

《微分几何入门与广义相对论》 部分习题参考解答

by 薛定谔的大喵¹

2020 年 9 月 30 日

¹wyj1234@mail.ustc.edu.cn

目录

第一部分 上册	1
第一章 拓扑空间简介	2
第二章 流形和张量场	6
第三章 黎曼（内禀）曲率张量	23
第四章 李导数、Killing 场和超曲面	42
第五章 微分形式及其积分	51
第六章 狭义相对论	71
第七章 广义相对论基础	88
第八章 爱因斯坦方程的求解	92
第九章 施瓦西时空	93
第十章 宇宙论	94
第二部分 中册	95
第十一章 时空的整体因果结构	96
附录 B 量子力学数学基础简介	98
附录 G 李群和李代数	99

第一部分

上册

第七章 广义相对论基础

习题

1. 试证弯曲时空麦氏方程 $\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b$ 蕴含电荷守恒定律, 即 $\nabla_a J^a = 0$ 。注: $\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b$ 等价于式 (7-2-8) 而非 (7-2-9), 故本题表明式 (7-2-8) 而非式 (7-2-9) 可推出电荷守恒。

证明

$$-4\pi \nabla_a J^a = \nabla_a \nabla_b F^{ba} = 0.$$

2. 试证 $\frac{D_F \omega_a}{d\tau} = \frac{D\omega_a}{d\tau} + (A_a \wedge Z_b) \omega^b \quad \forall \omega_a \in \mathcal{F}_G(0, 1)$.

证明 $\forall v^a \in \mathcal{F}_G(1, 0)$,

$$\begin{aligned} v^a \frac{D_F \omega_a}{d\tau} &= \frac{D_F (v^a \omega_a)}{d\tau} - \omega_a \frac{D_F v^a}{d\tau} \\ &= v^a \frac{D\omega_a}{d\tau} + \omega_a \frac{Dv^a}{d\tau} - \omega_a \left(\frac{Dv^a}{d\tau} + 2A^{[a} Z^{b]} v_b \right) \\ &= v^a \left(\frac{D\omega_a}{d\tau} - 2A_{[b} Z_{a]} \omega^b \right) \\ &= v^a \left(\frac{D\omega_a}{d\tau} + A_a \wedge Z_b \omega^b \right). \end{aligned}$$

3. 试证费米导数性质 3.

证明 性质 3 如下:

性质 若 w^a 是 $G(\tau)$ 上的空间矢量场 (对线上各点 $w^a Z_a = 0$), 则

$$D_F w^a / d\tau = h^a_b (Dw^b / d\tau),$$

其中 $h^a_b = g_{ab} + Z_a Z_b$, $h^a_b = g^{ac} h_{cb}$ 是 $G(\tau)$ 上各点的投影映射。

证明 $h^a_b = g^{ac}(g_{cb} + Z_c Z_b) = \delta^a_b + Z^a Z_b$,

$$\begin{aligned}
 h^a_b \frac{Dw^b}{d\tau} &= (\delta^a_b + Z^a Z_b) \frac{Dw^b}{d\tau} \\
 &= \frac{Dw^a}{d\tau} + Z^a \left(\frac{D(Z_b w^b)}{d\tau} - w^b \frac{DZ_b}{d\tau} \right) \\
 &= \frac{Dw^a}{d\tau} - Z^a A^b w_b \\
 &= \frac{Dw^a}{d\tau} + (A^a Z^b - Z^a A^b) w_b \\
 &= \frac{D_F w^a}{d\tau}.
 \end{aligned}$$

□

4. 试证类时线 $G(\tau)$ 上长度不变 (且非零) 的矢量场必经受时空转动。提示: 令 $u^a \equiv Dw^a/d\tau$, 则 $u_a v^a = 0$ 。先证: 无论 $v_a v^a$ 为零与否, 总有 $G(\tau)$ 上矢量场 v'^a 使 $v'^a v_a = 1$ 。再验证 v^a 经受以 $\Omega_{ab} \equiv 2v'_{[a} u_{b]}$ 为角速度 2 形式的时空转动。

