《微分几何入门与广义相对论》部分习题参考解答

by 薛定谔的大喵

2018 年 2 月 12 日

目录

第一部分

上册

第一章　拓扑空间简简介

习题

1. 试证 $A-B=A\cap(X-B)$，$\forall A,B\subset X$。

证明 $x\in A-B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\Leftrightarrow x\in A\cap(X-B)$。

2. 试证 $X-(B-A)=(X-B)\cup A$，$\forall A,B\subset X$。

证明 $x\in X-(B-A)\Leftrightarrow x\notin B-A\Leftrightarrow x\notin B\vee x\in A\Leftrightarrow x\in(X-B)\cup A$。

3. 用“对”或“错”在下表中填空：

$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	是一一的	是到上的
$f(x)=x^3$		
$f(x)=x^2$		
$f(x)=\mathrm{e}^x$		
$f(x)=\cos x$		
$f(x)=5,\forall x\in\mathbb{R}$		

解 如下表：

$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	是一一的	是到上的
$f(x)=x^3$	对	对
$f(x)=x^2$	错	错
$f(x)=\mathrm{e}^x$	对	错
$f(x)=\cos x$	错	错
$f(x)=5,\forall x\in\mathbb{R}$	错	错

4. 判断下列说法的是非并简述理由：

(a) 正切函数是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射；

(b) 对数函数是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射；

(c) $(a,b]\subset\mathbb{R}$ 用 $\mathscr{T}_u$ 衡量是开集；

(d) $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 用 $\mathscr{T}_u$ 衡量是闭集。

解 (a) 错，定义域不是 $\mathbb{R}$；

(b) 错，定义域不是 $\mathbb{R}$；

(c) 错，任意包含于 $(a,b]$ 的开区间都不会含有 b，故 $(a,b]$ 不能写为开区间之并；

(d) 对，其补集 $(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ 是开集。

5. 举一反例证明命题“$(\mathbb{R},\mathscr{T}_u)$ 的无限个开子集之交为开“不真。

证明 记 $O_n=\left(-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)$，则 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n=\{0\}$ 为闭集。

6. 试证 §1.2 例 5 中定义的诱导拓扑满足定义 1 的 3 个条件。

证明 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的子集 A 上的诱导拓扑按照定义为

$$\mathscr{S}:=\{V\subset A\mid \exists O\in\mathscr{T},\quad \text{s.t.}\quad V=A\cap O\},$$

(a) $A,\varnothing\in\mathscr{S}$：取 $O=X$ 即知 $A\in\mathscr{S}$，取 $O=\varnothing$ 即知 $A\in\mathscr{S}$；

(b) 有限交：设 $V_i=A\cap O_i\in\mathscr{S}$，其中 $O_i\in\mathscr{T}$，$i=1,2,\cdots,n$。则

$$\bigcap_{i=1}^{n}V_i=A\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}O_i\right)\in\mathscr{S};$$

(c) 无限并：设 $V_\alpha=A\cap O_\alpha\in\mathscr{S}$，其中 $O_\alpha\in\mathscr{T}$，$\alpha\in$ 某个指标集I。则

$$\bigcup_{\alpha\in I}V_\alpha=A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}O_\alpha\right)\in\mathscr{S}.$$

7. 举例说明 $(\mathbb{R}^3,\mathscr{T}_u)$ 中存在不开不闭的子集。

解 令 $A=(0,1]^3$，任何包含于 A 的开球 $B_r(x_0,y_0,z_0)$ 的 z 坐标的范围为开区间 $(z_0-r,z_0+r)\in(0,1]$，故 $(x,y,1)$ 不能属于此开球，于是 A 不能由一族开球之并得到，故 A 不是开集。其补集中 $(x,y,0)$ 不能属于开球，故补集不是开集，故 A 不是闭集。

8. 常值映射 $f\colon(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{S})$ 是否连续？为什么？

解 连续。证明如下：设 $f[X]=\{y\}\subset Y$，$\forall O\in\mathscr{S}$，若 $y\in O$，则 $f^{-1}[O]=X\in\mathscr{T}$；若 $y\notin O$，则 $f^{-1}[O]=\varnothing\in\mathscr{T}$。故 f 连续。

9. 设 $\mathscr{T}$ 为集 X 上的离散拓扑，$\mathscr{S}$ 为集 Y 上的凝聚拓扑，

(a) 找出从 $(X,\mathscr{T})$ 到 $(Y,\mathscr{S})$ 的全部连续映射；

(b) 找出从 $(Y,\mathscr{S})$ 到 $(X,\mathscr{T})$ 的全部连续映射。

解 (a) 设 $f\colon X\to Y$，则由于 $\mathscr{S}=\{Y,\varnothing\}$，$f$ 连续当且仅当 $f^{-1}[Y]=X\in\mathscr{T}\wedge f^{-1}[\varnothing]=\varnothing\in\mathscr{T}$，可是这是必然满足的，于是所有映射 $f\colon(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{S})$ 均连续。

(b) 设 $g\colon Y\to X$,则由于 $\mathscr{T}=2^X$,g 连续当且仅当 $\forall O\subset X, g^{-1}[O]=X\vee g^{-1}[O]=\varnothing$。假设存在 $x,y\in g[Y]$，$x\neq y$，则取 $O=x$，有 $g^{-1}[O]=g^[-1](x)\notin\mathscr{S}$，故 g 不是连续的。于是连续映射 g 的像只能有一个，即为常值映射。又 8 中已证明常值映射为连续，故 $g\colon(Y,\mathscr{S})\to(X,\mathscr{T})$ 连续当且仅当其为常值映射。

10. 试证明定义 3a 与 3b 的等价性。

证明 (1) 3a 推导 3b。设 $f\colon(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{S})$ 连续，按照定义 3a 即满足 $\forall O\in\mathscr{S}$，$f^{-1}[O]\in\mathscr{T}$。则 $\forall x\in X$，任取 $G'\in\mathscr{S}$ 使得 $f(x)\in G'$，则只需取 $G=f^{-1}[G']$，即有 $G\in\mathscr{T}$ 并且 $f[G]=G'\subset G'$，于是按照定义 3b，f 也连续。

