

# 圈量子引力简介

王英洁

2020 年 9 月 6 日



# 目录

第一章 简介	9
第二章 引力理论的正则表述	13
2.1 ADM formulation	13
2.2 量子几何动力学 (QGD)	17
2.3 Palatini 作用量和 Holst 作用量	18
2.4 Ashtekar 变量	20
第三章 正则圈量子引力：量子化程序	25
3.1 量子化的准备工作	25
3.2 第一类约束系统的量子化	26
3.2.1 Refined Algebraic Quantization (RAQ)	26
3.2.2 Master Constraint Approach	29
第四章 正则圈量子引力的运动学：代数及其表示	31
4.1 Holonomy-Flux 代数 $\mathfrak{B}$	31
4.2 $\mathfrak{B}$ 的表示与 kinematical 希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\text{kin}}$	34
4.2.1 量子位型空间 $\bar{\mathcal{A}}$	34
4.2.2 $\bar{\mathcal{A}}$ 上的拓扑	36
4.2.3 $\bar{\mathcal{A}}$ 上的测度	37
4.2.4 $\mathfrak{B}$ 在 $\mathcal{H}_{\text{kin}}$ 上的表示	40
第五章 量子约束的求解及动力学	43
5.1 量子高斯约束	43
5.2 量子微分同胚约束	47
5.3 量子动力学——哈密顿约束	48

<b>第六章 正则圈量子引力的应用及发展</b>	<b>51</b>
6.1 量子几何——面积算符 . . . . .	51
6.2 圈量子引力中的相干态 . . . . .	52
6.3 圈量子宇宙学 . . . . .	54
<b>第七章 协变圈量子引力——spinfoam 模型</b>	<b>55</b>
7.1 单复形的对偶复形 . . . . .	56
7.2 三维欧式引力: Ponzano-Regge 模型 . . . . .	56
7.3 BF 理论与引力 . . . . .	58
7.4 BF 理论的 spinfoam 量子化 . . . . .	59
7.5 经典 spinfoam 引力 . . . . .	60
7.6 $SL(2, \mathbb{C})$ 的不可约酉表示 . . . . .	61
7.7 边界态及 LQG . . . . .	62
7.8 spinfoam 配分函数与跃迁振幅 . . . . .	63
7.9 相干态表示 . . . . .	65
7.10 半经典极限与离散几何 . . . . .	66
<b>附录 A 第二章中的计算</b>	<b>69</b>
A.1 ADM formulation . . . . .	69
<b>参考文献</b>	<b>77</b>

# 符号说明

$\mathcal{D}_a$  Ashtekar 联络对应的协变导数

$\bar{\mathcal{A}}$  量子位型空间

$\beta$  Barbero-Immiriz 参数

$\mathcal{A}$  经典位型空间,  $\mathfrak{su}(2)$  值联络的集合

$T^*M$  流形  $M$  的余切丛

$R$  标量曲率

$\text{Cyl}^k$   $k$  阶可微的柱函数的集合

$\text{Cyl}_\gamma^k$  图  $\gamma$  上  $k$  阶可微的柱函数的集合

$\mathcal{D}_{\text{Diff}}^*$  微分同胚约束的解空间

$\text{Diff}(M)$   $M$  的微分同胚群

$\epsilon$  体元

$\varepsilon$  适配体元

$\Gamma$  图的集合

$\gamma$  图

$\kappa$   $\kappa = 8\pi G$

$\mathcal{H}_\gamma$  图  $\gamma$  上的 kinematical 希尔伯特空间

$\mathcal{H}_{\text{kin}}$  kinematical 希尔伯特空间

$\mathcal{H}_{\text{kin}}^0$   $\mathcal{H}_{\text{kin}}$  中规范不变的态空间

$\mathcal{L}$  拉氏量

$\mathcal{L}_v T^{\cdots}$  张量  $T^{\cdots}$  沿矢量  $v^a$  的李导数

$\text{Lor}(M)$   $M$  上的洛伦兹度规的集合

$\mathbf{M}$  主约束

$\mu_{\text{A-L}}$  Ashtekar-Lewandowski 测度

$G$  牛顿引力常数

$\pi_N$   $N$  对应的共轭动量

$\tilde{\mathcal{L}}_v T^{\cdots}$  李导数的空间投影, 见 (2.17)

$\mathcal{S}_t$   $t$  时刻的空间, 是一张超曲面

$\mathfrak{B}$  holonomy-flux 代数

$\mathcal{S}(M)$   $M$  上的超空间, 即度规的微分同胚等价类的集合

$TM$  流形  $M$  的切丛

$\dot{T}^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_l}$  空间张量  $T^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_l}$  的时间导数, 见 (2.18)

$\eta_{IJ}$  内部空间上固定的洛伦兹度规

$\nabla_a$  协变导数

$\omega_a^I{}_J$  spin connection

$\pi^{ab}$   $h_{ab}$  对应的共轭动量

$\pi^a$   $N_a$  对应的共轭动量

$\tau_i = \frac{i}{2} \sigma_i$   $\text{su}(2)$  的一组正交归一基底

$\tilde{E}_i^a$  权为 1 的密度化的 3 标架

$\tilde{P}_i^a$  与 Ashtekar 联络共轭的动量

$A_a^i$  Ashtekar 联络

$D_a$	协变外微分, 或旋量场的协变导数
$e^a_I$	标架场
$e^I_a$	对偶标架场
$F^i_{ab}$	Ashtekar 联络对应的曲率
$F_{abI}{}^J$	曲率二形式
$h_{ab}$	空间诱导度规
$K_{ab}$	外曲率
$N^a$	位移矢量 (shift vector)
$n_a$	一般指法余矢
$P_i(S)$	面 $S$ 上的 flux
$V^a$	矢量约束
$\wedge$	外积
$C$	标量约束
$C(f)$	smeared 标量约束
$C_{\text{Diff}}(v)$	smeared 微分同胚约束
$D^j, D^j_{mn}$	Wigner D 矩阵
$E(\gamma)$	图 $\gamma$ 的边的集合
$f_\gamma$	图 $\gamma$ 上的柱函数
$G(\Lambda)$	smeared 高斯约束
$H$	哈密顿量
$h_c(A)$	联络 $A$ 沿 $c$ 的 holonomy
$j^k f$	$f$ 的 k-jet
$L_i, R_i$	$\text{SU}(2)$ 上的左不变矢量场和右不变矢量场

$M$	光滑流形，通常指时空
$N$	时移函数 (lapse function)
$T_s$	spin-network function
$V(\gamma)$	图 $\gamma$ 的顶点的集合
$V(v)$	smeared 矢量约束





## 第二章 引力理论的正则表述

### 2.1 ADM formulation

为了研究时间演化及对引力进行量子化,我们需要考虑广义相对论的哈密顿描述。我们主要依照文献 [1-3] 展开。在拉格朗日描述下,考虑  $n$  维光滑可定向流形  $M$ , 记  $M$  上的洛伦兹度规的集合为  $\text{Lor}(M)$ , 由于微分同胚不变性的规范对称性, 广义相对论的位型空间为  $\mathcal{S}(M) := \text{Lor}(M)/\text{Diff}(M)$ 。理论的拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{EH}}[j^2g] := \frac{1}{2\kappa} R(j^2g)\epsilon, \quad (2.1)$$

