《微分几何入门与广义相对论》部分习题参考解答

by 薛定谔的大喵[1]

2018 年 3 月 17 日

[1]wyj1234@mail.ustc.edu.cn

目录

第一部分

上册

第一章　拓扑空间简简介

习题

1. 试证 $A-B=A\cap(X-B)$，$\forall A,B\subset X$。

证明 $x\in A-B \iff x\in A\wedge x\notin B \iff x\in A\cap(X-B)$。

2. 试证 $X-(B-A)=(X-B)\cup A$，$\forall A,B\subset X$。

证明 $x\in X-(B-A) \iff x\notin B-A \iff x\notin B\vee x\in A \iff x\in(X-B)\cup A$。

3. 用“对”或“错”在下表中填空：

$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	是一一的	是到上的
$f(x)=x^3$		
$f(x)=x^2$		
$f(x)=\mathrm{e}^x$		
$f(x)=\cos x$		
$f(x)=5,\forall x\in\mathbb{R}$		

解 如下表：

$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	是一一的	是到上的
$f(x)=x^3$	对	对
$f(x)=x^2$	错	错
$f(x)=\mathrm{e}^x$	对	错
$f(x)=\cos x$	错	错
$f(x)=5,\forall x\in\mathbb{R}$	错	错

4. 判断下列说法的是非并简述理由：

(a) 正切函数是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射；

(b) 对数函数是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射；

(c) $(a,b] \subset \mathbb{R}$ 用 $\mathscr{T}_u$ 衡量是开集；

(d) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 用 $\mathscr{T}_u$ 衡量是闭集。

解 (a) 错，定义域不是 $\mathbb{R}$；

(b) 错，定义域不是 $\mathbb{R}$；

(c) 错，任意包含于 $(a,b]$ 的开区间都不会含有 b，故 $(a,b]$ 不能写为开区间之并；

(d) 对，其补集 $(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ 是开集。

5. 举一反例证明命题“$(\mathbb{R},\mathscr{T}_u)$ 的无限个开子集之交为开“不真。

证明 记 $O_n = \left(-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)$，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} O_n = \{0\}$ 为闭集。

6. 试证 §1.2 例 5 中定义的诱导拓扑满足定义 1 的 3 个条件。

证明 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的子集 A 上的诱导拓扑按照定义为

$$\mathscr{S} := \{V \subset A \mid \exists O \in \mathscr{T}, \quad \text{s.t.} \quad V = A \cap O\},$$

(a) $A,\varnothing \in \mathscr{S}$：取 $O = X$ 即知 $A \in \mathscr{S}$，取 $O = \varnothing$ 即知 $A \in \mathscr{S}$；

(b) 有限交：设 $V_i = A \cap O_i \in \mathscr{S}$，其中 $O_i \in \mathscr{T}$，$i = 1,2,\cdots,n$。则

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_i = A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} O_i\right) \in \mathscr{S};$$

(c) 无限并：设 $V_\alpha = A \cap O_\alpha \in \mathscr{S}$，其中 $O_\alpha \in \mathscr{T}$，$\alpha \in$ 某个指标集I。则

$$\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha = A \cap \left(\bigcup_{\alpha\in I} O_\alpha\right) \in \mathscr{S}.$$

7. 举例说明 $(\mathbb{R}^3,\mathscr{T}_u)$ 中存在不开不闭的子集。

解 令 $A = (0,1]^3$，任何包含于 A 的开球 $B_r(x_0,y_0,z_0)$ 的 z 坐标的范围为开区间 $(z_0 - r, z_0 + r) \in (0,1]$，故 $(x,y,1)$ 不能属于此开球，于是 A 不能由一族开球之并得到，故 A 不是开集。其补集中 $(x,y,0)$ 不能属于开球，故补集不是开集，故 A 不是闭集。

8. 常值映射 $f\colon (X,\mathscr{T}) \to (Y,\mathscr{S})$ 是否连续？为什么？

解 连续。证明如下：设 $f[X] = \{y\} \subset Y$，$\forall O \in \mathscr{S}$，若 $y \in O$，则 $f^{-1}[O] = X \in \mathscr{T}$；若 $y \notin O$，则 $f^{-1}[O] = \varnothing \in \mathscr{T}$。故 f 连续。

9. 设 $\mathscr{T}$ 为集 X 上的离散拓扑，$\mathscr{S}$ 为集 Y 上的凝聚拓扑，

(a) 找出从 $(X,\mathscr{T})$ 到 $(Y,\mathscr{S})$ 的全部连续映射；

(b) 找出从 $(Y,\mathscr{S})$ 到 $(X,\mathscr{T})$ 的全部连续映射。

解 (a) 设 $f\colon X\to Y$，则由于 $\mathscr{S}=\{Y,\varnothing\}$，$f$ 连续当且仅当 $f^{-1}[Y]=X\in\mathscr{T}\wedge f^{-1}[\varnothing]=\varnothing\in\mathscr{T}$，可是这是必然满足的，于是所有映射 $f\colon(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{S})$ 均连续。

(b) 设 $g\colon Y\to X$，则由于 $\mathscr{T}=2^X$，g 连续当且仅当 $\forall O\subset X, g^{-1}[O]=X\vee g^{-1}[O]=\varnothing$。假设存在 $x,y\in g[Y]$，$x\neq y$，则取 $O=x$，有 $g^{-1}[O]=g^[-1](x)\notin\mathscr{S}$，故 g 不是连续的。于是连续映射 g 的像只能有一个，即为常值映射。又 8 中已证明常值映射为连续，故 $g\colon(Y,\mathscr{S})\to(X,\mathscr{T})$ 连续当且仅当其为常值映射。

10. 试证明定义 3a 与 3b 的等价性。

证明 (1) 3a 推导 3b。设 $f\colon(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{S})$ 连续，按照定义 3a 即满足 $\forall O\in\mathscr{S}, f^{-1}[O]\in\mathscr{T}$。则 $\forall x\in X$，任取 $G'\in\mathscr{S}$ 使得 $f(x)\in G'$，则只需取 $G=f^{-1}[G']$，即有 $G\in\mathscr{T}$ 并且 $f[G]=G'\subset G'$，于是按照定义 3b，f 也连续。

(2) 3b 推导 3a。设 $f\colon(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{S})$ 连续，按照定义 3b 即满足 $\forall x\in X, \forall G'\in\mathscr{S}$ 且 $f(x)\in G'$，$\exists G\in\mathscr{T}$ 使得 $f[G]\subset G'$。于是任取 $O\in\mathscr{S}$，令 x 跑遍 $f^{-1}[O]$，对每一个 x 存在 $G_x\in\mathscr{T}$ 使得 $f[G_x]\subset O$，考虑 $G=\displaystyle\bigcup_{x\in f^{-1}[O]}G_x$，显然 $G\in\mathscr{T}$。由于 $x\in f^{-1}[O]$，$x\in G_x$ 因而 $x\in G$，于是 $f^{-1}[O]\subset G$；而 $\forall x\in G$，不妨设 $x\in G_{x_0}$，则由于 $f[G_{x_0}]\subset O$，知 $x\in f^{-1}[O]$，故又有 $G\subset f^{-1}[O]$，于是 G 正是 $f^{-1}[O]$，也就是 $f^{-1}[O]=G\in\mathscr{T}$，按照定义 3a，$f$ 也是连续的。

11. 试证任一开区间 $(a,b)\subset\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚。

证明 只需找到一个同胚映射。函数 $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ 定义为 $f(x)=\tan\left(\pi\dfrac{x-a}{b-a}-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 即满足要求。

12. 设 X_1 和 X_2 是 $\mathbb{R}$ 的子集，$X_1\equiv(1,2)\cup(2,3)$，$X_2\equiv(1,2)\cup[2,3)$。以 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 分别代表由 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑在 X_1 和 X_2 上的诱导拓扑。拓扑空间 $(X_1,\mathscr{T}_1)$ 和 $(X_2,\mathscr{T}_2)$ 是否连通？

解 (1) $(X_1,\mathscr{T}_1)$ 不连通。考虑 $O=(1,2)\subset X_1$，$O=X_1\cap(1,2)\in\mathscr{T}_1$，故 O 为开集；而 $X-O=(2,3)$ 同样为开集，于是 O 即开又闭，故 $(X_1,\mathscr{T}_1)$ 不连通。

(2) $(X_2,\mathscr{T}_2)$ 连通。假设 $\exists O\neq X_2, O\neq\varnothing$，$O\in\mathscr{T}$ 且 $X-O\in\mathscr{T}_2$，任取 $a\in O$，$b\in X-O$，不妨设 $a<b$，于是 $[a,b]\subset X_2$，记 $A=[a,b]\cap O$，$B=[a,b]\cap(X-O)$，$c=\sup A$，我们来证明 O 和 $X-O$ 都是开集将导致 $c\notin A$ 并且 $c\notin(X-O)$，从而矛盾。

(a) 若 $c\in B$，由于 $X-O$ 是开集，且由于 $X_2=(1,3)\in\mathscr{T}_u\implies\mathscr{T}_2=\mathscr{T}_u\cap 2^{X_2}$，$X-O$ 可以写作一系列开区间之并，于是 $B=(X-O)\cap[a,b]$ 是一系列形如 $[a,y),(x,y)$ 或 $(x,b]$ 的区间之并，现在 $c\neq a$，故包含 c 的区间属后两种，则一定存在 $d\in B$，使 $(d,c]\subset B$，

i. 若 $c=b$，则 $(d,b]\subset B$；

ii. 若 $a<c<b$，则 $(d,b]=(d,c]\cup(c,b]\subset B$，

于是 d 是 A 的上界，然而却小于上确界 c，矛盾。

(b) 若 $c\in A$，同(a)有 O 是开集将导致 $\exists e\in A$，使得 $[c,e)\subset A$，与 c 是 A 的上确界矛盾。

至此 $c\in A$ 与 $c\in B$ 均导致矛盾，然而 $c\notin A\wedge c\notin B$ 又与 A 和 B 的定义矛盾，故 O 与 $X-O$ 均为非空开集是不可能的。故 $X_2,\mathscr{T}_2$ 连通。

13. 任意集合 X 配以离散拓扑 $\mathscr{T}$ 所得的拓扑空间是否连通？

解 不连通。$\forall O\in X$，$O\in\mathscr{T}\wedge X-O\in\mathscr{T}\implies X$不连通。

14. 设 $A\subset B$，试证

(a) $\bar{A}\subset\bar{B}$；提示：$A\subset B$ 表明 $\bar{B}$ 是含 A 的闭集。

(b) $\mathrm{i}(A)\subset\mathrm{i}(B)$。

证明 (a) $A\subset B\subset\bar{B}$，根据闭包定义有 $\bar{A}\subset\bar{B}$；

(b) $\mathrm{i}(A)\subset A\subset B$，根据内部定义有 $\mathrm{i}(A)\subset\mathrm{i}(B)$。

15. 试证 $x\in\bar{A}\iff x$ 的任一邻域与 A 之交非空。对 $\implies$ 证明的提示：设 $O\in\mathscr{T}$ 且 $O\cap A=\varnothing$，先证 $A\subset X-O$，再证（利用闭包定义）$\bar{A}\subset X-O$。

证明 (1) $\implies$：不妨设 O 是 x 的开邻域。假设 $O\cap A=\varnothing$，于是 $\forall a\in A$，$a\neq A$，于是 $a\in X-O$，$A\subset X-O$，而 $X-O$ 为闭集，于是 $\bar{A}\subset X-O$，故知 $x\notin\bar{A}$，矛盾；

(2) $\impliedby$：设 $\forall O\in\mathscr{T}$ 使得 $x\in O$，都有 $O\cap A\neq\varnothing$。假设 $x\notin\bar{A}$，根据定义，$\exists B$ 为闭集，$A\subset B$ 且 $x\notin B$。于是 $x\in X-B\in\mathscr{T}$，于是 $X-B$ 是 x 的一个与 A 无交的开邻域，矛盾。

16. 试证 $\mathbb{R}$ 不是紧致的。

证明 记 $O_i=(i-1,i+1)$，显然 $\{O_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{R}$ 的开覆盖。现挑出其中任意 n 个 O_{i_k}，$k=1,2,\cdots,n$，则 $\max\limits_{k=1,2,\cdots,n} i_k+1$ 即为 $\bigcup\limits_{k=1,2,\cdots,n} O_{i_k}$ 的一个上界，故有限个元素不能覆盖 $\mathbb{R}$，于是 $\mathbb{R}$ 不是紧致的。

第二章　流形和张量场

习题

1. 试证 §2.1 例 2 定义的拓扑同胚映射 $\psi_i^{\pm}$ 在 $O_i^{\pm}$ 的所有交叠区域上满足相容性条件，从而证实 S^1 确是 1 维流形。

证明 首先，易知 $O_i^+ \cap O_i^- = \varnothing$，故只需考虑 $O_1^+ \cap O_2^+$ 及 $O_i^+ \cap O_j^-$。以

$$O_1^+ \cap O_2^+ = \left\{(x^1, x^2) \in S^1 \mid x^1 > 0, x^2 > 0\right\}$$

为例，根据定义，

$$\psi_2^+ \circ (\psi_1^+)^{-1}(t) = \psi_2^+((\sqrt{1-t^2}, t)) = \sqrt{1-t^2},$$

这的确是 C^∞ 的函数。

2. 说明 n 维矢量空间可看作 n 维平庸流形。

证明 为 n 维矢量空间 V 任取拓扑，再取定一组基 $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$，则在基 $\mathcal{B}$ 下，$\forall v \in V$，v 可展开为

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i,$$

令映射 $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ 定义为：

$$\psi\colon v \mapsto (v^1, v^2, \cdots, v^n),$$

则取图册 $\{(V, \psi)\}$，即可令 V 成为 n 维平庸流形。

3. 设 X 和 Y 是拓扑空间，$f\colon X \to Y$ 是同胚。若 X 还是个流形，试给 Y 定义一个微分结构使 $f\colon X \to Y$ 升格为微分同胚。

证明 记 X 的图册为 $\{(O_\alpha, \psi_\alpha)\}$，对每个 α，由于 f 是拓扑同胚，

$$O'_\alpha := f(O_\alpha) \in \mathscr{T}_Y,$$

在 O'_α 上定义映射

$$\psi'_\alpha := \psi_\alpha \circ f^{-1},$$

则

$$\begin{aligned}\psi'_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} &= \psi_\alpha \circ f^{-1} \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} \\ &= \mathrm{Id}_{V_\alpha} \in C^\infty(V_\alpha),\end{aligned}$$

于是在给 Y 定义图册 $\{(O'_\alpha, \psi'_\alpha)\}$ 后，f 成为一个微分同胚。

4. 设 (x, y) 是 $\mathbb{R}^2$ 的自然坐标，$C(t)$ 是曲线，参数表达式为 $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in (0, \pi)$。若 $p = C(\pi/3)$，写出曲线在 p 的切矢在自然坐标基的分量，并画图表示出该曲线及该切矢。

解 记 p 点切矢为 T，则

$$\begin{aligned}T_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \circ C(t))\Big|_{t=\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ T_y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y \circ C(t))\Big|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

如下图：

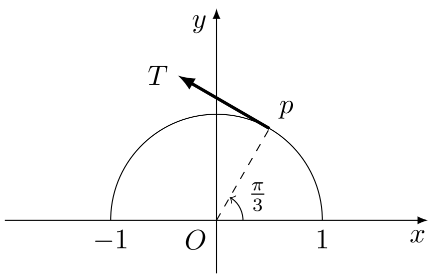

图 2.1: 曲线 $C(t)$ 及其在 p 点的切矢

5. 设曲线 $C(t)$ 和 $C'(t) \equiv C(2t_0 - t)$ 在 $C(t_0) = C'(t_0)$ 点的切矢分别为 v 和 v'，试证 $v + v' = 0$。

证明 记 $t' = 2t_0 - t$，依定义，$\forall f \in \mathscr{F}_M$，

$$
\begin{aligned}
v(f) &= \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ C(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}, \\
v'(f) &= \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ C'(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ C(t'))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \times \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ C(t'))}{\mathrm{d}t'}\right|_{t=t_0,\text{即}t'=2t_0-t=t_0} \\
&= -\left.\frac{\mathrm{d}(f \circ C(t'))}{\mathrm{d}t'}\right|_{t'=t_0} \\
&= -v(f)
\end{aligned}
$$

$\therefore v' = -v, \quad v + v' = 0$

6. 设 O 为坐标系 $\{x^\mu\}$ 的坐标域，$p \in O$，$v \in V_p$，v^μ 是 v 的坐标分量，把坐标 x^μ 看作 O 上的 C^∞ 函数，试证 $v^\mu = v(x^\mu)$。提示：用 $v = v^\nu X_\nu$ 两边作用于函数 x^μ。

证明 由 $v = v^\nu X_\nu$，

$$v(x^\mu) = v^\nu X_\nu(x^\mu) = v^\nu \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}\right|_p = v^\nu \delta^\mu{}_\nu = v^\mu.$$

7. 设 M 是二维流形，(O,ψ) 和 (O',ψ') 是 M 上的两个坐标系，坐标分别为 $\{x,y\}$ 和 $\{x',y'\}$，在 $O \cap O'$ 上的坐标变换为 $x' = x, \quad y' = y - \Omega x (\Omega = \text{常数})$，试分别写出坐标基矢 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ 用坐标基矢 $\partial/\partial x'$, $\partial/\partial y'$ 的展开式。

解 坐标基矢逐点的变换关系为 $X_\mu = \left.\dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right|_p X_\nu$，故

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'} \\
&= \frac{\partial}{\partial x'} - \Omega\frac{\partial}{\partial y'}; \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'} \\
&= \frac{\partial}{\partial y'}.
\end{aligned}
$$

8. (a) 试证式 (2-2-9) 的 $[u,v]$ 在每点满足矢量定义（§2.2 定义 2）的两个条件，从而的确是矢量场。

(b) 设 u,v,w 为流形 M 上的光滑矢量场，试证

$$[[u,v],w] + [[w,u],v] + [[v,w],u] = 0$$

（此式称为**雅可比恒等式**）。

证明 (a) (i) 线性性：显然；

(ii) 莱布尼兹律：显然。证毕[1]。

(b) 由定义，逐次展开有：

$$
\begin{aligned}
&[[u,v],w]+[[w,u],v]+[[v,w],u]\\
=\,&[u,v]\circ w-w\circ[u,v]+[w,u]\circ v\\
&-v\circ[w,u]+[v,w]\circ u-u\circ[v,w]\\
=\,&u\circ v\circ w-v\circ u\circ w-w\circ u\circ v+w\circ v\circ u\\
&+w\circ u\circ v-u\circ w\circ v-v\circ w\circ u+v\circ u\circ w\\
&+v\circ w\circ u-w\circ v\circ u-u\circ v\circ w+u\circ w\circ v\\
=\,&0.
\end{aligned}
$$

9. 设 $\{r,\phi\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中某开集（坐标域）上的极坐标，$\{x,y\}$ 为自然坐标，

(a) 写出极坐标系的坐标基矢 $\partial/\partial r$ 和 $\partial/\partial\phi$（作为坐标域上的矢量场）用 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ 展开的表达式。

(b) 求矢量场 $[\partial/\partial r\ ,\partial/\partial x]$ 用 $\partial/\partial x\ ,\partial/\partial y$ 展开的表达式。

(c) 令 $\hat{e}_r\equiv\partial/\partial r\ ,\hat{e}_\phi=r^{-1}\,\partial/\partial\phi$，求 $[\hat{e}_r,\hat{e}_\phi]$ 用 $\partial/\partial x\ ,\partial/\partial y$ 展开的表达式。

解 (a) 坐标变换为

$$
\begin{cases}
x=r\cos\phi,\\
y=r\sin\phi.
\end{cases}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}&=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\\
&=\cos\phi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\phi\frac{\partial}{\partial y}\\
&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y},\\
\frac{\partial}{\partial\phi}&=\frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\\
&=-r\sin\phi\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\phi\frac{\partial}{\partial y}\\
&=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

[1] 皮这一下非常开心 ~

(b) $\forall f \in \mathscr{F}_M$,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x}\right](f) = & \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}(f) \\
& - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f) \\
= & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\
& - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\
= & - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y} \\
= & - \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial F}{\partial y} \\
= & \left(-\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f),
\end{aligned}$$

$\therefore$ 在基 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ 下,

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x}\right] = -\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial y}.$$

(c) 由 (a),

$$\begin{aligned}
\hat{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}, \\
\hat{e}_\phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y},
\end{aligned}$$

于是有 $\forall f \in \mathscr{F}_M$,

$$\begin{aligned}
& [\hat{e}_r, \hat{e}_\phi](f) \\
= & \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f) \\
& - \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\
&\quad + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\
&\quad + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\
&\quad - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\
&= - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x} - \cancel{\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} \\
&\quad + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y} + \cancel{\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}} \\
&\quad - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x} - \cancel{\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}} \\
&\quad + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y} + \cancel{\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}} \\
&\quad + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x} + \cancel{\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} \\
&\quad + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y} + \cancel{\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}} \\
&\quad - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x} - \cancel{\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}} \\
&\quad - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y} - \cancel{\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}
\end{aligned}
$$

……好了算到这里我受够了，我选择直接丢进 Mathematica 让麦酱来算 (￣ω￣;)
麦酱报告说结果是酱紫：

$$\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial y}$$

于是得到

$$[\hat{e}_r, \hat{e}_\phi] = \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

10. 设 u，v 为 M 上的矢量场，试证 $[u,v]$ 在任何坐标基底的分量满足

$$[u,v]^\mu = v^\nu\, \partial v^\mu/\partial x^\nu - v^\nu\, \partial u^\mu/\partial x^\nu\,. \quad \text{提示：用式 (2-2-3}'\text{) 和 (2-2-3)}$$

证明 $\forall f \in \mathscr{F}_M$，

$$
\begin{aligned}
[u,v](f) &= \left[u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, v^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right](f) \\
&= u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(v^\nu \frac{\partial F}{\partial x^\nu}\right) - v^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(u^\mu \frac{\partial F}{\partial x^\nu}\right) \\
&= u^\mu \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial F}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial F}{\partial x^\mu} \\
&= \left(u^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\right)\frac{\partial F}{\partial x^\mu}
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
[u,v] &= \left(u^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\right)\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \\
[u,v]^\mu &= \left(u^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\right).
\end{aligned}
$$

11. 设 $\{e_\mu\}$ 为 V 的基底，$\{e^{\mu *}\}$ 为其对偶基底，$v \in V$，$\omega \in V^*$，试证

$$
\omega = \omega(e_\mu)e^{\mu *}, \quad v = e^{\mu *}(v)e_\mu.
$$

证明 设 $\omega = \omega_\mu e^{\mu *}$，则

$$
\begin{aligned}
\omega(e_\nu) &= \omega_\mu e^{\mu *}(e_\nu) \\
&= \omega_\mu \delta^\mu{}_\nu \\
&= \omega_\nu,
\end{aligned}
$$

$\therefore \omega = \omega(e_m u)e^{\mu *}$. 同理设 $v = v^\mu e_\mu$，

$$
\begin{aligned}
e^{\nu *}(v) &= v^\mu e^{\nu *}(e_\mu) \\
&= v^\mu \delta^\nu{}_\mu \\
&= v^\nu,
\end{aligned}
$$

$\therefore v = e^{\mu *} e_\mu$.