(2) 3b 推导 3a。设 $f\colon(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{S})$ 连续，按照定义 3b 即满足 $\forall x\in X$，$\forall G'\in\mathscr{S}$ 且 $f(x)\in G'$，$\exists G\in\mathscr{T}$ 使得 $f[G]\subset G'$。于是任取 $O\in\mathscr{S}$，令 x 跑遍 $f^{-1}[O]$，对每一个 x 存在 $G_x\in\mathscr{T}$ 使得 $f[G_x]\subset O$，考虑 $G=\displaystyle\bigcup_{x\in f^{-1}[O]}G_x$，显然 $G\in\mathscr{T}$。由于 $x\in f^{-1}[O]$，$x\in G_x$ 因而 $x\in G$，于是 $f^{-1}[O]\subset G$；而 $\forall x\in G$，不妨设 $x\in G_{x_0}$，则由于 $f[G_{x_0}]\subset O$，知 $x\in f^{-1}[O]$，故又有 $G\subset f^{-1}[O]$，于是 G 正是 $f^{-1}[O]$，也就是 $f^{-1}[O]=G\in\mathscr{T}$，按照定义 3a，$f$ 也是连续的。

11. 试证任一开区间 $(a,b)\subset\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚。

证明 只需找到一个同胚映射。函数 $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ 定义为 $f(x)=\tan\left(\pi\dfrac{x-a}{b-a}-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 即满足要求。

12. 设 X_1 和 X_2 是 $\mathbb{R}$ 的子集，$X_1\equiv(1,2)\cup(2,3)$，$X_2\equiv(1,2)\cup[2,3)$。以 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 分别代表由 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑在 X_1 和 X_2 上的诱导拓扑。拓扑空间 $(X_1,\mathscr{T}_1)$ 和 $(X_2,\mathscr{T}_2)$ 是否连通？

解 (1) $(X_1,\mathscr{T}_1)$ 不连通。考虑 $O=(1,2)\subset X_1$，$O=X_1\cap(1,2)\in\mathscr{T}_1$，故 O 为开集；而 $X-O=(2,3)$ 同样为开集，于是 O 即开又闭，故 $(X_1,\mathscr{T}_1)$ 不连通。

(2) $(X_2,\mathscr{T}_2)$ 连通。假设 $\exists O\neq X_2, O\neq\varnothing$，$O\in\mathscr{T}$ 且 $X-O\in\mathscr{T}_2$，任取 $a\in O$，$b\in X-O$，不妨设 $a<b$，于是 $[a,b]\subset X_2$，记 $A=[a,b]\cap O$，$B=[a,b]\cap(X-O)$，$c=\sup A$，我们来证明 O 和 $X-O$ 都是开集将导致 $c\notin A$ 并且 $c\notin(X-O)$，从而矛盾。

(a) 若 $c\in B$，由于 $X-O$ 是开集，且由于 $X_2=(1,3)\in\mathscr{T}_u\Rightarrow\mathscr{T}_2=\mathscr{T}_u\cap 2^{X_2}$，$X-O$ 可以写作一系列开区间之并，于是 $B=(X-O)\cap[a,b]$ 是一系列形如 $[a,y),(x,y)$ 或 $(x,b]$ 的区间之并，现在 $c\neq a$，故包含 c 的区间属后两种，则一定存在 $d\in B$，使 $(d,c]\subset B$，

i. 若 $c=b$，则 $(d,b]\subset B$；

ii. 若 $a<c<b$，则 $(d,b]=(d,c]\cup(c,b]\subset B$，

于是 d 是 A 的上界，然而却小于上确界 c，矛盾。

(b) 若 $c\in A$，同(a)有 O 是开集将导致 $\exists e\in A$，使得 $[c,e)\subset A$，与 c 是 A 的上确界矛盾。

至此 $c\in A$ 与 $c\in B$ 均导致矛盾，然而 $c\notin A\wedge c\notin B$ 又与 A 和 B 的定义矛盾，故 O 与 $X-O$ 均为非空开集是不可能的。故 $X_2,\mathscr{T}_2$ 连通。

13. 任意集合 X 配以离散拓扑 $\mathscr{T}$ 所得的拓扑空间是否连通？

解 不连通。$\forall O\in X$，$O\in\mathscr{T}\wedge X-O\in\mathscr{T}\Rightarrow X$不连通。

14. 设 $A\subset B$，试证

(a) $\bar{A}\subset\bar{B}$；提示：$A\subset B$ 表明 $\bar{B}$ 是含 A 的闭集。

(b) $\mathrm{i}(A)\subset\mathrm{i}(B)$。

证明 (a) $A\subset B\subset\bar{B}$，根据闭包定义有 $\bar{A}\subset\bar{B}$；

(b) $\mathrm{i}\,(A)\subset A\subset B$，根据内部定义有 $\mathrm{i}\,(A)\subset\mathrm{i}\,(B)$。

15. 试证 $x\in\bar{A}\Leftrightarrow x$ 的任一邻域与 A 之交非空。对 $\Rightarrow$ 证明的提示：设 $O\in\mathscr{T}$ 且 $O\cap A=\varnothing$，先证 $A\subset X-O$，再证（利用闭包定义）$\bar{A}\subset X-O$。

证明 (1) $\Rightarrow$：不妨设 O 是 x 的开邻域。假设 $O\cap A=\varnothing$，于是 $\forall a\in A$，$a\neq A$，于是 $a\in X-O$，$A\subset X-O$，而 $X-O$ 为闭集，于是 $\bar{A}\subset X-O$，故知 $x\notin\bar{A}$，矛盾；

