《微分几何入门与广义相对论》部分习题参考解答

by 薛定谔的大喵[1]

2020 年 9 月 26 日

[1] wyj1234@mail.ustc.edu.cn

目录

第一部分

上册

第七章　广义相对论基础

习题

1. 试证弯曲时空麦氏方程 $\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b$ 蕴含电荷守恒定律，即 $\nabla_a J^a = 0$ 。注：$\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b$ 等价于式 (7-2-8) 而非 (7-2-9) ，故本题表明式 (7-2-8) 而非式 (7-2-9) 可推出电荷守恒。

证明

$$-4\pi \nabla_a J^a = \nabla_a \nabla_b F^{ba} = 0.$$

2. 试证 $\dfrac{\mathrm{D_F}\omega_a}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{D}\omega_a}{\mathrm{d}\tau} + (A_a \wedge Z_b)\,\omega^b \quad \forall \omega_a \in \mathscr{F}_G(0,1).$

证明 $\forall v^a \in \mathscr{F}_G(1,0)$,

$$\begin{aligned}
v^a \frac{\mathrm{D_F}\omega_a}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\mathrm{D_F}\left(v^a \omega_a\right)}{\mathrm{d}\tau} - \omega_a \frac{\mathrm{D_F} v^a}{\mathrm{d}\tau} \\
&= v^a \frac{\mathrm{D}\omega_a}{\mathrm{d}\tau} + \omega_a \frac{\mathrm{D} v^a}{\mathrm{d}\tau} - \omega_a \left(\frac{\mathrm{D} v^a}{\mathrm{d}\tau} + 2A^{[a} Z^{b]} v_b\right) \\
&= v^a \left(\frac{\mathrm{D}\omega_a}{\mathrm{d}\tau} - 2A_{[b} Z_{a]}\omega^b\right) \\
&= v^a \left(\frac{\mathrm{D}\omega_a}{\mathrm{d}\tau} + A_a \wedge Z_b \omega^b\right).
\end{aligned}$$

3. 试证费米导数性质 3.

证明 性质 3 如下：

> **性质** 若 w^a 是 $G(\tau)$ 上的空间矢量场（对线上各点 $w^a Z_a = 0$ ），则
>
> $$\mathrm{D_F} w^a / \mathrm{d}\tau = h^a{}_b \left(\mathrm{D} w^b / \mathrm{d}\tau\right),$$
>
> 其中 $h^a{}_b = g_{ab} + Z_a Z_b$ ，$h^a{}_b = g^{ac} h_{cb}$ 是 $G(\tau)$ 上各点的投影映射。

证明 $h^a{}_b = g^{ac}(g_{cb} + Z_c Z_b) = \delta^a{}_b + Z^a Z_b$,

$$
\begin{aligned}
h^a{}_b \frac{\mathrm{D}w^b}{\mathrm{d}\tau} &= (\delta^a{}_b + Z^a Z_b)\frac{\mathrm{D}w^b}{\mathrm{d}\tau} \\
&= \frac{\mathrm{D}w^a}{\mathrm{d}\tau} + Z^a\left(\frac{\mathrm{D}\left(Z_b w^b\right)}{\mathrm{d}\tau} - w^b\frac{\mathrm{D}Z_b}{\mathrm{d}\tau}\right) \\
&= \frac{\mathrm{D}w^a}{\mathrm{d}\tau} - Z^a A^b w_b \\
&= \frac{\mathrm{D}w^a}{\mathrm{d}\tau} + \left(A^a Z^b - Z^a A^b\right) w_b \\
&= \frac{\mathrm{D_F}w^a}{\mathrm{d}\tau}.
\end{aligned}
$$

□

4. 试证类时线 $G(\tau)$ 上长度不变 (且非零) 的矢量场必经受时空转动。提示：令 $u^a \equiv \mathrm{D}v^a/\mathrm{d}\tau$，则 $u_a v^a = 0$。先证：无论 $v_a v^a$ 为零与否，总有 $G(\tau)$ 上矢量场 v'^a 使 $v'_a v^a = 1$ 。再验证 v^a 经受以 $\Omega_{ab} \equiv 2v'_{[a}u_{b]}$ 为角速度 2 形式的时空转动。