12. 试证 $\omega'{}_\mu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega_\mu$（定理 2-3-4）。

证明 由上题，

$$
\begin{aligned}
\omega'{}_\nu &= \omega\left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right) \\
&= \omega\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega_\mu.
\end{aligned}
$$

13. 试证由式 (2-3-5) 定义的映射 $v \mapsto v^{**}$ 是同构映射。提示：可利用线性代数的结论，即同维矢量空间之间的一一线性映射必到上。

证明 留作习题答案略，读者自证不难（逃 $-=\equiv\Sigma$(((つ•̀ω•́)つ）

14. 设 $C_1^1 T$ 和 $(C_1^1 T)'$ 分别是 $(2,1)$ 型张量 T 借两个基底 $\{e_\mu\}$ 和 $\{e'_\mu\}$ 定义的缩并，试证 $(C_1^1 T)' = C_1^1 T$。

证明 记基 $\{e'_\mu\}$ 在基 $\{e_\mu\}$ 下的展开式为 $e'_\mu = A^\nu{}_\mu e_\nu$ ，则

$$
e'^{\mu *} = \left(\tilde{A}^{-1}\right)_\nu{}^\mu e^{\nu *},
$$

于是 $\forall \omega \in V^*$，

$$
\begin{aligned}
\left(C_1^1 T\right)'(\omega) &= T(e'^{\mu *}, \omega; e'_\mu) \\
&= T\left(\left(\tilde{A}^{-1}\right)_\nu{}^\mu e^{\nu *}, \omega; A^\sigma{}_\mu e_\sigma\right) \\
&= \left(\tilde{A}^{-1}\right)_\nu{}^\mu A^\sigma{}_\mu T\left(e^{\nu *}, \omega; e_\sigma\right) \\
&= \left(\tilde{A}^{-1}\right)_\nu{}^\mu \left(\tilde{A}\right)_\mu{}^\sigma T(e^{\nu *}, \omega; e_\sigma) \\
&= \delta_\nu{}^\sigma T(e^{\nu *}, \omega; e_\sigma) \\
&= T(e^{\nu *}, \omega; e_\nu) \\
&= C_1^1 T(\omega).
\end{aligned}
$$

15. 设 g 为 V 的度规，试证 $g\colon V \to V^*$ 是同构映射（可参见第 13 题的提示）。

证明 线性空间的同构映射指的是可逆线性映射。这里证一个更普遍的结论，首先我们定义一个线性映射 $T\colon V \to W$ 的 kernel 为

$$
\ker T := \{v \in V \mid T(v) = 0\},
$$

我们有如下 claim：

claim T 是单射当且仅当 $\ker T = \{0\}$。

proof 若 T 是单射，由于 $\forall v \in V$，$T(0 \cdot v) = 0T(v) = 0$, $\therefore \ker T = \{0\}$；若 $\ker T = \{0\}$，假设存在 $u, v \in V$，使得 $T(u) = T(v)$，则由于 T 是线性映射，$T(u-v) = T(u) - T(v) = 0$，于是 $u - v \in \ker T$，即 $u = v$，于是 T 是单射。

易证任取一组基 $e_i \in V$，$T(e_i) \in W$ 线性无关当且仅当 $\ker T = \{0\}$，若 $\dim V = \dim W$，则这告诉我们 $T(e_i)$ 构成 W 的基，于是 $T(v^i e_i) = v^i T(e_i)$ 将取遍整个 W。于是我们证明了，若 $\dim V = \dim W$，则线性映射 $T\colon V \to W$ 为一一到上的（等价于可逆）当且仅当 $\ker T = \{0\}$。

对于度规 g，由于非退化性，知 $\ker g = \{0\}$，故 g 为线性同构。

16. 试证线长与曲线的参数化无关。

证明 设有重参数化 $C'(t') = C(t)$，线长为

$$
\begin{aligned}
l' &= \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t'}}\, \mathrm{d}t' \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g_{\mu\nu} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right) \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\right)} \left|\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}}\, \mathrm{d}t \\
&= l.
\end{aligned}
$$

17. 设 (x, y) 是二维欧氏空间的笛卡尔坐标系，试证由式 (2-5-14) 定义的 $\{x', y'\}$ 也是笛卡尔系。

证明 式 (2-5-14) 为

$$
\begin{cases}
x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\
y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.
\end{cases}
$$

其逆为：

$$
\begin{cases}
x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\
y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.
\end{cases}
$$

于是坐标基矢的变换为：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y} \\
&= \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial y}, \\
\frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y} \\
&= -\sin\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha \frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

故

$$
\delta\left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial x'}\right) = \cos^2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + 2\cos\alpha\sin\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sin^2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
&=1;\\
\delta\left(\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial y'}\right)&=\sin^2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)-2\cos\alpha\sin\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
&\quad+\cos^2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
&=1;\\
\delta\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial y'}\right)&=\delta\left(\frac{\partial}{\partial y'},\frac{\partial}{\partial x'}\right)\\
&=-\cos\alpha\sin\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)+\cos 2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
&\quad+\cos\alpha\sin\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
&=0.
\end{aligned}
$$

$\therefore \{x', y'\}$ 是笛卡尔系。

18. 设 $\{t, x\}$ 是二维闵氏空间的洛伦兹坐标系，试证由式 (2-5-20) 定义的 $\{t', x'\}$ 也是洛伦兹系。

证明 式 (2-5-20) 为

$$
\begin{cases}
t' = t\cosh\lambda + x\sinh\lambda,\\
x' = t\sinh\lambda + x\cosh\lambda.
\end{cases}
$$

其逆为:

$$
\begin{cases}
t = t'\cosh\lambda - x'\sinh\lambda,\\
x = -t'\sinh\lambda + x'\cosh\lambda.
\end{cases}
$$

于是坐标基矢的变换为:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t'}&=\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x}\\
&=\cosh\lambda\frac{\partial}{\partial t}-\sinh\lambda\frac{\partial}{\partial x},\\
\frac{\partial}{\partial x'}&=\frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x}\\
&=-\sinh\lambda\frac{\partial}{\partial t}+\cosh\lambda\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

故

$$\begin{aligned}
\eta\left(\frac{\partial}{\partial t'},\frac{\partial}{\partial t'}\right) &= \cosh^2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right) - 2\cosh\lambda\sinh\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&\quad + \sinh^2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&= -1;\\
\eta\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial x'}\right) &= \sinh^2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right) - 2\cosh\lambda\sinh\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&\quad + \cosh^2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&= 1;\\
\eta\left(\frac{\partial}{\partial t'},\frac{\partial}{\partial x'}\right) &= \eta\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial t'}\right)\\
&= -\cosh\lambda\sinh\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right) + \cosh 2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&\quad - \cosh\lambda\sinh\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\therefore \{t',x'\}$ 是洛伦兹系。

19. (a) 用张量变换律求出 3 维欧氏度规在球坐标系中的全部分量 ${g'}_{\mu\nu}$。

(b) 已知 4 维闵氏度规 g 在洛伦兹系中的线元表达式为 $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$，求 g 及其逆 g^{-1} 在新坐标系 $\{t',x',y',z'\}$ 的全部分量 ${g'}_{\mu\nu}$ 以及 $g'^{\mu\nu}$，该新坐标系定义如下：

$$t' = t,\quad z' = z,\quad x' = (x^2+y^2)^{1/2}\cos(\phi-\omega t),$$
$$y' = (x^2+y^2)^{1/2}\sin(\phi-\omega t),\quad \omega = \text{常数},$$

其中 ϕ 满足 $\cos\phi = y(x^2+y^2)^{1/2},\quad \sin\phi = x(x^2+y^2)^{1/2}$。提示：先求 ${g'}_{\mu\nu}$ 再求 $g'^{\mu\nu}$。

解 (a) 球坐标与笛卡尔系的变换关系为：

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi,\\ y = r\sin\theta\sin\phi,\\ z = r\cos\theta.\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}
{g'}_{rr} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial r}\frac{\partial x^\nu}{\partial r}g_{\mu\nu}\\
&= (\sin\theta\cos\phi)^2 + (\sin\theta\sin\phi)^2 + \cos^2\theta\\
&= 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'_{r\theta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial r}\frac{\partial x^\nu}{\partial \theta} g_{\mu\nu} \\
&= \sin\theta\cos\phi\cdot r\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\cdot r\cos\theta\sin\phi - \cos\theta\cdot r\sin\theta \\
&= 0; \\
g'_{r\phi} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial r}\frac{\partial x^\nu}{\partial \phi} g_{\mu\nu} \\
&= -\sin\theta\cos\phi\cdot r\sin\theta\sin\phi + \sin\theta\sin\phi\cdot r\sin\theta\cos\phi + 0 \\
&= 0; \\
g'_{\theta\theta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta}\frac{\partial x^\nu}{\partial \theta} g_{\mu\nu} \\
&= (r\cos\theta\cos\phi)^2 + (r\cos\theta\sin\phi)^2 + (-r\sin\theta)^2 \\
&= r^2; \\
g'_{\theta\phi} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta}\frac{\partial x^\nu}{\partial \phi} g_{\mu\nu} \\
&= -r\cos\theta\cos\phi\cdot r\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta\sin\phi\cdot r\sin\theta\cos\phi + 0 \\
&= 0; \\
g'_{\phi\phi} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi}\frac{\partial x^\nu}{\partial \phi} g_{\mu\nu} \\
&= (-r\sin\theta\sin\phi)^2 + (r\sin\theta\cos\phi)^2 + 0 \\
&= r^2\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

(b) 先求偏导数：

$$\begin{aligned}
\sin\phi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\implies \cos\phi\,\mathrm{d}\phi &= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y \\
\implies \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\phi &= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y \\
\implies \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

进而有：

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) - \sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)\frac{\partial\phi}{\partial x} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) \\
&= \frac{x}{x^2+y^2}(y\cos\omega t + x\sin\omega t) - \frac{y}{x^2+y^2}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) \\
&= \sin\omega t \\
\frac{\partial x'}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) - \sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)\frac{\partial\phi}{\partial y} \\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) \\
&= \frac{y}{x^2+y^2}(y\cos\omega t + x\sin\omega t) + \frac{x}{x^2+y^2}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) \\
&= \cos\omega t \\
\frac{\partial y'}{\partial t} &= -\omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t) \\
\frac{\partial y'}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) + \sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\frac{\partial\phi}{\partial x} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) \\
&= \frac{x}{x^2+y^2}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) + \frac{y}{x^2+y^2}(y\cos\omega t + x\sin\omega t) \\
&= \cos\omega t \\
\frac{\partial y'}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) + \sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\frac{\partial\phi}{\partial y} \\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) \\
&= \frac{y}{x^2+y^2}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) - \frac{x}{x^2+y^2}(y\cos\omega t + x\sin\omega t) \\
&= -\sin\omega t
\end{aligned}$$

于是由张量变换律，

$$\begin{aligned}
g'^{00} &= \frac{\partial t'}{\partial x^\mu}\frac{\partial t'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu} \\
&= -1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 \\
&= -1 \\
g'^{01} &= \frac{\partial t'}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu} \\
&= -1\cdot\omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t) + 0 + 0 + 0 \\
&= -\omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g'^{02} &= \frac{\partial t'}{\partial x^\mu}\frac{\partial y'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -1 \cdot \left(-\omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\right) + 0 + 0 + 0 \\
&= \omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t) \\
g'^{03} &= \frac{\partial t'}{\partial x^\mu}\frac{\partial z'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -0 + 0 + 0 + 0 \\
&= 0 \\
g'^{11} &= \frac{\partial x'}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -\left(\omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)\right)^2 + (\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2 + 0^2 \\
&= 1 - \left(x^2+y^2\right)\omega^2\sin^2(\phi-\omega t) \\
g'^{12} &= \frac{\partial x'}{\partial x^\mu}\frac{\partial y'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -\left(\omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)\right)\cdot\left(-\omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\right) \\
&\quad + \sin\omega t\cdot\cos\omega t + \cos\omega t\cdot(-\sin\omega t) + 0 \\
&= \left(x^2+y^2\right)\omega^2\sin(\phi-\omega t)\cos(\phi-\omega t) \\
g'^{13} &= \frac{\partial x'}{\partial x^\mu}\frac{\partial z'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -0 + 0 + 0 + 0 \\
&= 0 \\
g'^{22} &= \frac{\partial y'}{\partial x^\mu}\frac{\partial y'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -\left(-\omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\right)^2 + (\cos\omega t)^2 + (-\sin\omega t)^2 + 0^2 \\
&= 1 - \left(x^2+y^2\right)\omega^2\cos^2(\phi-\omega t) \\
g'^{23} &= \frac{\partial y'}{\partial x^\mu}\frac{\partial z'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -0 + 0 + 0 + 0 \\
&= 0 \\
g'^{33} &= \frac{\partial z'}{\partial x^\mu}\frac{\partial z'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

于是 g^{-1} 在带撇坐标系下的分量矩阵为：

$$[g']^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -r\omega\sin\psi & r\omega\cos\psi & 0\\ -r\omega\sin\psi & 1-r^2\omega^2\sin^2\psi & r^2\omega^2\sin\psi\cos\psi & 0\\ -r\omega\sin\psi & r^2\omega^2\cos\psi\sin\psi & 1-r^2\omega^2\cos^2\psi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\psi=\phi-\omega t$。其逆矩阵为

$$[g']=\begin{pmatrix}r^2\omega^2-1 & -r\omega\sin\psi & r\omega\cos\psi & 0\\ -r\omega\sin\psi & 1 & 0 & 0\\ r\omega\cos\psi & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

此即 g 在带撇坐标系下的分量 ${g'}_{\mu\nu}$ 排成的矩阵。

20. 试证 3 维欧氏空间中球坐标基矢 $\partial/\partial r$, $\partial/\partial\theta$, $\partial/\partial\phi$ 的长度依次为 $1,r,r\sin\theta$。

证明 由 19(a) 知，

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial r}\right\|&=\sqrt{|{g'}_{rr}|}=1,\\ \left\|\frac{\partial}{\partial\theta}\right\|&=\sqrt{|{g'}_{\theta\theta}|}=r,\\ \left\|\frac{\partial}{\partial\phi}\right\|&=\sqrt{|{g'}_{\phi\phi}|}=r\sin\theta.\end{aligned}$$

21. 用抽象指标记号证明 ${T'^\mu}_\nu=\dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\dfrac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}{T^\rho}_\sigma$。

证明

$$\begin{aligned}{T'^\mu}_\nu&={T^a}_b\left(\mathrm{d}x'^\mu\right)_a\left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right)^b\\ &={T^a}_b\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\left(\mathrm{d}x'^\rho\right)_a\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x'^\sigma}\right)^b\\ &=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}{T^\rho}_\sigma.\end{aligned}$$

22. 以 g 和 g' 分别代表度规 g_{ab} 在坐标系 $\{x^\mu\}$ 和 $\{x'^\mu\}$ 的分量 $g_{\mu\nu}$ 和 ${g'}_{\mu\nu}$ 组成的两个 $n\times n$ 矩阵的行列式，试证 $g'=|\partial x^\rho/\partial x'^\sigma|^2 g$，其中 $|\partial x^\rho/\partial x'^\sigma|$ 是坐标变换 $\{x^\mu\}\mapsto\{x'^\mu\}$ 的雅可比行列式，即由 $\partial x^\rho/\partial x'^\sigma$ 组成的 $n\times n$ 行列式。注：本题表明度规的行列式在坐标变换下不是不变量。提示：取等式 ${g'}_{\rho\sigma}=(\partial x^\mu/\partial x'^\rho)(\partial x^\nu/\partial x'^\sigma)g_{\mu\nu}$ 的行列式。

证明 ……梁爷爷你提示都把题写完了我还写啥 (˘•ω•˘)

23. 设 $\{x^\mu\}$ 是流形上的任一局域坐标系，试判断下列等式的是非：

(1) $(\partial/\partial x^\mu)^a(\partial/\partial x^\nu)_a = g_{\mu\nu}$，其中 $(\partial/\partial x^\mu)_a \equiv g_{ab}(\partial/\partial x^\nu)^a$；

(2) $(\mathrm{d}x^\mu)^a(\mathrm{d}x^\nu)_a = g^{\mu\nu}$，其中 $(\mathrm{d}x^\mu)^a \equiv g^{ab}(\mathrm{d}x^\mu)_b$；

(3) $(\partial/\partial x^\mu)_a = (\mathrm{d}x^\mu)_a$；

(4) $(\mathrm{d}x^\mu)^a = (\partial/\partial x^\mu)^a$；

(5) $v^\mu\omega_\mu = v_\mu\omega^\mu$；

(6) $g_{\mu\nu}T^{\nu\rho}S_\rho{}^\sigma = T_{\mu\rho}S^{\rho\sigma}$；

(7) $v^a u^b = v^b u^a$；

(8) $v^a u^b = u^b v^a$。

解 (1) 正确。这是标量等式。根据 (0,2) 型张量分量的定义即知正确。

(2) 正确。这是标量等式。根据 (2,0) 型张量分量的定义即知正确。

(3) 不正确。这是对偶矢量等式。对其验证只需作用在坐标基矢上：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a = g_{\mu\nu};$$
$$(\mathrm{d}x^\mu)_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a = \delta_{\mu\nu},$$

故 metric dual of basis 等于 dual basis 的条件为该坐标系是局域的笛卡尔系。

(4) 不正确。这是矢量等式。对其验证只需用对偶坐标基矢作用：

$$(\mathrm{d}x^\mu)^a(\mathrm{d}x^\nu)_a = g^{\mu\nu};$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a(\mathrm{d}x^\nu)_a = \delta^{\mu\nu}.$$

故此式成立的条件为该坐标系为局域的笛卡尔系。或者可以这样得到：此式与 (3) 中的表达式互为 metric dual，故它们是等价的。

(5) 正确。这是数量等式。

$$\begin{aligned} v_\mu\omega^\mu &= g_{\rho\mu}v^\rho g^{\sigma\mu}\omega_\mu \\ &= v^\rho\omega_\rho. \end{aligned}$$

(6) 正确。这是数量等式。

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}T^{\nu\rho}S_\rho{}^\sigma &= g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha}g^{\rho\beta}T_{\alpha\beta}\,g_{\rho\gamma}S^{\gamma\sigma} \\ &= \delta_\mu{}^\alpha\delta_\gamma{}^\beta T_{\alpha\beta}\,S^{\gamma\sigma} \\ &= T_{\mu\beta}\,S^{\beta\sigma}. \end{aligned}$$

(7) 不正确。这是 (2,0) 型张量等式。对其验证只需作用在对偶坐标基矢上：

$$v^a u^b \left(\mathrm{d}x^\mu\right)_a \left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b = v^\mu u^\nu;$$
$$v^b u^a \left(\mathrm{d}x^\mu\right)_a \left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b = v^\nu u^\mu.$$

$\therefore$ 该式成立的条件是 $v^\mu u^\nu = u^\mu v^\nu$，　$\forall \mu, \nu$，这是不一定能满足的。

(8) 正确。这是 (2,0) 型张量等式，对其验证只需作用在对偶坐标基底上：

$$v^a u^b \left(\mathrm{d}x^\mu\right)_a \left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b = v^\mu u^\nu;$$
$$u^b v^a \left(\mathrm{d}x^\mu\right)_a \left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b = v^\mu u^\nu.$$

$\therefore$ 该式恒成立。

24. 设 T_{ab} 是矢量空间 V 上的 (0,2) 型张量，试证 $T_{ab}\, v^a v^b = 0,\quad \forall v^a \in V \implies T_{ab} = T_{[ab]}$。提示：把 v^a 表为任意两个矢量 u^a 和 w^a 之和。

证明 做任意拆分 $v^a = u^a + w^a$，注意到 $T_{ab}\, u^a u^b = 0$ 以及 $T_{ab}\, w^a w^b = 0$，有：

$$\begin{aligned}
T_{ab}\, v^a v^b &= T_{ab}\, u^a u^b + T_{ab}\, w^a w^b + T_{ab}\, u^a w^b + T_{ab}\, w^a u^b \\
&= T_{ab}\, u^a w^b + T_{ab}\, w^a u^b \\
&= \left(T_{(ab)}\, u^a w^b + T_{(ab)}\, u^b w^a\right) + \left(T_{[ab]}\, u^a w^b + T_{[ab]}\, u^b w^a\right) \\
&= T_{(ab)}\, u^a w^b + T_{(ab)}\, u^b w^a \\
&= 0
\end{aligned}$$

于是

$$T_{(ab)} = 0, \quad T_{ab} = T_{[ab]}\,.$$

25. 试证 $T_{abcd} = T_{a[bc]d} = T_{ab[cd]} \implies T_{abcd} = T_{a[bcd]}$。

注 (1) 推广至一般的结论是

$$T_{\cdots a \cdots b \cdots c \cdots} = T_{\cdots [a \cdots b] \cdots c \cdots} = T_{\cdots a \cdots [b \cdots c] \cdots} \implies T_{\cdots a \cdots b \cdots c \cdots} = T_{\cdots [a \cdots b \cdots c] \cdots}\,.$$

上式的前提中只有两个等号，关键是 $T_{\cdots [a \cdots b] \cdots c \cdots}$ 和 $T_{\cdots a \cdots [b \cdots c] \cdots}$ 中的指标 b 都在方括号内。

(2) 把前提和结论中的方括号改为圆括号，则推广前后的命题仍成立。

证明 此命题等价于 $T_{a(bc)d} = T_{ab(cd)} = 0 \implies T_{a(bcd)} = 0$。反正只有四阶，不妨暴力展开

$$\begin{aligned}
6T_{a(bcd)} &= T_{abcd} + T_{abdc} + T_{acbd} + T_{acdb} + T_{adbc} + T_{adcb} \\
&= T_{abcd} + T_{abdc} - T_{abcd} + T_{acdb} - T_{abdc} - T_{acdb} \\
&= T_{abcd} - T_{abcd} - T_{abcd} - T_{acbd} + T_{abcd} + T_{acbd} \\
&= T_{abcd} - T_{abcd} - T_{abcd} + T_{abcd} + T_{abcd} - T_{abcd} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

其中 $=$ 表示根据 $T_{a(bc)d}=0$ 交换指标次序，$=$ 表示根据 $T_{ab(cd)}=0$ 交换指标次序。

第三章　黎曼（内禀）曲率张量

习题

1. 放弃 ∇_a 定义中的无挠性条件 (e)，

(1) 试证存在张量 $T^c{}_{ab}$（叫**挠率张量**）使

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c{}_{ab} \nabla_c f, \quad \forall f \in \mathscr{F}.$$

提示：令 $\tilde{\nabla}_a$ 为无挠算符，模仿定理 3-1-4 证明中的推导。

(2) 试证 $T^c{}_{ab} u^a v^b = u^a \nabla_a v^c - v^a \nabla_a u^c - [u,v]^c \quad \forall u^a, v^a \in \mathscr{F}(1,0)$。

证明 (1) 去掉无挠性条件仍有 $\nabla_a \omega_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - C^c{}_{ab} \omega_c$ 成立，于是令 $\omega_a = (\mathrm{d}f)_a = \nabla_a f = \tilde{\nabla}_a f$，得

$$\nabla_a \nabla_b f = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - C^c{}_{ab} \nabla_c f$$

交换指标 a, b 得

$$\nabla_b \nabla_a f = \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a f - C^c{}_{ba} \nabla_c f$$

两式相减得

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = (C^c{}_{ba} - C^c{}_{ab}) \nabla_c f$$

