

Table des matières

| | | |
|------------|---|-----------|
| I | Fonctions | 2 |
| 1 | Ensembles de nombres | 2 |
| 2 | Intervalle | 2 |
| 3 | Fonctions | 2 |
| 4 | monotonie | 4 |
| 5 | Opérations sur les fonctions | 5 |
| 6 | Image (direct) d'une fonction composé (composition) | 5 |
| 7 | Image réciproque | 5 |
| 8 | Application, surjectives, injectives, bijectives | 6 |
| 9 | Fonction réciproque | 7 |
| II | Limites | 10 |
| 1 | Voisinage et adhérence | 10 |
| 2 | Limite finie en un point de \mathbb{R} | 10 |
| 3 | Restriction à un sous ensemble | 11 |
| 4 | Propriété | 11 |
| 5 | Théorème des gendarmes | 12 |
| 6 | Opération sur les limites | 15 |
| 7 | Limites infinies, et limites en l'infinie | 15 |
| 8 | Opération sur les limites | 16 |
| III | Continuité | 18 |
| 1 | Définition et premières propriétés | 18 |
| 2 | Théorème des valeurs intermédiaires | 20 |
| 3 | Continuité et extremum | 22 |
| 4 | Fonctions réciproques | 23 |
| IV | Dérivabilité | 25 |
| 1 | Interprétation géométrique | 26 |
| 2 | Dérivabilité des prolongements de fonctions | 27 |
| 3 | Opération usuelles | 28 |
| 4 | Extrema et points critiques | 30 |
| 5 | Acroissements finis et conséquences | 31 |
| V | Dérivées d'ordre supérieur | 33 |
| 1 | Dérivées d'ordre supérieur | 34 |
| 2 | Développement limité et formule de Taylor-Young | 34 |

I

Fonctions

1 Ensembles de nombres

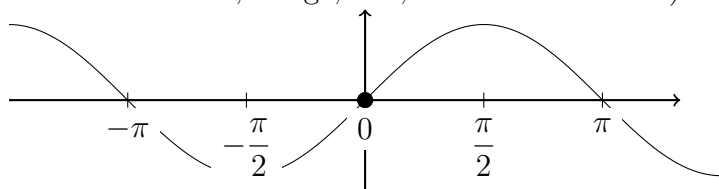
: Réels \mathbb{R} , Rationnels $\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels \mathbb{N} , entiers $\mathbb{Z} = \{-3, -2, \dots, 1\}$, nombres complexes \mathbb{C} .

2 Intervalle

: $[a, b]$ avec a, b réels compris dans l'intervalle, dit fermé, $a < b$, $]a, b[$ avec a, b non compris dans l'intervalle dit ouvert \rightarrow Intervalle bornés $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ $\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$

3 Fonctions

Exemple : sinus : $\sin : \mathbb{R}$ (domaine de définitions, sources, ensemble de départ) $\rightarrow \mathbb{R}$ ou $[-1, 1]$ (domaine de valeurs, image, but, ensemble d'arrivée)



Définitions Soit E, F 2 ensemble de \mathbb{R} . Une fonction f est procédé pour associer à tout élément de \mathbb{R} un unique élément de F Le graph de F "vit" dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R}$

Définitions : Soit E et F 2 ensembles, on définit leur produit cartésien : comme l'ensemble dont les éléments sont les couples (x, y) avec x "vit" dans E et y dans F .
 $E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$

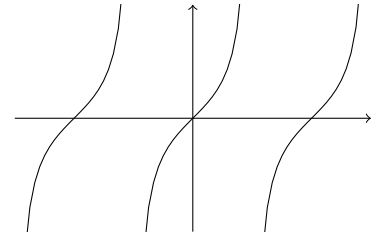
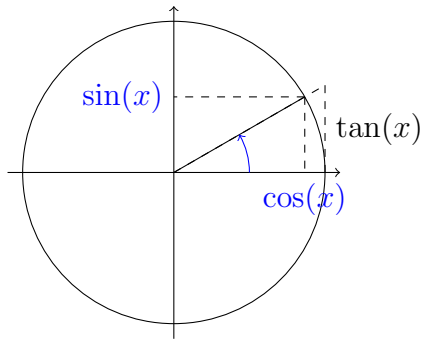
Définitions : Le graphe de $f : E \rightarrow F$ est un sous ensemble de $E * F$ donné par

$$E * F = \{(x, y), x \in E, y = f(x)\}$$

$$E * F = \{x : \rightarrow f(x) = y\}$$

Exemples cosinus : $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

tangente $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k * \pi, k \text{ appartient a } \mathbb{Z}\} \rightarrow] - \infty, +\infty[$



$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

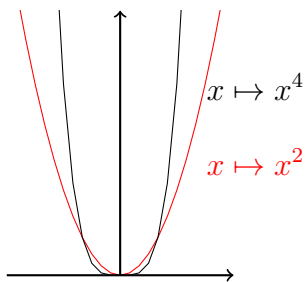
$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} x \rightarrow x^n, n \in \mathbb{N}$$

$$n = 0 : x \rightarrow 1$$

$$n = 1 : x \rightarrow x$$

$$n = 2 : x \rightarrow x^2$$

$$n = 3 : x \rightarrow x^3$$



$n > 0$ et n pair.

Remarque : les fonctions sont plus étroites. Schéma typique pour

Définitions Soit $f : E \rightarrow R$ une fonction, avec E symétrique par rapport à 0.

