

# 《微分几何入门与广义相对论》 部分习题参考解答

by 薛定谔的大喵<sup>1</sup>

2020 年 9 月 29 日

<sup>1</sup>[wyj1234@mail.ustc.edu.cn](mailto:wyj1234@mail.ustc.edu.cn)



# 目录

第一部分 上册	1
第一章 拓扑空间简介	2
第二章 流形和张量场	6
第三章 黎曼（内禀）曲率张量	23
第四章 李导数、Killing 场和超曲面	42
第五章 微分形式及其积分	51
第六章 狭义相对论	71
第七章 广义相对论基础	88
第八章 爱因斯坦方程的求解	92
第九章 施瓦西时空	93
第十章 宇宙论	94
第二部分 中册	95
第十一章 时空的整体因果结构	96
附录 B 量子力学数学基础简介	98
附录 G 李群和李代数	99



# 第一部分

## 上册

## 第七章 广义相对论基础

### 习题

1. 试证弯曲时空麦氏方程  $\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b$  蕴含电荷守恒定律, 即  $\nabla_a J^a = 0$ 。注:  $\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b$  等价于式 (7-2-8) 而非 (7-2-9), 故本题表明式 (7-2-8) 而非式 (7-2-9) 可推出电荷守恒。

证明

$$-4\pi \nabla_a J^a = \nabla_a \nabla_b F^{ba} = 0.$$

2. 试证  $\frac{D_F \omega_a}{d\tau} = \frac{D\omega_a}{d\tau} + (A_a \wedge Z_b) \omega^b \quad \forall \omega_a \in \mathcal{F}_G(0, 1)$ .

证明  $\forall v^a \in \mathcal{F}_G(1, 0)$ ,

$$\begin{aligned} v^a \frac{D_F \omega_a}{d\tau} &= \frac{D_F (v^a \omega_a)}{d\tau} - \omega_a \frac{D_F v^a}{d\tau} \\ &= v^a \frac{D\omega_a}{d\tau} + \omega_a \frac{Dv^a}{d\tau} - \omega_a \left( \frac{Dv^a}{d\tau} + 2A^{[a} Z^{b]} v_b \right) \\ &= v^a \left( \frac{D\omega_a}{d\tau} - 2A_{[b} Z_{a]} \omega^b \right) \\ &= v^a \left( \frac{D\omega_a}{d\tau} + A_a \wedge Z_b \omega^b \right). \end{aligned}$$

3. 试证费米导数性质 3.

证明 性质 3 如下:

性质 若  $w^a$  是  $G(\tau)$  上的空间矢量场 (对线上各点  $w^a Z_a = 0$ ), 则

$$D_F w^a / d\tau = h^a_b (Dw^b / d\tau),$$

其中  $h^a_b = g_{ab} + Z_a Z_b$ ,  $h^a_b = g^{ac} h_{cb}$  是  $G(\tau)$  上各点的投影映射。

证明  $h^a_b = g^{ac}(g_{cb} + Z_c Z_b) = \delta^a_b + Z^a Z_b$ ,

$$\begin{aligned} h^a_b \frac{Dw^b}{d\tau} &= (\delta^a_b + Z^a Z_b) \frac{Dw^b}{d\tau} \\ &= \frac{Dw^a}{d\tau} + Z^a \left( \frac{D(Z_b w^b)}{d\tau} - w^b \frac{DZ_b}{d\tau} \right) \\ &= \frac{Dw^a}{d\tau} - Z^a A^b w_b \\ &= \frac{Dw^a}{d\tau} + (A^a Z^b - Z^a A^b) w_b \\ &= \frac{D_F w^a}{d\tau}. \end{aligned}$$

□

4. 试证类时线  $G(\tau)$  上长度不变 (且非零) 的矢量场必经受时空转动。提示: 令  $u^a \equiv Dw^a/d\tau$ , 则  $u_a v^a = 0$ 。先证: 无论  $v_a v^a$  为零与否, 总有  $G(\tau)$  上矢量场  $v'^a$  使  $v'^a v_a = 1$ 。再验证  $v^a$  经受以  $\Omega_{ab} \equiv 2v'_{[a} u_{b]}$  为角速度 2 形式的时空转动。

