《微分几何入门与广义相对论》部分习题参考解答

by 薛定谔的大喵

2018 年 2 月 19 日

目录

第一部分　上册 3

第一章　拓扑空间简简介 4

第二章　流形和张量场 8

第三章　黎曼（内禀）曲率张量 26

第一部分

上册

第一章　拓扑空间简简介

习题

1. 试证 $A-B=A\cap(X-B)$，$\forall A,B\subset X$。

证明 $x\in A-B \iff x\in A\wedge x\notin B \iff x\in A\cap(X-B)$。

2. 试证 $X-(B-A)=(X-B)\cup A$，$\forall A,B\subset X$。

证明 $x\in X-(B-A) \iff x\notin B-A \iff x\notin B\vee x\in A \iff x\in(X-B)\cup A$。

3. 用“对”或“错”在下表中填空：

$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	是一一的	是到上的
$f(x)=x^3$		
$f(x)=x^2$		
$f(x)=\mathrm{e}^x$		
$f(x)=\cos x$		
$f(x)=5,\forall x\in\mathbb{R}$		

解 如下表：

$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	是一一的	是到上的
$f(x)=x^3$	对	对
$f(x)=x^2$	错	错
$f(x)=\mathrm{e}^x$	对	错
$f(x)=\cos x$	错	错
$f(x)=5,\forall x\in\mathbb{R}$	错	错

4. 判断下列说法的是非并简述理由：

(a) 正切函数是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射；

(b) 对数函数是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射；

(c) $(a,b] \subset \mathbb{R}$ 用 $\mathscr{T}_u$ 衡量是开集；

(d) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 用 $\mathscr{T}_u$ 衡量是闭集。

解 (a) 错，定义域不是 $\mathbb{R}$；

(b) 错，定义域不是 $\mathbb{R}$；

(c) 错，任意包含于 $(a,b]$ 的开区间都不会含有 b，故 $(a,b]$ 不能写为开区间之并；

(d) 对，其补集 $(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ 是开集。

5. 举一反例证明命题“$(\mathbb{R},\mathscr{T}_u)$ 的无限个开子集之交为开“不真。

证明 记 $O_n = \left(-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)$，则 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = \{0\}$ 为闭集。

6. 试证 §1.2 例 5 中定义的诱导拓扑满足定义 1 的 3 个条件。

证明 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的子集 A 上的诱导拓扑按照定义为

$$\mathscr{S} := \{V \subset A \mid \exists O \in \mathscr{T}, \quad \text{s.t.} \quad V = A \cap O\},$$

(a) $A,\varnothing \in \mathscr{S}$：取 $O = X$ 即知 $A \in \mathscr{S}$，取 $O = \varnothing$ 即知 $A \in \mathscr{S}$；

(b) 有限交：设 $V_i = A \cap O_i \in \mathscr{S}$，其中 $O_i \in \mathscr{T}$，$i = 1,2,\cdots,n$。则

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_i = A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} O_i\right) \in \mathscr{S};$$

(c) 无限并：设 $V_\alpha = A \cap O_\alpha \in \mathscr{S}$，其中 $O_\alpha \in \mathscr{T}$，$\alpha \in$ 某个指标集I。则

$$\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha = A \cap \left(\bigcup_{\alpha\in I} O_\alpha\right) \in \mathscr{S}.$$

7. 举例说明 $(\mathbb{R}^3,\mathscr{T}_u)$ 中存在不开不闭的子集。

解 令 $A = (0,1]^3$，任何包含于 A 的开球 $B_r(x_0,y_0,z_0)$ 的 z 坐标的范围为开区间 $(z_0 - r, z_0 + r) \in (0,1]$，故 $(x,y,1)$ 不能属于此开球，于是 A 不能由一族开球之并得到，故 A 不是开集。其补集中 $(x,y,0)$ 不能属于开球，故补集不是开集，故 A 不是闭集。

8. 常值映射 $f\colon (X,\mathscr{T}) \to (Y,\mathscr{S})$ 是否连续？为什么？

解 连续。证明如下：设 $f[X] = \{y\} \subset Y$，$\forall O \in \mathscr{S}$，若 $y \in O$，则 $f^{-1}[O] = X \in \mathscr{T}$；若 $y \notin O$，则 $f^{-1}[O] = \varnothing \in \mathscr{T}$。故 f 连续。

9. 设 $\mathscr{T}$ 为集 X 上的离散拓扑，$\mathscr{S}$ 为集 Y 上的凝聚拓扑，

(a) 找出从 $(X,\mathscr{T})$ 到 $(Y,\mathscr{S})$ 的全部连续映射；

(b) 找出从 $(Y,\mathscr{S})$ 到 $(X,\mathscr{T})$ 的全部连续映射。

解 (a) 设 $f\colon X\to Y$，则由于 $\mathscr{S}=\{Y,\varnothing\}$，$f$ 连续当且仅当 $f^{-1}[Y]=X\in\mathscr{T}\wedge f^{-1}[\varnothing]=\varnothing\in\mathscr{T}$，可是这是必然满足的，于是所有映射 $f\colon(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{S})$ 均连续。

(b) 设 $g\colon Y\to X$，则由于 $\mathscr{T}=2^X$，g 连续当且仅当 $\forall O\subset X, g^{-1}[O]=X\vee g^{-1}[O]=\varnothing$。假设存在 $x,y\in g[Y]$，$x\neq y$，则取 $O=x$，有 $g^{-1}[O]=g^[-1](x)\notin\mathscr{S}$，故 g 不是连续的。于是连续映射 g 的像只能有一个，即为常值映射。又 8 中已证明常值映射为连续，故 $g\colon(Y,\mathscr{S})\to(X,\mathscr{T})$ 连续当且仅当其为常值映射。

10. 试证明定义 3a 与 3b 的等价性。

证明 (1) 3a 推导 3b。设 $f\colon(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{S})$ 连续，按照定义 3a 即满足 $\forall O\in\mathscr{S}$，$f^{-1}[O]\in\mathscr{T}$。则 $\forall x\in X$，任取 $G'\in\mathscr{S}$ 使得 $f(x)\in G'$，则只需取 $G=f^{-1}[G']$，即有 $G\in\mathscr{T}$ 并且 $f[G]=G'\subset G'$，于是按照定义 3b，f 也连续。

(2) 3b 推导 3a。设 $f\colon(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{S})$ 连续，按照定义 3b 即满足 $\forall x\in X$，$\forall G'\in\mathscr{S}$ 且 $f(x)\in G'$，$\exists G\in\mathscr{T}$ 使得 $f[G]\subset G'$。于是任取 $O\in\mathscr{S}$，令 x 跑遍 $f^{-1}[O]$，对每一个 x 存在 $G_x\in\mathscr{T}$ 使得 $f[G_x]\subset O$，考虑 $G=\displaystyle\bigcup_{x\in f^{-1}[O]}G_x$，显然 $G\in\mathscr{T}$。由于 $x\in f^{-1}[O]$，$x\in G_x$ 因而 $x\in G$，于是 $f^{-1}[O]\subset G$；而 $\forall x\in G$，不妨设 $x\in G_{x_0}$，则由于 $f[G_{x_0}]\subset O$，知 $x\in f^{-1}[O]$，故又有 $G\subset f^{-1}[O]$，于是 G 正是 $f^{-1}[O]$，也就是 $f^{-1}[O]=G\in\mathscr{T}$，按照定义 3a，$f$ 也是连续的。

11. 试证任一开区间 $(a,b)\subset\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚。

证明 只需找到一个同胚映射。函数 $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ 定义为 $f(x)=\tan\left(\pi\dfrac{x-a}{b-a}-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 即满足要求。

12. 设 X_1 和 X_2 是 $\mathbb{R}$ 的子集，$X_1\equiv(1,2)\cup(2,3)$，$X_2\equiv(1,2)\cup[2,3)$。以 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 分别代表由 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑在 X_1 和 X_2 上的诱导拓扑。拓扑空间 $(X_1,\mathscr{T}_1)$ 和 $(X_2,\mathscr{T}_2)$ 是否连通？

解 (1) $(X_1,\mathscr{T}_1)$ 不连通。考虑 $O=(1,2)\subset X_1$，$O=X_1\cap(1,2)\in\mathscr{T}_1$，故 O 为开集；而 $X-O=(2,3)$ 同样为开集，于是 O 即开又闭，故 $(X_1,\mathscr{T}_1)$ 不连通。

(2) $(X_2,\mathscr{T}_2)$ 连通。假设 $\exists O\neq X_2, O\neq\varnothing$，$O\in\mathscr{T}$ 且 $X-O\in\mathscr{T}_2$，任取 $a\in O$，$b\in X-O$，不妨设 $a<b$，于是 $[a,b]\subset X_2$，记 $A=[a,b]\cap O$，$B=[a,b]\cap(X-O)$，$c=\sup A$，我们来证明 O 和 $X-O$ 都是开集将导致 $c\notin A$ 并且 $c\notin(X-O)$，从而矛盾。

(a) 若 $c\in B$，由于 $X-O$ 是开集，且由于 $X_2=(1,3)\in\mathscr{T}_u\implies\mathscr{T}_2=\mathscr{T}_u\cap 2^{X_2}$，$X-O$ 可以写作一系列开区间之并，于是 $B=(X-O)\cap[a,b]$ 是一系列形如 $[a,y),(x,y)$ 或 $(x,b]$ 的区间之并，现在 $c\neq a$，故包含 c 的区间属后两种，则一定存在 $d\in B$，使 $(d,c]\subset B$，

i. 若 $c=b$，则 $(d,b]\subset B$；

ii. 若 $a<c<b$，则 $(d,b]=(d,c]\cup(c,b]\subset B$，

于是 d 是 A 的上界，然而却小于上确界 c，矛盾。

(b) 若 $c\in A$，同(a)有 O 是开集将导致 $\exists e\in A$，使得 $[c,e)\subset A$，与 c 是 A 的上确界矛盾。

至此 $c\in A$ 与 $c\in B$ 均导致矛盾，然而 $c\notin A\wedge c\notin B$ 又与 A 和 B 的定义矛盾，故 O 与 $X-O$ 均为非空开集是不可能的。故 $X_2,\mathscr{T}_2$ 连通。

13. 任意集合 X 配以离散拓扑 $\mathscr{T}$ 所得的拓扑空间是否连通？

解 不连通。$\forall O\in X$，$O\in\mathscr{T}\wedge X-O\in\mathscr{T}\implies X$不连通。

14. 设 $A\subset B$，试证

(a) $\bar{A}\subset\bar{B}$；提示：$A\subset B$ 表明 $\bar{B}$ 是含 A 的闭集。

(b) $\mathrm{i}(A)\subset\mathrm{i}(B)$。

证明 (a) $A\subset B\subset\bar{B}$，根据闭包定义有 $\bar{A}\subset\bar{B}$；

(b) $\mathrm{i}\,(A)\subset A\subset B$，根据内部定义有 $\mathrm{i}\,(A)\subset\mathrm{i}\,(B)$。

15. 试证 $x\in\bar{A}\iff x$ 的任一邻域与 A 之交非空。对 $\implies$ 证明的提示：设 $O\in\mathscr{T}$ 且 $O\cap A=\varnothing$，先证 $A\subset X-O$，再证（利用闭包定义）$\bar{A}\subset X-O$。

证明 (1) $\implies$：不妨设 O 是 x 的开邻域。假设 $O\cap A=\varnothing$，于是 $\forall a\in A$，$a\neq A$，于是 $a\in X-O$，$A\subset X-O$，而 $X-O$ 为闭集，于是 $\bar{A}\subset X-O$，故知 $x\notin\bar{A}$，矛盾；

(2) $\impliedby$：设 $\forall O\in\mathscr{T}$ 使得 $x\in O$，都有 $O\cap A\neq\varnothing$。假设 $x\notin\bar{A}$，根据定义，$\exists B$ 为闭集，$A\subset B$ 且 $x\notin B$。于是 $x\in X-B\in\mathscr{T}$，于是 $X-B$ 是 x 的一个与 A 无交的开邻域，矛盾。