(2) $\Leftarrow$：设 $\forall O\in\mathscr{T}$ 使得 $x\in O$，都有 $O\cap A\neq\varnothing$。假设 $x\notin\bar{A}$，根据定义，$\exists B$ 为闭集，$A\subset B$ 且 $x\notin B$。于是 $x\in X-B\in\mathscr{T}$，于是 $X-B$ 是 x 的一个与 A 无交的开邻域，矛盾。

16. 试证 $\mathbb{R}$ 不是紧致的。

证明 记 $O_i=(i-1,i+1)$，显然 $\{O_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{R}$ 的开覆盖。现挑出其中任意 n 个 O_{i_k}，$k=1,2,\cdots,n$，则 $\max\limits_{k=1,2,\cdots,n} i_k+1$ 即为 $\bigcup\limits_{k=1,2,\cdots,n} O_{i_k}$ 的一个上界，故有限个元素不能覆盖 $\mathbb{R}$，于是 $\mathbb{R}$ 不是紧致的。

第二章　流形和张量场

习题

1. 试证 §2.1 例 2 定义的拓扑同胚映射 $\psi_i^{\pm}$ 在 $O_i^{\pm}$ 的所有交叠区域上满足相容性条件，从而证实 S^1 确是 1 维流形。

证明 首先，易知 $O_i^+ \cap O_i^- = \varnothing$，故只需考虑 $O_1^+ \cap O_2^+$ 及 $O_i^+ \cap O_j^-$。以

$$O_1^+ \cap O_2^+ = \big\{(x^1, x^2) \in S^1 \mid x^1 > 0, x^2 > 0\big\}$$

为例，根据定义，

$$\psi_2^+ \circ (\psi_1^+)^{-1}(t) = \psi_2^+((\sqrt{1-t^2}, t)) = \sqrt{1-t^2},$$

这的确是 C^∞ 的函数。

2. 说明 n 维矢量空间可看作 n 维平庸流形。

证明 为 n 维矢量空间 V 任取拓扑，再取定一组基 $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$，则在基 $\mathcal{B}$ 下，$\forall v \in V$，v 可展开为

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i,$$

令映射 $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ 定义为：

$$\psi\colon v \mapsto (v^1, v^2, \cdots, v^n),$$

则取图册 $\{(V, \psi)\}$，即可令 V 成为 n 维平庸流形。

3. 设 X 和 Y 是拓扑空间，$f\colon X \to Y$ 是同胚。若 X 还是个流形，试给 Y 定义一个微分结构使 $f\colon X \to Y$ 升格为微分同胚。

证明 记 X 的图册为 $\{(O_\alpha, \psi_\alpha)\}$，对每个 α，由于 f 是拓扑同胚，

$$O'_\alpha := f(O_\alpha) \in \mathscr{T}_Y,$$

在 O'_α 上定义映射

$$\psi'_\alpha := \psi_\alpha \circ f^{-1},$$

则

$$\begin{aligned}\psi'_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} &= \psi_\alpha \circ f^{-1} \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} \\ &= \mathrm{Id}_{V_\alpha} \in C^\infty(V_\alpha),\end{aligned}$$

于是在给 Y 定义图册 $\{(O'_\alpha, \psi'_\alpha)\}$ 后，f 成为一个微分同胚。

4. 设 (x, y) 是 $\mathbb{R}^2$ 的自然坐标，$C(t)$ 是曲线，参数表达式为 $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in (0, \pi)$。若 $p = C(\pi/3)$，写出曲线在 p 的切矢在自然坐标基的分量，并画图表示出该曲线及该切矢。

解 记 p 点切矢为 T，则

$$\begin{aligned}T_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \circ C(t))\Big|_{t=\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ T_y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y \circ C(t))\Big|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

如下图：

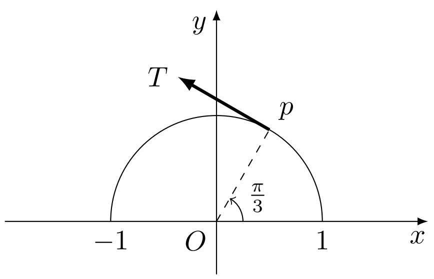

图 2.1: 曲线 $C(t)$ 及其在 p 点的切矢

5. 设曲线 $C(t)$ 和 $C'(t) \equiv C(2t_0 - t)$ 在 $C(t_0) = C'(t_0)$ 点的切矢分别为 v 和 v'，试证 $v + v' = 0$。

证明 记 $t' = 2t_0 - t$，依定义，$\forall f \in \mathscr{F}_M$，

$$
\begin{aligned}
v(f) &= \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ C(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}, \\
v'(f) &= \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ C'(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ C(t'))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \times \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ C(t'))}{\mathrm{d}t'}\right|_{t=t_0,\text{即}t'=2t_0-t=t_0} \\
&= -\left.\frac{\mathrm{d}(f \circ C(t'))}{\mathrm{d}t'}\right|_{t'=t_0} \\
&= -v(f)
\end{aligned}
$$

$\therefore v' = -v, \quad v + v' = 0$

6. 设 O 为坐标系 $\{x^\mu\}$ 的坐标域，$p \in O$，$v \in V_p$，v^μ 是 v 的坐标分量，把坐标 x^μ 看作 O 上的 C^∞ 函数，试证 $v^\mu = v(x^\mu)$。提示：用 $v = v^\nu X_\nu$ 两边作用于函数 x^μ。

证明 由 $v = v^\nu X_\nu$，

$$v(x^\mu) = v^\nu X_\nu(x^\mu) = v^\nu \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}\right|_p = v^\nu \delta^\mu{}_\nu = v^\mu.$$

7. 设 M 是二维流形，(O,ψ) 和 (O',ψ') 是 M 上的两个坐标系，坐标分别为 $\{x,y\}$ 和 $\{x',y'\}$，在 $O \cap O'$ 上的坐标变换为 $x' = x, \quad y' = y - \Omega x (\Omega = \text{常数})$，试分别写出坐标基矢 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ 用坐标基矢 $\partial/\partial x'$, $\partial/\partial y'$ 的展开式。