证明 1. 记 $u^a = \dfrac{\mathrm{D}v^a}{\mathrm{d}\tau}$ ，则 $\dfrac{\mathrm{D}\left(v_a v^a\right)}{\mathrm{d}\tau} = 2u_a v^a = 0$ 。

2. 若 $v^a v_a \neq 0$，令

$$v'^a = \frac{v^a}{v^b v^b},$$

若 $v^a v_a = 0$，则 $Z^a v_a$ 不为零，因为与类时矢量内积为零则为类空矢量。于是定义

$$v'^a = \frac{Z^a}{Z^b v_b}.$$

3. 定义 $\Omega_{ab} = 2v'_{[a}u_{b]}$，则

$$-\Omega^{ab}v_b = u^a = \frac{\mathrm{D}v^a}{\mathrm{d}\tau},$$

故 v^a 经受以 Ω_{ab} 为角速度 2 形式的时空转动。

5. 设 $\{T, X, Y, Z\}$ 为闵氏时空的洛伦兹坐标系，曲线 $G(\tau)$ 的参数表达式为

$$T = A^{-1}\sinh A\tau, \quad X = A^{-1}\cosh A\tau, \quad Y = Z = 0, \quad \text{（其中 } A \text{ 为常数）}$$

(a) 试证 $G(\tau)$ 是类时双曲线（即图 (6-43)[1] 中的 G），τ 是固有时，A 是 $G(\tau)$ 的 4 加速 A^a 的长度。

(b) 试证从 $\{T, X, Y, Z\}$ 坐标系原点 o 出发的与 $G(\tau)$ 有交的任一半直线 $\mu(s)$ 都与 $G(\tau)$ 正交。

(c) 设 (b) 中的 $\mu(s)$ 的参数 s 是 μ 的线长，随着 $\mu(s)$ 取遍所有从 o 出发并与 $G(\tau)$ 有交的半直线，便得 $G(\tau)$ 上的一个空间矢量场 $w^a \equiv (\partial/\partial s)^a$，试证 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移。

[1] 即本文档图 6.13

(d) 令 $Z^a \equiv (\partial/\partial\tau)^a$，选 $\{Z^a, w^a, (\partial/\partial Y)^a, (\partial/\partial Z)^a\}$ 为 $G(\tau)$ 上的正交归一 4 标架场，求出 $G(\tau)$ 的固有坐标系 $\{t, x, y, z\}$ 并指出其坐标域。

答：$T = (A^{-1} + x)\sinh At, \quad X = (A^{-1} + x)\cosh At, \quad Y = y, \quad Z = z$。

(e) 写出闵氏时空在上述固有坐标系中的线元表达式。计算闵氏度规在该系的克氏符，验证它满足引理 7-4-3，即式 (7-4-10)[2]。

证明 (a) 由 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 知 $(AX)^2 - (AT)^2 = 1$，故这是渐近线为 $T = \pm X$ 的双曲线。

以 τ 为参数，

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a = \cosh(A\tau)\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + \sinh(A\tau)\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,$$

则

$$\eta_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b = -\cosh^2(A\tau) + \sinh^2(A\tau) = -1,$$

即切矢归一，τ 为固有时。

将 $(\frac{\partial}{\partial\tau})^a$ 延拓为

$$Z^a = AX\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + AT\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,$$

容易算得观者四加速为

$$\begin{aligned}\hat{A}^a &= Z^b\nabla_b Z^a\big|_{G(\tau)}\\ &= A^2T\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + A^2X\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a\Bigg|_{G(\tau)}\\ &= A\sinh(A\tau)\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + A\cosh(A\tau)\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,\end{aligned}$$

则

$$\eta_{ab}\hat{A}^a\hat{A}^b = A^2\left(\cosh^2(A\tau) - \sinh^2(A\tau)\right) = A^2,$$

