia.
$\Rightarrow h = 3 \; ; \; k = 5 \; ; \; R = 6$	Así se obtiene que el Centro es $(3,5)$; El Radio es 6.

De la Ecuación General de Circunferencia: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, Completando cuadrados se demuestra que:

$$(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = \left(\sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}\right)^2 \Rightarrow C(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}) \; ; \; R = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$$

XVII.4 LA CIRCUNFERENCIA

La Circunferencia es el Lugar geométrico de puntos (x,y); cuya distancia a un punto fijo (Centro) es constante, esa distancia se llama Radio (R)



Son características de una Circunferencia:

CENTRO Es el punto $C(h,k)$

RADIO R Es la distancia desde cualquier punto (x,y) hacia el Centro (h,k)

La distancia del punto (x,y) al Centro (h,k) se calcula por:

$d = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ Distancia que se llamará Radio.

Tome muy en cuenta que la Circunferencia propiamente es la línea curva. El área que queda encerrada por tal Circunferencia se llama Círculo.

XVII.4.1 ECUACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA

De acuerdo a definición y características antes indicadas, las Ecuaciones de la Circunferencia son:

EC. DE CIRCUNFERENCIA CON CENTRO $C(h,k)$

Tomando la distancia entre $P(x,y)$ a $C(h,k)$ $\quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$

EC. DE CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL ORIGEN

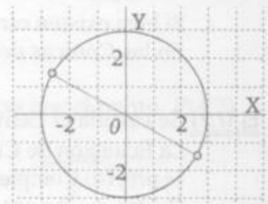
Tomando el Centro: $C(h,k) = (0,0)$ (Origen) $\quad x^2 + y^2 = R^2$

EC. GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

Desarrollando la 1^{era} Ecuación $\quad x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde: $D = -2h$; $E = -2k$; $F = h^2 + k^2 - R^2$

Ej 17.18 Hallar la Ecuación de la Circunferencia de Diámetro: 6, Centro en el Origen.

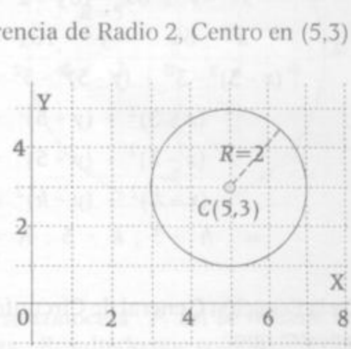


Considerando que todo Diámetro es el doble en longitud que su Radio: $D = 2R = 6 \Rightarrow R = 3$

Usando la Ecuación de Circunferencia de Centro en el Origen: $\quad x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2$

Ej 17.19 Hallar la Ecuación (Forma general) y gráfica de la Circunferencia de Radio 2, Centro en (5,3)

Usando la Ecuación de Circunferencia de Centro en (h,k), reemplazando los datos de $C(5,3)$; $R = 2$



$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-3)^2 = 2^2$

Desarrollando, se obtiene la Ecuación General

$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = 4$

$x^2 + y^2 + (-10)x + (-6)y + 30 = 0$

Comparando con: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Por tanto: $D = -10$; $E = -6$; $F = 30$

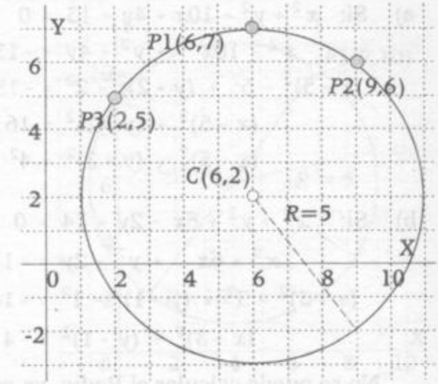
Para lograr la gráfica, se sitúa el Centro en el punto $C(5,3)$; El Radio es $R = 2$

17.12 Hallar la Ecuación de la Circunferencia que pasa por los puntos $P1(6,7)$; $P2(9,6)$; $P3(2,5)$

Se usa la Ecuación General de Circunferencia:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Reemplazando en ésta los puntos dados, se arma un Sistema, que permite el cálculo de: D, E, F



$P1(6,7)$ $6^2 + 7^2 + D\cdot 6 + E\cdot 7 + F = 0$

$P2(9,6)$ $9^2 + 6^2 + D\cdot 9 + E\cdot 6 + F = 0$

$P3(2,5)$ $2^2 + 5^2 + D\cdot 2 + E\cdot 5 + F = 0$

$$\begin{array}{ll} 6D + 7E + F = -85 & D = 12 \\ 9D + 6E + F = -117 \Rightarrow & E = 4 \\ 2D + 5E + F = -29 & F = -15 \end{array}$$

Resolviendo el Sistema de Ecuaciones.

Si: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 15 = 0$

$x^2 - 12x \quad + y^2 - 4y = -15$

$(x-6)^2 - 6^2 + (y-2)^2 - 2^2 = 25$

$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 5^2$

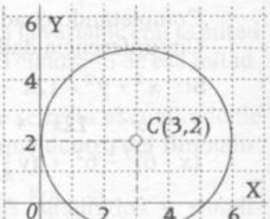
Completando Cuadrados en la Ecuación General de Circunferencia, se tiene:

$\Rightarrow C(6,2)$; $R = 5$

17.13 Hallar las Ecuaciones de Circunferencia que satisfacen las siguientes condiciones:

a) Centro en el punto (3,2), Tangente al Eje de Ordenadas.

Como la Circunferencia es Tangente al Eje de Ordenadas, de Centro en: (3,2); Entonces el Radio es: 3



En la gráfica se aprecia que la Intersección entre la Circunferencia y el Eje Y se verifica en un solo punto, por ello se dice que es Tangente.

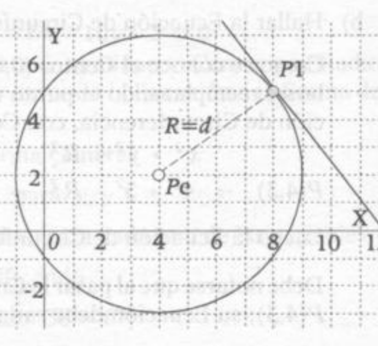
Utilizando la Ecuación con Centro en: (h,k)

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

b) Hallar la Ecuación de Circunferencia con Centro $C(4,2)$; Tangente a la Recta: $4x + 3y - 47 = 0$

La distancia de la Recta al Centro, será el Radio de la Circunferencia.

La distancia entre punto $Pe(x_e,y_e) = C(h.k) = C(4,2)$ a la Recta: $4x + 3y - 47 = 0$ es:



$$d = \left| \frac{Ax_e + By_e + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{4\cdot 4 + 3\cdot 2 - 47}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right| = 5$$

El Radio $R=d=5$. Por la Ecuación de Centro (h,k)

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \Rightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

La Recta dada al ser Tangente a la Circunferencia (Intersectándola en un solo punto) determina que el Radio entre el Centro hasta el Punto de Intersección ($P1$) es perpendicular a la Recta, por tanto se constituirá en la trayectoria de la distancia mínima del Centro a la Recta. Note que en la evaluación de la distancia se toma el Valor Absoluto.

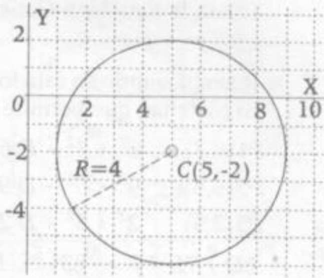
NOTA En el libro de GEOMETRÍA ANALÍTICA, del mismo autor, se hace un estudio extensivo de las Rectas tangentes y su modo geométrico de obtención.

17.10 Graficar las Circunferencias: a) $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 13 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 14 = 0$

a) Si: $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$

$$x^2 - 10x \quad + y^2 + 4y = -13$$
$$(x-5)^2 - 5^2 + (y+2)^2 - 2^2 = -13$$
$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 16$$
$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4^2$$

Completando cuadrados se conoce que El Centro está en $C(5,-2)$; El Radio es: 4



b) Si: $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 14 = 0$

$$x^2 + 6x \quad + y^2 - 2y = -14$$
$$(x+3)^2 - 3^2 + (y-1)^2 - 1^2 = -14$$
$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = -4$$

No existe gráfica de la segunda Circunferencia, porque ésta no existe.

No se puede calcular el Radio, ya que ningún número real elevado al cuadrado determina -4
La suma de dos Expresiones al cuadrado (Positivas siempre), será positiva, no pueden determinar un negativo (-4).

17.11 a) Hallar la Ecuación de la Circunferencia de Radio: $R = 5$; concéntrica a la Circunferencia de Ecuación: $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$

Completando cuadrados, para hallar el Centro de la Circunferencia dada.

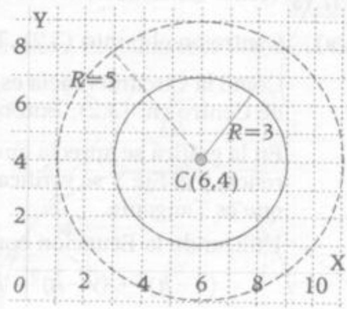
Si: $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$

$$x^2 - 12x \quad + y^2 - 8y = -43$$
$$(x-6)^2 - 6^2 + (y-4)^2 - 4^2 = -43$$
$$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 3^2$$

El Centro es (6,4) ; la nueva Circunferencia, usa el mismo Centro

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \Rightarrow (x-6)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

Dos Circunferencias son Concéntricas si poseen el mismo Centro.



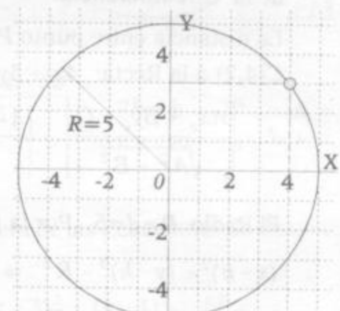
b) Hallar la Ecuación de Circunferencia, con Centro en el Origen, que pasa por el punto $P(4,3)$

Como se conoce el Centro (0,0); el Radio puede calcularse, reemplazando el punto dado: $P(4,3)$ en la Ecuación de Circunferencia, con Centro en el Origen.

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$P(4,3) \Rightarrow 4^2 + 3^2 = R^2 \Rightarrow R = 5$

Luego la Ecuación de Circunferencia es $x^2 + y^2 = 5^2$



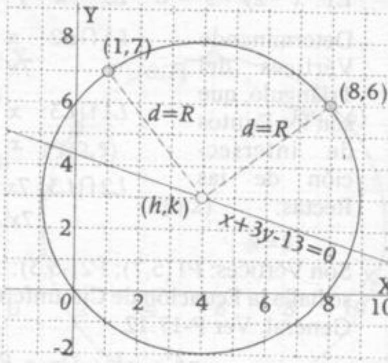
Debe notarse que al pasar la Circunferencia por el punto $P(4,3)$; su Ecuación debe satisfacerse en ese punto.

El anterior problema se resuelve también aplicando la Ecuación General de Circunferencia, cuando ésta tiene Centro en el Origen, cuya forma es:

$$x^2 + y^2 + F = 0$$
$$4^2 + 3^2 + F = 0 \Rightarrow F = -25$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 25 = 0$$

Reemplazando el punto, se conocerá F, así se obtiene la Ecuación General de Esfera. Resultado que coincide con lo anteriormente obtenido.

e) Hallar la Ecuación General de Circunferencia, que pasa por los puntos (8,6); (1,7). Su Centro está sobre la Recta $L: x + 3y - 13 = 0$



La distancia del punto (x,y) que está sobre la Circunferencia, al Centro (h,k) es el Radio

$$d = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = R$$

Se conocen dos puntos sobre la Circunferencia: (8,6); (1,7) reemplazando en (x,y) de la distancia:

$$\sqrt{(8-h)^2 + (6-k)^2} = R \ ; \ \sqrt{(1-h)^2 + (7-k)^2} = R$$

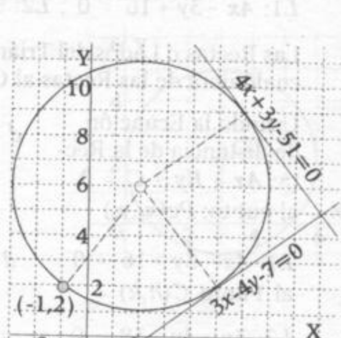
El Centro: (h,k) está sobre la Recta L por tanto satisface su Ecuación, reemplazando:

$$L: \ x + 3y - 13 = 0 \ \Rightarrow \ h + 3k - 13 = 0$$

Formando y resolviendo un Sistema de Ecuaciones. Luego se reemplaza en la Ecuación de Circunferencia, Centro (h,k)

$$\begin{aligned} \sqrt{(8-h)^2 + (6-k)^2} &= R \\ \sqrt{(1-h)^2 + (7-k)^2} &= R \\ h + 3k - 13 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} h &= 4 \\ k &= 3 \\ R &= 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= R^2 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 &= 5^2 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y &= 0 \end{aligned}$$

f) Hallar la Ecuación de Circunferencia que pasa por el punto $P(-1,2)$ La Circunferencia es Tangente a las Rectas: $4x + 3y - 51 = 0$; $3x - 4y - 7 = 0$



La distancia del Centro $C(h,k)$ a las Rectas Tangentes dadas es el Radio (Distancia de Recta a punto), reemplazando $(x_e, y_e) = (h,k)$

$$d = \frac{Ax_e + By_e + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = R$$

$$\frac{3h - 4k - 7}{\pm\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = R \quad ; \quad \frac{4h + 3k - 51}{\pm\sqrt{4^2 + 3^2}} = R$$

El punto dado $P(-1,2)$ al estar sobre la Circunferencia, satisface su Ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \ \Rightarrow \ (-1-h)^2 + (2-k)^2 = R^2$$

Formando un Sistema de Ecuaciones, resolviendo.

$$\begin{aligned} \frac{3h - 4k - 7}{5} &= R \\ \frac{4h + 3k - 51}{5} &= R \\ (-1-h)^2 + (2-k)^2 &= R^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} h &= 2 \ ; \ h = -\frac{538}{25} \\ k &= 6 \ ; \ k = \frac{234}{25} \\ R &= 5 \ ; \ R = \frac{109}{25} \end{aligned}$$

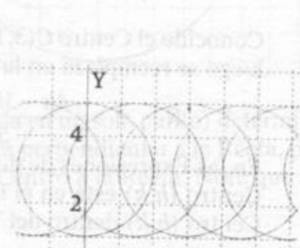
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$$

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 5^2$$

$$\left(x + \frac{538}{25}\right)^2 + \left(y - \frac{234}{25}\right)^2 = \left(\frac{109}{25}\right)^2$$

Dos soluciones suponen dos Circunferencias, la gráfica muestra solo una de ellas.

g) Hallar la Ecuación, gráfica de la Familia de Circunferencias de Radio $R = 2$, Centro en $C(c,3)$



Reemplazando en la Ecuación de Circunferencia:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$$

$$(x-c)^2 + (y-3)^2 = 2^2$$

$$x^2 + y^2 - 2cx - 6y + 5 + c^2 = 0$$

La gráfica representa a algunas de las infinitas Circunferencias todas de Radio 2; de centro a altura de $y = 3$.

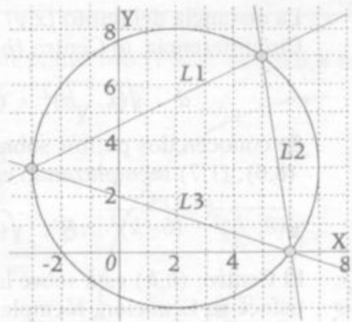
c) Hallar la Ecuación de Circunferencia, que circunscribe al Triángulo ubicado entre las Rectas:
$L1: x - 2y + 9 = 0$; $L2: 7x + y - 42 = 0$; $L3: x + 3y - 6 = 0$

Determinando Vértices del Triángulo, que son los Puntos de intersección de las Rectas:

$$L1 \cap L2: \begin{matrix} x - 2y + 9 = 0 \\ 7x + y - 42 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 5 \\ y = 7 \end{matrix}$$

$$L1 \cap L3: \begin{matrix} x - 2y + 9 = 0 \\ x + 3y - 6 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = -3 \\ y = 3 \end{matrix}$$

$$L2 \cap L3: \begin{matrix} 7x + y - 42 = 0 \\ 7x + y - 42 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 6 \\ y = 0 \end{matrix}$$



Son Vértices: $P1(5,7)$; $P2(-3,3)$; $P3(6,0)$ Con tres puntos, se halla la Ecuación de Circunferencia, usando su Forma General. Ver P-17.12

$$\begin{matrix} & x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ P1(5,7) & 5^2 + 7^2 + D\cdot 5 + E\cdot 7 + F = 0 \\ P2(-3,3) & (-3)^2 + 3^2 + D(-3) + E\cdot 3 + F = 0 \\ P3(6,0) & 6^2 + 0^2 + D\cdot 6 + E\cdot 0 + F = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} D = -4 \\ E = -6 \\ F = -12 \end{matrix}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

Completando Cuadrados

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

Otro modo de resolución es calculando el Circuncentro (Intersección de Mediatrices)

d) Hallar la Ecuación de la Circunferencia, inscrita en el Triángulo, ubicado entre las Rectas:
$L1: 4x - 3y + 16 = 0$; $L2: 3x + 4y - 38 = 0$; $L3: y + 4 = 0$

Las Rectas o Lados del Triángulo serán Tangentes a la Circunferencia. El Radio es la distancia de cualquiera de las Rectas al Centro.