16. 试证 $\mathbb{R}$ 不是紧致的。

证明 记 $O_i=(i-1,i+1)$，显然 $\{O_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{R}$ 的开覆盖。现挑出其中任意 n 个 O_{i_k}，$k=1,2,\cdots,n$，则 $\max\limits_{k=1,2,\cdots,n} i_k+1$ 即为 $\bigcup\limits_{k=1,2,\cdots,n} O_{i_k}$ 的一个上界，故有限个元素不能覆盖 $\mathbb{R}$，于是 $\mathbb{R}$ 不是紧致的。

第二章　流形和张量场

习题

1. 试证 §2.1 例 2 定义的拓扑同胚映射 $\psi_i^{\pm}$ 在 $O_i^{\pm}$ 的所有交叠区域上满足相容性条件，从而证实 S^1 确是 1 维流形。

证明 首先，易知 $O_i^+ \cap O_i^- = \varnothing$，故只需考虑 $O_1^+ \cap O_2^+$ 及 $O_i^+ \cap O_j^-$。以

$$O_1^+ \cap O_2^+ = \{(x^1, x^2) \in S^1 \mid x^1 > 0, x^2 > 0\}$$

为例，根据定义，

$$\psi_2^+ \circ (\psi_1^+)^{-1}(t) = \psi_2^+((\sqrt{1-t^2}, t)) = \sqrt{1-t^2},$$

这的确是 C^∞ 的函数。

2. 说明 n 维矢量空间可看作 n 维平庸流形。

证明 为 n 维矢量空间 V 任取拓扑，再取定一组基 $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$，则在基 $\mathcal{B}$ 下，$\forall v \in V$，v 可展开为

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i,$$

令映射 $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ 定义为：

$$\psi\colon v \mapsto (v^1, v^2, \cdots, v^n),$$

则取图册 $\{(V, \psi)\}$，即可令 V 成为 n 维平庸流形。

3. 设 X 和 Y 是拓扑空间，$f\colon X \to Y$ 是同胚。若 X 还是个流形，试给 Y 定义一个微分结构使 $f\colon X \to Y$ 升格为微分同胚。

证明 记 X 的图册为 $\{(O_\alpha, \psi_\alpha)\}$，对每个 α，由于 f 是拓扑同胚，

$$O'_\alpha := f(O_\alpha) \in \mathscr{T}_Y,$$

在 O'_α 上定义映射

$$\psi'_\alpha := \psi_\alpha \circ f^{-1},$$

则

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} &= \psi_\alpha \circ f^{-1} \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} \\ &= \mathrm{Id}_{V_\alpha} \in C^\infty(V_\alpha), \end{aligned}$$

于是在给 Y 定义图册 $\{(O'_\alpha, \psi'_\alpha)\}$ 后，f 成为一个微分同胚。

4. 设 (x, y) 是 $\mathbb{R}^2$ 的自然坐标，$C(t)$ 是曲线，参数表达式为 $x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad t \in (0, \pi)$。若 $p = C(\pi/3)$，写出曲线在 p 的切矢在自然坐标基的分量，并画图表示出该曲线及该切矢。

解 记 p 点切矢为 T，则

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x \circ C(t))\Big|_{t=\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ T_y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y \circ C(t))\Big|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

如下图：

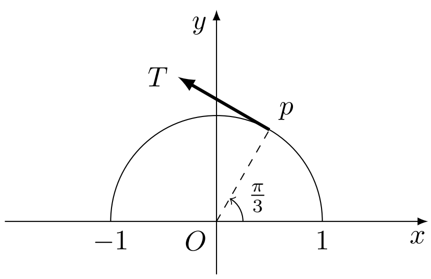

图 2.1: 曲线 $C(t)$ 及其在 p 点的切矢

5. 设曲线 $C(t)$ 和 $C'(t) \equiv C(2t_0 - t)$ 在 $C(t_0) = C'(t_0)$ 点的切矢分别为 v 和 v'，试证 $v + v' = 0$。

证明 记 $t'=2t_0-t$，依定义，$\forall f\in\mathscr{F}_M$，

$$
\begin{aligned}
v(f)&=\left.\frac{\mathrm{d}(f\circ C(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0},\\
v'(f)&=\left.\frac{\mathrm{d}(f\circ C'(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\\
&=\left.\frac{\mathrm{d}(f\circ C(t'))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\\
&=\left.\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\times\left.\frac{\mathrm{d}(f\circ C(t'))}{\mathrm{d}t'}\right|_{t=t_0,\text{即}t'=2t_0-t=t_0}\\
&=-\left.\frac{\mathrm{d}(f\circ C(t'))}{\mathrm{d}t'}\right|_{t'=t_0}\\
&=-v(f)
\end{aligned}
$$

$\therefore v'=-v,\quad v+v'=0$

6. 设 O 为坐标系 $\{x^\mu\}$ 的坐标域，$p\in O$，$v\in V_p$，v^μ 是 v 的坐标分量，把坐标 x^μ 看作 O 上的 C^∞ 函数，试证 $v^\mu=v(x^\mu)$。提示：用 $v=v^\nu X_\nu$ 两边作用于函数 x^μ。

证明 由 $v=v^\nu X_\nu$，

$$
v(x^\mu)=v^\nu X_\nu(x^\mu)=v^\nu\left.\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}\right|_p=v^\nu\delta^\mu{}_\nu=v^\mu.
$$

7. 设 M 是二维流形，(O,ψ) 和 (O',ψ') 是 M 上的两个坐标系，坐标分别为 $\{x,y\}$ 和 $\{x',y'\}$，在 $O\cap O'$ 上的坐标变换为 $x'=x,\quad y'=y-\Omega x(\Omega=\text{常数})$，试分别写出坐标基矢 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ 用坐标基矢 $\partial/\partial x'$, $\partial/\partial y'$ 的展开式。

解 坐标基矢逐点的变换关系为 $X_\mu=\left.\dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right|_p X_\nu$，故

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'}\\
&=\frac{\partial}{\partial x'}-\Omega\frac{\partial}{\partial y'};\\
\frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}\\
&=\frac{\partial}{\partial y'}.
\end{aligned}
$$

8. (a) 试证式 (2-2-9) 的 $[u,v]$ 在每点满足矢量定义（§2.2 定义 2）的两个条件，从而的确是矢量场。

(b) 设 u,v,w 为流形 M 上的光滑矢量场，试证

$$
[[u,v],w]+[[w,u],v]+[[v,w],u]=0
$$

（此式称为**雅可比恒等式**）。

证明 (a) (i) 线性性：显然；

(ii) 莱布尼兹律：显然。证毕[1]。

(b) 由定义，逐次展开有：

$$
\begin{aligned}
&[[u,v],w]+[[w,u],v]+[[v,w],u]\\
=&[u,v]\circ w-w\circ[u,v]+[w,u]\circ v\\
&-v\circ[w,u]+[v,w]\circ u-u\circ[v,w]\\
=&u\circ v\circ w-v\circ u\circ w-w\circ u\circ v+w\circ v\circ u\\
&+w\circ u\circ v-u\circ w\circ v-v\circ w\circ u+v\circ u\circ w\\
&+v\circ w\circ u-w\circ v\circ u-u\circ v\circ w+u\circ w\circ v\\
=&0.
\end{aligned}
$$

9. 设 $\{r,\phi\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中某开集（坐标域）上的极坐标，$\{x,y\}$ 为自然坐标，

(a) 写出极坐标系的坐标基矢 $\partial/\partial r$ 和 $\partial/\partial\phi$（作为坐标域上的矢量场）用 $\partial/\partial x$，$\partial/\partial y$ 展开的表达式。

(b) 求矢量场 $[\partial/\partial r\,,\partial/\partial x]$ 用 $\partial/\partial x\,,\partial/\partial y$ 展开的表达式。

(c) 令 $\hat{e}_r\equiv\partial/\partial r\,,\hat{e}_\phi=r^{-1}\,\partial/\partial\phi$，求 $[\hat{e}_r,\hat{e}_\phi]$ 用 $\partial/\partial x\,,\partial/\partial y$ 展开的表达式。

解 (a) 坐标变换为

$$
\begin{cases}
x=r\cos\phi,\\
y=r\sin\phi.
\end{cases}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}&=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\\
&=\cos\phi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\phi\frac{\partial}{\partial y}\\
&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y},\\
\frac{\partial}{\partial\phi}&=\frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\\
&=-r\sin\phi\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\phi\frac{\partial}{\partial y}\\
&=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

---

[1] 皮这一下非常开心 ~

(b) $\forall f \in \mathscr{F}_M$,

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x}\right](f) = &\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}(f) \\ &- \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f) \\ = &\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ &- \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\ = &- \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y} \\ = &- \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial F}{\partial y} \\ = &\left(-\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f),\end{aligned}$$

$\therefore$ 在基 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ 下，

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x}\right] = -\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial y}.$$

(c) 由 (a)，

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}, \\ \hat{e}_\phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

于是有 $\forall f \in \mathscr{F}_M$，

$$\begin{aligned}&[\hat{e}_r, \hat{e}_\phi](f) \\ = &\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f) \\ &- \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\\
&\quad+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\\
&\quad+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\\
&\quad-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial x}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\\
&=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x}-\cancel{\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}\\
&\quad+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y}+\cancel{\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}}\\
&\quad-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x}-\cancel{\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}}\\
&\quad+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y}+\cancel{\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}\\
&\quad+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+\cancel{\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}\\
&\quad+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y}+\cancel{\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}}\\
&\quad-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial x}-\cancel{\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}}\\
&\quad-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial F}{\partial y}-\cancel{\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}
\end{aligned}$$

……好了算到这里我受够了，我选择直接丢进 Mathematica 让麦酱来算 (￣ω￣;) 麦酱报告说结果是酱紫：

$$\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial F}{\partial y}$$

于是得到

$$[\hat{e}_r,\hat{e}_\phi]=\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

10. 设 u，v 为 M 上的矢量场，试证 $[u,v]$ 在任何坐标基底的分量满足

$$[u,v]^\mu = v^\nu\,\partial v^\mu/\partial x^\nu - v^\nu\,\partial u^\mu/\partial x^\nu\,.\quad \text{提示：用式 (2-2-3}'\text{) 和 (2-2-3)}$$

证明 $\forall f \in \mathscr{F}_M$，

$$
\begin{aligned}
[u, v](f) &= \left[u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, v^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right](f) \\
&= u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(v^\nu \frac{\partial F}{\partial x^\nu}\right) - v^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(u^\mu \frac{\partial F}{\partial x^\nu}\right) \\
&= u^\mu \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial F}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \\
&= \left(u^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\right) \frac{\partial F}{\partial x^\mu}
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
[u, v] &= \left(u^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \\
[u, v]^\mu &= \left(u^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\right).
\end{aligned}
$$

11. 设 $\{e_\mu\}$ 为 V 的基底，$\{e^{\mu *}\}$ 为其对偶基底，$v \in V$，$\omega \in V^*$，试证

$$
\omega = \omega(e_\mu) e^{\mu *}, \quad v = e^{\mu *}(v) e_\mu .
$$

证明 设 $\omega = \omega_\mu e^{\mu *}$，则

$$
\begin{aligned}
\omega(e_\nu) &= \omega_\mu e^{\mu *}(e_\nu) \\
&= \omega_\mu \delta^\mu{}_\nu \\
&= \omega_\nu ,
\end{aligned}
$$

$\therefore \omega = \omega(e_m u) e^{\mu *}$. 同理设 $v = v^\mu e_\mu$，

$$
\begin{aligned}
e^{\nu *}(v) &= v^\mu e^{\nu *}(e_\mu) \\
&= v^\mu \delta^\nu{}_\mu \\
&= v^\nu ,
\end{aligned}
$$

$\therefore v = e^{\mu *} e_\mu$.

