

# 《微分几何入门与广义相对论》 部分习题参考解答

by 薛定谔的大喵<sup>1</sup>

2020 年 6 月 13 日

<sup>1</sup>[wyj1234@mail.ustc.edu.cn](mailto:wyj1234@mail.ustc.edu.cn)

# 目录

第一部分 上册	3
第一章 拓扑空间简介	5
第二章 流形和张量场	9
第三章 黎曼（内禀）曲率张量	26
第四章 李导数、Killing 场和超曲面	45
第五章 微分形式及其积分	54
第六章 狭义相对论	74
第七章 广义相对论基础	81
第八章 爱因斯坦方程的求解	83
第九章 施瓦西时空	84
第十章 宇宙论	85
第二部分 中册	86
第十一章 时空的整体因果结构	87
附录 B 量子力学数学基础简介	89
附录 G 李群和李代数	90

# 第一部分

## 上册

## 第六章 狭义相对论

### 习题

1. 惯性观者  $G$  和  $G'$  相对速率为  $u = 0.6c$ , 相遇时把时钟都调为零。用时空图讨论: (a) 在  $G$  所属的惯性参考系看来 (以其同时观判断), 当  $G$  钟读数为  $5\mu\text{s}$  时,  $G'$  钟的读数是多少? (b) 当  $G$  钟读数为  $5\mu\text{s}$  时, 他实际看见  $G'$  钟的读数是多少?

解 如图 6.1, 其中  $a$  点  $G$  的固有时为  $\tau = 5\mu\text{s}$ 。

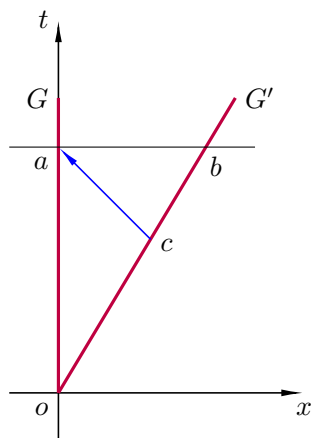


图 6.1: 题 1 解答图

- (a) 易知  $b$  点的  $x$  坐标为  $0.6\tau$ , 于是  $b$  点  $G'$  的固有时为

$$\tau' = \sqrt{1 - 0.6^2}\tau = 0.8\tau = 4\mu\text{s}.$$

- (b) 易求得  $c$  点在  $t, x$  坐标系下的坐标为  $\left(\frac{5}{8}\tau, \frac{3}{8}\tau\right)$ <sup>1</sup>, 于是  $c$  点  $G'$  的固有时为

$$\tau'' = \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2}\tau = \frac{\tau}{2} = 2.5\mu\text{s}.$$

<sup>1</sup> $t$  在前,  $x$  在后

2. 远方星体以  $0.8c$  的速率（匀速直线地）离开我们，我们测得它辐射来的闪光按 5 昼夜的周期变化。用时空图求星上观者测得的闪光周期。

解 如图 6.2，记  $c$  点坐标为  $(\tau, 0)$ ，其中  $\tau = 5\text{d}$ ，则可算得  $b_2$  点坐标为  $\left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)\tau$ ，于是

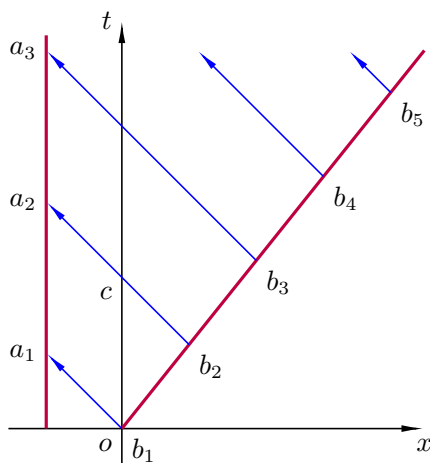


图 6.2: 题 2 解答图

$$b_1 \text{ 到 } b_2 \text{ 星上观者经过的固有时 } \tau' = \sqrt{5^2 - 4^2} \frac{\tau}{9} = \frac{\tau}{3} = \frac{5}{3} \text{ d}.$$