证明 1. 记  $u^a = \frac{Dv^a}{d\tau}$ , 则  $\frac{D(v_a v^a)}{d\tau} = 2u_a v^a = 0$ 。  
2. 若  $v^a v_a \neq 0$ , 令

$$v'^a = \frac{v^a}{v^b v_b},$$

若  $v^a v_a = 0$ , 则  $Z^a v_a$  不为零, 因为与类时矢量内积为零则为类空矢量。于是定义

$$v'^a = \frac{Z^a}{Z^b v_b}.$$

3. 定义  $\Omega_{ab} = 2v'_{[a} u_{b]}$ , 则

$$-\Omega^{ab} v_b = u^a = \frac{Dv^a}{d\tau},$$

故  $v^a$  经受以  $\Omega_{ab}$  为角速度 2 形式的时空转动。

5. 设  $\{T, X, Y, Z\}$  为闵氏时空的洛伦兹坐标系, 曲线  $G(\tau)$  的参数表达式为

$$T = A^{-1} \sinh A\tau, \quad X = A^{-1} \cosh A\tau, \quad Y = Z = 0, \quad (\text{其中 } A \text{ 为常数})$$

- (a) 试证  $G(\tau)$  是类时双曲线 (即图 (6-43)<sup>1</sup> 中的  $G$ ),  $\tau$  是固有时,  $A$  是  $G(\tau)$  的 4 加速  $A^a$  的长度。  
(b) 试证从  $\{T, X, Y, Z\}$  坐标系原点  $o$  出发的与  $G(\tau)$  有交的任一半直线  $\mu(s)$  都与  $G(\tau)$  正交。  
(c) 设 (b) 中的  $\mu(s)$  的参数  $s$  是  $\mu$  的线长, 随着  $\mu(s)$  取遍所有从  $o$  出发并与  $G(\tau)$  有交的半直线, 使得  $G(\tau)$  上的一个空间矢量场  $w^a \equiv (\partial/\partial s)^a$ , 试证  $w^a$  沿  $G(\tau)$  费移。

<sup>1</sup>即本文档图 6.13

(d) 令  $Z^a \equiv (\partial/\partial\tau)^a$ , 选  $\{Z^a, w^a, (\partial/\partial Y)^a, (\partial/\partial Z)^a\}$  为  $G(\tau)$  上的正交归一 4 标架场, 求出  $G(\tau)$  的固有坐标系  $\{t, x, y, z\}$  并指出其坐标域。

答:  $T = (A^{-1} + x) \sinh At$ ,  $X = (A^{-1} + x) \cosh At$ ,  $Y = y$ ,  $Z = z$ 。

(e) 写出闵氏时空在上述固有坐标系中的线元表达式。计算闵氏度规在该系的克氏符, 验证它满足引理 7-4-3, 即式 (7-4-10)<sup>2</sup>。

**证明** (a) 由  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  知  $(AX)^2 - (AT)^2 = 1$ , 故这是渐近线为  $T = \pm X$  的双曲线。

以  $\tau$  为参数,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a = \cosh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + \sinh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,$$

则

$$\eta_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b = -\cosh^2(A\tau) + \sinh^2(A\tau) = -1,$$

即切矢归一,  $\tau$  为固有时。

将  $\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a$  延拓为

$$Z^a = AX \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + AT \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,$$

容易算得观者四加速为

$$\begin{aligned} \hat{A}^a &= Z^b \nabla_b Z^a|_{G(\tau)} \\ &= A^2 T \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + A^2 X \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a \Big|_{G(\tau)} \\ &= A \sinh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + A \cosh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a, \end{aligned}$$

则

$$\eta_{ab} \hat{A}^a \hat{A}^b = A^2 (\cosh^2(A\tau) - \sinh^2(A\tau)) = A^2,$$

即四加速的模长为  $A$ 。

(b) 与  $G$  交于  $\tau$  处的  $\mu$  的方程为

$$T = \tanh(A\tau)X,$$

故其在  $G(\tau)$  处的切矢正比于

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a = \sinh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + \cosh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,$$