于是得挠率张量 $T^c{}_{ab} = C^c{}_{ab} - C^c{}_{ba}$。

(2)

$$\begin{aligned}
[u,v](f) &= u(v(f)) - v(u(f)) \\
&= u^b \nabla_b (v^a \nabla_a f) - v^a \nabla_a \left(u^b \nabla_b f\right) \\
&= u^b (\nabla_b v^a) \nabla_a f + u^b v^a \nabla_b \nabla_a f - v^a \left(\nabla_a u^b\right) \nabla_b f - v^a u^b \nabla_a \nabla_b f \\
&= \left(u^b \nabla_b v^a - v^b \nabla_b u^a\right) \nabla_a f - u^b v^a T^c{}_{ba} \nabla_c f \\
&= \left(u^a \nabla_a v^c - v^a \nabla_a u^c - T^c{}_{ab} u^a v^b\right) \nabla_c f
\end{aligned}$$

故 $T^c{}_{ab} u^a v^b = u^a \nabla_a v^c - v^a \nabla_a u^c - [u,v]^c$。

2. 设 v^a 为矢量场，v^μ 和 v'^μ 为 v^a 在坐标系 $\{x^\nu\}$ 和 $\{x'^\nu\}$ 的分量，$A^\nu{}_\mu \equiv \partial v^\nu/\partial x^\mu$，$A'^\nu{}_\mu \equiv \partial v'^\nu/\partial x'^\mu$，试证 $A^\nu{}_\mu$ 和 $A'^\nu{}_\mu$ 的关系一般而言不满足张量分量变换律。提示：利用 v^ν 与 v'^ν 之间的变换规律。

证明

$$\begin{aligned}
A'^\nu{}_\mu &= \frac{\partial v'^\nu}{\partial x'^\mu} \\
&= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}v^\rho\right) \\
&= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho}v^\rho + \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}\frac{\partial v^\rho}{\partial x^\sigma} \\
&= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho}v^\rho + \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}A^\rho{}_\sigma,
\end{aligned}$$

可以看到相比于张量分量变换律多出了第一项。

3. 试证定理 3-1-7。

证明

$$\begin{aligned}
v^\nu{}_{;\mu} &= \nabla_a v^b (\mathrm{d}x^\nu)_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \\
&= \left(\partial_a v^b + \Gamma^b{}_{ac}v^c\right)(\mathrm{d}x^\nu)_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \\
&= v^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}v^\sigma, \\
\omega_{\nu;\mu} &= \nabla_a \omega_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b \\
&= (\partial_a \omega_b - \Gamma^c{}_{ab}\omega_c)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b \\
&= \omega_{\nu,\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\omega_\sigma .
\end{aligned}$$

4. 用下式定义 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$：$\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b \nabla_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a = \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a$，试证

(a) $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$（提示：利用 ∇_a 的无挠性和坐标基矢间的对易性。）；

(b) $v^\nu{}_{;\mu} = v^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\beta}v^\beta$（注：这其实是克氏符的等价定义。）。

证明 (a) 交换指标 μ,ν 得

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b \nabla_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a = \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a$$

两式相减得：

$$\left(\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}-\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a=\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b\nabla_b\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a-\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b\nabla_b\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial x^\nu},\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right]^a$$
$$=0,$$

故 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}=\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$。

(b) 由

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b\nabla_b\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a=\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a$$

知

$$\nabla_b\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a=\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a,$$

于是

$$\nabla_a v^b=\nabla_a\left[v^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b\right]$$
$$=\left(\mathrm{d}v^\mu\right)_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b+v^\mu\nabla_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b$$
$$=\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b+v^\mu\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^b$$
$$=\left(\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}+\Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}v^\sigma\right)\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b$$

于是 $\nabla_a v^b$ 的分量 $v^\nu{}_{;\mu}=v^\nu{}_{,\mu}+\Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}v^\sigma$。

5. 判断是非：

(1) $\nabla_a\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_b=0$；

(2) $v^\nu{}_{;\mu}=\left(\nabla_a v^b\right)\left(\partial/\partial x^\mu\right)^a\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b$；

(3) $v^\nu{}_{,\mu}=\left(\partial_a v^b\right)\left(\partial/\partial x^\mu\right)^a\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b$；

(4) $v^\nu{}_{;\mu}=\left(\partial/\partial x^\mu\right)^a\nabla_a v^\nu$；

(5) $v^\nu{}_{,\mu}=\left(\partial/\partial x^\mu\right)^a\nabla_a v^\nu$。

解 (1) 错。

$$\nabla_a\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_b=\partial_a\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_b-\Gamma^c{}_{ab}\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_c$$
$$=0-\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_a\left(\mathrm{d}x^\rho\right)_b$$

不一定为零。

(2) 根据定义知正确。

(3) 根据定义知正确。

(4) 不正确。(右边和 ∇_a 的选择无关可直接判断)

$$\begin{aligned} v^{\nu}{}_{;\mu} &= (\nabla_a v^b)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a (\mathrm{d}x^\nu)_b \\ &= \left[\nabla_a v^\rho \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^b\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a (\mathrm{d}x^\nu)_b \\ &= (\nabla_a v^\rho)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a (\mathrm{d}x^\nu)_b + v^\rho \left[\nabla_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^b\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a (\mathrm{d}x^\nu)_b\,, \end{aligned}$$

多出来的后一项类似 (1) ，一般不为零。

(5) 正确，

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \nabla_a v^\nu &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a (\mathrm{d}v^\nu)_a \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\rho}(\mathrm{d}x^\rho)_a \\ &= \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} \\ &= v^\nu{}_{,\mu}. \end{aligned}$$

6. 设 $C(t)$ 是 $\{x^\mu\}$ 的坐标域内的曲线，$x^\mu(t)$ 是 $C(t)$ 在该系的参数表达式，v^a 是 $C(t)$ 上的矢量场，令 $\mathrm{D}v^\mu/\,\mathrm{d}t \equiv (\mathrm{d}x^\mu)_a\,(\partial/\partial t)^b\,\nabla_b v^a$，试证

$$\mathrm{D}v^\mu/\,\mathrm{d}t \equiv \mathrm{d}v^\mu/\mathrm{d}t + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} v^\sigma\ \mathrm{d}x^\nu(t)/\mathrm{d}t\,.$$

证明 由定理 3-2-1，$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b \nabla_b v^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\mu(t)}{\mathrm{d}t} v^\sigma\right)$，于是

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}v^\mu}{\mathrm{d}t} &\equiv (\mathrm{d}x^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b \nabla_b v^a \\ &= (\mathrm{d}x^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^a \left(\frac{\mathrm{d}v^\rho}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\rho(t)}{\mathrm{d}t} v^\sigma\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} v^\sigma \frac{\mathrm{d}x^\mu(t)}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

7. 求出 3 维欧氏空间中球坐标系的全部非零 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$。

解 由第二章 19(a)知，球坐标系下欧氏度规分量 $g_{\mu\nu}$ 排成的矩阵为：

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

取逆矩阵得 $g^{\mu\nu}$ 排成的矩阵为：

$$[g]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

根据非对角元全为零，观察克氏符分量表达式

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho} \right)$$

展开式中求和只有 $\rho = \sigma$ 项才可能非零，于是

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} \left(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} \right)$$

（σ 是给定某个具体指标，不求和，也不需要指标平衡）若 $\sigma\mu\nu$ 全不等，则括号内为零。于是那些可能非零的分量指标至少有两个相等：

$$\begin{aligned}
\Gamma^{r}{}_{rr} &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(g_{rr,r} + g_{rr,r} - g_{rr,r} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 0 - 0) \\
&= 0 \\
\Gamma^{r}{}_{r\theta} &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(g_{rr,\theta} + g_{\theta r,r} - g_{r\theta,r} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 0 - 0) \\
&= 0 \\
\Gamma^{r}{}_{r\phi} &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(g_{rr,\phi} + g_{\phi r,r} - g_{r\phi,r} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 0 - 0) \\
&= 0 \\
\Gamma^{r}{}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(g_{r\theta,\theta} + g_{\theta r,\theta} - g_{\theta\theta,r} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 0 - 2r) \\
&= -r
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{r}{}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(g_{r\phi,\phi} + g_{\phi r,\phi} - g_{\phi\phi,r} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(0 + 0 - 2r \sin^2\theta \right) \\
&= -r \sin^2\theta \\
\Gamma^{\theta}{}_{rr} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta r,r} + g_{r\theta,r} - g_{rr,\theta} \right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta r,\theta} + g_{\theta\theta,r} - g_{r\theta,\theta} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot (0 + 2r - 0) \\
&= \frac{1}{r} \\
\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta\theta,\theta} + g_{\theta\theta,\theta} - g_{\theta\theta,\theta} \right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta\theta,\phi} + g_{\phi\theta,\theta} - g_{\theta\phi,\theta} \right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta\phi,\phi} + g_{\phi\theta,\phi} - g_{\phi\phi,\theta} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \left(0 + 0 - 2r^2 \cos\theta \sin\theta \right) \\
&= -\cos\theta \sin\theta \\
\Gamma^{\phi}{}_{rr} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(g_{\phi r,r} + g_{r\phi,r} - g_{rr,\phi} \right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\phi}{}_{r\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(g_{\phi r,\phi} + g_{\phi\phi,r} - g_{r\phi,\phi} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \cdot \left(0 + 2r \sin^2\theta - 0 \right) \\
&= \frac{1}{r} \\
\Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(g_{\phi\theta,\theta} + g_{\theta\phi,\theta} - g_{\theta\theta,\phi} \right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(g_{\phi\theta,\phi} + g_{\phi\phi,\theta} - g_{\theta\phi,\phi} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \cdot \left(0 + 2r^2 \cos\theta \sin\theta - 0 \right) \\
&= \cot\theta
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\left(g_{\phi\phi,\phi}+g_{\phi\phi,\phi}-g_{\phi\phi,\phi}\right)\\ &=0.\end{aligned}$$

故所有非零分量为 $\Gamma^{r}{}_{\theta\theta}=-r$，$\Gamma^{r}{}_{\phi\phi}=-r\sin^2\theta$，$\Gamma^{\theta}{}_{r\theta}=\Gamma^{\theta}{}_{\theta r}=\dfrac{1}{r}$，$\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}=-\cos\theta\sin\theta$，$\Gamma^{\phi}{}_{r\phi}=\Gamma^{\phi}{}_{\phi r}=\dfrac{1}{r}$，$\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}=\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}=\cot\theta$。

8. 设 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间，$C\colon I\to M$ 是 (M,∇_a) 中的曲线，试证 $\forall s,t\in I$，平移映射 $\psi\colon V_{C(s)}\to V_{C(t)}$（见图 3-2）是同构映射。

证明 对每个 $v\in V_{C(s)}$，有唯一一个 $C(t)$ 上的平移矢量场 $\bar{v}(t)$ 满足 $\bar{v}(s)=v$，$\psi(v)=v(t)$。首先易验证 ψ 为线性映射，下面论证 $\ker\psi=\{0\}$。设 $\psi(v)=\bar{v}(t)=0$，于是由正文 (3-2-5) 式：

$$\frac{\mathrm{d}\bar{v}^{\mu}}{\mathrm{d}t}+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}T^{\nu}\bar{v}^{\sigma}=0,\quad \mu=1,\cdots,n$$

在 (s,t) 上此微分方程组的解被边界条件 $\bar{v}^{\mu}(t)=0$ 唯一确定，而 $\bar{v}^{\mu}(t)\equiv0$ 是解，于是知 $v=\bar{v}(s)=0$，于是 $\ker\psi=\{0\}$，又 $\dim V_{C(s)}=\dim V_{C(t)}=n$，故线性映射 ψ 是同构映射。

9. 试证定理 3-3-2、3-3-3 和 3-3-5。

证明 (1) 定理 3-3-2 如下：

定理 设曲线 $\gamma(t)$ 的切矢 T^a 满足 $T^b\nabla_bT^a=\alpha T^a$[$\alpha$ 为 $\gamma(t)$ 上的函数]，则存在 $t'=t'(t)$ 使得 $\gamma'(t')[=\gamma(t)]$ 为测地线。

证明如下：写出分量形式为

$$\begin{aligned}T^b\nabla_bT^a &= \left(\frac{\mathrm{d}T^{\mu}}{\mathrm{d}t}+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}T^{\nu}T^{\sigma}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)^a\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)^a\\ \alpha T^a &= T^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)^a\\ &= \alpha\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)^a\\ \Longrightarrow\ \alpha\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

设有重参数化 $t'=t'(t)$ 使得 $\gamma'(t')$ 为测地线，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}t'^2}+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}t'} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}t}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}t'^2}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}t'^2} + \alpha\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2\right]\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

只要解微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}t'^2} + \alpha\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2 = 0$，令 $\eta(t) = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}$，则

$$\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + \alpha(t)\eta^2 = 0$$

解得

$$\eta(t) = \sqrt{2\int \alpha(t)\,\mathrm{d}t + C_1}$$

积分即得重参数化

$$t'(t) = \int \sqrt{2\int \alpha(t)\,\mathrm{d}t + C_1}\,\mathrm{d}t + C_2$$

其中积分均代表某个原函数，而不是不定积分。

(2) 定理 3-3-3 如下：

定理 若 t 是某测地线的仿射参数，则该曲线的任一参数 t' 是仿射参数的充要条件为 $t' = at + b$（其中 a, b 为常数且 $a \neq 0$）。

证明如下：完全类似 (1) ，只是 $\alpha(t) = 0$，于是微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}t'^2} = 0,$$

解得 $t' = at + b$。

(3) 定理 3-3-5 如下：

定理 测地线的弧长参数必为仿射参数。

证明如下：设 t 为仿射参数，则 $T^b\nabla_b T^a = 0$，于是

$$
\begin{aligned}
T^a\nabla_a\left(g_{bc}T^bT^c\right) &= g_{bc}T^aT^b\nabla_a T^c + g_{bc}T^aT^c\nabla_a T^b \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

于是 $g_{ab}T^aT^b$ 沿线为常数 T,弧长按定义与 t 的关系为 $\mathrm{d}l = \sqrt{|g_{ab}T^aT^b|}\,\mathrm{d}t = T\,\mathrm{d}t$，由定理 3-3-3 知 l 为仿射参数。

10. (a) 写出球面度规 $\mathrm{d}s^2 = R^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right)$（$R$ 为常数）的测地线方程；

(b) 验证任一大圆弧（配以适当参数）满足测地线方程。提示：选球面坐标系 $\{\theta, \phi\}$ 使所给大圆弧为赤道的一部分，并以 ϕ 为仿射参数。

解 (a) 首先求克氏符，度规分量 $g_{\mu\nu}$ 排成的矩阵为

$$[g] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

逆矩阵

$$[g]^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

完全类似第 7 题，根据非对角元全为零，观察克氏符分量表达式

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\right)$$

展开式中求和只有 $\rho=\sigma$ 项才可能非零，于是

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma}\left(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}\right)$$

（σ 是给定某个具体指标，不求和，也不需要指标平衡）

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(g_{\theta\theta,\theta} + g_{\theta\theta,\theta} - g_{\theta\theta,\theta}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi} &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(g_{\theta\theta,\phi} + g_{\phi\theta,\theta} - g_{\theta\phi,\theta}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(g_{\theta\phi,\phi} + g_{\phi\theta,\phi} - g_{\phi\phi,\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\left(0 + 0 - 2R^2\sin\theta\cos\theta\right) \\
&= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\left(g_{\phi\theta,\theta} + g_{\theta\phi,\theta} - g_{\theta\theta,\phi}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\left(g_{\phi\theta,\phi} + g_{\phi\phi,\theta} - g_{\theta\phi,\phi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\cdot\left(0 + 2R^2\sin\theta\cos\theta - 0\right) \\
&= \cot\theta \\
\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\left(g_{\phi\phi,\phi} + g_{\phi\phi,\phi} - g_{\phi\phi,\phi}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

代入测地线方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\dfrac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t}=0$，

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2=0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}+\cot\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=0$$

(b) 由于测地线方程具有坐标系无关的形式 $T^b\nabla_bT^a=0$，可选择球坐标系使得大圆弧落在赤道 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 上，于是 $\cos\theta=0$，满足测地线方程。

11. 试证定理 3-4-2.

证明 在某坐标系下展开即得

$$\begin{aligned}\left.\left[\left(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a\right)\omega_c\right]\right|_p&=\left.\left[\left(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a\right)\omega_\mu\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_c\right]\right|_p\\&=\left.\left[\omega_\mu\left(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a\right)\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_c\right]\right|_p\quad(\text{由定理 3-4-1})\\&=\left.\omega_\mu\right|_p\left.\left[\left(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a\right)\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_c\right]\right|_p\end{aligned}$$

可见只与 ω 在 p 点的值有关，证毕。

12. 试证式 (3-4-10)。

证明 首先，$R_{[abc]d}=g_{de}R_{[abc]}{}^e=0$，而

$$\begin{aligned}R_{[abc]d}&=\frac{1}{6}\left(R_{abcd}+R_{cabd}+R_{bcad}-R_{acbd}-R_{bacd}-R_{cbad}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(R_{abcd}+R_{cabd}+R_{bcad}\right)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&R_{[abc]d}+R_{[dab]c}+R_{[cda]b}+R_{[bcd]a}\\=&\frac{1}{3}\left(R_{abcd}+R_{cabd}+R_{bcad}\right)+\frac{1}{3}\left(R_{dabc}+R_{bdac}+R_{abdc}\right)\\&+\frac{1}{3}\left(R_{cdab}+R_{acdb}+R_{dacb}\right)+\frac{1}{3}\left(R_{bcda}+R_{dbca}+R_{cdba}\right)\\=&\frac{1}{3}\left(R_{abcd}-R_{acbd}+R_{bcad}-R_{dacb}+R_{bdac}-R_{abcd}\right.\\&\left.+R_{cdab}-R_{acbd}+R_{dacb}-R_{bcad}+R_{bdac}-R_{cdab}\right)\\=&\frac{2}{3}\left(R_{bdac}-R_{acbd}\right)\\=&0\end{aligned}$$

于是 $R_{bdac}-R_{acbd}=0$。

13. 求出球面度规（见题 10 ）的黎曼张量在坐标系 (θ,ϕ) 的全部分量。

解 由 10 得，克氏符的全部非零分量为 $\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}=-\sin\theta\cos\theta,\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}=\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}=\cot\theta$，由 $R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho}=\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma,\nu}-\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma,\mu}+\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}-\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$ 得，非零分量或者满足 $\rho=\theta$ 且 $\mu\nu\sigma$ 中有两个为 ϕ，或者满足 $\rho=\phi$ 且 $\mu\nu\sigma$ 中至少有一个为 θ，且前两个指标反称，前两个指标相同的分量为零，并且前三个指标只需考虑偶排列，奇排列只需对调前两个指标。

$$\begin{aligned}
R_{\theta\phi\phi}{}^{\theta}&=\Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi,\phi}-\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi,\theta}+\Gamma^{\theta}{}_{\phi\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\phi\theta}-\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta}+\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}-\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi}\\
&=0+\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+0-0-\cos^2\theta-0\\
&=-\sin^2\theta\\
R_{\theta\phi\phi}{}^{\phi}&=\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi,\phi}-\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi,\theta}+\Gamma^{\theta}{}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}-\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta}+\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi}-\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\\
&=0\\
R_{\phi\theta\theta}{}^{\phi}&=\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta,\theta}-\Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta,\phi}+\Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta}-\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}+\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}-\Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi}\\
&=-\frac{1}{\sin^2\theta}-0+0-0+\cot^2\theta-0\\
&=-1
\end{aligned}$$

于是非零分量仅有 $R_{\theta\phi\phi}{}^{\theta}=-R_{\phi\theta\phi}{}^{\theta}=-\sin\theta,R_{\phi\theta\theta}{}^{\phi}=-R_{\theta\phi\theta}{}^{\phi}=-1$。

与愚蠢的人类相比，麦酱可以更快地计算（并且不会抄错分量）。将以下函数定义写入一个 Mathematica 程序包文件 (.m) 或者放在笔记本文件的开头：

```
christoffelsymbol[g_,x_,i_,j_,k_]:=
  1/2
    Plus@@
      ((Inverse[g][[i,#]](D[g[[#,j]],x[[k]]]+D[g[[k,#]],x[[j]]]-
            D[g[[j,k]],x[[#]]]))&)/@Range[Length[x]];
ChristoffelSymbol[g_,x_]:=
  Table[christoffelsymbol[g,x,i,j,k],{i,1,Length[x]},
     {j,1,Length[x]},{k,1,Length[x]}];
riemanntensor[g_,x_,i_,j_,k_,l_]:=
  D[christoffelsymbol[g,x,l,i,k],x[[j]]]-
   D[christoffelsymbol[g,x,l,j,k],x[[i]]]+
   Plus@@
     ((christoffelsymbol[g,x,#,k,i] christoffelsymbol[g,x,l,j,#]-
         christoffelsymbol[g,x,#,k,j]
          christoffelsymbol[g,x,l,i,#])&)/@Range[Length[x]];
RiemannTensor[g_,x_]:=Table[riemanntensor[g,x,i,j,k,l],
    {i,1,Length[x]},{j,1,Length[x]},{k,1,Length[x]},{l,1,Length[x]}];
```

运行如图 3.1。

```
In[1]:= << GR`.m

In[2]:= g = ( r^2    0
              0   r^2 Sin[θ]^2 )

Out[2]= {{r^2, 0}, {0, r^2 Sin[θ]^2}}

In[3]:= Γ = ChristoffelSymbol[g, {θ, ϕ}]

Out[3]= {{{0, 0}, {0, -Cos[θ] Sin[θ]}}, {{0, Cot[θ]}, {Cot[θ], 0}}}

In[4]:= RiemannTensor[g, {θ, ϕ}] // AbsoluteTiming
                                     [绝对时间

Out[4]= {0.0157581, {{{{0, 0}, {0, 0}}, {{0, -Cot[θ]^2 + Csc[θ]^2}, {-Sin[θ]^2, 0}}},
          {{{0, Cot[θ]^2 - Csc[θ]^2}, {Sin[θ]^2, 0}}, {{0, 0}, {0, 0}}}}}

In[5]:= R = %[[2]] // Simplify
                      [化简

Out[5]= {{{{0, 0}, {0, 0}}, {{0, 1}, {-Sin[θ]^2, 0}}}, {{{0, -1}, {Sin[θ]^2, 0}}, {{0, 0}, {0, 0}}}}
```

图 3.1: 将第 13 题扔给麦酱计算

14. 求度规 $\mathrm{d}s^2 = \Omega^2(t,x)\left(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2\right)$ 的黎曼张量在 $\{t,x\}$ 系的全部分量（在结果中以 $\dot{\Omega}$ 和 Ω' 分别代表函数 Ω 对 t 和 x 的偏导数）。