其中  $\kappa = 8\pi G$  是耦合常数,  $j^2g$  是场  $g$  的 2-jet,  $R[j^2g]$  是标量曲率,  $\epsilon$  是与  $g$  适配的体元。也可采用标量密度  $\tilde{\mathcal{L}}_{\text{EH}}$  表示,

$$\mathcal{L}_{\text{EH}}[j^2g] = \tilde{\mathcal{L}}_{\text{EH}}\epsilon, \quad (2.2)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} f R(j^2g), \quad (2.3)$$

其中  $\epsilon$  是任意定向相容体元,  $f$  是满足  $\epsilon = f\epsilon$  的正函数。例如, 在局部坐标系  $\{x^\mu\}$  下, 若坐标系为右手系, 即  $n$  形式  $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  与定向相容, 则可取定  $\epsilon = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ , 此时  $f = \sqrt{-\det g}$ , 其中  $\det g$  指坐标系下  $(g_{\mu\nu})$  的行列式。于是此时有

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-\det g} R(j^2g). \quad (2.4)$$

易证明, Einstein-Hilbert 作用量

$$S_{\text{EH}}[g] = \frac{1}{2\kappa} \int_M R[g] \quad (2.5)$$

的运动方程为真空 Einstein 方程<sup>1</sup>

$$\text{Ric} - \frac{1}{2} Rg = 0, \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>证明见69页。

或采取抽象指标形式，写作

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0. \quad (2.7)$$

以下张量全部采用抽象指标记号，改用  $g_{ab}$  表示度规张量，而  $g$  表示其行列式。

现在考虑哈密顿描述，这要求我们把时间从时空中分离出来。设时空  $(M, g)$  整体双曲，则对时空有拓扑上的要求： $M \cong \mathbb{R} \times \mathcal{S}$ ，其中  $\mathcal{S}$  是 3 维流形<sup>[1]</sup>。设有微分同胚  $\phi: M \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{S}$ ，称为一个分层 (foliation)。注意到任取  $\psi \in \text{Diff}(M)$ ， $\phi \circ \psi$  依然是分层，分层的集合与  $\text{Diff}(M)$  一一对应。记  $\mathcal{S}_t := \phi^{-1}(\{t\} \times \mathcal{S})$ ，这是类空超曲面，称为  $t$  时刻的空间。记自然投影  $\pi: \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ， $\pi_{\mathcal{S}}: \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ，则有时间函数  $t := \pi \circ \phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ 。此时  $\mathcal{S}_t$  就是等  $t$  面。 $\pi_{\mathcal{S}} \circ \phi$  可以将  $\text{TS}$  拖回到  $M$  上，其元素称为空间矢量，截面称为空间矢量场；进而可以定义空间张量丛和空间张量场。<sup>2</sup>另外，超曲面族  $\{\mathcal{S}_t\}$  还定义了法余矢丛，其中每个余矢量正比于该点的  $dt$ 。

考虑  $g$  的  $3+1$  分解。我们记  $n_a$  是单位法余矢场，即  $n^a n_a = -1$ ，则可以验证

$$h_{ab} := g_{ab} + n_a n_b \quad (2.8)$$

是空间对称张量，且它是  $g$  在  $\text{TS}_t$  上的限制，我们称其为  $g$  所诱导的空间度规，这是我们引入的第一个空间量。再考虑“时间部分”，我们引入矢量场

$$t^a := (\pi \circ \phi)^* \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a, \quad (2.9)$$

其中  $(\partial/\partial t)^a$  是  $\mathbb{R}$  中的自然坐标基矢场。则有

$$t^a \nabla_a t = -1, \quad (2.10)$$

$t^a$  的积分曲线汇（作为观测者世界线）标志了在微分同胚  $\phi$  下不同时空点如何“对齐”为“同一空间点”，它们定义了一个参考系。在每点  $p \in \mathcal{S}_t$  作直和分解

$$t^a = N n^a + N^a, \quad N > 0, \quad N^a \in \text{T}_p \mathcal{S}_t, \quad (2.11)$$

称  $N$  为时移函数 (lapse function)， $N^a$  为位移矢量 (shift vector) 场，这是我们引入的第 2、3 个空间量。由 (2.10) 容易算得

$$n_a = -N \nabla_a t, \quad (2.12)$$

现在来说明，给定  $\phi$ ，即有了  $\{\mathcal{S}_t\}$ 、 $t$  和  $t^a$  的条件下，空间量  $(h_{ab}, N, N_a)$  和时空量  $g_{ab}$  互相确定，因而  $(h_{ab}, N, N_a)$  可以作为位型变量。由  $g_{ab}$  给出  $(h_{ab}, N, N_a)$  的

<sup>2</sup>我们之后不区分  $\mathcal{S}$  上的张量和将它拖回到  $M$  上得到的  $M$  上的空间张量。

过程已经在上面写出，而给定  $(h_{ab}, N, N_a)$  后，首先将空间张量  $h_{ab}$  视作  $\mathcal{S}$  上的度量张量，取逆再拖回到  $M$  上得空间张量  $h^{ab}$ 。由 (2.11) 知

$$n^a = \frac{1}{N} (t^a - N^a), \quad (2.13)$$

其中  $N^a = h^{ab} N_b$ 。则

$$g^{ab} = -n^a n^b + h^{ab} = -\frac{1}{N^2} (t^a - N^a) (t^b - N^b) + h^{ab}. \quad (2.14)$$

描述每张超曲面  $\mathcal{S}_t$  的除了描述内蕴几何的  $h_{ab}$  之外还有描述它如何嵌入  $M$  的外曲率  $K_{ab}$ ，定义为

$$K_{ab} := h_a^c \nabla_c n_b, \quad (2.15)$$

我们即将看到它与  $h_{ab}$  的共轭动量的联系。这从以下命题即可初见端倪：

**命题 2.1.**

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab}, \quad (2.16)$$

其中  $\mathcal{L}_n$  表示沿  $n^a$  的李导数。◇

证明见附录 73 页 A.2。还需定义空间量的时间导数，沿  $t^a$  的李导数是好的候选者，但空间张量的李导数未必还是空间张量，为此定义  $\tilde{\mathcal{L}}_v T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  为  $\mathcal{L}_v T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  的空间投影，即

$$\tilde{\mathcal{L}}_v T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} := h^{a_1}_{c_1} \dots h^{a_k}_{c_k} h^{d_1}_{b_1} \dots h^{d_l}_{b_l} \mathcal{L}_v T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l}, \quad (2.17)$$

然后即可定义

$$\dot{T}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} := \tilde{\mathcal{L}}_t T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = N \tilde{\mathcal{L}}_n T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \tilde{\mathcal{L}}_N T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}, \quad (2.18)$$

则得到

$$\dot{h}_{ab} = 2N K_{ab} + 2D_{(a} N_{b)}, \quad (2.19)$$

其中  $D_a$  是  $\mathcal{S}_t$  上与  $h_{ab}$  相容的联络。

现在，我们把  $\tilde{\mathcal{L}}_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-\det g} R$  用空间量表示。需要借助 Gauss 方程

$$\mathcal{R}_{abc}{}^d = h_a^k h_b^l h_c^m h_n^d R_{klm}{}^n - 2K_{c[a} K_{b]}{}^d, \quad (2.20)$$