即四加速的模长为 A。

(b) 与 G 交于 τ 处的 μ 的方程为

$$T = \tanh(A\tau)X,$$

故其在 $G(\tau)$ 处的切矢正比于

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a = \sinh(A\tau)\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + \cosh(A\tau)\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,$$

[2] 正文 (7-4-10) 为

$$\Gamma^0{}_{00} = \Gamma^\sigma{}_{ij} = 0, \quad \Gamma^0{}_{0i} = \Gamma^0{}_{i0} = \Gamma^i{}_{00} = \hat{A}_i,$$

$$\Gamma^i{}_{0j} = \Gamma^i{}_{j0} = -\omega^k\varepsilon_{0kij}, \quad \sigma = 0,1,2,3; \quad i,j,k = 1,2,3.$$

可算得

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)_a = -\cosh(A\tau)\sinh(A\tau)+\cosh(A\tau)\sinh(A\tau)=0.$$

(c) 在 (b) 中给出的 $(\partial/\partial s)^a$ 已经是归一的，因而就是 w^a。由 (b) 和习题 3，知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D_F}w^a}{\mathrm{d}\tau} &= h^a{}_b\frac{\mathrm{D}w^b}{\mathrm{d}\tau}\\ &= h^a{}_b Z^c\nabla_c w^b\\ &= h^a{}_b\left(A\cosh(A\tau)\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^b + A\sinh(A\tau)\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^b\right)\\ &= Ah^a{}_b Z^b\\ &= 0,\end{aligned}$$

其中 $Z^a=(\partial/\partial\tau)^a$，故 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移。

(d) 以 $G(0)$ 为坐标原点，$\{t,0,0,0\}$ 对应的点为 $G(t)$，即

$$T=A^{-1}\sinh At,\quad X=A^{-1}\cosh At,\quad Y=Z=0,$$

而此点处

$$\begin{aligned}&xw^a+y\left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)^a+z\left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^a\\ =\,&x\sinh(At)\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a+x\cosh(At)\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a+y\left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)^a+z\left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^a,\end{aligned}$$

沿此矢量决定的测地线（直线）走参数为 1 的距离，即

$$\Delta T=x\sinh(At),\quad \Delta X=x\cosh(At),\quad \Delta Y=y,\quad \Delta Z=z\left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^a,$$

故 $\{t,x,y,z\}$ 对应的点为

$$T=\left(A^{-1}+x\right)\sinh At,\quad X=\left(A^{-1}+x\right)\cosh At,\quad Y=y,\quad Z=z. \tag{7.1}$$

(e) 计算得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =&-\mathrm{d}T^2+\mathrm{d}X^2+\mathrm{d}Y^2+\mathrm{d}Z^2\\ =&-[(1+Ax)\cosh(At)\,\mathrm{d}t+\sinh(At)\,\mathrm{d}x]^2\\ &+[(1+Ax)\sinh(At)\,\mathrm{d}t+\cosh(At)\,\mathrm{d}x]^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\\ =&-(1+Ax)^2\,\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2,\end{aligned}$$

容易算得非零克氏符为

$$\Gamma^t{}_{tx}=\Gamma^t{}_{xt}=\frac{A}{1+Ax},\quad \Gamma^x{}_{tt}=A\,(1+Ax),$$

在线上时

$$\Gamma^t{}_{tx} = \Gamma^t{}_{xt} = \Gamma^x{}_{tt} = A,$$

对 (7.1) 反解得坐标变换

$$t = A^{-1}\tanh^{-1}\left(\frac{T}{X}\right), \quad x = \sqrt{X^2 - T^2} - A^{-1}, \quad y = Y, \quad z = Z,$$