解 先求克氏符。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^t{}_{tt} &= \frac{1}{2}g^{tt}\left(g_{tt,t} + g_{tt,t} - g_{tt,t}\right) \\
&= \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \\
\Gamma^t{}_{tx} &= \frac{1}{2}g^{tt}\left(g_{tt,x} + g_{xt,t} - g_{tx,t}\right) \\
&= \frac{\Omega'}{\Omega} \\
\Gamma^t{}_{xx} &= \frac{1}{2}g^{tt}\left(g_{tx,x} + g_{xt,x} - g_{xx,t}\right) \\
&= \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \\
\Gamma^x{}_{tt} &= \frac{1}{2}g^{xx}\left(g_{xt,t} + g_{tx,t} - g_{tt,x}\right) \\
&= \frac{\Omega'}{\Omega} \\
\Gamma^x{}_{tx} &= \frac{1}{2}g^{xx}\left(g_{xt,x} + g_{xx,t} - g_{tx,x}\right) \\
&= \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{x}{}_{xx} &= \frac{1}{2}g^{xx}\left(g_{xx,x}+g_{xx,x}-g_{xx,x}\right)\\
&= \frac{\Omega'}{\Omega}
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
R_{txt}{}^{t} &= \Gamma^{t}{}_{tt,x}-\Gamma^{t}{}_{xt,t}+\Gamma^{t}{}_{tt}\Gamma^{t}{}_{xt}-\Gamma^{t}{}_{tx}\Gamma^{t}{}_{tt}+\Gamma^{x}{}_{tt}\Gamma^{t}{}_{xx}-\Gamma^{x}{}_{tx}\Gamma^{t}{}_{tx}\\
&= \frac{\Omega\dot{\Omega}'-\dot{\Omega}\Omega'}{\Omega^2}-\frac{\Omega\dot{\Omega}'-\dot{\Omega}\Omega'}{\Omega^2}+\frac{\dot{\Omega}\Omega'}{\Omega^2}-\frac{\dot{\Omega}\Omega'}{\Omega^2}+\frac{\dot{\Omega}\Omega'}{\Omega^2}-\frac{\dot{\Omega}\Omega'}{\Omega^2}\\
&= 0\\
R_{txx}{}^{t} &= \Gamma^{t}{}_{tx,x}-\Gamma^{t}{}_{xx,t}+\Gamma^{t}{}_{xt}\Gamma^{t}{}_{xt}-\Gamma^{t}{}_{xx}\Gamma^{t}{}_{tt}+\Gamma^{x}{}_{xt}\Gamma^{t}{}_{xx}-\Gamma^{x}{}_{xx}\Gamma^{t}{}_{tx}\\
&= \frac{\Omega\Omega''-\Omega'^2}{\Omega^2}-\frac{\Omega\ddot{\Omega}-\dot{\Omega}^2}{\Omega^2}+\frac{\Omega'^2}{\Omega^2}-\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2}+\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2}-\frac{\Omega'^2}{\Omega^2}\\
&= \frac{\Omega\left(\Omega''-\ddot{\Omega}\right)+\dot{\Omega}^2-\Omega'^2}{\Omega^2}\\
R_{txt}{}^{x} &= \Gamma^{x}{}_{tt,x}-\Gamma^{x}{}_{xt,t}+\Gamma^{t}{}_{tt}\Gamma^{x}{}_{xt}-\Gamma^{t}{}_{tx}\Gamma^{x}{}_{tt}+\Gamma^{x}{}_{tt}\Gamma^{x}{}_{xx}-\Gamma^{x}{}_{tx}\Gamma^{x}{}_{tx}\\
&= \frac{\Omega\Omega''-\Omega'^2}{\Omega^2}-\frac{\Omega\ddot{\Omega}-\dot{\Omega}^2}{\Omega^2}+\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2}-\frac{\Omega'^2}{\Omega^2}+\frac{\Omega'^2}{\Omega^2}-\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2}\\
&= \frac{\Omega\left(\Omega''-\ddot{\Omega}\right)+\dot{\Omega}^2-\Omega'^2}{\Omega^2}\\
R_{txx}{}^{x} &= \Gamma^{x}{}_{tx,x}-\Gamma^{x}{}_{xx,t}+\Gamma^{t}{}_{xt}\Gamma^{x}{}_{xt}-\Gamma^{t}{}_{xx}\Gamma^{x}{}_{tt}+\Gamma^{x}{}_{xt}\Gamma^{x}{}_{xx}-\Gamma^{x}{}_{xx}\Gamma^{x}{}_{tx}\\
&= \frac{\Omega\dot{\Omega}'-\dot{\Omega}\Omega'}{\Omega^2}-\frac{\Omega\dot{\Omega}'-\dot{\Omega}\Omega'}{\Omega^2}+\frac{\Omega'\dot{\Omega}}{\Omega^2}-\frac{\Omega'\dot{\Omega}}{\Omega^2}+\frac{\Omega'\dot{\Omega}}{\Omega^2}-\frac{\Omega'\dot{\Omega}}{\Omega^2}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

故所有非零分量为 $R_{txx}{}^{t}=-R_{xtx}{}^{t}=R_{txt}{}^{x}=-R_{xtt}{}^{x}=\dfrac{\Omega\left(\Omega''-\ddot{\Omega}\right)+\dot{\Omega}^2-\Omega'^2}{\Omega^2}$。

本题用上述 Mathematica 代码解决如图 3.2：

15. 求度规 $\mathrm{d}s^2=z^{-1/2}\left(-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}z^2\right)+z\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\right)$ 的黎曼张量在 $\{t,x,y,z\}$ 系的全部分量。

解 先求克氏符分量。由度规分量的非对角元均为零，克氏符分量 $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\sigma}\left(g_{\sigma\mu,\nu}+g_{\nu\sigma,\mu}-g_{\mu\nu,\sigma}\right)$。非零分量至少应该满足：$\sigma\mu\nu$ 至少有两个相等；$\sigma\mu\nu$ 中至少有一个为 z（否则导数项全为零）。进一步地，若两个相等，则第三个必为 z（否则导数项为零）；若三个相等，则

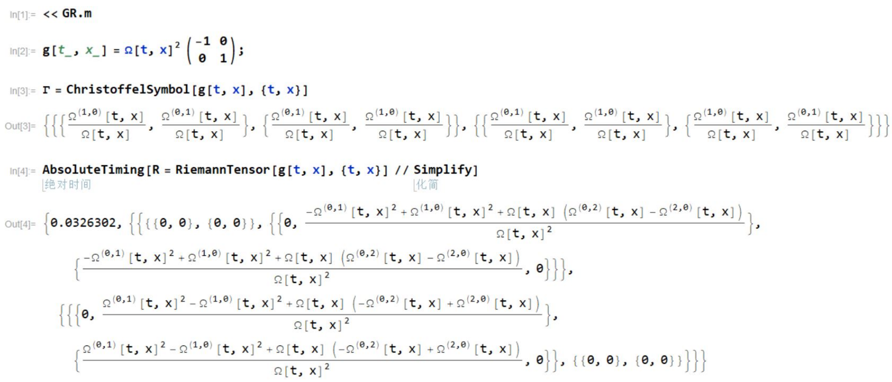

图 3.2: 将第 14 题扔给麦酱

为 zzz。即，非零分量满足三个指标中一个为 z 其余两个相同。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^t{}_{tz} &= \frac{1}{2} g^{tt} \left(g_{tt,z} + g_{zt,t} - g_{tz,t} \right) \\
&= -\frac{1}{4z} \\
\Gamma^x{}_{xz} &= \frac{1}{2} g^{xx} \left(g_{xx,z} + g_{zx,x} - g_{xz,x} \right) \\
&= \frac{1}{z} \\
\Gamma^y{}_{yz} &= \frac{1}{2} g^{yy} \left(g_{yy,z} + g_{zy,y} - g_{yz,y} \right) \\
&= \frac{1}{z} \\
\Gamma^z{}_{tt} &= \frac{1}{2} g^{zz} \left(g_{zt,t} + g_{tz,t} - g_{tt,z} \right) \\
&= -\frac{1}{4z} \\
\Gamma^z{}_{xx} &= \frac{1}{2} g^{zz} \left(g_{zx,x} + g_{xz,x} - g_{xx,z} \right) \\
&= -\frac{\sqrt{z}}{2} \\
\Gamma^z{}_{yy} &= \frac{1}{2} g^{zz} \left(g_{zy,y} + g_{yz,y} - g_{yy,z} \right) \\
&= -\frac{\sqrt{z}}{2} \\
\Gamma^z{}_{zz} &= \frac{1}{2} g^{zz} \left(g_{zz,z} + g_{zz,z} - g_{zz,z} \right) \\
&= -\frac{1}{4z}
\end{aligned}
$$

于是所有非零克氏符分量为 $\Gamma^t{}_{tz} = \Gamma^t{}_{zt} = -\dfrac{1}{4z}$，$\Gamma^x{}_{xz} = \Gamma^x{}_{zx} = \Gamma^y{}_{yz} = \Gamma^y{}_{zy} = \dfrac{1}{z}$，

$\Gamma^z{}_{tt} = -\dfrac{1}{4z}$，$\Gamma^z{}_{xx} = \Gamma^z{}_{yy} = -\dfrac{\sqrt{z}}{2}$，$\Gamma^z{}_{zz} = -\dfrac{1}{4z}$。

由黎曼曲率张量分量表达式 $R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu,\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma,\mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$，注意到上述克氏符非零项的规律，黎曼张量的非零分量至少应该满足 $\mu \neq \nu$ 并且：

1. ρ 不为 z 时，导数项非零的条件是 $\mu\nu$ 中有一个为 z 另一个和 ρ 相同且 $\sigma = z$；下面分类讨论后两项。
   (a) $\mu\nu$ 中有一个为 z 时，设 $\nu = z$，$R_{\mu z\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu,z} \cancel{- \Gamma^{\rho}{}_{z\sigma,\mu}} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{z\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{z\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$，倒数第二项中 $\rho z\lambda$ 的组合为满足克氏符非零项“一个为 z 其余两个相同”的特征，要求 $\lambda = \rho$；最后一项中 $\lambda z\sigma$ 的组合要求 $\lambda = \sigma$，于是 $R_{\mu z\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu,z} + \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{z\rho} - \Gamma^{\sigma}{}_{z\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}$，第一项非零要求 $\mu = \rho$ 且 $\sigma = z$，第二项非零要求 $\mu = \rho$ 且 $\sigma = z$；最后一项非零要求 $\mu = \rho$ 且 $\sigma = z$，于是非零项为 $R_{\rho zz}{}^{\rho} = \Gamma^{\rho}{}_{z\rho,z} + \Gamma^{\rho}{}_{z\rho}\Gamma^{\rho}{}_{z\rho} - \Gamma^{z}{}_{zz}\Gamma^{\rho}{}_{\rho z}$。
   (b) $\mu\nu$ 均不为 z 时，求导项为零，$R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$，第一项中 $\rho\nu\lambda$ 的组合要求 $\lambda = z$ 且 $\nu = \rho$，第二项中 $\rho\mu\lambda$ 的组合要求 $\lambda = z$ 且 $\mu = \rho$，于是 $R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{z}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu z} - \Gamma^{z}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu z}$，$\mu\nu$ 中至少一个与 ρ 相同。不妨设 $\mu = \rho$，则 $R_{\rho\nu\sigma}{}^{\rho} = -\Gamma^{z}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\rho z}$，非零项为 $R_{\rho\nu\nu}{}^{\rho} = -\Gamma^{z}{}_{\nu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\rho z}$。
2. ρ 为 z 时，则后两项中 λ 应分别取 ν 和 μ，即 $R_{\mu\nu\sigma}{}^{z} = \Gamma^{z}{}_{\sigma\mu,\nu} - \Gamma^{z}{}_{\nu\sigma,\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{z}{}_{\nu\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{z}{}_{\mu\mu}$，若 $\mu\nu$ 均不为 z，则导数项为零，而后两项中 $\Gamma^{\nu}{}_{\sigma\mu}$ 和 $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}$ 无论 σ 如何取都不能满足克氏符非零项“一个为 z 其余两个相同”的特征，故 $\mu\nu$ 中有一个为 z，考虑到指标 $\mu\nu$ 反称只需计算偶排列，于是我们有 $\nu = z$，非零项为 $R_{\mu z\sigma}{}^{z} = \Gamma^{z}{}_{\sigma\mu,z} + \Gamma^{z}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{z}{}_{zz} - \Gamma^{\mu}{}_{z\sigma}\Gamma^{z}{}_{\mu\mu}$，又看出必须有 $\mu = \sigma$，于是非零项为 $R_{\mu z\mu}{}^{z} = \Gamma^{z}{}_{\mu\mu,z} + \Gamma^{z}{}_{\mu\mu}\Gamma^{z}{}_{zz} - \Gamma^{\mu}{}_{z\mu}\Gamma^{z}{}_{\mu\mu}$。

综上，可能非零项为

$$
\begin{aligned}
R_{\rho zz}{}^{\rho} &= \Gamma^{\rho}{}_{z\rho,z} + \Gamma^{\rho}{}_{z\rho}\Gamma^{\rho}{}_{z\rho} - \Gamma^{z}{}_{zz}\Gamma^{\rho}{}_{\rho z}, &\qquad \rho &= t,x,y \\
R_{\rho\nu\nu}{}^{\rho} &= -\Gamma^{z}{}_{\nu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\rho z}, &\qquad \rho,\nu &= t,x,y \\
R_{\mu z\mu}{}^{z} &= \Gamma^{z}{}_{\mu\mu,z} + \Gamma^{z}{}_{\mu\mu}\Gamma^{z}{}_{zz} - \Gamma^{\mu}{}_{z\mu}\Gamma^{z}{}_{\mu\mu}, &\qquad \mu &= t,x,y.
\end{aligned}
$$

又注意到 x 与 y 的对称性，只需计算 x 而不用计算 y、只需计算 $xyyx$ 不用计算 $yxxy$。下面按以上规则计算可能的非零分量。

$$
\begin{aligned}
R_{txx}{}^{t} &= -\Gamma^{z}{}_{xx}\Gamma^{t}{}_{tz} \\
&= -\frac{1}{8\sqrt{z}} \\
R_{tzz}{}^{t} &= \Gamma^{t}{}_{zt,z} + \Gamma^{t}{}_{zt}\Gamma^{t}{}_{zt} - \Gamma^{z}{}_{zz}\Gamma^{t}{}_{tz} \\
&= \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{16z^2} - \frac{1}{16z^2} \\
&= \frac{1}{4z^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{xyy}{}^{x} &= -\Gamma^{z}{}_{yy}\Gamma^{x}{}_{xz} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{z}} \\
R_{xzz}{}^{x} &= \Gamma^{x}{}_{zx,z} + \Gamma^{x}{}_{zx}\Gamma^{x}{}_{zx} - \Gamma^{z}{}_{zz}\Gamma^{x}{}_{xz} \\
&= -\frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{8z^2} \\
&= -\frac{1}{8z^2} \\
R_{tzt}{}^{z} &= \Gamma^{z}{}_{tt,z} + \Gamma^{z}{}_{tt}\Gamma^{z}{}_{zz} - \Gamma^{t}{}_{zt}\Gamma^{z}{}_{tt} \\
&= \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{16z^2} - \frac{1}{16z^2} \\
&= \frac{1}{4z^2} \\
R_{xzx}{}^{z} &= \Gamma^{z}{}_{xx,z} + \Gamma^{z}{}_{xx}\Gamma^{z}{}_{zz} - \Gamma^{x}{}_{zx}\Gamma^{z}{}_{xx} \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{z}} + \frac{1}{8\sqrt{z}} + \frac{1}{4\sqrt{z}} \\
&= \frac{1}{8\sqrt{z}}
\end{aligned}
$$

于是所有非零分量为

$$
\begin{aligned}
R_{txx}{}^{t} &= -R_{xtx}{}^{t} = R_{tyy}{}^{t} = -R_{yty}{}^{t} = -\frac{1}{8\sqrt{z}} \\
R_{tzz}{}^{t} &= -R_{ztz}{}^{t} = \frac{1}{4z^2} \\
R_{xyy}{}^{x} &= R_{yxx}{}^{y} = \frac{1}{4\sqrt{z}} \\
R_{xzz}{}^{x} &= -R_{zxz}{}^{x} = R_{yzz}{}^{y} = -R_{zyz}{}^{y} = -\frac{1}{8z^2} \\
R_{tzt}{}^{z} &= -R_{ztt}{}^{z} = \frac{1}{4z^2} \\
R_{xzx}{}^{z} &= -R_{zxx}{}^{z} = \frac{1}{8\sqrt{z}}
\end{aligned}
$$

PS：我第一遍手算的算了几个小时（论经常抄错指标的悲惨……）所以还是分析一番，分类讨论分量非零条件顺便化简的好……当然最省事的还是交给麦酱，秒出结果……

16. 设 $\alpha(z)$，$\beta(z)$，$\gamma(z)$ 为任意函数，$h = t + \alpha(z)x + \beta(z)y + \gamma(z)$，求度规

$$
\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + h^2\,\mathrm{d}z^2
$$

的黎曼张量在 $\{t, x, y, z\}$ 系的全部分量。

解 首先求克氏符分量,由于度规分量矩阵的非对角元全为零,$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}g^{\sigma\sigma}\left(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}\right)$,

导数项非零要求 $\sigma\mu\nu$ 中有两个取 z。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{t}{}_{zz} &= \frac{1}{2}g^{tt}\left(g_{tz,z}+g_{zt,z}-g_{zz,t}\right)\\
&= h\\
\Gamma^{x}{}_{zz} &= \frac{1}{2}g^{xx}\left(g_{xz,z}+g_{zx,z}-g_{zz,x}\right)\\
&= -h\alpha\\
\Gamma^{y}{}_{zz} &= \frac{1}{2}g^{yy}\left(g_{yz,z}+g_{zy,z}-g_{zz,y}\right)\\
&= -h\beta\\
\Gamma^{z}{}_{zt} &= \frac{1}{2}g^{zz}\left(g_{zz,t}+g_{tz,z}-g_{zt,z}\right)\\
&= \frac{1}{h}\\
\Gamma^{z}{}_{zx} &= \frac{1}{2}g^{zz}\left(g_{zz,x}+g_{xz,z}-g_{zx,z}\right)\\
&= \frac{\alpha}{h}\\
\Gamma^{z}{}_{zy} &= \frac{1}{2}g^{zz}\left(g_{zz,y}+g_{yz,z}-g_{zy,z}\right)\\
&= \frac{\beta}{h}\\
\Gamma^{z}{}_{zz} &= \frac{1}{2}g^{zz}\left(g_{zz,z}+g_{zz,z}-g_{zz,z}\right)\\
&= \frac{x\alpha'+y\beta'+\gamma'}{h}
\end{aligned}
$$

黎曼张量分量表达式为 $R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho}=\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu,\nu}-\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma,\mu}+\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}-\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$，下面讨论分量非零条件。

1. ρ 不取 z。后两项求和中 $\lambda=z$，且 $\mu\nu$ 必有一取 z。由于前两个指标反称，设 ν 取 z，则 $R_{\mu z\sigma}{}^{\rho}=\cancel{\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu,z}}-\Gamma^{\rho}{}_{z\sigma,\mu}+\Gamma^{z}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{zz}-\Gamma^{z}{}_{z\sigma}\cancel{\Gamma^{\rho}{}_{\mu z}}$，又可看出 $\sigma=z$，于是非零分量为 $R_{\mu zz}{}^{\rho}=-\Gamma^{\rho}{}_{zz,\mu}+\Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{\rho}{}_{zz}$。
2. ρ 取 z。
   (a) ν 取 z。则 $R_{\mu z\sigma}{}^{z}=\Gamma^{z}{}_{\sigma\mu,z}-\Gamma^{z}{}_{z\sigma,\mu}+\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{z}{}_{z\lambda}-\Gamma^{\lambda}{}_{z\sigma}\Gamma^{z}{}_{\mu\lambda}$，倒数第二项中 $\lambda\sigma\mu$ 的组合要求 $\lambda=z$，最后一项中 $z\mu\lambda$ 的组合要求 $\lambda=z$。
      i. $\sigma=z$，则 $R_{\mu zz}{}^{z}=\Gamma^{z}{}_{z\mu,z}-\Gamma^{z}{}_{zz,\mu}+\cancel{\Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{z}{}_{zz}-\Gamma^{z}{}_{zz}\Gamma^{z}{}_{\mu z}}$；
      ii. $\sigma\neq z$，则 $R_{\mu z\sigma}{}^{z}=\cancel{\Gamma^{z}{}_{\sigma\mu,z}}-\Gamma^{z}{}_{z\sigma,\mu}+\cancel{\Gamma^{z}{}_{\sigma\mu}}\Gamma^{z}{}_{zz}-\Gamma^{z}{}_{z\sigma}\Gamma^{z}{}_{\mu z}$。
   (b) $\mu\nu$ 均不取 z。则 $R_{\mu\nu\sigma}{}^{z}=\Gamma^{z}{}_{\sigma\mu,\nu}-\Gamma^{z}{}_{\nu\sigma,\mu}+\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{z}{}_{\nu\lambda}-\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{z}{}_{\mu\lambda}$，后两项中 λ 均取 z，且 $\sigma=z$。则 $R_{\mu\nu z}{}^{z}=\Gamma^{z}{}_{z\mu,\nu}-\Gamma^{z}{}_{\nu z,\mu}+\cancel{\Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{z}{}_{\nu z}-\Gamma^{z}{}_{\nu z}\Gamma^{z}{}_{\mu z}}$。

综上，仅考虑哪些克氏符非零，可以将可能的非零分量确定到如下四种情况：

$$\begin{aligned}
R_{\mu zz}{}^{\rho} &= -\Gamma^{\rho}{}_{zz,\mu} + \Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{\rho}{}_{zz}, && \mu,\rho = t,x,y \\
R_{\mu zz}{}^{z} &= \Gamma^{z}{}_{z\mu,z} - \Gamma^{z}{}_{zz,\mu}, && \mu = t,x,y \\
R_{\mu z\sigma}{}^{z} &= -\Gamma^{z}{}_{z\sigma,\mu} - \Gamma^{z}{}_{z\sigma}\Gamma^{z}{}_{\mu z}, && \mu,\sigma = t,x,y \\
R_{\mu\nu z}{}^{z} &= \Gamma^{z}{}_{z\mu,\nu} - \Gamma^{z}{}_{\nu z,\mu}, && \mu,\nu = t,x,y
\end{aligned}$$

但是进一步考虑那些非零的克氏符分量的具体形式，由于

$$\Gamma^{z}{}_{z\mu} = \frac{\frac{\partial h}{\partial x^\mu}}{h},$$

于是

$$\Gamma^{z}{}_{z\mu,\nu} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x^\mu}\frac{\partial h}{\partial x^\nu}}{h^2} = \Gamma^{z}{}_{z\nu,\mu} = \Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{z}{}_{z\nu},$$

故第二三四种情况均为零，还剩下

$$R_{\mu zz}{}^{\rho} = -\Gamma^{\rho}{}_{zz,\mu} + \Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{\rho}{}_{zz}, \qquad \rho = t,x,y$$

而

$$\Gamma^{\rho}{}_{zz} = -g^{\rho\rho}h\frac{\partial h}{\partial x^\rho}$$

可以观察发现

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\rho}{}_{zz,\mu} &= -g^{\rho\rho}\frac{\partial h}{\partial x^\rho}\frac{\partial h}{\partial x^\mu} \\
&= \left(-g^{\rho\rho}h\frac{\partial h}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial x^\mu}}{h}\right) \\
&= \Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{\rho}{}_{zz}
\end{aligned}$$

于是本题的黎曼张量的所有分量全为零。扔给麦酱验证如图 3.3

17. 试证 2 维广义黎曼空间的爱因斯坦张量为零。提示：2 维广义黎曼空间的黎曼张量只有一个独立分量。

证明 记 $r \equiv R_{1212}$，则

$$\begin{aligned}
R_{2112} &= -r \\
R_{1221} &= -r \\
R_{2121} &= r
\end{aligned}$$

于是里奇张量 $R_{ac} := g^{bd}R_{abcd}$ 的分量为

$$\begin{aligned}
R_{11} &= g^{22}R_{12}{}^{1}{}_{2} \\
&= rg^{22}
\end{aligned}$$

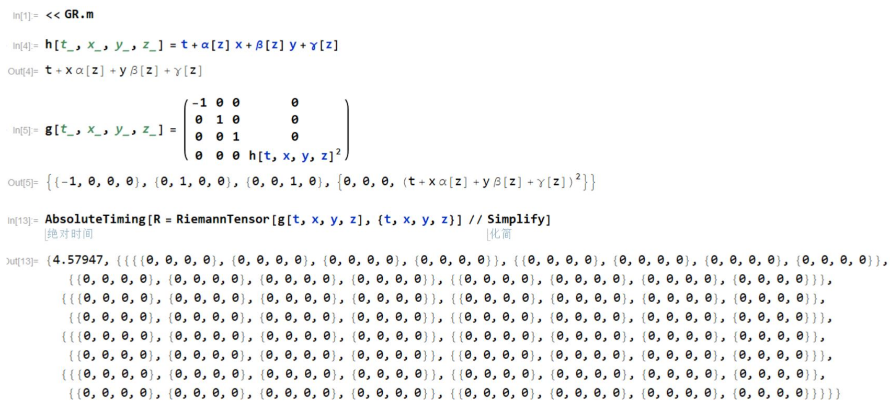

图 3.3: Mathematica 验证第 16 题

$$
\begin{aligned}
R_{12} &= g^{21} R_{1221} \\
&= -r g^{21} \\
R_{22} &= g^{11} R_{2121} \\
&= r g^{11},
\end{aligned}
$$

标量曲率

$$
\begin{aligned}
R &= g^{ac} R_{ac} \\
&= 2 r g^{11} g^{22} - 2 r g^{12} g^{21} \\
&= 2 r g.
\end{aligned}
$$

其中 $g = \det[g]$ 为度规分量矩阵的行列式。注意到，里奇张量分量排成的矩阵为

$$
\begin{aligned}
[R] &= \begin{pmatrix} r g^{22} & -r g^{21} \\ -r g^{12} & r g^{11} \end{pmatrix} \\
&= r \left([g]^{-1} \right)^* \\
&= r g [g],
\end{aligned}
$$

其中 A^* 代表 A 的伴随矩阵。于是爱因斯坦张量 $G_{ab} = R_{ab} - \dfrac{1}{2} R g_{ab}$ 的分量矩阵为

$$
\begin{aligned}
[G] &= [R] - \frac{1}{2} R [g] \\
&= r g [g] - r g [g] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

第四章　李导数、Killing 场和超曲面

习题

1. 试证由式 (4-1-1) 定义的 $(\phi_* v)^a$ 满足 §2.2 定义 2 对矢量的两个要求，从而的确是 $\phi(p)$ 点的矢量。

证明　1. $(\phi_* v)(f+g) = v(\phi^*(f+g)) = v(\phi^* f) + v(\phi^* g) = (\phi_* v)(f) + (\phi_* v)(g)$；

2. $(\phi_* v)(fg) = v(\phi^*(fg)) = v(\phi^*(f)\phi^*(g)) = \phi^*(f)|_p v(\phi^* g) + \phi^*(g)|_p v(\phi^* f) = f|_{\phi(p)} (\phi_* v)(g) + g|_{\phi(p)} (\phi_* v)(f)$。

2. 试证定理 4-1-1、4-1-2 和 4-1-3.