其中  $\mathcal{R}_{abc}{}^d$  是 3 维流形  $\mathcal{S}_t$  上空间度规  $h_{ab}$  对应的曲率； $T_{[\dots]}$  表示对张量  $T$  反称化。略去所有计算过程<sup>3</sup>，我们得到

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{h} N \left( \mathcal{R} - K^2 + K_{ab} K^{ab} \right), \quad (2.21)$$

<sup>3</sup>见附录 A.3。

其中  $h$  是  $h_{ab}$  的分量矩阵的行列式,  $\mathcal{R}$  是  $\mathcal{S}_t$  上的标量曲率, 由  $h_{ab}$  及其二阶空间导数确定, 而  $K_{ab}$  通过

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} \left( \dot{h}_{ab} - 2D_{(a}N_{b)} \right) \quad (2.22)$$

由  $\dot{h}_{ab}, N, N_a, D_a$  决定, 并有  $K = h^{ab}K_{ab}$ . 这说明 (2.21) 的确是位型变量  $(h_{ab}, N, N_a)$  及其时间导数及空间导数的函数. 可求得共轲动量

$$\pi_N = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{N}} = 0, \quad \pi^a = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{N}_a} = 0, \quad (2.23)$$

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{h} \left( K^{ab} - K h^{ab} \right), \quad (2.24)$$

其中  $\pi_N, \pi^a, \pi^{ab}$  分别是与  $N, N_a, h_{ab}$  共轲的动量. (2.23) 给出两个初级约束. 去掉一些边界项后, 有哈密顿量

$$H[N, N_a, h_{ab}, \pi^{ab}] = \frac{1}{2\kappa} \int_S d^3x (NC + N_a V^a), \quad (2.25)$$

其中

$$C := -\frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \mathcal{R} + \frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \left( \pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{1}{2} \pi^2 \right), \quad (2.26)$$

$$V^a := -2D_b \pi^{ab}. \quad (2.27)$$

对  $N, N_a$  变分给出两个次级约束, 称为标量约束和矢量约束

$$C = 0, \quad V^a = 0, \quad (2.28)$$

可以证明 (2.23), (2.28) 已经穷尽了所有约束.

定义 smeared 约束

$$C(f) := \int_S d^3x C f, \quad V(v) := \int_S d^3x V_a v^a, \quad (2.29)$$

其中  $f \in C^\infty(\mathcal{S}), v \in \Gamma(\text{TS})$  满足适当的边界条件, 可以算得泊松括号

$$\begin{aligned} \{V(u), V(v)\} &= 2\kappa V(\mathcal{L}_u v), \\ \{V(v), C(f)\} &= 2\kappa C(v(f)), \\ \{C(f), C(f')\} &= 2\kappa V(f D^a f' - f' D^a f), \end{aligned} \quad (2.30)$$

又因

$$H = \frac{1}{2\kappa} (C(N) + V(\mathbf{N})), \quad (2.31)$$

知  $H, C, V$  两两泊松括号弱等于零（在约束面上为零），并且是约束的线性组合，故 ADM 形式的广义相对论是第一类约束系统。

还可讨论标量约束和矢量约束生成的规范变换。任给一个用  $h_{ab}, \pi^{ab}$  构造的张量，例如  $t_{ab}$ ，可以算出

$$\begin{aligned} \{V(v), t_{ab}\} &\approx 2\kappa \mathcal{L}_v t_{ab}, \\ \{C(N), t_{ab}\} &\approx 2\kappa N \tilde{\mathcal{L}}_n t_{ab}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

故也常称标量约束为哈密顿约束。

## 2.2 量子几何动力学 (QGD)

接下来对上一节得到的广义相对论的哈密顿表述进行正则量子化，得到量子几何动力学 (Quantum Geometrodynamics)。但由于体现规范对称性的两个第一类约束的存在，我们需要先介绍这样的约束系统的量子化方法。

第一类约束哈密顿系统的量子化最早由狄拉克发展<sup>[4]</sup>，其核心是先连同规范自由度一起量子化得到  $\mathcal{H}_{\text{kin}}$ ，然后将经典约束方程  $\{C_I = 0\}_{I \in \mathcal{I}}$  变为物理状态应满足的方程  $\{\hat{C}_I |\psi\rangle = 0\}_{I \in \mathcal{I}}$ ，即定义物理态空间  $\mathcal{H}_{\text{phy}}$  是所有  $\ker \hat{C}_I$  之交。

对于 ADM 形式的广义相对论来说， $N$  和  $N_a$  只是拉氏乘子，位型变量为  $h_{ab}$ ，即空间几何的动力学。可选择  $\mathcal{H}_{\text{kin}}$  为某种 “ $L^2(\text{Riem}(\mathcal{S}))$ ”，其中  $\text{Riem}(\mathcal{S})$  表示  $\mathcal{S}$  上黎曼度规的集合，并采用标准的 Schrödinger 表示

$$\begin{aligned} \hat{h}_{ab} |\psi\rangle &\leftrightarrow h_{ab} \psi(h), \\ \hat{\pi}^{ab} |\psi\rangle &\leftrightarrow -i\hbar \frac{\delta}{\delta h_{ab}} \psi(h). \end{aligned} \quad (2.33)$$

$\hat{V}^a |\psi\rangle = 0$  定义了空间微分同胚不变的态空间  $\mathcal{H}_{\text{Diff}}$ ，再通过哈密顿约束

$$\hat{C} |\psi\rangle = 0 \quad (2.34)$$

得到物理态空间。这便是量子几何动力学，方程 (2.34) 即为著名的 Wheeler DeWitt 方程。

但这一方法存在很多问题，例如一开始  $\mathcal{H}_{\text{kin}}$  就难以定义；在标准 Schrödinger 表示下  $\hat{C}$  是否是定义良好的算符也不清楚。当经典层面已经有了高度对称性约化，例如宇宙学的情况下，才能很好地使用 Wheeler DeWitt 方程。

### 2.3 Palatini 作用量和 Holst 作用量

Palatini 作用量是 Hilbert 作用量的改写，在流形上引入标架来替代度规。<sup>[5-6]</sup>

设  $(V, \eta_{IJ})$  是一个带有选定洛伦兹度规的四维矢量空间，称为内部空间 (internal space)，其中  $I, J, \dots$  是  $V$  上的抽象指标，以与  $M$  上的区分。我们考虑  $TM$  的平凡化，设有矢量丛同构  $e: M \times V \rightarrow TM$ ， $e(x) := e(x, \cdot)$  是从  $V$  到  $T_x M$  的线性同构。按照抽象指标记号，将它记为  $e^a_I(x)$ ，称为  $M$  上的标架场 (frame field, 4 维情况又特别地称为 tetrads)。逐点取逆得到丛同构  $e^{-1}: TM \rightarrow M \times V$ ， $e^{-1}(x) := e^{-1}(x, \cdot)$  按照抽象指标记号写为  $e^I_a(x)$ ，称为对偶标架场，则有