Usando la Ecuación de distancia de la Recta: $Ax + By + C = 0$ al punto: $Pe(x_e, y_e)$

$$d = \frac{Ax_e + By_e + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$L1: 4x - 3y + 16 = 0$ al Punto $C(h,k)$

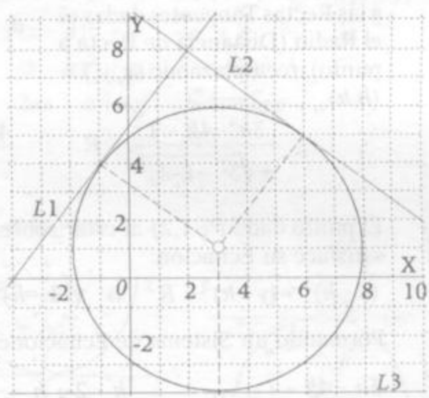
$$d = \frac{4h - 3k + 16}{-\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$L2: 3x + 4y - 38 = 0$ al Punto $C(h,k)$

$$d = \frac{3h + 4k - 38}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$L3: y + 4 = 0$ al Punto $C(h,k)$

$$d = \frac{0\cdot h + 1\cdot k - 38}{-\sqrt{0^2 + 1^2}}$$



Igualando entre si las Expresiones de distancia al Centro, resolviendo el Sistema:

$$\begin{matrix} \dfrac{4h - 3k + 16}{-5} = \dfrac{3h + 4k - 38}{5} \\ \dfrac{4h - 3k + 16}{-5} = \dfrac{k + 4}{-1} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 7h + k = 22 \\ 4h - 8k = 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} h = 3 \\ k = 1 \end{matrix}$$

Conocido el Centro $C(3,1)$; se halla el Radio, aplicando cualquiera de las Ecuaciones de distancia, luego se reemplaza en la Ecuación de Circunferencia.

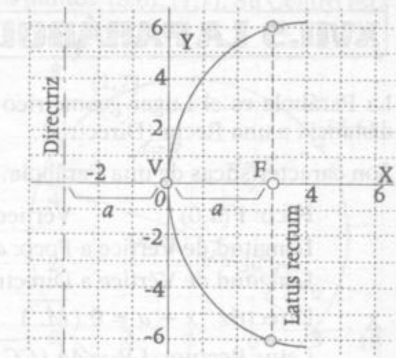
$$R = d = \left|\frac{4h - 3k + 16}{5}\right| = \left|\frac{4\cdot 3 - 3\cdot 1 + 16}{5}\right| = 5 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$$

En las Expresiones de distancia, los signos de los radicales, se eligen de manera que indique si el Centro (h,k) está en el mismo u opuesto lado que el Origen (Ver Ej 17.15), solo así se ubica el Centro (h,k) dentro del Triángulo.

Otro modo de resolución consiste en hallar el Incentro del Triángulo (P-17.16) o Intersección de las Bisectrices. El Incentro es el Centro de la Circunferencia Inscrita.

Ej 17.22 Se analizan características y gráfica de Parábolas:

a) $y^2 = 12x$



Determinando la Longitud: a

Forma general: $y^2 = 4ax$

Ecuación dada: $y^2 = 12x$

$\Rightarrow 4a = 12$

$a = 3$

x	$y = \pm\sqrt{12x}$
0	0
1	± 3.46
2	± 4.90
3	± 6
-1	$\nexists$

Vértice: V(0,0)

Foco: F(a,0) = F(3,0)

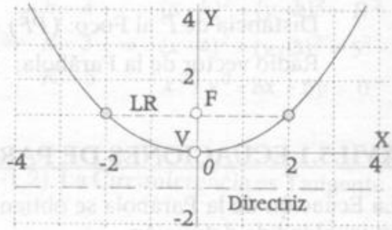
Eje: Eje paralelo a X

Directriz: $x + a = 0$

$x + 3 = 0$

Latus Rectum: $4a = 12$ La gráfica se verifica con algunos puntos.

b) $x^2 = 4y$



Determinando la longitud: a

Forma general: $x^2 = 4ay$ $\Rightarrow$ $4a = 4$

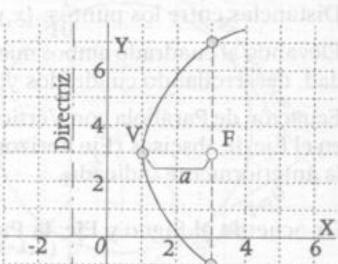
Ecuación dada: $x^2 = 4y$ $a = 1$

Vértice: V(0,0) Foco: F(0,a) = F(0,1)

Eje: Eje Y Directriz: $y + a = 0$

Latus Rectum: $4a = 4$ $y + 1 = 0$

c) $(y - 3)^2 = 8(x - 1)$



Determinando la Longitud: a (Ver XVII.5.1)

Forma general: $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ $\Rightarrow 4a = 8$

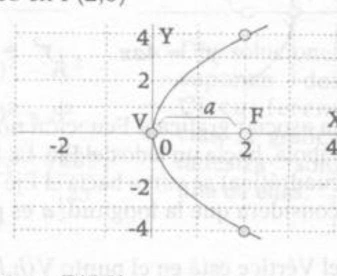
Ecuación dada: $(y - 3)^2 = 8(x - 2)$ $a = 2$

Vértice: V(h,k) = (1,3) Foco: F(h+a,k) = F(3,3)

Eje: Paralelo a X Directriz: $x - h + a = 0$

Latus Rectum: $4a = 8$ $x + 1 = 0$

Ej 17.23 a) Hallar la Ecuación de Parábola de Vértice en V(0,0) ; Foco en F(2,0)



Ubicando el Vértice y Foco, se concluye que el Eje de la Parábola coincide con el Eje X.

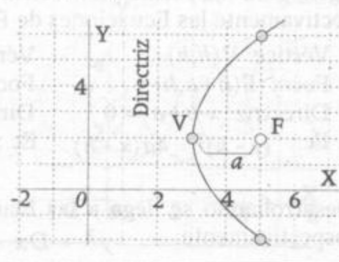
Es conveniente bosquejar una gráfica a partir de V

La longitud entre Vértice y Foco es: $a = 2$

Como el Vértice está en el Origen, la Ecuación es:

$y^2 = 4ax \Rightarrow y^2 = 4 \cdot 2x \Rightarrow y^2 = 8x$

b) Hallar la Ecuación de la Parábola de Vértice en: V(3,2) ; Foco en F(5,2)



Ubicando el Vértice y Foco, se concluye que el Eje de la Parábola es paralelo al Eje X

La longitud: a entre el Vértice y Foco, es $a = 2$

El Vértice está en (h,k), la Ecuación es: (Por XVII.5.1)

$(y - k)^2 = 4a(x - h) \Rightarrow (y - 2)^2 = 8(x - 3)$

Llevando la Ecuación a su forma general, desarrollando:

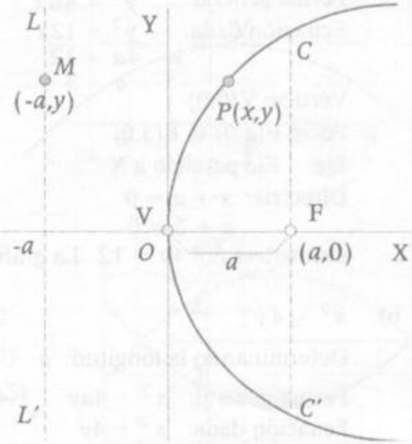
$$y^2 - 8x - 4y + 28 = 0$$

XVII.5 LA PARÁBOLA

La Parábola es el Lugar geométrico de puntos, cuya distancia a un punto fijo (Foco) es igual a la distancia a una Recta (Directriz).

Son características de una Parábola:

Foco: F$(a,0)$ Vértice: V$(0,0)$
Longitud de Vértice a Foco: a
Longitud de Vértice a Directriz: a
Directriz: $x + a = 0$ ($\overline{LL'}$)
Latus Rectum: LR = $4a$ ($\overline{CC'}$)
Eje de la Parábola: $\overline{OX}$: pasa por V y F
Distancia de P a la Directriz: ($\overline{PM}$)
Distancia de P al Foco: ($\overline{PF}$) $\Rightarrow$ $\overline{PF} = \overline{PM}$
Radio vector de la Parábola: $\overline{PF}$



XVII.5.1 ECUACIONES DE PARÁBOLA

La Ecuación de la Parábola se obtiene a partir de su igualdad de definición.

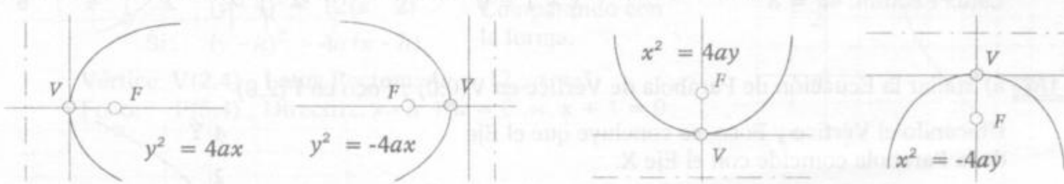
Distancias entre los puntos: (x,y); $(a,0)$; $(-a,y)$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, desarrollando cuadrados y simplificando.

Ecuación de Parábola con Vértice en el Origen, Eje en el Eje de abscisas (Eje horizontal); su gráfica es la anteriormente indicada.

$$\overline{PF} = \overline{PM}$$
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-(-a))^2 + (y-y)^2}$$
$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x + a$$
$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$y^2 = 4ax$$

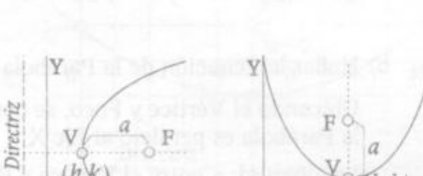
De acuerdo al Signo y Eje, la Parábola presenta otras formas, como ser:



Para asociar gráfica y Ecuación note: El Eje cuya variable es cuadrática, parece curvarse en forma de Parábola, hacia un lado del Eje. La 1[era] gráfica muestra que aparentemente el Eje Y (Que en su Ecuación es cuadrática) se curva hacia el Eje positivo de las abscisas X (Su Signo es positivo). En todos los casos se considera que la longitud: a es positiva.

Si el Vértice está en el punto V(h,k), diferente al origen, para Eje paralelo a abscisas y ordenadas, respectivamente las Ecuaciones de Parábola son:

Vértice: V(h,k)	Vértice: V(h,k)
Foco: F$(h+a,k)$	Foco: F$(h,k+a)$
Directriz: $x-h+a=0$	Directriz: $y-k+a=0$
Ec.: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$	Ec.: $(x-h)^2 = 4a(y-k)$



Desarrollando se llega a las Ecuaciones generales de Parábola, de Ejes paralelos a los Ejes X, Y respectivamente: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$; $x^2 + Dx + Ey + F = 0$

Ej 17.22 Se analizan características y gráfica de Parábolas:

a) $y^2 = 12x$

Determinando la Longitud: a

Forma general: $y^2 = 4ax$

Ecuación dada: $y^2 = 12x$

$\Rightarrow 4a = 12$

$a = 3$

Vértice: V(0,0)

Foco: $F(a,0) = F(3,0)$

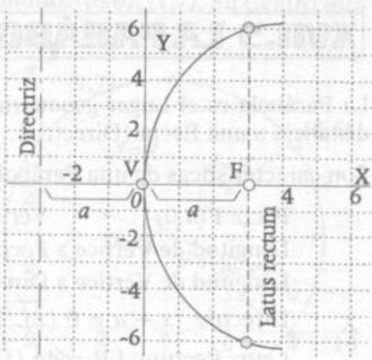
Eje: Eje paralelo a X

Directriz: $x + a = 0$

$x + 3 = 0$

Latus Rectum: $4a = 12$ La gráfica se verifica con algunos puntos.

x	$y = \pm\sqrt{12x}$
0	0
1	$\pm$ 3.46
2	$\pm$ 4.90
3	$\pm$ 6
-1	$\nexists$



b) $x^2 = 4y$

Determinando la longitud: a

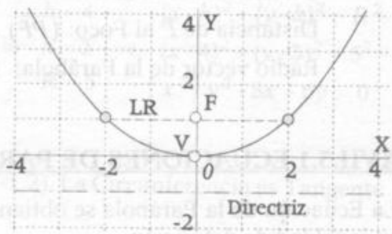
Forma general: $x^2 = 4ay$ $\Rightarrow$ $4a = 4$

Ecuación dada: $x^2 = 4y$ $a = 1$

Vértice: V(0,0) Foco: $F(0,a) = F(0,1)$

Eje: Eje Y Directriz: $y + a = 0$

Latus Rectum: $4a = 4$ $y + 1 = 0$



c) $(y - 3)^2 = 8(x - 1)$

Determinando la Longitud: a (Ver XVII.5.1)

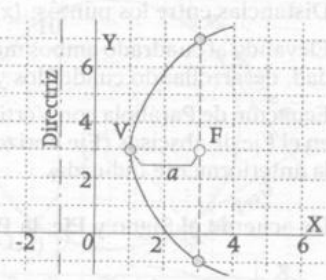
Forma general: $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ $\Rightarrow 4a = 8$

Ecuación dada: $(y - 3)^2 = 8(x - 2)$ $a = 2$

Vértice: $V(h,k) = (1,3)$ Foco: $F(h+a,k) = F(3,3)$

Eje: Paralelo a X Directriz: $x - h + a = 0$

Latus Rectum: $4a = 8$ $x + 1 = 0$



Ej 17.23 a) Hallar la Ecuación de Parábola de Vértice en V(0,0) ; Foco en F(2,0)

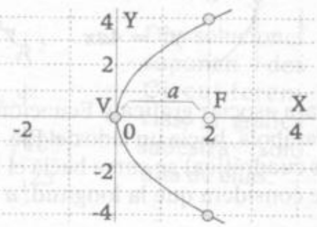
Ubicando el Vértice y Foco, se concluye que el Eje de la Parábola coincide con el Eje X.

Es conveniente bosquejar una gráfica a partir de V

La longitud entre Vértice y Foco es: $a = 2$

Como el Vértice está en el Origen, la Ecuación es:

$y^2 = 4ax \Rightarrow y^2 = 4{\cdot}2x \Rightarrow y^2 = 8x$



b) Hallar la Ecuación de la Parábola de Vértice en: V(3,2) ; Foco en F(5,2)

Ubicando el Vértice y Foco, se concluye que el Eje de la Parábola es paralelo al Eje X

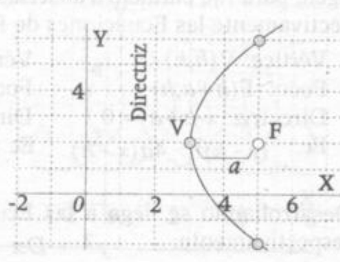
La longitud: a entre el Vértice y Foco, es $a = 2$

El Vértice está en (h,k), la Ecuación es: (Por XVII.5.1)

$(y - k)^2 = 4a(x - h) \Rightarrow (y - 2)^2 = 8(x - 3)$

Llevando la Ecuación a su forma general, desarrollando:

$y^2 - 8x - 4y + 28 = 0$



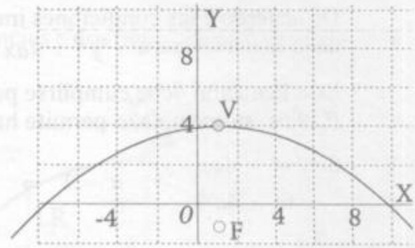
17.14 a) Hallar la Ecuación de Parábola de Vértice V(1,4); Foco F(1,-1)

Ubicando el Vértice y Foco, se concluye que el Eje de la Parábola es Paralelo al Eje Y.

