《微分几何入门与广义相对论》部分习题参考解答

by 薛定谔的大喵[1]

2020 年 6 月 12 日

[1] wyj1234@mail.ustc.edu.cn

说明

本文档虽今天重新编译生成，但是内容是我数月前初学时所写，所有习题解答没有多次复核，仅供参考。若有错误之处请多多谅解，也可与我联系指出。

前五章是 18 年寒假时所写，之后春季学期断断续续写了些后面的，第六章所需作图很多，当时我尚未熟悉使用 Ti*k*Z 作图，感到比较吃力，后来就鸽了……之后读其他章节时陆续写了点。

我一向觉得初学一个领域需要一些练习的积累，而苦于很多书上的练习题没有解答，做来又不知道对不对。梁先生的《微分几何入门与广义相对论》三卷在中文教材中可谓精品，我很希望梁书能流行起来，希望我以后能有空将这份答案补全（Flag 立下……）

薛定谔的大喵

2018.11.3

目录

第一部分

上册

第六章　狭义相对论

习题

1. 惯性观者 G 和 G' 相对速率为 $u = 0.6c$，相遇时把时钟都调为零。用时空图讨论：(a) 在 G 所属的惯性参考系看来（以其同时观判断），当 G 钟读数为 5 μs 时，G' 钟的读数是多少？(b) 当 G 钟读数为 5 μs 时，他实际看见 G' 钟的读数是多少？

解 如图 1.1，其中 a 点 G 的固有时为 $\tau = 5\,\mu\text{s}$。

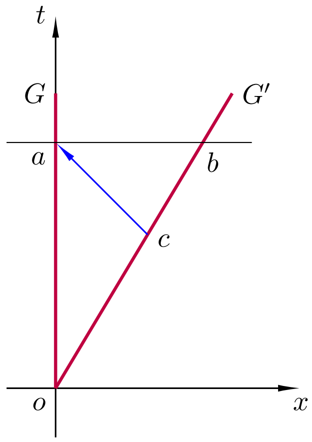

图 6.1: 题 1 解答图

(a) 易知 b 点的 x 坐标为 0.6τ，于是 b 点 G' 的固有时为

$$\tau' = \sqrt{1-0.6^2}\tau = 0.8\tau = 4\,\mu\text{s}.$$

(b) 易求得 b 点在 t, x 坐标系下的坐标为 $\left(\frac{3}{8}\tau, \frac{5}{8}\tau\right)$，于是 c 点 G' 的固有时为

$$\tau'' = \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2}\tau = \frac{\tau}{2} = 2.5\,\mu\text{s}.$$

2. 远方星体以 0.8c 的速率（匀速直线地）离开我们，我们测得它辐射来的闪光按 5 昼夜的周期变化。用时空图求星上观者测得的闪光周期。

解 如图 1.2，记 c 点坐标为 $(0,\tau)$，其中 $\tau = 5\,\mathrm{d}$，则可算得 b_2 点坐标为 $\left(\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right)\tau$，于是

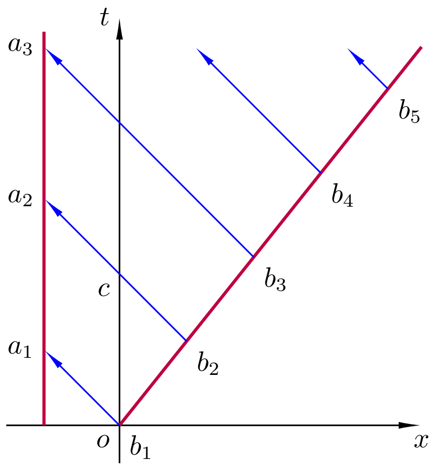

图 6.2: 题 2 解答图

b_1 到 b_2 星上观者经过的固有时 $\tau' = \sqrt{5^2-4^2}\dfrac{\tau}{9} = \dfrac{\tau}{3} = \dfrac{5}{3}\,\mathrm{d}$.

3. 把图 6-20 的 oa 段和 oe 段线长分别记作 τ 和 τ' 。(a) 用两钟的相对速率 u 表出 τ'/τ ；(b) 在 $u=0.6c$ 和 $u=0.8c$ 两种情况下求出 τ'/τ 的数值。

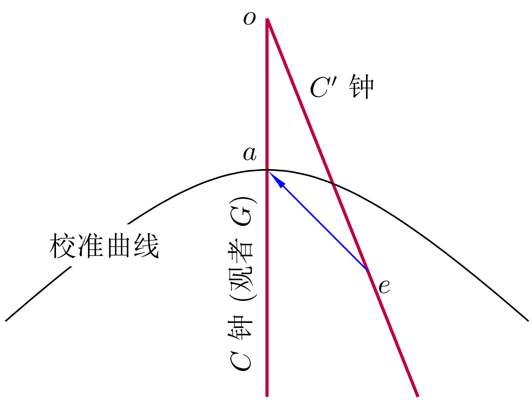

图 6.3: 正文图 6-20

解 (a) 如图 1.4，记 $t = of$，

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{\sqrt{t^2-u^2t^2}}{t-ut} = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}. \tag{6.1}$$