$$e^a_I e^I_b = \delta^a_b, \quad e^I_a e^a_J = \delta^I_J. \quad (2.35)$$

若满足

$$g_{ab} = \eta_{IJ} e^I_a e^J_b, \quad (2.36)$$

则称标架场是正交归一的。

我们可以选择  $V$  上的基底  $\{\xi^I_\mu\}$  及其对偶基  $\{\xi^\mu_I\}$ ，其中  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ，使得  $\eta_{IJ} := \eta_{\mu\nu} \xi^\mu_I \xi^\nu_J = -\xi^0_I \xi^0_J + \sum_i \xi^i_I \xi^i_J$ ，其中  $i = 1, 2, 3$ ，并定义

$$e^a_\mu := \xi^I_\mu e^a_I, \quad (2.37)$$

则  $\{e^a_\mu\}$  构成  $M$  上每点的正交基底。

正交归一标架丛  $FM$  上的联络等价于其伴丛上的联络。将  $\xi^I_\mu$  视为  $SO(3, 1)$  矢量丛  $E = M \times V$  上截面的基底，将任意截面展开为  $v^I = v^\mu \xi^I_\mu$ ，定义标准平直联络

$$\partial_a v^I := (\partial_a v^\mu) \xi^I_\mu, \quad (2.38)$$

任何联络 (或称协变导数) 可表为

$$\nabla_a v^I = \partial_a v^I + \omega_a^I{}_J v^J, \quad (2.39)$$

其中  $\omega_a^I{}_J$  是  $so(3, 1)$  值一形式，称为 spin connection。设  $TM$  上的联络为

$$\nabla_a v^b = \partial_a v^b + \Gamma^b_{ac} v^c, \quad (2.40)$$

$e^I_a$  可视为  $E \otimes T^*M$  上的截面，规定取坐标基底和截面基底  $\xi^I_\mu$  下分量定义偏导算符，而协变导数通过满足莱布尼兹律的方式推广到各种张量积丛，有

$$\nabla_a v^I = e^I_b \nabla_a v^b + v^b \nabla_a e^I_b, \quad (2.41)$$

由 (2.39), (2.40) 可得

$$\nabla_a e^I_b = \partial_a e^I_b - \Gamma^c_{ab} e^I_c + \omega_a^I{}_J e^J_b. \quad (2.42)$$

对矢量值一形式  $v^I_a$ , 定义外微分

$$d_a v^I_b := 2\partial_{[a} v^I_{b]} \equiv \xi^I_\mu d_a v^\mu_b, \quad (2.43)$$

以及协变外微分

$$D_a v^I_b := 2\nabla_{[a} v^I_{b]} \equiv d_a v^I_b + \omega_a^I{}_J \wedge v^J_b, \quad (2.44)$$

其中  $\omega_a^I{}_J \wedge v^J_b := 2\omega_{[a}^I{}_{|J|} v^J_{b]}$ 。定义挠率形式为

$$T^I_{ab} := D_a e^I_b = d_a e^I_b + \omega_a^I{}_J \wedge e^J_b, \quad (2.45)$$

及曲率二形式

$$F_{abI}{}^J := D_a \omega_{bI}{}^J = d_a \omega_{bI}{}^J + \omega_{aI}{}^K \wedge \omega_{bK}{}^J. \quad (2.46)$$

定义 Palatini 作用量

$$S_{\text{Palatini}}[e, \omega] := \frac{1}{4\kappa} \int_M \varepsilon_{IJKL} e^I_a \wedge e^J_b \wedge F^{KL}_{cd}, \quad (2.47)$$

其中  $\varepsilon_{IJKL}$  是  $V$  上与  $\eta_{IJ}$  适配的体元。对  $\omega_a^I{}_J$  变分可得

$$D_a e^I_b = 0, \quad (2.48)$$

此运动方程即要求联络无挠, 此条件由  $e^I_a$  唯一确定了相容联络  $\omega_a^I{}_J$ 。当无挠条件满足时, 容易验证 Palatini 作用量变回 Hilbert-Einstein 作用量

$$S_{\text{Palatini}}[e, \omega(e)] = \frac{1}{2\kappa} \int_M R[e], \quad (2.49)$$

其中

$$R[e] = R[g(e)] = F_{ab}{}^{IJ} e^a{}_I e^b{}_J, \quad (2.50)$$

故无需详细计算即知对  $e$  变分可得 Einstein 场方程。

注意到 Palatini 作用量引入了一个  $\text{SO}(3, 1)$  局域规范对称性

$$(e^I_a, \omega_a^I{}_J) \mapsto (\Lambda_J^I e^J_a, \Lambda_K^I \omega_a^K{}_L \Lambda^L{}_J + \Lambda_K^I d_a \Lambda^K{}_J), \quad (2.51)$$

或更紧凑地写为

$$(e, \omega) \mapsto (\Lambda^{-1}e, \Lambda^{-1}\omega\Lambda + \Lambda^{-1}d\Lambda), \quad (2.52)$$

这引入一个第二类约束。



在圈量子引力中十分重要的是 Palatini 作用量的 Holst 修正

$$\begin{aligned} S_{\text{Holst}} &:= S_{\text{Palatini}} - \frac{1}{2\kappa} \int_M \frac{1}{\beta} e^I_a \wedge e^J_b \wedge F_{cdIJ} \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int_M \text{tr} \left[ \left( *(e \wedge e) + \frac{1}{\beta} (e \wedge e) \right) \wedge F \right], \end{aligned} \quad (2.53)$$

容易验证后一项是拓扑项，不改变运动方程。 $\beta$  称为 Barbero-Immiriz 参数。

## 2.4 Ashtekar 变量

Abhay Ashtekar 在 1986 年给出了广义相对论的一组新的正则变量<sup>[7-8]</sup>，使约束表达式得到了大幅简化，便于考虑量子引力，后来成为了圈量子引力的基础。以下参照 [6] 予以简单介绍，相关内容也可参考 [2-3, 5]。

从 Holst 作用量出发，我们考虑 3+1 分解，其含义与之前第 2.1 节中相同，即选择时空的分层  $\phi: M \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{S}$ ，将物理量分解。每点的直和分解  $T_x M = \text{Span}\{n^a(x)\} \oplus T_x \mathcal{S}$  被  $e^I_a$  映为  $V = \text{Span}\{n^I(x)\} \oplus V_{\mathcal{S}}(x)$ ，其中  $n^I = e^I_a n^a$ 。注意到法矢量场  $n^a$  仅与  $\phi$  和  $g_{ab}$  有关，而同一个  $g_{ab}$  对应的  $e^I_a$  还存在  $\text{SO}(3,1)$  规范自由度，为了方便可以部分固定规范，即固定内部矢量场  $n^I$ ，例如本文中取为第零基矢  $\xi^I_0$ 。则规范群约化为  $\text{SO}(3)$ 。每点的  $V_{\mathcal{S}}$  同构于一固定的三维线性空间  $W$ ，于是在标架  $e^a_I$  将  $TM$  平凡化为  $E = M \times V$  后，时空的 3+1 分解又将其（局部地）直和分解为  $(M \times \mathbb{R}) \oplus (M \times W)$ 。用  $i, j, k, \dots$  作为  $W$  上的抽象指标，记  $q^i_I(x)$  为  $V_{\mathcal{S}}$  到  $W$  的同构映射。记  $h^I_J = \delta^I_J + n^I n_J$  为  $V$  到  $V_{\mathcal{S}}$  的投影映射， $h_{IJ} = \eta_{IK} h^K_J$  即  $V_{\mathcal{S}}$  上的诱导黎曼度规，它等于  $e^a_I e^b_J h_{ab}$ 。我们知道  $\varepsilon_{abc} := n^d \varepsilon_{dabc}$  给出  $\mathcal{S}$  上的诱导体元，其标架版本为  $\varepsilon_{IJK} := n^L \varepsilon_{LIJK}$ 。通过同构  $q^i_I$  及其逆  $q^I_i$  有  $h^i_I := q^i_J h^J_I$  及  $W$  上的度规  $h_{ij} := q^I_i q^J_j h_{IJ}$  与体元  $\varepsilon_{ijk} := q^I_i q^J_j q^K_k \varepsilon_{IJK}$ 。称  $e^a_i := h^a_b e^b_I q^I_i$  为空间标架。接下来分解  $\omega_a^{IJ}$ ，定义