解 坐标基矢逐点的变换关系为 $X_\mu = \left.\dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right|_p X_\nu$，故

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'} \\
&= \frac{\partial}{\partial x'} - \Omega\frac{\partial}{\partial y'}; \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'} \\
&= \frac{\partial}{\partial y'}.
\end{aligned}
$$

8. (a) 试证式 (2-2-9) 的 $[u,v]$ 在每点满足矢量定义（§2.2 定义 2）的两个条件，从而的确是矢量场。

(b) 设 u,v,w 为流形 M 上的光滑矢量场，试证

$$[[u,v],w] + [[w,u],v] + [[v,w],u] = 0$$

（此式称为**雅可比恒等式**）。

证明 (a) (i) 线性性：显然；

(ii) 莱布尼兹律：显然。证毕[1]。

(b) 由定义，逐次展开有：

$$\begin{aligned}&[[u,v],w]+[[w,u],v]+[[v,w],u]\\=&[u,v]\circ w-w\circ[u,v]+[w,u]\circ v\\&-v\circ[w,u]+[v,w]\circ u-u\circ[v,w]\\=&u\circ v\circ w-v\circ u\circ w-w\circ u\circ v+w\circ v\circ u\\&+w\circ u\circ v-u\circ w\circ v-v\circ w\circ u+v\circ u\circ w\\&+v\circ w\circ u-w\circ v\circ u-u\circ v\circ w+u\circ w\circ v\\=&0.\end{aligned}$$

9. 设 $\{r,\phi\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中某开集（坐标域）上的极坐标，$\{x,y\}$ 为自然坐标，

(a) 写出极坐标系的坐标基矢 $\partial/\partial r$ 和 $\partial/\partial\phi$（作为坐标域上的矢量场）用 $\partial/\partial x$，$\partial/\partial y$ 展开的表达式。

(b) 求矢量场 $[\partial/\partial r\,,\partial/\partial x]$ 用 $\partial/\partial x\,,\partial/\partial y$ 展开的表达式。

(c) 令 $\hat{e}_r\equiv\partial/\partial r\,,\hat{e}_\phi=r^{-1}\,\partial/\partial\phi$，求 $[\hat{e}_r,\hat{e}_\phi]$ 用 $\partial/\partial x\,,\partial/\partial y$ 展开的表达式。

解 (a) 坐标变换为

$$\begin{cases}x=r\cos\phi,\\y=r\sin\phi.\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}&=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\\&=\cos\phi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\phi\frac{\partial}{\partial y}\\&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y},\\\frac{\partial}{\partial\phi}&=\frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\\&=-r\sin\phi\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\phi\frac{\partial}{\partial y}\\&=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

[1] 皮这一下非常开心 ~

(b) $\forall f \in \mathscr{F}_M$,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x}\right](f) =& \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}(f) \\
&- \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f) \\
=& \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\
&- \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\
=& - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y} \\
=& - \frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial y} \\
=& \left(-\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f),
\end{aligned}$$

$\therefore$ 在基 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ 下，

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x}\right] = -\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

(c) 由 (a)，

$$\begin{aligned}
\hat{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}, \\
\hat{e}_\phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y},
\end{aligned}$$

于是有 $\forall f \in \mathscr{F}_M$，

$$\begin{aligned}
&[\hat{e}_r, \hat{e}_\phi](f) \\
=& \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f) \\
&- \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\\
&+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\\
&+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\\
&-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\\
=&-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x}-\cancel{\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}\\
&+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y}+\cancel{\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}}\\
&-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x}-\cancel{\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}}\\
&+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y}+\cancel{\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}\\
&+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+\cancel{\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}\\
&+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y}+\cancel{\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}}\\
&-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x}-\cancel{\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}}\\
&-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y}-\cancel{\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}
\end{aligned}
$$

……好了算到这里我受够了，我选择直接丢进 Mathematica 让麦酱来算 (￣ ω ￣;)
麦酱报告说结果是酱紫：

$$\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial y}$$

于是得到

$$[\hat{e}_r,\hat{e}_\phi]=\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

10. 设 u，v 为 M 上的矢量场，试证 $[u,v]$ 在任何坐标基底的分量满足

$$[u,v]^\mu=v^\nu\,\partial v^\mu/\partial x^\nu-v^\nu\,\partial u^\mu/\partial x^\nu\,.\quad \text{提示：用式 (2-2-3}'\text{) 和 (2-2-3)}$$

证明 $\forall f \in \mathscr{F}_M$，

$$
\begin{aligned}
[u,v](f) &= \left[u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, v^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right](f)\\
&= u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(v^\nu \frac{\partial F}{\partial x^\nu}\right) - v^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(u^\mu \frac{\partial F}{\partial x^\nu}\right)\\
&= u^\mu \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial F}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\\
&= \left(u^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\right)\frac{\partial F}{\partial x^\mu}
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
[u,v] &= \left(u^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\right)\frac{\partial}{\partial x^\mu},\\
[u,v]^\mu &= \left(u^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\right).
\end{aligned}
$$

11. 设 $\{e_\mu\}$ 为 V 的基底，$\{e^{\mu *}\}$ 为其对偶基底，$v \in V$，$\omega \in V^*$，试证

$$
\omega = \omega(e_\mu)e^{\mu *}, \quad v = e^{\mu *}(v)e_\mu.
$$

证明 设 $\omega = \omega_\mu e^{\mu *}$，则

$$
\begin{aligned}
\omega(e_\nu) &= \omega_\mu e^{\mu *}(e_\nu)\\
&= \omega_\mu \delta^\mu{}_\nu\\
&= \omega_\nu,
\end{aligned}
$$

$\therefore \omega = \omega(e_m u)e^{\mu *}$. 同理设 $v = v^\mu e_\mu$，

$$
\begin{aligned}
e^{\nu *}(v) &= v^\mu e^{\nu *}(e_\mu)\\
&= v^\mu \delta^\nu{}_\mu\\
&= v^\nu,
\end{aligned}
$$

$\therefore v = e^{\mu *}e_\mu$.