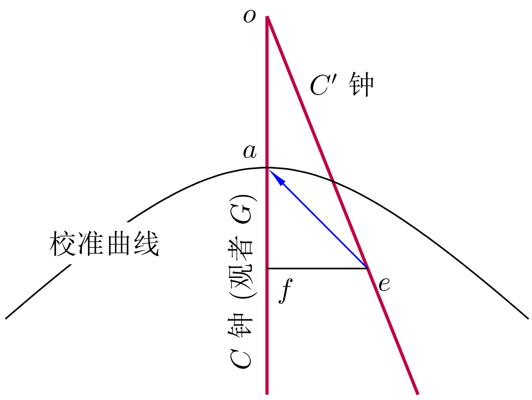

图 6.4: 题 3 解答图

(b) 将 $u=0.6$ 和 $u=0.8$ 代入，分别得 $\dfrac{\tau'}{\tau}$ 为 2 和 3。

4. 惯性质点 A, B, C 排成一条直线并沿此线相对运动（见 图 6.5），相对速率 $u_{BA}=0.6c$ ，$u_{CA}=0.8c$ ，A, B 所在惯性系各为 $\mathscr{R}_A$ 和 $\mathscr{R}_B$。设 $\mathscr{R}_B$ 系认为（测得）C 走了 60 m，画出时空图并求 $\mathscr{R}_A$ 认为（测得）这一过程的时间。

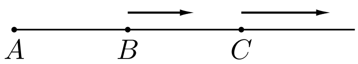

图 6.5: 题 4 用图

解 如图 1.6, oa 段长 $l=60\,\mathrm{m}$, 则可算得 a 的坐标为 $\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{4}\right) l$, 由 ac 的斜率为 $\dfrac{1}{0.6c}$, oc 的斜

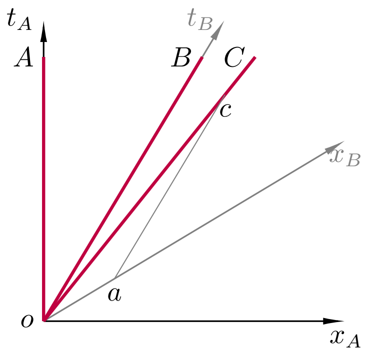

图 6.6: 题 4 解答图

率为 $\dfrac{1}{0.8c}$ 可求得 c 点坐标为 $\left(\dfrac{16}{5}, \dfrac{4}{c}\right) l$，即 oc 在 $\mathscr{R}_A$ 看来的时间为 $\dfrac{4l}{c}=\dfrac{240}{299792458}$s。

5. A, B 是同一惯性系的两个惯性观者，他们互相发射中子，每一中子以相对速率 $0.6c$ 离开中子枪。设 B 测得 B 枪的中子发射速率为 $10^4\,\mathrm{s}^{-1}$（即每秒发射 10^4 个），求 A 所发中子（根据中子自己的标准钟）测得的 B 枪的中子发射率（要求画时空图求解）。

解 如图 1.7，oa 长为 $\Delta\tau_B$，则由对称性易知 $ob = ab = \frac{\Delta\tau_B}{2}$，则 $bc = 0.3\Delta\tau_B$，故算得 $\Delta\tau = ac = 0.4\Delta\tau_B$，因此 A 发射的中子测得的 B 的发射率为 $f = \frac{1}{\Delta\tau} = 2.5f_B = 2.5 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$。

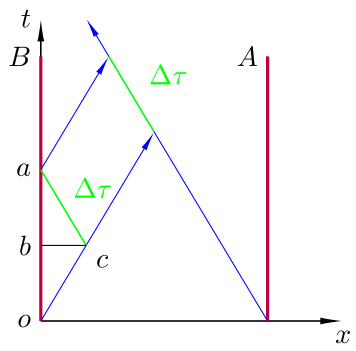

图 6.7: 题 5 解答图

6. 静止 μ 子的平均寿命为 $\tau_0 = 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$。宇宙线产生的 μ 子相对于地球以 $0.995c$ 的速率匀速直线下落，用时空图求地球观者测得的 (a)μ 子的平均寿命；(b)μ 子在其平均寿命内所走过的距离。