$$K^I_a := h^b_a n_J \omega_b^{IJ}, \quad K^i_a := q^i_I K^I_a, \quad (2.54)$$

及

$$\omega_a^I := h^b_a n_J \star \omega_b^{IJ}, \quad \omega_a^i := q^i_I \omega_a^I, \quad (2.55)$$

其中  $\star$  是  $V$  上的 Hodge 对偶，

$$\star \omega_a^{IJ} = \frac{1}{2} \varepsilon^{IJKL} \omega_{aKL}. \quad (2.56)$$

**注 1** 取  $\xi^i_\alpha := q^i_I \xi^I_\alpha$ ， $\alpha = 1, 2, 3$  为  $W$  上的基底。令  $(\tau_\alpha)^i_j := \varepsilon^i_{kj} \xi^k_\alpha$ ，则三个  $\tau_\alpha^i_j$  是  $\text{so}(3)$  的基底， $\tau_i^j_k := \tau_\alpha^j_k \xi^\alpha_i$  是从  $W$  到  $\text{so}(3)$  的同构。则  $\omega_a^i_j = \omega^k_a \tau_k^i_j$  是  $\text{so}(3)$  值联络。♠

**命题 2.2.** 当  $\omega_a^I J$  是与  $e_a^I$  相容的洛伦兹联络时,  $\omega_a^k \tau_{kj}^i = \varepsilon_{kj}^i \omega_a^k$  是与  $e_a^i$  相容的  $\text{so}(3)$  值联络,  $K_a^i = e_d^i h_a^c h_b^d \nabla_c n^b$  是外曲率的标架形式。  $\diamond$

定义 Ashtekar 联络

$$A_a^i := \omega_a^i + \beta K_a^i, \quad (2.57)$$

可以算得

**命题 2.3.** 以 Ashtekar 联络为位型变量, 相应的共轲动量为

$$\tilde{P}_i^a := \frac{1}{\kappa\beta} \tilde{E}_i^a, \quad (2.58)$$

其中

$$\tilde{E}_i^a = \sqrt{|\det h|} e_i^a = \det(e) e_i^a \quad (2.59)$$

是权为 1 的密度化的 3 标架。  $\diamond$

联络  $A_a^i$  或  $A_a^i j = \varepsilon_{kj}^i A_a^k$  对应新的导数算子  $\mathcal{D}_a$ , 记其曲率为

$$\begin{aligned} F_{abi}^j &:= \varepsilon_{ik}^j d_a A_b^k + \left( \varepsilon_{il}^k A_a^l \right) \wedge \left( \varepsilon_{km}^j A_b^m \right) \\ &= \varepsilon_{ik}^j d_a A_b^k + A_a^j \wedge A_{ib}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

或

$$F_{ab}^i = d_a A_b^i + \varepsilon_{jk}^i A_a^j \wedge A_b^k. \quad (2.61)$$

**命题 2.4.** 在 Ashtekar 变量下, Holst 作用量改写为

$$S = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_t} d^3x \left( \tilde{P}_i^a \dot{A}_a^i - \tilde{\mathcal{H}}(A_a^i, \tilde{P}_i^a, N, N^a, \Lambda^i) \right), \quad (2.62)$$

哈密顿量

$$H = \int_S d^3x \tilde{\mathcal{H}} := \int_S d^3x \left( \Lambda^i G_i + N^a V_a + NC \right), \quad (2.63)$$

其中三个约束

$$\begin{aligned} G_i &= \mathcal{D}_a \tilde{P}_i^a = \partial_a \tilde{P}_i^a + \varepsilon_{ij}^k A_a^j \tilde{P}_k^a, \\ V_a &= \tilde{P}_i^b F_{ab}^i - \frac{1+\beta^2}{\beta} K_a^i G_i, \\ C &= \frac{\kappa\beta^2}{2\sqrt{|\det h|}} \tilde{P}_i^a \tilde{P}_j^b \left[ \varepsilon_{kj}^i F_{ab}^k - (1+\beta^2) K_a^i \wedge K_b^j \right] \\ &\quad + \kappa(1+\beta^2) G^i \partial_a \left( \frac{\tilde{P}_i^a}{\sqrt{|\det h|}} \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

是 Gauss 约束 (规范对称引入的新约束)、矢量约束、标量约束, 而

$$\Lambda^i := q^i_I t^a n_J {}^\star \omega_a^{IJ} \quad (2.65)$$

和  $N^a, N$  是拉氏乘子。  $\diamond$

由于  $A^i_a$  和  $\tilde{P}^a_i$  是共轭变量, 其泊松括号为

$$\{A^i_a(x), \tilde{P}^b_j(y)\} = \delta^i_j \delta^b_a \delta(x, y), \quad (2.66)$$

定义 smeared 约束

$$G(\Lambda) := \int_S d^3x \Lambda^i G_i, \quad (2.67)$$

它是局部 SO(3) 规范变换的生成元, 即

**命题 2.5.**

$$\{A^i_a, G(\Lambda)\} = -\mathcal{D}_a \Lambda^i, \quad \{\tilde{P}^a_i, G(\Lambda)\} = \varepsilon_{ij}{}^k \Lambda^j \tilde{P}^a_k. \quad (2.68)$$

$\diamond$

$V_a$  和  $C$  都包含一部分 SO(3) 规范变换, 一种方便的做法是重新定义 smeared 微分同胚约束

$$C_{\text{Diff}}(v) := \int_S d^3x \left( v^a \tilde{P}^b_i F^i_{ab} - v^a A^i_a G_i \right) \quad (2.69)$$

代替矢量约束, 可以算得

**命题 2.6.**

$$\{A^i_a, C_{\text{Diff}}(v)\} = \mathcal{L}_v A^i_a, \quad \{\tilde{P}^a_i, C_{\text{Diff}}(v)\} = \mathcal{L}_v \tilde{P}^a_i, \quad (2.70)$$

$\diamond$

并在 smeared 标量约束中去掉  $G_i$  项, 即

$$C_H(f) = \int_S d^3x f(x) \tilde{C}(x) := \frac{\kappa \beta^2}{2} \int_S d^3x f \frac{\tilde{P}^a_i \tilde{P}^b_j}{\sqrt{|\det h|}} \left[ \varepsilon^{ij}{}_k F^k_{ab} - (1 + \beta^2) K^i_a \wedge K^j_b \right], \quad (2.71)$$

称为哈密顿约束, 有如下约束代数

命题 2.7.