证明 1. 记 $u^a = \frac{Dv^a}{d\tau}$, 则 $\frac{D(v_a v^a)}{d\tau} = 2u_a v^a = 0$ 。
 2. 若 $v^a v_a \neq 0$, 令

$$v'^a = \frac{v^a}{v^b v_b},$$

若 $v^a v_a = 0$, 则 $Z^a v_a$ 不为零, 因为与类时矢量内积为零则为类空矢量。于是定义

$$v'^a = \frac{Z^a}{Z^b v_b}.$$

3. 定义 $\Omega_{ab} = 2v'_{[a} u_{b]}$, 则

$$-\Omega^{ab} v_b = u^a = \frac{Dv^a}{d\tau},$$

故 v^a 经受以 Ω_{ab} 为角速度 2 形式的时空转动。

5. 设 $\{T, X, Y, Z\}$ 为闵氏时空的洛伦兹坐标系, 曲线 $G(\tau)$ 的参数表达式为

$$T = A^{-1} \sinh A\tau, \quad X = A^{-1} \cosh A\tau, \quad Y = Z = 0, \quad (\text{其中 } A \text{ 为常数})$$

- (a) 试证 $G(\tau)$ 是类时双曲线 (即图 (6-43)¹ 中的 G), τ 是固有时, A 是 $G(\tau)$ 的 4 加速 A^a 的长度。
 (b) 试证从 $\{T, X, Y, Z\}$ 坐标系原点 o 出发的与 $G(\tau)$ 有交的任一半直线 $\mu(s)$ 都与 $G(\tau)$ 正交。
 (c) 设 (b) 中的 $\mu(s)$ 的参数 s 是 μ 的线长, 随着 $\mu(s)$ 取遍所有从 o 出发并与 $G(\tau)$ 有交的半直线, 使得 $G(\tau)$ 上的一个空间矢量场 $w^a \equiv (\partial/\partial s)^a$, 试证 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移。

¹即本文档图 6.13

(d) 令 $Z^a \equiv (\partial/\partial\tau)^a$, 选 $\{Z^a, w^a, (\partial/\partial Y)^a, (\partial/\partial Z)^a\}$ 为 $G(\tau)$ 上的正交归一 4 标架场, 求出 $G(\tau)$ 的固有坐标系 $\{t, x, y, z\}$ 并指出其坐标域。

答: $T = (A^{-1} + x) \sinh At$, $X = (A^{-1} + x) \cosh At$, $Y = y$, $Z = z$ 。

(e) 写出闵氏时空在上述固有坐标系中的线元表达式。计算闵氏度规在该系的克氏符, 验证它满足引理 7-4-3, 即式 (7-4-10)²。

证明 (a) 由 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 知 $(AX)^2 - (AT)^2 = 1$, 故这是渐近线为 $T = \pm X$ 的双曲线。

以 τ 为参数,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a = \cosh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + \sinh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,$$

则

$$\eta_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b = -\cosh^2(A\tau) + \sinh^2(A\tau) = -1,$$

即切矢归一, τ 为固有时。

将 $\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a$ 延拓为

$$Z^a = AX \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + AT \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,$$

容易算得观者四加速为

$$\begin{aligned} \hat{A}^a &= Z^b \nabla_b Z^a|_{G(\tau)} \\ &= A^2 T \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + A^2 X \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a \Big|_{G(\tau)} \\ &= A \sinh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + A \cosh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a, \end{aligned}$$

则

$$\eta_{ab} \hat{A}^a \hat{A}^b = A^2 (\cosh^2(A\tau) - \sinh^2(A\tau)) = A^2,$$

即四加速的模长为 A 。

(b) 与 G 交于 τ 处的 μ 的方程为

$$T = \tanh(A\tau)X,$$

故其在 $G(\tau)$ 处的切矢正比于

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a = \sinh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + \cosh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,$$

²正文 (7-4-10) 为

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{ij}^\sigma = 0, \quad \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 = \Gamma_{00}^i = \hat{A}_i, \\ \Gamma_{0j}^i &= \Gamma_{j0}^i = -\omega^k \varepsilon_{0kij}, \quad \sigma = 0, 1, 2, 3; \quad i, j, k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