12. 试证 $\omega'_\mu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega_\mu$（定理 2-3-4）。

证明 由上题，

$$
\begin{aligned}
\omega'_\nu &= \omega\left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right)\\
&= \omega\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega_\mu.
\end{aligned}
$$

13. 试证由式 (2-3-5) 定义的映射 $v \mapsto v^{**}$ 是同构映射。提示：可利用线性代数的结论，即同维矢量空间之间的一一线性映射必到上。

证明 留作习题答案略，读者自证不难（逃 $-=\equiv\Sigma((($つ•̀ω•́)つ）

14. 设 C_1^1T 和 $(C_1^1T)'$ 分别是 $(2,1)$ 型张量 T 借两个基底 $\{e_\mu\}$ 和 $\{e'_\mu\}$ 定义的缩并，试证 $(C_1^1T)' = C_1^1T$。

证明 记基 $\{e'_\mu\}$ 在基 $\{e_\mu\}$ 下的展开式为 $e_\mu = A^\nu{}_\mu e_\nu$ ，则

$$
e'^{\mu*} = \left(\tilde{A}^{-1}\right)_\nu{}^\mu e^{\nu*},
$$

于是 $\forall\omega \in V^*$，

$$
\begin{aligned}
\left(C_1^1T\right)'(\omega) =& T(e'^{\mu*}, \omega; e'_\mu) \\
=& T\left(\left(\tilde{A}^{-1}\right)_\nu{}^\mu e^{\nu*}, \omega; A^\sigma{}_\mu e_\sigma\right) \\
=& \left(\tilde{A}^{-1}\right)_\nu{}^\mu A^\sigma{}_\mu T\left(e^{\nu*}, \omega; e_\sigma\right) \\
=& \left(\tilde{A}^{-1}\right)_\nu{}^\mu \left(\tilde{A}\right)_\mu{}^\sigma T(e^{\nu*}, \omega; e_\sigma) \\
=& \delta_\nu{}^\sigma T(e^{\nu*}, \omega; e_\sigma) \\
=& T(e^{\nu*}, \omega; e_\nu) \\
=& C_1^1T(\omega).
\end{aligned}
$$

15. 设 g 为 V 的度规，试证 $g\colon V \to V^*$ 是同构映射（可参见第 13 题的提示）。

证明 线性空间的同构映射指的是可逆线性映射。这里证一个更普遍的结论，首先我们定义一个线性映射 $T\colon V \to W$ 的 kernel 为

$$
\ker T := \{v \in V \mid T(v) = 0\},
$$

我们有如下 claim：

claim T 是单射当且仅当 $\ker T = \{0\}$。

proof 若 T 是单射，由于 $\forall v \in V$，$T(0\cdot v) = 0T(v) = 0$, $\quad\therefore \ker T = \{0\}$；若 $\ker T = \{0\}$，假设存在 $u, v \in V$，使得 $T(u) = T(v)$，则由于 T 是线性映射，$T(u-v) = T(u) - T(v) = 0$，于是 $u - v \in \ker T$，即 $u = v$，于是 T 是单射。

易证任取一组基 $e_i \in V$, $T(e_i) \in W$ 线性无关当且仅当 $\ker T = \{0\}$, 若 $\dim V = \dim W$, 则这告诉我们 $T(e_i)$ 构成 W 的基，于是 $T(v^i e_i) = v^i T(e_i)$ 将取遍整个 W。于是我们证明了，若 $\dim V = \dim W$，则线性映射 $T\colon V \to W$ 为一一到上的（等价于可逆）当且仅当 $\ker T = \{0\}$。

对于度规 g，由于非退化性，知 $\ker g = \{0\}$，故 g 为线性同构。

16. 试证线长与曲线的参数化无关。

证明 设有重参数化 $C'(t') = C(t)$，线长为

$$
\begin{aligned}
l' &= \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t'}}\,\mathrm{d}t' \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g_{\mu\nu}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\right)}\left|\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t \\
&= l.
\end{aligned}
$$

17. 设 (x, y) 是二维欧氏空间的笛卡尔坐标系，试证由式 (2-5-14) 定义的 $\{x', y'\}$ 也是笛卡尔系。

证明 式 (2-5-14) 为

$$
\begin{cases}
x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\
y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.
\end{cases}
$$

其逆为：

$$
\begin{cases}
x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\
y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.
\end{cases}
$$

于是坐标基矢的变换为：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}, \\
\frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y} \\
&= -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

故

$$
\delta\left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial x'}\right) = \cos^2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + 2\cos\alpha\sin\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sin^2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
=&1;\\
\delta\left(\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial y'}\right)=&\sin^2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)-2\cos\alpha\sin\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
&+\cos^2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
=&1;\\
\delta\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial y'}\right)=&\delta\left(\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial x'}\right)\\
=&-\cos\alpha\sin\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)+\cos 2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
&+\cos\alpha\sin\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
=&0.
\end{aligned}
$$

$\therefore \{x',y'\}$ 是笛卡尔系。

18. 设 $\{t,x\}$ 是二维闵氏空间的洛伦兹坐标系，试证由式 (2-5-20) 定义的 $\{t',x'\}$ 也是洛伦兹系。

证明 式 (2-5-20) 为

$$
\begin{cases}
t'=t\cosh\lambda+x\sinh\lambda,\\
x'=t\sinh\lambda+x\cosh\lambda.
\end{cases}
$$

其逆为：

$$
\begin{cases}
t=t'\cosh\lambda-x'\sinh\lambda,\\
x=-t'\sinh\lambda+x'\cosh\lambda.
\end{cases}
$$

