圈量子引力简介

王英洁

2020 年 8 月 21 日

目录

符号说明

$\mathcal{D}_a$	Ashtekar 联络对应的协变导数
$\bar{\mathcal{A}}$	量子位型空间
β	Barbero-Immiriz 参数
$\mathcal{A}$	经典位型空间，su (2) 值联络的集合
T^*M	流形 M 的余切丛
R	标量曲率
Cyl^k	k 阶可微的柱函数的集合
Cyl^k_γ	图 γ 上 k 阶可微的柱函数的集合
$\mathcal{D}^*_{\mathrm{Diff}}$	微分同胚约束的解空间
$\mathrm{Diff}\,(M)$	M 的微分同胚群
$\boldsymbol{\epsilon}$	体元
$\boldsymbol{\varepsilon}$	适配体元
Γ	图的集合
γ	图
κ	$\kappa = 8\pi \mathrm{G}$
$\mathcal{H}_\gamma$	图 γ 上的 kinematical 希尔伯特空间
$\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}$	kinematical 希尔伯特空间

$\mathcal{H}^0_{\text{kin}}$ $\mathcal{H}_{\text{kin}}$ 中规范不变的态空间

$\mathscr{L}$ 拉氏量

$\mathcal{L}_v T^{\cdots}{}_{\cdots}$ 张量 $T^{\cdots}{}_{\cdots}$ 沿矢量 v^a 的李导数

$\text{Lor}\,(M)$ M 上的洛伦兹度规的集合

M 主约束

$\mu_{\text{A-L}}$ Ashtekar-Lewandowski 测度

G 牛顿引力常数

π_N N 对应的共轭动量

$\tilde{\mathcal{L}}_v T^{\cdots}{}_{\cdots}$ 李导数的空间投影，见 (2.17)

$\mathcal{S}_t$ t 时刻的空间，是一张超曲面

$\mathfrak{B}$ holonomy-flux 代数

$\mathcal{S}\,(M)$ M 上的超空间，即度规的微分同胚等价类的集合

TM 流形 M 的切丛

$\dot{T}^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 空间张量 $T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}$ 的时间导数，见 (2.18)

η_{IJ} 内部空间上固定的洛伦兹度规

∇_a 协变导数

$\omega_a{}^I{}_J$ spin connection

π^{ab} h_{ab} 对应的共轭动量

π^a N_a 对应的共轭动量

$\tau_i = \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_i$ su (2) 的一组正交归一基底

$\tilde{E}^a{}_i$ 权为 1 的密度化的 3 标架

$\tilde{P}^a{}_i$ 与 Ashtekar 联络共轭的动量

$A^i{}_a$ Ashtekar 联络

D_a 协变外微分，或旋量场的协变导数

$e^a{}_I$ 标架场

$e^I{}_a$ 对偶标架场

$F^i{}_{ab}$ Ashtekar 联络对应的曲率

$F_{abI}{}^J$ 曲率二形式

h_{ab} 空间诱导度规

K_{ab} 外曲率

N^a 位移矢量（shift vector）

n_a 一般指法余矢

$P_i(S)$ 面 S 上的 flux

V^a 矢量约束

$\wedge$ 外积

C 标量约束

$C(f)$ smeared 标量约束

$C_{\mathrm{Diff}}(v)$ smeared 微分同胚约束

$D^j, D^j{}_{mn}$ Wigner D 矩阵

$E(\gamma)$ 图 γ 的边的集合

f_γ 图 γ 上的柱函数

$G(\Lambda)$ smeared 高斯约束

H 哈密顿量

$h_c(A)$ 联络 A 沿 c 的 holonomy

$j^k f$ f 的 k-jet

L_i, R_i SU (2) 上的左不变矢量场和右不变矢量场

M 光滑流形，通常指时空

N 时移函数（lapse function）

T_s spin-network function

$V(\gamma)$ 图 γ 的顶点的集合

$V(v)$ smeared 矢量约束

第二章　引力理论的正则表述

2.1　ADM formulation

为了研究时间演化及对引力进行量子化，我们需要考虑广义相对论的哈密顿描述。我们主要依照文献 [1-3] 展开。在拉格朗日描述下，考虑 n 维光滑可定向流形 M ，记 M 上的洛伦兹度规的集合为 $\mathrm{Lor}\,(M)$，由于微分同胚不变性的规范对称性，广义相对论的位型空间为 $\mathcal{S}\,(M) := \mathrm{Lor}\,(M)\,/\mathrm{Diff}\,(M)$。理论的拉氏量为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{EH}}[j^2 g] := \frac{1}{2\kappa} R(j^2 g)\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.1}$$

其中 $\kappa = 8\pi G$ 是耦合常数，$j^2 g$ 是场 g 的 2-jet，$R[j^2 g]$ 是标量曲率，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是与 g 适配的体元。也可采用标量密度 $\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{EH}}$ 表示，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{EH}}[j^2 g] = \tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{EH}}\boldsymbol{\epsilon}, \tag{2.2}$$

$$\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2\kappa} f R(j^2 g), \tag{2.3}$$

其中 $\boldsymbol{\epsilon}$ 是任意定向相容体元，f 是满足 $\boldsymbol{\varepsilon} = f\boldsymbol{\epsilon}$ 的正函数。例如，在局部坐标系 $\{x^\mu\}$ 下，若坐标系为右手系，即 n 形式 $\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ 与定向相容，则可取定 $\boldsymbol{\epsilon} = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$，此时 $f = \sqrt{-\det g}$，其中 $\det g$ 指坐标系下 $(g_{\mu\nu})$ 的行列式。于是此时有

$$\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-\det g}R(j^2 g). \tag{2.4}$$

