

《微分几何入门与广义相对论》 部分习题参考解答

by 薛定谔的大喵¹

2020 年 9 月 26 日

¹wyj1234@mail.ustc.edu.cn

目录

第一部分 上册	1
第一章 拓扑空间简介	2
第二章 流形和张量场	6
第三章 黎曼（内禀）曲率张量	23
第四章 李导数、Killing 场和超曲面	42
第五章 微分形式及其积分	51
第六章 狭义相对论	71
第七章 广义相对论基础	88
第八章 爱因斯坦方程的求解	92
第九章 施瓦西时空	93
第十章 宇宙论	94
第二部分 中册	95
第十一章 时空的整体因果结构	96
附录 B 量子力学数学基础简介	98
附录 G 李群和李代数	99

第一部分

上册

第七章 广义相对论基础

习题

1. 试证弯曲时空麦氏方程 $\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b$ 蕴含电荷守恒定律, 即 $\nabla_a J^a = 0$ 。注: $\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b$ 等价于式 (7-2-8) 而非 (7-2-9), 故本题表明式 (7-2-8) 而非式 (7-2-9) 可推出电荷守恒。

证明

$$-4\pi \nabla_a J^a = \nabla_a \nabla_b F^{ba} = 0.$$

2. 试证 $\frac{D_F \omega_a}{d\tau} = \frac{D\omega_a}{d\tau} + (A_a \wedge Z_b) \omega^b \quad \forall \omega_a \in \mathcal{F}_G(0, 1)$.

证明 $\forall v^a \in \mathcal{F}_G(1, 0)$,

$$\begin{aligned} v^a \frac{D_F \omega_a}{d\tau} &= \frac{D_F (v^a \omega_a)}{d\tau} - \omega_a \frac{D_F v^a}{d\tau} \\ &= v^a \frac{D\omega_a}{d\tau} + \omega_a \frac{Dv^a}{d\tau} - \omega_a \left(\frac{Dv^a}{d\tau} + 2A^{[a} Z^{b]} v_b \right) \\ &= v^a \left(\frac{D\omega_a}{d\tau} - 2A_{[b} Z_{a]} \omega^b \right) \\ &= v^a \left(\frac{D\omega_a}{d\tau} + A_a \wedge Z_b \omega^b \right). \end{aligned}$$

3. 试证费米导数性质 3.

证明 性质 3 如下:

性质 若 w^a 是 $G(\tau)$ 上的空间矢量场 (对线上各点 $w^a Z_a = 0$), 则

$$D_F w^a / d\tau = h^a_b (Dw^b / d\tau),$$

其中 $h^a_b = g_{ab} + Z_a Z_b$, $h^a_b = g^{ac} h_{cb}$ 是 $G(\tau)$ 上各点的投影映射。

证明 $h^a_b = g^{ac}(g_{cb} + Z_c Z_b) = \delta^a_b + Z^a Z_b$,

$$\begin{aligned}
 h^a_b \frac{Dw^b}{d\tau} &= (\delta^a_b + Z^a Z_b) \frac{Dw^b}{d\tau} \\
 &= \frac{Dw^a}{d\tau} + Z^a \left(\frac{D(Z_b w^b)}{d\tau} - w^b \frac{DZ_b}{d\tau} \right) \\
 &= \frac{Dw^a}{d\tau} - Z^a A^b w_b \\
 &= \frac{Dw^a}{d\tau} + (A^a Z^b - Z^a A^b) w_b \\
 &= \frac{D_F w^a}{d\tau}.
 \end{aligned}$$

□

4. 试证类时线 $G(\tau)$ 上长度不变 (且非零) 的矢量场必经受时空转动。提示: 令 $u^a \equiv Dw^a/d\tau$, 则 $u_a v^a = 0$ 。先证: 无论 $v_a v^a$ 为零与否, 总有 $G(\tau)$ 上矢量场 v'^a 使 $v'^a v_a = 1$ 。再验证 v^a 经受以 $\Omega_{ab} \equiv 2v'_{[a} u_{b]}$ 为角速度 2 形式的时空转动。

