《微分几何入门与广义相对论》部分习题参考解答

by 薛定谔的大喵[1]

2020 年 6 月 12 日

[1] wyj1234@mail.ustc.edu.cn

目录

第一部分

上册

第六章　狭义相对论

习题

1. 惯性观者 G 和 G' 相对速率为 $u=0.6c$，相遇时把时钟都调为零。用时空图讨论：(a) 在 G 所属的惯性参考系看来（以其同时观判断），当 G 钟读数为 5 μs 时，G' 钟的读数是多少？(b) 当 G 钟读数为 5 μs 时，他实际看见 G' 钟的读数是多少？

解 如图 6.1，其中 a 点 G 的固有时为 $\tau=5\,\mu\text{s}$。

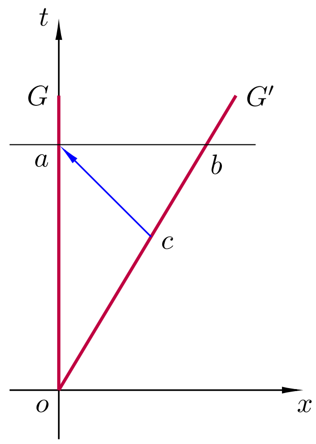

图 6.1: 题 1 解答图

(a) 易知 b 点的 x 坐标为 0.6τ，于是 b 点 G' 的固有时为

$$\tau'=\sqrt{1-0.6^2}\tau=0.8\tau=4\,\mu\text{s}.$$

(b) 易求得 c 点在 t,x 坐标系下的坐标为 $\left(\frac{5}{8}\tau,\frac{3}{8}\tau\right)$[1]，于是 c 点 G' 的固有时为

$$\tau''=\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2}\tau=\frac{\tau}{2}=2.5\,\mu\text{s}.$$

[1] t 在前，x 在后

2. 远方星体以 $0.8c$ 的速率（匀速直线地）离开我们，我们测得它辐射来的闪光按 5 昼夜的周期变化。用时空图求星上观者测得的闪光周期。

解 如图 6.2，记 c 点坐标为 $(\tau, 0)$，其中 $\tau = 5\,\mathrm{d}$，则可算得 b_2 点坐标为 $\left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)\tau$，于是

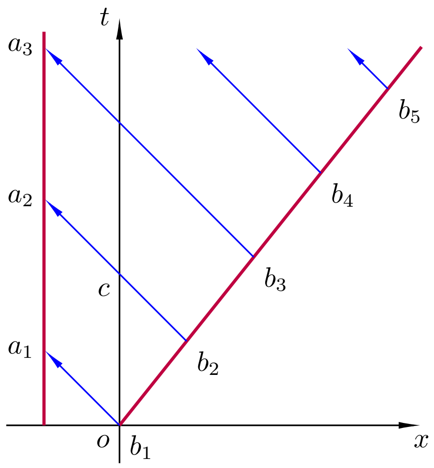

图 6.2: 题 2 解答图

b_1 到 b_2 星上观者经过的固有时 $\tau' = \sqrt{5^2 - 4^2}\frac{\tau}{9} = \frac{\tau}{3} = \frac{5}{3}\,\mathrm{d}$.

3. 把图 6-20 的 oa 段和 oe 段线长分别记作 τ 和 τ' 。(a) 用两钟的相对速率 u 表出 τ'/τ ；(b) 在 $u = 0.6c$ 和 $u = 0.8c$ 两种情况下求出 τ'/τ 的数值。

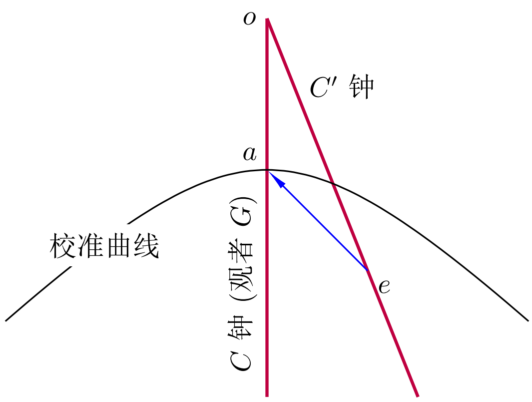

图 6.3: 正文图 6-20

解 (a) 如图 6.4，记 $t = of$，

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{\sqrt{t^2 - u^2 t^2}}{t - ut} = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}. \tag{6.1}$$