易证明，Einstein-Hilbert 作用量

$$S_{\mathrm{EH}}[g] = \frac{1}{2\kappa}\int_M R[g] \tag{2.5}$$

的运动方程为真空 Einstein 方程 证明见69页

$$Ric - \frac{1}{2}Rg = 0, \tag{2.6}$$

或采取抽象指标形式，写作

$$R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=0. \tag{2.7}$$

以下张量全部采用抽象指标记号，改用 g_{ab} 表示度规张量，而 g 表示其行列式。

现在考虑哈密顿描述，这要求我们把时间从时空中分离出来。设时空 (M,g) 整体双曲，则对时空有拓扑上的要求：$M\cong\mathbb{R}\times\mathcal{S}$，其中 $\mathcal{S}$ 是 3 维流形[1]。设有微分同胚 $\phi\colon M\to\mathbb{R}\times\mathcal{S}$，称为一个分层（foliation）。注意到任取 $\psi\in\mathrm{Diff}\,(M)$，$\phi\circ\psi$ 依然是分层，分层的集合与 $\mathrm{Diff}\,(M)$ 一一对应。记 $\mathcal{S}_t:=\phi^{-1}(\{t\}\times\mathcal{S})$，这是类空超曲面，称为 t 时刻的空间。记自然投影 $\pi\colon\mathbb{R}\times\mathcal{S}\to\mathbb{R}$, $\pi_{\mathcal{S}}\colon\mathbb{R}\times\mathcal{S}\to\mathcal{S}$，则有时间函数 $t:=\pi\circ\phi\colon M\to\mathbb{R}$。此时 $\mathcal{S}_t$ 就是等 t 面。$\pi_{\mathcal{S}}\circ\phi$ 可以将 $\mathrm{T}\mathcal{S}$ 拖回到 M 上，其元素称为空间矢量，截面称为空间矢量场；进而可以定义空间张量丛和空间张量场。[1]另外，超曲面族 $\{\mathcal{S}_t\}$ 还定义了法余矢丛，其中每个余矢量正比于该点的 $\mathrm{d}t$。

考虑 g 的 $3+1$ 分解。我们记 n_a 是单位法余矢场，即 $n^an_a=-1$，则可以验证

$$h_{ab}:=g_{ab}+n_an_b \tag{2.8}$$

是空间对称张量，且它是 g 在 $\mathrm{T}\mathcal{S}_t$ 上的限制，我们称其为 g 所诱导的空间度规，这是我们引入的第一个空间量。再考虑“时间部分”，我们引入矢量场

$$t^a:=(\pi\circ\phi)^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a, \tag{2.9}$$

其中 $(\partial/\partial t)^a$ 是 $\mathbb{R}$ 中的自然坐标基矢场。则有

$$t^a\nabla_a t=-1, \tag{2.10}$$

t^a 的积分曲线汇（作为观测者世界线）标志了在微分同胚 ϕ 下不同时空点如何“对齐”为“同一空间点”，它们定义了一个参考系。在每点 $p\in\mathcal{S}_t$ 作直和分解

$$t^a=Nn^a+N^a,\quad N>0,\quad N^a\in\mathrm{T}_p\mathcal{S}_t, \tag{2.11}$$

称 N 为时移函数（lapse function），N^a 为位移矢量（shift vector）场，这是我们引入的第 2、3 个空间量。由 (2.10) 容易算得

$$n_a=-N\nabla_a t, \tag{2.12}$$

现在我们来说明，给定 ϕ，即有了 $\{\mathcal{S}_t\}$、t 和 t^a 的条件下，空间量 (h_{ab},N,N_a) 和时空量 g_{ab} 互相确定，因而 (h_{ab},N,N_a) 可以作为位型变量。由 g_{ab} 给出 (h_{ab},N,N_a) 的

[1]我们之后不区分 $\mathcal{S}$ 上的张量和将它拖回到 M 上得到的 M 上的空间张量。

过程已经在上面写出，而给定 (h_{ab}, N, N_a) 后，首先将空间张量 h_{ab} 视作 $\mathcal{S}$ 上的度量张量，取逆再拖回到 M 上得空间张量 h^{ab}。由 (2.11) 知

$$n^a = \frac{1}{N}\left(t^a - N^a\right), \tag{2.13}$$

其中 $N^a = h^{ab}N_b$ 。则

$$g^{ab} = -n^a n^b + h^{ab} = -\frac{1}{N^2}\left(t^a - N^a\right)\left(t^b - N^b\right) + h^{ab}. \tag{2.14}$$

描述每张超曲面 $\mathcal{S}_t$ 的除了描述内蕴几何的 h_{ab} 之外还有描述它如何嵌入 M 的外曲率 K_{ab}，定义为

$$K_{ab} := h_a{}^c \nabla_c n_b, \tag{2.15}$$

我们即将看到它与 h_{ab} 的共轭动量的联系。这从以下命题即可初见端倪：

命题 2.1.

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab}, \tag{2.16}$$

其中 $\mathcal{L}_n$ 表示沿 n^a 的李导数。 ♢

这里略去证明，可参见 [1-3] 等任何相关教材。还需定义空间量的时间导数，沿 t^a 的李导数是好的候选者，但空间张量的李导数未必还是空间张量，为此定义 $\tilde{\mathcal{L}}_v T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 为 $\mathcal{L}_v T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 的空间投影，即

$$\tilde{\mathcal{L}}_v T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} := h^{a_1}{}_{c_1}\cdots h^{a_k}{}_{c_k} h^{d_1}{}_{b_1}\cdots h^{d_l}{}_{b_l}\mathcal{L}_v T^{c_1\cdots c_k}{}_{d_1\cdots d_l}, \tag{2.17}$$

然后即可定义

$$\dot{T}^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} := \tilde{\mathcal{L}}_t T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} = N\tilde{\mathcal{L}}_n T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} + \tilde{\mathcal{L}}_N T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}, \tag{2.18}$$

则得到

$$\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + 2D_{(a}N_{b)}, \tag{2.19}$$

其中 D_a 是 $\mathcal{S}_t$ 上与 h_{ab} 相容的联络。

现在，我们把 $\mathscr{L}_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-\det g}R$ 用空间量表示。需要借助 Gauss 方程

$$\mathcal{R}_{abc}{}^d = h_a{}^k h_b{}^l h_c{}^m h_n{}^d R_{klm}{}^n - 2K_{c[a}K_{b]}{}^d, \tag{2.20}$$

其中 $\mathcal{R}_{abc}{}^d$ 是 3 维流形 $\mathcal{S}_t$ 上空间度规 h_{ab} 对应的曲率；$T_{[\cdots]}$ 表示对张量 T 反称化。略去所有计算过程，我们得到

$$\tilde{\mathscr{L}} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{h}N\left(\mathcal{R} - K^2 + K_{ab}K^{ab}\right), \tag{2.21}$$

其中 h 是 h_{ab} 的分量矩阵的行列式，$\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{S}_t$ 上的标量曲率，由 h_{ab} 及其二阶空间导数确定，而 K_{ab} 通过

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}\left(\dot{h}_{ab} - 2D_{(a}N_{b)}\right) \tag{2.22}$$

由 $\dot{h}_{ab}, N, N_a, D_a$ 决定，并有 $K = h^{ab}K_{ab}$。这说明 (2.21) 的确是位型变量 (h_{ab}, N, N_a) 及其时间导数及空间导数的函数。可求得共轭动量

$$\pi_N = \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \dot{N}} = 0, \quad \pi^a = \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \dot{N}_a} = 0, \tag{2.23}$$

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{h}\left(K^{ab} - Kh^{ab}\right), \tag{2.24}$$