3. 把图 6-20 的  $oa$  段和  $oe$  段线长分别记作  $\tau$  和  $\tau'$ 。(a) 用两钟的相对速率  $u$  表出  $\tau'/\tau$ ；(b) 在  $u = 0.6c$  和  $u = 0.8c$  两种情况下求出  $\tau'/\tau$  的数值。

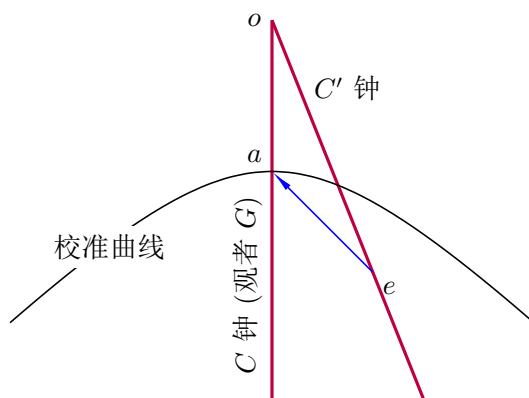


图 6.3: 正文图 6-20

解 (a) 如图 6.4，记  $t = of$ ，

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{\sqrt{t^2 - u^2 t^2}}{t - ut} = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}. \quad (6.1)$$



5.  $A, B$  是同一惯性系的两个惯性观者, 他们互相发射中子, 每一中子以相对速率  $0.6c$  离开中子枪。设  $B$  测得  $B$  枪的中子发射速率为  $10^4 \text{ s}^{-1}$  (即每秒发射  $10^4$  个), 求  $A$  所发中子 (根据中子自己的标准钟) 测得的  $B$  枪的中子发射率 (要求画时空图求解)。

解 如图 6.7,  $oa$  长为  $\Delta\tau_B$ , 则由对称性易知  $ob = ab = \frac{\Delta\tau_B}{2}$ , 则  $bc = 0.3\Delta\tau_B$ , 故算得  $\Delta\tau = ac = 0.4\Delta\tau_B$ , 因此  $A$  发射的中子测得的  $B$  的发射率为  $f = \frac{1}{\Delta\tau} = 2.5f_B = 2.5 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ 。

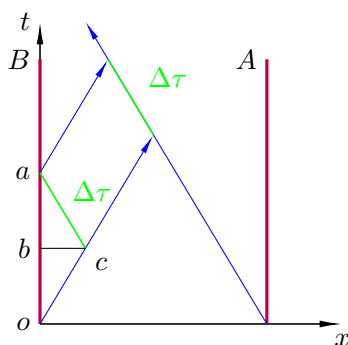


图 6.7: 题 5 解答图

6. 静止  $\mu$  子的平均寿命为  $\tau_0 = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$ 。宇宙线产生的  $\mu$  子相对于地球以  $0.995c$  的速率匀速直线下落, 用时空图求地球观者测得的 (a)  $\mu$  子的平均寿命; (b)  $\mu$  子在其平均寿命内所走过的距离。

解 如图 6.8,  $ac = \tau_0$ ,  $bc = t$  为地球看来的平均寿命。则  $ab = 0.995t$ , 有

$$\tau_0 = ac = \sqrt{-t^2 + (0.995t)^2} \approx 0.09987t,$$

故  $t \approx 10.0125\tau_0 = 2.0025 \times 10^{-5} \text{ s}$ , 而走过的距离为  $ab = vt \approx 5.9733 \text{ km}$ 。