La Longitud entre Vértice y Foco es: $a = 5$

Como el Vértice está en: $(h,k) = (1,4)$ es decir por encima del Foco, se concluye que su eje es paralelo a Y negativo, reemplazando en su Ecuación:

$$(x - h)^2 = -4a(y - k) \Rightarrow (x - 1)^2 = -20(y - 4)$$



b) Hallar la Ecuación de Parábola si su Latus rectum está entre los puntos (-2,3); (6,3)

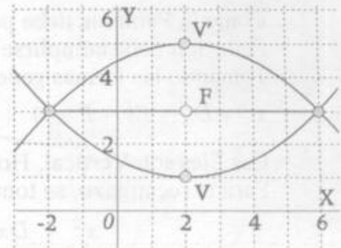
La longitud entre los puntos es: $LR = 4a = 8 \Rightarrow a = 2$

El Foco está en el Punto medio entre los puntos: F(2,3)

Por tanto los vértices están en: V(2,1) o también V'(2,5)

La ecuación que corresponde es: $(x - h)^2 = 4a\,(y - k)$

$$(x - 2)^2 = 8\,(y - 1) \quad \text{o también} \quad (x - 2)^2 = -8\,(y - 5)$$



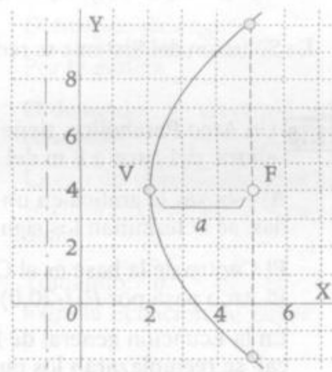
c) Determinar las características y gráfica de la Parábola: $y^2 - 12x - 8y + 40 = 0$

Para obtener las características, es preciso Completar cuadrados (Ver Ej-17.20) a los términos con variable y

$y^2 - 12x - 8y + 40 = 0$	Ecuación dada
$y^2 - 8y \quad - 12x = -40$	Reordenando
$(y - 4)^2 - 4^2 - 12x = -40$	Completando
$(y - 4)^2 = 12x - 24$	cuadrados.
$(y - 4)^2 = 12(x - 2)$	Comparando con
Si: $(y - k)^2 = 4a\,(x - h)$	la forma:

Vértice: V(2,4) ; Latus Rectum: $4a = 12$; $a = 3$

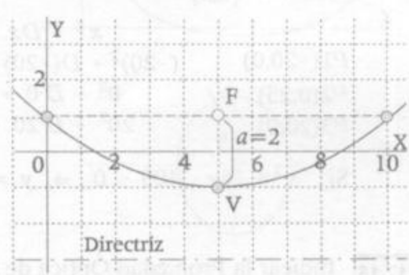
Foco: F(5,4) ; Directriz: $x - h + a = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$



d) Determinar características y gráfica de la Parábola: $x^2 - 10x - 8y + 17 = 0$

Completando cuadrados, sobre la variable cuadrática x; por procedimientos conocidos.

$x^2 - 10x - 8y + 17 = 0$	Reordenando
$x^2 - 10x \quad - 8y = -17$	Completando
$(x - 5)^2 - 5^2 - 8y = -17$	cuadrados y
$\Rightarrow (x - 5)^2 = 8y + 8$	llevando a la
$(x - 5)^2 = 8(y + 1)$	Forma de Ecuación de Parábola.



Comparando con la forma: $(x - h)^2 = 4a\,(y - k)$

Vértice: V(5,-1) ; Latus Rectum: $4a = 8$; $a = 2$

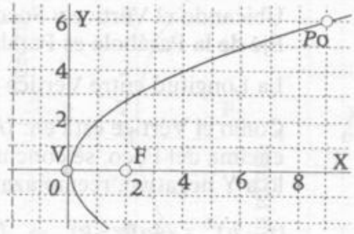
Foco: F(5,1) ; Directriz: $y - k + a = 0 \Rightarrow y + 3 = 0$

Otra Ecuación de Parábola es: $y^2 = 2px$; donde: $p = 2a$

Luego de Completar cuadrados, (En la única variable cuadrática: x) se debe comparar con la Ecuación de Parábola correspondiente.

Ej 17.24 a) Ecuación de Parábola, Vértice en el Origen, Eje sobre el Eje X; que pase por: $Po(9,6)$

De acuerdo a las condiciones indicadas, la forma de la Ecuación será: $y^2 = 4ax$



Esta Ecuación debe cumplirse para el punto dado: $P_0(9,6)$; su reemplazo permite hallar: a

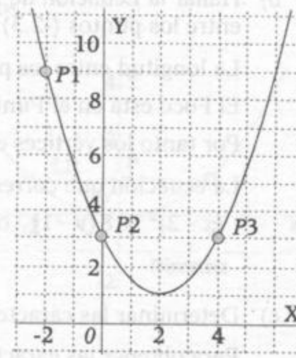
$$\text{Si:}\quad \begin{aligned} y^2 &= 4ax \\ 6^2 &= 4a\cdot 9 \end{aligned} \;\Rightarrow\; a = 1 \;\Rightarrow\; \begin{aligned} y^2 &= 4\cdot 1x \\ y^2 &= 4x \end{aligned}$$

b) Hallar la Ecuación de Parábola, de Eje Vertical, que pasa por $P1(-2,9)$; $P2(0,3)$; $P3(4,3)$

Como la Parábola debe pasar por los tres puntos, su Ecuación debe cumplirse en cada punto.
Tomando las formas generales de la Parábola:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ; \quad y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Los Ejes son Vertical, Horizontal respectivamente.
Para el reemplazo, se toma la de Eje Vertical:



$$\begin{array}{lrl} & x^2 + Dx + Ey + F = 0 & \\ P1(-2,9) & (-2)^2 + D(-2) + E\cdot 9 + F = 0 & D = -4 \\ P2(0,3) & 0^2 + D\cdot 0 + E\cdot 3 + F = 0 \;\Rightarrow & E = -2 \\ P3(4,3) & 4^2 + D\cdot 4 + E\cdot 3 + F = 0 & F = 6 \end{array}$$

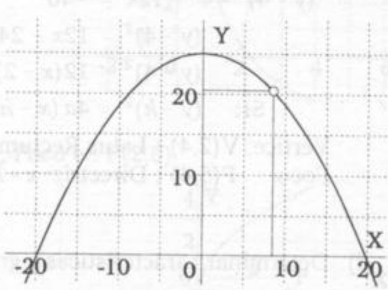
$$\Rightarrow\; x^2 + Dx + Ey + F = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x - 2y + 6 = 0$$

La Solución del Sistema se reemplaza en la Ecuación de Parábola en su forma general de Eje vertical

17.15 Un Arco Parabólico, tiene una altura de 25 m, una luz (Anchura en la Base) de 40 m; Hallar la altura del Arco a 8 m del centro de la base.

Al esbozar la gráfica en un Sistema de Coordenadas, se determinan los siguientes puntos:

El Centro de la base es el Origen: (0,0)
El Arco pasa por $P1(-20,0)$; $P2(0,25)$; $P3(20,0)$
En la Ecuación general de Parábola de Eje Vertical, se reemplazarán los puntos.
Luego en la ecuación obtenida, se reemplazará $x = 8$ para conocer la altura a 8m del centro.

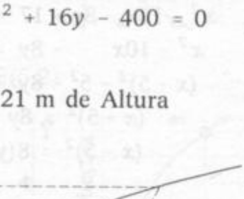


$$\begin{array}{lrl} & x^2 + Dx + Ey + F = 0 & D = 0 \\ P1(-20,0) & (-20)^2 + D(-20) + E\cdot 0 + F = 0 & \Rightarrow\; E = 16 \;\Rightarrow\; x^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ P2(0,25) & 0^2 + D\cdot 0 + E\cdot 25 + F = 0 & F = -400 \quad\;\; x^2 + 16y - 400 = 0 \\ P3(20,0) & 20^2 + D\cdot 20 + E\cdot 0 + F = 0 & \end{array}$$

$$\text{Si: } x^2 + 16y - 400 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{400 - x^2}{16} \quad ; \quad \text{Si: } x = 8 \;\Rightarrow\; y = 21 \text{ m de Altura}$$

17.16 Indicar la Propiedad Óptica de la Parábola:

Si un haz de rayos (Paralelos al Eje), inciden sobre el lado interior de una Curva Parabólica, al rebotar se concentrarán en el Foco. Si el haz de rayos incide sobre el lado exterior, al atravesar la Curva, se concentra también en el Foco.

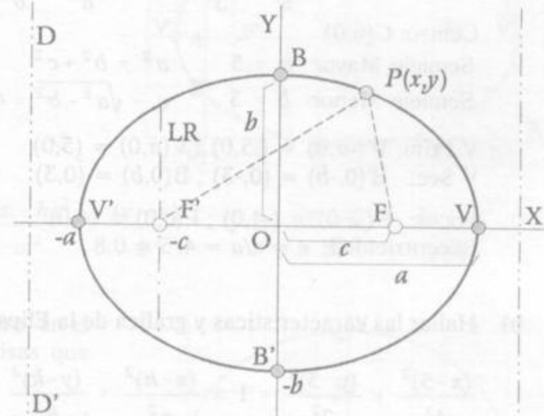


XVII.6 LA ELIPSE

La Elipse es el Lugar geométrico de puntos, cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados Focos, es constante e igual a la distancia: $2a$

Son características de una Elipse:

- Focos: $F'(-c,0)$; $F(c,0)$
- Semieje mayor: $\overline{OV} = a$
- Semieje menor: $\overline{OB} = b$
- Longitud focal: $\overline{OF} = c$
- Vértices Primarios: $V'(-a,0)$; $V(a,0)$
- Vértices Secundarios: $B'(0,-b)$; $B(0,b)$
- Directriz: $\overline{DD'}$; $x = \pm a^2/c$
- Excentricidad: $e = c/a < 1$
- Latus Rectum: $LR = 2b^2/a$
- Relación de Elipse: $a^2 = b^2 + c^2$



XVII.6.1 ECUACIONES DE LA ELIPSE

Se determina la Ecuación de Elipse de centro en el origen, Eje mayor sobre el Eje de abscisas: X o Eje mayor Horizontal.

$$\overline{F'P} + \overline{PF} = 2a \qquad \text{Definición de Elipse}$$

$$\sqrt{(-c-x)^2 + (0-y)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \qquad \text{Por la gráfica}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = \left(2a - \sqrt{(-c-x)^2 + y^2}\right)^2 \qquad \text{Ordenando y elevando al cuadrado}$$

$$4a\sqrt{(-c-x)^2 + y^2} = 4a^2 + 4xc$$

$$a^2c^2 + 2a^2cx + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Luego de simplificar entre 4; se eleva al cuadrado y se reordena.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tomando: $a^2 = b^2 + c^2$, se logra la Ecuación de Elipse.

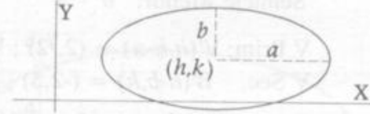
Otras formas de Ecuación de Elipse son:

El Centro es $C(h,k)$

Focos: $F'(h-c,k)$; $F(h+c,k)$

Eje mayor Horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

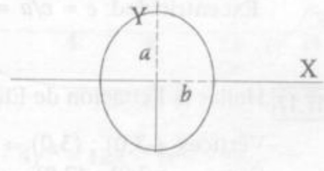


Si los Focos están sobre el Eje Y (Eje mayor Vertical)

El Centro es $C(0,0)$

Focos: $F'(0,-c)$; $F(c,0)$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

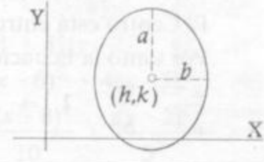


Si los Focos están sobre el Eje Y (Eje mayor Vertical)

El Centro es $C(h,k)$

Focos: $F'(h,k-c)$; $F(h,k+c)$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



Ej 17.25 a) Se analizan las características y gráfica de la Elipse de Ecuación: $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

La gráfica se obtiene a partir de sus características.

Comparando: $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1 \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Centro: $C(0,0)$

Semieje Mayor $a = 5$ $\quad a^2 = b^2 + c^2$

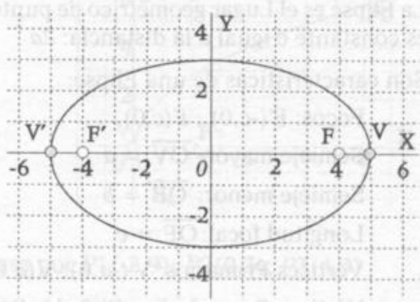
Semieje Menor $b = 3$ $\quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$

V Prim: $V'(-a,0) = (-5,0)$; $V(a,0) = (5,0)$

V Sec: $B'(0,-b) = (0,-3)$; $B(0,b) = (0,3)$

Focos: $F'(-c,0) = (-4,0)$; $F(c,0) = (4,0)$

Excentricidad: $e = c/a = 4/5 = 0.8$



b) Hallar las características y gráfica de la Elipse de Ecuación: $\dfrac{(x-5)^2}{4^2} + \dfrac{(y-3)^2}{2^2} = 1$

$\dfrac{(x-5)^2}{4^2} + \dfrac{(y-3)^2}{2^2} = 1 \equiv \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Centro: $C(h,k) = (5,3)$

Semieje Mayor: $a = 4$ $\quad a^2 = b^2 + c^2$

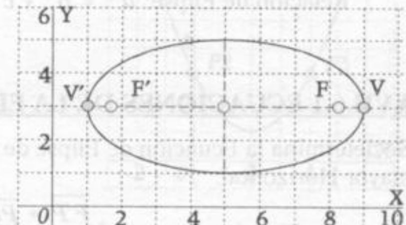
Semieje Menor: $b = 2$ $\quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3.5$

V Prim: $V'(h-a,k) = (1,3)$; $V(h+a,k) = (9,3)$

V Sec: $B'(h,k-b) = (5,1)$; $B(h,k+b) = (5,5)$

Focos: $F'(h-c,k) = (1.5,3)$; $F(h+c,k) = (8.5,3)$

Excentricidad: $e = c/a = 3.5/4 = 0.87$



c) Hallar las características y gráfica de la Elipse de Ecuación: $\dfrac{(x-2)^2}{4^2} + \dfrac{(y-3)^2}{5^2} = 1$

$\dfrac{(x-2)^2}{4^2} + \dfrac{(y-3)^2}{5^2} = 1 \equiv \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Centro: $C(h,k) = (2,3)$

Semieje Mayor: $a = 5$ $\quad a^2 = b^2 + c^2$

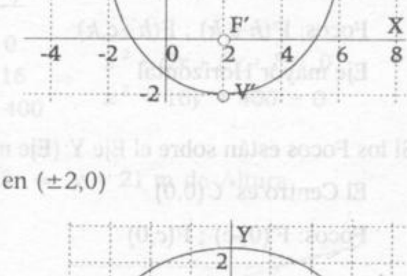
Semieje Menor: $b = 4$ $\quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$

V Prim: $V'(h,k-a) = (2,-2)$; $V(h,k+a) = (2,8)$

V Sec: $B'(h-b,k) = (-2,3)$; $B(h+b,k) = (6,3)$

Focos: $F'(h,k-c) = (2,0)$; $F(h,k+c) = (2,6)$

Excentricidad: $e = c/a = 3/5 = 0.6$



17.17 Hallar la Ecuación de Elipse, Vértices en $(\pm 3,0)$; Focos en $(\pm 2,0)$

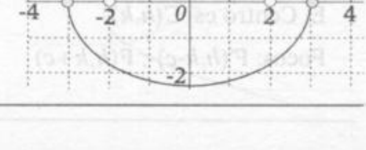
Vértices $(-3,0)$; $(3,0) \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

Focos $(-2,0)$; $(2,0) \Rightarrow c = 2$ $\quad b = 2.23$

El Centro está entre los Vértices $C(0,0)$

Por tanto la Ecuación tiene Centro en el Origen:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2.23^2} = 1$



17.18 a) Hallar la Ecuación de Elipse de Vértices: (-1,4); (11,4) ; Focos: (1,4); (9,4)

Se traza una gráfica, ubicando Vértices y Focos, el Centro es Punto medio entre Vértices.