其中 π_N, π^a, π^{ab} 分别是与 N, N_a, h_{ab} 共轭的动量。(2.23) 给出两个初级约束。去掉一些边界项后，有哈密顿量

$$H[N, N_a, h_{ab}, \pi^{ab}] = \frac{1}{2\kappa}\int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^3x \left(NC + N_a V^a\right), \tag{2.25}$$

其中

$$C := -\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\mathcal{R} + \frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\left(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{1}{2}\pi^2\right), \tag{2.26}$$

$$V^a := -2D_b\pi^{ab}. \tag{2.27}$$

对 N, N_a 变分给出两个次级约束，称为标量约束和矢量约束

$$C = 0, \quad V^a = 0, \tag{2.28}$$

可以证明 (2.23), (2.28)已经穷尽了所有约束。

定义 smeared 约束

$$C(f) := \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^3x\, Cf, \quad V(v) := \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^3x\, V_a v^a, \tag{2.29}$$

其中 $f \in C^\infty(\mathcal{S}), v \in \Gamma(\mathrm{T}\mathcal{S})$ 满足适当的边界条件，可以算得泊松括号

$$\begin{aligned}
\{V(u), V(v)\} &= 2\kappa V(\mathcal{L}_u v), \\
\{V(v), C(f)\} &= 2\kappa C(v(f)), \\
\{C(f), C(f')\} &= 2\kappa V(fD^a f' - f'D^a f),
\end{aligned} \tag{2.30}$$

又因

$$H = \frac{1}{2\kappa}\left(C(N) + V(\boldsymbol{N})\right), \tag{2.31}$$

知 H, C, V 两两泊松括号弱等于零（在约束面上为零），并且是约束的线性组合，故 ADM 形式的广义相对论是第一类约束系统。

还可讨论标量约束和矢量约束生成的规范变换。任给一个用 h_{ab}, π^{ab} 构造的张量，例如 t_{ab}，可以算出

$$\begin{aligned} \{V(v), t_{ab}\} &\approx 2\kappa \mathcal{L}_v t_{ab}, \\ \{C(N), t_{ab}\} &\approx 2\kappa N \tilde{\mathcal{L}}_n t_{ab}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

故也常称标量约束为哈密顿约束。

2.2 量子几何动力学（QGD）

接下来对上一节得到的广义相对论的哈密顿表述进行正则量子化，得到量子几何动力学（Quantum Geometrodynamics）。但由于体现规范对称性的两个第一类约束的存在，我们需要先介绍这样的约束系统的量子化方法。

第一类约束哈密顿系统的量子化最早由狄拉克发展[4]，其核心是先连同规范自由度一起量子化得到 $\mathcal{H}_{\text{kin}}$，然后将经典约束方程 $\{C_I = 0\}_{I \in \mathcal{I}}$ 变为物理状态应满足的方程 $\left\{\hat{C}_I \left|\psi\right\rangle = 0\right\}_{I \in \mathcal{I}}$，即定义物理态空间 $\mathcal{H}_{\text{phy}}$ 是所有 $\ker \hat{C}_I$ 之交。

对于 ADM 形式的广义相对论来说，N 和 N_a 只是拉氏乘子，位型变量为 h_{ab}，即空间几何的动力学。可选择 $\mathcal{H}_{\text{kin}}$ 为某种“$L^2(\mathrm{Riem}\,(\mathcal{S}))$”，其中 $\mathrm{Riem}\,(\mathcal{S})$ 表示 $\mathcal{S}$ 上黎曼度规的集合，并采用标准的 Schrödinger 表示

$$\begin{aligned} \hat{h}_{ab} \left|\psi\right\rangle &\leftrightarrow h_{ab} \psi(h), \\ \hat{\pi}^{ab} \left|\psi\right\rangle &\leftrightarrow -\mathrm{i}\hbar \frac{\delta}{\delta h_{ab}} \psi(h). \end{aligned} \tag{2.33}$$

$\hat{V}^a \left|\psi\right\rangle = 0$ 定义了空间微分同胚不变的态空间 $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$，再通过哈密顿约束

$$\hat{C} \left|\psi\right\rangle = 0 \tag{2.34}$$

得到物理态空间。这便是量子几何动力学，方程 (2.34) 即为著名的 Wheeler DeWitt 方程。

但这一方法存在很多问题，例如一开始 $\mathcal{H}_{\text{kin}}$ 就难以定义；在标准 Schrödinger 表示下 $\hat{C}$ 是否是定义良好的算符也不清楚。当经典层面已经有了高度对称性约化，例如宇宙学的情况下，才能很好地使用 Wheeler DeWitt 方程。

2.3 Palatini 作用量和 Holst 作用量

Palatini 作用量是 Hilbert 作用量的改写，在流形上引入标架来替代度规。[5-6]

设 (V,η_{IJ}) 是一个带有选定洛伦兹度规的四维矢量空间，称为内部空间（internal space），其中 $I,J,\cdots$ 是 V 上的抽象指标，以与 M 上的区分。我们考虑 $\mathrm{T}M$ 的平凡化，设有矢量丛同构 $e\colon M\times V\to \mathrm{T}M$，$e(x):=e(x,\cdot)$ 是从 V 到 T_xM 的线性同构。按照抽象指标记号，将它记为 $e^a{}_I(x)$，称为 M 上的标架场（frame field，4 维情况又特别地称为 tetrads）。逐点取逆得到从同构 $e^{-1}\colon \mathrm{T}M\to M\times V$，$e^{-1}(x):=e^{-1}(x,\cdot)$ 按照抽象指标记号写为 $e^I{}_a(x)$，称为对偶标架场，则有

$$e^a{}_I e^I{}_b=\delta^a{}_b,\quad e^I{}_a e^a{}_J=\delta^I{}_J. \tag{2.35}$$

若满足

$$g_{ab}=\eta_{IJ}e^I{}_a e^J{}_b, \tag{2.36}$$

则称标架场是正交归一的。

我们可以选择 V 上的基底 $\{\xi^I{}_\mu\}$ 及其对偶基 $\{\xi^\mu{}_I\}$，其中 $\mu=0,1,2,3$，使得 $\eta_{IJ}:=\eta_{\mu\nu}\xi^\mu{}_I\xi^\nu{}_J=-\xi^0{}_I\xi^0{}_J+\sum_i\xi^i{}_I\xi^i{}_J$，其中 $i=1,2,3$，并定义