证明 (1) 定理 4-1-1 如下：

Thm $\phi_* \colon V_p \to V_{\phi(p)}$ 是线性映射，即

$$\phi_*(\alpha u^a + \beta v^a) = \alpha \phi_* u^a + \beta \phi_* v^a, \quad \forall u^a, v^a \in V_p, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Prf $\forall f \in \mathscr{F}_N$，

$$\begin{aligned}
[\phi_*(\alpha u + \beta v)](f) &= (\alpha u + \beta v)(\phi^* f) \\
&= \alpha u(\phi^* f) + \beta v(\phi^* f) \\
&= \alpha (\phi_* u)(f) + \beta (\phi_* v)(f) \\
&= (\alpha \phi_* u + \beta \phi_* v)(f)
\end{aligned}$$

(2) 定理 4-1-2 如下：

Thm 设 $C(t)$ 是 M 中的曲线，T^a 为曲线在 $C(t_0)$ 的切矢，则 $\phi_* T^a \in V_{\phi(C(t_0))}$ 是曲线 $\phi(C(t))$ 在 $\phi(C(t_0))$ 点的切矢（曲线切矢的像是曲线像的切矢）。

Prf $\forall f \in \mathscr{F}_N$，

$$\begin{aligned}
(\phi_* T)(f) &= T(\phi^* f) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((\phi^* f) \circ C(t))\bigg|_{t_0}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\phi\circ C(t))\Big|_{t_0}$$
$$= T'(f),$$

其中 T'^a 是曲线 $\phi(C(t))$ 在 $\phi(C(t_0))$ 的切矢。于是 $T^a = T'^a$。

(3) 定理 4-1-3 如下：

Thm $(\phi_* T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\big|_{\phi(p)} = T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\big|_p$，　$\forall T\in\mathscr{F}_M(k,l)$，
式中左边是新点 $\phi(p)$ 的新张量 $\phi_* T$ 在老坐标系 $\{y^\mu\}$ 的分量，右边是老点 p 的老张量 T 在新坐标系 $\{x'^\mu\}$ 的分量。

Prf 由定理 4-1-2，坐标基矢作为坐标线的切矢，满足

$$\phi_*\left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^a\Big|_p\right] = \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)^a\Big|_{\phi(p)},$$

于是 $\forall v^a\in V_{\phi(p)}$，

$$\begin{aligned}\phi_*\left[\left(\mathrm{d}x'^\mu\right)_a\big|_p\right] v^a &= \left(\mathrm{d}x'^\mu\right)_a\big|_p (\phi^* v)^a\\ &= (\phi^* v)\,(x'^\mu)\\ &= v(\phi_* x'^\mu)\\ &= v(y^\mu)\\ &= (\mathrm{d}y^\mu)_a\big|_{\phi(p)} v^a\end{aligned}$$

故

$$\phi_*\left[\left(\mathrm{d}x'^\mu\right)_a\big|_p\right] = (\mathrm{d}y^\mu)_a\big|_{\phi(p)},$$

于是对任意张量场 $T\in\mathscr{F}_M(k,l)$，

$$\begin{aligned}&(\phi_* T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\big|_{\phi(p)}\\ =\ &(\phi_* T)^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\big|_{\phi(p)}\,(\mathrm{d}y^{\mu_1})_{a_1}\big|_{\phi(p)}\cdots(\mathrm{d}y^{\mu_k})_{a_k}\big|_{\phi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu_1}}\right)^{b_1}\Big|_{\phi(p)}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu_l}}\right)^{b_l}\Big|_{\phi(p)}\\ =\ &T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\big|_p\left(\mathrm{d}x'^{\mu_1}\right)_{a_1}\Big|_p\cdots\left(\mathrm{d}x'^{\mu_k}\right)_{a_k}\Big|_p\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu_1}}\right)^{b_1}\Big|_p\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu_l}}\right)^{b_l}\Big|_p\\ =\ &T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\big|_p.\end{aligned}$$

3. 设 ϕ: $M\to N$ 为光滑映射，$p\in M$，$\{y^\mu\}$ 是 $\phi(p)$ 点某邻域上的坐标，试证

$$(\phi_* v)^a = v\,(\phi^* y^\mu)\,(\partial/\partial y^\mu)^a,\quad \forall v^a\in V_p.$$

证明

$$
\begin{aligned}
(\phi_* v)^a &= (\phi_* v)(y^\mu)\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)^a \\
&= v(\phi^* y^\mu)\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)^a
\end{aligned}
$$

4. 设 M，N 是流形，$\phi\colon M \to N$ 是微分同胚，$p \in M$，$q \equiv \phi(p)$，试证推前映射 $\phi_*\colon V_p \to V_q$ 是同构映射。

证明 由定理 4-1-1 知 ϕ_* 为线性映射，又知其有逆映射 ϕ^*，故为线性同构。

5. 设 M，N，Q 是流形，$\phi\colon M \to N$ 和 $\psi\colon N \to Q$ 是光滑映射。

(a) 试证 $(\psi\circ\phi)^* f = (\phi^*\circ\psi^*) f$，$\forall f \in \mathscr{F}_Q$。

(b) 试证 $(\psi\circ\phi)_* v^a = \psi_*(\phi_* v^a)$， $\forall p \in M, v^a \in V_p$。

(c) 把 $(\psi\circ\phi)^*$ 和 $\phi^*\circ\psi^*$ 都看作由 $\mathscr{F}_Q(0,l)$ 到 $\mathscr{F}_M(0,l)$ 的映射，试证

$$
(\psi\circ\phi)^* = \phi^*\circ\psi^*.
$$

证明 (a) 按照拉回映射的定义，

$$
(\psi\circ\phi)^* f = f\circ\psi\circ\phi = (\phi^*\circ\psi^*) f.
$$

(b) 按照推前映射的定义，$\forall f \in \mathscr{F}_M$，

$$
\begin{aligned}
\left[(\psi\circ\phi)_* v\right](f) &= v\left[(\psi\circ\phi)^* f\right] \\
&= v\left[\phi^*(\psi^* f)\right] \\
&= (\phi^* v)(\psi^* f) \\
&= \left[\psi^*(\phi^* v)\right](f).
\end{aligned}
$$

(c) $\forall p \in M, v_1, \cdots, v_l \in V_p, T \in \mathscr{F}_Q(0,l)$，

$$
\begin{aligned}
&\left[(\psi\circ\phi)^* T\right]_{a_1\cdots a_l}\Big|_p (v_1)^{a_1}\cdots(v_l)^{a_l} \\
=\ & T_{a_1\cdots a_l}\Big|_{\psi(\phi(p))}\left[(\psi\circ\phi)_*(v_1)^{a_1}\right]\cdots\left[(\psi\circ\phi)_*(v_l)^{a_l}\right] \\
=\ & T_{a_1\cdots a_l}\Big|_{\psi(\phi(p))}\psi_*\left[\phi_*(v_1)^{a_1}\right]\cdots\psi_*\left[\phi_*(v_l)^{a_l}\right] \\
=\ & (\psi^* T)_{a_1\cdots a_l}\Big|_{\phi(p)}(\phi_* v_1)^{a_1}\cdots(\phi_* v_l)^{a_l} \\
=\ & \left[(\phi^*\circ\psi^*) T\right]_{a_1\cdots a_l}\Big|_p (v_1)^{a_1}\cdots(v_l)^{a_l}
\end{aligned}
$$

6. 设 $\phi\colon M \to N$ 是微分同胚，v^a，u^a 是 M 上的矢量场，试证 $\phi_*([v,u]^a) = [\phi_* v, \phi_* u]^a$，其中 $[v,u]^a$ 代表对易子。

证明 首先验证一个等式：$\forall v \in \mathscr{F}_M(1,0), f \in \mathscr{F}_N$，有 $v(\phi^* f) = \phi^* [(\phi_* v) f]$（即把逐点定义的切矢的推前映射表述成场的形式）。$\forall p \in M$，

$$\begin{aligned}
\phi^* [(\phi_* v) f]|_p &= (\phi_* v) f|_{\phi(p)} \\
&= (\phi_* v)|_{\phi(p)} (f) \\
&= v|_p (\phi^* f) \\
&= v (\phi^* f)|_p .
\end{aligned}$$

$\forall f \in \mathscr{F}_N, p \in M$，

$$\begin{aligned}
(\phi_* [v, u])|_{\phi(p)} (f) &= [v, u]|_p (\phi^* f) \\
&= v|_p [u(\phi^* f)] - u|_p [v(\phi^* f)] \\
&= v|_p \{\phi^* [(\phi_* u) f]\} - u|_p \{\phi^* [(\phi_* v) f]\} \\
&= \phi_* v|_{\phi(p)} [(\phi_* u) f] - \phi_* u|_{\phi(p)} [(\phi_* v) f] \\
&= [\phi_* v, \phi_* u]|_{\phi(p)} (f).
\end{aligned}$$

7. 试证定理 4-2-4.

证明 定理 4-2-4 如下：

Thm $\mathcal{L}_v \omega_a = v^b \nabla_b \omega_a + \omega_b \nabla_a v^b, \quad \forall v^a \in \mathscr{F}(1,0), \omega \in \mathscr{F}(0,1)$，
其中 ∇_a 为任意无挠导数算符。

Prf 由于李导数与缩并可交换顺序，为利用定理 4-2-3，向李导数内插入 u^a，计算 $\mathcal{L}_v (\omega_a u^a)$。$\forall u^a \in \mathscr{F}(1,0)$，利用与缩并交换及莱布尼兹律，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_v (\omega_a u^a) &= \omega_a \mathcal{L}_v u^a + u^a \mathcal{L}_v \omega_a \\
&= \omega_a [v, u]^a + u^a \mathcal{L}_v \omega_a \\
&= \omega_a \left(v^b \nabla_b u^a - u^b \nabla_b v^a\right) + u^a \mathcal{L}_v \omega_a ,
\end{aligned}$$

另一方面，根据 $\mathcal{L}_v(f) = v(f)$，有

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_v (\omega_a u^a) &= v^b \nabla_a (\omega_b u^a) \\
&= v^b \omega_a \nabla_b u^a + v^b u^a \nabla_b \omega_a ,
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\cancel{\omega_a v^b \nabla_b u^a} - \omega_a u^b \nabla_b v^a + u^a \mathcal{L}_v \omega_a = \cancel{v^b \omega_a \nabla_b u^a} + v^b u^a \nabla_b \omega_a , \\
u^a \mathcal{L}_v \omega_a = \omega_{\cancel{a}b} u^{\cancel{b}a} \nabla_{\cancel{b}a} v^{\cancel{a}b} + v^b u^a \nabla_b \omega_a , \\
\mathcal{L}_v \omega_a = \omega_b \nabla_a v^b + v^b \nabla_b \omega_a .
\end{aligned}$$

8. 设 $v^a \in \mathscr{F}_M(1,0)$，$\omega_a \in \mathscr{F}_M(0,1)$，试证对任一坐标系 $\{x^\mu\}$ 有

$$(\mathcal{L}_v\omega)_\mu = v^\nu\, \partial\omega_\mu/\partial x^\nu + \omega_\nu\, \partial v^\nu/\partial x^\mu\,.$$

提示：用式 (4-2-7) 并令其 ∇_a 为 ∂_a。

证明 式 (4-2-7) 为（也就是定理 4-2-4）：

$$\mathcal{L}_v\omega_a = v^b\nabla_b\omega_a + \omega_b\nabla_a v^b, \quad \forall v^a \in \mathscr{F}(1,0), \omega \in \mathscr{F}(0,1)$$

于是

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_v\omega)_\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \mathcal{L}_v\omega_a \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(v^b\partial_b\omega_a + \omega_b\partial_a v^b\right) \\
&= v^\nu\frac{\partial\omega_\mu}{\partial x^\nu} + \omega_\nu\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu}.
\end{aligned}$$

9. 设 $u^a, v^a \in \mathscr{F}_M(1,0)$，则下式作用于任意张量场都成立

$$[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u] = \mathcal{L}_{[v,u]} \quad \text{（其中 } [\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u] \equiv \mathcal{L}_v\mathcal{L}_u - \mathcal{L}_u\mathcal{L}_v\text{）}.$$

试就作用对象为 $f \in \mathscr{F}_M$ 和 $w^a \in \mathscr{F}_M(1,0)$ 的情况给出证明。提示：当作用对象为 w^a 时可用雅可比恒等式（第 2 章习题 8）。

证明 1. 作用于标量场：

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u](f) &= \mathcal{L}_v(\mathcal{L}_u f) - \mathcal{L}_u(\mathcal{L}_v f) \\
&= v(u(f)) - u(v(f)) \\
&= [v, u](f) \\
&= \mathcal{L}_{[v,u]}(f).
\end{aligned}$$

2. 作用于矢量场：

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_u] w &= \mathcal{L}_v(\mathcal{L}_u w) - \mathcal{L}_u(\mathcal{L}_v w) \\
&= [v, [u, w]] - [u, [v, w]] \\
&= -\left(\cancel{[u, [w, v]]} + [w, [v, u]]\right) - \cancel{[u, [v, w]]} \\
&= [[v, u], w] \\
&= \mathcal{L}_{[v,u]} w.
\end{aligned}$$

10. 设 F_{ab} 是 4 维闵氏空间上的反称张量场，其在洛伦兹坐标系 $\{t, x, y, z\}$ 的分量为 $F_{01} = -F_{13} = x\rho^{-1}$，$F_{02} = -F_{23} = y\rho^{-1}$，$F_{03} = F_{12} = 0$，其中 $\rho \equiv (x^2+y^2)^{1/2}$。试证 F_{ab} 有旋转对称性，即 $\mathcal{L}_v F_{ab} = 0$，其中 $v^a = -y\,(\partial/\partial x)^a + x\,(\partial/\partial y)^a$。

证明 由

$$\mathcal{L}_v F_{ab} = v^c \nabla_c F_{ab} + F_{ac} \nabla_b v^c + F_{cb} \nabla_a v^c,$$

取 ∇_a 为 ∂_a，有

$$(\mathcal{L}_v F)_{\mu\nu} = v^\sigma \partial_\sigma F_{\mu\nu} + F_{\mu\sigma} \partial_\nu v^\sigma + F_{\sigma\nu} \partial_\mu v^\sigma$$

其中第一项求和只对 $\sigma = 1,2$ 取，第二三项求和只对 $\sigma = 1,2$ 且 $\sigma \neq \mu,\nu$ 取，且 $\nu \neq 1,2$ 时第二项不存在，$\mu \neq 1,2$ 时第三项不存在。又易看出 $\mathcal{L}_v F_{ab}$ 反称，于是

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_v F)_{01} &= v^1 \partial_1 F_{01} + v^2 \partial_2 F_{01} + F_{02} \partial_1 v^2 \\
&= -y \cdot \frac{y^2}{\rho^3} + x \cdot \left(-\frac{xy}{\rho^3} \right) + \frac{y}{\rho} \cdot (-1) \\
&= 0 \\
(\mathcal{L}_v F)_{02} &= v^1 \partial_1 F_{02} + v^2 \partial_2 F_{02} + F_{01} \partial_2 v^1 \\
&= -y \cdot \left(-\frac{xy}{\rho^3} \right) + x \cdot \frac{x^2}{\rho^3} + \frac{x}{\rho} \cdot (-1) \\
&= 0 \\
(\mathcal{L}_v F)_{03} &= v^1 \partial_1 F_{03} + v^2 \partial_2 F_{03} \\
&= 0 \\
(\mathcal{L}_v F)_{12} &= v^1 \partial_1 F_{12} + v^2 \partial_2 F_{12} \\
&= 0 \\
(\mathcal{L}_v F)_{13} &= v^1 \partial_1 F_{13} + v^2 \partial_2 F_{13} + F_{23} \partial_1 v^2 \\
&= -y \cdot \left(-\frac{y^2}{\rho^3} \right) + x \cdot \frac{xy}{\rho^3} - \frac{y}{\rho} \cdot 1 \\
&= 0 \\
(\mathcal{L}_v F)_{23} &= v^1 \partial_1 F_{23} + v^2 \partial_2 F_{23} + F_{13} \partial_2 v^1 \\
&= -y \cdot \frac{xy}{\rho^3} + x \cdot \left(-\frac{x^2}{\rho^3} \right) - \frac{x}{\rho} \cdot (-1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

故 $\mathcal{L}_v F_{ab} = 0$。

11. 设 ξ^a 是 (M, g_{ab}) 中的 Killing 矢量场，∇_a 与 g_{ab} 相适配，试证 $\nabla_a \xi^a = 0$。

证明 由 Killing 方程，

$$\begin{aligned}
\nabla_a \xi^a &= g^{ab} \nabla_a \xi_b \\
&= g^{ab} \nabla_{(a} \xi_{b)}
\end{aligned}$$

$$= 0.$$

12. 设 ξ^a 是 (M, g_{ab}) 中的 Killing 矢量场，$\phi\colon M \to M$ 是等度规映射，试证 $\phi_*\xi^a$ 也是 (M, g_{ab}) 中的 Killing 矢量场。提示：利用习题 5(c) 中的结论。

证明 记 ξ^a 的积分曲线为 $C(t)$，它诱导出的单参微分同胚群为 $\{\psi_t\}$，则 $\phi_*\xi^a$ 的积分曲线是 $\phi \circ C(t)$，其诱导出的单参微分同胚群为 $\psi'_t = \phi \circ \psi_t \circ \phi^{-1}$。由定义，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\phi_*\xi} g_{ab} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\psi_t'^* g_{ab} - g_{ab}\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[\left(\phi \circ \psi_t \circ \phi^{-1}\right)^* g_{ab} - g_{ab}\right] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left\{\left[\left(\psi_t \circ \phi^{-1}\right)^* \circ \phi^*\right] g_{ab} - g_{ab}\right\} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[\left(\phi^{-1*} \circ \psi_t{}^*\right) g_{ab} - g_{ab}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

13. 设 ξ^a，η^a 是 (M, g_{ab}) 的 Killing 矢量场，试证其对易子 $[\xi, \eta]^a$ 也是 Killing 矢量场。注：此结论使得 M 上全体 Killing 矢量场的集合不但是矢量空间，而且是李代数（详见中册附录 G）。

证明 由第 9 题，知

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[\xi,\eta]} g_{ab} &= \mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta g_{ab} - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi g_{ab} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

14. 设 ξ^a 是广义黎曼空间 (M, g_{ab}) 的 Killing 矢量场，$R_{abc}{}^d$ 是 g_{ab} 的黎曼曲率张量。

(a) 试证 $\nabla_a \nabla_b \xi_c = -R_{bca}{}^d \xi_d$。注：此式对证明定理 4-3-4 有重要用处。提示：由 $R_{abc}{}^d$ 的定义以及 Killing 方程 (4-3-1) 可知 $\nabla_a \nabla_b \xi_c + \nabla_b \nabla_c \xi_a = R_{abc}{}^d \xi_d$。此式称为第一式。作指标替换 $a \mapsto b$，$b \mapsto c$，$c \mapsto a$ 得第二式，再替换一次得第三式。以第一、第二式之和减第三式并利用 (3-4-7) 便得证。

(b) 利用 (a) 的结果证明 $\nabla^a \nabla_a \xi_c = -R_{cd} \xi^d$，其中 R_{cd} 是里奇张量。

证明 (a) 由黎曼张量的定义，

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \xi_c = R_{abc}{}^d \xi_d$$

由 Killing 方程，$\nabla_a \xi_c = -\nabla_c \xi_a$，于是得

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c + \nabla_b \nabla_c \xi_a = R_{abc}{}^d \xi_d \tag{4.1}$$

对指标 a, b, c 轮换，得

$$\nabla_b \nabla_c \xi_a + \nabla_c \nabla_a \xi_b = R_{bca}{}^d \xi_d \tag{4.2}$$

$$\nabla_c \nabla_a \xi_b + \nabla_a \nabla_b \xi_c = R_{cab}{}^d \xi_d \tag{4.3}$$

(4.1) + (4.2) − (4.3) 得

$$2\nabla_b\nabla_c\xi_a = \left(R_{abc}{}^d + R_{bca}{}^d - R_{cab}{}^d\right)\xi_d = -2R_{cab}{}^d\xi_d$$

于是 $\nabla_a\nabla_b\xi_c = -R_{bca}{}^d\xi_d$。

(b) 由 (a)，

$$\nabla^a\nabla_a\xi_c = g^{ab}\nabla_b\nabla_a\xi_c = -g^{ab}R_{acb}{}^d\xi_d = -R_{cd}\xi^d.$$

15. 验证式 (4-3-3) 中的 $(\partial/\partial\eta)^a$ 的确满足 Killing 方程 (4-3-1)。

证明 由 $\left(\dfrac{\partial}{\partial\eta}\right)^a = x\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^a + t\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^a$ 升指标得