Si: $V'(-1,4);\ V(11,4) \Rightarrow C(h,k) = (5,4)$

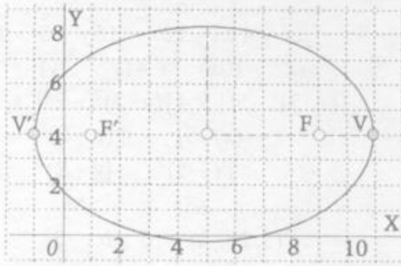
La Longitud de Vértice a Vértice es: $2a$

Si: $V'(-1,4);\ V(11,4) \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6$

La Longitud de Foco a Foco es: $2c$

$F'(1,4);\ F(9,4) \quad \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow$

$a^2 = b^2 + c^2 \ \Rightarrow\ b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{20}$



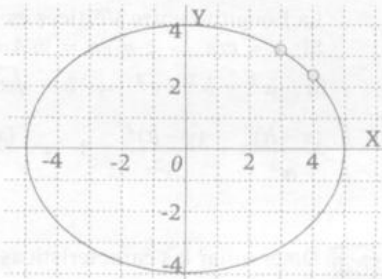
Luego reemplazando en la Ecuación de Elipse de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-5)^2}{6^2} + \frac{(y-4)^2}{\sqrt{20}^2} = 1$$

b) Hallar la Ecuación de Elipse, con Centro en el Origen de Semieje mayor paralelo a las abscisas, que pase por los puntos: (4,12/5); (3,16/5)

En la Ecuación general de la Elipse, por estar el centro en el origen $D=E=0$; tomando $A=1$

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow x^2 + By^2 + F = 0$$



Los dos puntos dados de Elipse, deben satisfacer la anterior Ecuación, reemplazando y resolviendo el Sistema de dos Ecuaciones con dos Incógnitas:

Si: $\quad x^2 + By^2 + F = 0$

$P1(4,12/5) \quad 4^2 + B(12/5)^2 + F = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 25/16$

$P2(3,16/5) \quad 3^2 + B(16/5)^2 + F = 0 \qquad\quad F = -25$

Reemplazando:

$$x^2 + \frac{25}{16}y^2 - 25 = 0$$

Si se requieren las características de la Elipse, es suficiente con reordenar la ecuación anterior, dividiendo entre 25:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

Semiejes $a = 5\ ;\ b = 4$

De la Ecuación obtenida, expresada en su Forma general. Reordenando

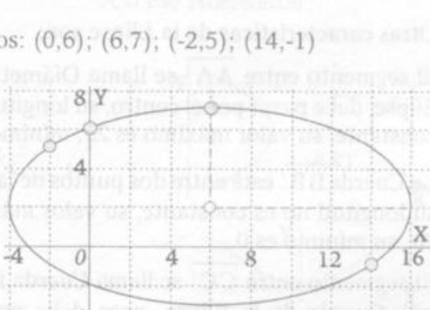
c) Hallar la Ecuación de la Elipse, que pasa por los puntos: (0,6); (6,7); (-2,5); (14,-1)

Usando la forma general de la Elipse:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$A = 1 \Rightarrow x^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Los puntos deben satisfacer la Ecuación, reemplazando y resolviendo



$(0,6) \qquad 0^2 + B\cdot 6^2 + D\cdot 0 + E\cdot 6 + F = 0$

$(6,7) \qquad 6^2 + B\cdot 7^2 + D\cdot 6 + E\cdot 7 + F = 0$

$(-2,5) \qquad (-2)^2 + B\cdot 5^2 + D(-2) + E\cdot 5 + F = 0$

$(14,-1) \quad 14^2 + B(-1)^2 + D\cdot 14 + E(-1) + F = 0$

Los resultados son: $B = 4$; $D = -12$; $E = -16$; $F = -48$; reemplazando en la Ecuación general de Elipse. Factorizando y Completando cuadrados. Reordenando y llevando a forma conocida

$$x^2 + 4y^2 - 12x - 16y - 48 = 0$$

$$x^2 - 12x \quad + 4(y^2 - 4y) = 48$$

$$[(x-6)^2 - 36] + 4[(y-2)^2 - 4] = 48$$

$$(x-6)^2 + 4(y-2)^2 = 100$$

$$\frac{(x-8)^2}{10^2} + \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1$$

Las características son: $C(8,2)$; $a = 10$; $b = 5$

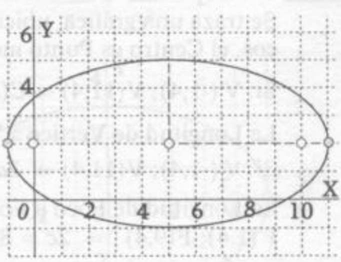
Ej 17.26 Determinar las características de la Elipse: $x^2 + 4y^2 - 10x - 16y + 5 = 0$

$$x^2 + 4y^2 - 10x - 16y + 5 = 0$$
$$(x^2 - 10x) \quad + 4(y^2 - 4y) = -5$$
$$[(x-5)^2 - 5^2] + 4[(y-2)^2 - 2^2] = -5$$
$$(x-5)^2 + 4(y-2)^2 = 36$$
$$\frac{(x-5)^2}{6^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$$
$$\Rightarrow \quad C(5,2) \; ; \; a = 6 \; ; \; b = 3$$

La Ecuación está en su Forma general, se lleva a otra forma:

Completando cuadrados.

Dividiendo entre 36.



17.19 Hallar la Ecuación de Elipse de Vértices: (2,4); (10,4); Excentricidad: 1/2

El Centro está a la mitad entre Vértices

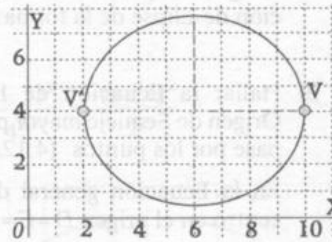
Si: V'(2,4) ; V(10,4) $\Rightarrow C(h,k) = (6,4)$

La Longitud entre Vértices es: $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Si: $e = c/a \Rightarrow c = ea = ½\, 4 = 2$

Si: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{12}$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-6)^2}{4^2} + \frac{(y-4)^2}{\sqrt{12}^2} = 1$$



17.20 Determinar las características de Elipses de Excentricidades: $e = 0$; $e = 1$

Si: $e = 0$; $e = \dfrac{c}{a} = 0 \Rightarrow c = 0$; $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = b$

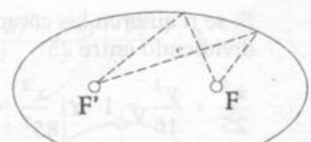
La Elipse degenera en Circunferencia, de Radio $R = a$.

Si: $e = 1$; $e = \dfrac{c}{a} = 1 \Rightarrow c = a$; $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = 0$

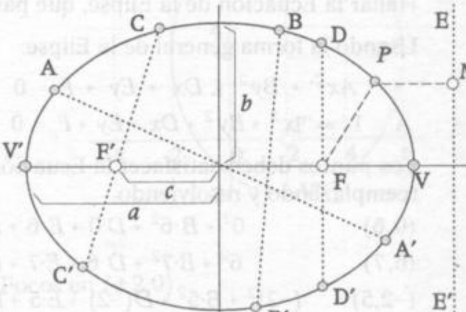
La Elipse degenera en Recta horizontal o paralela al Eje X.

17.21 Indicar la Propiedad óptica de la Elipse

Si un rayo parte de un Foco, al rebotar en el lado interior de la Curva de Elipse, necesariamente incide en el otro Foco. Se demuestra calculando las correspondientes Pendientes.



Otras características de la Elipse son:



El segmento entre $\overline{AA'}$ se llama Diámetro de la Elipse, debe pasar por el centro, su longitud no es constante, su valor máximo es $2a$, mínimo es $2b$.

La Cuerda $\overline{BB'}$ está entre dos puntos de la Elipse, su longitud no es constante, su valor máximo es $2a$, su mínimo es 0.

El segmento entre $\overline{CC'}$ se llama Cuerda focal, es una Cuerda de la Elipse, pero debe pasar por alguno de los focos, su longitud no es constante, su valor máximo es $2a$, su mínimo es $2b^2/a$

Entre $\overline{DD'}$ está el Latus rectum, es una Cuerda focal de la Elipse, debe ser perpendicular al Eje (Está entre V, V') su longitud es constante de valor $2b^2/a$. Existen dos Latus rectum. (Para cada Foco)

La Recta que pasa por E, E' se llama Directriz de la Elipse, posee la característica de: Es decir la razón de distancias del Punto P de la Elipse hacia un Foco y hacia la Recta equivale a la excentricidad. Existen también dos Directrices. (Para cada Foco)

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PM}} = \frac{c}{a} = e$$

XVII.7 LA HIPÉRBOLA

La Hipérbola es el Lugar geométrico de puntos, cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (Focos) es constante e igual a: $2a$

Son características de una Hipérbola:

Focos: $F'(-c,0)$, $F(c,0)$

Vértices: $V'(-a,0)$; $V(a,0)$

Longitud Focal: $\overline{OF} = c$

Semieje Real: $\overline{OV} = a$

Semieje Imaginario: $\overline{OB} = b$

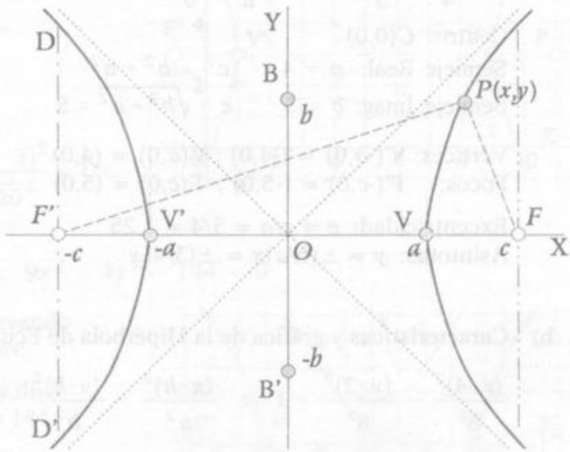
Asíntotas: $y = \pm (b/a)x$

Directriz: $x = \pm a^2/c$

Excentricidad: $e = c/a > 1$

Latus Rectum: $\overline{DD'} = LR = 2b^2/a$

Relación de Hipérbola: $c^2 = b^2 + a^2$



XVII.7.1 ECUACIONES DE LA HIPÉRBOLA

Deduciendo la Ecuación de la Hipérbola a partir de su definición:

$$\overline{F'P} - \overline{PF} = 2a$$

Planteando por la gráfica.

$$\sqrt{(-c-x)^2 + (0-y)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Elevando al cuadrado, simplificando. Otra vez al cuadrado

$$\sqrt{(-c-x)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{(-c-x)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

Ordenando y considerando la relación: $c^2 = b^2 + a^2$

$$4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

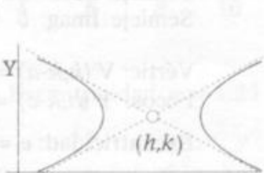
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de Hipérbola. La Ecuación corresponde a una Hipérbola, con Centro en el Origen, Eje Real paralelo al Eje X o Eje Horizontal.

Otras formas de Ecuación de Hipérbola son:

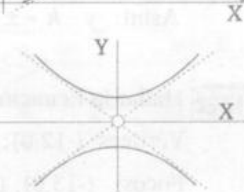
Focos sobre el Eje X (Eje Horizontal)
Centro en $C(h,k)$
Focos: $F'(h-c,k)$; $F(h+c,k)$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



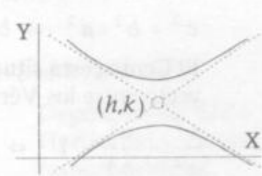
Focos sobre el Eje Y (Eje Vertical)
Centro: $C(0,0)$
Focos: $F'(0,-c)$; $F(0,c)$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



Focos sobre el Eje Y (Eje Vertical)
Centro: $C(h,k)$
Focos: $F'(h,k-c)$; $F(h,k+c)$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Desarrollando las anteriores Ecuaciones, se llega a la Ecuación general de Hipérbola:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ej 17.27 a) Se calculan las características y gráfica de la Hipérbola de Ecuación: $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

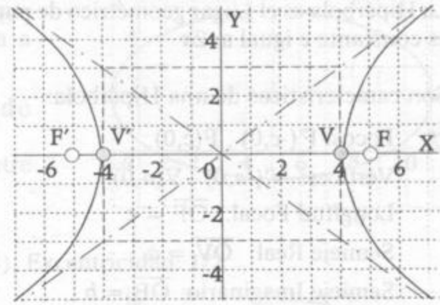
Comparando la Ecuación dada con su forma:

Si: $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1 \equiv \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Centro: $C(0,0)$

Semieje Real: $a = 4$ $\Rightarrow$ $c^2 = b^2 + a^2$

Semieje Imag: $b = 3$ $\quad c = \sqrt{b^2 + a^2} = 5$



Vértices: V'$(-a,0) = (-4,0)$; V$(a,0) = (4,0)$

Focos: F'$(-c,0) = (-5,0)$; F$(c,0) = (5,0)$

Excentricidad: $e = c/a = 5/4 = 1.25$

Asíntotas: $y = \pm(b/a)x = \pm(3/4)x$

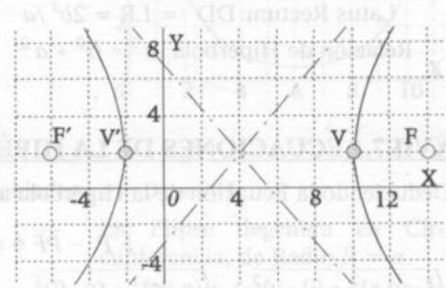
b) Características y gráfica de la Hipérbola de Ecuación: $8^2(x-4)^2 - 6^2(y-2)^2 = 6^2 8^2$

$\dfrac{(x-4)^2}{6^2} - \dfrac{(y-2)^2}{8^2} = 1 \equiv \dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Centro: $C(h,k) = (4,2)$

Semieje Real: $a = 6$ $\quad c^2 = b^2 + a^2$

Semieje Imag: $b = 8$ $\Rightarrow$ $c = 10$



Vértices: V'$(h-a,k) = (-2,2)$; V$(h+a,k) = (10,2)$

Focos: F'$(h-c,k) = (-6,2)$; F$(h+c,k) = (14,2)$

Excentricidad: $e = c/a = 10/6 = 1.67$

Asínt: $y - k = \pm(b/a)(x-h)$; $y - 2 = \pm(8/6)(x-4)$

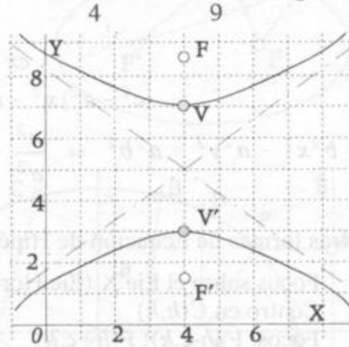
c) Hallar las características y gráfica de la Hipérbola de Ecuación: $\dfrac{(y-5)^2}{4} - \dfrac{(x-4)^2}{9} = 1$

$\dfrac{(y-5)^2}{2^2} - \dfrac{(x-4)^2}{3^2} = 1 \equiv \dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

Centro: $C(h,k) = (4,5)$

Semieje Real: $a = 2$ $\Rightarrow$ $c^2 = b^2 + a^2$

Semieje Imag: $b = 3$ $\quad c = 3.6$



Vértic: V'$(h,k-a) = (4,3)$; V$(h,k+a) = (4,7)$

Focos: F'$(h,k-c) = (4,1.4)$; F$(h,k+c) = (4,8.6)$

Excentricidad: $e = c/a = 3.6/2 = 1.8$

Asínt: $y - k = \pm\dfrac{a}{b}(x-h)$; $y - 5 = \pm\dfrac{2}{3}(x-4)$

17.22 Hallar la Ecuación de Hipérbola de Vértices: $(\pm 12,0)$; Focos: $(\pm 13,0)$

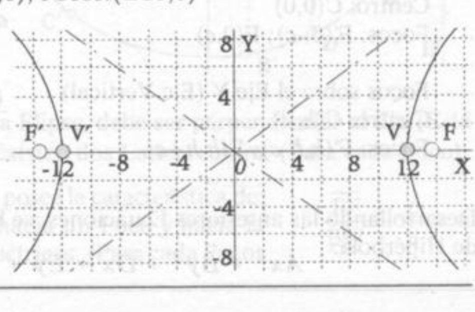
Vértices: $(-12,0)$; $(12,0) \Rightarrow a = 12$

Focos: $(-13,0)$; $(13,0) \Rightarrow c = 13$

$c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow b = 5$

El Centro está situado a la mitad del trayecto entre los Vértices, por tanto: C(0,0)

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{12^2} - \dfrac{y^2}{5^2} = 1$



17.23 a) Hallar la Ecuación de Hipérbola de Vértices: (1,3); (9,3) Focos: (-1,3); (11,3)

El Centro está a la mitad entre los Vértices:

Si: V'(1,3); V(9,3) $\Rightarrow$ $C(h,k) = (5,3)$

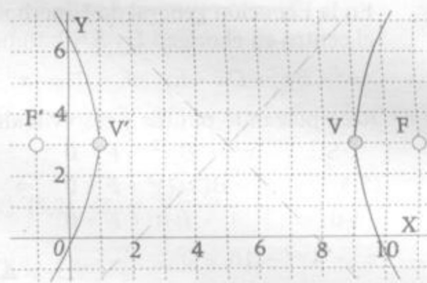
La Longitud entre Vértices: $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

La Longitud entre Focos es: $2c$

Si: F'(-1,3); F(11,3) $\Rightarrow 2c = 12 \Rightarrow c = 6$

Si: $c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{20}$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-5)^2}{4^2} - \frac{(y-3)^2}{\sqrt{20}^2} = 1$$



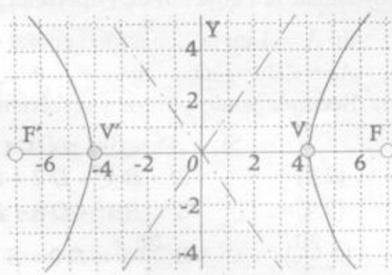
b) Hallar las características de la Hipérbola: $9x^2 - 4y^2 - 144 = 0$

La Ecuación está en su forma general, llevando a otra forma por Operaciones Algebraicas:

$$9x^2 - 4y^2 - 144 = 0$$
$$9x^2 - 4y^2 = 144$$
$$\frac{9x^2}{144} - \frac{4y^2}{144} = \frac{144}{144}$$
$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$$

Ordenando y dividiendo entre 144

Centro $C(0,0)$;
Eje Horizontal.
$a = 4$; $b = 6$;
$c = \sqrt{52} = 7.21$

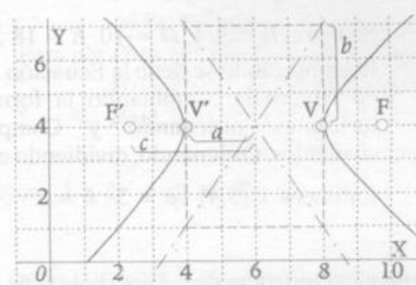


c) Hallar las características de la Hipérbola: $9x^2 - 4y^2 - 108x + 32y + 224 = 0$

Completando cuadrados para lograr otra forma

$$9x^2 - 4y^2 - 108x + 32y + 224 = 0$$
$$9(x^2 - 12x) - 4(y^2 - 8y) = -224$$
$$9[(x-6)^2 - 6^2] - 4[(y-4)^2 - 4^2] = -224$$
$$9(x-6)^2 - 4(y-4)^2 = 36$$
$$\frac{(x-6)^2}{4} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{(x-6)^2}{2^2} - \frac{(y-4)^2}{3^2} = 1$$

$\Rightarrow$ $C(6,4)$; $a = 2$; $b = 3 \Rightarrow$ $c = 3.6$



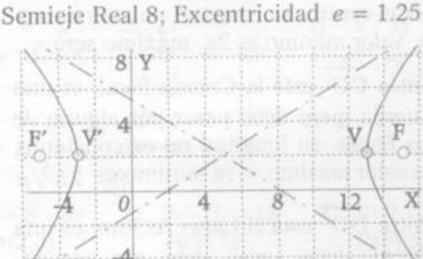
d) Hallar la Ecuación de la Hipérbola de Centro: $C(5,2)$; Semieje Real 8; Excentricidad $e = 1.25$ de Eje Real Paralelo a las abscisas.