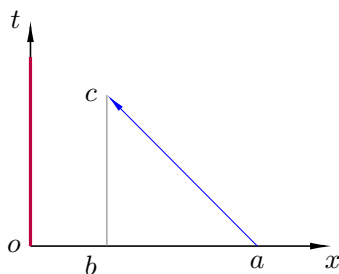


图 6.8: 图 6 解答图

7. 从惯性系  $\mathcal{R}$  看来 (认为, 测得), 位于某地  $A$  的两标准钟甲、乙指零时开始以速率  $v = 0.6c$  一同做匀速直线运动, 两钟指 1s 时到达某地  $B$ 。甲钟在到达  $B$  地时立即以速率  $v$  向  $A$  地匀速返回, 乙钟在  $B$  地停留 1s (按他的钟) 后以速率  $v$  向  $A$  的匀速返回。另有一丙钟一直呆在  $A$  地, 且当甲、乙离开  $A$  地时也指零, (a) 画出甲、乙、丙的世界线; (b) 求乙钟返回  $A$  地时三钟的读数  $\tau_{\text{甲}}$ ,  $\tau_{\text{乙}}$  和  $\tau_{\text{丙}}$ 。

解 如图 6.9, 设  $A$  地位于  $x = 0$ ,  $B$  地位于  $x = s$ 。

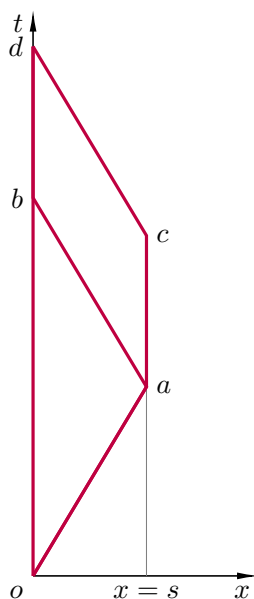


图 6.9: 题 7 解答图

(a) 甲的世界线为  $oabd$ ; 乙的世界线为  $oacd$ ; 丙的世界线为  $obd$ 。

(b) 由题可知线长  $oa = ac = ab = bd = cd$  都是  $\tau = 1\text{s}$ , 故  $\tau_{\text{甲}} = \tau_{\text{乙}} = 3\text{s}$ 。  $a$  点位于  $(\frac{5}{3}s, s)$ ,  $oa = \frac{4}{3}s$ , 故  $s = \frac{3}{4}\tau$ , 则  $ob = 2 \times \frac{5}{3}s = \frac{5}{2}\tau$ , 于是  $\tau_{\text{丙}} = \frac{7}{2}\tau = 3.5\text{s}$ 。

8. (单选题) 双子  $A, B$  静止于某惯性系  $\mathcal{R}$  中的同一空间点上。  $A$  从某时刻 (此时  $A, B$  年龄相等) 开始向东以速率  $u$  相对于惯性系  $\mathcal{R}$  做惯性运动, 一段时间后  $B$  以速率  $v > u$  向东追上  $A$ , 则相遇时  $A$  的年龄
- (1) 比  $B$  大,                      (2) 比  $B$  小,                      (3) 与  $B$  等。

解 选 (1)。  $A$  走了测地线, 而  $B$  不是测地线。

9. 标准钟  $A, B$  静止于某惯性系中的同一空间点上。  $A$  钟从某时刻开始以速率  $u = 0.6c$  匀速直线飞出, 2s (根据  $A$  钟) 后以  $u = 0.6c$  匀速直线返航。已知分手时两钟皆指零。 (1) 求重逢时两钟的读数; (2) 当  $A$  钟指 3s 时看见  $B$  钟指多少?



- 解 1. 由  $u = 0.6c$  知  $\gamma = \frac{5}{4}$ , 故  $\Delta\tau_A = 2\text{s}$  对应  $\Delta t = 5/2\text{s}$ , 由于  $B$  钟在惯性系中静止, 重逢时  $\tau_B = 5\text{s}$ ,  $\tau_A = 4\text{s}$ 。
2. 如图 6.10, 记  $\tau = 2\text{s}$ , 则  $a$  的坐标为  $\left(\frac{3}{4}\tau, \frac{5}{4}\tau\right)$ ,  $b$  的坐标为  $\left(0, \frac{5}{2}\tau\right)$ ,  $\tau_A = 3\text{s}$  的  $c$  位于  $\left(\frac{3}{8}\tau, \frac{15}{8}\tau\right)$ , 则可算出  $d$  位于  $\left(0, \frac{3}{2}\tau\right)$ , 故  $c$  点处  $A$  看见  $B$  的读数为  $\frac{3}{2}\tau = 3\text{s}$ 。