$$e^a{}_\mu:=\xi^I{}_\mu e^a{}_I, \tag{2.37}$$

则 $\{e^a{}_\mu\}$ 构成 M 上每点的正交基底。

正交归一标架丛 FM 上的联络等价于其伴丛上的联络。将 $\xi^I{}_\mu$ 视为 $\mathrm{SO}(3,1)$ 矢量丛 $E=M\times V$ 上截面的基底，将任意截面展开为 $v^I=v^\mu\xi^I{}_\mu$，定义标准平直联络

$$\partial_a v^I:=(\partial_a v^\mu)\,\xi^I{}_\mu, \tag{2.38}$$

任何联络（或称协变导数）可表为

$$\nabla_a v^I=\partial_a v^I+\omega_a{}^I{}_J v^J, \tag{2.39}$$

其中 $\omega_a{}^I{}_J$ 是 $\mathrm{so}(3,1)$ 值一形式，称为 spin connection。设 TM 上的联络为

$$\nabla_a v^b=\partial_a v^b+\Gamma^b{}_{ac}v^c, \tag{2.40}$$

$e^I{}_a$ 可视为 $E\otimes \mathrm{T}^*M$ 上的截面，规定取坐标基底和截面基底 $\xi^I{}_\mu$ 下分量定义偏导算符，而协变导数通过满足莱布尼兹律的方式推广到各种张量积丛，有

$$\nabla_a v^I=e^I{}_b\nabla_a v^b+v^b\nabla_a e^I{}_b, \tag{2.41}$$

由 (2.39),(2.40) 可得

$$\nabla_a e^I{}_b = \partial_a e^I{}_b - \Gamma^c{}_{ab} e^I{}_c + \omega_a{}^I{}_J e^J{}_b. \tag{2.42}$$

对矢量值一形式 $v^I{}_a$，定义外微分

$$\mathrm{d}_a\, v^I{}_b := 2\partial_{[a} v^I{}_{b]} \equiv \xi^I{}_\mu\, \mathrm{d}_a\, v^\mu{}_b, \tag{2.43}$$

以及协变外微分

$$D_a v^I{}_b := 2\nabla_{[a} v^I{}_{b]} \equiv \mathrm{d}_a\, v^I{}_a + \omega_a{}^I{}_J \wedge v^J{}_b, \tag{2.44}$$

其中 $\omega_a{}^I{}_J \wedge v^J{}_b := 2\omega_{[a}{}^I{}_{|J|} v^J{}_{b]}$。定义挠率形式为

$$T^I{}_{ab} := D_a e^I{}_b = \mathrm{d}_a\, e^I{}_b + \omega_a{}^I{}_J \wedge e^J{}_b, \tag{2.45}$$

及曲率二形式

$$F_{abI}{}^J := D_a \omega_{bI}{}^J = \mathrm{d}_a\, \omega_{bI}{}^J + \omega_{aI}{}^K \wedge \omega_{bK}{}^J. \tag{2.46}$$

定义 Palatini 作用量

$$S_{\text{Palatini}}[e,\omega] := \frac{1}{4\kappa}\int_M \varepsilon_{IJKL} e^I{}_a \wedge e^J{}_b \wedge F_{cd}{}^{KL}, \tag{2.47}$$

其中 ε_{IJKL} 是 V 上与 η_{IJ} 适配的体元。对 $\omega_a{}^I{}_J$ 变分可得

$$D_a e^I{}_b = 0, \tag{2.48}$$

此运动方程即要求联络无挠，此条件由 $e^I{}_a$ 唯一确定了相容联络 $\omega_a{}^I{}_J$。当无挠条件满足时，容易验证 Palatini 作用量变回 Hilbert-Einstein 作用量

$$S_{\text{Palatini}}[e,\omega(e)] = \frac{1}{2\kappa}\int_M R[e], \tag{2.49}$$

其中

$$R[e] = R[g(e)] = F_{ab}{}^{IJ} e^a{}_I e^b{}_J, \tag{2.50}$$

故无需详细计算即知对 e 变分可得 Einstein 场方程。

注意到 Palatini 作用量引入了一个 $\mathrm{SO}(3,1)$ 局域规范对称性

$$\left(e^I{}_a, \omega_a{}^I{}_J\right) \mapsto \left(\Lambda_J{}^I e^J{}_a, \Lambda_K{}^I \omega_a{}^K{}_L \Lambda^L{}_J + \Lambda_K{}^I\, \mathrm{d}_a\, \Lambda^K{}_J\right), \tag{2.51}$$

或更紧凑地写为

$$(e,\omega) \mapsto \left(\Lambda^{-1} e, \Lambda^{-1}\omega\Lambda + \Lambda^{-1}\,\mathrm{d}\Lambda\right), \tag{2.52}$$

这引入一个第二类约束。

在圈量子引力中十分重要的是 Palatini 作用量的 Holst 修正

$$
\begin{aligned}
S_{\text{Holst}} &:= S_{\text{Palatini}} - \frac{1}{2\kappa}\int_M \frac{1}{\beta} e^I{}_a \wedge e^J{}_b \wedge F_{cdIJ} \\
&= -\frac{1}{2\kappa}\int_M \operatorname{tr}\left[\left(*\,(e\wedge e) + \frac{1}{\beta}\,(e\wedge e)\right)\wedge F\right],
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

容易验证后一项是拓扑项，不改变运动方程。β 称为 Barbero-Immiriz 参数。

2.4 Ashtekar 变量

Abhay Ashtekar 在 1986 年给出了广义相对论的一组新的正则变量[7-8]，使约束表达式得到了大幅简化，便于考虑量子引力，后来成为了圈量子引力的基础。以下参照 [6] 予以简单介绍，相关内容也可参考 [2-3, 5]。