Si: $e = c/a \Rightarrow c = ea = 1.25 \cdot 8 = 10$

Si: $c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = 6$

Reemplazando en la Ecuación de Centro en (h,k); Eje Paralelo a las abscisas.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-5)^2}{8^2} - \frac{(y-2)^2}{6^2} = 1$$



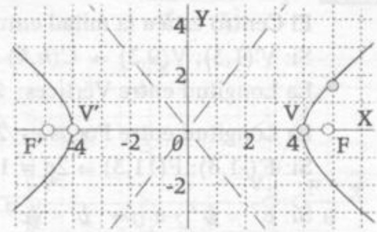
17.24 Hallar las características que poseen las Hipérbolas de Excentricidad: $e = 1$; $e = \infty$

Si: $e = 1$; $e = c/a = 1 \Rightarrow c = a$; $c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow b = 0$

Si: $e = \infty$; $e = c/a = \infty \Rightarrow a = 0$; $c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow c = b$

Degeneran en Recta Horizontal y Vertical respectivamente.

17.25 a) Hallar la Ecuación de Hipérbola, que pasa por los puntos: (5,3/2); (4,0) Centro en Origen



En la Ecuación general de Hipérbola, por estar el centro en el origen $D=E=0$; tomando $A=1$

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0 \Rightarrow x^2+By^2+F=0$$

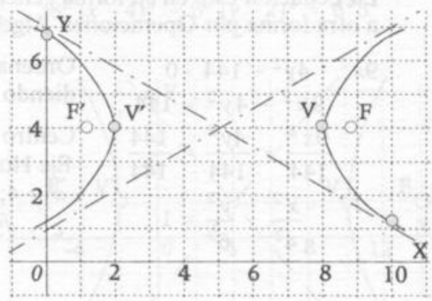
Reemplazando puntos y resolviendo.

$$\begin{array}{lll} \text{Si:} & x^2+By^2+F=0 & \\ (5,3/2) & 5^2+B(3/2)^2+F=0 & \Rightarrow B=-4 \\ (4,0) & 4^2+B\cdot 0+F=0 & F=-16 \end{array}$$

$$x^2-4y^2-16=0 \qquad \Rightarrow \frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$$
$$x^2-4y^2=16$$

Reemplazando y llevando a otra Forma de Ecuación. Reordenando y dividiendo entre 16. Se obtiene $a=4$; $b=2$

b) Hallar la Ecuación de Hipérbola que pasa por: (2,4); (8,4); (0,20/3); (10,4/3)



Si: $A=1$ en la Ecuación general de Hipérbola

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

Reemplazando puntos y resolviendo el Sistema

$$\begin{array}{ll} \text{Si:} & x^2+By^2+Dx+Ey+F=0 \\ (2,4) & 2^2+B\cdot 4^2+D\cdot 2+E\cdot 4+F=0 \\ (8,4) & 8^2+B\cdot 4^2+D\cdot 8+E\cdot 4+F=0 \\ (0,\frac{20}{3}) & 0^2+B(\frac{20}{3})^2+D\cdot 0+E\frac{20}{3}+F=0 \\ (10,\frac{4}{3}) & 10^2+B(\frac{4}{3})^2+D\cdot 10+E\frac{4}{3}+F=0 \end{array}$$

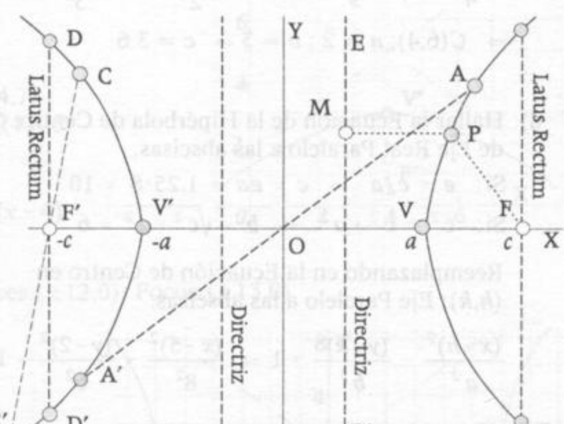
Se logra $B=9/4$, $D=-10$, $E=18$, $F=-20$

Reemplazando se tiene la Ecuación general de Hipérbola. Cambiando la forma, factorizando, ordenando y Completando cuadrados. Ordenando, dividiendo entre: 36

Entonces: $C(5,4)$; $a=3$; $b=2$

$$x^2-\frac{9}{4}y^2-10x+18y-20=0$$
$$4x^2-9y^2-40x+72y-80=0$$
$$4(x^2-10x)-9(y^2-8y)=80$$
$$4[(x-5)^2-5^2]-9[(y-4)^2-4^2]=80$$
$$4(x-5)^2-9(y-4)^2=36 \Rightarrow \frac{(x-5)^2}{3^2}-\frac{(y-4)^2}{2^2}=1$$

Otras características de la Hipérbola son:



Entre $\overline{AA'}$ está el Diámetro, debe pasar por el centro, su longitud no es constante, valor mínimo es $2a$, máximo será ∞

Entre $\overline{CC'}$ está la Cuerda focal, es una Cuerda, pero debe pasar por alguno de los Focos, su longitud no es constante, su valor máximo ∞, su mínimo es $2b^2/a$

Entre $\overline{DD'}$ está el Latus rectum, es una Cuerda focal, pero debe ser perpendicular al Eje (Este eje está entre V, V') su longitud es constante de valor $2b^2/a$

Por E, E' está la Directriz de la Hipérbola, posee la característica:

$\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PM}}=\dfrac{c}{a}=e$ Es decir la razón de distancias del Punto P de la Hipérbola hacia un Foco y hacia la Recta equivale a la excentricidad.

XVII.- PROBLEMAS PROPUESTOS

17.1 Hallar Distancias y Puntos Medios entre los Pares de Puntos indicados:
a) $(2,1)$; $(10,7)$ b) $(2,5)$; $(5,1)$ c) $(12,-5)$; $(0,0)$ d) $(8a,0)$; $(0,6a)$

17.2 Hallar la Coordenada: u; de manera que se cumpla:
a) $P1(6,2)$, $P2(3,u)$, $d = 5$ b) $(u,3)$, $(1,u)$, $d = 10$ c) $(5,2)$, $(3,u)$, $\overline{P}(4,5)$

17.3 Hallar los Puntos que dividan al Segmento entre $P1(1,5)$; $P2(7,2)$ en 3 partes iguales.

17.4 a) Verificar si es Rectángulo el Triángulo de Vértices ubicados en los Puntos: $(1,1)$; $(4,5)$; $(8,2)$
b) Verificar si es Rectángulo el Triángulo de Vértices ubicados en los Puntos: $(3,1)$; $(2,5)$; $(7,2)$
c) Verificar si es Isósceles el Triángulo de Vértices ubicados en los Puntos: $(0,1)$; $(2,5)$; $(6,3)$
d) Hallar el Vértice faltante al Triángulo Equilátero entre los Puntos: $(2,4)$; $(6,1)$

17.5 Indicar si pertenecen (V) o no (F) a la Recta: $2x + 3y - 7 = 0$; los Puntos: $(2,1)$; $(1,3)$; $(-4,5)$

17.6 Graficar las siguientes Rectas: $2x + y - 5 = 0$; $3x + 2y - 16 = 0$; $x - 2y + 6 = 0$; $y = 3$; $x = 4$

17.7 Hallar las Ecuaciones de Recta, que poseen las siguientes características:
a) Pendiente: $m = 2$; pasa por $Po(3,1)$
b) " $m = -3/4$; " $Po(0,3)$
c) " $m = 0$; " $Po(4,3)$
d) " $m = 2$; intersecta a Eje Y en: -1
e) " $m = -1/2$; inters. al Eje X en: 5
f) Pasa por los Puntos: $(1,2)$; $(5,4)$
g) " $(1,4)$; $(5,2)$
h) " $(5,2)$; $(5,6)$
i) Intersecta a los Ejes X; Y en: 6; 4
j) " -2; 3
k) " 0; 2
l) Intersecta al Eje X en: 2 ; pasa por $P1(5,3)$
m) " al Eje Y en: 5; " $P1(6,2)$
n) Pasa por $Po(6,3)$ inclinación de: $\theta = 30°$
o) " $Po(5,4)$ " $\theta = 45°$
p) " $Po(4,3)$ " $\theta = 0°$

17.8 Hallar el Ángulo de Inclinación de las Rectas: a) $2x - y - 4 = 0$ b) $x + 1 = 2y$ c) $y - 4 = 0$ d) $x - 5 = 0$

17.9 Hallar las Rectas Paralela y Perpendicular a las Rectas dadas, que pasan por el Punto indicado
a) $2x - y - 1 = 0$; $Po(5,3)$ b) $2x + 3y - 12 = 0$; $Po(5,4)$ c) $x - 3 = 0$; $Po(6,3)$

17.10 Hallar los puntos de intersección entre los siguientes pares de Rectas:
a) $2x + y - 8 = 0$, $3x - 4y - 1 = 0$ b) $2x - 3y = 2$, $5x - y = 18$ c) $-x + 3y = 5$, $2x - 6y = 6$

17.11 Hallar los Ángulos de Intersección entre los siguientes pares de Rectas:
a) $3x - 2y = 5$, $3x + 2y = 12$ b) $3x - y - 3 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ c) $x + 3y = 11$, Eje Y

17.12 Hallar las Distancias entre Rectas y Puntos:
a) $3x + 4y = 24$, $Pe(8,5)$ b) $6x + 8 = 8y$, $Pe(2,5)$ c) $2x + 3y = 12$, $Pe(4,5)$ d) $x + 2 = 2y$, $Pe(4,3)$

17.13 Hallar Baricentro, Ortocentro, Incentro y Área del Triángulo ubicado entre $(0,3)$; $(5,7)$; $(8,1)$

17.14 Determinar el Tipo de Cónica:
a) $x^2 + y^2 + 3x + 5 = 2y$
b) $3x^2 + 3y^2 - 12x = 18y$
c) $4x^2 + 2x - y = 24$
d) $y^2 - 8x - 6y - 48 = 0$
e) $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y = 36$
f) $x^2 - y^2 + 6y = 24$
g) $3x^2 + 4y^2 = 12x + 16y$
h) $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$

17.15 Hallar la Ecuación General de Circunferencia, que posee las siguientes características:

a) C(0,0) ; Radio: 3
b) C(5,3) ; " : 2
c) Centro: (4,3) ; Pasa por Origen
d) C(5,4) ; Diámetro: 6
e) Un Diámetro entre: (2,1) ; (10,7)
f) " : (1,6) ; (5,0)
g) C(3,4) ; Tang. a Eje Y
h) C(5,2) ; " Eje X
i) $R = 3$; Tang. a X; Y

17.16 Hallar Centro y Radio de las siguientes Circunferencias:

a) $x^2 + y^2 - 7 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 3$
c) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$
d) $400x^2 + 400y^2 + 400x - 320y = 61$

17.17 Hallar las Ecuaciones de Circunferencia, si:

a) Pasa por P1(3,4) ; Centro(0,0)
b) Pasa por (1,1) ; (1,5) ; (7,5)
c) Pasa por: (2,2) ; (6,0) ; (8,4)
d) Pasa por: (1,4) ; (1,-2) ; (4,1)

17.18 Hallar las Ecuaciones de Circunferencia, de centro C; tangentes a las Rectas indicadas.

a) $C(0,0)$; $3x + 4y - 15 = 0$
b) $C(2,1)$; $5x + 12y - 61 = 0$
c) $C(3,1)$; $15x + 8y - 121 = 0$

17.19 Hallar las Ecuaciones de Circunferencia, que poseen las características siguientes:

a) Pasa por: (-1,7); Tang. a: $3x + 4y = 50$; en (6,8)
b) Pasa por: (-2,2); (6,8); Tang. a Eje X
c) Pasa por: (0,8); (7,1); Centro sobre: $2x + 6 = 3y$
d) Pasa por: (-2,0); (4,2) Centro sobre Eje Y
e) Radio $\sqrt{18}$; Debajo y Tangente a: $x + y - 12 = 0$ en: P1(7,5)
f) Inscrita al Triángulo de lados: $4x - 3y - 41 = 0$; $7x - 24y + 97 = 0$; $3x + 4y + 13 = 0$
g) Circunscrita al Triángulo de Lados: $x - y = -2$; $2x + 3y = 1$; $4x + y = 17$
h) Circunscrita al Triángulo de Lados: $7x - y = 45$; $x + 2y = 0$; $x - 3y = -5$

17.20 Hallar la Ecuación General de Parábola, que satisface las características:

a) Vértice: V(0,0) ; Foco: F(2,0)
b) " : V(0,0) ; " : F(0,3)
c) " : V(2,3) ; " : F(3,3)
d) V(3,1) ; F(3,3)
e) V(4,0) ; F(1,0)
f) V(3,2) ; F(3,-2)
g) V(1,3) ; Directríz: $x + 2 = 0$
h) V(3,3) ; LR entre: (5,-1) ; (5,7)
i) F(4,3) ; Directríz: $y + 1 = 0$

17.21 Hallar el Vértice y Foco de las siguientes Parábolas:

a) $y^2 = 12x$ b) $y^2 - 20x - 6y + 29 = 0$ c) $y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ d) $x^2 - 6x - 24y + 33 = 0$

17.22 Hallar la Ecuación General de Parábola, que satisface las características:

a) Eje Paralelo a X; pasa por: (9,12); V(0,0)
b) Eje Paralelo a Y; pasa por: (4,2); V(0,0)
c) Eje Paralelo a X; pasa por: (3,3) ; (6,5) ; (6,-3)
d) Eje Paralelo a Y; pasa por: (6,3); (-2,3); (10,9)

17.23 Hallar la Ecuación General de Parábola, que satisface las características:

a) Eje a X; Pasa por: (3,5); (6,-1); Vértice sobre la Recta: $2y = 3x$
b) LR entre: (3,-1); (3,7)

17.24 Un cable colgante forma una Parábola con torres de soporte de 220 m de altura, separadas entre sí por 1500 m. El punto más bajo del cable está a 70 m de altura. Hallar la Altura del cable a 150 m de la base de una torre.