解 如图 1.8，$ac = \tau_0$，$bc = t$ 为地球看来的平均寿命。则 $ab = 0.995t$，有

$$\tau_0 = ac = \sqrt{|-t^2 + (0.995t)^2|} \approx 0.09987t,$$

故 $t \approx 10.0125\tau_0 = 2.0025 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$，而走过的距离为 $ab = vt \approx 5.9733\,\mathrm{km}$。

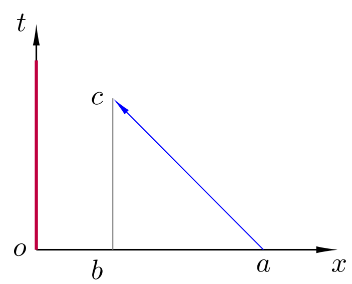

图 6.8: 图 6 解答图

7. 从惯性系 $\mathscr{R}$ 看来（认为，测得），位于某地 A 的两标准钟甲、乙指零时开始以速率 $v = 0.6c$ 一同做匀速直线运动，两钟指 $1\,\mathrm{s}$ 时到达某地 B。甲钟在到达 B 地时立即以速率 v 向 A 地匀速返回，乙钟在 B 地停留 $1\,\mathrm{s}$（按他的钟）后以速率 v 向 A 的匀速返回。另有一丙钟一直呆在 A 地，且当甲、乙离开 A 地时也指零，(a) 画出甲、乙、丙的世界线；(b) 求乙钟返回 A 地时三钟的读数 $\tau_{甲}$，$\tau_{乙}$ 和 $\tau_{丙}$。

解 如图 1.9，设 A 地位于 $x = 0$，B 地位于 $x = s$。

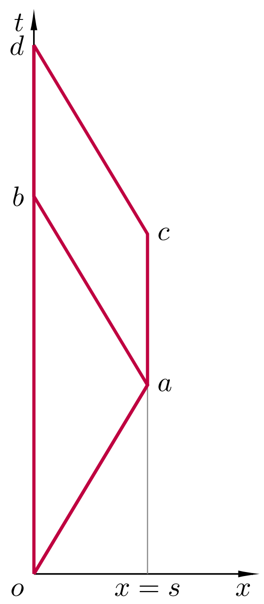

图 6.9: 题 7 解答图

(a) 甲的世界线为 $oabd$；乙的世界线为 $oacd$；丙的世界线为 obd。

(b) 由题干知线长 $oa = ac = ab = bd = cd$ 都是 $\tau = 1\,\mathrm{s}$，故 $\tau_{甲} = \tau_{乙} = 3\,\mathrm{s}$。$a$ 点位于 $(\frac{5}{3}s, s)$，$oa = \frac{4}{3}s$，故 $s = \frac{3}{4}\tau$，则 $ob = 2 \times \frac{5}{3}s = \frac{5}{2}\tau$，于是 $\tau_{丙} = \frac{7}{2}\tau = 3.5\,\mathrm{s}$。

8.（单选题）双子 A，B 静止于某惯性系 $\mathscr{R}$ 中的同一空间点上。A 从某时刻（此时 A，B 年龄相等）开始向东以速率 u 相对于惯性系 $\mathscr{R}$ 做惯性运动，一段时间后 B 以速率 $v > u$ 向东追上 A，则相遇时 A 的年龄

(1) 比 B 大， (2) 比 B 小， (3) 与 B 等。

解 选 (1)。A 走了测地线，而 B 不是测地线。

9. 标准钟 A，B 静止于某惯性系中的同一空间点上。A 钟从某时刻开始以速率 $u = 0.6c$ 匀速直线飞出，$2\,\mathrm{s}$（根据 A 钟）后以 $u = 0.6c$ 匀速直线返航。已知分手时两钟皆指零。(1) 求重逢时两钟的读数；(2) 当 A 钟指 $3\,\mathrm{s}$ 时看见 B 钟指多少？

解 1. 由 $u=0.6c$ 知 $\gamma=\frac{5}{4}$，故 $\Delta\tau_{\mathrm{A}}=2\,\mathrm{s}$ 对应 $\Delta t=5/2\,\mathrm{s}$，由于 B 钟在惯性系中静止，重逢时 $\tau_{\mathrm{B}}=5\,\mathrm{s}$，$\tau_{\mathrm{A}}=4\,\mathrm{s}$。

2. 如图

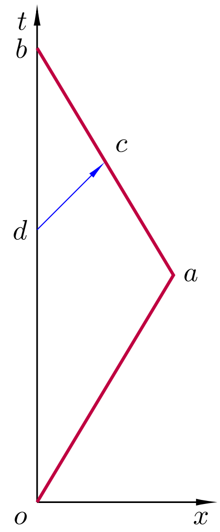

图 6.10: 题 9 解答图

10. 暂略。

11. 暂略。

12. 试证命题 6-3-4.