$$\begin{aligned}
\{G(\Lambda), G(\Lambda')\} &= G([\Lambda, \Lambda']), \\
\{G(\Lambda), C_{\text{Diff}}(v)\} &= -G(\mathcal{L}_v \Lambda), \\
\{G(\Lambda), C_H(f)\} &= 0, \\
\{C_{\text{Diff}}(u), C_{\text{Diff}}(v)\} &= C_{\text{Diff}}([u, v]), \\
\{C_{\text{Diff}}(v), C_H(f)\} &= -C_H(v(f)), \\
\{C_H(f), C_H(f')\} &= -C_{\text{Diff}}(S(f, f')) - G(S^a(f, f') A^i_a) \\
&\quad - (1 + \beta^2) G\left(\frac{[\tilde{P}(f), \tilde{P}(f')]}{|\det q|}\right),
\end{aligned} \tag{2.72}$$

其中

$$S^a(f, f') := f D^a f' - f' D^a f, \tag{2.73}$$

而  $\tilde{P}(f)$  指的是  $\tilde{P}^a_i D_a f$ 。

◇

至此，我们基本构建了 Ashtekar 变量下的哈密顿理论，以 Ashtekar 联络  $A^i_a$  和动量  $\tilde{P}^a_i$  为正则变量，约束方程加上（为哈密顿量补上边界项的）哈密顿方程即等价于 Einstein 场方程。于是，广义相对论被改写为了一个具有紧致规范群的规范理论，可以参考非阿贝尔规范理论已有的工具进行量子引力的探索，这就是圈量子引力的由来。

最早 Ashtekar 于 1986 年所发表的 Ashtekar 变量<sup>[7]</sup> 是选择  $\beta = -i$  的情况，此时可以注意到约束的表达式极为简洁：

$$\begin{aligned}
G_i &= \mathcal{D}_a \tilde{P}^a_i, \\
V_a &= \tilde{P}^b_i F^i_{ab}, \\
C &= \frac{\kappa \beta^2}{2\sqrt{|\det h|}} \tilde{P}^a_i \tilde{P}^b_j \varepsilon^{ij}_k F^k_{ab},
\end{aligned} \tag{2.74}$$

但缺点是要引入复联络，相当于考虑复化的广义相对论。为了得到物理的信息，需要引入“实性条件”，即把物理状态限制在复相空间中的一个截面上，以保证由 Ashtekar 变量诱导的  $h_{ab}$  和  $K_{ab}$  为实张量。在研究过程中物理学家们发现，实性条件给量子化带来了大量困难，于是 1994 年 Barbero 引入了上文所述的实值 Barbero-Immirzi 参数  $\beta$  代替  $-i$ ，于是有了实变量理论。实 Ashtekar 变量理论与复 Ashtekar 变量理论相比，虽然约束表达式多出了被称为“Lorentz 项”的附加项，复杂了一些，但消除了实性条件，综合来看要更简洁方便一些，因此普遍采用实变量理论。



## 附录 A 第二章中的计算

### A.1 ADM formulation

命题 A.1 (13页(2.6)). 易证明, *Einstein-Hilbert* 作用量

$$S_{EH}[g] = \frac{1}{2\kappa} \int_M R[g] \quad (\text{A.1})$$

的运动方程为真空 *Einstein* 方程

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg = 0, \quad (\text{A.2})$$

或采取抽象指标形式, 写作

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0. \quad (\text{A.3})$$

◇

证明 考虑时空  $(M, g_{ab})$  及  $M$  上的一族度规  $g_{ab}(\lambda)$ , 满足  $g_{ab}(0) = g_{ab}$ , 则任何依赖度规的量  $T$  的变分为

$$\delta T(g_{ab}) := \left. \frac{dT(g_{ab}(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}. \quad (\text{A.4})$$

注意到

$$\delta \tilde{\mathcal{L}} = \underbrace{\sqrt{-g}g^{ab}\delta R_{ab}}_{\text{I}} + \underbrace{\sqrt{-g}R_{ab}\delta g^{ab}}_{\text{II}} + \underbrace{R\delta\sqrt{-g}}_{\text{III}}, \quad (\text{A.5})$$

首先考虑与  $g_{ab}(\lambda)$  适配的导数算符  $\overset{\lambda}{\nabla}_a$ , 假定与  $\nabla_a$  相差  $C^c_{ab}(\lambda)$ , 即

$$(\nabla_a - \overset{\lambda}{\nabla}_a)\omega_b = C^c_{ab}(\lambda)\omega_c, \quad (\text{A.6})$$

通过  $\overset{\lambda}{\nabla}_a g_{bc}(\lambda) = 0$ , 与计算克氏符类似, 可算得

$$C^c_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2}g^{cd}(\lambda)(\nabla_a g_{bd}(\lambda) + \nabla_b g_{ad}(\lambda) - \nabla_d g_{ab}(\lambda)), \quad (\text{A.7})$$

进而考虑  $\overset{\lambda}{\nabla}_a$  相应的黎曼张量  $R_{abc}{}^d(\lambda)$ , 按照定义, 有

$$\begin{aligned}
R_{abc}{}^d(\lambda)\omega_d &= 2\overset{\lambda}{\nabla}_{[a}\overset{\lambda}{\nabla}_{b]}\omega_c \\
&= \overset{\lambda}{\nabla}_a \left( \nabla_b \omega_c - C_{bc}^d(\lambda)\omega_d \right) - \overset{\lambda}{\nabla}_b \left( \nabla_a \omega_c - C_{ac}^d(\lambda)\omega_d \right) \\
&= \left( \nabla_a \nabla_b \omega_c - \textcolor{blue}{C}_{ab}^d(\lambda) \nabla_d \omega_c - C_{ac}^d(\lambda) \nabla_b \omega_d \right) \\
&\quad - \left[ \nabla_a \left( C_{bc}^d(\lambda)\omega_d \right) - \textcolor{green}{C}_{ab}^e(\lambda) \textcolor{green}{C}_{ec}^d(\lambda)\omega_d - C_{ac}^e(\lambda) C_{be}^d(\lambda)\omega_d \right] \quad (\text{A.8}) \\
&\quad - \left( \nabla_b \nabla_a \omega_c - \textcolor{blue}{C}_{ba}^d(\lambda) \nabla_d \omega_c - C_{bc}^d(\lambda) \nabla_a \omega_d \right) \\
&\quad + \left[ \nabla_b \left( C_{ac}^d(\lambda)\omega_d \right) - \textcolor{green}{C}_{ba}^e(\lambda) \textcolor{green}{C}_{ec}^d(\lambda)\omega_d - C_{bc}^e(\lambda) C_{ae}^d(\lambda)\omega_d \right] \\
&= \textcolor{red}{R}_{abc}{}^d \omega_d - 2 \left( \nabla_{[a} C_{b]c}^d(\lambda) \right) \omega_d + 2C_{[a|c]}^e(\lambda) C_{b]e}^d(\lambda) \omega_d,
\end{aligned}$$

即

$$R_{abc}{}^d(\lambda) = R_{abc}{}^d - 2\nabla_{[a} C_{b]c}^d(\lambda) + 2C_{c[a}^e(\lambda) C_{b]e}^d(\lambda), \quad (\text{A.9})$$

$$R_{ab}(\lambda) = R_{acb}{}^c(\lambda) = R_{ab} - 2\nabla_{[a} C_{c]b}^c(\lambda) + 2C_{b[a}^e(\lambda) C_{c]e}^c(\lambda), \quad (\text{A.10})$$