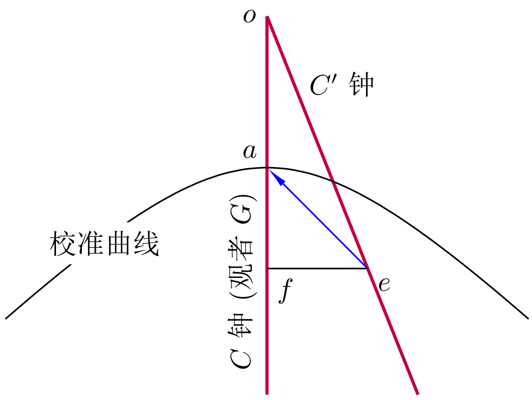

图 6.4: 题 3 解答图

(b) 将 $u=0.6$ 和 $u=0.8$ 代入，分别得 $\dfrac{\tau'}{\tau}$ 为 2 和 3。

4. 惯性质点 A,B,C 排成一条直线并沿此线相对运动（见 图 6.5），相对速率 $u_{BA}=0.6c$，$u_{CA}=0.8c$，A,B 所在惯性系各为 $\mathscr{R}_A$ 和 $\mathscr{R}_B$。设 $\mathscr{R}_B$ 系认为（测得）C 走了 60 m，画出时空图并求 $\mathscr{R}_A$ 认为（测得）这一过程的时间。

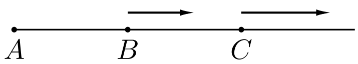

图 6.5: 题 4 用图

解 如图 6.6，oa 段长 $l=60\,\mathrm{m}$，则可算得 a 的坐标为 $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}\right)l$，由 ac 的斜率为 $\dfrac{1}{0.6}$，oc 的

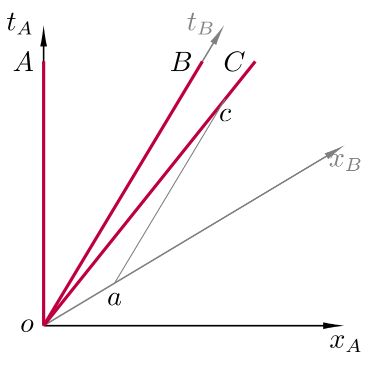

图 6.6: 题 4 解答图

斜率为 $\dfrac{1}{0.8}$ 可求得 c 点坐标为 $\left(4,\dfrac{16}{5}\right)l$，即 oc 在 $\mathscr{R}_A$ 看来的时间为 $\dfrac{4l}{c}=\dfrac{240}{299792458}$s。

5. A, B 是同一惯性系的两个惯性观者，他们互相发射中子，每一中子以相对速率 $0.6c$ 离开中子枪。设 B 测得 B 枪的中子发射速率为 $10^4\,\mathrm{s}^{-1}$（即每秒发射 10^4 个），求 A 所发中子（根据中子自己的标准钟）测得的 B 枪的中子发射率（要求画时空图求解）。

解 如图 6.7，oa 长为 $\Delta\tau_B$，则由对称性易知 $ob = ab = \dfrac{\Delta\tau_B}{2}$，则 $bc = 0.3\Delta\tau_B$，故算得 $\Delta\tau = ac = 0.4\Delta\tau_B$，因此 A 发射的中子测得的 B 的发射率为 $f = \dfrac{1}{\Delta\tau} = 2.5 f_B = 2.5\times10^4\,\mathrm{s}^{-1}$。

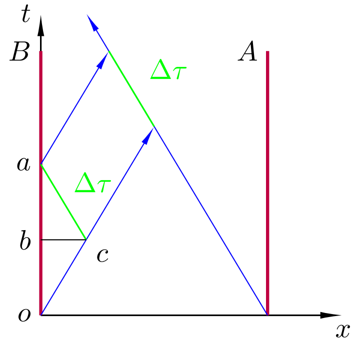

图 6.7: 题 5 解答图

6. 静止 μ 子的平均寿命为 $\tau_0 = 2\times10^{-6}\,\mathrm{s}$。宇宙线产生的 μ 子相对于地球以 $0.995c$ 的速率匀速直线下落，用时空图求地球观者测得的 (a)μ 子的平均寿命；(b)μ 子在其平均寿命内所走过的距离。