于是坐标基矢的变换为：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t'}=&\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x}\\
=&\cosh\lambda\frac{\partial}{\partial t}-\sinh\lambda\frac{\partial}{\partial x},\\
\frac{\partial}{\partial x'}=&\frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x}\\
=&-\sinh\lambda\frac{\partial}{\partial t}+\cosh\lambda\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

故

$$\begin{aligned}
\eta\left(\frac{\partial}{\partial t'},\frac{\partial}{\partial t'}\right) =& \cosh^2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right) - 2\cosh\lambda\sinh\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&+ \sinh^2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
=& -1; \\
\eta\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial x'}\right) =& \sinh^2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right) - 2\cosh\lambda\sinh\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&+ \cosh^2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
=& 1; \\
\eta\left(\frac{\partial}{\partial t'},\frac{\partial}{\partial x'}\right) =& \eta\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial t'}\right) \\
=& -\cosh\lambda\sinh\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right) + \cosh 2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&- \cosh\lambda\sinh\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
=& 0.
\end{aligned}$$

$\therefore \{t', x'\}$ 是洛伦兹系。

19. (a) 用张量变换律求出 3 维欧氏度规在球坐标系中的全部分量 ${g'}_{\mu\nu}$。

(b) 已知 4 维闵氏度规 g 在洛伦兹系中的线元表达式为 $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$，求 g 及其逆 g^{-1} 在新坐标系 $\{t', x', y', z'\}$ 的全部分量 ${g'}_{\mu\nu}$ 以及 $g'^{\mu\nu}$，该新坐标系定义如下：

$$t' = t, \quad z' = z, \quad x' = (x^2+y^2)^{1/2}\cos(\phi - \omega t),$$
$$y' = (x^2+y^2)^{1/2}\sin(\phi - \omega t), \quad \omega = 常数,$$

其中 ϕ 满足 $\cos\phi = y(x^2+y^2)^{1/2}, \quad \sin\phi = x(x^2+y^2)^{1/2}$。提示：先求 ${g'}_{\mu\nu}$ 再求 $g'^{\mu\nu}$。

解 (a) 球坐标与笛卡尔系的变换关系为：

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi, \\ y = r\sin\theta\sin\phi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}
{g'}_{rr} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial r}\frac{\partial x^\nu}{\partial r} g_{\mu\nu} \\
&= (\sin\theta\cos\phi)^2 + (\sin\theta\sin\phi)^2 + \cos^2\theta \\
&= 1;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{g'}_{r\theta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial r}\frac{\partial x^\nu}{\partial \theta}g_{\mu\nu} \\
&= \sin\theta\cos\phi\cdot r\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\cdot r\cos\theta\sin\phi - \cos\theta\cdot r\sin\theta \\
&= 0; \\
{g'}_{r\phi} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial r}\frac{\partial x^\nu}{\partial \phi}g_{\mu\nu} \\
&= -\sin\theta\cos\phi\cdot r\sin\theta\sin\phi + \sin\theta\sin\phi\cdot r\sin\theta\cos\phi + 0 \\
&= 0; \\
{g'}_{\theta\theta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta}\frac{\partial x^\nu}{\partial \theta}g_{\mu\nu} \\
&= (r\cos\theta\cos\phi)^2 + (r\cos\theta\sin\phi)^2 + (-r\sin\theta)^2 \\
&= r^2; \\
{g'}_{\theta\phi} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta}\frac{\partial x^\nu}{\partial \phi}g_{\mu\nu} \\
&= -r\cos\theta\cos\phi\cdot r\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta\sin\phi\cdot r\sin\theta\cos\phi + 0 \\
&= 0; \\
{g'}_{\phi\phi} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi}\frac{\partial x^\nu}{\partial \phi}g_{\mu\nu} \\
&= (-r\sin\theta\sin\phi)^2 + (r\sin\theta\cos\phi)^2 + 0 \\
&= r^2\sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

(b) 先求偏导数：

$$
\begin{aligned}
\sin\phi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\Rightarrow \quad \cos\phi\,\mathrm{d}\phi &= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y \\
\Rightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\phi &= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y \\
\Rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}.
\end{aligned}
$$

进而有：

$$
\frac{\partial x'}{\partial t} = \omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) - \sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)\frac{\partial\phi}{\partial x} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) \\
&= \frac{x}{x^2+y^2}(y\cos\omega t + x\sin\omega t) - \frac{y}{x^2+y^2}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) \\
&= \sin\omega t \\
\frac{\partial x'}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) - \sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)\frac{\partial\phi}{\partial y} \\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) \\
&= \frac{y}{x^2+y^2}(y\cos\omega t + x\sin\omega t) + \frac{x}{x^2+y^2}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) \\
&= \cos\omega t \\
\frac{\partial y'}{\partial t} &= -\omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t) \\
\frac{\partial y'}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) + \sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\frac{\partial\phi}{\partial x} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) \\
&= \frac{x}{x^2+y^2}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) + \frac{y}{x^2+y^2}(y\cos\omega t + x\sin\omega t) \\
&= \cos\omega t \\
\frac{\partial y'}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) + \sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\frac{\partial\phi}{\partial y} \\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) \\
&= \frac{y}{x^2+y^2}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) - \frac{x}{x^2+y^2}(y\cos\omega t + x\sin\omega t) \\
&= -\sin\omega t
\end{aligned}
$$