12. 试证 $\omega'{}_\mu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \omega_\mu$（定理 2-3-4）。

证明 由上题，

$$
\begin{aligned}
\omega'{}_\nu &= \omega\left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right) \\
&= \omega\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\omega_\mu .
\end{aligned}
$$

13. 试证由式 (2-3-5) 定义的映射 $v \mapsto v^{**}$ 是同构映射。提示：可利用线性代数的结论，即同维矢量空间之间的一一线性映射必到上。

证明 留作习题答案略，读者自证不难（逃 $-=\equiv\Sigma((($つ •̀ ω •́)つ）

14. 设 $C_1^1 T$ 和 $(C_1^1 T)'$ 分别是 $(2,1)$ 型张量 T 借两个基底 $\{e_\mu\}$ 和 $\{e'_\mu\}$ 定义的缩并，试证 $\left(C_1^1 T\right)' = C_1^1 T$。

证明 记基 $\{e'_\mu\}$ 在基 $\{e_\mu\}$ 下的展开式为 $e'_\mu = A^\nu{}_\mu e_\nu$ ，则

$$
e'^{\mu *} = \left(\tilde{A}^{-1}\right)_\nu{}^\mu e^{\nu *},
$$

于是 $\forall \omega \in V^*$，

$$
\begin{aligned}
\left(C_1^1 T\right)'(\omega) &= T(e'^{\mu *}, \omega; e'_\mu) \\
&= T\left(\left(\tilde{A}^{-1}\right)_\nu{}^\mu e^{\nu *}, \omega; A^\sigma{}_\mu e_\sigma\right) \\
&= \left(\tilde{A}^{-1}\right)_\nu{}^\mu A^\sigma{}_\mu T\left(e^{\nu *}, \omega; e_\sigma\right) \\
&= \left(\tilde{A}^{-1}\right)_\nu{}^\mu \left(\tilde{A}\right)_\mu{}^\sigma T(e^{\nu *}, \omega; e_\sigma) \\
&= \delta_\nu{}^\sigma T(e^{\nu *}, \omega; e_\sigma) \\
&= T(e^{\nu *}, \omega; e_\nu) \\
&= C_1^1 T(\omega).
\end{aligned}
$$

15. 设 g 为 V 的度规，试证 $g\colon V \to V^*$ 是同构映射（可参见第 13 题的提示）。

证明 线性空间的同构映射指的是可逆线性映射。这里证一个更普遍的结论，首先我们定义一个线性映射 $T\colon V \to W$ 的 kernel 为

$$
\ker T := \{v \in V \mid T(v) = 0\},
$$

我们有如下 claim：

claim T 是单射当且仅当 $\ker T = \{0\}$。

proof 若 T 是单射，由于 $\forall v \in V$，$T(0 \cdot v) = 0T(v) = 0$, $\quad \therefore \ker T = \{0\}$；若 $\ker T = \{0\}$，假设存在 $u, v \in V$，使得 $T(u) = T(v)$，则由于 T 是线性映射，$T(u-v) = T(u) - T(v) = 0$，于是 $u - v \in \ker T$，即 $u = v$，于是 T 是单射。

易证任取一组基 $e_i \in V$, $T(e_i) \in W$ 线性无关当且仅当 $\ker T = \{0\}$, 若 $\dim V = \dim W$, 则这告诉我们 $T(e_i)$ 构成 W 的基，于是 $T(v^i e_i) = v^i T(e_i)$ 将取遍整个 W。于是我们证明了，若 $\dim V = \dim W$，则线性映射 $T\colon V \to W$ 为一一到上的（等价于可逆）当且仅当 $\ker T = \{0\}$。

对于度规 g，由于非退化性，知 $\ker g = \{0\}$，故 g 为线性同构。

16. 试证线长与曲线的参数化无关。

证明 设有重参数化 $C'(t') = C(t)$，线长为

$$
\begin{aligned}
l' &= \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t'}}\, \mathrm{d}t' \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g_{\mu\nu} \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right) \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\right)} \left|\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}}\, \mathrm{d}t \\
&= l.
\end{aligned}
$$

17. 设 (x, y) 是二维欧氏空间的笛卡尔坐标系，试证由式 (2-5-14) 定义的 $\{x', y'\}$ 也是笛卡尔系。

证明 式 (2-5-14) 为

$$
\begin{cases}
x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\
y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.
\end{cases}
$$

其逆为：

$$
\begin{cases}
x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\
y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.
\end{cases}
$$

于是坐标基矢的变换为：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y} \\
&= \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial y}, \\
\frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y} \\
&= -\sin\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha \frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

故

$$
\delta\left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial x'}\right) = \cos^2\alpha\, \delta\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + 2\cos\alpha\sin\alpha\, \delta\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \sin^2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= 1; \\
\delta\left(\frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial y'}\right) &= \sin^2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) - 2\cos\alpha\sin\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&\quad + \cos^2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= 1; \\
\delta\left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}\right) &= \delta\left(\frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial x'}\right) \\
&= -\cos\alpha\sin\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \cos 2\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&\quad + \cos\alpha\sin\alpha\ \delta\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$\therefore \{x', y'\}$ 是笛卡尔系。

18. 设 $\{t, x\}$ 是二维闵氏空间的洛伦兹坐标系，试证由式 (2-5-20) 定义的 $\{t', x'\}$ 也是洛伦兹系。

证明 式 (2-5-20) 为

$$
\begin{cases}
t' = t\cosh\lambda + x\sinh\lambda, \\
x' = t\sinh\lambda + x\cosh\lambda.
\end{cases}
$$

其逆为：

$$
\begin{cases}
t = t'\cosh\lambda - x'\sinh\lambda, \\
x = -t'\sinh\lambda + x'\cosh\lambda.
\end{cases}
$$

于是坐标基矢的变换为：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x} \\
&= \cosh\lambda\frac{\partial}{\partial t} - \sinh\lambda\frac{\partial}{\partial x}, \\
\frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} \\
&= -\sinh\lambda\frac{\partial}{\partial t} + \cosh\lambda\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

故

$$\begin{aligned}
\eta\left(\frac{\partial}{\partial t'},\frac{\partial}{\partial t'}\right) &= \cosh^2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right) - 2\cosh\lambda\sinh\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&\quad + \sinh^2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&= -1;\\
\eta\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial x'}\right) &= \sinh^2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right) - 2\cosh\lambda\sinh\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&\quad + \cosh^2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&= 1;\\
\eta\left(\frac{\partial}{\partial t'},\frac{\partial}{\partial x'}\right) &= \eta\left(\frac{\partial}{\partial x'},\frac{\partial}{\partial t'}\right)\\
&= -\cosh\lambda\sinh\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right) + \cosh 2\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&\quad - \cosh\lambda\sinh\lambda\,\eta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\therefore \{t', x'\}$ 是洛伦兹系。

19. (a) 用张量变换律求出 3 维欧氏度规在球坐标系中的全部分量 ${g'}_{\mu\nu}$。

(b) 已知 4 维闵氏度规 g 在洛伦兹系中的线元表达式为 $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$，求 g 及其逆 g^{-1} 在新坐标系 $\{t', x', y', z'\}$ 的全部分量 ${g'}_{\mu\nu}$ 以及 $g'^{\mu\nu}$，该新坐标系定义如下：

$$t' = t, \quad z' = z, \quad x' = (x^2+y^2)^{1/2}\cos(\phi - \omega t),$$
$$y' = (x^2+y^2)^{1/2}\sin(\phi-\omega t), \quad \omega = 常数,$$

其中 ϕ 满足 $\cos\phi = y(x^2+y^2)^{1/2}, \quad \sin\phi = x(x^2+y^2)^{1/2}$。提示：先求 ${g'}_{\mu\nu}$ 再求 $g'^{\mu\nu}$。

解 (a) 球坐标与笛卡尔系的变换关系为：

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi,\\ y = r\sin\theta\sin\phi,\\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}
{g'}_{rr} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial r}\frac{\partial x^\nu}{\partial r} g_{\mu\nu}\\
&= (\sin\theta\cos\phi)^2 + (\sin\theta\sin\phi)^2 + \cos^2\theta\\
&= 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{g'}_{r\theta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial r}\frac{\partial x^\nu}{\partial \theta} g_{\mu\nu} \\
&= \sin\theta\cos\phi\cdot r\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\cdot r\cos\theta\sin\phi - \cos\theta\cdot r\sin\theta \\
&= 0; \\
{g'}_{r\phi} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial r}\frac{\partial x^\nu}{\partial \phi} g_{\mu\nu} \\
&= -\sin\theta\cos\phi\cdot r\sin\theta\sin\phi + \sin\theta\sin\phi\cdot r\sin\theta\cos\phi + 0 \\
&= 0; \\
{g'}_{\theta\theta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta}\frac{\partial x^\nu}{\partial \theta} g_{\mu\nu} \\
&= (r\cos\theta\cos\phi)^2 + (r\cos\theta\sin\phi)^2 + (-r\sin\theta)^2 \\
&= r^2; \\
{g'}_{\theta\phi} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta}\frac{\partial x^\nu}{\partial \phi} g_{\mu\nu} \\
&= -r\cos\theta\cos\phi\cdot r\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta\sin\phi\cdot r\sin\theta\cos\phi + 0 \\
&= 0; \\
{g'}_{\phi\phi} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi}\frac{\partial x^\nu}{\partial \phi} g_{\mu\nu} \\
&= (-r\sin\theta\sin\phi)^2 + (r\sin\theta\cos\phi)^2 + 0 \\
&= r^2\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

(b) 先求偏导数：

$$\begin{aligned}
\sin\phi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\implies \cos\phi\,\mathrm{d}\phi &= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y \\
\implies \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\phi &= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y \\
\implies \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

进而有：

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) - \sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)\frac{\partial\phi}{\partial x} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) \\
&= \frac{x}{x^2+y^2}(y\cos\omega t + x\sin\omega t) - \frac{y}{x^2+y^2}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) \\
&= \sin\omega t \\
\frac{\partial x'}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) - \sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)\frac{\partial\phi}{\partial y} \\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) \\
&= \frac{y}{x^2+y^2}(y\cos\omega t + x\sin\omega t) + \frac{x}{x^2+y^2}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) \\
&= \cos\omega t \\
\frac{\partial y'}{\partial t} &= -\omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t) \\
\frac{\partial y'}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) + \sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\frac{\partial\phi}{\partial x} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\phi-\omega t) \\
&= \frac{x}{x^2+y^2}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) + \frac{y}{x^2+y^2}(y\cos\omega t + x\sin\omega t) \\
&= \cos\omega t \\
\frac{\partial y'}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) + \sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\frac{\partial\phi}{\partial y} \\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\phi-\omega t) \\
&= \frac{y}{x^2+y^2}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) - \frac{x}{x^2+y^2}(y\cos\omega t + x\sin\omega t) \\
&= -\sin\omega t
\end{aligned}
$$

于是由张量变换律，

$$
\begin{aligned}
g'^{00} &= \frac{\partial t'}{\partial x^\mu}\frac{\partial t'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu} \\
&= -1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 \\
&= -1 \\
g'^{01} &= \frac{\partial t'}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'}{\partial x^\nu}g^{\mu\nu} \\
&= -1\cdot\omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t) + 0 + 0 + 0 \\
&= -\omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g'^{02} &= \frac{\partial t'}{\partial x^\mu}\frac{\partial y'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -1 \cdot \left(-\omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\right) + 0 + 0 + 0 \\
&= \omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t) \\
g'^{03} &= \frac{\partial t'}{\partial x^\mu}\frac{\partial z'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -0 + 0 + 0 + 0 \\
&= 0 \\
g'^{11} &= \frac{\partial x'}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -\left(\omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)\right)^2 + (\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2 + 0^2 \\
&= 1 - \left(x^2+y^2\right)\omega^2\sin^2(\phi-\omega t) \\
g'^{12} &= \frac{\partial x'}{\partial x^\mu}\frac{\partial y'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -\left(\omega\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\omega t)\right)\cdot\left(-\omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\right) \\
&\quad + \sin\omega t\cdot\cos\omega t + \cos\omega t\cdot(-\sin\omega t) + 0 \\
&= \left(x^2+y^2\right)\omega^2\sin(\phi-\omega t)\cos(\phi-\omega t) \\
g'^{13} &= \frac{\partial x'}{\partial x^\mu}\frac{\partial z'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -0 + 0 + 0 + 0 \\
&= 0 \\
g'^{22} &= \frac{\partial y'}{\partial x^\mu}\frac{\partial y'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -\left(-\omega\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\omega t)\right)^2 + (\cos\omega t)^2 + (-\sin\omega t)^2 + 0^2 \\
&= 1 - \left(x^2+y^2\right)\omega^2\cos^2(\phi-\omega t) \\
g'^{23} &= \frac{\partial y'}{\partial x^\mu}\frac{\partial z'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -0 + 0 + 0 + 0 \\
&= 0 \\
g'^{33} &= \frac{\partial z'}{\partial x^\mu}\frac{\partial z'}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \\
&= -0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