从 Holst 作用量出发，我们考虑 $3+1$ 分解，其含义与之前第2.1节中相同，即选择时空的分层 $\phi\colon M \to \mathbb{R}\times\mathcal{S}$，将物理量分解。每点的直和分解 $\mathrm{T}_x M = \mathrm{Span}\,\{n^a(x)\}\oplus \mathrm{T}_x\mathcal{S}$ 被 $e^I{}_a$ 映为 $V = \mathrm{Span}\,\{n^I(x)\}\oplus V_{\mathcal{S}}(x)$，其中 $n^I = e^I{}_a n^a$。注意到法矢场 n^a 仅与 ϕ 和 g_{ab} 有关，而同一个 g_{ab} 对应的 $e^I{}_a$ 还存在 $\mathrm{SO}\,(3,1)$ 规范自由度，为了方便可以部分固定规范，即固定内部矢量场 n^I，例如本文中取为第零基矢 $\xi^I{}_0$。则规范群约化为 $\mathrm{SO}\,(3)$ 。每点的 $V_{\mathcal{S}}$ 同构于一固定的三维线性空间 W，于是在标架 $e^a{}_I$ 将 $\mathrm{T}M$ 平凡化为 $E = M\times V$ 后，时空的 $3+1$ 分解又将其（局部地）直和分解为 $(M\times\mathbb{R})\oplus(M\times W)$。用 $i,j,k,\cdots$ 作为 W 上的抽象指标，记 $q^i{}_I(x)$ 为 $V_{\mathcal{S}}$ 到 W 的同构映射。记 $h^I{}_J = \delta^I{}_J + n^I n_J$ 为 V 到 $V_{\mathcal{S}}$ 的投影映射，$h_{IJ} = \eta_{IK}h^K{}_J$ 即 $V_{\mathcal{S}}$ 上的诱导黎曼度规，它等于 $e^a{}_I e^b{}_J h_{ab}$。我们知道 $\varepsilon_{abc} := n^d\varepsilon_{dabc}$ 给出 $\mathcal{S}$ 上的诱导体元，其标架版本为 $\varepsilon_{IJK} := n^L\varepsilon_{LIJK}$。通过同构 $q^i{}_I$ 及其逆 $q^I{}_i$ 有 $h^i{}_I := q^i{}_J h^J{}_I$ 及 W 上的度规 $h_{ij} := q^I{}_i q^J{}_j h_{IJ}$ 与体元 $\varepsilon_{ijk} := q^I{}_i q^J{}_j q^K{}_k \varepsilon_{IJK}$。

称 $e^a{}_i := h^a{}_b e^b{}_I q^I{}_i$ 为空间标架。接下来分解 $\omega_a{}^{IJ}$，定义

$$
K^I{}_a := h^b{}_a n_J \omega_b{}^{IJ}, \quad K^i{}_a := q^i{}_I K^I{}_a, \tag{2.54}
$$

及

$$
\omega^I{}_a := h^b{}_a n_J {}^\star\omega_b{}^{IJ}, \quad \omega^i{}_a := q^i{}_I \omega^I{}_a, \tag{2.55}
$$

其中 $\star$ 是 V 上的 Hodge 对偶，

$$
{}^\star\omega_a{}^{IJ} = \frac{1}{2}\varepsilon^{IJKL}\omega_{aKL}. \tag{2.56}
$$

注 1 取 $\xi^i{}_\alpha := q^i{}_I \xi^I{}_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$ 为 W 上的基底。令 $(\tau_\alpha)^i{}_j := \varepsilon^i{}_{kj}\xi^k{}_\alpha$，则三个 $\tau_\alpha{}^i{}_j$ 是 $\mathrm{so}\,(3)$ 的基底，$\tau_i{}^j{}_k := \tau_\alpha{}^j{}_k \xi^\alpha{}_i$ 是从 W 到 $\mathrm{so}\,(3)$ 的同构。则 $\omega_a{}^i{}_j = \omega^k{}_a \tau_k{}^i{}_j$ 是 $\mathrm{so}\,(3)$ 值联络。 ♠

命题 2.2. 当 $\omega_a{}^I{}_J$ 是与 $e^I{}_a$ 相容的洛伦兹联络时，$\omega^k{}_a\tau_k{}^i{}_j = \varepsilon^i{}_{kj}\omega^k{}_a$ 是与 $e^i{}_a$ 相容的 $\mathrm{so}\,(3)$ 值联络，$K^i{}_a = e^i{}_d h^c{}_a h^d{}_b \nabla_c n^b$ 是外曲率的标架形式。 ◇

定义 Ashtekar 联络

$$A^i{}_a := \omega^i{}_a + \beta K^i{}_a, \tag{2.57}$$

可以算得

命题 2.3. 以 *Ashtekar* 联络为位型变量，相应的共轭动量为

$$\tilde{P}^a{}_i := \frac{1}{\kappa\beta}\tilde{E}^a{}_i, \tag{2.58}$$

其中

$$\tilde{E}^a{}_i = \sqrt{|\det h|}e^a{}_i = \det(e)e^a{}_i \tag{2.59}$$

是权为 *1* 的密度化的 *3* 标架。 ◇

联络 $A^i{}_a$ 或 $A_a{}^i{}_j = \varepsilon^i{}_{kj}A^k{}_a$ 对应新的导数算子 $\mathcal{D}_a$，记其曲率为

$$\begin{aligned} F_{abi}{}^j &:= \varepsilon_{ik}{}^j \,\mathrm{d}_a A^k{}_b + \left(\varepsilon_{il}{}^k A^l{}_a\right) \wedge \left(\varepsilon_{km}{}^j A^m{}_b\right) \\ &= \varepsilon_{ik}{}^j \,\mathrm{d}_a A^k{}_b + A^j{}_a \wedge A_{ib}, \end{aligned} \tag{2.60}$$

或

$$F^i{}_{ab} = \mathrm{d}_a A^i{}_b + \varepsilon^i{}_{jk}A^j{}_a \wedge A^k{}_a. \tag{2.61}$$

命题 2.4. 在 *Ashtekar* 变量下，*Holst* 作用量改写为

$$S = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \int_{\mathcal{S}_t} \mathrm{d}^3x \left(\tilde{P}^a{}_i \dot{A}^i{}_a - \tilde{\mathscr{H}}(A^i{}_a, \tilde{P}^a{}_i, N, N^a, \Lambda^i)\right), \tag{2.62}$$

哈密顿量

$$H = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^3x\, \tilde{\mathscr{H}} := \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^3x \left(\Lambda^i G_i + N^a V_a + NC\right), \tag{2.63}$$

其中三个约束

$$\begin{aligned} G_i &= \mathcal{D}_a \tilde{P}^a{}_i = \partial_a \tilde{P}^a{}_i + \varepsilon_{ij}{}^k A^j{}_a \tilde{P}^a{}_k, \\ V_a &= \tilde{P}^b{}_i F^i{}_{ab} - \frac{1+\beta^2}{\beta} K^i{}_a G_i, \\ C &= \frac{\kappa\beta^2}{2\sqrt{|\det h|}} \tilde{P}^a{}_i \tilde{P}^b{}_j \left[\varepsilon^{ij}{}_k F^k{}_{ab} - \left(1+\beta^2\right) K^i{}_a \wedge K^j{}_b\right] \\ &\quad + \kappa\left(1+\beta^2\right) G^i \partial_a \left(\frac{\tilde{P}^a{}_i}{\sqrt{|\det h|}}\right) \end{aligned} \tag{2.64}$$