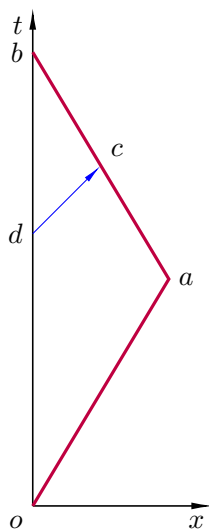


图 6.10: 题 9 解答图

10. 地球自转线速率在赤道之值约为每小时 1600 km。甲、乙为赤道上的一对孪生子。甲坐飞机以每小时 1600 km 的速率向西绕赤道飞行一圈后回家与乙重逢（忽略地球和太阳引力场的影响。由第 7 章可知引力的存在对应于时空的弯曲。）。(a) 画出地球表面的世界面和甲、乙的世界线（甲相对于地面的运动抵消了地球自转的效应，所以甲是惯性观者。）；(b) 甲与乙中谁更年轻？(c) 两者年龄相差多少？（答：约为  $10^{-7}\text{s}$ 。）注：本实验已于 1971 年完成，当然不是对人而是对铯原子钟。见 Hafele166。

解 如图 6.11。

- (a) 233
- (b) 乙更年轻。
- (c) 以坐标时  $t$  为参数，乙的世界线切矢模长为

$$\left\| \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a \right\| = \sqrt{1 - u^2},$$



图 6.11: 题 10 解答图

其中  $u$  是自转的 3-速率, 则乙经过的线长为

$$\tau = \int_0^T \left\| \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a \right\| dt = \sqrt{1 - u^2} T,$$

代入  $u$  和  $T = 1 \text{ d}$  知

$$T - \tau = (1 - \sqrt{1 - u^2}) T = 9.49449 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

11. 静长  $l = 5 \text{ m}$  的汽车以  $u = 0.6c$  的速率匀速进库, 库有坚硬后墙。为简化问题, 假定车头撞墙的信息以光速传播, 车身任一点接到信息立即停下。(a) 设司库测得在车头撞墙的同时车尾的钟  $C_w$  指零, 求车尾“获悉”车头撞墙这一信息时  $C_w$  的读数; (b) 求车完全停下后的静长  $\hat{l}$ ; (c) 用  $u$  表示新旧静长比  $\hat{l}/l$ 。

解 如图 6.12,  $ac = cd = \hat{l}$ , 则  $bc = u\hat{l}$ ,  $ab = (1 + u)\hat{l}$ , 而由尺缩公式知  $ab = \sqrt{1 - u^2}l$ , 故

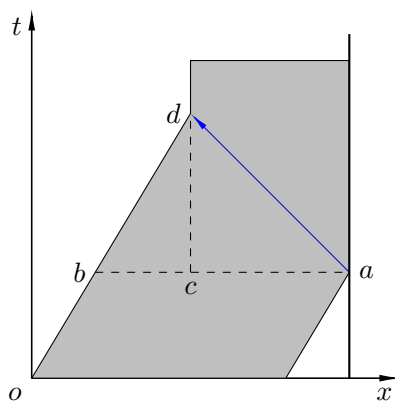


图 6.12: 题 11 解答图

$$(1 + u)\hat{l} = \sqrt{1 - u^2}l, \implies \hat{l} = \sqrt{\frac{1 - u}{1 + u}}l,$$

则

$$bd = \sqrt{cd^2 - bc^2} = \sqrt{1 - u^2} \hat{l} = l,$$

故

(a)  $C_w$  的读数为  $bd = l$ , 恢复  $c$  即  $\frac{l}{c} = \frac{5}{299792458} \text{s} \approx 1.66782 \times 10^{-8} \text{s}$ 。

(b) 代入  $u = 0.6c$  知  $\hat{l} = \frac{l}{2} = 2.5 \text{m}$ 。

(c)  $\frac{\hat{l}}{l} = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$ 。

12. 试证命题 6-3-4.