于是 g^{-1} 在带撇坐标系下的分量矩阵为：

$$[g']^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -r\omega\sin\psi & r\omega\cos\psi & 0 \\ -r\omega\sin\psi & 1-r^2\omega^2\sin^2\psi & r^2\omega^2\sin\psi\cos\psi & 0 \\ -r\omega\sin\psi & r^2\omega^2\cos\psi\sin\psi & 1-r^2\omega^2\cos^2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\psi=\phi-\omega t$。其逆矩阵为

$$[g'] = \begin{pmatrix} r^2\omega^2-1 & -r\omega\sin\psi & r\omega\cos\psi & 0 \\ -r\omega\sin\psi & 1 & 0 & 0 \\ r\omega\cos\psi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

此即 g 在带撇坐标系下的分量 ${g'}_{\mu\nu}$ 排成的矩阵。

20. 试证 3 维欧氏空间中球坐标基矢 $\partial/\partial r$, $\partial/\partial\theta$, $\partial/\partial\phi$ 的长度依次为 $1, r, r\sin\theta$。

证明 由 19(a) 知，

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial}{\partial r}\right\| &= \sqrt{|{g'}_{rr}|} = 1, \\ \left\|\frac{\partial}{\partial \theta}\right\| &= \sqrt{|{g'}_{\theta\theta}|} = r, \\ \left\|\frac{\partial}{\partial \phi}\right\| &= \sqrt{|{g'}_{\phi\phi}|} = r\sin\theta. \end{aligned}$$

21. 用抽象指标记号证明 ${T'}^{\mu}{}_{\nu} = \dfrac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\dfrac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}T^{\rho}{}_{\sigma}$。

证明

$$\begin{aligned} {T'}^{\mu}{}_{\nu} &= T^a{}_b\left(\mathrm{d}x'^{\mu}\right)_a\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\right)^b \\ &= T^a{}_b\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\left(\mathrm{d}x'^{\rho}\right)_a\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}}\right)^b \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}T^{\rho}{}_{\sigma}. \end{aligned}$$

22. 以 g 和 g' 分别代表度规 g_{ab} 在坐标系 $\{x^\mu\}$ 和 $\{x'^\mu\}$ 的分量 $g_{\mu\nu}$ 和 ${g'}_{\mu\nu}$ 组成的两个 $n\times n$ 矩阵的行列式，试证 $g' = |\partial x^\rho/\partial x'^\sigma|^2 g$，其中 $|\partial x^\rho/\partial x'^\sigma|$ 是坐标变换 $\{x^\mu\}\mapsto\{x'^\mu\}$ 的雅可比行列式，即由 $\partial x^\rho/\partial x'^\sigma$ 组成的 $n\times n$ 行列式。注：本题表明度规的行列式在坐标变换下不是不变量。提示：取等式 ${g'}_{\rho\sigma} = (\partial x^\mu/\partial x'^\rho)(\partial x^\nu/\partial x'^\sigma)\,g_{\mu\nu}$ 的行列式。

证明 ……梁爷爷你提示都把题写完了我还写啥 (˘•ω•˘)

23. 设 $\{x^\mu\}$ 是流形上的任一局域坐标系，试判断下列等式的是非：

(1) $(\partial/\partial x^\mu)^a(\partial/\partial x^\nu)_a = g_{\mu\nu}$，其中 $(\partial/\partial x^\mu)_a \equiv g_{ab}(\partial/\partial x^\nu)^a$；

(2) $(\mathrm{d}x^\mu)^a(\mathrm{d}x^\nu)_a = g^{\mu\nu}$，其中 $(\mathrm{d}x^\mu)^a \equiv g^{ab}(\mathrm{d}x^\mu)_b$；

(3) $(\partial/\partial x^\mu)_a = (\mathrm{d}x^\mu)_a$；

(4) $(\mathrm{d}x^\mu)^a = (\partial/\partial x^\mu)^a$；

(5) $v^\mu\omega_\mu = v_\mu\omega^\mu$；

(6) $g_{\mu\nu}T^{\nu\rho}S_\rho{}^\sigma = T_{\mu\rho}S^{\rho\sigma}$；

(7) $v^a u^b = v^b u^a$；

(8) $v^a u^b = u^b v^a$。

解 (1) 正确。这是标量等式。根据 (0,2) 型张量分量的定义即知正确。

(2) 正确。这是标量等式。根据 (2,0) 型张量分量的定义即知正确。

(3) 不正确。这是对偶矢量等式。对其验证只需作用在坐标基矢上：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a = g_{\mu\nu};$$
$$(\mathrm{d}x^\mu)_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a = \delta_{\mu\nu},$$

故 metric dual of basis 等于 dual basis 的条件为该坐标系是局域的笛卡尔系。

(4) 不正确。这是矢量等式。对其验证只需用对偶坐标基矢作用：

$$(\mathrm{d}x^\mu)^a(\mathrm{d}x^\nu)_a = g^{\mu\nu};$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a(\mathrm{d}x^\nu)_a = \delta^{\mu\nu}.$$

故此式成立的条件为该坐标系为局域的笛卡尔系。或者可以这样得到：此式与 (3) 中的表达式互为 metric dual，故它们是等价的。

(5) 正确。这是数量等式。

$$\begin{aligned} v_\mu\omega^\mu &= g_{\rho\mu}v^\rho g^{\sigma\mu}\omega_\mu \\ &= v^\rho\omega_\rho. \end{aligned}$$

(6) 正确。这是数量等式。

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}T^{\nu\rho}S_\rho{}^\sigma &= g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha}g^{\rho\beta}T_{\alpha\beta}\,g_{\rho\gamma}S^{\gamma\sigma} \\ &= \delta_\mu{}^\alpha\delta_\gamma{}^\beta T_{\alpha\beta}\,S^{\gamma\sigma} \\ &= T_{\mu\beta}\,S^{\beta\sigma}. \end{aligned}$$

(7) 不正确。这是 (2,0) 型张量等式。对其验证只需作用在对偶坐标基矢上：

$$v^a u^b \left(\mathrm{d}x^\mu\right)_a \left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b = v^\mu u^\nu;$$
$$v^b u^a \left(\mathrm{d}x^\mu\right)_a \left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b = v^\nu u^\mu.$$

$\therefore$ 该式成立的条件是 $v^\mu u^\nu = u^\mu v^\nu$， $\forall \mu, \nu$，这是不一定能满足的。

(8) 正确。这是 (2,0) 型张量等式，对其验证只需作用在对偶坐标基底上：

$$v^a u^b \left(\mathrm{d}x^\mu\right)_a \left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b = v^\mu u^\nu;$$
$$u^b v^a \left(\mathrm{d}x^\mu\right)_a \left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b = v^\mu u^\nu.$$

$\therefore$ 该式恒成立。

24. 设 T_{ab} 是矢量空间 V 上的 (0,2) 型张量，试证 $T_{ab}\, v^a v^b = 0, \quad \forall v^a \in V \implies T_{ab} = T_{[ab]}$。提示：把 v^a 表为任意两个矢量 u^a 和 w^a 之和。

证明 做任意拆分 $v^a = u^a + w^a$，注意到 $T_{ab}\, u^a u^b = 0$ 以及 $T_{ab}\, w^a w^b = 0$，有：

$$\begin{aligned}
T_{ab}\, v^a v^b &= T_{ab}\, u^a u^b + T_{ab}\, w^a w^b + T_{ab}\, u^a w^b + T_{ab}\, w^a u^b \\
&= T_{ab}\, u^a w^b + T_{ab}\, w^a u^b \\
&= \left(T_{(ab)}\, u^a w^b + T_{(ab)}\, u^b w^a\right) + \left(T_{[ab]}\, u^a w^b + T_{[ab]}\, u^b w^a\right) \\
&= T_{(ab)}\, u^a w^b + T_{(ab)}\, u^b w^a \\
&= 0
\end{aligned}$$

于是

$$T_{(ab)} = 0, \quad T_{ab} = T_{[ab]}\,.$$

25. 试证 $T_{abcd} = T_{a[bc]d} = T_{ab[cd]} \implies T_{abcd} = T_{a[bcd]}$。

注 (1) 推广至一般的结论是

$$T_{\cdots a \cdots b \cdots c \cdots} = T_{\cdots [a \cdots b] \cdots c \cdots} = T_{\cdots a \cdots [b \cdots c] \cdots} \implies T_{\cdots a \cdots b \cdots c \cdots} = T_{\cdots [a \cdots b \cdots c] \cdots}\,.$$

上式的前提中只有两个等号，关键是 $T_{\cdots [a \cdots b] \cdots c \cdots}$ 和 $T_{\cdots a \cdots [b \cdots c] \cdots}$ 中的指标 b 都在方括号内。

(2) 把前提和结论中的方括号改为圆括号，则推广前后的命题仍成立。

证明 此命题等价于 $T_{a(bc)d} = T_{ab(cd)} = 0 \implies T_{a(bcd)} = 0$。反正只有四阶，不妨暴力展开

$$\begin{aligned}
6T_{a(bcd)} &= T_{abcd} + T_{abdc} + T_{acbd} + T_{acdb} + T_{adbc} + T_{adcb} \\
&= T_{abcd} + T_{abdc} - T_{abcd} + T_{acdb} - T_{abdc} - T_{acdb} \\
&= T_{abcd} - T_{abcd} - T_{abcd} - T_{acbd} + T_{abcd} + T_{acbd} \\
&= T_{abcd} - T_{abcd} - T_{abcd} + T_{abcd} + T_{abcd} - T_{abcd} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

其中 $=$ 表示根据 $T_{a(bc)d}=0$ 交换指标次序，$=$ 表示根据 $T_{ab(cd)}=0$ 交换指标次序。

第三章　黎曼（内禀）曲率张量

习题

1. 放弃 ∇_a 定义中的无挠性条件 (e)，

(1) 试证存在张量 $T^c{}_{ab}$（叫**挠率张量**）使

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c{}_{ab} \nabla_c f, \quad \forall f \in \mathscr{F}.$$

提示：令 $\tilde{\nabla}_a$ 为无挠算符，模仿定理 3-1-4 证明中的推导。

(2) 试证 $T^c{}_{ab} u^a v^b = u^a \nabla_a v^c - v^a \nabla_a u^c - [u,v]^c \quad \forall u^a, v^a \in \mathscr{F}(1,0)$。

证明 (1) 去掉无挠性条件仍有 $\nabla_a \omega_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - C^c{}_{ab} \omega_c$ 成立，于是令 $\omega_a = (\mathrm{d}f)_a = \nabla_a f = \tilde{\nabla}_a f$，得

$$\nabla_a \nabla_b f = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - C^c{}_{ab} \nabla_c f$$

交换指标 a, b 得

$$\nabla_b \nabla_a f = \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a f - C^c{}_{ba} \nabla_c f$$

两式相减得

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = (C^c{}_{ba} - C^c{}_{ab}) \nabla_c f$$

于是得挠率张量 $T^c{}_{ab} = C^c{}_{ab} - C^c{}_{ba}$。

(2)

$$\begin{aligned}
[u,v](f) &= u(v(f)) - v(u(f)) \\
&= u^b \nabla_b (v^a \nabla_a f) - v^a \nabla_a \left(u^b \nabla_b f\right) \\
&= u^b (\nabla_b v^a) \nabla_a f + u^b v^a \nabla_b \nabla_a f - v^a \left(\nabla_a u^b\right) \nabla_b f - v^a u^b \nabla_a \nabla_b f \\
&= \left(u^b \nabla_b v^a - v^b \nabla_b u^a\right) \nabla_a f - u^b v^a T^c{}_{ba} \nabla_c f \\
&= \left(u^a \nabla_a v^c - v^a \nabla_a u^c - T^c{}_{ab} u^a v^b\right) \nabla_c f
\end{aligned}$$

故 $T^c{}_{ab} u^a v^b = u^a \nabla_a v^c - v^a \nabla_a u^c - [u,v]^c$。

2. 设 v^a 为矢量场，v^μ 和 v'^μ 为 v^a 在坐标系 $\{x^\nu\}$ 和 $\{x'^\nu\}$ 的分量，$A^\nu{}_\mu \equiv \partial v^\nu/\partial x^\mu$，$A'^\nu{}_\mu \equiv \partial v'^\nu/\partial x'^\mu$，试证 $A^\nu{}_\mu$ 和 $A'^\nu{}_\mu$ 的关系一般而言不满足张量分量变换律。提示：利用 v^ν 与 v'^ν 之间的变换规律。