于是由张量变换律,

$$
\begin{aligned}
g'^{00} =& \frac{\partial t'}{\partial x^\mu}\frac{\partial t'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu} \\
=& -1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 \\
=& -1 \\
g'^{01} =& \frac{\partial t'}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu} \\
&= -1\cdot\omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t) + 0 + 0 + 0 \\
=& -\omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g'^{02} =& \frac{\partial t'}{\partial x^\mu}\frac{\partial y'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu}\\
=& -1\cdot\left(-\omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\right)+0+0+0\\
=&\omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\\
g'^{03} =& \frac{\partial t'}{\partial x^\mu}\frac{\partial z'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu}\\
=& -0+0+0+0\\
=&0\\
g'^{11} =& \frac{\partial x'}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu}\\
=& -\left(\omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)\right)^2+(\sin\omega t)^2+(\cos\omega t)^2+0^2\\
=&1-\left(x^2+y^2\right)\omega^2\sin^2(\phi-\omega t)\\
g'^{12} =& \frac{\partial x'}{\partial x^\mu}\frac{\partial y'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu}\\
=& -\left(\omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)\right)\cdot\left(-\omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\right)\\
&+\sin\omega t\cdot\cos\omega t+\cos\omega t\cdot(-\sin\omega t)+0\\
=&\left(x^2+y^2\right)\omega^2\sin(\phi-\omega t)\cos(\phi-\omega t)\\
g'^{13} =& \frac{\partial x'}{\partial x^\mu}\frac{\partial z'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu}\\
=& -0+0+0+0\\
=&0\\
g'^{22} =& \frac{\partial y'}{\partial x^\mu}\frac{\partial y'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu}\\
=& -\left(-\omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\right)^2+(\cos\omega t)^2+(-\sin\omega t)^2+0^2\\
=&1-\left(x^2+y^2\right)\omega^2\cos^2(\phi-\omega t)\\
g'^{23} =& \frac{\partial y'}{\partial x^\mu}\frac{\partial z'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu}\\
=& -0+0+0+0\\
=&0\\
g'^{33} =& \frac{\partial z'}{\partial x^\mu}\frac{\partial z'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu}\\
=& -0^2+0^2+0^2+1^2\\
=&1.
\end{aligned}
$$

于是 g^{-1} 在带撇坐标系下的分量矩阵为：

$$[g']^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -r\omega\sin\psi & r\omega\cos\psi & 0 \\ -r\omega\sin\psi & 1-r^2\omega^2\sin^2\psi & r^2\omega^2\sin\psi\cos\psi & 0 \\ -r\omega\sin\psi & r^2\omega^2\cos\psi\sin\psi & 1-r^2\omega^2\cos^2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\psi=\phi-\omega t$。其逆矩阵为

$$[g']=\begin{pmatrix} r^2\omega^2-1 & -r\omega\sin\psi & r\omega\cos\psi & 0 \\ -r\omega\sin\psi & 1 & 0 & 0 \\ r\omega\cos\psi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

此即 g 在带撇坐标系下的分量 $g'_{\mu\nu}$ 排成的矩阵。

20. 试证 3 维欧氏空间中球坐标基矢 $\partial/\partial r$, $\partial/\partial\theta$, $\partial/\partial\phi$ 的长度依次为 $1, r, r\sin\theta$。

证明 由 19(a) 知，

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial}{\partial r}\right\| &= \sqrt{|g'_{rr}|}=1, \\ \left\|\frac{\partial}{\partial \theta}\right\| &= \sqrt{|g'_{\theta\theta}|}=r, \\ \left\|\frac{\partial}{\partial \phi}\right\| &= \sqrt{|g'_{\phi\phi}|}=r\sin\theta. \end{aligned}$$

21. 用抽象指标记号证明 $T'^{\mu}{}_{\nu}=\dfrac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\dfrac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}T^{\rho}{}_{\sigma}$。

证明

$$\begin{aligned} T'^{\mu}{}_{\nu} =& T^a{}_b\,(\mathrm{d}x'^{\mu})_a\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\right)^b \\ =& T^a{}_b\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}(\mathrm{d}x'^{\rho})_a\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}}\right)^b \\ =& \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}T^{\rho}{}_{\sigma}. \end{aligned}$$

22. 以 g 和 g' 分别代表度规 g_{ab} 在坐标系 $\{x^{\mu}\}$ 和 $\{x'^{\mu}\}$ 的分量 $g_{\mu\nu}$ 和 $g'_{\mu\nu}$ 组成的两个 $n\times n$ 矩阵的行列式，试证 $g'=|\partial x^{\rho}/\partial x'^{\sigma}|^2 g$，其中 $|\partial x^{\rho}/\partial x'^{\sigma}|$ 是坐标变换 $\{x^{\mu}\}\mapsto\{x'^{\mu}\}$ 的雅可比行列式，即由 $\partial x^{\rho}/\partial x'^{\sigma}$ 组成的 $n\times n$ 行列式。注：本题表明度规的行列式在坐标变换下不是不变量。提示：取等式 $g'_{\rho\sigma}=(\partial x^{\mu}/\partial x'^{\rho})(\partial x^{\nu}/\partial x'^{\sigma})g_{\mu\nu}$ 的行列式。

证明 ……梁爷爷你提示都把题写完了我还写啥 (˘•ω•˘)

23. 设 $\{x^\mu\}$ 是流形上的任一局域坐标系，试判断下列等式的是非：

(1) $(\partial/\partial x^\mu)^a (\partial/\partial x^\nu)_a = g_{\mu\nu}$，其中 $(\partial/\partial x^\mu)_a \equiv g_{ab} (\partial/\partial x^\nu)^a$；

(2) $(\mathrm{d}x^\mu)^a (\mathrm{d}x^\nu)_a = g^{\mu\nu}$，其中 $(\mathrm{d}x^\mu)^a \equiv g^{ab} (\mathrm{d}x^\mu)_b$；

(3) $(\partial/\partial x^\mu)_a = (\mathrm{d}x^\mu)_a$；

(4) $(\mathrm{d}x^\mu)^a = (\partial/\partial x^\mu)_a$；

(5) $v^\mu \omega_\mu = v_\mu \omega^\mu$；

(6) $g_{\mu\nu} T^{\nu\rho} S_\rho{}^\sigma = T_{\mu\rho} S^{\rho\sigma}$；

(7) $v^a u^b = v^b u^a$；

(8) $v^a u^b = u^b v^a$。

解 (1) 正确。这是标量等式。根据 (0,2) 型张量分量的定义即知正确。

(2) 正确。这是标量等式。根据 (2,0) 型张量分量的定义即知正确。

(3) 不正确。这是对偶矢量等式。对其验证只需作用在坐标基矢上：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a = g_{\mu\nu};$$
$$(\mathrm{d}x^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a = \delta_{\mu\nu},$$