可算得

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)_a = -\cosh(A\tau) \sinh(A\tau) + \cosh(A\tau) \sinh(A\tau) = 0.$$

(c) 在 (b) 中给出的 $(\partial/\partial s)^a$ 已经是归一的, 因而就是 w^a 。由 (b) 和习题 3, 知

$$\begin{aligned} \frac{D_F w^a}{d\tau} &= h^a_b \frac{D w^b}{d\tau} \\ &= h^a_b Z^c \nabla_c w^b \\ &= h^a_b \left(A \cosh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^b + A \sinh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^b \right) \\ &= A h^a_b Z^b \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中 $Z^a = (\partial/\partial \tau)^a$, 故 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移。

(d) 以 $G(0)$ 为坐标原点, $\{t, 0, 0, 0\}$ 对应的点为 $G(t)$, 即

$$T = A^{-1} \sinh At, \quad X = A^{-1} \cosh At, \quad Y = Z = 0,$$

而此点处

$$\begin{aligned} & xw^a + y \left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)^a + z \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^a \\ &= x \sinh(At) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + x \cosh(At) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a + y \left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)^a + z \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^a, \end{aligned}$$

沿此矢量决定的测地线 (直线) 走参数为 1 的距离, 即

$$\Delta T = x \sinh(At), \quad \Delta X = x \cosh(At), \quad \Delta Y = y, \quad \Delta Z = z \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^a,$$

故 $\{t, x, y, z\}$ 对应的点为

$$T = (A^{-1} + x) \sinh At, \quad X = (A^{-1} + x) \cosh At, \quad Y = y, \quad Z = z. \quad (7.1)$$

(e) 计算得

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \\ &= -[(1 + Ax) \cosh(At) dt + \sinh(At) dx]^2 \\ &\quad + [(1 + Ax) \sinh(At) dt + \cosh(At) dx]^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -(1 + Ax)^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \end{aligned}$$

容易算得非零克氏符为

$$\Gamma_{tx}^t = \Gamma_{xt}^t = \frac{A}{1 + Ax}, \quad \Gamma_{tt}^x = A(1 + Ax),$$

在线上时

$$\Gamma_{tx}^t = \Gamma_{xt}^t = \Gamma_{tt}^x = A,$$

对 (7.1) 反解得坐标变换

$$t = A^{-1} \tanh^{-1} \left(\frac{T}{X} \right), \quad x = \sqrt{X^2 - T^2} - A^{-1}, \quad y = Y, \quad z = Z,$$

故

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)^a &= \frac{\partial t}{\partial T} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{\partial x}{\partial T} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \\ &= \frac{X}{A(X^2 - T^2)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \frac{T}{\sqrt{X^2 - T^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \\ &= \frac{\cosh At}{1 + Ax} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \sinh(At) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a, \\ \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^a &= \frac{\partial t}{\partial X} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{\partial x}{\partial X} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \\ &= \frac{T}{A(T^2 - X^2)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{X}{\sqrt{X^2 - T^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \\ &= -\frac{\sinh At}{1 + Ax} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \cosh(At) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \hat{A}^a &= A^2 X \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^a + A^2 T \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)^a \\ &= A(1 + Ax) \cosh(At) \left(-\frac{\sinh At}{1 + Ax} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \cosh(At) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \right) \\ &\quad + A(1 + Ax) \sinh(At) \left(\frac{\cosh At}{1 + Ax} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \sinh(At) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \right) \\ &= A(1 + Ax) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a, \end{aligned}$$

在线上时

$$\hat{A}^a = A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a,$$

满足引理，证毕。

6. 设 G 是质点 L 在 $p \in L$ 的瞬时静止自由下落观者 (即 G 的 4 速 Z^a 与 L 的 4 速 U^a 在 p 点相切), A^a 是 L 在 p 点的 4 加速, a^a 是 L 在 p 点相对于 G 的 3 加速 [由式 (7-4-3)³ 定义], 试证 $a^a = A^a$ 。