17.25 Hallar la Ecuación General de Elipse, que satisface las características:

a) Centro: (0,0); Semiejes Mayor, Menor: 4; 2
b) " : (2,1); " 6; 3
c) Vértices: V(±5,0) ; Focos: F(±4,0)
d) Focos: F(±3,0); Excentricidad: $e = 3/5$
e) V(±10,0) ; $e = 0.8$
f) V(0,±6) ; F(0,±4)
g) V(0,±5) ; $e = 0.8$
h) $V(-1,6)$; (9,6) ; $F(1,6)$; (7,6)
i) V(-2,1); (6,1) ; $e = 0.5$
j) F(3,2); (5,2) ; $e = 1/3$
k) V(6,1); (6,9) ; F(6,2); (6,8)
l) Un Foco: (4,0) ; C(0,0) Directríz: $x = \pm 6.25$

17.26 Hallar Centro, Semiejes Mayor y Menor de las siguientes Elipses.

a) $x^2 + 4y^2 - 64 = 0$
b) $x^2 + 4y^2 + 4x = 0$
c) $x^2 + 4y^2 - 4x - 32y = -32$
d) $4x^2 + y^2 - 16x + 6y = 75$

17.27 Hallar la Ecuación General de Elipse, que satisface las características:

a) Centro en el origen; Pasa por: (0,2), (3,0)
b) Pasa por: (0,1), (1,-1), (2,2), (4,0)
c) Pasa por: (8,-3), (-6,4), (-8,1), (2,-4)

17.28 Un arco de 80 m de base, de forma semielíptica, tiene altura de 30 m. Hallar su altura a 15 m del centro.

17.29 Hallar la Ecuación General de Hipérbola, que satisface los siguientes datos:

a) C(0,0); Semiejes Real; Im: 2; 1 Eje ∥ X
b) C(3,1); Semiejes: 4; 2 Eje Real ∥ a X
c) Vértices $V(\pm 3,0)$; Focos $F(\pm 5,0)$
d) $V(\pm 8,0)$; Excentricidad: $e = 5/4$
e) $F(\pm 13,0)$; $e = 13/12$
f) $V(0,\pm 3)$; $F(0,\pm 5)$
g) $V(0,\pm 2)$; $F(0,\pm 4)$
h) $V(0,\pm 2)$; $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
i) V(1,6); (9,6); F(0,6); (10,6)
j) V(2,2); (4,2); $e = 2$
k) V(-1,3); (5,3); $e = 1.5$
l) V(4,4); (6,4); $e = \sqrt{5}$
m) F(5,-2); (5,18); $e = \dfrac{5}{3}$

17.30 Hallar el Centro y Semiejes de las siguientes Hipérbolas:

a) $x^2 - 16y^2 - 64 = 0$
b) $x^2 - 9y^2 - 2x + 54y - 116 = 0$
c) $x^2 - 9y^2 - 10x + 36y = 2$
d) $25x^2 - 49y^2 - 100x + 294y = -884$

17.31 Hallar las Ecuaciones de Hipérbola que pasan por los siguientes Puntos:

a) (2,0); $(\sqrt{20},2)$; $C(0,0)$ b) (2,5); (10,5); (1,29/4); (1,11/4) c) (5,7); (5,1); (2,1/4); (8,1/4)

17.32 Hallar las Ecuaciones de Hipérbola que satisfacen los siguientes datos:

a) Vértices $(\pm 2,0)$; Asíntotas: $y = \pm 0.5x$ b) C(0,0); Latus Rectum: 5; $c = 3$ Eje a Y

17.33 Resolver los siguientes Problemas de Geometría Analítica:

a) Circunferencia de Radio 4; su Centro está en la intersección de las Rectas: $x+2y-5=0$; $2x-y-5=0$

b) Hallar la Distancia entre: $3x + 4y - 36 = 0$; $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ Hallar también los Puntos de la Recta y Circunferencia, que determinan esa Distancia.

c) Hallar la Ecuación de Circunferencia que pasa por los Puntos (-1,1); (8,-2); y que es Tangente a la Recta: $3x + 4y - 41 = 0$

d) La Parábola de LR entre: (3,2); (3,6) tiene vértice en el Centro de la Circunferencia: $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$ Hallar su Ecuación

e) El Vértice de la Parábola: $y^2 - 12x - 2y + 25 = 0$ es el Centro de una Elipse de Semiejes: 4; 2

f) De la Circunferencia: $x^2 + y^2 = R^2$ Hallar el Lugar Geométrico de Puntos, que dividen a sus Ordenadas en la relación 1/2

g) Un Punto: P se mueve de modo que el producto de Pendientes de las dos Rectas que unen a P con (-2,1); (6,5) es constante, igual a: -4; Hallar la Ecuación del Lugar

h) La órbita de la Tierra es una Elipse, en uno sus Focos está el Sol, el Semieje Mayor es de: $148.5 \cdot 10^6$ Km; Su Excentricidad: $e = 0.017$ Hallar la Máxima Distancia entre Tierra y Sol.

RESPUESTAS XVII

17.1 a) 10, (6,4) b) 5, (3.5,3) c) 13, (6,-2.5) d) $10a$, $(4a,3a)$

17.4 d) (6.6,5.9); (1.4,-0.97)

17.2 a) 6,-2 b) 9,-5 c) 8

17.3 (5,3); (3,4)

17.5 V; F; V

17.8 a) 63.43° b) 26.56° c) 0° d) 90°

17.7 a) $2x - y - 5 = 0$ b) $3x + 4y = 12$ c) $y - 3 = 0$ d) $2x - y - 1 = 0$ e) $x + 2y - 5 = 0$
f) $x - 2y + 3 = 0$ g) $x + 2y = 9$ h) $x - 5 = 0$ i) $2x + 3y - 12 = 0$ j) $3x - 2y + 6 = 0$
k) $x = 0$ l) $x - y - 2 = 0$ m) $x + 2y - 10 = 0$ n) $0.57x - y - 0.42 = 0$ o) $x - y - 1 = 0$ p) $y = 3$

17.9 a) $2x-y-7=0$; $x+2y-11=0$ b) $2x+3y-22=0$; $3x-2y-7=0$ c) $x-6=0$; $y-3=0$

17.10 a) (3,2) b) (4,2) c) ? **17.11** a) 67.38° b) 8.13° c) 71.56°

17.12 a) 4 b) 2 c) 3.05 c) 0 **17.13** (4.33,3.67) ; (4.57,5.29) ; (4.33,3.99) ; 21

17.14 a) Circunfererencia. b) Circunf. c) Parábola d) Parábola e) Elipse f) Hipérbola g) Elipse h) Elipse

17.15 a) $x^2+y^2-9=0$ b) $x^2+y^2-10x-6y+30=0$ c) $x^2+y^2-8x-6y=0$
d) $x^2+y^2-10x-8y+32=0$ e) $x^2+y^2-12x-8y+27=0$ f) $x^2+y^2-6x-6y+5=0$
g) $x^2+y^2-6x-8y+16=0$ h) $x^2+y^2-10x-4y+25=0$ i) $x^2+y^2-6x-6y+9=0$

17.16 a) $(0,0),\ \sqrt{7}$ b) $(3,-2),\ 4$ c) $(-3,2),\ 5$ d) $(-1/2,2/5),\ 3/4$

17.17 a) $x^2+y^2=5^2$ b) $(x-4)^2+(y-3)^2=\sqrt{13}^2$ c) $(x-5)^2+(y-3)^2=\sqrt{10}^2$ d) $(x-1)^2+(y-1)^2=3^2$

17.18 a) $x^2+y^2=3^2$ b) $(x-2)^2+(y-1)^2=3^2$ c) $(x-3)^2+(y-1)^2=4^2$

17.19 a) $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$ b) $x^2+y^2-4x-10y=-4$ c) $x^2+y^2=6x+8y$ d) $x^2+y^2-8y=4$
e) $x^2+y^2+2=8x+4y$ f) $x^2+y^2-8x=25$ g) $5x^2+5y^2-32x-8y=34$ h) $x^2+y^2-6x-2y=15$

17.20 a) $y^2-8x=0$ b) $x^2=12y$ c) $y^2-4x-6y+17=0$ d) $x^2-6x-8y+17=0$ e) $y^2+12x=48$
f) $x^2-6x+16y-23=0$ g) $y^2-12x-6y+21=0$ h) $y^2-8x-6y+33=0$ i) $x^2-8x-8y+24=0$

17.21 a) (0,0), (3,0) b) (1,3), (6,3) c) (0,2), (2,2) d) (3,1), (3,7) **17.24** 166 m

17.22 a) $y^2-16x=0$ b) $x^2-8y=0$ c) $y^2-4x-2y+9=0$ d) $x^2-4x-8y+12=0$

17.23 a) $y^2-4x-6y+17=0$; $121y^2+5929=1188x+1078y$ b) $y^2+17=8x+6y$; $y^2+8x=6y+31$

17.25 a) $x^2+4y^2=16$ b) $x^2+4y^2-4x-8y=28$ c) $9x^2+25y^2=225$ d) $16x^2+25y^2=400$
e) $9x^2+25y^2-225=0$ f) $9x^2+5y^2-180=0$ g) $25x^2+9y^2-225=0$
h) $16x^2+25y^2-128x-300y+756=0$ i) $3x^2+4y^2-12x-8y-32=0$
j) $8x^2+9y^2-64x-36y+92=0$ k) $16x^2+7y^2-192x-70y+639=0$ l) $9x^2+25y^2=225$

17.26 a) (0,0); 8; 4 b) (-2,0); 2; 1 c) (2,4); 6; 3 d) (2,-3); 10; 5 **17.28** 27.81 m

17.27 a) $4x^2+9y^2-36=0$ b) $13x^2+23y^2-51x-19y-4=0$ c) $x^2+4y^2-4x-8y-92=0$

17.29 a) $x^2-4y^2-4=0$ b) $x^2-4y^2-6x+8y=11$ c) $16x^2-9y^2=144$ d) $9x^2-16y^2=576$
e) $25x^2-144y^2=3600$ f) $16y^2-9x^2-144=0$ g) $3y^2-4x^2-12=0$ h) $y^2-4x^2-4=0$
i) $9x^2-16y^2-90x+192y=495$ j) $3x^2-y^2-18x+4y+20=0$ k) $5x^2-4y^2-20x+24y=61$
l) $4x^2-y^2-40x+8y+80=0$ m) $16y^2-9x^2-256y+90x+223=0$

17.30 a) (0,0), 8, 2 b) (1,3), 6, 2 c) (5,2), 1, 3 d) (2,3), 5, 7

17.31 a) $x^2-4y^2=4$ b) $9x^2-16y^2-108x+160y=220$ c) $9x^2-16y^2-90x+128y+113=0$

17.32 a) $x^2-4y^2-4=0$ b) $5y^2-4x^2-20=0$

17.33 a) $x^2+y^2-6x-2y-6=0$ b) 13/5; (144/25; 117/25); (21/5,13/5)
c) $x^2+y^2-8x-2y-8=0$ d) $y^2-4x-8y+24=0$ e) $x^2+4y^2-4x-8y-8=0$
f) $x^2+4y^2-R^2=0$ g) Elipse $4x^2+y^2-16x-6y-43=0$ h) $151.02\cdot 10^6$ Km.

ÁLGEBRA

LEYES DE EXPONENTES

$a^m a^n = a^{m+n}$	$(ab)^n = a^n b^n$	$a^0 = 1$	$a\,(b)^n = (a^{1/n} b)^n$	$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$0^a = 1;\ a \neq 0$	$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\sqrt{a} = a^{1/2}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
		$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$		

PRODUCTOS NOTABLES

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

COCIENTES NOTABLES

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1} \quad \text{Todo } n$$
$$\frac{a^n + b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1} \quad n \text{ Impar}$$
$$\frac{a^n - b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - b^{n-1} \quad n \text{ Par}$$
$$\frac{a^n + b^n}{a-b} = ?? \quad \text{(División no exacta)} \quad \text{Ningún } n$$

OPERACIONES CON FRACCIONES

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} + c = \frac{a}{b} + \frac{c}{1} = \frac{a + bc}{b} \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{ac}{b} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \qquad \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \div \frac{c}{1} = \frac{a}{bc}$$

FACTORIZACIÓN

Factor común Monomio: $ab + ac = a(b+c)$

Agrupación de términos: $ax + ay + bx + by = a(x+y) + b(x+y) = (a+b)(x+y)$

Trinomio cuadrado perfecto de una suma y una resta: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$; $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Trinomios de las dos formas: $x^2 + bx + c = (x+u)(x+v)$ $\quad u+v = b,\ uv = c$

$$ax^2 + bx + c = \frac{(ax+u)(ax+v)}{a} \qquad u+v = b,\ uv = ac$$

Suma de cubos: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Diferencia de cubos: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Factorización recíproca: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a\ ;\ u = x + \dfrac{1}{x}$

FUNCIONES DE SUMAS, RESTAS, DOBLES, OPUESTOS, TRANSFORMACIONES

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x \qquad \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \qquad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} \qquad \operatorname{sen} x \cos y = \frac{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \operatorname{sen}\frac{x-y}{2} \qquad \cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} \qquad \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \qquad \tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen}\frac{x+y}{2} \operatorname{sen}\frac{x-y}{2} \qquad \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots + \operatorname{sen} mx = \frac{\operatorname{sen}[mx/2] \operatorname{sen}[(m+1)x/2]}{\operatorname{sen}[x/2]}$$

FUNCIONES DE ÁNGULOS NOTABLES

Grados Rad	0° 0	30° π/6	45° π/4	60° π/3	90° π/2	120° 2π/3	135° 3π/4	150° 5π/6	180° π	270° 3π/2	360° 2π
sen	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	- 1	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	- 1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	- 1	0	1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	- 1	$-\sqrt{3}/3$	0	- ∞	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	- 1	$-\sqrt{3}$	- ∞	0	∞
sec	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{3}/3$	- 1	∞	1
csc	∞	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2	∞	- 1	∞

TEOREMAS

Para resolver Triángulos oblicuángulos se precisa de al menos tres datos, uno de ellos debe ser un lado.

Teorema del seno

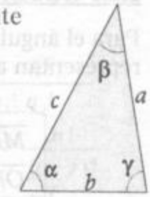
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

Teorema del coseno

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Teorema de la tangente

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$$



TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$y = \operatorname{sen} x \Rightarrow x = \operatorname{arcsen} y = \operatorname{sen}^{-1} y$

$y = \cos x \Rightarrow x = \arccos y = \cos^{-1} y$

$y = \tan x \Rightarrow x = \arctan y = \tan^{-1} y$

$y = \cot x \Rightarrow x = \operatorname{arccot} y = \arctan 1/y$

$y = \sec x \Rightarrow x = \operatorname{arcsec} y = \arccos 1/y$

$y = \csc x \Rightarrow x = \operatorname{arccsc} y = \operatorname{arcsen} 1/y$

$$\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen} y = \operatorname{arcsen}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$$

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} y = \frac{\pi}{2}$$

VALORES GENERALES

Se resumen en la Tabla

Donde n debe ser entero ($n \in \mathbb{Z}$); $\alpha = kx_G$ es el ángulo que determina al valor A.

Ecuación		Solución General
$\operatorname{sen}\alpha = A$	$\alpha = k\,x_G$	$x_G = n180° + (-1)^n\alpha$
$\cos\alpha = A$	$\alpha = k\,x_G$	$x_G = n360° \pm \alpha$
$\tan\alpha = A$	$\alpha = k\,x_G$	$x_G = n180° + \alpha$

TRIGONOMETRÍA

Apéndice B

SISTEMAS DE MEDIDA DE ÁNGULOS

SEXAGESIMAL (DEG) Se escribe A°B'C". Una Circunferencia se divide entre 360°. Un Grado sexagesimal (°) se divide en 60 Minutos ('), un Minuto en 60 Segundos (")

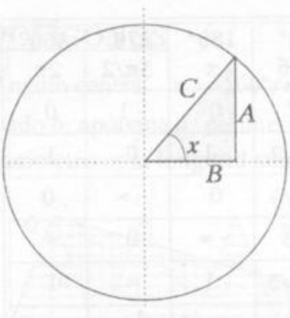
CENTESIMAL (GRAD) Se escribe $A^gB^mC^s$. Una Circunferencia se divide entre 400^g. Un Grado (^{g}) se divide en 100 Minutos (^{m}), Un Minuto en 100 Segundos (^{s}).

RADIÁNICO (RAD) Se escribe como *A* rad. Una Circunferencia se divide en 2π Radianes. Un radián representa al ángulo que corresponde a una longitud de arco igual al radio de la Circunferencia.