证明 命题 6-3-4 如下

**Thm** 质点世界线上各点的 4 加速  $A^a$  与 4 速  $U^a$  正交, 即  $A^a U_a = \eta_{ab} A^a U^b = 0$ 。

**Prf**

$$\begin{aligned} U_a A^a &= U_a U^b \partial_b U^a \\ &= \frac{1}{2} U^b \partial_b (U_a U^a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

13. 设观者世界线为  $t \sim x$  面内的双曲线  $G$  (见图 6-43), 图中  $K$  为已知,  $A^a$  为观者的 4 加速, 求  $A^a A_a$  (结论是  $A^a A_a$  为常数, 因此  $G$  称为匀加速运动观者<sup>2</sup>。请注意这指的是 4 加速。)

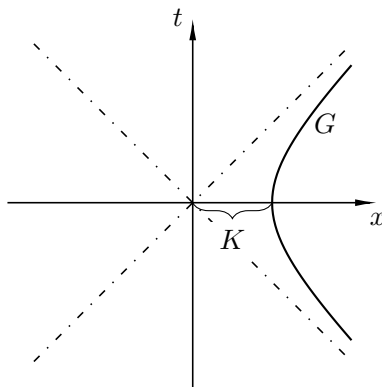


图 6.13: 原书图 6-43

解 由图知此双曲线的参数为  $a = b = K$ , 可写出双曲线方程为

$$x^2 - t^2 = K^2,$$

<sup>2</sup>或称 Rindler 观者——笔者注

两边对固有时求导,

$$2x \frac{dx}{d\tau} - 2t \frac{dt}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{t}{x} \frac{dt}{d\tau},$$

而

$$Z^a = \frac{dt}{d\tau} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{dx}{d\tau} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a$$

是归一的, 则

$$\begin{aligned} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 &= \left[ \left( \frac{t}{x} \right)^2 - 1 \right] \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ &= - \left( \frac{K}{x} \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ &= -1, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{t} \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{K},$$

于是 4 速又可改写为

$$Z^a = \frac{1}{K} \left[ x \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + t \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a \right],$$

故

$$\begin{aligned} A^a &= \frac{dZ^a}{d\tau} \\ &= \frac{1}{K} \left[ \frac{dx}{d\tau} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{dt}{d\tau} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a \right] \\ &= \frac{1}{K^2} \left[ t \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + x \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^a \right], \\ A_a A^a &= \frac{1}{K^4} (x^2 - t^2) \\ &= \frac{1}{K^2}. \end{aligned}$$

#### 14. 试证命题 6-6-2.

**证明** 命题 6-6-2 如下

**Thm** 设惯性系  $\mathcal{R}$  和  $\mathcal{R}'$  由洛伦兹变换

$$t = \gamma(t' + vx'), \quad x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z'$$

相联系, 则两者测同一电磁场  $F_{ab}$  所得值  $(\vec{E}, \vec{B})$  和  $(\vec{E}', \vec{B}')$  有如下关系:

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & E'_2 &= \gamma(E_2 - vB_3), & E'_3 &= \gamma(E_3 + vB_2); \\ B'_1 &= B_1, & B'_2 &= \gamma(B_2 + vE_3), & B'_3 &= \gamma(B_3 - vE_2). \end{aligned}$$

**Prf** 记矩阵  $\Lambda$  为

$$[\Lambda^\mu{}_\nu] = \left[ \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\nu} \right] = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则易知

$$[(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu] = \left[ \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right] = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

而根据张量变换律

$$\begin{aligned} F'^\mu{}_\nu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} F^\sigma{}_\rho \\ &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\sigma F^\sigma{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu, \end{aligned}$$