<sup>2</sup>正文 (7-4-10) 为

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{ij}^\sigma = 0, \quad \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 = \Gamma_{00}^i = \hat{A}_i, \\ \Gamma_{0j}^i &= \Gamma_{j0}^i = -\omega^k \varepsilon_{0kij}, \quad \sigma = 0, 1, 2, 3; \quad i, j, k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$



可算得

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)_a = -\cosh(A\tau) \sinh(A\tau) + \cosh(A\tau) \sinh(A\tau) = 0.$$

(c) 在 (b) 中给出的  $(\partial/\partial s)^a$  已经是归一的, 因而就是  $w^a$ 。由 (b) 和习题 3, 知

$$\begin{aligned} \frac{D_F w^a}{d\tau} &= h^a_b \frac{D w^b}{d\tau} \\ &= h^a_b Z^c \nabla_c w^b \\ &= h^a_b \left( A \cosh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^b + A \sinh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^b \right) \\ &= A h^a_b Z^b \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中  $Z^a = (\partial/\partial \tau)^a$ , 故  $w^a$  沿  $G(\tau)$  费移。

(d) 以  $G(0)$  为坐标原点,  $\{t, 0, 0, 0\}$  对应的点为  $G(t)$ , 即

$$T = A^{-1} \sinh At, \quad X = A^{-1} \cosh At, \quad Y = Z = 0,$$

而此点处

$$\begin{aligned} & xw^a + y \left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)^a + z \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^a \\ &= x \sinh(At) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + x \cosh(At) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a + y \left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)^a + z \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^a, \end{aligned}$$

沿此矢量决定的测地线 (直线) 走参数为 1 的距离, 即

$$\Delta T = x \sinh(At), \quad \Delta X = x \cosh(At), \quad \Delta Y = y, \quad \Delta Z = z \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^a,$$

故  $\{t, x, y, z\}$  对应的点为

$$T = (A^{-1} + x) \sinh At, \quad X = (A^{-1} + x) \cosh At, \quad Y = y, \quad Z = z. \quad (7.1)$$

(e) 计算得

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \\ &= -[(1 + Ax) \cosh(At) dt + \sinh(At) dx]^2 \\ &\quad + [(1 + Ax) \sinh(At) dt + \cosh(At) dx]^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -(1 + Ax)^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \end{aligned}$$

容易算得非零克氏符为

$$\Gamma_{tx}^t = \Gamma_{xt}^t = \frac{A}{1 + Ax}, \quad \Gamma_{tt}^x = A(1 + Ax),$$

在线上时

$$\Gamma_{tx}^t = \Gamma_{xt}^t = \Gamma_{tt}^x = A,$$

对 (7.1) 反解得坐标变换

$$t = A^{-1} \tanh^{-1} \left( \frac{T}{X} \right), \quad x = \sqrt{X^2 - T^2} - A^{-1}, \quad y = Y, \quad z = Z,$$

故

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial T} \right)^a &= \frac{\partial t}{\partial T} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{\partial x}{\partial T} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a \\ &= \frac{X}{A(X^2 - T^2)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \frac{T}{\sqrt{X^2 - T^2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a \\ &= \frac{\cosh At}{1 + Ax} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \sinh(At) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a, \\ \left( \frac{\partial}{\partial X} \right)^a &= \frac{\partial t}{\partial X} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{\partial x}{\partial X} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a \\ &= \frac{T}{A(T^2 - X^2)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{X}{\sqrt{X^2 - T^2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a \\ &= -\frac{\sinh At}{1 + Ax} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \cosh(At) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \hat{A}^a &= A^2 X \left( \frac{\partial}{\partial X} \right)^a + A^2 T \left( \frac{\partial}{\partial T} \right)^a \\ &= A(1 + Ax) \cosh(At) \left( -\frac{\sinh At}{1 + Ax} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \cosh(At) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a \right) \\ &\quad + A(1 + Ax) \sinh(At) \left( \frac{\cosh At}{1 + Ax} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \sinh(At) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a \right) \\ &= A(1 + Ax) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a, \end{aligned}$$

在线上时

$$\hat{A}^a = A \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a,$$

满足引理，证毕。

6. 设  $G$  是质点  $L$  在  $p \in L$  的瞬时静止自由下落观者 (即  $G$  的 4 速  $Z^a$  与  $L$  的 4 速  $U^a$  在  $p$  点相切),  $A^a$  是  $L$  在  $p$  点的 4 加速,  $a^a$  是  $L$  在  $p$  点相对于  $G$  的 3 加速 [由式 (7-4-3)<sup>3</sup> 定义], 试证  $a^a = A^a$ 。