Para convertir de un sistema a otro se usan factores de conversión a partir de la siguiente igualdad.

$$360° = 400^g = 2\pi \text{ rad}$$
$$180° = 200^g = \pi \text{ rad}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



$\operatorname{sen} x = A/C$

$\cos x = B/C$

$\tan x = A/B$

$\cot x = B/A$

$\sec x = C/B$

$\csc x = C/A$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\csc x} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

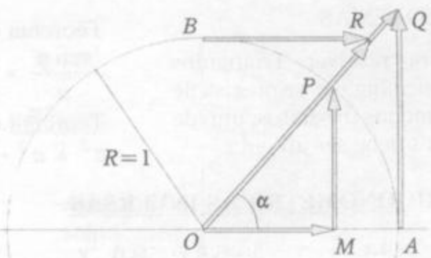
$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Para el ángulo α, las siguientes longitudes, representan a las Funciones indicadas:

$\overline{MP}$: sen α	$\overline{OR}$: csc α
$\overline{OM}$: cos α	$\overline{OQ}$: sec α
$\overline{AQ}$: tan α	$\overline{BR}$: cot α



COMPLEMENTARIOS Dos ángulos son Complementarios si su suma es de 90°

$$\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \qquad \tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$$
$$\csc(90° - \alpha) = \sec\alpha \qquad \sec(90° - \alpha) = \csc\alpha \qquad \cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$$

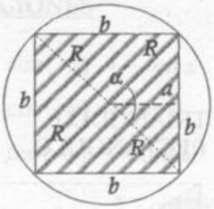
SUPLEMENTARIOS Dos ángulos son Suplementarios si su suma es de 180°

$$\operatorname{sen}(180 - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\csc(180° - \alpha) = \csc\alpha \qquad \sec(180° - \alpha) = -\sec\alpha \qquad \cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha$$

EXPLEMENTARIOS Dos ángulos son Explementarios si su suma es de 360°

$$\operatorname{sen}(360° - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(360° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \tan(360° - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\csc(360° - \alpha) = -\csc\alpha \qquad \sec(360° - \alpha) = \sec\alpha \qquad \cot(360° - \alpha) = -\cot\alpha$$

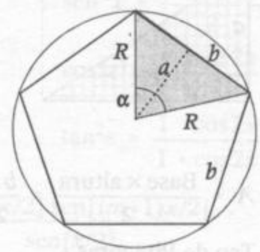
<u>CUADRADOS INSCRITOS</u> El Polígono regular de cuatro lados es un Cuadrado



$\alpha = \dfrac{360°}{4} = 90°$; $b = \sqrt{2}\,R$; $a = \dfrac{b}{2}$ Apotema es la mitad del lado: $a = b/2$

$P = 4b = 4\sqrt{2}\,R = 8a$; $A_{Cuad} = b^2 = 2R^2 = 4a^2$ La suma de sus ángulos interiores es 360°

<u>PENTÁGONOS INSCRITOS</u>



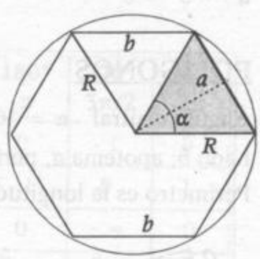
$\alpha = 360°/5 = 72°$; $a = R\cos(\alpha/2) = R\cos 36° = 0.81\,R$

$b = 2R\,\mathrm{sen}(\alpha/2) = 2R\,\mathrm{sen}\,36° = 1.18\,R$

$$A_{Pent} = 5\,\frac{b\,a}{2} = 5R^2\,\mathrm{sen}\,36°\cos 36° = \frac{5R^2\,\mathrm{sen}\,72°}{2} = 2.38\,R^2$$

$$A = \frac{5b^2}{4}\cot\frac{\alpha}{2} = 5a^2\tan\frac{\alpha}{2}$$ Área del Pentágono en términos del lado b, o del apotema a

<u>HEXÁGONOS INSCRITOS</u>



$$\alpha = \frac{360°}{6} = 60° \; ; \; \alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \beta = \frac{180° - \alpha}{2} = 60°$$

$$b = 2R\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2} = R \; ; \; a = R\cos\frac{\alpha}{2} = R\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$ En el Hexágono $b = R$.

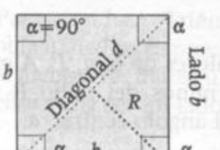
$$A_{Hexg} = 6\,\frac{b\,a}{2} = 6\,\frac{R^2\,\mathrm{sen}\,60°}{2} = 3\,\frac{\sqrt{3}}{2}R^2 = 3\,\frac{\sqrt{3}}{2}b^2 = 2\sqrt{3}\,a^2$$

Área del Hexágono en términos del lado b y del apotema a.

<u>CUADRILÁTEROS</u> Se llama Cuadriláteros a los Polígonos que presentan cuatro lados.

<u>PARALELOGRAMOS</u> Cuando dos pares de lados son paralelos entre si

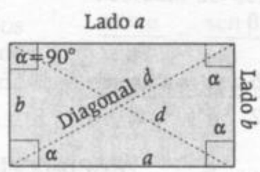
CUADRADO



$P = 4b$; $A = b^2$

$b = \sqrt{2}\,R$; $A = 2R^2$

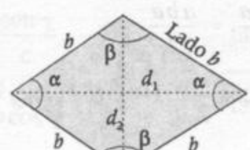
RECTÁNGULO



$P = 2a + 2b$

$A = ab$

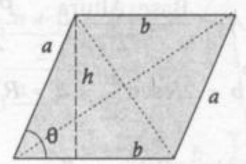
ROMBO



$P = 4b$

$A = (d_1 d_2)/4$

ROMBOIDE

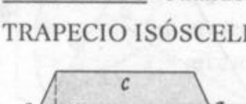


$P = 2(a + b)$

$A = bh = ba\,\mathrm{sen}\,\theta$

<u>TRAPECIOS</u> Cuando un par de lados es paralelo entre si

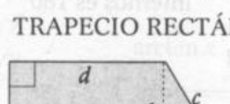
TRAPECIO ISÓSCELES



$P = 2a + b + c$

$$A = \frac{b + c}{2}h = \frac{b + c}{2}a\,\mathrm{sen}\,\theta$$

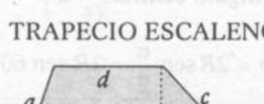
TRAPECIO RECTÁNGULO



$P = a + b + c + d$

$$A = \frac{b + d}{2}a = \frac{b + d}{2}c\,\mathrm{sen}\,\theta$$

TRAPECIO ESCALENO



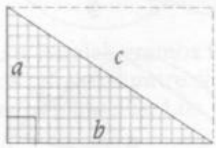
$$P = a + b + c + d \; ; \; A = \frac{b + d}{2}h$$

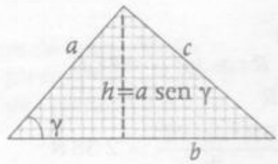
$$A = \frac{b + d}{2}a\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{b + d}{2}c\,\mathrm{sen}\,\phi$$

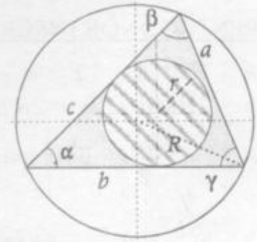
GEOMETRÍA

Apéndice C

TRIÁNGULO RECTÁNGULO	TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO	CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA E INSCRITA







$$A = \frac{\text{Base} \times \text{altura}}{2} = \frac{b\,a}{2}$$

Teo de Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$A = \frac{b\,h}{2} = \frac{a\,b}{2}\,\text{sen}\,\gamma$$

$$s = \frac{P}{2} = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$$

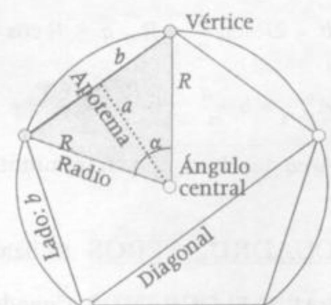
$$R = \frac{a}{2\,\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{2\,\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{2\,\text{sen}\,\gamma}$$

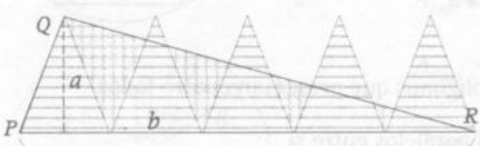
POLÍGONOS

Ángulo central $\alpha = 360°/n$

Lado b; apotema a, perímetro P. Área A_{Pol}

Perímetro es la longitud suma de los lados: $P = nb$





Perímetro: $P = nb$

$$A = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{P\,a}{2} = \frac{n\,b\,a}{2}$$

$$b = 2R\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} \quad a = R\cos\frac{\alpha}{2} \quad P = n\,b \quad A_{Pol} = \frac{n\,b\,a}{2} = \frac{n\,R^2\,\text{sen}\,\alpha}{2}$$

Valores de b, a, P, A en términos del radio R y del ángulo central α.

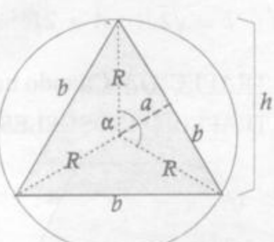
$$A_{Pol} = \frac{n\,b^2}{4}\cot\frac{\alpha}{2} \;;\; A_{Pol} = n\,a^2\tan\frac{\alpha}{2} \;;\; b = 2a\tan\frac{\alpha}{2}$$

Área para el caso de que se conozca solo el lado b, o solo el apotema a

TRIÁNGULOS INSCRITOS

Ángulo central: $\alpha = \dfrac{360°}{3} = 120°$

Suma de ángulos internos es 180°



$$b = 2R\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = 2R\,\text{sen}\,60° = 2R\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,R$$

$$a = R\cos\frac{\alpha}{2} = R\cos 60° = R\,\frac{1}{2} = \frac{R}{2}$$

$$A_{Tri} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,R^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\,b^2 = 3\sqrt{3}\,a^2$$

Área en términos de R, b, a

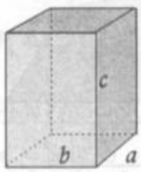
apotema: $a = \dfrac{b}{2\sqrt{3}}$

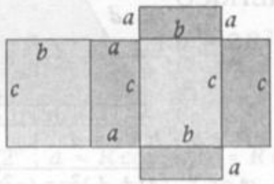
$$h = R + a = \frac{3}{2}\,R \;;\; \frac{a}{h} = \frac{R/2}{3R/2} = \frac{1}{3}$$

La relación de apotema a altura es de 1 a 3

PARALELEPÍPEDOS

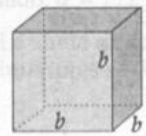
$S = 2(ab + bc + ca)$; $V = abc$

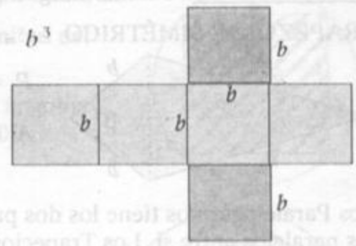




CUBOS

$S = 6b^2$; $V = b^3$



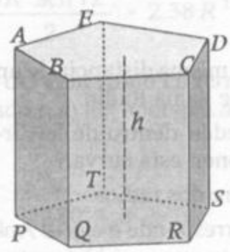


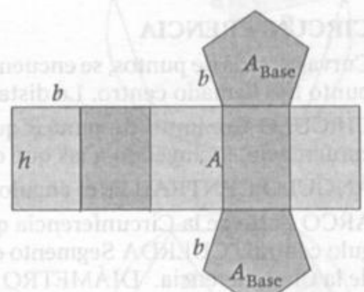
PRISMAS

$A_{Lat} = n(bh)$; $A_{Base} = A_{Polig}$

$S = A_{LatA} + 2A_{Base} = n(bh) + 2A_{Polig}$

$V = A_{Base}h$





Por base superior e inferior se tiene un Polígono, las caras laterales son rectángulos.

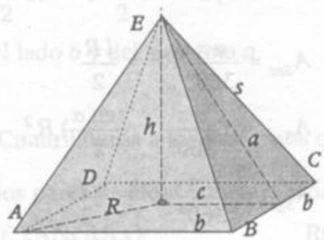
El Volumen de un Prisma es tres veces el Volumen de una Pirámide de la misma altura y misma base. Un Paralelepípedo de base cuadrada es un Prisma. Un Cilindro es un Prisma con un número de lados que tiende a infinito.

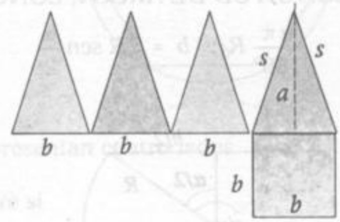
PIRÁMIDES

$A_{Lat} = \frac{(nb)a}{2}$; $A_{Base} = A_{Polig}$

$S = A_{Lat} + A_{Base} = \frac{nba}{2} + A_{Polig}$

$V = \frac{1}{3}A_{Base}h$





Apotema de la Pirámide a
Apotema de la base c

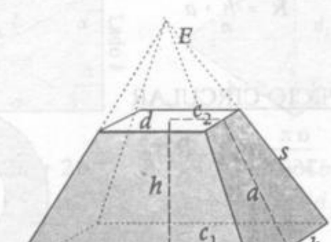
TRONCOS DE PIRÁMIDES

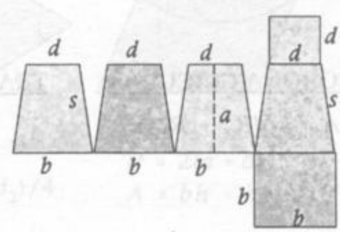
$A_{Lat} = n\frac{b+d}{2}a$; $A_{Base} = A_{Polig}$

$a^2 = h^2 + (c_1 - c_2)^2$

$S = n\frac{b+d}{2}a + A_B + A_{B'}$

$V = \frac{h}{3}(A_B + A_{B'} + \sqrt{A_B A_{B'}})$





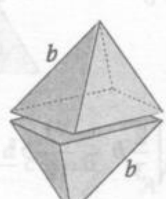
POLIEDROS

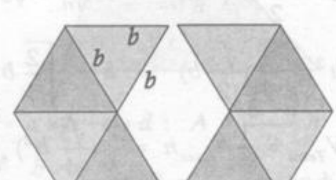
Son cuerpos que presentan n caras que son polígonos regulares son solo 5: El Tetraedro, el Cubo, el Octaedro, el Dodecaedro y el Icosaedro

OCTAEDRO De ocho caras todas conformadas por Triángulos equiláteros

$S = 8(\frac{\sqrt{3}}{4}b^2) = 2\sqrt{3}\,b^2 = 3.4641\,b^2$

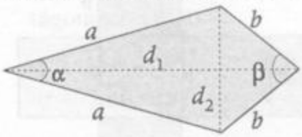
$V = 0.4714\,b^3$





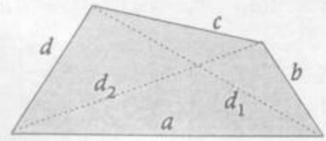
TRAPEZOIDES Cuando ningún par de lados es paralelo

TRAPEZOIDE SIMÉTRICO



$$P = 2(a + b)$$
$$A = \frac{d_1 d_2}{2}$$

TRAPEZOIDE ASIMÉTRICO



$$P = a + b + c + d$$
$$A = \frac{1}{4}\sqrt{4(d_1 d_2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}$$

Los Paralelogramos tiene los dos pares de lados opuestos paralelos entre si. Los Trapecios presentan solos dos lados paralelos. Los Trapezoides ningún paralelismo.

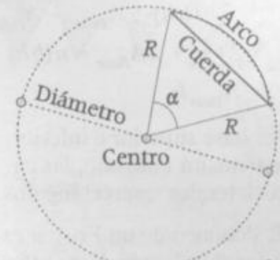
CIRCUNFERENCIA

Curva cerrada de puntos, se encuentran a misma distancia de un punto fijo llamado centro. La distancia se llama Radio.

CÍRCULO Conjunto de puntos que quedan dentro de la Circunferencia, incluyendo a las que componen esta curva.

ÁNGULO CENTRAL Es el ángulo α entre dos radios.

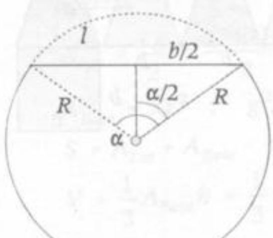
ARCO Parte de la Circunferencia que corresponde a cierto Ángulo central. CUERDA Segmento de Recta que une dos puntos de la Circunferencia. DIÁMETRO Es la cuerda que pasa por el centro. $D = 2R$.



$$P = 2\pi R \; ; \; A = \pi R^2$$

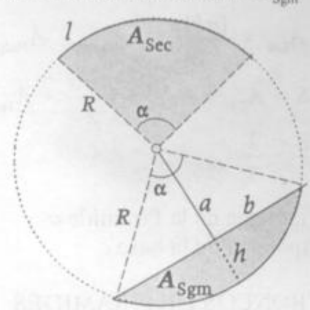
LONGITUD DE ARCO l, LONGITUD DE CUERDA b

$$l = \frac{\alpha\pi}{180°} R \; ; \; b = 2R \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$



SECTOR CIRCULAR A_{Sec}
SEGMENTO CIRCULAR A_{Sgm}

$$A_{Sec} = \frac{\alpha\pi}{360°} R^2 = \frac{l R}{2}$$
$$A_{Sgm} = \left(\frac{\alpha\pi}{360°} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right) R^2$$
$$A_{Sgm} = \frac{\alpha\pi}{360°} R^2 - \frac{b\,a}{2}$$
$$A_{Sgm} = \frac{\alpha\pi}{360°} R^2 - \frac{b\,(R - h)}{2}$$
$$R = h + a$$

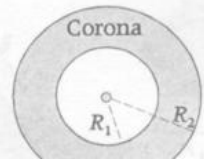


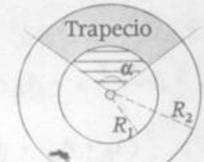
CORONA CIRCULAR

$$A_{Cor} = (R_2^2 - R_1^2)\,\pi$$

TRAPECIO CIRCULAR

$$A_{Tc} = \frac{\alpha\pi}{360°}(R_2^2 - R_1^2)$$

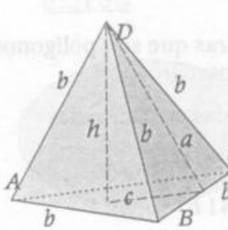


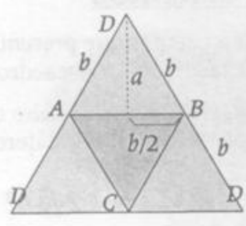


GEOMETRÍA DEL ESPACIO

TETRAEDROS

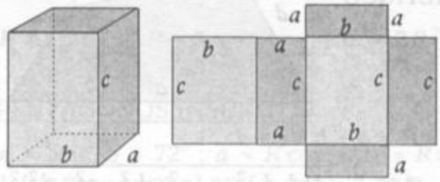
$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} b \; ; \; S_{Tetr} = 4\,A_{Tri} = \sqrt{3}\,b^2$$
$$h^2 = \frac{8}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} b\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2}{3}}\,b$$
$$V_{Tetra} = \frac{1}{3} A_{Base} h = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} b^2\right)\sqrt{\frac{2}{3}}\,b = \frac{\sqrt{2}}{12}\,b^3$$





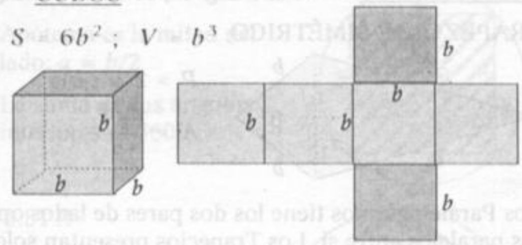
PARALELEPÍPEDOS

$S = 2(ab + bc + ca)$; $V = abc$



CUBOS

$S = 6b^2$; $V = b^3$

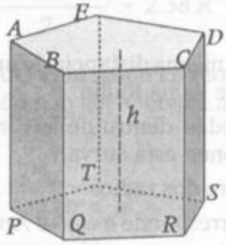


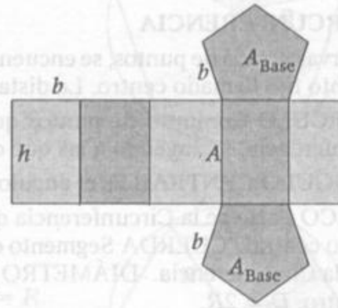
PRISMAS

$A_{Lat} = n(bh)$; $A_{Base} = A_{Polig}$

$S = A_{LatA} + 2A_{Base} = n(bh) + 2A_{Polig}$

$V = A_{Base}h$





Por base superior e inferior se tiene un Polígono, las caras laterales son rectángulos.