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)_a = g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^b = -x\,(\mathrm{d}t)_a + t\,(\mathrm{d}x)_a\,,$$

于是

$$\partial_a\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)_b = -\,(\mathrm{d}x)_a\,(\mathrm{d}t)_b + (\mathrm{d}t)_a\,(\mathrm{d}x)_b = (\mathrm{d}t)_{[a}\,(\mathrm{d}x)_{b]}\,,$$

这是一个反称张量，故满足 $\nabla_{(a}\,(\partial/\partial\eta)_{b)} = 0$。

16. 找出 2 维欧氏空间中由 $R^a = x\,(\partial/\partial y)^a - y\,(\partial/\partial x)^a$ 生出的单参等度规群的任一元素 ϕ_α 诱导的坐标变换。

证明 积分曲线的参数式满足微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = R^x = -y,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = R^y = x,\end{cases}$$

并有边界条件

$$\begin{cases}x(0) = x_p,\\ y(0) = y_p,\end{cases}$$

解得过 p 点的积分曲线的参数式为

$$\begin{cases}x(t) = x_p\cos t - y_p\sin t,\\ y(t) = x_p\sin t + y_p\cos t,\end{cases}$$

于是 ϕ_α 诱导的坐标变换为

$$\begin{cases}x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,\\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha.\end{cases}$$

17. 设时空 (M, g_{ab}) 中的超曲面 $\phi[S]$ 上每点都有类光切矢而无类时切矢（“切矢”指切于 $\phi[S]$），试证它必为类光超曲面。提示：① 证明与类时矢量 t^a 正交的矢量必类空 [选正交归一基底 $\{(e_\mu)^a\}$ 使 $(e_0)^a = t^a$]；② 证明类时超曲面上每点都有类时切矢；③ 由以上两点证明本命题。

证明 ① 设 t^a 为类时矢量，选一组正交归一基 $\{(e_\mu)^a\}$ 使得 $(e_0)^a = t^a$，则 g_{ab} 在这组基下被对角化且 $g_{00} = g_{ab}(e_0)^a(e_0)^b < 0$，由惯性定理知 $g_{11}, g_{22}, g_{33} > 0$。设 v^a 与 t^a 正交，则

$$\begin{aligned} g_{ab}t^a v^b &= g_{00}v^0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

于是

$$g_{ab}v^a v^b = \sum_{i=1}^{3} g_{ii}\left(v^i\right)^2 > 0$$

② 根据定义，类时超曲面的每一点的法矢类空。在超曲面任意一点 p 的切空间 W_p 取一组正交基，则连同法矢一起得到 M 上 p 点切空间 V_p 的一组正交基，其中类空法矢不属于 W_p，根据惯性定理这组基中有一个类时矢量，且它属于 W_p。

③ 若 $\phi[S]$ 为类空超曲面，则其切矢与类时法矢正交，由 ① 知所有切矢类空，矛盾；若 $\phi[S]$ 为类时超曲面，由 ② 知每一点都有类时切矢，矛盾。故 $\phi[S]$ 为类光超曲面。

第五章　微分形式及其积分

习题

1. 在定理 5-1-3 中补证 $\{(e^1)_a\wedge(e^2)_b,(e^2)_a\wedge(e^3)_b,(e^3)_a\wedge(e^1)_b\}$ 线性独立。

证明 设 $\alpha\,(e^1)_a\wedge(e^2)_b+\beta\,(e^2)_a\wedge(e^3)_b+\gamma\,(e^3)_a\wedge(e^1)_b=0$，将 $\wedge$ 展开，有

$$\begin{aligned}&\alpha\left(e^1\right)_a\wedge\left(e^2\right)_b+\beta\left(e^2\right)_a\wedge\left(e^3\right)_b+\gamma\left(e^3\right)_a\wedge\left(e^1\right)_b\\=&\,\alpha\left(\left(e^1\right)_a\left(e^2\right)_b-\left(e^2\right)_a\left(e^1\right)_b\right)+\beta\left(\left(e^2\right)_a\left(e^3\right)_b-\left(e^3\right)_a\left(e^2\right)_b\right)\\&+\gamma\left(\left(e^3\right)_a\left(e^1\right)_b-\left(e^1\right)_a\left(e^3\right)_b\right)\\=&\,0,\end{aligned}$$

而 $\{(e^i)_a\,(e^j)_b\}$ 是 $\mathscr{F}(0,2)$ 的一组基，故必有 $\alpha=\beta=\gamma=0$。

2. 设 V 为矢量空间，$\{(e^1)_a,(e^2)_a,(e^3)_a,(e^4)_a\}$ 是 V^* 的基底，写出 $\omega_a\in\Lambda(1)$，$\omega_{abc}\in\Lambda(3)$ 和 $\omega_{abcd}\in\Lambda(4)$ 在此基底的展开式，说明展开系数（如 ω_{12}）的定义。

解 1. $\omega_a=\omega_1\,(e^1)_a+\omega_2\,(e^2)_a+\omega_3\,(e^3)_a+\omega_4\,(e^4)_a$，其中 $\omega_\mu=\omega_a\,(e_\mu)^a$。

2. $\omega_{abc}=\omega_{123}\,(e^1)_a\wedge(e^2)_b\wedge(e^3)_c+\omega_{124}\,(e^1)_a\wedge(e^2)_b\wedge(e^4)_c+\omega_{134}\,(e^1)_a\wedge(e^3)_b\wedge(e^4)_c+\omega_{234}\,(e^2)_a\wedge(e^3)_b\wedge(e^4)_c$，其中 $\omega_{\mu\nu\sigma}=\omega_{abc}\,(e_\mu)^a\,(e_\nu)^b\,(e_\sigma)_c$。

3. $\omega_{abcd}=\omega_{1234}\,(e^1)_a\wedge(e^2)_b\wedge(e^3)_c\wedge(e^4)_d$，其中 $\omega_{1234}=\omega_{abcd}\,(e_1)^a\,(e_2)^b\,(e_3)^c\,(e_4)^d$。

3. 用数学归纳法证明 $(\omega^1)_{a_1}\wedge\cdots\wedge\left(\omega^l\right)_{a_l}=l!\,(\omega^1)_{[a_1}\cdots\left(\omega^l\right)_{a_l]}$，其中 $(\omega^1)_{a_1},\cdots,\left(\omega^l\right)_{a_l}$ 是任意对偶矢量。

证明 1. $l=1$ 时 trivial；$l=2$ 时，按照定义，

$$\left(\omega^1\right)_{a_1}\wedge\left(\omega^2\right)_{a_2}=2\left(\omega^1\right)_{[a_1}\left(\omega^2\right)_{a_2]};$$

2. 设 $l=k$ 时，$(\omega^1)_{a_1}\wedge\cdots\wedge\left(\omega^k\right)_{a_k}=k!\,(\omega^1)_{[a_1}\cdots\left(\omega^k\right)_{a_k]}$，则

$$\begin{aligned}\left(\left(\omega^1\right)_{a_1}\wedge\cdots\wedge\left(\omega^k\right)_{a_k}\right)\wedge\left(\omega^{k+1}\right)_{a_{k+1}}&=\frac{(k+1)!}{k!}\left(l!\left(\omega^1\right)_{[[a_1}\cdots\left(\omega^k\right)_{a_k]}\right)\left(\omega^{k+1}\right)_{a_{k+1}]}\\&=(k+1)!\left(\omega^1\right)_{[a_1}\cdots\left(\omega^k\right)_{a_k}\left(\omega^{k+1}\right)_{a_{k+1}]}.\end{aligned}$$

综上所述，$\forall l \in \mathbb{N}^+$，$(\omega^1)_{a_1} \wedge \cdots \wedge \left(\omega^l\right)_{a_l} = l!\,(\omega^1)_{[a_1} \cdots \left(\omega^l\right)_{a_l]}$。

4. 试证定理 5-1-4。

证明 定理 5-1-4 为

Thm 设 $\omega_{a_1\cdots a_l} = \sum\limits_C \omega_{\mu_1\cdots\mu_l} \left(\mathrm{d}x^{\mu_1}\right)_{a_1} \wedge \cdots \wedge \left(\mathrm{d}x^{\mu_l}\right)_{a_l}$，则

$$(\mathrm{d}\omega)_{ba_1\cdots a_l} = \sum_C \left(\mathrm{d}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}\right)_b \wedge \left(\mathrm{d}x^{\mu_1}\right)_{a_1} \wedge \cdots \wedge \left(\mathrm{d}x^{\mu_l}\right)_{a_l}.$$

Prf 按照定义，将导数算符选为 ∂_a，有

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\omega)_{ba_1\cdots a_l} &= (l+1)\,\partial_{[b}\omega_{a_1\cdots a_l]} \\
&= (l+1)\sum_C \partial_{[b}\left(\omega_{\mu_1\cdots\mu_l} l!\left(\mathrm{d}x^{\mu_1}\right)_{[a_1}\cdots\left(\mathrm{d}x^{\mu_l}\right)_{a_l]]}\right) \\
&= (l+1)!\sum_C \left(\partial_{[b}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}\right)\left(\mathrm{d}x^{\mu_1}\right)_{a_1}\cdots\left(\mathrm{d}x^{\mu_l}\right)_{a_l]} \\
&= (l+1)!\sum_C \left(\mathrm{d}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}\right)_{[b}\left(\mathrm{d}x^{\mu_1}\right)_{a_1}\cdots\left(\mathrm{d}x^{\mu_l}\right)_{a_l]} \\
&= \sum_C \left(\mathrm{d}\omega_{\mu_1\cdots\mu_l}\right)_b \wedge \left(\mathrm{d}x^{\mu_1}\right)_{a_1} \wedge \cdots \wedge \left(\mathrm{d}x^{\mu_l}\right)_{a_l}.
\end{aligned}$$

5. 设 $\boldsymbol{\omega}$ 是 1 形式场，u, v 是矢量场，试证 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(u,v) = u(\boldsymbol{\omega}(v)) - v(\boldsymbol{\omega}(u)) - \boldsymbol{\omega}([u,v])$。等式左边代表 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$ 对 u, v 的作用结果，即 $(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega})_{ab}\, u^a v^b$。

证明

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(u,v) &= u^a v^b \left(\nabla_a \omega_b - \nabla_b \omega_a\right) \\
&= u^a \nabla_a \left(v^b \omega_b\right) - u^a \omega_b \nabla_a v^b - v^b \nabla_a \left(u^a \omega_a\right) + v^b \omega_a \nabla_b u^a \\
&= u(\boldsymbol{\omega}(v)) - v(\boldsymbol{\omega}(u)) - \boldsymbol{\omega}([u,v]).
\end{aligned}$$

6. 设 v^b 和 $\omega_{a_1\cdots a_l}$ 分别是流形 M 上的矢量场和 l 形式场，试证

(a) $\mathcal{L}_v \omega_{a_1\cdots a_l} = \mathrm{d}_{a_1}\left(v^b \omega_{ba_2\cdots a_l}\right) + (\mathrm{d}\omega)_{ba_1\cdots a_l} v^b$.
注：令 $\mu_{a_2\cdots a_l} \equiv v^b \omega_{ba_2\cdots a_l}$，则 $\mathrm{d}_{a_1}\mu_{a_2\cdots a_l}$ 是指 $(\mathrm{d}\mu)_{a_1a_2\cdots a_l}$。

(b) $\mathcal{L}_v\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\mathcal{L}_v \boldsymbol{\omega}$（这本身就是一个很有用的命题）。

提示：

(1) 证 (a) 时可先证 $l = 2$ 时的特例，找到感觉后不难推广至一般情况。

(2) 利用 (a) 的结果将使 (b) 的证明变得十分简单。

证明 (a) 对于 $l = 2$ 的情况，由式 (4-2-8)，左边等于

$$\mathcal{L}_v \omega_{a_1a_2} = v^b \nabla_b \omega_{a_1a_2} + \omega_{a_1b} \nabla_{a_2} v^b + \omega_{ba_2} \nabla_{a_1} v^b$$

而右边第一项展开为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{a_1}\left(v^b\omega_{ba_2}\right) &= 2\nabla_{[a_1}\left(v^b\omega_{|b|a_2]}\right) \\
&= \nabla_{a_1}\left(v^b\omega_{ba_2}\right) - \nabla_{a_2}\left(v^b\omega_{ba_1}\right) \\
&= {\color{red}v^b\nabla_{a_1}\omega_{ba_2}} + \omega_{ba_2}\nabla_{a_1}v^b - {\color{blue}v^b\nabla_{a_2}\omega_{ba_1}} - \omega_{ba_1}\nabla_{a_2}v^b,
\end{aligned}$$

右边第二项为

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\omega)_{ba_1a_2}v^b &= 3v^b\nabla_{[b}\omega_{a_1a_2]} \\
&= \frac{1}{2}v^b\left(\nabla_b\omega_{a_1a_2} + \nabla_{a_1}\omega_{a_2b} + \nabla_{a_2}\omega_{ba_1} - \nabla_b\omega_{a_2a_1} - \nabla_{a_1}\omega_{ba_2} - \nabla_{a_2}\omega_{a_1b}\right) \\
&= v^b\left(\nabla_b\omega_{a_1a_2} + {\color{red}\nabla_{a_1}\omega_{a_2b}} + {\color{blue}\nabla_{a_2}\omega_{ba_1}}\right)
\end{aligned}$$

可以看到，红色项和蓝色项分别消去，余下的项与左边相等。

对于一般情况，左边为

$$\mathcal{L}_v\omega_{a_1\cdots a_l} = v^b\nabla_b\omega_{a_1\cdots a_l} + \sum_i \omega_{a_1\cdots b\cdots a_l}\nabla_{a_i}v^b$$

右边第一项为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{a_1}\left(v^b\omega_{ba_2\cdots a_l}\right) &= l\nabla_{[a_1}\left(v^b\omega_{|b|a_2\cdots a_l]}\right) \\
&= \frac{1}{(l-1)!}\sum_\pi \delta_\pi\nabla_{a_{\pi_1}}\left(v^b\omega_{ba_{\pi_2}\cdots a_{\pi_l}}\right) \\
&= \frac{1}{(l-1)!}\sum_i\sum_\sigma(-1)^{i-1}\delta_\sigma\nabla_{a_i}\left(v^b\omega_{ba_{\sigma_1}\cdots a_{\sigma_l}}\right) \\
&= \sum_i(-1)^{i-1}\nabla_{a_i}\left(v^b\omega_{b[a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_l]}\right) \\
&= \sum_i(-1)^{i-1}\nabla_{a_i}\left(v^b\omega_{[ba_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_l]}\right) \\
&= \sum_i\nabla_{a_i}\left(v^b\omega_{[a_1\cdots a_{i-1}ba_{i+1}\cdots a_l]}\right) \\
&= \sum_i\nabla_{a_i}\left(v^b\omega_{a_1\cdots b\cdots a_l}\right) \\
&= {\color{blue}v^b\sum_i\nabla_{a_i}\omega_{a_1\cdots b\cdots a_l}} + \omega_{a_1\cdots b\cdots a_l}\sum_i\nabla_{a_i}v^b
\end{aligned}$$

其中 π 是 $1,2,\cdots,l$ 的排列，σ 是 $1,\cdots i-1,i+1,\cdots,l$ 的排列。而右边第二项为

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\omega)_{ba_1\cdots a_l}v^b &= (l+1)v^b\nabla_{[b}\omega_{a_1\cdots a_l]} \\
&= \frac{1}{l!}v^b\sum_\pi\delta_\pi\nabla_{\pi_1}\omega_{\pi_2\cdots\pi_{l+1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{l!} v^b \sum_{\sigma} \delta_\sigma \nabla_b \omega_{a_{\sigma_1} \cdots a_{\sigma_l}} + \frac{1}{l!} v^b \sum_i \sum_\rho -\delta_\rho \nabla_{a_i} \omega_{a_{\rho_1} \cdots b \cdots a_{\rho_{l-1}}} \\
&= v^b \nabla_b \omega_{[a_1 \cdots a_l]} - v^b \sum_i \nabla_{a_i} \omega_{[a_1 \cdots b \cdots a_l]} \\
&= v^b \nabla_b \omega_{a_1 \cdots a_l} - v^b \sum_i \nabla_{a_i} \omega_{a_1 \cdots b \cdots a_l}
\end{aligned}
$$

其中 π 是 $b, a_1, \cdots a_l$ 的任意排序,σ 是 $1, 2, \cdots, l$ 的排序,ρ 是 $1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, l$ 的排序。可以看到，蓝色的项相消，余下的和左边相等，证毕。

(b) 由 (a)，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_v (\mathrm{d}\omega)_{a_1 \cdots a_{l+1}} &= \mathrm{d}_{a_1} \left(v^b (\mathrm{d}\omega)_{b a_2 \cdots a_{l+1}} \right) + (\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega))_{b a_1 \cdots a_{l+1}} v^b \\
&= \mathrm{d}_{a_1} \left(v^b (\mathrm{d}\omega)_{b a_2 \cdots a_{l+1}} \right), \\
\mathrm{d}(\mathcal{L}_v \omega)_{a_1 \cdots a_{l+1}} &= \mathrm{d}_{a_1} \left(\mathrm{d}_{a_2} v^b \omega_{b a_3 \cdots a_{l+1}} + (\mathrm{d}\omega)_{b a_2 \cdots a_{l+1}} v^b \right) \\
&= \mathrm{d}_{a_1} \left((\mathrm{d}\omega)_{b a_2 \cdots a_{l+1}} v^b \right),
\end{aligned}
$$

故

$$
\mathcal{L}_v (\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}) = \mathrm{d}(\mathcal{L}_v \boldsymbol{\omega}).
$$

7. 设 O 是 n 维流形 M 上的坐标系 $\{x^\mu\}$ 的坐标域（且 O 同胚于 $\mathbb{R}^n$），ω_a 是 O 上的 1 形式场，试证

$$
\partial \omega_\mu / \partial x^\nu = \partial \omega_\nu / \partial x^\mu \ (\mu, \nu = 1, \cdots n) \text{当且仅当存在} f\colon O \to \mathbb{R} \text{使} \nabla_a f = \omega_a.
$$

提示：仿照 §5.1 推论 5-1-6 的证明。

证明 设 $\omega_a = \omega_\mu (\mathrm{d}x^\mu)_a$，则

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}\omega)_{ab} &= (\mathrm{d}\omega_\mu)_a \wedge (\mathrm{d}x^\mu)_b \\
&= \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} (\mathrm{d}x^\nu)_a \wedge (\mathrm{d}x^\mu)_b \\
&= \left(\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} \right) (\mathrm{d}x^\nu)_a (\mathrm{d}x^\mu)_b .
\end{aligned}
$$

1. 若 $\exists f \quad \text{s.t.} \quad \omega_a = \nabla_a f = (\mathrm{d}f)_a$，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$，于是知

$$
\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} = 0.
$$

2. 若 $\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} = 0$，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0$，$\boldsymbol{\omega}$ 是闭的，而 O 同胚于 $\mathbb{R}^n$，由于上同调群是拓扑不变量，故 $H^1(O) = 0$，O 上的闭形式必恰当，故 $\exists f\colon O \to \mathbb{R}^n \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}f$.

8. 设 $\{x,y,z\}$ 和 $\{r,\theta,\phi\}$ 分别为 3 维欧氏空间的笛卡尔坐标系和球坐标系，写出 $\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi$ 用 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 的表达式。

解 球坐标与笛卡尔系的变换关系为：

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi, \\ y = r\sin\theta\sin\phi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \\ &= \sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \\ &= \sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial z}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \\ &= \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \phi}\right. \\ &\quad \left. -\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \phi} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi \\ &= \big(0 + r^2\sin^3\theta\sin^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\phi + r^2\sin^3\theta\cos^2\phi \\ &\quad + r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\phi + 0\big)\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi \\ &= r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi\,, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\,(x^2+y^2)}}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\,. \end{aligned}$$

9. 连通流形 M 配以洛伦兹号差的度规场 g_{ab} 叫**时空**（spacetime）。设 F_{ab} 是任意 4 维时空的 2 形式场（第 6 章将看到电磁场张量 F_{ab} 就是一个 2 形式场），试证

$$\frac{1}{2}\left(F_{ac}F_b{}^c + {}^*F_{ac}{}^*F_b{}^c\right) = F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd},$$

其中 ${}^*F_{ac} \equiv ({}^*F)_{ac}$，${}^*F_b{}^c = g^{ac}{}^*F_{ba}$（此式对研究电磁场很有帮助）。

证明 按照定义，

$$^*F_{ab} = \frac{1}{2}F^{cd}\varepsilon_{cdab}$$

故

$$\begin{aligned}
^*F_{ac}\,^*F_b{}^c &= g^{cd*}F_{ac}\,^*F_{bd} \\
&= \frac{1}{4}g^{cd}F^{ef}\varepsilon_{efac}F^{gh}\varepsilon_{ghbd} \\
&= \frac{1}{4}F^{ef}F^{gh}\varepsilon_{efac}\varepsilon_{ghb}{}^c \\
&= \frac{1}{4}g_{bd}F^{ef}F_{gh}\varepsilon^{cghd}\varepsilon_{cefa} \\
&= \frac{1}{4}g_{bd}F^{ef}F_{gh}(-6)\delta^{[g}{}_e\delta^h{}_f\delta^{d]}{}_a \\
&= -\frac{1}{4}g_{bd}F^{ef}F_{gh}\left(\delta^g{}_e\delta^h{}_f\delta^d{}_a + \delta^d{}_e\delta^g{}_f\delta^h{}_a + \delta^h{}_e\delta^d{}_f\delta^g{}_a\right. \\
&\quad \left.-\delta^g{}_e\delta^d{}_f\delta^h{}_a - \delta^h{}_e\delta^g{}_f\delta^d{}_a - \delta^d{}_e\delta^h{}_f\delta^g{}_a\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(-g_{ab}F^{ef}F_{ef} - F_b{}^fF_{fa} - F^e{}_bF_{ae}\right. \\
&\quad \left.+ F^e{}_bF_{ea} + g_{ba}F^{ef}F_{fe} + F_b{}^fF_{af}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(-2g_{ab}F^{cd}F_{cd} + 4F_{ac}F_b{}^c\right),
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(F_{ac}F_b{}^c + {}^*F_{ac}\,^*F_b{}^c\right) &= \frac{1}{2}\left(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{2}g_{ab}F^{cd}F_{cd} + F_{ac}F_b{}^c\right) \\
&= F_{ac}F^{ac} - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}.
\end{aligned}$$

10. 试证 $\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} \equiv \pm n^b\varepsilon_{ba_1\cdots a_{n-1}}$ 是 ∂N 上与诱导度规场 h_{ab} 相适配的体元。

证明 需要证明的是

$$\hat{\varepsilon}^{a_1\cdots a_{n-1}}\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} = (-1)^{\hat{s}}(n-1)!$$

根据定义展开：

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}^{a_1\cdots a_{n-1}}\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} &= h^{a_1b_1}\cdots h^{a_{n-1}b_{n-1}}\hat{\varepsilon}_{b_1\cdots b_{n-1}}\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} \\
&= h^{a_1b_1}\cdots h^{a_{n-1}b_{n-1}}n^c\varepsilon_{cb_1\cdots b_{n-1}}n^d\varepsilon_{da_1\cdots a_{n-1}}
\end{aligned}$$