是 $Gauss$ 约束（规范对称引入的新约束）、矢量约束、标量约束，而

$$\Lambda^i := q^i{}_I t^a n_J {}^\star\omega_a{}^{IJ} \tag{2.65}$$

和 N^a, N 是拉氏乘子。 $\diamondsuit$

由于 $A^i{}_a$ 和 $\tilde{P}^a_i$ 是共轭变量，其泊松括号为

$$\left\{A^i{}_a(x), \tilde{P}^b_j(y)\right\} = \delta^i{}_j \delta^b{}_a \delta(x,y), \tag{2.66}$$

定义 smeared 约束

$$G(\Lambda) := \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^3x\, \Lambda^i G_i, \tag{2.67}$$

它是局部 SO(3) 规范变换的生成元，即

命题 2.5.

$$\left\{A^i{}_a, G(\Lambda)\right\} = -\mathcal{D}_a \Lambda^i, \quad \left\{\tilde{P}^a_i, G(\Lambda)\right\} = \varepsilon_{ij}{}^k \Lambda^j \tilde{P}^a_k\,. \tag{2.68}$$

$\diamondsuit$

V_a 和 C 都包含一部分 SO(3) 规范变换，一种方便的做法是重新定义 smeared 微分同胚约束

$$C_{\mathrm{Diff}}(v) := \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^3x \left(v^a \tilde{P}^b_i F^i{}_{ab} - v^a A^i{}_a G_i\right) \tag{2.69}$$

代替矢量约束，可以算得

命题 2.6.

$$\left\{A^i{}_a, C_{Diff}(v)\right\} = \mathcal{L}_v A^i{}_a, \quad \left\{\tilde{P}^a_i, C_{Diff}(v)\right\} = \mathcal{L}_v \tilde{P}^a_i\,, \tag{2.70}$$

$\diamondsuit$

并在 smeared 标量约束中去掉 G_i 项，即

$$C_{\mathrm{H}}(f) = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^3x\, f(x)\tilde{C}(x) := \frac{\kappa\beta^2}{2}\int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}^3x\, f \frac{\tilde{P}^a_i \tilde{P}^b_j}{\sqrt{|\det h|}} \left[\varepsilon^{ij}{}_k F^k{}_{ab} - \left(1+\beta^2\right) K^i{}_a \wedge K^j{}_b\right], \tag{2.71}$$

称为哈密顿约束，有如下约束代数

命题 2.7.

$$
\begin{aligned}
\left\{G(\Lambda), G(\Lambda')\right\} &= G\left(\left[\Lambda, \Lambda'\right]\right), \\
\{G(\Lambda), C_{\mathit{Diff}}(v)\} &= -G(\mathcal{L}_v \Lambda), \\
\{G(\Lambda), C_H(f)\} &= 0, \\
\{C_{\mathit{Diff}}(u), C_{\mathit{Diff}}(v)\} &= C_{\mathit{Diff}}([u, v]), \\
\{C_{\mathit{Diff}}(v), C_H(f)\} &= -C_H(v(f)), \\
\left\{C_H(f), C_H(f')\right\} &= -C_{\mathit{Diff}}(S(f, f')) - G\left(S^a(f, f') A^i{}_a\right) \\
&\qquad - \left(1 + \beta^2\right) G\left(\frac{\left[\tilde{P}(f), \tilde{P}(f')\right]}{|\det q|}\right),
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

其中

$$
S^a(f, f') := f D^a f' - f' D^a f, \tag{2.73}
$$

而 $\tilde{P}(f)$ 指的是 $\tilde{P}^a{}_i D_a f$。 $\diamondsuit$

至此，我们基本构建了 Ashtekar 变量下的哈密顿理论，以 Ashtekar 联络 $A^i{}_a$ 和动量 $\tilde{P}^a_i$ 为正则变量，约束方程加上（为哈密顿量补上边界项的）哈密顿方程即等价于 Einstein 场方程。于是，广义相对论被改写为了一个具有紧致规范群的规范理论，可以参考非阿贝尔规范理论已有的工具进行量子引力的探索，这就是圈量子引力的由来。

最早 Ashtekar 于 1986 年所发表的 Ashtekar 变量[7] 是选择 $\beta = -\mathrm{i}$ 的情况，此时可以注意到约束的表达式极为简洁：

$$
\begin{aligned}
G_i &= \mathcal{D}_a \tilde{P}^a{}_i, \\
V_a &= \tilde{P}^b{}_i F^i{}_{ab}, \\
C &= \frac{\kappa \beta^2}{2\sqrt{|\det h|}} \tilde{P}^a{}_i \tilde{P}^b{}_j \varepsilon^{ij}{}_k F^k{}_{ab},
\end{aligned}
\tag{2.74}
$$

但缺点是要引入复联络，相当于考虑复化的广义相对论。为了得到物理的信息，需要引入“实性条件”，即把物理状态限制在复相空间中的一个截面上，以保证由 Ashtekar 变量诱导的 h_{ab} 和 K_{ab} 为实张量。在研究过程中物理学家们发现，实性条件给量子化带来了大量困难，于是 1994 年 Barbero 引入了上文所述的实值 Barbero-Immiriz 参数 β 代替 $-\mathrm{i}$，于是有了实变量理论。实 Ashtekar 变量理论与复 Ashtekar 变量理论相比，虽然约束表达式多出了被称为“Lorentz 项”的附加项，复杂了一些，但消除了实性条件，综合来看要更简洁方便一些，因此普遍采用实变量理论。

附录 A　第二章中的计算

A.1　ADM formulation

命题 A.1. 易证明，*Einstein-Hilbert* 作用量

$$S_{EH}[g]=\frac{1}{2\kappa}\int_M R[g] \tag{A.1}$$

的运动方程为真空 *Einstein* 方程

$$Ric-\frac{1}{2}Rg=0, \tag{A.2}$$

或采取抽象指标形式，写作

$$R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=0. \tag{A.3}$$

◇

证明 考虑时空 (M,g_{ab}) 及 M 上的一族度规 $g_{ab}(\lambda)$，满足 $g_{ab}(0)=g_{ab}$，则任何依赖度规的量 T 的变分为

$$\delta T\left(g_{ab}\right):=\left.\frac{\mathrm{d}T\left(g_{ab}(\lambda)\right)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}. \tag{A.4}$$

注意到

$$\delta\tilde{\mathscr{L}}=\underbrace{\sqrt{-g}g^{ab}\,\delta R_{ab}}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\sqrt{-g}R_{ab}\,\delta g^{ab}}_{\mathrm{II}}+\underbrace{R\,\delta\sqrt{-g}}_{\mathrm{III}}, \tag{A.5}$$

首先考虑与 $g_{ab}(\lambda)$ 适配的导数算符 $\overset{\lambda}{\nabla}_a$，假定与 ∇_a 相差 $C^c{}_{ab}(\lambda)$，即

$$(\nabla_a-\overset{\lambda}{\nabla}_a)\,\omega_b=C^c{}_{ab}(\lambda)\omega_c, \tag{A.6}$$