解 如图 6.8，$ac = \tau_0$，$bc = t$ 为地球看来的平均寿命。则 $ab = 0.995t$，有

$$\tau_0 = ac = \sqrt{|-t^2 + (0.995t)^2|} \approx 0.09987t,$$

故 $t \approx 10.0125\tau_0 = 2.0025\times10^{-5}\,\mathrm{s}$，而走过的距离为 $ab = vt \approx 5.9733\,\mathrm{km}$。

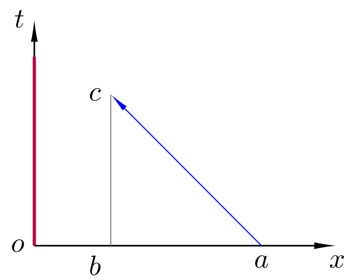

图 6.8: 图 6 解答图

7. 从惯性系 $\mathscr{R}$ 看来（认为，测得），位于某地 A 的两标准钟甲、乙指零时开始以速率 $v=0.6c$ 一同做匀速直线运动，两钟指 $1\,\mathrm{s}$ 时到达某地 B。甲钟在到达 B 地时立即以速率 v 向 A 地匀速返回，乙钟在 B 地停留 $1\,\mathrm{s}$（按他的钟）后以速率 v 向 A 的匀速返回。另有一丙钟一直呆在 A 地，且当甲、乙离开 A 地时也指零，(a) 画出甲、乙、丙的世界线；(b) 求乙钟返回 A 地时三钟的读数 $\tau_{甲}$，$\tau_{乙}$ 和 $\tau_{丙}$。

解 如图 6.9，设 A 地位于 $x=0$，B 地位于 $x=s$。

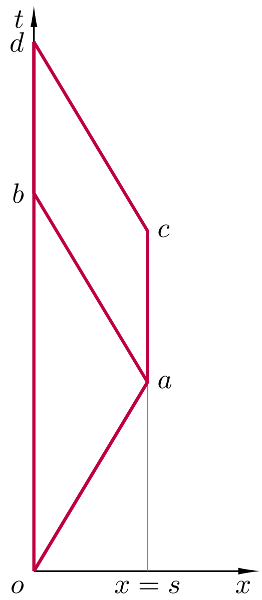

图 6.9: 题 7 解答图

(a) 甲的世界线为 $oabd$；乙的世界线为 $oacd$；丙的世界线为 obd。

(b) 由题干知线长 $oa=ac=ab=bd=cd$ 都是 $\tau=1\,\mathrm{s}$，故 $\tau_{甲}=\tau_{乙}=3\,\mathrm{s}$。$a$ 点位于 $\left(\dfrac{5}{3}s,s\right)$，$oa=\dfrac{4}{3}s$，故 $s=\dfrac{3}{4}\tau$，则 $ob=2\times\dfrac{5}{3}s=\dfrac{5}{2}\tau$，于是 $\tau_{丙}=\dfrac{7}{2}\tau=3.5\,\mathrm{s}$。

8.（单选题）双子 A，B 静止于某惯性系 $\mathscr{R}$ 中的同一空间点上。A 从某时刻（此时 A，B 年龄相等）开始向东以速率 u 相对于惯性系 $\mathscr{R}$ 做惯性运动，一段时间后 B 以速率 $v>u$ 向东追上 A，则相遇时 A 的年龄

(1) 比 B 大，　(2) 比 B 小，　(3) 与 B 等。

解 选 (1)。A 走了测地线，而 B 不是测地线。

9. 标准钟 A，B 静止于某惯性系中的同一空间点上。A 钟从某时刻开始以速率 $u=0.6c$ 匀速直线飞出，$2\,\mathrm{s}$（根据 A 钟）后以 $u=0.6c$ 匀速直线返航。已知分手时两钟皆指零。(1) 求重逢时两钟的读数；(2) 当 A 钟指 $3\,\mathrm{s}$ 时看见 B 钟指多少？