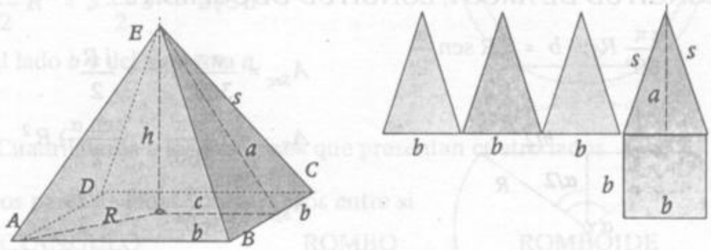
El Volumen de un Prisma es tres veces el Volumen de una Pirámide de la misma altura y misma base. Un Paralelepípedo de base cuadrada es un Prisma. Un Cilindro es un Prisma con un número de lados que tiende a infinito.

PIRÁMIDES

$A_{Lat} = \dfrac{(nb)a}{2}$; $A_{Base} = A_{Polig}$

$S = A_{Lat} + A_{Base} = \dfrac{nba}{2} + A_{Polig}$

$V = \dfrac{1}{3}A_{Base}h$



Apotema de la Pirámide a
Apotema de la base c

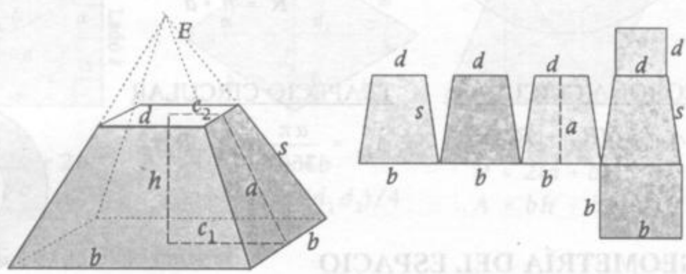
TRONCOS DE PIRÁMIDES

$A_{Lat} = n\dfrac{b+d}{2}a$; $A_{Base} = A_{Polig}$

$a^2 = h^2 + (c_1 - c_2)^2$

$S = n\dfrac{b+d}{2}a + A_B + A_{B'}$

$V = \dfrac{h}{3}(A_B + A_{B'} + \sqrt{A_B A_{B'}})$



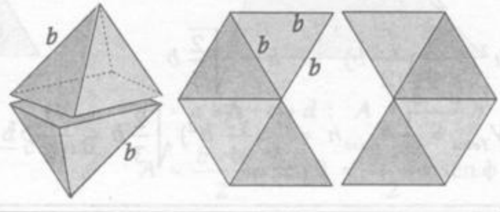
POLIEDROS

Son cuerpos que presentan n caras que son polígonos regulares son solo 5: El Tetraedro, el Cubo, el Octaedro, el Dodecaedro y el Icosaedro

OCTAEDRO De ocho caras todas conformadas por Triángulos equiláteros

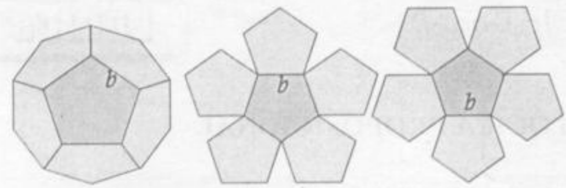
$S = 8(\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2) = 2\sqrt{3}\,b^2 = 3.4641\,b^2$

$V = 0.4714\,b^3$



DODECAEDRO

De doce caras todas conformadas por Pentágonos regulares.

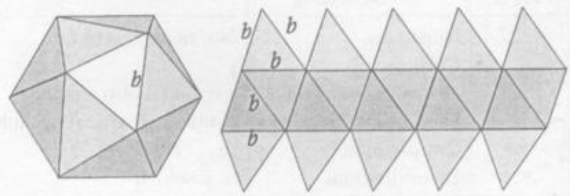


$S = 15\cot 36^\circ b^2 = 20.6457\, b^2$

$V = 7.6631\, b^3$

ICOSAEDRO

Presenta veinte caras todas conformadas por Triángulo Equiláteros.



$S = 5\sqrt{3}\, b^2 = 8.6602\, b^2$

$V = 2.1817\, b^3$

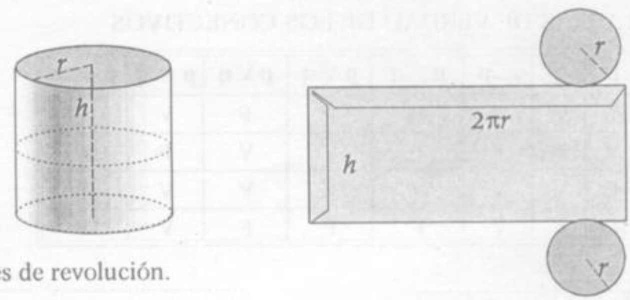
CILINDROS

$A_{Lat} = (2\pi r)h \;;\; A_{Base} = \pi r^2$

$S = 2(A_{Base}) + A_{Lat} = 2\pi r(h + r)$

$V = A_{Base}\, h = \pi r^2 h$

Las bases son Círculos de radio r
la cara lateral es un rectángulo.



Cilindros, Conos y Esferas son Superficies de revolución.

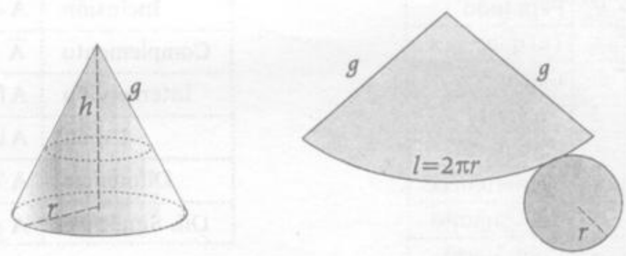
CONO

$$A_{Lat} = \frac{lg}{2} = \frac{(2\pi r)g}{2} = \pi r g$$

$$A_{Base} = \pi r^2 \quad ; \quad g^2 = r^2 + h^2$$

$$S = A_{Lat} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_{Base} h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

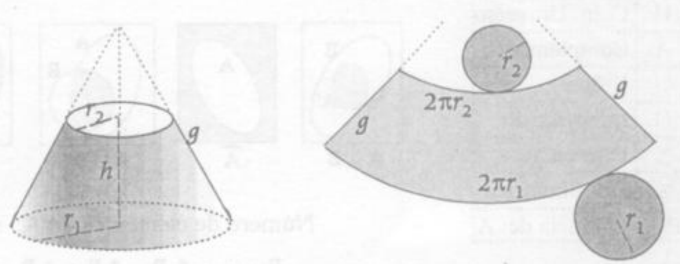


TRONCO DE CONO

$$S = \pi g(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

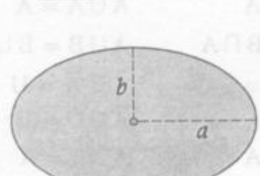
Las bases son Círculos de diferente radio. La cara lateral es un Trapecio circular



ESFERA

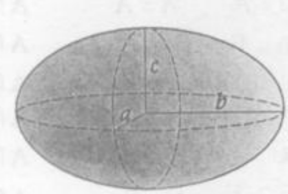
$$S_{Esf} = 4\pi r^2 \;;\; V_{Esf} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

ELIPSE



$$A = \pi a b$$

ELIPSOIDE



$$V = \frac{4}{3}\pi a b c$$

Apéndice D

LÓGICA Y CONJUNTOS

LÓGICA PROPOSICIONAL

CONECTIVO	OPERACIÓN ASOCIADA	SIGNIFICADO
$\sim$	Negación	No; no es cierto que:
$\wedge$	Conjunción	y
$\vee$	Disyunción Inclusiva	y/o ;uno u otro o ambos
$\veebar$	Disyunción Exclusiva	o; uno u otro, pero no ambos
$\Rightarrow$	Condicional	Si ... entonces ...
$<=>$	Bicondicional	Si y solo si

TABLAS DE VERDAD DE LOS CONECTIVOS

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \Rightarrow q$	$p <=> q$
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

PROPOSICIÓN Es colección de números, palabras o símbolos, de los cuales tiene sentido el afirmar si es Verdadero (V) o Falso (F)

TAUTOLOGÍA Es Proposición compuesta, Verdadera para cualquier valor de verdad de sus componentes.

CONTRADICCIÓN Es Proposición compuesta, Falsa para cualquier valor de verdad de sus componentes.

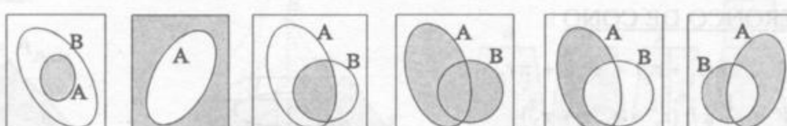
RAZONAMIENTOS (O Argumentos) son afirmaciones de que cierta Proposición (La conclusión Q) es una conclusión de otras Proposiciones (Las premisas P_i)

Si $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_i) \Rightarrow Q$ es una Tautología, entonces el Razonamiento es válido.

TEORÍA DE CONJUNTOS

$\forall$	Para todo
$/$	Tal que
$\exists$	Existe
$\nexists$	No existe
$\in$	Pertenece
$\notin$	No pertenece
$\subset$	Subconjunto
$\emptyset$	Conj. Vacío
U	Conj. Universo
$\bar{A}$	Complemento
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\setminus$	Diferencia
$\triangle$	Dif. Simétrica
$P_{(A)}$	Potencia de: A

Inclusión	$A \subset B = \{x / x \in A \Rightarrow x \in B\}$
Complemento	$\bar{A} = \{x / x \notin A\}$ $\bar{\bar{A}} = A$
Intersección	$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$
Unión	$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$
Diferencia	$A \setminus B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$
Dif. Simétrica	$A \triangle B = \{x / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$



$A \subset B$ $\bar{A}$ $A \cap B$ $A \cup B$ $A \setminus B$ $A \triangle B$

Número de elementos de A: $\eta_{(A)}$; $\eta_{(A \cup B)} = \eta_{(A)} + \eta_{(B)} - \eta_{(A \cap B)}$

$$\eta_{(A \cup B \cup C)} = \eta_{(A)} + \eta_{(B)} + \eta_{(C)} - \eta_{(A \cap B)} - \eta_{(A \cap C)} - \eta_{(B \cap C)} + \eta_{(A \cap B \cap C)}$$

PROPIEDADES

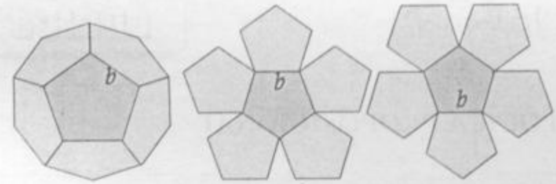
$\emptyset \subset A$ $A \subset A$	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$	$A \setminus A = \emptyset$	$A \triangle A = \emptyset$
$A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$	$A \setminus B \neq B \setminus A$	$A \triangle B = B \triangle A$
$A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$	$A \cup \bar{A} = U$	$A \setminus \bar{A} = A$	$A \triangle \bar{A} = U$
$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup U = U$	$A \setminus \emptyset = A$	$A \triangle \emptyset = A$
$\bar{U} = \emptyset$ $\bar{\emptyset} = U$	$A \cap U = A$	$A \cup \emptyset = A$	$A \setminus U = \emptyset$	$A \triangle U = \bar{A}$
$\bar{A} = \bar{B} \Rightarrow A = B$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$		$A \setminus B = A \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
$\bar{\bar{A}} = A$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$		$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

DODECAEDRO

De doce caras todas conformadas por Pentágonos regulares.

$S = 15 \cot 36^\circ b^2 = 20.6457\, b^2$

$V = 7.6631\, b^3$

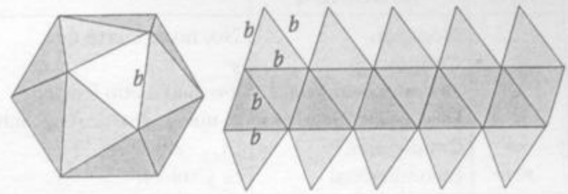


ICOSAEDRO

Presenta veinte caras todas conformadas por Triángulo Equiláteros.

$S = 5\sqrt{3}\, b^2 = 8.6602\, b^2$

$V = 2.1817\, b^3$

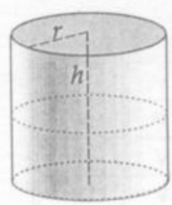


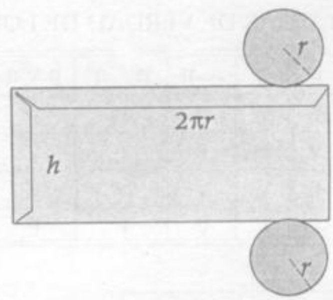
CILINDROS

$A_{Lat} = (2\pi r)\, h \;;\; A_{Base} = \pi r^2$

$S = 2\,(A_{Base}) + A_{Lat} = 2\pi r (h + r)$

$V = A_{Base}\, h = \pi r^2 h$





Las bases son Círculos de radio r
la cara lateral es un rectángulo.

Cilindros, Conos y Esferas son Superficies de revolución.

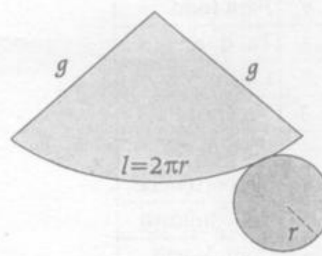
CONO

$$A_{Lat} = \frac{l g}{2} = \frac{(2\pi r) g}{2} = \pi r g$$

$A_{Base} = \pi r^2 \quad ; \quad g^2 = r^2 + h^2$

$S = A_{Lat} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2$

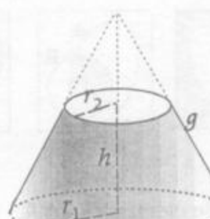
$$V = \frac{1}{3} A_{Base}\, h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

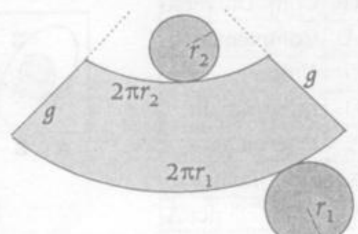


TRONCO DE CONO

$S = \pi g (r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$$V = \frac{1}{3} \pi h \,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$



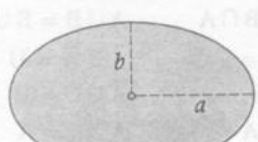


Las bases son Círculos de diferente radio. La cara lateral es un Trapecio circular

ESFERA

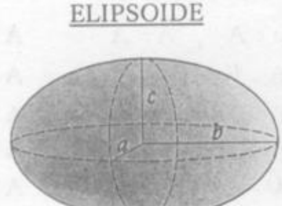
$S_{Esf} = 4\pi r^2 \;;\; V_{Esf} = \frac{4}{3}\pi r^3$

ELIPSE



$A = \pi a b$

ELIPSOIDE



$$V = \frac{4}{3} \pi a b c$$