注: 本题可视为命题 6-3-6 在弯曲时空的推广。

³ 正正式 (7-4-3) 为

$$a^a := \left[\frac{d^2 x^i(t)}{dt^2} \right] \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a.$$

证明 记 $G(t)$ 的固有坐标系为 $\{t, x, y, z\}$ 。在 p 点, 有 $U^a = Z^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ 。对 U^a 做分解, 有

$$U^a = \left(\frac{\partial}{\partial \tau_L}\right)^a = \frac{dt}{d\tau_L} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{dx^i}{d\tau_L} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a = \gamma Z^a + \gamma u^a,$$

则

$$\gamma|_p = 1, \quad u^a|_p = 0,$$

而

$$\begin{aligned} A^a|_p &= (Z^b \nabla_b U^a)|_p \\ &= (\partial_0 U^a + \Gamma^0_{ab} U^b)|_p \\ &= \partial_0 U^a|_p \\ &= \frac{d\gamma}{dt} Z^a + \frac{d\gamma}{dt} u^a + \gamma \frac{du^a}{dt} \\ &= \frac{du^a}{dt}, \end{aligned}$$

其中最后一步用到 $\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_p = 0$, 这是因为 $\gamma = -U^a Z_a \leq 1$, 故在 p 点 $\gamma|_p = 1$ 取到了极值。而 $\frac{du^a}{dt}$ 就是 a^a 。

7. 度规 g_{ab} 叫 **里奇平直**的, 若 g_{ab} 的里奇张量为零。试证 g_{ab} 是真空爱因斯坦方程的解的充要条件是 g_{ab} 是里奇平直的。

证明 真空爱因斯坦方程为 $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0$ 。

1. 充分性: 若 $R_{ab} = 0$, 则取迹得 $R = 0$, 故满足真空场方程。
2. 必要性: 设 g_{ab} 满足真空场方程, 即 $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0$, 取迹得

$$R - 2R = -R = 0,$$

故

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = R_{ab} = 0,$$

故里奇平直。

8. 设 (M, g_{ab}) 为里奇平直时空 (定义见上题), ξ^a 是其中的一个 Killing 矢量场, 试证 $F_{ab} := (d\xi)_{ab}$ 满足 (M, g_{ab}) 的无源 ($J_a = 0$) 麦氏方程。提示: 利用 Killing 场 ξ^a 满足的 $\nabla_a \xi^a = 0$ (第 4 章习题 11 的结果)。

证明 计算得

$$\begin{aligned} \nabla^a F_{ab} &= \nabla^a \nabla_a \xi_b - \nabla^a \nabla_b \xi_a \\ &= -2\nabla^a \nabla_b \xi_a \\ &= -2(\nabla_b \nabla^a \xi_a + R_b^c \xi_c) \\ &= 0, \end{aligned}$$

而第二个方程 $\nabla_{[a} F_{bc]} = 0$ 等价于 $(dF)_{abc} = 0$, 这是由 $F = d\xi$ 保证的。

9. 设 $\xi_\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ 为方程 $\partial^b \partial_b \xi_\mu = 0$ 在初始条件式 (7-9-10) ~ (7-9-13)⁴ 下的解, 试证由 $\xi_a = \xi_\mu (dx^\mu)_a$ 及 γ_{ab} 按式 (7-9-8)⁵ 构造的 γ'_{ab} 在无源区域既满足洛伦兹规范条件 $\partial^a \bar{\gamma}'_{ab} = 0$ 又满足 $\gamma' = 0$ 和 $\gamma'_{0i} = 0 (i = 1, 2, 3)$ 。提示: (1) 根据解的唯一性定理, 只须证明 $\gamma' = 0$ 和 $\gamma'_{0i} = 0$ 分别是方程 $\partial^c \partial_c \gamma = 0$ 和 $\partial^c \partial_c \gamma'_{0i} = 0$ 的满足初始条件 $\gamma'|_{\Sigma_0} = 0, \partial\gamma'/\partial t|_{\Sigma_0} = 0, \gamma'_{0i}|_{\Sigma_0} = 0$ 和 $\partial\gamma'_{0i}/\partial t|_{\Sigma_0} = 0$ 的解。(2) 由 $\partial^b \partial_b \xi_\mu = 0$ 可得 $\partial^2 \xi_\mu / \partial t^2 = \nabla^2 \xi_\mu$ 。