故 metric dual of basis 等于 dual basis 的条件为该坐标系是局域的笛卡尔系。

(4) 不正确。这是矢量等式。对其验证只需用对偶坐标基矢作用：

$$(\mathrm{d}x^\nu)^a (\mathrm{d}x^\mu)_a = g^{\mu\nu};$$
$$(\mathrm{d}x^\nu)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_a = \delta^{\nu\mu}.$$

故此式成立的条件为该坐标系为局域的笛卡尔系。或者可以这样得到：此式与 (3) 中的表达式互为 metric dual，故它们是等价的。

(5) 正确。这是数量等式。

$$\begin{aligned} v_\mu \omega^\mu &= g_{\rho\mu} v^\rho g^{\sigma\mu} \omega_\mu \\ &= v^\rho \omega_\rho. \end{aligned}$$

(6) 正确。这是数量等式。

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} T^{\nu\rho} S_\rho{}^\sigma &= g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} g^{\rho\beta} T_{\alpha\beta}\, g_{\rho\gamma} S^{\gamma\sigma} \\ &= \delta_\mu{}^\alpha \delta_\gamma{}^\beta T_{\alpha\beta}\, S^{\gamma\sigma} \\ &= T_{\mu\beta}\, S^{\beta\sigma}. \end{aligned}$$

(7) 不正确。这是 (2,0) 型张量等式。对其验证只需作用在对偶坐标基矢上：

$$v^a u^b \, (\mathrm{d}x^\mu)_a \, (\mathrm{d}x^\nu)_b = v^\mu u^\nu;$$
$$v^b u^a \, (\mathrm{d}x^\mu)_a \, (\mathrm{d}x^\nu)_b = v^\nu u^\mu.$$

$\therefore$ 该式成立的条件是 $v^\mu u^\nu = u^\mu v^\nu$， $\forall \mu, \nu$，这是不一定能满足的。

(8) 正确。这是 (2,0) 型张量等式，对其验证只需作用在对偶坐标基底上：

$$v^a u^b \, (\mathrm{d}x^\mu)_a \, (\mathrm{d}x^\nu)_b = v^\mu u^\nu;$$
$$u^b v^a \, (\mathrm{d}x^\mu)_a \, (\mathrm{d}x^\nu)_b = v^\mu u^\nu.$$

$\therefore$ 该式恒成立。

24. 设 T_{ab} 是矢量空间 V 上的 (0,2) 型张量，试证 $T_{ab} \, v^a v^b = 0, \quad \forall v^a \in V \Rightarrow T_{ab} = T_{[ab]}$。提示：把 v^a 表为任意两个矢量 u^a 和 w^a 之和。

证明 做任意拆分 $v^a = u^a + w^a$，注意到 $T_{ab} \, u^a u^b = 0$ 以及 $T_{ab} \, w^a w^b = 0$，有：

$$\begin{aligned}
T_{ab} \, v^a v^b &= T_{ab} \, u^a u^b + T_{ab} \, w^a w^b + T_{ab} \, u^a w^b + T_{ab} \, w^a u^b \\
&= T_{ab} \, u^a w^b + T_{ab} \, w^a u^b \\
&= \left(T_{(ab)} \, u^a w^b + T_{(ab)} \, u^b w^a\right) + \left(T_{[ab]} \, u^a w^b + T_{[ab]} \, u^b w^a\right) \\
&= T_{(ab)} \, u^a w^b + T_{(ab)} \, u^b w^a \\
&= 0
\end{aligned}$$

于是

$$T_{(ab)} = 0, \quad T_{ab} = T_{[ab]} \, .$$

25. 试证 $T_{abcd} = T_{a[bc]d} = T_{ab[cd]} \Rightarrow T_{abcd} = T_{a[bcd]}$。

注 (1) 推广至一般的结论是

$$T_{\cdots a \cdots b \cdots c \cdots} = T_{\cdots [a \cdots b] \cdots c \cdots} = T_{\cdots a \cdots [b \cdots c] \cdots} \Rightarrow T_{\cdots a \cdots b \cdots c \cdots} = T_{\cdots [a \cdots b \cdots c] \cdots} \, .$$

上式的前提中只有两个等号，关键是 $T_{\cdots [a \cdots b] \cdots c \cdots}$ 和 $T_{\cdots a \cdots [b \cdots c] \cdots}$ 中的指标 b 都在方括号内。

(2) 把前提和结论中的方括号改为圆括号，则推广前后的命题仍成立。

证明 此命题等价于 $T_{a(bc)d} = T_{ab(cd)} = 0 \Rightarrow T_{a(bcd)} = 0$。反正只有四阶，不妨暴力展开😊

$$\begin{aligned}
6T_{a(bcd)} &= T_{abcd} + T_{abdc} + T_{acbd} + T_{acdb} + T_{adbc} + T_{adcb} \\
&= T_{abcd} + T_{abdc} - T_{abcd} + T_{acdb} - T_{abdc} - T_{acdb} \\
&= T_{abcd} - T_{abcd} - T_{abcd} - T_{acbd} + T_{abcd} + T_{acbd} \\
&= T_{abcd} - T_{abcd} - T_{abcd} + T_{abcd} + T_{abcd} - T_{abcd} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

其中 $=$ 表示根据 $T_{a(bc)d} = 0$ 交换指标次序，$=$ 表示根据 $T_{ab(cd)} = 0$ 交换指标次序。

第三章　黎曼（内禀）曲率张量

习题

1. 放弃 ∇_a 定义中的无挠性条件 (e)，

(1) 试证存在张量 $T^c{}_{ab}$（叫**挠率张量**）使

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c{}_{ab} \nabla_c f, \quad \forall f \in \mathscr{F}.$$

提示：