证明 命题 6-3-4 如下

Thm 质点世界线上各点的 4 加速 A^a 与 4 速 U^a 正交，即 $A^aU_a=\eta_{ab}A^aU^b=0$。

Prf

$$\begin{aligned} U_aA^a &= U_aU^b\partial_bU^a \\ &= \frac{1}{2}U^b\partial_b\left(U_aU^a\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

13. 设观者世界线为 $t\sim x$ 面内的双曲线 G（见图 6.7），图中 K 为已知，A^a 为观者的 4 加速，求 A^aA_a（结论是 A^aA_a 为常数，因此 G 称为匀加速运动观者[1]。请注意这指的是 4 加速。）

解 由图知此双曲线的参数为 $a=b=K$，可写出双曲线方程为

$$x^2-t^2=K^2,$$

[1]或称 Rindler 观者——笔者注

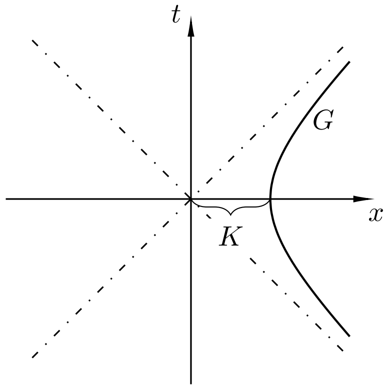

图 6.11: 习题 13 用图

两边对固有时求导，

$$
\begin{aligned}
2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} - 2t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} &= 0, \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{t}{x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau},
\end{aligned}
$$

而

$$
Z^a = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a
$$

是归一的，则

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 &= \left[\left(\frac{t}{x}\right)^2 - 1\right]\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \\
&= -\left(\frac{K}{x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \\
&= -1,
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{K},
$$

于是 4 速又可改写为

$$
Z^a = \frac{1}{K}\left[x\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\right],
$$

故

$$\begin{aligned}A^a&=\frac{\mathrm{d}Z^a}{\mathrm{d}\tau}\\&=\frac{1}{K}\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a+\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\right]\\&=\frac{1}{K^2}\left[t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a+x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\right],\\A_aA^a&=\frac{1}{K^4}\left(x^2-t^2\right)\\&=\frac{1}{K^2}.\end{aligned}$$

14. 试证命题 6-6-2.

证明 命题 6-6-2 如下

Thm 设惯性系 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 由洛伦兹变换

$$t=\gamma\left(t'+vx'\right),\quad x=\gamma\left(x'+vt'\right),\quad y=y',\quad z=z'$$

相联系，则两者测同一电磁场 F_{ab} 所得值 $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ 和 $(\mathbf{E}',\mathbf{B}')$ 有如下关系：

$$\begin{aligned}&E_1'=E_1, &&E_2'=\gamma\left(E_2-vB_3\right), &&E_3'=\gamma\left(E_3+vB_2\right);\\&B_1'=B_1, &&B_2'=\gamma\left(B_2+vE_3\right), &&B_3'=\gamma\left(B_3-vE_2\right).\end{aligned}$$

Prf 记矩阵 Λ 为

$$\left[\Lambda^\mu{}_\nu\right]=\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right]=\begin{pmatrix}\gamma&\gamma v&0&0\\\gamma v&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

则易知

$$\left[\left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu\right]=\left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right]=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma v&0&0\\-\gamma v&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

而根据张量变换律

$$\begin{aligned}F'^\mu{}_\nu&=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}F^\sigma{}_\rho\\&=\left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\sigma F^\sigma{}_\rho\Lambda^\rho{}_\nu,\end{aligned}$$

于是有矩阵等式

$$[F']=\Lambda^{-1}[F]\Lambda,$$

其中 $[F]$ 表示 $F^{\mu}{}_{\nu}$ 排成的矩阵

$$[F] = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

于是经过简单的矩阵乘法算得

$$[F'] = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & \gamma\left(E_2 - vB_3\right) & \gamma\left(E_3 + vB_2\right) \\ E_1 & 0 & \gamma\left(B_3 - vE_2\right) & -\gamma\left(B_2 + vE_3\right) \\ \gamma\left(E_2 - vB_3\right) & -\gamma\left(B_3 - vE_2\right) & 0 & B_1 \\ \gamma\left(E_3 + vB_2\right) & \gamma\left(B_2 + vE_3\right) & -B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

可以直接读出

$$\begin{aligned} E_1' &= E_1, & E_2' &= \gamma\left(E_2 - vB_3\right), & E_3' &= \gamma\left(E_3 + vB_2\right); \\ B_1' &= B_1, & B_2' &= \gamma\left(B_2 + vE_3\right), & B_3' &= \gamma\left(B_3 - vE_2\right). \end{aligned}$$

第二部分

中册