证明

$$\begin{aligned}
A'^\nu{}_\mu &= \frac{\partial v'^\nu}{\partial x'^\mu} \\
&= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}v^\rho\right) \\
&= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho}v^\rho + \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}\frac{\partial v^\rho}{\partial x^\sigma} \\
&= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\rho}v^\rho + \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho}A^\rho{}_\sigma,
\end{aligned}$$

可以看到相比于张量分量变换律多出了第一项。

3. 试证定理 3-1-7。

证明

$$\begin{aligned}
v^\nu{}_{;\mu} &= \nabla_a v^b \left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \\
&= \left(\partial_a v^b + \Gamma^b{}_{ac}v^c\right)\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \\
&= v^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}v^\sigma, \\
\omega_{\nu;\mu} &= \nabla_a \omega_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b \\
&= \left(\partial_a \omega_b - \Gamma^c{}_{ab}\omega_c\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b \\
&= \omega_{\nu,\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\omega_\sigma.
\end{aligned}$$

4. 用下式定义 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$：$\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b \nabla_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a = \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a$，试证

(a) $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$（提示：利用 ∇_a 的无挠性和坐标基矢间的对易性。）；

(b) $v^\nu{}_{;\mu} = v^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\beta}v^\beta$（注：这其实是克氏符的等价定义。）。

证明 (a) 交换指标 μ, ν 得

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b \nabla_b \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a = \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a$$

两式相减得：

$$\begin{aligned}\left(\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}-\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b\nabla_b\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a-\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b\nabla_b\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a\\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu},\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right]^a\\ &= 0,\end{aligned}$$

故 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}=\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$。

(b) 由

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b\nabla_b\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a=\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a$$

知

$$\nabla_b\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a=\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a,$$

于是

$$\begin{aligned}\nabla_a v^b &= \nabla_a\left[v^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b\right]\\ &= \left(\mathrm{d}v^\mu\right)_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b+v^\mu\nabla_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b\\ &= \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b+v^\mu\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^b\\ &= \left(\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}+\Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}v^\sigma\right)\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b\end{aligned}$$

于是 $\nabla_a v^b$ 的分量 $v^\nu{}_{;\mu}=v^\nu{}_{,\mu}+\Gamma^\nu{}_{\mu\sigma}v^\sigma$。

5. 判断是非：

(1) $\nabla_a\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_b=0$；

(2) $v^\nu{}_{;\mu}=\left(\nabla_a v^b\right)\left(\partial/\partial x^\mu\right)^a\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b$；

(3) $v^\nu{}_{,\mu}=\left(\partial_a v^b\right)\left(\partial/\partial x^\mu\right)^a\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_b$；

(4) $v^\nu{}_{;\mu}=\left(\partial/\partial x^\mu\right)^a\nabla_a v^\nu$；

(5) $v^\nu{}_{,\mu}=\left(\partial/\partial x^\mu\right)^a\nabla_a v^\nu$。

解 (1) 错。

$$\begin{aligned}\nabla_a\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_b &= \partial_a\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_b-\Gamma^c{}_{ab}\left(\mathrm{d}x^\mu\right)_c\\ &= 0-\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\left(\mathrm{d}x^\nu\right)_a\left(\mathrm{d}x^\rho\right)_b\end{aligned}$$

不一定为零。

(2) 根据定义知正确。

(3) 根据定义知正确。

(4) 不正确。(右边和 ∇_a 的选择无关可直接判断)

$$\begin{aligned}
v^{\nu}{}_{;\mu} &= (\nabla_a v^b)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a (\mathrm{d}x^\nu)_b \\
&= \left[\nabla_a v^\rho \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^b\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a (\mathrm{d}x^\nu)_b \\
&= (\nabla_a v^\rho)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a (\mathrm{d}x^\nu)_b + v^\rho\left[\nabla_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^b\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a (\mathrm{d}x^\nu)_b\,,
\end{aligned}$$

多出来的后一项类似 (1) ，一般不为零。

(5) 正确，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \nabla_a v^\nu &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a (\mathrm{d}v^\nu)_a \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\rho}(\mathrm{d}x^\rho)_a \\
&= \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} \\
&= v^\nu{}_{,\mu}.
\end{aligned}$$

6. 设 $C(t)$ 是 $\{x^\mu\}$ 的坐标域内的曲线，$x^\mu(t)$ 是 $C(t)$ 在该系的参数表达式，v^a 是 $C(t)$ 上的矢量场，令 $\mathrm{D}v^\mu/\,\mathrm{d}t \equiv (\mathrm{d}x^\mu)_a\,(\partial/\partial t)^b\,\nabla_b v^a$，试证

$$\mathrm{D}v^\mu/\,\mathrm{d}t \equiv \mathrm{d}v^\mu/\mathrm{d}t + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}v^\sigma\,\mathrm{d}x^\nu(t)/\mathrm{d}t\,.$$

证明 由定理 3-2-1，$\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^b \nabla_b v^a = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\dfrac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\dfrac{\mathrm{d}x^\mu(t)}{\mathrm{d}t}v^\sigma\right)$，于是

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}v^\mu}{\mathrm{d}t} &\equiv (\mathrm{d}x^\mu)_a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b \nabla_b v^a \\
&= (\mathrm{d}x^\mu)_a\left(\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)^a\left(\frac{\mathrm{d}v^\rho}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\rho(t)}{\mathrm{d}t}v^\sigma\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}v^\mu}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}v^\sigma\frac{\mathrm{d}x^\mu(t)}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

7. 求出 3 维欧氏空间中球坐标系的全部非零 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$。

解 由第二章 19(a)知，球坐标系下欧氏度规分量 $g_{\mu\nu}$ 排成的矩阵为：

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

取逆矩阵得 $g^{\mu\nu}$ 排成的矩阵为：

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

根据非对角元全为零，观察克氏符分量表达式

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\right)$$

展开式中求和只有 $\rho = \sigma$ 项才可能非零，于是

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} \left(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}\right)$$

（σ 是给定某个具体指标，不求和，也不需要指标平衡）若 $\sigma\mu\nu$ 全不等，则括号内为零。于是那些可能非零的分量指标至少有两个相等：

$$\begin{aligned}
\Gamma^{r}{}_{rr} &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(g_{rr,r} + g_{rr,r} - g_{rr,r}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 0 - 0) \\
&= 0 \\
\Gamma^{r}{}_{r\theta} &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(g_{rr,\theta} + g_{\theta r,r} - g_{r\theta,r}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 0 - 0) \\
&= 0 \\
\Gamma^{r}{}_{r\phi} &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(g_{rr,\phi} + g_{\phi r,r} - g_{r\phi,r}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 0 - 0) \\
&= 0 \\
\Gamma^{r}{}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(g_{r\theta,\theta} + g_{\theta r,\theta} - g_{\theta\theta,r}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 0 - 2r) \\
&= -r
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{r}{}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(g_{r\phi,\phi} + g_{\phi r,\phi} - g_{\phi\phi,r}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(0 + 0 - 2r\sin^2\theta\right) \\
&= -r\sin^2\theta \\
\Gamma^{\theta}{}_{rr} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta r,r} + g_{r\theta,r} - g_{rr,\theta}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta r,\theta} + g_{\theta\theta,r} - g_{r\theta,\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot (0 + 2r - 0) \\
&= \frac{1}{r} \\
\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta\theta,\theta} + g_{\theta\theta,\theta} - g_{\theta\theta,\theta}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta\theta,\phi} + g_{\phi\theta,\theta} - g_{\theta\phi,\theta}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta\phi,\phi} + g_{\phi\theta,\phi} - g_{\phi\phi,\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \left(0 + 0 - 2r^2\cos\theta\sin\theta\right) \\
&= -\cos\theta\sin\theta \\
\Gamma^{\phi}{}_{rr} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(g_{\phi r,r} + g_{r\phi,r} - g_{rr,\phi}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\phi}{}_{r\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(g_{\phi r,\phi} + g_{\phi\phi,r} - g_{r\phi,\phi}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \cdot \left(0 + 2r\sin^2\theta - 0\right) \\
&= \frac{1}{r} \\
\Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(g_{\phi\theta,\theta} + g_{\theta\phi,\theta} - g_{\theta\theta,\phi}\right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(g_{\phi\theta,\phi} + g_{\phi\phi,\theta} - g_{\theta\phi,\phi}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \cdot \left(0 + 2r^2\cos\theta\sin\theta - 0\right) \\
&= \cot\theta
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\left(g_{\phi\phi,\phi}+g_{\phi\phi,\phi}-g_{\phi\phi,\phi}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

故所有非零分量为 $\Gamma^{r}{}_{\theta\theta}=-r$，$\Gamma^{r}{}_{\phi\phi}=-r\sin^2\theta$，$\Gamma^{\theta}{}_{r\theta}=\Gamma^{\theta}{}_{\theta r}=\dfrac{1}{r}$，$\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}=-\cos\theta\sin\theta$，$\Gamma^{\phi}{}_{r\phi}=\Gamma^{\phi}{}_{\phi r}=\dfrac{1}{r}$，$\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}=\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}=\cot\theta$。

8. 设 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间，$C\colon I\to M$ 是 (M,∇_a) 中的曲线，试证 $\forall s,t\in I$，平移映射 $\psi\colon V_{C(s)}\to V_{C(t)}$（见图 3-2）是同构映射。

证明 对每个 $v\in V_{C(s)}$，有唯一一个 $C(t)$ 上的平移矢量场 $\bar{v}(t)$ 满足 $\bar{v}(s)=v$，$\psi(v)=v(t)$。首先易验证 ψ 为线性映射，下面论证 $\ker\psi=\{0\}$。设 $\psi(v)=\bar{v}(t)=0$，于是由正文 (3-2-5) 式：

$$\frac{\mathrm{d}\bar{v}^{\mu}}{\mathrm{d}t}+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}T^{\nu}\bar{v}^{\sigma}=0,\quad \mu=1,\cdots,n$$

在 (s,t) 上此微分方程组的解被边界条件 $\bar{v}^{\mu}(t)=0$ 唯一确定，而 $\bar{v}^{\mu}(t)\equiv 0$ 是解，于是知 $v=\bar{v}(s)=0$，于是 $\ker\psi=\{0\}$，又 $\dim V_{C(s)}=\dim V_{C(t)}=n$，故线性映射 ψ 是同构映射。

9. 试证定理 3-3-2、3-3-3 和 3-3-5。

证明 (1) 定理 3-3-2 如下：

> **定理** 设曲线 $\gamma(t)$ 的切矢 T^a 满足 $T^b\nabla_b T^a=\alpha T^a$[$\alpha$ 为 $\gamma(t)$ 上的函数]，则存在 $t'=t'(t)$ 使得 $\gamma'(t')[=\gamma(t)]$ 为测地线。

证明如下：写出分量形式为

$$\begin{aligned}T^b\nabla_b T^a &= \left(\frac{\mathrm{d}T^{\mu}}{\mathrm{d}t}+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}T^{\nu}T^{\sigma}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)^a\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)^a\\ \alpha T^a &= T^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)^a\\ &= \alpha\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)^a\\ \Longrightarrow\ \alpha\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

设有重参数化 $t'=t'(t)$ 使得 $\gamma'(t')$ 为测地线，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}t'^2}+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}t'} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}t}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}t'^2}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}t'^2} + \alpha\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2\right]\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

只要解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}t'^2} + \alpha\left(\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)^2 = 0$，令 $\eta(t) = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}$，则

$$
\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + \alpha(t)\eta^2 = 0
$$

解出来 $\eta(t)$ 积分即得重参数化 $t'(t)$。

(2) 定理 3-3-3 如下：

定理 若 t 是某测地线的仿射参数，则该曲线的任一参数 t' 是仿射参数的充要条件为 $t' = at + b$（其中 a, b 为常数且 $a \neq 0$）。

证明如下：完全类似 (1) ，只是 $\alpha(t) = 0$，于是微分方程为

$$
\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}t'^2} = 0,
$$

解得 $t' = at + b$。

(3) 定理 3-3-5 如下：

定理 测地线的弧长参数必为仿射参数。

证明如下：设 t 为仿射参数，则 $T^b \nabla_b T^a = 0$，于是

$$
\begin{aligned}
T^a \nabla_a \left(g_{bc} T^b T^c\right) &= g_{bc} T^a T^b \nabla_a T^c + g_{bc} T^a T^c \nabla_a T^b \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