通过 $\overset{\lambda}{\nabla}_a g_{bc}(\lambda)=0$ ，与计算克氏符类似，可算得

$$C^c{}_{ab}(\lambda)=\frac{1}{2}g^{cd}(\lambda)\left(\nabla_a g_{bd}(\lambda)+\nabla_b g_{ad}(\lambda)-\nabla_d g_{ab}(\lambda)\right), \tag{A.7}$$

进而考虑 $\overset{\lambda}{\nabla}_a$ 相应的黎曼张量 $R_{abc}{}^d(\lambda)$，按照定义，有

$$
\begin{aligned}
R_{abc}{}^d(\lambda)\omega_d &= 2\overset{\lambda}{\nabla}_{[a}\overset{\lambda}{\nabla}_{b]}\omega_c \\
&= \overset{\lambda}{\nabla}_a\left(\nabla_b\omega_c - C^d{}_{bc}(\lambda)\omega_d\right) - \overset{\lambda}{\nabla}_b\left(\nabla_a\omega_c - C^d{}_{ac}(\lambda)\omega_d\right) \\
&= \left(\nabla_a\nabla_b\omega_c - C^d{}_{ab}(\lambda)\nabla_d\omega_c - C^d{}_{ac}(\lambda)\nabla_b\omega_d\right) \\
&\quad - \left[\nabla_a\left(C^d{}_{bc}(\lambda)\omega_d\right) - C^e{}_{ab}(\lambda)C^d{}_{ec}(\lambda)\omega_d - C^e{}_{ac}(\lambda)C^d{}_{be}(\lambda)\omega_d\right] \\
&\quad - \left(\nabla_b\nabla_a\omega_c - C^d{}_{ba}(\lambda)\nabla_d\omega_c - C^d{}_{bc}(\lambda)\nabla_a\omega_d\right) \\
&\quad + \left[\nabla_b\left(C^d{}_{ac}(\lambda)\omega_d\right) - C^e{}_{ba}(\lambda)C^d{}_{ec}(\lambda)\omega_d - C^e{}_{bc}(\lambda)C^d{}_{ae}(\lambda)\omega_d\right] \\
&= R_{abc}{}^d\omega_d - 2\left(\nabla_{[a|}C^d{}_{b]c}(\lambda)\right)\omega_d + 2C^e{}_{[a|c|}(\lambda)C^d{}_{b]e}(\lambda)\omega_d,
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

即

$$
R_{abc}{}^d(\lambda) = R_{abc}{}^d - 2\nabla_{[a}C^d{}_{b]c}(\lambda) + 2C^e{}_{c[a}(\lambda)C^d{}_{b]e}(\lambda), \tag{A.9}
$$

$$
R_{ab}(\lambda) = R_{acb}{}^c(\lambda) = R_{ab} - 2\nabla_{[a}C^c{}_{c]b}(\lambda) + 2C^e{}_{b[a}(\lambda)C^c{}_{c]e}(\lambda), \tag{A.10}
$$

由于 $C^c{}_{ab}(0)=0$，求导得

$$
\delta R_{ab} = -2\nabla_{[a}\delta C^c{}_{c]b} = \nabla_c\delta C^c{}_{ab} - \nabla_a\delta C^c{}_{cb}, \tag{A.11}
$$

而由 (A.7)得

$$
\begin{aligned}
\delta C^c{}_{ab} &= \frac{1}{2}\delta g^{cd}\left(\nabla_a g_{bd} + \nabla_b g_{ad} - \nabla_d g_{ab}\right) + \frac{1}{2}g^{cd}\left(\nabla_a\delta g_{bd} + \nabla_b\delta g_{ad} - \nabla_d\delta g_{ab}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{cd}\left(\nabla_a\delta g_{bd} + \nabla_b\delta g_{ad} - \nabla_d\delta g_{ab}\right), \\
\delta C^c{}_{cb} &= \frac{1}{2}g^{cd}\left(\nabla_c\delta g_{bd} + \nabla_b\delta g_{cd} - \nabla_d\delta g_{cb}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{cd}\nabla_b\delta g_{cd},
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

代入 (A.11) 得

$$
\begin{aligned}
\delta R_{ab} &= \frac{1}{2}g^{cd}\nabla_c\left(\nabla_a\delta g_{bd} + \nabla_b\delta g_{ad} - \nabla_d\delta g_{ab}\right) - \frac{1}{2}g^{cd}\nabla_a\nabla_b\delta g_{cd} \\
&= \frac{1}{2}g^{cd}\left(\nabla_c\nabla_a\delta g_{bd} + \nabla_c\nabla_b\delta g_{ad} - \nabla_c\nabla_d\delta g_{ab} - \nabla_a\nabla_b\delta g_{cd}\right),
\end{aligned}
\tag{A.13}
$$

则 (A.5) 中的 I 为

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \sqrt{-g}g^{ab}\,\delta R_{ab}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\nabla^d\nabla^b\delta g_{bd} + \nabla^d\nabla^a\delta g_{ad} - g^{ab}\nabla^d\nabla_d\delta g_{ab} - g^{cd}\nabla^a\nabla_a\delta g_{cd}\right)\\ &= \sqrt{-g}\left(\nabla^a\nabla^b\,\delta g_{ab} - g^{bc}\nabla^a\nabla_a\,\delta g_{bc}\right)\\ &= \sqrt{-g}\nabla_a v^a,\end{aligned} \tag{A.14}$$

其中

$$v^a := \nabla^b\,\delta g_{ab} - g^{bc}\nabla_a\,\delta g_{bc}\,, \tag{A.15}$$

故这一项仅为边界项。

对 $\delta^a{}_b = g^{ac}g_{cb}$ 两边变分得关系

$$\delta g_{ab} = -g_{ac}g_{bd}\,\delta g^{cd}\,, \quad \delta g^{ab} = -g^{ac}g^{bd}\,\delta g_{cd}\,, \tag{A.16}$$

故得 (A.5) 中的 II 为

$$\begin{aligned}\mathrm{II} &= \sqrt{-g}R_{ab}\,\delta g^{ab}\\ &= -\sqrt{-g}R_{ab}g^{ac}g^{bd}\,\delta g_{cd}\\ &= -\sqrt{g}R^{ab}\,\delta g_{ab}\,,\end{aligned} \tag{A.17}$$

最后考虑 III，注意到若记 ϵ_{abcd} 为坐标体元，有行列式表达式

$$g = \frac{1}{4!}\epsilon^{abcd}\epsilon^{efgh}g_{ae}g_{bf}g_{cg}g_{dh}, \tag{A.18}$$