由于  $C_{ab}^c(0) = 0$ , 求得

$$\delta R_{ab} = -2\nabla_{[a} \delta C_{c]b}^c = \nabla_c \delta C_{ab}^c - \nabla_a \delta C_{cb}^c, \quad (\text{A.11})$$

而由 (A.7) 得

$$\begin{aligned}
\delta C_{ab}^c &= \frac{1}{2} \delta g^{cd} (\nabla_a g_{bd} + \nabla_b g_{ad} - \nabla_d g_{ab}) + \frac{1}{2} g^{cd} (\nabla_a \delta g_{bd} + \nabla_b \delta g_{ad} - \nabla_d \delta g_{ab}) \\
&= \frac{1}{2} g^{cd} (\nabla_a \delta g_{bd} + \nabla_b \delta g_{ad} - \nabla_d \delta g_{ab}), \\
\delta C_{cb}^c &= \frac{1}{2} g^{cd} (\nabla_c \delta g_{bd} + \nabla_b \delta g_{cd} - \nabla_d \delta g_{cb}) \\
&= \frac{1}{2} g^{cd} \nabla_b \delta g_{cd},
\end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

代入 (A.11) 得

$$\begin{aligned}
\delta R_{ab} &= \frac{1}{2} g^{cd} \nabla_c (\nabla_a \delta g_{bd} + \nabla_b \delta g_{ad} - \nabla_d \delta g_{ab}) - \frac{1}{2} g^{cd} \nabla_a \nabla_b \delta g_{cd} \\
&= \frac{1}{2} g^{cd} (\nabla_c \nabla_a \delta g_{bd} + \nabla_c \nabla_b \delta g_{ad} - \nabla_c \nabla_d \delta g_{ab} - \nabla_a \nabla_b \delta g_{cd}),
\end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

则 (A.5) 中的 I 为

$$\begin{aligned}
I &= \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left( \nabla^d \nabla^b \delta g_{bd} + \nabla^d \nabla^a \delta g_{ad} - g^{ab} \nabla^d \nabla_a \delta g_{ab} - g^{cd} \nabla^a \nabla_a \delta g_{cd} \right) \\
&= \sqrt{-g} \left( \nabla^a \nabla^b \delta g_{ab} - g^{bc} \nabla^a \nabla_a \delta g_{bc} \right) \\
&= \sqrt{-g} \nabla_a v^a,
\end{aligned} \tag{A.14}$$

其中

$$v^a := \nabla^b \delta g_{ab} - g^{bc} \nabla_a \delta g_{bc}, \tag{A.15}$$

故这一项仅为边界项。

对  $\delta^a_b = g^{ac} g_{cb}$  两边变分得关系

$$\delta g_{ab} = -g_{ac} g_{bd} \delta g^{cd}, \quad \delta g^{ab} = -g^{ac} g^{bd} \delta g_{cd}, \tag{A.16}$$

故得 (A.5) 中的 II 为

$$\begin{aligned}
II &= \sqrt{-g} R_{ab} \delta g^{ab} \\
&= -\sqrt{-g} R_{ab} g^{ac} g^{bd} \delta g_{cd} \\
&= -\sqrt{g} R^{ab} \delta g_{ab},
\end{aligned} \tag{A.17}$$

最后考虑 III, 注意到若记  $\epsilon_{abcd}$  为坐标体元, 有行列式表达式

$$g = \frac{1}{4!} \epsilon^{abcd} \epsilon^{efgh} g_{ae} g_{bf} g_{cg} g_{dh}, \tag{A.18}$$

则

$$\delta g = \frac{1}{3!} \epsilon^{abcd} \epsilon^{efgh} g_{ae} g_{bf} g_{cg} \delta g_{dh}, \tag{A.19}$$

记

$$T^{dh} := \frac{1}{3!} \epsilon^{abcd} \epsilon^{efgh} g_{ae} g_{bf} g_{cg}, \tag{A.20}$$

则显然它对称, 迹为  $4g$ , 有

$$T^{dh} = g g^{dh} + S^{dh}, \tag{A.21}$$



其中  $S^{dh}$  无迹。另一方面,

$$\begin{aligned}
 T^{dh}g_{hl} &= \frac{1}{3!}\epsilon^{abcd}\epsilon^{efgh}g_{ae}g_{bf}g_{cg}g_{hl} \\
 &= \frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\sigma\gamma}g_{\delta\eta}\left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^d(dx^\eta)_l \\
 &= \epsilon^{012\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}g_{0\alpha}g_{1\beta}g_{2\gamma}g_{\delta\eta}\left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^d(dx^\eta)_l \\
 &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}g_{0\alpha}g_{1\beta}g_{2\gamma}g_{\delta 3}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^d(dx^3)_l \\
 &= g\delta_l^d,
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

其中倒数第二行中  $\eta$  必取 3 是因为, 否则, 不妨设  $\eta$  取 0, 则  $\alpha$  与  $\delta$  对称, 与  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  缩并为 0。则可知  $S^{dh} = 0$ ,

$$T^{dh} = \frac{1}{3!}\epsilon^{abcd}\epsilon^{efgh}g_{ae}g_{bf}g_{cg} = gg^{dh}, \tag{A.23}$$

故

$$\delta g = gg^{ab}\delta g_{ab}, \tag{A.24}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \text{III} &= R\delta\sqrt{-g} \\
 &= -\frac{R}{2\sqrt{-g}}\delta g \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}Rg^{ab}\delta g_{ab},
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

故

$$\delta\tilde{\mathcal{L}} = \text{I} + \text{II} + \text{III} = \sqrt{-g}\nabla_a v^a - \sqrt{-g}\left(R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab}\right)\delta g_{ab}, \tag{A.26}$$

可得真空场方程。[点击返回 \(2.6\)](#)。 □

**注 4** 1. 也可采用矩阵的语言, 使用伴随矩阵为工具计算  $\delta g$ , 参见 [2]。

2. 也可考察  $\mathcal{L} = R\varepsilon$ , 则需要计算适配体元的变分。梁灿彬老师在 [2] 的下册第 9 页中写道

……对  $g_{ab}$  变分时就必须考虑  $\varepsilon$  的相应变分, 从而给计算带来麻烦。

进而得出用标量密度  $\mathcal{L}$  更合适的结论。然而鄙人实际算了发现没觉得体元的变分有多复杂……见下文。

记  $\varepsilon(\lambda)$  是与  $g_{ab}(\lambda)$  适配的体元，则

$$g^{ae}(\lambda)g^{bf}(\lambda)g^{cg}(\lambda)g^{dh}(\lambda)\varepsilon_{abcd}(\lambda)\varepsilon_{efgh}(\lambda) = -4!, \quad (\text{A.27})$$

对  $\lambda$  求导得

$$\begin{aligned} 0 &= 4(\delta g^{ae})g^{bf}g^{cg}g^{dh}\varepsilon_{abcd}\varepsilon_{efgh} + 2g^{ae}g^{bf}g^{cg}g^{dh}\varepsilon_{abcd}\delta\varepsilon_{efgh} \\ &= -4 \times 3! \times g_{ae}\delta g^{ae} + 2\varepsilon^{efgh}\delta\varepsilon_{efgh}, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