于是 $g_{ab} T^a T^b$ 沿线为常数 T，弧长按定义与 t 的关系为 $\mathrm{d}l = \sqrt{|g_{ab} T^a T^b|}\,\mathrm{d}t = T\,\mathrm{d}t$，由定理 3-3-3 知 l 为仿射参数。

10. (a) 写出球面度规 $\mathrm{d}s^2 = R^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right)$（$R$ 为常数）的测地线方程；

(b) 验证任一大圆弧（配以适当参数）满足测地线方程。提示：选球面坐标系 $\{\theta, \phi\}$ 使所给大圆弧为赤道的一部分，并以 ϕ 为仿射参数。

解 (a) 首先求克氏符，度规分量 $g_{\mu\nu}$ 排成的矩阵为

$$
[g] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}
$$

逆矩阵

$$
[g]^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}
$$

完全类似第 7 题，根据非对角元全为零，观察克氏符分量表达式

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho} \right)$$

展开式中求和只有 $\rho = \sigma$ 项才可能非零，于是

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} \left(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} \right)$$

（σ 是给定某个具体指标，不求和，也不需要指标平衡）

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta\theta,\theta} + g_{\theta\theta,\theta} - g_{\theta\theta,\theta} \right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta\theta,\phi} + g_{\phi\theta,\theta} - g_{\theta\phi,\theta} \right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta\phi,\phi} + g_{\phi\theta,\phi} - g_{\phi\phi,\theta} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left(0 + 0 - 2R^2 \sin\theta\cos\theta \right) \\
&= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(g_{\phi\theta,\theta} + g_{\theta\phi,\theta} - g_{\theta\theta,\phi} \right) \\
&= 0 \\
\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(g_{\phi\theta,\phi} + g_{\phi\phi,\theta} - g_{\theta\phi,\phi} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \cdot \left(0 + 2R^2 \sin\theta\cos\theta - 0 \right) \\
&= \cot\theta \\
\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left(g_{\phi\phi,\phi} + g_{\phi\phi,\phi} - g_{\phi\phi,\phi} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

代入测地线方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma} \dfrac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} \dfrac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}t} = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} - \sin\theta\cos\theta \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \right)^2 &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + \cot\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} &= 0
\end{aligned}$$

(b) 由于测地线方程具有坐标系无关的形式 $T^b \nabla_b T^a = 0$，可选择球坐标系使得大圆弧落在赤道 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 上，于是 $\cos\theta = 0$，满足测地线方程。

11. 试证定理 3-4-2.

证明 在某坐标系下展开即得

$$
\begin{aligned}
\left.\left[\left(\nabla_a \nabla_b-\nabla_b \nabla_a\right) \omega_c\right]\right|_p & =\left.\left[\left(\nabla_a \nabla_b-\nabla_b \nabla_a\right) \omega_\mu\left(\mathrm{d} x^\mu\right)_c\right]\right|_p \\
& =\left.\left[\omega_\mu\left(\nabla_a \nabla_b-\nabla_b \nabla_a\right)\left(\mathrm{d} x^\mu\right)_c\right]\right|_p \quad \text{(由定理 3-4-1)} \\
& =\left.\omega_\mu\right|_p\left.\left[\left(\nabla_a \nabla_b-\nabla_b \nabla_a\right)\left(\mathrm{d} x^\mu\right)_c\right]\right|_p
\end{aligned}
$$

可见只与 ω 在 p 点的值有关，证毕。

12. 试证式 (3-4-10)。

证明 首先，$T_{[abc]d}=g_{de} T_{[abc]}{}^e=0$，而

$$
\begin{aligned}
T_{[abc]d} & =\frac{1}{6}\left(T_{abcd}+T_{cabd}+T_{bcad}-T_{acbd}-T_{bacd}-T_{cbad}\right) \\
& =\frac{1}{3}\left(T_{abcd}+T_{cabd}+T_{bcad}\right)
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
& T_{[abc]d}+T_{[dab]c}+T_{[cda]b}+T_{[bcd]a} \\
= & \frac{1}{3}\left(T_{abcd}+T_{cabd}+T_{bcad}\right)+\frac{1}{3}\left(T_{dabc}+T_{bdac}+T_{abdc}\right) \\
& +\frac{1}{3}\left(T_{cdab}+T_{acdb}+T_{dacb}\right)+\frac{1}{3}\left(T_{bcda}+T_{dbca}+T_{cdba}\right) \\
= & \frac{1}{3}\left(T_{abcd}-T_{acbd}+T_{bcad}-T_{dacb}+T_{bdac}-T_{abcd}\right. \\
& \left.+T_{cdab}-T_{acbd}+T_{dacb}-T_{bcad}+T_{bdac}-T_{cdab}\right) \\
= & \frac{2}{3}\left(T_{bdac}-T_{acbd}\right) \\
= & 0
\end{aligned}
$$

于是 $T_{bdac}-T_{acbd}=0$。

13. 求出球面度规（见题 10 ）的黎曼张量在坐标系 (θ, ϕ) 的全部分量。

解 由 10 得，克氏符的全部非零分量为 $\Gamma^\theta{}_{\phi\phi}=-\sin\theta\cos\theta, \Gamma^\phi{}_{\phi\theta}=\Gamma^\phi{}_{\theta\phi}=\cot\theta$，由 $R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho=\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma,\nu}-\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma,\mu}+\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}-\Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu}\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}$ 得，非零分量或者满足 $\rho=\theta$ 且 $\mu\nu\sigma$ 中有两个为 ϕ，或者满足 $\rho=\phi$ 且 $\mu\nu\sigma$ 中至少有一个为 θ，且前两个指标反称，前两个指标相同的分量为零，并且前三个指标只需考虑偶排列，奇排列只需对调前两个指标。

$$
\begin{aligned}
R_{\theta\phi\phi}{}^\theta & =\Gamma^\theta{}_{\theta\phi,\phi}-\Gamma^\theta{}_{\phi\phi,\theta}+\Gamma^\theta{}_{\phi\theta}\Gamma^\theta{}_{\phi\theta}-\Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}+\Gamma^\phi{}_{\phi\theta}\Gamma^\theta{}_{\phi\phi}-\Gamma^\phi{}_{\phi\phi}\Gamma^\theta{}_{\theta\phi} \\
& =0+\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+0-0-\cos^2\theta-0 \\
& =-\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\theta\phi\phi}{}^{\phi} &= \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi,\phi} - \Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi,\theta} + \Gamma^{\theta}{}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} - \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta} + \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi} - \Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} \\
&= 0 \\
R_{\phi\theta\theta}{}^{\phi} &= \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta,\theta} - \Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta,\phi} + \Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta} - \Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} + \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} - \Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi} \\
&= -\frac{1}{\sin^2\theta} - 0 + 0 - 0 + \cot^2\theta - 0 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

于是非零分量仅有 $R_{\theta\phi\phi}{}^{\theta} = -R_{\phi\theta\phi}{}^{\theta} = -\sin\theta, R_{\phi\theta\theta}{}^{\phi} = -R_{\theta\phi\theta}{}^{\phi} = -1$。

与愚蠢的人类相比，麦酱可以更快地计算（并且不会抄错分量）。将以下函数定义写入一个 Mathematica 程序包文件 (.m) 或者放在笔记本文件的开头：

```
christoffelsymbol[g_,x_,i_,j_,k_]:=
  1/2
    Plus@@
      ((Inverse[g][[i,#]](D[g[[#,j]],x[[k]]]+D[g[[k,#]],x[[j]]]-
            D[g[[j,k]],x[[#]]]))&)/@Range[Length[x]];
ChristoffelSymbol[g_,x_]:=
  Table[christoffelsymbol[g,x,i,j,k],{i,1,Length[x]},
     {j,1,Length[x]},{k,1,Length[x]}];
riemanntensor[g_,x_,i_,j_,k_,l_]:=
  D[christoffelsymbol[g,x,l,i,k],x[[j]]]-
   D[christoffelsymbol[g,x,l,j,k],x[[i]]]+
   Plus@@
     ((christoffelsymbol[g,x,#,k,i] christoffelsymbol[g,x,l,j,#]-
         christoffelsymbol[g,x,#,k,j]
          christoffelsymbol[g,x,l,i,#])&)/@Range[Length[x]];
RiemannTensor[g_,x_]:=Table[riemanntensor[g,x,i,j,k,l],
    {i,1,Length[x]},{j,1,Length[x]},{k,1,Length[x]},{l,1,Length[x]}];
```

运行如图 3.1。

14. 求度规 $\mathrm{d}s^2 = \Omega(t,x)\left(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2\right)$ 的黎曼张量在 $\{t,x\}$ 系的全部分量（在结果中以 $\dot{\Omega}$ 和 Ω' 分别代表函数 Ω 对 t 和 x 的偏导数）。

```
In[1]:= << GR`.m

In[2]:= g = ( r^2      0
              0   r^2 Sin[θ]^2 )

Out[2]= {{r^2, 0}, {0, r^2 Sin[θ]^2}}

In[3]:= Γ = ChristoffelSymbol[g, {θ, ϕ}]

Out[3]= {{{0, 0}, {0, -Cos[θ] Sin[θ]}}, {{0, Cot[θ]}, {Cot[θ], 0}}}

In[4]:= RiemannTensor[g, {θ, ϕ}] // AbsoluteTiming
                                     绝对时间

Out[4]= {0.0157581, {{{{0, 0}, {0, 0}}, {{0, -Cot[θ]^2 + Csc[θ]^2}, {-Sin[θ]^2, 0}}},
          {{{0, Cot[θ]^2 - Csc[θ]^2}, {Sin[θ]^2, 0}}, {{0, 0}, {0, 0}}}}}

In[5]:= R = %[[2]] // Simplify
                      化简

Out[5]= {{{{0, 0}, {0, 0}}, {{0, 1}, {-Sin[θ]^2, 0}}}, {{{0, -1}, {Sin[θ]^2, 0}}, {{0, 0}, {0, 0}}}}
```