于是有矩阵等式

$$[F'] = \Lambda^{-1} [F] \Lambda,$$

其中  $[F]$  表示  $F^\mu{}_\nu$  排成的矩阵

$$[F] = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

于是经过简单的矩阵乘法算得

$$[F'] = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & \gamma(E_2 - vB_3) & \gamma(E_3 + vB_2) \\ E_1 & 0 & \gamma(B_3 - vE_2) & -\gamma(B_2 + vE_3) \\ \gamma(E_2 - vB_3) & -\gamma(B_3 - vE_2) & 0 & B_1 \\ \gamma(E_3 + vB_2) & \gamma(B_2 + vE_3) & -B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

可以直接读出

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & E'_2 &= \gamma(E_2 - vB_3), & E'_3 &= \gamma(E_3 + vB_2); \\ B'_1 &= B_1, & B'_2 &= \gamma(B_2 + vE_3), & B'_3 &= \gamma(B_3 - vE_2). \end{aligned}$$

**15.** 设瞬时观者测  $F_{ab}$  所得电场和磁场分别为  $E^a$  和  $B^a$  (也记为  $\vec{E}$  和  $\vec{B}$ ), 试证:

(a)  $F_{ab} F^{ab} = 2(B^2 - E^2),$

(b)  $F_{ab} {}^*F^{ab} = 4\vec{E} \cdot \vec{B}$ . 提示: 可利用惯性坐标基底把  $F_{ab} {}^*F^{ab}$  写成分量表达式。

注：本题表明，虽然  $\vec{E}$  和  $\vec{B}$  都是观者依赖的， $B^2 - E^2$  和  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  却同观者无关。事实上，由  $F_{ab}$  能构造的独立的不变量只有这两个。

证明 我表示并不想用分量……用分量的话矩阵相乘求迹，看官自行计算。还是几何语言看着舒服，虽然看着计算更长……

引理 对任意参考系有分解式

$$F_{ab} = Z_a E_b - Z_b E_a + \varepsilon_{abc} B^c,$$

其中

$$\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{dabc} Z^d$$

是“空间体元”（因为  $Z^a$  未必是某超曲面法矢故加引号）。

证明 由

$$B_a = -{}^*F_{ab} Z^b = -\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd} F^{cd} Z^b = \frac{1}{2}\varepsilon_{acd} F^{cd},$$

知

$$\varepsilon_{abc} B^c = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\varepsilon^{cde} F_{de} = h^d_{[a} h^e_{b]} F_{de} = h^d_a h^e_b F_{de},$$

其中  $h^{ab} = \delta^a_b + Z^a Z_b$  是空间投影，而即使  $Z^a$  不是某超曲面法矢，也可以通过展开计算证明有  $\varepsilon_{abc}\varepsilon^{cde} = 2h^d_{[a} h^e_{b]}$ 。进一步展开得

$$\varepsilon_{abc} B^c = (\delta^d_a + Z^d Z_a) (\delta^e_b + Z^e Z_b) F_{de} = F_{ab} - Z_a E_b + Z_b E_a. \quad \square$$

由引理直接计算：

(a)

$$\begin{aligned} F_{ab} F^{ab} &= (Z_a E_b - Z_b E_a + \varepsilon_{abc} B^c) (Z^a E^b - Z^b E^a + \varepsilon^{abd} B_d) \\ &= -E^2 - E^2 + \varepsilon_{abc}\varepsilon^{abd} B^c B_d \\ &= 2(B^2 - E^2). \end{aligned}$$

(b) 易算得

$$\begin{aligned} {}^*F_{ab} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd} F^{cd} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd} (Z^c E^d - Z^d E^c + \varepsilon^{cde} B_e) \\ &= Z_b B_a - Z_a B_b + \varepsilon_{abc} E^c, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} F_{ab} {}^*F^{ab} &= (Z_a E_b - Z_b E_a + \varepsilon_{abc} B^c) (Z^b B^a - Z^a B^b + \varepsilon^{abd} E_d) \\ &= E_b E^b + E_a B^a + \varepsilon_{abc}\varepsilon^{abd} B^c E_d \\ &= 4E_a B^a. \end{aligned}$$

## 第二部分

### 中册