证明 由 (7-9-8) 易知,

$$\gamma' = \gamma + 2\partial^a \xi_a,$$

则

$$\begin{aligned} \partial^a \bar{\gamma}'_{ab} &= \partial^a \left(\gamma'_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \gamma' \right) \\ &= \partial^a \left(\gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a - \frac{1}{2} \eta_{ab} \gamma - \eta_{ab} \partial^c \xi_c \right) \\ &= \partial^a \gamma_{ab} + 0 + \partial^a \partial_b \xi_a - \frac{1}{2} \partial_b \gamma - \partial_b \partial^c \xi_c \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中红色的两项加起来为 $\partial^a \bar{\gamma}_{ab}$, 故为零。

在无源区域, $T_{ab} = 0$, 则线性场方程为

$$\partial^c \partial_c \gamma_{ab} = 0,$$

取迹得

$$\partial^c \partial_c \gamma = 0,$$

则

$$\partial^c \partial_c \gamma' = \partial^c \partial_c (\gamma + 2\partial^a \xi_a) = 0,$$

⁴正文 (7-9-10) ~ (7-9-13) 为

$$2(\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} - \partial \xi_0 / \partial t)|_{\Sigma_0} = -\gamma|_{\Sigma_0}, \quad (7-9-10)$$

$$2[-\nabla^2 \xi_0 + \vec{\nabla} \cdot (\partial \vec{\xi} / \partial t)]|_{\Sigma_0} = -\partial \gamma / \partial t|_{\Sigma_0}, \quad (7-9-11)$$

$$[(\partial \gamma_i / \partial t) + (\partial \xi_0 / \partial x^i)]|_{\Sigma_0} = -\gamma_{0i}|_{\Sigma_0}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7-9-12)$$

$$\left[\nabla^2 \xi_i + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} \right) \right]|_{\Sigma_0} = -\frac{\partial \gamma_{0i}}{\partial t}|_{\Sigma_0}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7-9-13)$$

⁵正文式 (7-9-8) 为

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a, \quad (7-9-8)$$

其中 ξ_a 满足

$$\partial^b \partial_b \xi_a = 0. \quad (7-9-9)$$

在边界上又有

$$\begin{aligned}
 \gamma'|_{\Sigma_0} &= (\gamma + 2\partial^a \xi_a)|_{\Sigma_0} \\
 &= \left(\gamma - 2\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + 2\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \right)_{\Sigma_0} \\
 &= 0, \\
 \frac{\partial \gamma'}{\partial t} \Big|_{\Sigma_0} &= \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right)_{\Sigma_0} \\
 &= \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} - 2\nabla^2 \xi_0 + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right)_{\Sigma_0} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

故知在区域内 γ' 必为零。

再考虑 γ'_{0i} ，它也满足拉普拉斯方程

$$\partial^a \partial_a \gamma'_{0i} = 0,$$

而在边界上

$$\begin{aligned}
 \gamma'_{0i}|_{\Sigma_0} &= \left(\gamma_{0i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x^i} \right)_{\Sigma_0} \\
 &= 0, \\
 \frac{\partial \gamma'_{0i}}{\partial t} \Big|_{\Sigma_0} &= \left(\frac{\partial \gamma_{0i}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} \right) \right)_{\Sigma_0} \\
 &= \left(\frac{\partial \gamma_{0i}}{\partial t} + \nabla^2 \xi_i + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} \right) \right)_{\Sigma_0} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

则 γ'_{0i} 在区域内也为零。

10. 设 γ_{ab} 满足 (a) $\partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0$; (b) $\gamma = 0$; (c) $\gamma_{0i} = 0 (i = 1, 2, 3)$; (d) $\gamma_{00} = \text{常数}$ 。试找出一个“无限小”矢量场 ξ^a 使 $\tilde{\gamma}_{ab} \equiv \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a$ 满足 (a) $\partial^a \tilde{\gamma}_{ab} = 0$; (b) $\tilde{\gamma} = 0$; (c) $\tilde{\gamma}_{0i} = 0$; (d) $\tilde{\gamma}_{00} = 0$ 。