图 3.1: 将第 13 题扔给麦酱计算

解 先求克氏符。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^t{}_{tt} &= \frac{1}{2} g^{tt}\left(g_{tt,t}+g_{tt,t}-g_{tt,t}\right) \\
&= -\frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} \\
\Gamma^t{}_{tx} &= \frac{1}{2} g^{tt}\left(g_{tt,x}+g_{xt,t}-g_{tx,t}\right) \\
&= \frac{\Omega'}{2\Omega} \\
\Gamma^t{}_{xx} &= \frac{1}{2} g^{tt}\left(g_{tx,x}+g_{xt,x}-g_{xx,t}\right) \\
&= \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} \\
\Gamma^x{}_{tt} &= \frac{1}{2} g^{xx}\left(g_{xt,t}+g_{tx,t}-g_{tt,x}\right) \\
&= \frac{\Omega'}{2\Omega} \\
\Gamma^x{}_{tx} &= \frac{1}{2} g^{xx}\left(g_{xt,x}+g_{xx,t}-g_{tx,x}\right) \\
&= \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} \\
\Gamma^x{}_{xx} &= \frac{1}{2} g^{xx}\left(g_{xx,x}+g_{xx,x}-g_{xx,x}\right) \\
&= \frac{\Omega'}{2\Omega}
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
R_{txt}{}^{t} &= \Gamma^{t}{}_{tt,x} - \Gamma^{t}{}_{xt,t} + \Gamma^{t}{}_{tt}\Gamma^{t}{}_{xt} - \Gamma^{t}{}_{tx}\Gamma^{t}{}_{tt} + \Gamma^{x}{}_{tt}\Gamma^{t}{}_{xx} - \Gamma^{x}{}_{tx}\Gamma^{t}{}_{tx} \\
&= \frac{\Omega\dot{\Omega}' - \dot{\Omega}\Omega'}{2\Omega^2} - \frac{\Omega\dot{\Omega}' - \dot{\Omega}\Omega'}{2\Omega^2} - \frac{\dot{\Omega}\Omega'}{4\Omega^2} + \frac{\dot{\Omega}\Omega'}{4\Omega^2} + \frac{\dot{\Omega}\Omega'}{4\Omega^2} - \frac{\dot{\Omega}\Omega'}{4\Omega^2} \\
&= 0 \\
R_{txx}{}^{t} &= \Gamma^{t}{}_{tx,x} - \Gamma^{t}{}_{xx,t} + \Gamma^{t}{}_{xt}\Gamma^{t}{}_{xt} - \Gamma^{t}{}_{xx}\Gamma^{t}{}_{tt} + \Gamma^{x}{}_{xt}\Gamma^{t}{}_{xx} - \Gamma^{x}{}_{xx}\Gamma^{t}{}_{tx} \\
&= \frac{\Omega\Omega'' - \Omega'^2}{2\Omega^2} - \frac{\Omega\ddot{\Omega} - \dot{\Omega}^2}{2\Omega^2} + \frac{\Omega'^2}{4\Omega^2} - \frac{\dot{\Omega}^2}{4\Omega^2} + \frac{\dot{\Omega}^2}{4\Omega^2} - \frac{\Omega'^2}{4\Omega^2} \\
&= \frac{\Omega\left(\Omega'' - \ddot{\Omega}\right) + \dot{\Omega}^2 - \Omega'^2}{2\Omega^2} \\
R_{txt}{}^{x} &= \Gamma^{x}{}_{tt,x} - \Gamma^{x}{}_{xt,t} + \Gamma^{t}{}_{tt}\Gamma^{x}{}_{xt} - \Gamma^{t}{}_{tx}\Gamma^{x}{}_{tt} + \Gamma^{x}{}_{tt}\Gamma^{x}{}_{xx} - \Gamma^{x}{}_{tx}\Gamma^{x}{}_{tx} \\
&= \frac{\Omega\Omega'' - \Omega'^2}{2\Omega^2} - \frac{\Omega\ddot{\Omega} - \dot{\Omega}^2}{2\Omega^2} - \frac{\dot{\Omega}^2}{4\Omega^2} - \frac{\Omega'^2}{4\Omega^2} + \frac{\Omega'^2}{4\Omega^2} - \frac{\dot{\Omega}^2}{4\Omega^2} \\
&= \frac{\Omega\left(\Omega'' - \ddot{\Omega}\right) + \dot{\Omega}^2 - \Omega'^2}{2\Omega^2} \\
R_{txx}{}^{x} &= \Gamma^{x}{}_{tx,x} - \Gamma^{x}{}_{xx,t} + \Gamma^{t}{}_{xt}\Gamma^{x}{}_{xt} - \Gamma^{t}{}_{xx}\Gamma^{x}{}_{tt} + \Gamma^{x}{}_{xt}\Gamma^{x}{}_{xx} - \Gamma^{x}{}_{xx}\Gamma^{x}{}_{tx} \\
&= \frac{\Omega\dot{\Omega}' - \dot{\Omega}\Omega'}{2\Omega^2} - \frac{\Omega\dot{\Omega}' - \dot{\Omega}\Omega'}{2\Omega^2} + \frac{\Omega'\dot{\Omega}}{4\Omega^2} - \frac{\Omega'\dot{\Omega}}{4\Omega^2} + \frac{\Omega'\dot{\Omega}}{4\Omega^2} - \frac{\Omega'\dot{\Omega}}{4\Omega^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

故所有非零分量为 $R_{txx}{}^{t} = -R_{xtx}{}^{t} = R_{txt}{}^{x} = -R_{xtt}{}^{x} = \dfrac{\Omega\left(\Omega'' - \ddot{\Omega}\right) + \dot{\Omega}^2 - \Omega'^2}{2\Omega^2}$。

本题用上述 Mathematica 代码解决如图 3.2：

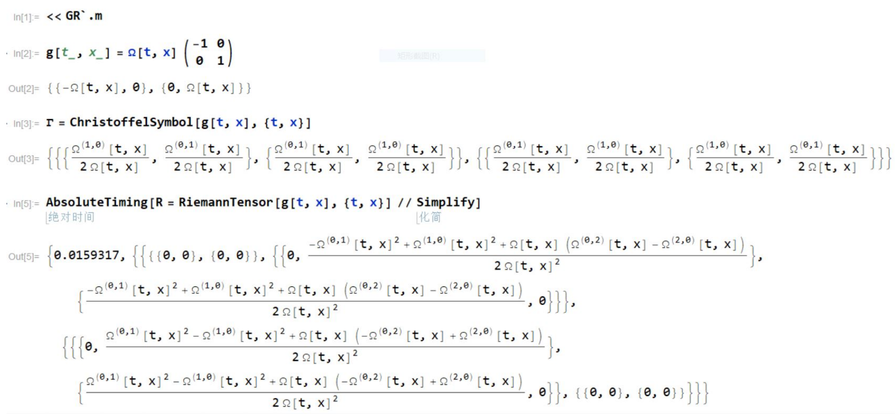

图 3.2: 将第 14 题扔给麦酱

15. 求度规 $\mathrm{d}s^2 = z^{-1/2}\left(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2\right) + z\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right)$ 的黎曼张量在 $\{t, x, y, z\}$ 系的全部分量。

解 先求克氏符分量。由度规分量的非对角元均为零,克氏符分量 $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma}\left(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}\right)$。非零分量至少应该满足：$\sigma\mu\nu$ 至少有两个相等；$\sigma\mu\nu$ 中至少有一个为 z（否则导数项全为零)。进一步地，若两个相等，则第三个必为 z（否则导数项为零)；若三个相等，则为 zzz。即，非零分量满足三个指标中一个为 z 其余两个相同。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{t}{}_{tz} &= \frac{1}{2} g^{tt}\left(g_{tt,z} + g_{zt,t} - g_{tz,t}\right) \\
&= -\frac{1}{4z} \\
\Gamma^{x}{}_{xz} &= \frac{1}{2} g^{xx}\left(g_{xx,z} + g_{zx,x} - g_{xz,x}\right) \\
&= \frac{1}{z} \\
\Gamma^{y}{}_{yz} &= \frac{1}{2} g^{yy}\left(g_{yy,z} + g_{zy,y} - g_{yz,y}\right) \\
&= \frac{1}{z} \\
\Gamma^{z}{}_{tt} &= \frac{1}{2} g^{zz}\left(g_{zt,t} + g_{tz,t} - g_{tt,z}\right) \\
&= -\frac{1}{4z} \\
\Gamma^{z}{}_{xx} &= \frac{1}{2} g^{zz}\left(g_{zx,x} + g_{xz,x} - g_{xx,z}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{z}}{2} \\
\Gamma^{z}{}_{yy} &= \frac{1}{2} g^{zz}\left(g_{zy,y} + g_{yz,y} - g_{yy,z}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{z}}{2} \\
\Gamma^{z}{}_{zz} &= \frac{1}{2} g^{zz}\left(g_{zz,z} + g_{zz,z} - g_{zz,z}\right) \\
&= -\frac{1}{4z}
\end{aligned}
$$

于是所有非零克氏符分量为 $\Gamma^{t}{}_{tz} = \Gamma^{t}{}_{zt} = -\frac{1}{4z}$，$\Gamma^{x}{}_{xz} = \Gamma^{x}{}_{zx} = \Gamma^{y}{}_{yz} = \Gamma^{y}{}_{zy} = \frac{1}{z}$，$\Gamma^{z}{}_{tt} = -\frac{1}{4z}$，$\Gamma^{z}{}_{xx} = \Gamma^{z}{}_{yy} = -\frac{\sqrt{z}}{2}$，$\Gamma^{z}{}_{zz} = -\frac{1}{4z}$。

由黎曼曲率张量分量表达式 $R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu,\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma,\mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$，注意到上述克氏符非零项的规律，黎曼张量的非零分量至少应该满足 $\mu \neq \nu$ 并且：

1. ρ 不为 z 时，导数项非零的条件是 $\mu\nu$ 中有一个为 z 另一个和 ρ 相同且 $\sigma = z$；下面分类讨论后两项。
   (a) $\mu\nu$ 中有一个为 z 时，设 $\nu = z$，$R_{\mu z\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu,z} - \cancel{\Gamma^{\rho}{}_{z\sigma,\mu}} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{z\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{z\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$，倒数第二项中 $\rho z\lambda$ 的组合为满足克氏符非零项“一个为 z 其余两个相同”的特征，要求 $\lambda = \rho$；最后一项中 $\lambda z\sigma$ 的组合要求 $\lambda = \sigma$，于是 $R_{\mu z\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu,z} +$

$\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{z\rho} - \Gamma^{\sigma}{}_{z\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}$，第一项非零要求 $\mu = \rho$ 且 $\sigma = z$，第二项非零要求 $\mu = \rho$ 且 $\sigma = z$；最后一项非零要求 $\mu = \rho$ 且 $\sigma = z$，于是非零项为 $R_{\rho zz}{}^{\rho} = \Gamma^{\rho}{}_{z\rho,z} + \Gamma^{\rho}{}_{z\rho}\Gamma^{\rho}{}_{z\rho} - \Gamma^{z}{}_{zz}\Gamma^{\rho}{}_{\rho z}$。

(b) $\mu\nu$ 均不为 z 时，求导项为零，$R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$，第一项中 $\rho\nu\lambda$ 的组合要求 $\lambda = z$ 且 $\nu = \rho$，第二项中 $\rho\mu\lambda$ 的组合要求 $\lambda = z$ 且 $\mu = \rho$，于是 $R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{z}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu z} - \Gamma^{z}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu z}$，$\mu\nu$ 中至少一个与 ρ 相同。不妨设 $\mu = \rho$，则 $R_{\rho\nu\sigma}{}^{\rho} = -\Gamma^{z}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\rho z}$，非零项为 $R_{\rho\nu\nu}{}^{\rho} = -\Gamma^{z}{}_{\nu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\rho z}$。

2. ρ 为 z 时，则后两项中 λ 应分别取 ν 和 μ，即 $R_{\mu\nu\sigma}{}^{z} = \Gamma^{z}{}_{\sigma\mu,\nu} - \Gamma^{z}{}_{\nu\sigma,\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{z}{}_{\nu\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{z}{}_{\mu\mu}$，若 $\mu\nu$ 均不为 z，则导数项为零，而后两项中 $\Gamma^{\nu}{}_{\sigma\mu}$ 和 $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}$ 无论 σ 如何取都不能满足克氏符非零项“一个为 z 其余两个相同”的特征，故 $\mu\nu$ 中有一个为 z，考虑到指标 $\mu\nu$ 反称只需计算偶排列，于是我们有 $\nu = z$，非零项为 $R_{\mu z\sigma}{}^{z} = \Gamma^{z}{}_{\sigma\mu,z} + \Gamma^{z}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{z}{}_{zz} - \Gamma^{\mu}{}_{z\sigma}\Gamma^{z}{}_{\mu\mu}$，又看出必须有 $\mu = \sigma$，于是非零项为 $R_{\mu z\mu}{}^{z} = \Gamma^{z}{}_{\mu\mu,z} + \Gamma^{z}{}_{\mu\mu}\Gamma^{z}{}_{zz} - \Gamma^{\mu}{}_{z\mu}\Gamma^{z}{}_{\mu\mu}$。

综上，可能非零项为

$$
\begin{aligned}
R_{\rho zz}{}^{\rho} &= \Gamma^{\rho}{}_{z\rho,z} + \Gamma^{\rho}{}_{z\rho}\Gamma^{\rho}{}_{z\rho} - \Gamma^{z}{}_{zz}\Gamma^{\rho}{}_{\rho z}, && \rho = t, x, y \\
R_{\rho\nu\nu}{}^{\rho} &= -\Gamma^{z}{}_{\nu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\rho z}, && \rho, \nu = t, x, y \\
R_{\mu z\mu}{}^{z} &= \Gamma^{z}{}_{\mu\mu,z} + \Gamma^{z}{}_{\mu\mu}\Gamma^{z}{}_{zz} - \Gamma^{\mu}{}_{z\mu}\Gamma^{z}{}_{\mu\mu}, && \mu = t, x, y.
\end{aligned}
$$