注: 本题可视为命题 6-3-6 在弯曲时空的推广。

<sup>3</sup> 正正式 (7-4-3) 为

$$a^a := \left[ \frac{d^2 x^i(t)}{dt^2} \right] \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a.$$

**证明** 记  $G(t)$  的固有坐标系为  $\{t, x, y, z\}$ 。在  $p$  点, 有  $U^a = Z^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ 。对  $U^a$  做分解, 有

$$U^a = \left(\frac{\partial}{\partial \tau_L}\right)^a = \frac{dt}{d\tau_L} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{dx^i}{d\tau_L} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a = \gamma Z^a + \gamma u^a,$$

则

$$\gamma|_p = 1, \quad u^a|_p = 0,$$

而

$$\begin{aligned} A^a|_p &= (Z^b \nabla_b U^a)|_p \\ &= (\partial_0 U^a + \Gamma^0_{ab} U^b)|_p \\ &= \partial_0 U^a|_p \\ &= \frac{d\gamma}{dt} Z^a + \frac{d\gamma}{dt} u^a + \gamma \frac{du^a}{dt} \\ &= \frac{du^a}{dt}, \end{aligned}$$

其中最后一步用到  $\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_p = 0$ , 这是因为  $\gamma = -U^a Z_a \leq 1$ , 故在  $p$  点  $\gamma|_p = 1$  取到了极值。而  $\frac{du^a}{dt}$  就是  $a^a$ 。

7. 度规  $g_{ab}$  叫 **里奇平直**的, 若  $g_{ab}$  的里奇张量为零。试证  $g_{ab}$  是真空爱因斯坦方程的解的充要条件是  $g_{ab}$  是里奇平直的。

**证明** 真空爱因斯坦方程为  $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0$ 。

1. 充分性: 若  $R_{ab} = 0$ , 则取迹得  $R = 0$ , 故满足真空场方程。
2. 必要性: 设  $g_{ab}$  满足真空场方程, 即  $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0$ , 取迹得

$$R - 2R = -R = 0,$$

故

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = R_{ab} = 0,$$

故里奇平直。

8. 设  $(M, g_{ab})$  为里奇平直时空 (定义见上题),  $\xi^a$  是其中的一个 Killing 矢量场, 试证  $F_{ab} := (d\xi)_{ab}$  满足  $(M, g_{ab})$  的无源 ( $J_a = 0$ ) 麦氏方程。提示: 利用 Killing 场  $\xi^a$  满足的  $\nabla_a \xi^a = 0$  (第 4 章习题 11 的结果)。

**证明** 计算得

$$\begin{aligned} \nabla^a F_{ab} &= \nabla^a \nabla_a \xi_b - \nabla^a \nabla_b \xi_a \\ &= -2\nabla^a \nabla_b \xi_a \\ &= -2(\nabla_b \nabla^a \xi_a + R_b^c \xi_c) \\ &= 0, \end{aligned}$$

而第二个方程  $\nabla_{[a} F_{bc]} = 0$  等价于  $(dF)_{abc} = 0$ , 这是由  $F = d\xi$  保证的。

9. 设  $\xi_\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$  为方程  $\partial^b \partial_b \xi_\mu = 0$  在初始条件式 (7-9-10) ~ (7-9-13)<sup>4</sup> 下的解, 试证由  $\xi_a = \xi_\mu (dx^\mu)_a$  及  $\gamma_{ab}$  按式 (7-9-8)<sup>5</sup> 构造的  $\gamma'_{ab}$  在无源区域既满足洛伦兹规范条件  $\partial^a \bar{\gamma}'_{ab} = 0$  又满足  $\gamma' = 0$  和  $\gamma'_{0i} = 0 (i = 1, 2, 3)$ 。提示: (1) 根据解的唯一性定理, 只须证明  $\gamma' = 0$  和  $\gamma'_{0i} = 0$  分别是方程  $\partial^c \partial_c \gamma = 0$  和  $\partial^c \partial_c \gamma'_{0i} = 0$  的满足初始条件  $\gamma'|_{\Sigma_0} = 0, \partial\gamma'/\partial t|_{\Sigma_0} = 0, \gamma'_{0i}|_{\Sigma_0} = 0$  和  $\partial\gamma'_{0i}/\partial t|_{\Sigma_0} = 0$  的解。(2) 由  $\partial^b \partial_b \xi_\mu = 0$  可得  $\partial^2 \xi_\mu / \partial t^2 = \nabla^2 \xi_\mu$ 。