证明 1. 记 $u^a = \frac{Dv^a}{d\tau}$, 则 $\frac{D(v_a v^a)}{d\tau} = 2u_a v^a = 0$ 。
 2. 若 $v^a v_a \neq 0$, 令

$$v'^a = \frac{v^a}{v^b v_b},$$

若 $v^a v_a = 0$, 则 $Z^a v_a$ 不为零, 因为与类时矢量内积为零则为类空矢量。于是定义

$$v'^a = \frac{Z^a}{Z^b v_b}.$$

3. 定义 $\Omega_{ab} = 2v'_{[a} u_{b]}$, 则

$$-\Omega^{ab} v_b = u^a = \frac{Dv^a}{d\tau},$$

故 v^a 经受以 Ω_{ab} 为角速度 2 形式的时空转动。

5. 设 $\{T, X, Y, Z\}$ 为闵氏时空的洛伦兹坐标系, 曲线 $G(\tau)$ 的参数表达式为

$$T = A^{-1} \sinh A\tau, \quad X = A^{-1} \cosh A\tau, \quad Y = Z = 0, \quad (\text{其中 } A \text{ 为常数})$$

- (a) 试证 $G(\tau)$ 是类时双曲线 (即图 (6-43)¹ 中的 G), τ 是固有时, A 是 $G(\tau)$ 的 4 加速 A^a 的长度。
 (b) 试证从 $\{T, X, Y, Z\}$ 坐标系原点 o 出发的与 $G(\tau)$ 有交的任一半直线 $\mu(s)$ 都与 $G(\tau)$ 正交。
 (c) 设 (b) 中的 $\mu(s)$ 的参数 s 是 μ 的线长, 随着 $\mu(s)$ 取遍所有从 o 出发并与 $G(\tau)$ 有交的半直线, 使得 $G(\tau)$ 上的一个空间矢量场 $w^a \equiv (\partial/\partial s)^a$, 试证 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移。

¹即本文档图 6.13

(d) 令 $Z^a \equiv (\partial/\partial\tau)^a$, 选 $\{Z^a, w^a, (\partial/\partial Y)^a, (\partial/\partial Z)^a\}$ 为 $G(\tau)$ 上的正交归一 4 标架场, 求出 $G(\tau)$ 的固有坐标系 $\{t, x, y, z\}$ 并指出其坐标域。

答: $T = (A^{-1} + x) \sinh At$, $X = (A^{-1} + x) \cosh At$, $Y = y$, $Z = z$ 。

(e) 写出闵氏时空在上述固有坐标系中的线元表达式。计算闵氏度规在该系的克氏符, 验证它满足引理 7-4-3, 即式 (7-4-10)²。

证明 (a) 由 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 知 $(AX)^2 - (AT)^2 = 1$, 故这是渐近线为 $T = \pm X$ 的双曲线。

以 τ 为参数,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a = \cosh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + \sinh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,$$

则

$$\eta_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^b = -\cosh^2(A\tau) + \sinh^2(A\tau) = -1,$$

即切矢归一, τ 为固有时。

将 $\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^a$ 延拓为

$$Z^a = AX \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + AT \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,$$

容易算得观者四加速为

$$\begin{aligned} \hat{A}^a &= Z^b \nabla_b Z^a|_{G(\tau)} \\ &= A^2 T \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + A^2 X \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a \Big|_{G(\tau)} \\ &= A \sinh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + A \cosh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a, \end{aligned}$$

则

$$\eta_{ab} \hat{A}^a \hat{A}^b = A^2 (\cosh^2(A\tau) - \sinh^2(A\tau)) = A^2,$$

即四加速的模长为 A 。

(b) 与 G 交于 τ 处的 μ 的方程为

$$T = \tanh(A\tau)X,$$

故其在 $G(\tau)$ 处的切矢正比于

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a = \sinh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + \cosh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a,$$

²正文 (7-4-10) 为

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{ij}^\sigma = 0, \quad \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 = \Gamma_{00}^i = \hat{A}_i, \\ \Gamma_{0j}^i &= \Gamma_{j0}^i = -\omega^k \varepsilon_{0kij}, \quad \sigma = 0, 1, 2, 3; \quad i, j, k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

可算得

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)_a = -\cosh(A\tau) \sinh(A\tau) + \cosh(A\tau) \sinh(A\tau) = 0.$$

(c) 在 (b) 中给出的 $(\partial/\partial s)^a$ 已经是归一的, 因而就是 w^a 。由 (b) 和习题 3, 知

$$\begin{aligned} \frac{D_F w^a}{d\tau} &= h^a_b \frac{D w^b}{d\tau} \\ &= h^a_b Z^c \nabla_c w^b \\ &= h^a_b \left(A \cosh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^b + A \sinh(A\tau) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^b \right) \\ &= A h^a_b Z^b \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中 $Z^a = (\partial/\partial \tau)^a$, 故 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移。