这里要明确一下 h^{ab} 的含义。本来 $h_{ab} \in \mathscr{F}_{\partial N}(0,2)$ 作为诱导度规，是 ∂N 上的张量场，在每点的值是一个 W_q 到 W_q^* 的映射，而 h^{ab} 在每一点的值自然是其逆映射。然而，在上述计算中，第二行中把 $\hat{\varepsilon}$ 展开实际上是作为 N 上的 $n-1$ 形式看待，它在 p 点的值是 V_p 上的张量，而两个不同矢量空间上的张量显然没有缩并这种操作，所以这里的 h_{ab} 是选读 4-4-3 中的 $\bar{h}_{ab} = g_{ab} \mp n_a n_b \in \mathscr{F}_N 0,2$，它作用在 W_p 中的元素的结

果与 h_{ab} 相同，而作用在补空间 $V_p - W_p$ 中的元素结果为零，所以当我们把 W_p 视为 V_p 的子空间时，就用 $\bar{h}_{ab}$ 来代替 h_{ab} 来计算。而 h^{ab} 就解释为 $g^{ac}g^{bd}\bar{h}_{cd} = g^{ab} \mp n^a n^b$ ，事实上，这样理解的 $h^{ab}\colon \mathscr{F}_N(1,0) \to \mathscr{F}_N(0,1)$ 和 $\bar{h}_{ab}\colon \mathscr{F}_N(1,0) \to \mathscr{F}_N(0,1)$ 的复合为

$$\begin{aligned}\bar{\delta}^a{}_b &= (g^{ac} \mp n^a n^c)\,(g_{cb} \mp n_c n_b)\\ &= \delta^a{}_b \mp n^a n_b \mp n^a n_b \pm n^a n_b\\ &= \delta^a{}_b \mp n^a n_b,\end{aligned}$$

可以验证上面这个张量 $\bar{\delta}^a{}_b\colon \mathscr{F}_N(1,0) \to \mathscr{F}_N(0,1)$ 在 $\mathscr{F}_{\partial N}(1,0)$ 上的限制 (restriction) 就是 $\mathscr{F}_{\partial N}(1,0)$ 上的恒等映射,而在 $\mathscr{F}_N(1,0) - \mathscr{F}_{\partial N}(1,0)$ 上的限制为零,故用 $g^{ac}g^{bd}\bar{h}_{bd}$ 代替 h^{ab} 是没有问题的。

于是

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}^{a_1\cdots a_{n-1}}\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}} &= h^{a_1b_1}\cdots h^{a_{n-1}b_{n-1}} n^c \varepsilon_{cb_1\cdots b_{n-1}} n^d \varepsilon_{da_1\cdots a_{n-1}}\\ &= g^{a_1c_1}g^{b_1d_1}\cdots g^{a_{n-1}c_{n-1}}g^{b_{n-1}d_{n-1}}\left(g_{c_1d_1} \mp n_{c_1}n_{d_1}\right)\cdots\\ &\quad\left(g_{c_{n-1}d_{n-1}} \mp n_{c_{n-1}}n_{d_{n-1}}\right) n^c \varepsilon_{cb_1\cdots b_{n-1}} n^d \varepsilon_{da_1\cdots a_{n-1}},\end{aligned}$$

将中间 $\left(g_{c_1d_1} \mp n_{c_1}n_{d_1}\right)\cdots\left(g_{c_{n-1}d_{n-1}} \mp n_{c_{n-1}}n_{d_{n-1}}\right)$ 展开，可以证明含 $n_{c_i}n_{d_i}$ 的项全为零，因为

$$\begin{aligned}\cdots g^{a_ic_i}g^{b_id_i}\cdots n_{c_i}n_{d_i}\cdots n^c\varepsilon_{c\cdots b_i\cdots}n^d\varepsilon_{d\cdots a_i\cdots} &= \cdots n^{a_i}n^d\varepsilon_{d\cdots a_i\cdots}n^{b_i}n^c\varepsilon_{c\cdots b_i\cdots}\\ &= \cdots n^{(a_i}n^{d)}\varepsilon_{d\cdots a_i\cdots}n^{(b_i}n^{c)}\varepsilon_{c\cdots b_i\cdots}\\ &= 0,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&\hat{\varepsilon}^{a_1\cdots a_{n-1}}\hat{\varepsilon}_{a_1\cdots a_{n-1}}\\ &= g^{a_1c_1}g^{b_1d_1}\cdots g^{a_{n-1}c_{n-1}}g^{b_{n-1}d_{n-1}}g_{c_1d_1}\cdots g_{c_{n-1}d_{n-1}}n^c\varepsilon_{cb_1\cdots b_{n-1}}n^d\varepsilon_{da_1\cdots a_{n-1}}\\ &= g^{a_1b_1}\cdots g^{a_{n-1}b_{n-1}}n^c\varepsilon_{cb_1\cdots b_{n-1}}n^d\varepsilon_{da_1\cdots a_{n-1}}\\ &= n_c n^d \varepsilon^{ca_1\cdots a_{n-1}}\varepsilon_{da_1\cdots a_{n-1}}\\ &= n_c n^d\,(-1)^s\,(n-1)!\delta^c{}_d\\ &= (-1)^s(n-1)!n_c n^c,\end{aligned}$$

在 V_p 中取正交归一基底 $\left\{e_\mu{}^a\right\}$ ，使得 $e_0{}^a = n^a$ ，易知

$$\hat{s} = \begin{cases} s, & \text{if} \quad n^a n_a = 1;\\ s-1, & \text{if} \quad n^a n_a = -1.\end{cases}$$

于是 $(-1)^s n^c n_c = (-1)^{\hat{s}}$，证毕。

11. 试证定理 5-6-1 和 5-6-2。

证明 1. 定理 5-6-1 如下

Thm $^{**}\boldsymbol{\omega} = (-1)^{s+l(n-l)}\boldsymbol{\omega}$.

Prf

$$\begin{aligned}
{}^{**}\omega_{a_1\cdots a_l} &= \frac{1}{(n-l)!}{}^{*}\omega_{b_1\cdots b_{n-l}}\varepsilon^{b_1\cdots b_{n-l}}{}_{a_1\cdots a_l} \\
&= \frac{1}{(n-l)!}\frac{1}{l!}\omega_{c_1\cdots c_l}\varepsilon^{c_1\cdots c_l}{}_{b_1\cdots b_{n-l}}\varepsilon^{b_1\cdots b_{n-l}}{}_{a_1\cdots a_l} \\
&= \frac{1}{(n-l)!}\frac{1}{l!}(-1)^{l(n-l)}\varepsilon^{b_1\cdots b_{n-l}c_1\cdots c_l}\varepsilon_{b_1\cdots b_{n-l}a_1\cdots a_l}\omega_{c_1\cdots c_l} \\
&= (-1)^{s+l(n-l)}\delta^{[c_1}{}_{a_1}\cdots\delta^{c_l]}{}_{a_l}\omega_{[c_1\cdots c_l]} \\
&= (-1)^{s+l(n-l)}\omega_{a_1\cdots a_l}.
\end{aligned}$$

2. 定理 5-6-2 如下

Thm 设 f 和 $\mathbf{A}$ 是 3 维欧氏空间的函数和矢量场，则

$$\operatorname{grad} f = \mathrm{d}f\,, \quad \operatorname{curl}\mathbf{A} = {}^{*}\mathrm{d}\boldsymbol{A}\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{A} = {}^{*}\mathrm{d}({}^{*}\boldsymbol{A})\,.$$

Prf

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}f)^a &= \frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\mathrm{d}x^i\right)^a \\
({}^{*}\mathrm{d}A)^k &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\left(\mathrm{d}A\right)_{ij} \\
&= \varepsilon^{ijk}A_{[j,i]} \\
&= \varepsilon^{ijk}A_{j,i} \\
{}^{*}\mathrm{d}({}^{*}\boldsymbol{A}) &= \frac{1}{6}\varepsilon^{ijk}\left(\mathrm{d}({}^{*}A)\right)_{ijk} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\left({}^{*}A\right)_{[jk,i]} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial_i\left(A^l\varepsilon_{ljk}\right) \\
&= \delta^i{}_l A^l{}_{,i} \\
&= A^i{}_{,i}
\end{aligned}$$

12. 设 x, y, z 是 3 维欧氏空间的笛卡尔坐标，试证

(a) $^{*}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$；

(b) $^{*}(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = 1$。

证明 (a)

$$({}^{*}\mathrm{d}x)_{ab} = (\mathrm{d}x)^c\,(\mathrm{d}x)_c \wedge (\mathrm{d}y)_a \wedge (\mathrm{d}z)_b$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathrm{d}x)^c \left((\mathrm{d}x)_c (\mathrm{d}y)_a (\mathrm{d}z)_b - (\mathrm{d}x)_c (\mathrm{d}y)_b (\mathrm{d}z)_a + \cdots \right) \\
&= (\mathrm{d}y)_a (\mathrm{d}z)_b - (\mathrm{d}y)_b (\mathrm{d}z)_a \\
&= (\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)_{ab} .
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
{}^*(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) &= \frac{1}{6} (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)^{abc} (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)_{abc} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

13. 设 $\{r, \theta, \phi\}$ 是 3 维欧氏空间的球坐标系，试证 ${}^*\mathrm{d}r = (r^2 \sin\theta)\, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi$。

证明 由第 2 章 19(a) 知

$$
|g| = g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\phi\phi} = r^4 \sin^2\theta,
$$

故体元在球坐标系下为

$$
\varepsilon_{abc} = \sqrt{|g|}\, (\mathrm{d}r)_a \wedge (\mathrm{d}\theta)_b \wedge (\mathrm{d}\phi)_c = r^2 \sin\theta\, (\mathrm{d}r)_a \wedge (\mathrm{d}\theta)_b \wedge (\mathrm{d}\phi)_c
$$

则

$$
\begin{aligned}
\left({}^*\mathrm{d}r\right)_{ab} &= (\mathrm{d}r)^c \varepsilon_{cab} \\
&= r^2 \sin\theta\, (\mathrm{d}r)^c \left((\mathrm{d}r)_c (\mathrm{d}\theta)_a (\mathrm{d}\phi)_b - (\mathrm{d}r)_c (\mathrm{d}\theta)_b (\mathrm{d}\phi)_a + \cdots \right) \\
&= r^2 \sin\theta g_{rr} (\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi)_{ab} \\
&= r^2 \sin\theta\, (\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi)_{ab} .
\end{aligned}
$$

14. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的矢量场，$\boldsymbol{\nabla}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上与欧氏度规相适配的导数算符，试证

$$
\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \mathbf{A} + (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B})\, \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \mathbf{B} - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathbf{B}.
$$

证明

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{abc} \partial_a \left(\varepsilon_{deb} A^d B^e \right) &= -\varepsilon^{bac} \varepsilon_{bde} \partial_a \left(A^d B^e \right) \\
&= 2 \delta^{[a}{}_d \delta^{c]}{}_e \left(A^d \partial_a B^e + B^e \partial_a A^d \right) \\
&= A^a \partial_a B^c - A^c \partial_a B^a + B^c \partial_a A^a - B^a \partial_a A^c .
\end{aligned}
$$

15. 用微分形式证明 3 维欧氏空间场论中并不易证的下列熟知命题：

(a) 无旋矢量场必可表为梯度；

(b) 无散矢量场必可表为旋度（见 §5.6 末）。

证明 (a) 设 $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = 0$ ，则 ${}^*\mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0$，于是 $\boldsymbol{A}$ 为闭形式，而 $\mathbb{R}^3$ 单连通，故闭 1 形式必恰当，于是存在 f 使得 $\boldsymbol{A} = \mathrm{d}f$ ，即 $\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} f$。

(b) 设 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0$，则 ${}^*\mathrm{d}({}^*\boldsymbol{B})=0$，于是 ${}^*\boldsymbol{B}$ 是闭 2 形式，在 $\mathbb{R}^3$ 中必恰当，于是存在 1 形式 $\boldsymbol{C}$ 使得 ${}^*\boldsymbol{B}=\mathrm{d}\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{B}={}^*\mathrm{d}\boldsymbol{C}$，$\mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{C}$。

16. 设 ∇_a 是广义黎曼空间 (M,g_{ab}) 上的适配导数算符（即 $\nabla_a g_{bc}=0$），$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是适配体元（即 $\nabla_a\varepsilon_{b_1\cdots b_n}=0$），$v^a$ 是 M 上的矢量场，$v_a\equiv g_{ab}v^b$ 是 v^a 相应的 1 形式场，${}^*\boldsymbol{v}$ 是 v_a 的对偶形式场，试证 $(\nabla_a v^a)\,\boldsymbol{\varepsilon}=\mathrm{d}^*\boldsymbol{v}$。注：这个结论可做如下推广：设 $F_{a_1\cdots a_k}$ 是 k 形式场 $(k\leqslant n)$，简记作 $\boldsymbol{F}$，把 $k-1$ 形式场 $\nabla^{a_k}F_{a_1\cdots a_k}$ 记作 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}$，则 ${}^*(\operatorname{div}\boldsymbol{F})=\mathrm{d}^*\boldsymbol{F}$。电磁场的麦氏方程 [式 (12-6-2)] 就是一例。

证明 由第 6 题 (a) 知，

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}^*v)_{a_1\cdots a_n}&=\mathrm{d}_{a_1}\left(v^b\varepsilon_{ba_2\cdots a_n}\right)\\
&=\mathcal{L}_v\varepsilon_{a_1\cdots a_n}\\
&=\cancel{v^b\nabla_b\varepsilon_{a_1\cdots a_n}}+\sum_i\varepsilon_{a_1\cdots b\cdots a_n}\nabla_{a_i}v^b
\end{aligned}
$$

设 n 形式 $\mathrm{d}^*\boldsymbol{v}=h\boldsymbol{\varepsilon}$，则 $(\mathrm{d}^*v)_{a_1\cdots a_n}\varepsilon^{a_1\cdots a_n}=(-1)^s n!h$，另一方面，

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\sum_i\varepsilon_{a_1\cdots b\cdots a_n}\nabla_{a_i}v^b&=\sum_i\varepsilon^{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{a_1\cdots b\cdots a_n}\nabla_{a_i}v^b\\
&=\sum_i(-1)^s(n-1)!\delta^{a_i}{}_b\nabla_{a_i}v^b\\
&=(-1)^s n!\nabla_b v^b,
\end{aligned}
$$

于是 $h=\nabla_b v^b$，即 $\mathrm{d}^*\boldsymbol{v}=\left(\nabla_b v^b\right)\boldsymbol{\varepsilon}$。

17. 试证由式 (5-7-2) 定义的 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\tau}$ 正是 §3.1 定义的克氏符 $\Gamma^c{}_{ab}$ 在式 (5-7-2) 涉及的坐标基底的分量。

证明 这个……和 第三章第 4 题 重了吧……

18. 用正交归一标架分别求第 3 章习题 14 ∼ 16 所给度规的曲率张量的全部标架分量，并验证所得结果与用坐标基底法求得的曲率张量相同。为与 $R_{abc}{}^d$ 的坐标分量 $R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho$ 区别，在求得 $R_{abc}{}^d$ 的全部标架分量后宜改用符号 $R_{(\mu)(\nu)(\sigma)}{}^{(\rho)}$ 代表标架分量。

解 1. 第三章第 14 题：

Prob 求度规 $\mathrm{d}s^2=\Omega^2(t,x)\left(-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2\right)$ 的黎曼张量在 $\{t,x\}$ 系的全部分量（在结果中以 $\dot\Omega$ 和 Ω' 分别代表函数 Ω 对 t 和 x 的偏导数）。

Solv 用式 (5-7-20) 计算。

(a) 选取标架：由于是洛伦兹度规，设有正交归一基底 $\{(e_\mu)^a\}$，

$$
\begin{aligned}
g_{ab}&=-\Omega^2(t,x)\,(\mathrm{d}t)_a\,(\mathrm{d}t)_b+\Omega^2(t,x)\,(\mathrm{d}x)_a\,(\mathrm{d}x)_b\\
&=\eta_{\mu\nu}\,(e^\mu)_a\,(e^\nu)_b
\end{aligned}
$$

$$= -\left(e^0\right)_a\left(e^0\right)_b + \left(e^1\right)_a\left(e^1\right)_b,$$

最简单的选择是

$$\left(e^0\right)_a = \Omega(t,x)\,(\mathrm{d}t)_a\,, \quad \left(e^1\right)_a = \Omega(t,x)\,(\mathrm{d}x)_a\,,$$

于是

$$(e_0)^a = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a, \quad (e_1)^a = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a.$$

并有

$$(e_0)_a = \eta_{0\nu}\,(e^\nu)_a = -\Omega\,(\mathrm{d}t)_a\,, \quad (e_1)_a = \eta_{1\nu}\,(e^\nu)_a = \Omega\,(\mathrm{d}x)_a$$

(b) 计算联络 1 形式：由 (5-7-19)：

$$\Lambda_{\mu\nu\rho} \equiv \left[(e_\nu)_{\lambda,\tau} - (e_\nu)_{\tau,\lambda}\right](e_\mu)^\lambda\,(e_\rho)^\tau\,,$$

易知必有 $\lambda=\mu$，$\tau=\rho$，由于 $\mu\rho$ 反称，只需取 $\mu=0,\rho=1$ 的项计算：

$$\begin{aligned}
\Lambda_{001} &= \left[(e_0)_{0,1} - (e_0)_{1,0}\right](e_0)^0\,(e_1)^1 \\
&= \frac{1}{\Omega^2}\,(-\Omega' - 0) \\
&= -\frac{\Omega'}{\Omega^2} \\
\Lambda_{011} &= \left[(e_1)_{0,1} - (e_1)_{1,0}\right](e_0)^0\,(e_1)^1 \\
&= \frac{1}{\Omega^2}\left(0 - \dot{\Omega}\right) \\
&= -\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}
\end{aligned}$$

故所有非零项：

$$\Lambda_{001} = -\Lambda_{100} = -\frac{\Omega'}{\Omega^2}, \quad \Lambda_{011} = -\Lambda_{110} = -\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}$$

于是由式 (5-7-20)：

$$\omega_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{\mu\nu\rho} + \Lambda_{\rho\mu\nu} - \Lambda_{\nu\rho\mu}\right)$$

由 $\mu\nu$ 反称，只需取 $\mu=0,\nu=1$ ：

$$\begin{aligned}
\omega_{010} &= \frac{1}{2}\left(\Lambda_{010} + \Lambda_{001} - \Lambda_{100}\right) \\
&= -\frac{\Omega'}{\Omega^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{011} &= \frac{1}{2}\left(\Lambda_{011}+\Lambda_{101}-\Lambda_{110}\right)\\ &= -\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}\end{aligned}$$

于是所有非零项为

$$\omega_{010}=-\omega_{100}=-\frac{\Omega'}{\Omega^2},\quad \omega_{011}=-\omega_{101}=-\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}$$

故

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\omega}_{00}=0, && \boldsymbol{\omega}_{01}=-\frac{\Omega'}{\Omega^2}\,\mathrm{d}t-\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}\,\mathrm{d}x\,,\\ &\boldsymbol{\omega}_{10}=\frac{\Omega'}{\Omega^2}\,\mathrm{d}t+\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}\,\mathrm{d}x\,, && \boldsymbol{\omega}_{11}=0.\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}&{\boldsymbol{\omega}_0}^0=0, && {\boldsymbol{\omega}_0}^1=-\frac{\Omega'}{\Omega^2}\,\mathrm{d}t-\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}\,\mathrm{d}x\,,\\ &{\boldsymbol{\omega}_1}^0=-\frac{\Omega'}{\Omega^2}\,\mathrm{d}t-\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}\,\mathrm{d}x\,, && {\boldsymbol{\omega}_1}^1=0.\end{aligned}$$

(c) 计算曲率 2 形式。用嘉当第二结构方程：

$${\boldsymbol{R}_\mu}^\nu=\mathrm{d}{\boldsymbol{\omega}_\mu}^\nu+{\boldsymbol{\omega}_\mu}^\lambda\wedge{\boldsymbol{\omega}_\lambda}^\nu$$

联络 1 形式的外微分计算如下

$$\begin{aligned}\mathrm{d}{\boldsymbol{\omega}_0}^0&=0\\ \mathrm{d}{\boldsymbol{\omega}_0}^1&=\left(\frac{2\Omega'\dot{\Omega}-\Omega\dot{\Omega}'}{\Omega^3}\,\mathrm{d}t+\frac{2{\Omega'}^2-\Omega\Omega''}{\Omega^3}\,\mathrm{d}x\right)\wedge\mathrm{d}t\\ &\quad+\left(\frac{2\dot{\Omega}^2-\Omega\ddot{\Omega}}{\Omega^3}\,\mathrm{d}t+\frac{2\dot{\Omega}\Omega'-\Omega\dot{\Omega}'}{\Omega^3}\,\mathrm{d}x\right)\wedge\mathrm{d}x\\ &=\frac{2\left(\dot{\Omega}^2-{\Omega'}^2\right)+\Omega\left(\Omega''-\ddot{\Omega}\right)}{\Omega^3}\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\\ &=\frac{2\left(\dot{\Omega}^2-{\Omega'}^2\right)+\Omega\left(\Omega''-\ddot{\Omega}\right)}{\Omega^5}\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^1\\ \mathrm{d}{\boldsymbol{\omega}_1}^0&=\mathrm{d}{\boldsymbol{\omega}_0}^1\\ &=\frac{2\left(\dot{\Omega}^2-{\Omega'}^2\right)+\Omega\left(\Omega''-\ddot{\Omega}\right)}{\Omega^5}\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^1\\ \mathrm{d}{\boldsymbol{\omega}_1}^1&=0.\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_0{}^0 &= \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0{}^0 + \boldsymbol{\omega}_0{}^1 \wedge \boldsymbol{\omega}_1{}^0 \\
&= 0 \\
\boldsymbol{R}_0{}^1 &= \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0{}^1 + 0 \\
&= \frac{2\left(\dot{\Omega}^2 - \Omega'^2\right) + \Omega\left(\Omega'' - \ddot{\Omega}\right)}{\Omega^5}\boldsymbol{e}^0 \wedge \boldsymbol{e}^1 \\
\boldsymbol{R}_1{}^0 &= \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1{}^0 + 0 \\
&= \frac{2\left(\dot{\Omega}^2 - \Omega'^2\right) + \Omega\left(\Omega'' - \ddot{\Omega}\right)}{\Omega^5}\boldsymbol{e}^0 \wedge \boldsymbol{e}^1 \\
\boldsymbol{R}_1{}^1 &= \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1{}^1 + \boldsymbol{\omega}_1{}^0 \wedge \boldsymbol{\omega}_0{}^1 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

于是黎曼张量的非零标架分量为

$$
\begin{aligned}
&R_{(0)(1)(0)}{}^{(1)} = -R_{(1)(0)(0)}{}^{(1)} = R_{(0)(1)(1)}{}^{(0)} = -R_{(1)(0)(1)}{}^{(0)} \\
=& \frac{2\left(\dot{\Omega}^2 - \Omega'^2\right) + \Omega\left(\Omega'' - \ddot{\Omega}\right)}{\Omega^5}
\end{aligned}
$$

验证 由

$$
\begin{gathered}
\left(e^0\right)_a = \Omega(t,x)\,(\mathrm{d}t)_a\,, \quad \left(e^1\right)_a = \Omega(t,x)\,(\mathrm{d}x)_a\,, \\
\left(e_0\right)^a = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a, \quad \left(e_1\right)^a = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a
\end{gathered}
$$

知

$$
\begin{aligned}
R_{abc}{}^d &= R_{(\mu)(\nu)(\sigma)}{}^{(\rho)}\left(e^\mu\right)_a\left(e^\nu\right)_b\left(e^\sigma\right)_c\left(e_\rho\right)^d \\
&= \Omega^3 R_{(\mu)(\nu)(\sigma)}{}^{(\rho)}\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_a\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b\left(\mathrm{d}x^\sigma\right)_c\left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^d
\end{aligned}
$$