解 1. 由 $u = 0.6c$ 知 $\gamma = \dfrac{5}{4}$，故 $\Delta\tau_{\mathrm{A}} = 2\,\mathrm{s}$ 对应 $\Delta t = 5/2\,\mathrm{s}$，由于 B 钟在惯性系中静止，重逢时 $\tau_{\mathrm{B}} = 5\,\mathrm{s}$，$\tau_{\mathrm{A}} = 4\,\mathrm{s}$。

2. 如图 6.10，记 $\tau = 2\,\mathrm{s}$，则 a 的坐标为 $\left(\dfrac{3}{4}\tau, \dfrac{5}{4}\tau\right)$，$b$ 的坐标为 $\left(0, \dfrac{5}{2}\tau\right)$，$\tau_{\mathrm{A}} = 3\,\mathrm{s}$ 的 c 位于 $\left(\dfrac{3}{8}\tau, \dfrac{15}{8}\right)$，则可算出 d 位于 $\left(0, \dfrac{3}{2}\tau\right)$，故 c 点处 A 看见 B 的读数为 $\dfrac{3}{2}\tau = 3\,\mathrm{s}$。

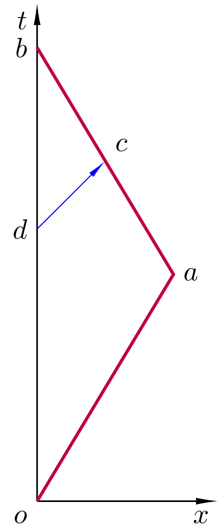

图 6.10: 题 9 解答图

10. 地球自转线速率在赤道之值约为每小时 1600 km。甲、乙为赤道上的一对孪生子。甲坐飞机以每小时 1600 km 的速率向西绕赤道飞行一圈后回家与乙重逢（忽略地球和太阳引力场的影响。由第 7 章可知引力的存在对应于时空的弯曲。）。(a) 画出地球表面的世界面和甲、乙的世界线（甲相对于地面的运动抵消了地球自转的效应，所以甲是惯性观者。）；(b) 甲与乙中谁更年轻？(c) 两者年龄相差多少？（答：约为 $10^{-7}\,\mathrm{s}$。）注：本实验已于 1971 年完成，当然不是对人而是对铯原子钟。见Hafele and Keating 1972。

解 如图 6.11。

(a) 233

(b) 乙更年轻。

(c) 以坐标时 t 为参数，乙的世界线切矢模长为

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \right\| = \sqrt{1 - u^2},$$

图暂略……

图 6.11: 题 10 解答图

其中 u 是自转的 3-速率，则乙经过的线长为

$$\tau = \int_0^T \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \right\| \mathrm{d}t = \sqrt{1-u^2}T,$$

代入 u 和 $T = 1\,\mathrm{d}$ 知

$$T - \tau = \left(1 - \sqrt{1-u^2}\right) T = 9.494\,49 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}.$$

11. 暂略。

12. 试证命题 6-3-4.

证明 命题 6-3-4 如下

Thm 质点世界线上各点的 4 加速 A^a 与 4 速 U^a 正交，即 $A^a U_a = \eta_{ab} A^a U^b = 0$。

Prf

$$\begin{aligned} U_a A^a &= U_a U^b \partial_b U^a \\ &= \frac{1}{2} U^b \partial_b \left(U_a U^a\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

13. 设观者世界线为 $t \sim x$ 面内的双曲线 G（见图 6.7），图中 K 为已知，A^a 为观者的 4 加速，求 $A^a A_a$（结论是 $A^a A_a$ 为常数，因此 G 称为匀加速运动观者[2]。请注意这指的是 4 加速。）

解 由图知此双曲线的参数为 $a = b = K$，可写出双曲线方程为

$$x^2 - t^2 = K^2,$$

两边对固有时求导，

$$\begin{aligned} 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} - 2t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{t}{x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \end{aligned}$$