又注意到 x 与 y 的对称性，只需计算 x 而不用计算 y、只需计算 $xyyx$ 不用计算 $yxxy$。下面按以上规则计算可能的非零分量。

$$
\begin{aligned}
R_{txx}{}^{t} &= -\Gamma^{z}{}_{xx}\Gamma^{t}{}_{tz} \\
&= -\frac{1}{8\sqrt{z}} \\
R_{tzz}{}^{t} &= \Gamma^{t}{}_{zt,z} + \Gamma^{t}{}_{zt}\Gamma^{t}{}_{zt} - \Gamma^{z}{}_{zz}\Gamma^{t}{}_{tz} \\
&= \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{16z^2} - \frac{1}{16z^2} \\
&= \frac{1}{4z^2} \\
R_{xyy}{}^{x} &= -\Gamma^{z}{}_{yy}\Gamma^{x}{}_{xz} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{z}} \\
R_{xzz}{}^{x} &= \Gamma^{x}{}_{zx,z} + \Gamma^{x}{}_{zx}\Gamma^{x}{}_{zx} - \Gamma^{z}{}_{zz}\Gamma^{x}{}_{xz} \\
&= -\frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{8z^2} \\
&= -\frac{1}{8z^2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
R_{tzt}{}^{z} &= \Gamma^{z}{}_{tt,z} + \Gamma^{z}{}_{tt}\Gamma^{z}{}_{zz} - \Gamma^{t}{}_{zt}\Gamma^{z}{}_{tt} \\
&= \frac{1}{4z^2} + \frac{1}{16z^2} - \frac{1}{16z^2} \\
&= \frac{1}{4z^2} \\
R_{xzx}{}^{z} &= \Gamma^{z}{}_{xx,z} + \Gamma^{z}{}_{xx}\Gamma^{z}{}_{zz} - \Gamma^{x}{}_{zx}\Gamma^{z}{}_{xx} \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{z}} + \frac{1}{8\sqrt{z}} + \frac{1}{4\sqrt{z}} \\
&= \frac{1}{8\sqrt{z}}
\end{aligned}$$

于是所有非零分量为

$$\begin{aligned}
R_{txx}{}^{t} &= -R_{xtx}{}^{t} = R_{tyy}{}^{t} = -R_{yty}{}^{t} = -\frac{1}{8\sqrt{z}} \\
R_{tzz}{}^{t} &= -R_{ztz}{}^{t} = \frac{1}{4z^2} \\
R_{xyy}{}^{x} &= R_{yxx}{}^{y} = \frac{1}{4\sqrt{z}} \\
R_{xzz}{}^{x} &= -R_{zxz}{}^{x} = R_{yzz}{}^{y} = -R_{zyz}{}^{y} = -\frac{1}{8z^2} \\
R_{tzt}{}^{z} &= -R_{ztt}{}^{z} = \frac{1}{4z^2} \\
R_{xzx}{}^{z} &= -R_{zxx}{}^{z} = \frac{1}{8\sqrt{z}}
\end{aligned}$$

我第一遍手算的算了几个小时（论经常抄错指标的悲惨……）所以还是分析一番，分类讨论分量非零条件顺便化简的好……当然最省事的还是交给麦酱，秒出结果……

16. 设 $\alpha(z)$，$\beta(z)$，$\gamma(z)$ 为任意函数，$h = t + \alpha(z)x + \beta(z)y + \gamma(z)$，求度规

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + h^2\,\mathrm{d}z^2$$

的黎曼张量在 $\{t, x, y, z\}$ 系的全部分量。

解 首先求克氏符分量,由于度规分量矩阵的非对角元全为零,$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma}\left(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}\right)$，导数项非零要求 $\sigma\mu\nu$ 中有两个取 z。

$$\begin{aligned}
\Gamma^{t}{}_{zz} &= \frac{1}{2}g^{tt}\left(g_{tz,z} + g_{zt,z} - g_{zz,t}\right) \\
&= h \\
\Gamma^{x}{}_{zz} &= \frac{1}{2}g^{xx}\left(g_{xz,z} + g_{zx,z} - g_{zz,x}\right) \\
&= -h\alpha \\
\Gamma^{y}{}_{zz} &= \frac{1}{2}g^{yy}\left(g_{yz,z} + g_{zy,z} - g_{zz,y}\right) \\
&= -h\beta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{z}{}_{zt} &= \frac{1}{2} g^{zz}\left(g_{zz,t} + g_{tz,z} - g_{zt,z}\right) \\
&= \frac{1}{h} \\
\Gamma^{z}{}_{zx} &= \frac{1}{2} g^{zz}\left(g_{zz,x} + g_{xz,z} - g_{zx,z}\right) \\
&= \frac{\alpha}{h} \\
\Gamma^{z}{}_{zy} &= \frac{1}{2} g^{zz}\left(g_{zz,y} + g_{yz,z} - g_{zy,z}\right) \\
&= \frac{\beta}{h} \\
\Gamma^{z}{}_{zz} &= \frac{1}{2} g^{zz}\left(g_{zz,z} + g_{zz,z} - g_{zz,z}\right) \\
&= \frac{x\alpha' + y\beta' + \gamma'}{h}
\end{aligned}
$$

黎曼张量分量表达式为 $R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu,\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma,\mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$，下面讨论分量非零条件。

1. ρ 不取 z。后两项求和中 $\lambda = z$，且 $\mu\nu$ 必有一取 z。由于前两个指标反称，设 ν 取 z，则 $R_{\mu z\sigma}{}^{\rho} = \cancel{\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu,z}} - \Gamma^{\rho}{}_{z\sigma,\mu} + \Gamma^{z}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{zz} - \Gamma^{z}{}_{z\sigma}\cancel{\Gamma^{\rho}{}_{\mu z}}$，又可看出 $\sigma = z$，于是非零分量为 $R_{\mu zz}{}^{\rho} = -\Gamma^{\rho}{}_{zz,\mu} + \Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{\rho}{}_{zz}$。
2. ρ 取 z。
   (a) ν 取 z。则 $R_{\mu z\sigma}{}^{z} = \Gamma^{z}{}_{\sigma\mu,z} - \Gamma^{z}{}_{z\sigma,\mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{z}{}_{z\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{z\sigma}\Gamma^{z}{}_{\mu\lambda}$，倒数第二项中 $\lambda\sigma\mu$ 的组合要求 $\lambda = z$，最后一项中 $z\mu\lambda$ 的组合要求 $\lambda = z$。
      i. $\sigma = z$，则 $R_{\mu zz}{}^{z} = \Gamma^{z}{}_{z\mu,z} - \Gamma^{z}{}_{zz,\mu} + \cancel{\Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{z}{}_{zz} - \Gamma^{z}{}_{zz}\Gamma^{z}{}_{\mu z}}$；
      ii. $\sigma \neq z$，则 $R_{\mu z\sigma}{}^{z} = \cancel{\Gamma^{z}{}_{\sigma\mu,z}} - \Gamma^{z}{}_{z\sigma,\mu} + \cancel{\Gamma^{z}{}_{\sigma\mu}}\Gamma^{z}{}_{zz} - \Gamma^{z}{}_{z\sigma}\Gamma^{z}{}_{\mu z}$。
   (b) $\mu\nu$ 均不取 z。则 $R_{\mu\nu\sigma}{}^{z} = \Gamma^{z}{}_{\sigma\mu,\nu} - \Gamma^{z}{}_{\nu\sigma,\mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{z}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{z}{}_{\mu\lambda}$，后两项中 λ 均取 z，且 $\sigma = z$。则 $R_{\mu\nu z}{}^{z} = \Gamma^{z}{}_{z\mu,\nu} - \Gamma^{z}{}_{\nu z,\mu} + \cancel{\Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{z}{}_{\nu z} - \Gamma^{z}{}_{\nu z}\Gamma^{z}{}_{\mu z}}$。

综上，可能的非零分量有

$$
\begin{aligned}
R_{\mu zz}{}^{\rho} &= -\Gamma^{\rho}{}_{zz,\mu} + \Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{\rho}{}_{zz}, && \mu,\rho = t,x,y \\
R_{\mu zz}{}^{z} &= \Gamma^{z}{}_{z\mu,z} - \Gamma^{z}{}_{zz,\mu}, && \mu = t,x,y \\
R_{\mu z\sigma}{}^{z} &= -\Gamma^{z}{}_{z\sigma,\mu} - \Gamma^{z}{}_{z\sigma}\Gamma^{z}{}_{\mu z}, && \mu,\sigma = t,x,y \\
R_{\mu\nu z}{}^{z} &= \Gamma^{z}{}_{z\mu,\nu} - \Gamma^{z}{}_{\nu z,\mu}, && \mu,\nu = t,x,y
\end{aligned}
$$

但是

$$
\Gamma^{z}{}_{z\mu} = \frac{\frac{\partial h}{\partial x^{\mu}}}{h},
$$

于是

$$
\Gamma^{z}{}_{z\mu,\nu} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial h}{\partial x^{\nu}}}{h^{2}} = \Gamma^{z}{}_{z\nu,\mu} = \Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{z}{}_{z\nu},
$$

故第二三四项为零，还剩下

$$R_{\mu zz}{}^{\rho} = -\Gamma^{\rho}{}_{zz,\mu} + \Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{\rho}{}_{zz}, \qquad \rho = t, x, y$$

而

$$\Gamma^{\rho}{}_{zz} = -g^{\rho\rho} h \frac{\partial h}{\partial x^{\rho}}$$

可以观察发现

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\rho}{}_{zz,\mu} &= -g^{\rho\rho} \frac{\partial h}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial h}{\partial x^{\mu}} \\
&= \left(-g^{\rho\rho} h \frac{\partial h}{\partial x^{\mu}}\right) \left(\frac{\frac{\partial h}{\partial x^{\mu}}}{h}\right) \\
&= \Gamma^{z}{}_{z\mu}\Gamma^{\rho}{}_{zz}
\end{aligned}$$

于是黎曼张量分量全为零。扔给麦酱验证如图 3.3

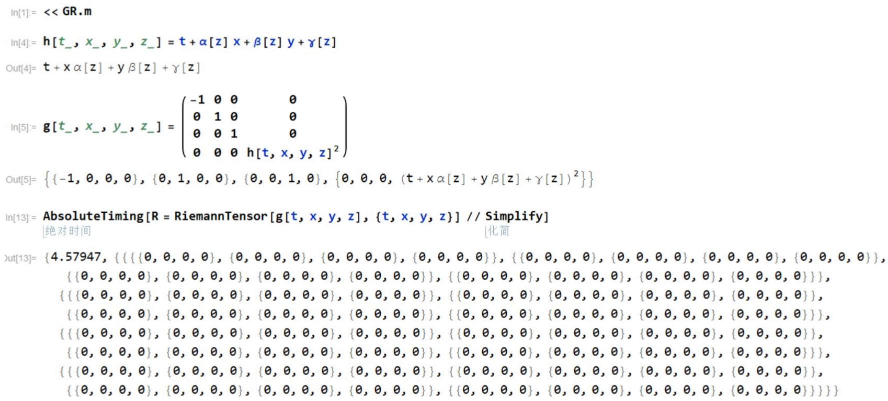

图 3.3: Mathematica 验证第 16 题

17. 试证 2 维广义黎曼空间的爱因斯坦张量为零。提示：2 维广义黎曼空间的黎曼张量只有一个独立分量。

证明 记 $r \equiv R_{1212}$，则

$$\begin{aligned}
R_{2112} &= -r \\
R_{1221} &= -r \\
R_{2121} &= r
\end{aligned}$$

于是里奇张量 $R_{ac} := g^{bd} R_{abcd}$ 的分量为

$$\begin{aligned}
R_{11} &= g^{22} R_{12}{}^{1}{}_{2} \\
&= r g^{22}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{12} &= g^{21}R_{1221} \\
&= -rg^{21} \\
R_{22} &= g^{11}R_{2121} \\
&= rg^{11}
\end{aligned}
$$

标量曲率

$$
\begin{aligned}
R &= g^{ac}R_{ac} \\
&= 2rg^{11}g^{22} - 2rg^{12}g^{21} \\
&= 2rg
\end{aligned}
$$

其中 $g = \det[g]$ 为度规分量矩阵的行列式。于是

$$
\begin{aligned}
G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} \\
&= rg^{22} - rgg_{11} \\
&= 0, \\
G_{12} &= R_{12} - \frac{1}{2}Rg_{12} \\
&= -rg^{21} - rgg_{12} \\
&= 0, \\
G_{22} &= R_{22} - \frac{1}{2}Rg_{22} \\
&= rg^{11} - rgg_{22} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$