故应有

$$
R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho = \Omega^3 R_{(\mu)(\nu)(\sigma)}{}^{(\rho)}
$$

与第三章求得的

$$
R_{txx}{}^t = -R_{xtx}{}^t = R_{txt}{}^x = -R_{xtt}{}^x = \frac{\Omega\left(\Omega'' - \ddot{\Omega}\right) + \dot{\Omega}^2 - \Omega'^2}{\Omega^2}
$$

对比，知两种方法是一致的。

2. 第三章第 15 题：

Prob 求度规 $\mathrm{d}s^2 = z^{-1/2}\left(-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}z^2\right)+z\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\right)$ 的黎曼张量在 $\{t,x,y,z\}$ 系的全部分量。

Solv (a) 选取标架。由于度规是洛伦兹的，设有正交归一基底 $\{(e_\mu)^a\}$，

$$\begin{aligned}
g_{ab} &= \frac{1}{\sqrt{z}}\left(-(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b+(\mathrm{d}z)_a(\mathrm{d}z)_b\right)+z\left((\mathrm{d}x)_a(\mathrm{d}x)_b+(\mathrm{d}y)_a(\mathrm{d}y)_b\right)\\
&= \eta_{\mu\nu}(e^\mu)_a(e^\nu)_b\\
&= -\left(e^0\right)_a\left(e^0\right)_b+\left(e^1\right)_a\left(e^1\right)_b+\left(e^2\right)_a\left(e^2\right)_b+\left(e^3\right)_a\left(e^3\right)_b
\end{aligned}$$

最简单的选择是

$$\begin{aligned}
\left(e^0\right)_a &= \frac{1}{\sqrt[4]{z}}(\mathrm{d}t)_a\\
\left(e^1\right)_a &= \sqrt{z}(\mathrm{d}x)_a\\
\left(e^2\right)_a &= \sqrt{z}(\mathrm{d}y)_a\\
\left(e^3\right)_a &= \frac{1}{\sqrt[4]{z}}(\mathrm{d}z)_a
\end{aligned}$$

于是标架基矢为

$$\begin{aligned}
(e_0)^a &= \sqrt[4]{z}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\\
(e_1)^a &= \frac{1}{\sqrt{z}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\\
(e_2)^a &= \frac{1}{\sqrt{z}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a\\
(e_3)^a &= \sqrt[4]{z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a
\end{aligned}$$

并有

$$\begin{aligned}
(e_0)_a &= \eta_{0\nu}(e^\nu)_a\\
&= -\frac{1}{\sqrt[4]{z}}(\mathrm{d}t)_a\\
(e_1)_a &= \eta_{1\nu}(e^\nu)_a\\
&= \sqrt{z}(\mathrm{d}x)_a\\
(e_2)_a &= \eta_{2\nu}(e^\nu)_a\\
&= \sqrt{z}(\mathrm{d}y)_a\\
(e_3)_a &= \eta_{3\nu}(e^\nu)_a\\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{z}}(\mathrm{d}z)_a
\end{aligned}$$

(b) 计算联络 1 形式。

$$\Lambda_{\mu\nu\rho} \equiv \left[(e_\nu)_{\lambda,\tau} - (e_\nu)_{\tau,\lambda} \right] (e_\mu)^\lambda (e_\rho)^\tau ,$$

易知必有 $\lambda = \mu$，$\tau = \rho$。求导仅对 z 求不为零，故 μ, ρ 至少有一个取 3 ，而其余两个相同。由于 $\mu\rho$ 反称，只需取 $\mu < \rho$ 的项计算：

$$\begin{aligned}
\Lambda_{003} &= \sqrt{z} \left(\frac{1}{4} z^{-\frac{5}{4}} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}} \\
\Lambda_{113} &= \frac{1}{\sqrt[4]{z}} \left(\frac{1}{2\sqrt{z}} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{4}} \\
\Lambda_{223} &= \frac{1}{\sqrt[4]{z}} \left(\frac{1}{2\sqrt{z}} \right) \\
&= \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

故所有非零项为

$$\Lambda_{003} = -\Lambda_{300} = \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}}, \quad \Lambda_{113} = -\Lambda_{311} = \Lambda_{223} = -\Lambda_{322} = \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{4}}$$

于是由式 (5-7-20)：

$$\omega_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} \left(\Lambda_{\mu\nu\rho} + \Lambda_{\rho\mu\nu} - \Lambda_{\nu\rho\mu} \right)$$

同样 μ, ν, ρ 中有一个取 3，另两个相同，由于 $\mu\nu$ 反称，故 ν 取 3 而 $\mu\rho$ 相同：

$$\begin{aligned}
\omega_{\mu 3\mu} &= \frac{1}{2} \left(\Lambda_{\mu 3\mu} + \Lambda_{\mu\mu 3} - \Lambda_{3\mu\mu} \right) \\
&= \Lambda_{\mu\mu 3}
\end{aligned}$$

故

$$\omega_{030} = -\omega_{300} = \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}}, \quad \omega_{131} = -\omega_{311} = \omega_{232} = -\omega_{322} = \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{4}}$$

于是

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{03} = -\boldsymbol{\omega}_{30} &= \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}} \boldsymbol{e}^0 = \frac{1}{4} z^{-1}\, \mathrm{d}t \\
\boldsymbol{\omega}_{13} = -\boldsymbol{\omega}_{31} &= \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{4}} \boldsymbol{e}^1 = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{4}}\, \mathrm{d}x \\
\boldsymbol{\omega}_{23} = -\boldsymbol{\omega}_{32} &= \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{4}} \boldsymbol{e}^2 = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{4}}\, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

用 $\eta^{\mu\nu}$ 升编号指标：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_0{}^3 = \boldsymbol{\omega}_3{}^0 = \frac{1}{4}z^{-\frac{3}{4}}\boldsymbol{e}^0 = \frac{1}{4}z^{-1}\,\mathrm{d}t \\
\boldsymbol{\omega}_1{}^3 = -\boldsymbol{\omega}_3{}^1 = \frac{1}{2}z^{-\frac{3}{4}}\boldsymbol{e}^1 = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x \\
\boldsymbol{\omega}_2{}^3 = -\boldsymbol{\omega}_3{}^2 = \frac{1}{2}z^{-\frac{3}{4}}\boldsymbol{e}^2 = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

(c) 计算曲率 2 形式。首先计算联络 1 形式的外微分：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0{}^3 = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_3{}^0 = \frac{1}{4}z^{-2}\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}z = \frac{1}{4}z^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^3 \\
\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1{}^3 = -\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_3{}^1 = \frac{1}{8}z^{-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z = \frac{1}{8}z^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^3 \\
\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_2{}^3 = -\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_3{}^2 = \frac{1}{8}z^{-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \frac{1}{8}z^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{e}^2\wedge\boldsymbol{e}^3
\end{aligned}
$$

于是由嘉当第二结构方程

$$
\boldsymbol{R}_\mu{}^\nu = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_\mu{}^\nu + \boldsymbol{\omega}_\mu{}^\lambda\wedge\boldsymbol{\omega}_\lambda{}^\nu
$$

$\mu\nu$ 中没有 3 时，第二项中 λ 为 3；有一个为 3 时，第二项中 λ 取 3 或不取 3 都为零：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_0{}^1 &= \boldsymbol{\omega}_0{}^3\wedge\boldsymbol{\omega}_3{}^1 \\
&= -\frac{1}{8}z^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^1 \\
\boldsymbol{R}_0{}^2 &= \boldsymbol{\omega}_0{}^3\wedge\boldsymbol{\omega}_3{}^2 \\
&= -\frac{1}{8}z^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^2 \\
\boldsymbol{R}_0{}^3 &= \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_0{}^3 \\
&= \frac{1}{4}z^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^3 \\
\boldsymbol{R}_1{}^0 &= \boldsymbol{\omega}_1{}^3\wedge\boldsymbol{\omega}_3{}^0 \\
&= -\frac{1}{8}z^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^1 \\
\boldsymbol{R}_1{}^2 &= \boldsymbol{\omega}_1{}^3\wedge\boldsymbol{\omega}_3{}^2 \\
&= -\frac{1}{4}z^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^2 \\
\boldsymbol{R}_1{}^3 &= \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1{}^3 \\
&= \frac{1}{8}z^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^3 \\
\boldsymbol{R}_2{}^0 &= \boldsymbol{\omega}_2{}^3\wedge\boldsymbol{\omega}_3{}^0 \\
&= -\frac{1}{8}z^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{e}^0\wedge\boldsymbol{e}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_2{}^1 &= \boldsymbol{\omega}_2{}^3 \wedge \boldsymbol{\omega}_3{}^1 \\
&= \frac{1}{8} z^{-\frac{3}{2}} \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \\
\boldsymbol{R}_2{}^3 &= \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_2{}^3 \\
&= \frac{1}{8} z^{-\frac{3}{2}} \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3 \\
\boldsymbol{R}_3{}^0 &= \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_3{}^0 \\
&= \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{2}} \boldsymbol{e}^0 \wedge \boldsymbol{e}^3 \\
\boldsymbol{R}_3{}^1 &= \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_3{}^1 \\
&= -\frac{1}{8} z^{-\frac{3}{2}} \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^3 \\
\boldsymbol{R}_3{}^2 &= \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_3{}^2 \\
&= -\frac{1}{8} z^{-\frac{3}{2}} \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3 \\
\boldsymbol{R}_3{}^3 &= \boldsymbol{\omega}_3{}^\lambda \wedge \boldsymbol{\omega}_\lambda{}^3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

于是所有非零的标架分量为

$$
\begin{aligned}
R_{(0)(1)(0)}{}^{(1)} &= -R_{(1)(0)(0)}{}^{(1)} = -\frac{1}{8} z^{-\frac{3}{2}} \\
R_{(0)(2)(0)}{}^{(2)} &= -R_{(2)(0)(0)}{}^{(2)} = -\frac{1}{8} z^{-\frac{3}{2}} \\
R_{(0)(3)(0)}{}^{(3)} &= -R_{(3)(0)(0)}{}^{(3)} = \frac{1}{4} z^{-\frac{3}{2}} \\
R_{(1)(0)(1)}{}^{(0)} &= -R_{(0)(1)(1)}{}^{(0)} = \frac{1}{8} z^{-\frac{3}{2}} \\
R_{(1)(2)(1)}{}^{(2)} &= -R_{(2)(1)(1)}{}^{(2)} = -\frac{1}{4} z^{-\frac{3}{2}} \\
R_{(1)(3)(1)}{}^{(3)} &= -R_{(3)(1)(1)}{}^{(3)} = \frac{1}{8} z^{-\frac{3}{2}} \\
R_{(2)(0)(2)}{}^{(0)} &= -R_{(0)(2)(2)}{}^{(0)} = \frac{1}{8} z^{-\frac{3}{2}} \\
R_{(2)(1)(2)}{}^{(1)} &= -R_{(1)(2)(2)}{}^{(1)} = -\frac{1}{8} z^{-\frac{3}{2}} \\
R_{(2)(3)(2)}{}^{(3)} &= -R_{(3)(2)(2)}{}^{(3)} = \frac{1}{8} z^{-\frac{3}{2}} \\
R_{(3)(0)(3)}{}^{(0)} &= -R_{(0)(3)(3)}{}^{(0)} = -\frac{1}{4} z^{-\frac{3}{2}} \\
R_{(3)(1)(1)}{}^{(3)} &= -R_{(1)(3)(1)}{}^{(3)} = \frac{1}{8} z^{-\frac{3}{2}} \\
R_{(3)(2)(3)}{}^{(2)} &= -R_{(2)(3)(3)}{}^{(2)} = \frac{1}{8} z^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

验证 根据

$$
\begin{aligned}
\left(e^{0}\right)_{a} &= \frac{1}{\sqrt[4]{z}}\,(\mathrm{d}t)_{a} \\
\left(e^{1}\right)_{a} &= \sqrt{z}\,(\mathrm{d}x)_{a} \\
\left(e^{2}\right)_{a} &= \sqrt{z}\,(\mathrm{d}y)_{a} \\
\left(e^{3}\right)_{a} &= \frac{1}{\sqrt[4]{z}}\,(\mathrm{d}z)_{a}
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
(e_{0})^{a} &= \sqrt[4]{z}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{a} \\
(e_{1})^{a} &= \frac{1}{\sqrt{z}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{a} \\
(e_{2})^{a} &= \frac{1}{\sqrt{z}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{a} \\
(e_{3})^{a} &= \sqrt[4]{z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{a}
\end{aligned}
$$

……懒得验证了

3. 第三章第 16 题:

Prob 设 $\alpha(z)$，$\beta(z)$，$\gamma(z)$ 为任意函数，$h = t + \alpha(z)x + \beta(z)y + \gamma(z)$，求度规

$$
\mathrm{d}s^{2} = -\,\mathrm{d}t^{2} + \mathrm{d}x^{2} + \mathrm{d}y^{2} + h^{2}\,\mathrm{d}z^{2}
$$

的黎曼张量在 $\{t, x, y, z\}$ 系的全部分量。

Solv (a) 选取标架。令

$$
\begin{aligned}
\left(e^{0}\right)_{a} &= (\mathrm{d}t)_{a} \\
\left(e^{1}\right)_{a} &= (\mathrm{d}x)_{a} \\
\left(e^{2}\right)_{a} &= (\mathrm{d}y)_{a} \\
\left(e^{3}\right)_{a} &= h\,(\mathrm{d}z)_{a}
\end{aligned}
$$

则标架基矢为

$$
\begin{aligned}
(e_{0})^{a} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{a} \\
(e_{1})^{a} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{a} \\
(e_{2})^{a} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{a} \\
(e_{3})^{a} &= \frac{1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{a}
\end{aligned}
$$

并有

$$\begin{aligned}(e_0)_a &= \eta_{0\nu}\left(e^\nu\right)_a \\ &= -\left(\mathrm{d}t\right)_a \\ (e_1)_a &= \eta_{1\nu}\left(e^\nu\right)_a \\ &= \left(\mathrm{d}x\right)_a \\ (e_2)_a &= \eta_{2\nu}\left(e^\nu\right)_a \\ &= \left(\mathrm{d}y\right)_a \\ (e_3)_a &= \eta_{3\nu}\left(e^\nu\right)_a \\ &= h\left(\mathrm{d}z\right)_a\end{aligned}$$

(b) 计算联络 1 形式。

$$\Lambda_{\mu\nu\rho} \equiv \left[(e_\nu)_{\lambda,\tau} - (e_\nu)_{\tau,\lambda}\right](e_\mu)^\lambda (e_\rho)^\tau,$$

$\lambda\tau$ 必须取 $\mu\rho$；为使导数项不为零，ν 必须为 3，$\lambda\tau$，因而 $\mu\rho$ 中有一个为 3。

$$\begin{aligned}\Lambda_{033} &= -\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{h} \\ \Lambda_{133} &= -\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x} \\ &= -\frac{\alpha}{h} \\ \Lambda_{233} &= -\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y} \\ &= -\frac{\beta}{h}\end{aligned}$$

所以所有非零项为

$$\begin{aligned}\Lambda_{033} = -\Lambda_{330} = -\frac{1}{h} \\ \Lambda_{133} = -\Lambda_{331} = -\frac{\alpha}{h} \\ \Lambda_{233} = -\Lambda_{332} = -\frac{\beta}{h}\end{aligned}$$

由

$$\omega_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{\mu\nu\rho} + \Lambda_{\rho\mu\nu} - \Lambda_{\nu\rho\mu}\right)$$

知

$$\omega_{\mu 33} = \Lambda_{\mu 33}$$

于是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{03} &= -\boldsymbol{\omega}_{30} = -\frac{1}{h}\boldsymbol{e}^3 = -\,\mathrm{d}z \\
\boldsymbol{\omega}_{13} &= -\boldsymbol{\omega}_{31} = -\frac{\alpha}{h}\boldsymbol{e}^3 = -\alpha\,\mathrm{d}z \\
\boldsymbol{\omega}_{23} &= -\boldsymbol{\omega}_{32} = -\frac{\beta}{h}\boldsymbol{e}^3 = -\beta\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

升指标得

$$
\begin{aligned}
{\boldsymbol{\omega}_0}^3 &= {\boldsymbol{\omega}_3}^0 = -\frac{1}{h}\boldsymbol{e}^3 = -\,\mathrm{d}z \\
{\boldsymbol{\omega}_1}^3 &= -{\boldsymbol{\omega}_3}^1 = -\frac{\alpha}{h}\boldsymbol{e}^3 = -\alpha\,\mathrm{d}z \\
{\boldsymbol{\omega}_2}^3 &= -{\boldsymbol{\omega}_3}^2 = -\frac{\beta}{h}\boldsymbol{e}^3 = -\beta\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

(c) 求曲率 2 形式。先求联络 1 形式的外微分：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}{\boldsymbol{\omega}_0}^3 &= \mathrm{d}{\boldsymbol{\omega}_3}^0 = 0 \\
\mathrm{d}{\boldsymbol{\omega}_1}^3 &= -\,\mathrm{d}{\boldsymbol{\omega}_3}^1 = 0 \\
\mathrm{d}{\boldsymbol{\omega}_2}^3 &= \mathrm{d}{\boldsymbol{\omega}_3}^2 = 0
\end{aligned}
$$

而所有的联络 1 形式正比于 $\mathrm{d}z$ ，它们的楔积全为零，故所有的曲率 2 形式为零。

验证 曲率为零的结果与第三章相同。

第六章　狭义相对论

习题

1. 惯性观者 G 和 G' 相对速率为 $u=0.6c$，相遇时把时钟都调为零。用时空图讨论：(a) 在 G 所属的惯性参考系看来（以其同时观判断），当 G 钟读数为 $5\,\mu\mathrm{s}$ 时，G' 钟的读数是多少？(b) 当 G 钟读数为 $5\,\mu\mathrm{s}$ 时，他实际看见 G' 钟的读数是多少？

2. 远方星体以 $0.8c$ 的速率（匀速直线地）离开我们，我们测得它辐射来的闪光按 5 昼夜的周期变化。用时空图求星上观者测得的闪光周期。

第二部分

中册

附录 G　李群和李代数

习题

1. 验证由式 (G-1-1) 定义的 $I_g\colon G \to G$ 确为自同构映射。

证明 I_g 定义为

$$I_g(h) := ghg^{-1}, \quad \forall g \in G,$$

首先验证它是同态：

$$I_g(h_1h_2) = gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = gh_1h_2g^{-1} = I_g(h_1h_2),$$

而

$$I_{g^{-1}}(I_g(h)) = g^{-1}\left(ghg^{-1}\right)g = h$$

故 I_g 有逆映射 $I_{g_{-1}}$，于是 I_g 是自同构映射。

2. 验证由式 (G-1-2) 定义的乘法满足群乘法的要求。

证明 1. 结合律：

$$((g_1, g_1')(g_2, g_2'))(g_3, g_3') = (g_1g_2g_3, g_1'g_2'g_3') = (g_1, g_1')((g_2, g_2')(g_3, g_3'))$$

2. 含幺：

$$(e, e')(g, g') = (g, g') = (g, g')$$

3. 有逆：

$$(g, g')\left(g^{-1}, g'{}_1\right) = (e, e')$$

3. 验证由 §G.1 定义 8 所定义的 $A(G)$ 是群。

证明 1. 先验证复合确实是 $A(G)$ 上的运算 $\circ\colon A(G) \times A(G) \to A(G)$，即 $\forall \mu, \nu \in A(G)$，验证 $\mu \circ \nu \in A(G)$：首先验证 $\mu \circ \nu$ 是同态：

$$\mu \circ \nu(gh) = \mu\left(\nu(g)\nu(h)\right) = \mu \circ \nu(g)\mu \circ \nu(h),$$

再验证 $\mu\circ\nu$ 一一到上（有逆映射）：

$$(\mu\circ\nu)\circ\left(\nu^{-1}\circ\mu^{-1}\right)=\mathrm{Id}_G,$$

故 $\mu\circ\nu$ 有逆映射 $\nu^{-1}\circ\mu^{-1}$，于是 $\mu\circ\nu$ 为同构映射，故复合是 $A(G)$ 上的运算。

2. 验证 $\circ$ 为群乘法：

   (a) 结合律：

$$\mu\circ(\nu\circ\sigma)=\mu\circ\nu\circ\sigma=(\mu\circ\nu)\circ\sigma,\quad \forall\mu,\nu,\sigma\in A(G).$$

   (b) 含幺：易知 $\mathrm{Id}_G\in A(G)$，

$$\mathrm{Id}_G\circ\mu=\mu\circ\mathrm{Id}_G=\mu,\quad \forall\mu\in A(G)$$

   (c) 有逆：$\forall\mu\in A(G)$，μ^{-1} 也是自同构，于是

$$\mu\circ\mu^{-1}=\mu^{-1}\circ\mu=\mathrm{Id}_G\,.$$

4. 试证定理 G-1-2，即 $A_I(G)$ 是群 $A(G)$ 的正规子群。

证明 $\forall\mu\in A(G),I_g\in A_I(G),h\in G$，

$$\mu\circ I_g\circ\mu^{-1}(h)=\mu\left(g(\mu^{-1}h)g^{-1}\right)=\mu(g)h\mu(g)^{-1}=I_{\mu(g)}(h).$$

5. 验证由 §G.1 定义 9 所定义的 $H\otimes_S K$ 是群。

证明 1. 结合律：$\forall h_1,h_2,h_3\in H,k_1,k_2,k_3\in K$，

$$\begin{aligned}((h_1,k_1)(h_2,k_2))\,(h_3,k_3)&=(h_1\mu_{k_1}(h_2),k_1k_2)\,(h_3,k_3)\\&=(h_1\mu_{k_1}(h_2)\mu_{k_1k_2}(h_3),k_1k_2k_3)\\&=(h_1\mu_{k_1}(h_2)\mu_{k_1}\left(\mu_{k_2}(h_3)\right),k_1k_2k_3)\\&=(h_1\mu_{k_1}(h_2\mu_{k_2}(h_3)),k_1k_2k_3)\\&=(h_1,k_1)\,(h_2\mu_{k_2}(h_3),k_2k_3)\\&=(h_1,k_1)\,((h_2,k_2)(h_3,k_3))\end{aligned}$$

2. 含幺：$\forall h\in H,k\in K$，

$$(e_H,e_K)(h,k)=(h,k)=(h,k)(e_H,e_K)$$

3. 有逆：$\forall h\in H,k\in K$，

$$(h,k)(h^{-1},k^{-1})=(e_H,e_K)=(h^{-1},k^{-1})(h,k)$$

6. 设 $L_g\colon G\to G$ 是由 $g\in G$ 生成的左平移，${L_g}^{-1}$ 是 L_g 的逆映射，试证

$$L_{g^{-1}}={L_g}^{-1},\quad \forall g\in G.$$

证明 $\forall h\in G$,

$$L_{g^{-1}}\left(L_g(h)\right)=g^{-1}gh=h,$$

故 $L_{g^{-1}}\circ L_g=\mathrm{Id}_G$。

7. $\forall g\in G$ 定义右平移 $R_g\colon h\mapsto hg,\quad \forall h\in G$，试证 $R_{gh}=R_h\circ R_g$。

证明 $\forall g,h,k\in G$,

$$R_{gh}(k)=kgh=R_h\circ R_g(k)$$

8. 试证 $[\mathbf{v},\mathbf{u}]:=\mathbf{v}\times\mathbf{u},\quad \forall\mathbf{v},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$ 满足李括号的条件（见 §G.3 例 2 ）。