证明 计算得

$$\begin{aligned}
 \partial^a \bar{\gamma}_{ab} &= \partial^a \left(\bar{\gamma}_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \bar{\gamma} \right) \\
 &= \partial^a \left(\gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a - \frac{1}{2} \eta_{ab} \gamma - \eta_{ab} \partial^c \xi_c \right) \\
 &= \partial^a \partial_a \xi_b, \\
 \bar{\gamma} &= \gamma + 2 \partial^a \xi_a, \\
 \bar{\gamma}_{0i} &= \gamma_{0i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x^i} \\
 &= \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x^i}, \\
 \bar{\gamma}_{00} &= \gamma_{00} + 2 \frac{\partial \xi_0}{\partial t},
 \end{aligned}$$

故得微分方程组

$$\begin{cases} \partial^a \partial_a \xi_\mu = 0, & \mu = 0, 1, 2, 3, \\ \partial^\mu \xi_\mu = 0, \\ \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x^i} = 0, & i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \xi_0}{\partial t} = -\frac{1}{2} \gamma_{00}, \end{cases}$$

先关注 ξ_0 , 由

$$\begin{cases} \nabla^2 \xi_0 = 0, \\ \frac{\partial \xi_0}{\partial t} = -\frac{1}{2} \gamma_{00}, \end{cases}$$

则最简单的解为

$$\xi_0 = -\frac{1}{2} \gamma_{00} t,$$

代回方程组得

$$\begin{cases} \partial^a \partial_a \xi_i = 0, & i = 1, 2, 3, \\ \partial_i \xi^i = -\frac{1}{2} \gamma_{00}, \\ \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = 0, & i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

则取 $\xi^i = \frac{1}{6} \gamma_{00} x^i$ 即可, 即

$$\xi^a = \frac{1}{2} \gamma_{00} t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \frac{1}{6} \gamma_{00} x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a.$$

11. 试证命题 7-9-2。

证明 命题 7-9-2 为

定理.

$$R_{abcd} = [f(e^1)_a \wedge (e^4)_b + g(e^2)_a \wedge (e^4)_b] (e^4)_c \wedge (e^1)_d \\ + [g(e^1)_a \wedge (e^4)_b - f(e^2)_a \wedge (e^4)_b] (e^4)_c \wedge (e^2)_d.$$

◇

证明 式 (7-9-32) 为

$$R_{abc}{}^d = R_{ab1}{}^3 (e^1)_c (e_3)^d + R_{ab2}{}^3 (e^2)_c (e_3)^d + R_{ab4}{}^1 (e^4)_c (e^1)^d + R_{ab4}{}^2 (e^4)_c (e_2)^d \\ = [f(e^1)_a \wedge (e^4)_b + g(e^2)_a \wedge (e^4)_b] [(e^1)_c (e_3)^d + (e^4)_c (e_1)^d] \\ + [g(e^1)_a \wedge (e^4)_b - f(e^2)_a \wedge (e^4)_b] [(e^2)_c (e_3)^d + (e^4)_c (e_2)^d],$$

由 (7-9-26) 知

$$g_{ab} = (e^1)_a (e^1)_b + (e^2)_a (e^2)_b - (e^3)_a (e^4)_b - (e^4)_a (e^3)_b,$$

则

$$R_{abcd} = R_{abc}{}^e g_{ed} \\ = [f(e^1)_a \wedge (e^4)_b + g(e^2)_a \wedge (e^4)_b] [-(e^1)_c (e^4)_d + 0] \\ + [g(e^1)_a \wedge (e^4)_b - f(e^2)_a \wedge (e^4)_b] [-(e^2)_c (e^4)_d + 0] \\ = [f(e^1)_a \wedge (e^4)_b + g(e^2)_a \wedge (e^4)_b] (e^4)_c \wedge (e^1)_d \\ + [g(e^1)_a \wedge (e^4)_b - f(e^2)_a \wedge (e^4)_b] (e^4)_c \wedge (e^2)_d.$$

□

第二部分

中册