故

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a &= \frac{\partial t}{\partial T}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{\partial x}{\partial T}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a \\
&= \frac{X}{A\left(X^2 - T^2\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a - \frac{T}{\sqrt{X^2 - T^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a \\
&= \frac{\cosh At}{1 + Ax}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a - \sinh(At)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a, \\
\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a &= \frac{\partial t}{\partial X}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{\partial x}{\partial X}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a \\
&= \frac{T}{A\left(T^2 - X^2\right)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{X}{\sqrt{X^2 - T^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a \\
&= -\frac{\sinh At}{1 + Ax}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \cosh(At)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\hat{A}^a &= A^2 X\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a + A^2 T\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a \\
&= A\left(1 + Ax\right)\cosh(At)\left(-\frac{\sinh At}{1 + Ax}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \cosh(At)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\right) \\
&\quad + A\left(1 + Ax\right)\sinh(At)\left(\frac{\cosh At}{1 + Ax}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a - \sinh(At)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\right) \\
&= A\left(1 + Ax\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a,
\end{aligned}$$

在线上有

$$\hat{A}^a = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a,$$

满足引理，证毕。

6. 设 G 是质点 L 在 $p \in L$ 的瞬时静止自由下落观者（即 G 的 4 速 Z^a 与 L 的 4 速 U^a 在 p 点相切），A^a 是 L 在 p 点的 4 加速，a^a 是 L 在 p 点相对于 G 的 3 加速 [由式 (7-4-3)[3]定义]，试证 $a^a = A^a$。

注：本题可视为命题 6-3-6 在弯曲时空的推广。

[3]正文式 (7-4-3) 为

$$a^a := \left[\frac{\mathrm{d}^2 x^i(t)}{\mathrm{d}t^2}\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a.$$

证明 记 $G(t)$ 的固有坐标系为 $\{t,x,y,z\}$。在 p 点，有 $U^a=Z^a=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$。对 U^a 做分解，有

$$U^a=\left(\frac{\partial}{\partial\tau_L}\right)^a=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau_L}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a+\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau_L}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a=\gamma Z^a+\gamma u^a,$$

则

$$\gamma|_p=1,\quad u^a|_p=0,$$

而

$$\begin{aligned}A^a|_p&=\left(Z^b\nabla_b U^a\right)_p\\&=\left(\partial_0 U^a+\Gamma^0{}_{ab}U^b\right)_p\\&=\partial_0 U^a|_p\\&=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}Z^a+\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}u^a+\gamma\frac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t},\end{aligned}$$

其中最后一步用到 $\left.\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right|_p=0$，这是因为 $\gamma=-U^aZ_a\leqslant 1$，故在 p 点 $\gamma|_p=1$ 取到了极值。而 $\frac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t}$ 就是 a^a。

7. 度规 g_{ab} 叫 **里奇平直**的，若 g_{ab} 的里奇张量为零。试证 g_{ab} 是真空爱因斯坦方程的解的充要条件是 g_{ab} 是里奇平直的。

证明 真空爱因斯坦方程为 $R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=0$。

1. 充分性：若 $R_{ab}=0$，则取迹得 $R=0$，故满足真空场方程。
2. 必要性：设 g_{ab} 满足真空场方程，即 $R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=0$，取迹得

$$R-2R=-R=0,$$

故

$$R_{ab}-\frac{1}{2}Rg_{ab}=R_{ab}=0,$$

故里奇平直。

8. 设 (M,g_{ab}) 为里奇平直时空（定义见上题），ξ^a 是其中的一个 Killing 矢量场，试证 $F_{ab}:=(\mathrm{d}\xi)_{ab}$ 满足 (M,g_{ab}) 的无源（$J_a=0$）麦氏方程。提示：利用 Killing 场 ξ^a 满足的 $\nabla_a\xi^a=0$（第 4 章习题 11 的结果）。

证明 计算得

$$\begin{aligned}\nabla^a F_{ab}&=\nabla^a\nabla_a\xi_b-\nabla^a\nabla_b\xi_a\\&=-2\nabla^a\nabla_b\xi_a\\&=-2\left(\nabla_b\nabla^a\xi_a+R_b{}^c\xi_c\right)\\&=0,\end{aligned}$$

而第二个方程 $\nabla_{[a}F_{bc]} = 0$ 等价于 $(\mathrm{d}F)_{abc} = 0$，这是由 $F = \mathrm{d}\xi$ 保证的。

第二部分

中册