故

$$\begin{aligned} \varepsilon^{abcd}\delta\varepsilon_{abcd} &= -2 \times 3! \times g^{ab}\delta g_{ab} \\ &= -\frac{1}{2}4!g^{ab}\delta g_{ab} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{efgh}\left(\varepsilon_{efgh}g^{ab}\delta g_{ab}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

两边取对偶形式去掉  $\varepsilon$ ，知

$$\delta\varepsilon_{abcd} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}g^{ef}\delta g_{ef}. \quad (\text{A.30})$$

算完适配体元变分后，即可算得

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= g^{ab}\delta(R_{ab})\varepsilon - R^{ab}\delta(g_{ab})\varepsilon + R\delta\varepsilon \\ &= (\nabla_a v^a)\varepsilon - \left(R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab}\right)\delta g_{ab}\varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

从而得到场方程。

[点击返回 \(2.6\)](#)。



**命题 A.2** (15 页命题 2.1).

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab}, \quad (\text{A.32})$$

其中  $\mathcal{L}_n$  表示沿  $n^a$  的李导数。



**证明** 由李导数公式

$$\mathcal{L}_v T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = v^c \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \sum_{i=1}^k T^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \nabla_c v^{a_i} + \sum_{j=1}^l T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l} \nabla_{b_j} v^c \quad (\text{A.33})$$

知

$$\mathcal{L}_v g_{ab} = 2\nabla_{(a} v_{b)} \quad (\text{A.34})$$

及

$$\mathcal{L}_n n_a = n^b \nabla_b n_a + n_b \nabla_a n^b = n^b \nabla_b n_a, \quad (\text{A.35})$$

故

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n h_{ab} &= \mathcal{L}_n (g_{ab} + n_a n_b) \\ &= 2\nabla_{(a} n_{b)} + 2n_{(a} \mathcal{L}_n n_{b)} \\ &= 2\nabla_{(a} n_{b)} + 2n_{(a} n^c \nabla_{|c|} n_{b)} \\ &= 2\delta^c_{(a} \nabla_{|c|} n_{b)} + 2n_{(a} n^c \nabla_{|c|} n_{b)} \\ &= 2K_{(ab)} \\ &= 2K_{ab}, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

证毕。 [点击返回命题 2.1。](#) □

命题 A.3 (15页(2.21)).  $\tilde{\mathcal{L}}_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-\det g} R$  用空间量表示为

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{h} N \left( \mathcal{R} - K^2 + K_{ab} K^{ab} \right). \quad (\text{A.37})$$

◇

证明 首先, 先证明:

引理 1

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}. \quad (\text{A.38})$$

证明 注意到 3 维的坐标体元为

$$\begin{aligned} \epsilon_{bcd} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} (t^a \epsilon_{abcd})^\sim \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} ((Nn^a + N^a) \epsilon_{abcd})^\sim \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} N \epsilon_{bcd} + 0 \\ &= \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{-g}} N \epsilon_{bcd}, \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

故

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}, \quad (\text{A.40})$$

其中  $\sim$  表示取空间投影，而  $N^a \varepsilon_{abcd}$  的空间投影为零可通过如下考虑看出：任取空间面上的基底  $e^a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 注意到  $(N^a \varepsilon_{abcd})^\sim$  独立分量只有一个，不妨考虑  $N^a \varepsilon_{abcd} e^a_1 e^a_2 e^a_3$ , 但  $N^a$  是  $\{e^a_i\}_{i=1}^3$  的线性组合，故分量为零。  $\square$

接下来分解曲率，借用高斯方程 (2.20)：

$$\mathcal{R}_{abc}{}^d = h_a{}^k h_b{}^l h_c{}^m h_n{}^d R_{klm}{}^n - 2K_{c[a} K_{b]}{}^d,$$

注意到

$$R = g^{ab} R_{ab} = (h^{ab} - n^a n^b) R_{ab},$$

考虑 Ricci 张量的时时分量：

$$\begin{aligned} R_{ab} n^a n^b &= R_{acb}{}^c n^a n^b \\ &= -n^a (\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a) n^c \\ &= -\nabla_a (n^a \nabla_c n^c) + (\nabla_a n^a) \nabla_c n^c + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c) - (\nabla_c n^a) (\nabla_a n^c) \\ &= -\nabla_a (n^a \nabla_c n^c) + K^2 + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c) - K_{ac} K^{ac}, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} h^{ab} R_{ab} &= h^{ab} g^{cd} R_{acbd} \\ &= h^{ab} (h^{cd} - n^c n^d) R_{acbd} \\ &= h^{ab} h^{cd} (\mathcal{R}_{acbd} + 2K_{b[a} K_{c]d}) - (g^{ab} + n^a n^b) n^c n^d R_{acbd} \\ &= \mathcal{R} + K^2 - K_{ab} K^{ab} - n^c n^d R_{cd} - 0, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} R &= (h^{ab} - n^a n^b) R_{ab} \\ &= \mathcal{R} + K^2 + K_{ab} K^{ab} - 2n^a n^b R_{ab} \\ &= \mathcal{R} - K^2 + K_{ab} K^{ab} + 2\nabla_a (n^a \nabla_b n^b - n^b \nabla_b n^a), \end{aligned}$$

弃去边界项，命题得证。 [点击返回 \(2.21\)](#)。  $\square$



## 参考文献

- [1] WALD R M. General Relativity[M]. Chicago: The University of Chicago Press, 1989 (引用页: 13, 14).
- [2] 梁灿彬. 微分几何入门与广义相对论[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2009 (引用页: 13, 20, 72).
- [3] THIEMANN T. Modern Canonical Quantum General Relativity[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. DOI: [10.1017/CBO9780511755682](https://doi.org/10.1017/CBO9780511755682) (引用页: 13, 20).
- [4] P.A.M.Dirac. Lectures on Quantum Mechanics[M/OL]. [S.l.]: Dover Publications, 2001. <https://books.google.com.hk/books?id=GVwzb1rZW9kC> (引用页: 17).
- [5] BAEZ J, MUNIAIN J P. Gauge Fields, Knots and Gravity[M/OL]. Singapore: World Scientific, 1994. eprint: <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/2324>. <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/2324>. DOI: 10.1142/2324 (引用页: 18, 20).
- [6] ASHTEKAR A, LEWANDOWSKI J. Background Independent Quantum Gravity: A Status Report[J]. Class. Quant. Grav., 2004, 21: R53. arXiv: [gr-qc/0404018](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0404018) [[gr-qc](https://arxiv.org/abs/gr-qc)]. DOI: [10.1088/0264-9381/21/15/R01](https://doi.org/10.1088/0264-9381/21/15/R01) (引用页: 18, 20).
- [7] ASHTEKAR A. New Variables for Classical and Quantum Gravity[J]. Phys. Rev. Lett., 1986, 57: 2244-2247. DOI: [10.1103/PhysRevLett.57.2244](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.57.2244) (引用页: 20, 23).
- [8] ASHTEKAR A. New Hamiltonian Formulation of General Relativity[J]. Phys. Rev. D, 1987, 36: 1587-1602. DOI: [10.1103/PhysRevD.36.1587](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.36.1587) (引用页: 20).