则

$$\delta g = \frac{1}{3!}\epsilon^{abcd}\epsilon^{efgh}g_{ae}g_{bf}g_{cg}\delta g_{dh}, \tag{A.19}$$

记

$$T^{dh} := \frac{1}{3!}\epsilon^{abcd}\epsilon^{efgh}g_{ae}g_{bf}g_{cg}, \tag{A.20}$$

则显然它对称，迹为 $4g$，有

$$T^{dh} = gg^{dh} + S^{dh}, \tag{A.21}$$

其中 S^{dh} 无迹。另一方面，

$$
\begin{aligned}
T^{dh}g_{hl} &= \frac{1}{3!}\epsilon^{abcd}\epsilon^{efgh}g_{ae}g_{bf}g_{cg}g_{hl} \\
&= \frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\sigma\gamma}g_{\delta\eta}\left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^d(\mathrm{d}x^\eta)_l \\
&= \epsilon^{012\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}g_{0\alpha}g_{1\beta}g_{2\gamma}g_{\delta\eta}\left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^d(\mathrm{d}x^\eta)_l \\
&= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}g_{0\alpha}g_{1\beta}g_{2\gamma}g_{\delta 3}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^d(\mathrm{d}x^3)_l \\
&= g\delta^d{}_l,
\end{aligned}
\tag{A.22}
$$

其中倒数第二行中 η 必取 3 是因为，否则，不妨设 η 取 0，则 α 与 δ 对称，与 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 缩并为 0。则可知 $S^{dh}=0$，

$$
T^{dh} = \frac{1}{3!}\epsilon^{abcd}\epsilon^{efgh}g_{ae}g_{bf}g_{cg} = gg^{dh}, \tag{A.23}
$$

故

$$
\delta g = gg^{ab}\,\delta g_{ab}\,, \tag{A.24}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{III} &= R\,\delta\sqrt{-g} \\
&= -\frac{R}{2\sqrt{-g}}\,\delta g \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-g}Rg^{ab}\,\delta g_{ab}\,,
\end{aligned}
\tag{A.25}
$$

故

$$
\delta\tilde{\mathscr{L}} = \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III} = \sqrt{-g}\nabla_a v^a - \sqrt{-g}\left(R^{ab}-\frac{1}{2}Rg^{ab}\right)\delta g_{ab}\,, \tag{A.26}
$$

可得真空场方程。 □

注 4 1. 也可采用矩阵的语言，使用伴随矩阵为工具计算 δg，参见 [2]。

2. 也可考察 $\mathscr{L}=R\varepsilon$，则需要计算适配体元的变分。梁灿彬老师在 [2] 的下册第 9 页中写道

> ……对 g_{ab} 变分时就必须考虑 ε 的相应变分，从而给计算带来麻烦。

进而得出用标量密度 $\tilde{\mathscr{L}}$ 更合适的结论。然而鄙人实际算了发现没觉得体元的变分有多复杂……见下文。

记 $\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda)$ 是与 $g_{ab}(\lambda)$ 适配的体元，则

$$g^{ae}(\lambda)g^{bf}(\lambda)g^{cg}(\lambda)g^{dh}(\lambda)\varepsilon_{abcd}(\lambda)\varepsilon_{efgh}(\lambda) = -4!, \tag{A.27}$$

对 λ 求导得

$$\begin{aligned} 0 &= 4\left(\delta g^{ae}\right) g^{bf} g^{cg} g^{dh} \varepsilon_{abcd}\varepsilon_{efgh} + 2g^{ae} g^{bf} g^{cg} g^{dh} \varepsilon_{abcd}\delta\varepsilon_{efgh} \\ &= -4 \times 3! \times g_{ae}\, \delta g^{ae} + 2\varepsilon^{efgh}\, \delta\varepsilon_{efgh}\,, \end{aligned} \tag{A.28}$$

故

$$\begin{aligned} \varepsilon^{abcd}\, \delta\varepsilon_{abcd} &= -2 \times 3! \times g^{ab}\, \delta g_{ab} \\ &= -\frac{1}{2} 4! g^{ab}\, \delta g_{ab} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{efgh}\left(\varepsilon_{efgh} g^{ab}\, \delta g_{ab}\right), \end{aligned} \tag{A.29}$$

两边取对偶形式去掉 $\boldsymbol{\varepsilon}$，知

$$\delta\varepsilon_{abcd} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd} g^{ef}\, \delta g_{ef}\,. \tag{A.30}$$

算完适配体元变分后，即可算得

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L} &= g^{ab}\, \delta(R_{ab})\, \boldsymbol{\varepsilon} - R^{ab}\, \delta(g_{ab})\, \boldsymbol{\varepsilon} + R\, \delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \left(\nabla_a v^a\right) \boldsymbol{\varepsilon} - \left(R^{ab} - \frac{1}{2} R g^{ab}\right) \delta g_{ab}\, \boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{A.31}$$

从而得到场方程。 ♠

参考文献

[1] WALD R M. General Relativity[M]. Chicago: The University of Chicago Press, 1989 (引用页: 13-15).

[2] 梁灿彬. 微分几何入门与广义相对论[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2009 (引用页: 13, 15, 20, 72).

[3] THIEMANN T. Modern Canonical Quantum General Relativity[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. DOI: 10.1017/CBO9780511755682 (引用页: 13, 15, 20).

[4] P.A.M.Dirac. Lectures on Quantum Mechanics[M/OL]. [S.l.]: Dover Publications, 2001. https://books.google.com.hk/books?id=GVwzb1rZW9kC (引用页: 17).

[5] BAEZ J, MUNIAIN J P. Gauge Fields, Knots and Gravity[M/OL]. Singapore: World Scientific, 1994. eprint: https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/2324. https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/2324. DOI: 10.1142/2324 (引用页: 18, 20).

[6] ASHTEKAR A, LEWANDOWSKI J. Background Independent Quantum Gravity: A Status Report[J]. Class. Quant. Grav., 2004, 21: R53. arXiv: gr-qc/0404018 [gr-qc]. DOI: 10.1088/0264-9381/21/15/R01 (引用页: 18, 20).

[7] ASHTEKAR A. New Variables for Classical and Quantum Gravity[J]. Phys. Rev. Lett., 1986, 57: 2244-2247. DOI: 10.1103/PhysRevLett.57.2244 (引用页: 20, 23).

[8] ASHTEKAR A. New Hamiltonian Formulation of General Relativity[J]. Phys. Rev. D, 1987, 36: 1587-1602. DOI: 10.1103/PhysRevD.36.1587 (引用页: 20).