(d) 以 $G(0)$ 为坐标原点, $\{t, 0, 0, 0\}$ 对应的点为 $G(t)$, 即

$$T = A^{-1} \sinh At, \quad X = A^{-1} \cosh At, \quad Y = Z = 0,$$

而此点处

$$\begin{aligned} & xw^a + y \left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)^a + z \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^a \\ &= x \sinh(At) \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a + x \cosh(At) \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a + y \left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)^a + z \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^a, \end{aligned}$$

沿此矢量决定的测地线 (直线) 走参数为 1 的距离, 即

$$\Delta T = x \sinh(At), \quad \Delta X = x \cosh(At), \quad \Delta Y = y, \quad \Delta Z = z \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^a,$$

故 $\{t, x, y, z\}$ 对应的点为

$$T = (A^{-1} + x) \sinh At, \quad X = (A^{-1} + x) \cosh At, \quad Y = y, \quad Z = z. \quad (7.1)$$

(e) 计算得

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \\ &= -[(1 + Ax) \cosh(At) dt + \sinh(At) dx]^2 \\ &\quad + [(1 + Ax) \sinh(At) dt + \cosh(At) dx]^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -(1 + Ax)^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \end{aligned}$$

容易算得非零克氏符为

$$\Gamma_{tx}^t = \Gamma_{xt}^t = \frac{A}{1 + Ax}, \quad \Gamma_{tt}^x = A(1 + Ax),$$

在线上时

$$\Gamma_{tx}^t = \Gamma_{xt}^t = \Gamma_{tt}^x = A,$$

对 (7.1) 反解得坐标变换

$$t = A^{-1} \tanh^{-1} \left(\frac{T}{X} \right), \quad x = \sqrt{X^2 - T^2} - A^{-1}, \quad y = Y, \quad z = Z,$$

故

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)^a &= \frac{\partial t}{\partial T} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{\partial x}{\partial T} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \\ &= \frac{X}{A(X^2 - T^2)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \frac{T}{\sqrt{X^2 - T^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \\ &= \frac{\cosh At}{1 + Ax} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \sinh(At) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a, \\ \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^a &= \frac{\partial t}{\partial X} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{\partial x}{\partial X} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \\ &= \frac{T}{A(T^2 - X^2)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{X}{\sqrt{X^2 - T^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \\ &= -\frac{\sinh At}{1 + Ax} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \cosh(At) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \hat{A}^a &= A^2 X \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^a + A^2 T \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)^a \\ &= A(1 + Ax) \cosh(At) \left(-\frac{\sinh At}{1 + Ax} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \cosh(At) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \right) \\ &\quad + A(1 + Ax) \sinh(At) \left(\frac{\cosh At}{1 + Ax} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \sinh(At) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \right) \\ &= A(1 + Ax) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a, \end{aligned}$$

在线上时

$$\hat{A}^a = A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a,$$

满足引理，证毕。

6. 设 G 是质点 L 在 $p \in L$ 的瞬时静止自由下落观者 (即 G 的 4 速 Z^a 与 L 的 4 速 U^a 在 p 点相切), A^a 是 L 在 p 点的 4 加速, a^a 是 L 在 p 点相对于 G 的 3 加速 [由式 (7-4-3)³ 定义], 试证 $a^a = A^a$ 。

注: 本题可视为命题 6-3-6 在弯曲时空的推广。

³ 正正式 (7-4-3) 为

$$a^a := \left[\frac{d^2 x^i(t)}{dt^2} \right] \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a.$$

证明 记 $G(t)$ 的固有坐标系为 $\{t, x, y, z\}$ 。在 p 点, 有 $U^a = Z^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ 。对 U^a 做分解, 有

$$U^a = \left(\frac{\partial}{\partial \tau_L}\right)^a = \frac{dt}{d\tau_L} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{dx^i}{d\tau_L} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a = \gamma Z^a + \gamma u^a,$$

则

$$\gamma|_p = 1, \quad u^a|_p = 0,$$

而

$$\begin{aligned} A^a|_p &= (Z^b \nabla_b U^a)|_p \\ &= (\partial_0 U^a + \Gamma^0_{ab} U^b)|_p \\ &= \partial_0 U^a|_p \\ &= \frac{d\gamma}{dt} Z^a + \frac{d\gamma}{dt} u^a + \gamma \frac{du^a}{dt} \\ &= \frac{du^a}{dt}, \end{aligned}$$

其中最后一步用到 $\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_p = 0$, 这是因为 $\gamma = -U^a Z_a \leq 1$, 故在 p 点 $\gamma|_p = 1$ 取到了极值。而 $\frac{du^a}{dt}$ 就是 a^a 。

第二部分

中册