证明 由 (7-9-8) 易知,

$$\gamma' = \gamma + 2\partial^a \xi_a,$$

则

$$\begin{aligned} \partial^a \bar{\gamma}'_{ab} &= \partial^a \left( \gamma'_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \gamma' \right) \\ &= \partial^a \left( \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a - \frac{1}{2} \eta_{ab} \gamma - \eta_{ab} \partial^c \xi_c \right) \\ &= \partial^a \gamma_{ab} + 0 + \partial^a \partial_b \xi_a - \frac{1}{2} \partial_b \gamma - \partial_b \partial^c \xi_c \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中红色的两项加起来为  $\partial^a \bar{\gamma}_{ab}$ , 故为零。

在无源区域,  $T_{ab} = 0$ , 则线性场方程为

$$\partial^c \partial_c \gamma_{ab} = 0,$$

取迹得

$$\partial^c \partial_c \gamma = 0,$$

则

$$\partial^c \partial_c \gamma' = \partial^c \partial_c (\gamma + 2\partial^a \xi_a) = 0,$$

<sup>4</sup>正文 (7-9-10) ~ (7-9-13) 为

$$2(\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} - \partial \xi_0 / \partial t)|_{\Sigma_0} = -\gamma|_{\Sigma_0}, \quad (7-9-10)$$

$$2[-\nabla^2 \xi_0 + \vec{\nabla} \cdot (\partial \vec{\xi} / \partial t)]|_{\Sigma_0} = -\partial \gamma / \partial t|_{\Sigma_0}, \quad (7-9-11)$$

$$[(\partial \gamma_i / \partial t) + (\partial \xi_0 / \partial x^i)]|_{\Sigma_0} = -\gamma_{0i}|_{\Sigma_0}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7-9-12)$$

$$\left[ \nabla^2 \xi_i + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial \xi_0}{\partial t} \right) \right]|_{\Sigma_0} = -\frac{\partial \gamma_{0i}}{\partial t}|_{\Sigma_0}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7-9-13)$$

<sup>5</sup>正文式 (7-9-8) 为

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a, \quad (7-9-8)$$

其中  $\xi_a$  满足

$$\partial^b \partial_b \xi_a = 0. \quad (7-9-9)$$

在边界上又有

$$\begin{aligned}
 \gamma'|_{\Sigma_0} &= (\gamma + 2\partial^a \xi_a)|_{\Sigma_0} \\
 &= \left( \gamma - 2\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + 2\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \right)_{\Sigma_0} \\
 &= 0, \\
 \frac{\partial \gamma'}{\partial t} \Big|_{\Sigma_0} &= \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right)_{\Sigma_0} \\
 &= \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} - 2\nabla^2 \xi_0 + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right)_{\Sigma_0} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

故知在区域内  $\gamma'$  必为零。

再考虑  $\gamma'_{0i}$ ，它也满足拉普拉斯方程

$$\partial^a \partial_a \gamma'_{0i} = 0,$$

而在边界上

$$\begin{aligned}
 \gamma'_{0i}|_{\Sigma_0} &= \left( \gamma_{0i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x^i} \right)_{\Sigma_0} \\
 &= 0, \\
 \frac{\partial \gamma'_{0i}}{\partial t} \Big|_{\Sigma_0} &= \left( \frac{\partial \gamma_{0i}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial \xi_0}{\partial t} \right) \right)_{\Sigma_0} \\
 &= \left( \frac{\partial \gamma_{0i}}{\partial t} + \nabla^2 \xi_i + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial \xi_0}{\partial t} \right) \right)_{\Sigma_0} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

则  $\gamma'_{0i}$  在区域内也为零。

## 第二部分

### 中册