[2]或称 Rindler 观者——笔者注

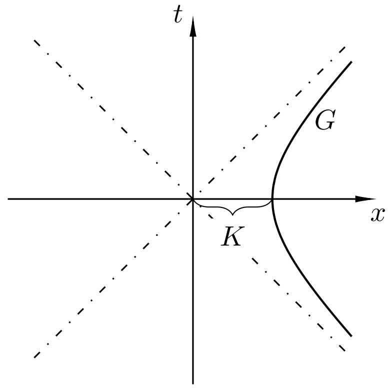

图 6.12: 习题 13 用图

而

$$Z^a = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$$

是归一的，则

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 &= \left[\left(\frac{t}{x}\right)^2 - 1\right]\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \\ &= -\left(\frac{K}{x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \\ &= -1,\end{aligned}$$

$$\implies \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{K},$$

于是 4 速又可改写为

$$Z^a = \frac{1}{K}\left[x\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + t\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\right],$$

故

$$\begin{aligned}A^a &= \frac{\mathrm{d}Z^a}{\mathrm{d}\tau} \\ &= \frac{1}{K}\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\right] \\ &= \frac{1}{K^2}\left[t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\right], \\ A_aA^a &= \frac{1}{K^4}\left(x^2 - t^2\right) \\ &= \frac{1}{K^2}.\end{aligned}$$

14. 试证命题 6-6-2.

证明 命题 6-6-2 如下

Thm 设惯性系 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 由洛伦兹变换

$$t=\gamma\left(t'+vx'\right),\quad x=\gamma\left(x'+vt'\right),\quad y=y',\quad z=z'$$

相联系，则两者测同一电磁场 F_{ab} 所得值 $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ 和 $(\mathbf{E}',\mathbf{B}')$ 有如下关系：

$$\begin{aligned}
&E_1'=E_1, &&E_2'=\gamma\left(E_2-vB_3\right), &&E_3'=\gamma\left(E_3+vB_2\right);\\
&B_1'=B_1, &&B_2'=\gamma\left(B_2+vE_3\right), &&B_3'=\gamma\left(B_3-vE_2\right).
\end{aligned}$$

Prf 记矩阵 Λ 为

$$[\Lambda^{\mu}{}_{\nu}]=\left[\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right]=\begin{pmatrix}\gamma&\gamma v&0&0\\ \gamma v&\gamma&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix},$$

则易知

$$\left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}{}_{\nu}\right]=\left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right]=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma v&0&0\\ -\gamma v&\gamma&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix},$$

而根据张量变换律

$$\begin{aligned}
F'^{\mu}{}_{\nu}&=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}F^{\sigma}{}_{\rho}\\
&=\left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}{}_{\sigma}F^{\sigma}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu},
\end{aligned}$$

于是有矩阵等式

$$[F']=\Lambda^{-1}\,[F]\,\Lambda,$$

其中 $[F]$ 表示 $F^{\mu}{}_{\nu}$ 排成的矩阵

$$[F]=\begin{pmatrix}0&E_1&E_2&E_3\\ E_1&0&B_3&-B_2\\ E_2&-B_3&0&B_1\\ E_3&B_2&-B_1&0\end{pmatrix},$$

于是经过简单的矩阵乘法算得

$$[F']=\begin{pmatrix}0&E_1&\gamma\left(E_2-vB_3\right)&\gamma\left(E_3+vB_2\right)\\ E_1&0&\gamma\left(B_3-vE_2\right)&-\gamma\left(B_2+vE_3\right)\\ \gamma\left(E_2-vB_3\right)&-\gamma\left(B_3-vE_2\right)&0&B_1\\ \gamma\left(E_3+vB_2\right)&\gamma\left(B_2+vE_3\right)&-B_1&0\end{pmatrix},$$

可以直接读出

$$E_1' = E_1, \qquad E_2' = \gamma\left(E_2 - vB_3\right), \qquad E_3' = \gamma\left(E_3 + vB_2\right);$$
$$B_1' = B_1, \qquad B_2' = \gamma\left(B_2 + vE_3\right), \qquad B_3' = \gamma\left(B_3 - vE_2\right).$$

第二部分

中册

Bibliography

Hafele, J. C. and Richard E. Keating (1972). "Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains". In: *Science* 177.4044, pp. 166–168. ISSN: 0036-8075. DOI: 10.1126/science.177.4044.166. eprint: https://science.sciencemag.org/content/177/4044/166.full.pdf. URL: https://science.sciencemag.org/content/177/4044/166 (cit. on p. 79).