- f est dite paire si : $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$
- f est impaire si : $\forall x \in E, f(x) = -f(-x)$ Remarque : si f est impaire $\rightarrow f(0) = 0$. En effet,

$$f(-0) = f(0) \quad (\text{I.1})$$

$$f(0) = -f(0) \quad (\text{I.2})$$

$$2 * f(0) = 0 \quad (\text{I.3})$$

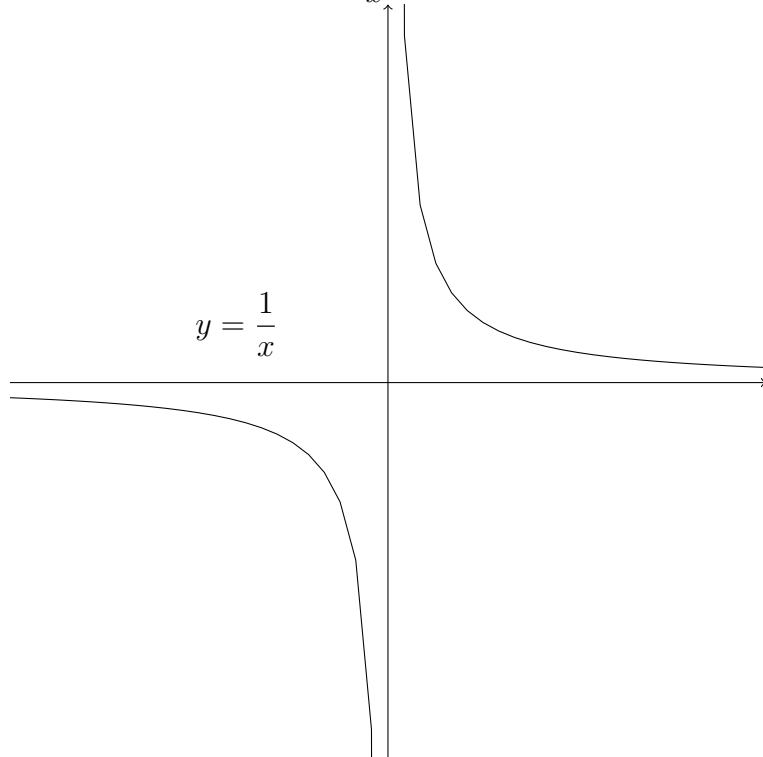
Exemple : fonctions paire : cosinus, x^{2p} avec p appartient à \mathbb{N}
impaires sinus, tangente, x^{2p+1} avec p appartient à \mathbb{N}

4 monotonie

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

- f est croissante si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
- f est strictement croissante si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
- f est décroissant si $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$
- f est décroissant si $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) > f(b)$

Exemple $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* x \rightarrow \frac{1}{x}$



décroissante sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$ mais pas sur $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$ par exemple, $-1 \leq 1$ et $\frac{1}{-1} \leq$

$\frac{1}{1}$

Définition Soit $f : E \rightarrow F$ et A un sous ensemble de E . On appelle restriction de f à A , note $f|_A$. La fonction $f|_A : A \rightarrow F$ définie par $f_A(x) = f(x) \forall x \in A$

Soit $f : E \rightarrow F$ et E', F' des sous ensembles de \mathbb{R} , avec $E \subset E', F \subset F'$.

La fonction $g : E' \rightarrow F'$ est un prolongement de f si $g|_E = f$ c'est à dire $\forall x \in E, g(x) = f(x)$

Exemple logarithme népérien $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln(x)$

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a * b)$ avec $\forall (a, b) \in (R^{*+})^2$

5 Opérations sur les fonctions

Soit $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$. On peut définir :

— La fonction somme $f + g$ par $f + g : E \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

— La fonction produit $f * g$ par $f * g : E \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto (f * g)(x) = f(x)g(x)$

6 Image (direct) d'une fonction composée (composition)

Définitions : $f : E \rightarrow F$. L'image de f notée $im(f)$ c'est l'ensemble $\{y \in F \text{ tel que il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y\}$ aussi noté $f(E)$

Définition $f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$ Si l'image de $g \subset E$, on peut définir la fonction composée $f \circ g : E' \rightarrow F$

$x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x))$

7 Image réciproque

Définition Soit $f : E \rightarrow F$, et $B \subset F$ L'image réciproque de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\}$

$f^{-1}([-1, 1]) = [a, b]$

Exemple (de composition)

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

composé de fonction $f = g \circ u$

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - 4x + 3$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4 \text{ racine de } u : 1 \text{ et } 3$$

$$u(x) > 0 \text{ si et seulement si } x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[\quad E =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$$

$$h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x^2)$$

Pour composer h avec

$$v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

ou doit enlever les points où v s'annule, c'est à dire $v^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$$g : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2\ln(x)$$

$\ln(x^2) = \ln(x * x) = \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x)$ mais $\ln(a * b) = \ln(a) + \ln(b)$ n'est valable que si a et b > 0

8 Application, surjectives, injectives, bijectives

Définition $w : E \rightarrow F$ ($E, F \in \mathbb{R}$) On dit que w est surjective si $w(E) = F$
De manière équivalente : ($y \in F$ tel que il existe $x \in E$ avec $w(x) = y$) = F c'est à dire tout les éléments de F admette un antécédent. c'est à dire $\forall y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que $w(x) = y$

Définition $w : E \rightarrow F$ ($E, F \subset \mathbb{R}$) On dit que w est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent. c'est à dire que si x et x' des éléments de E qui sont différents, $w(x)$ différent $w(x')$

Exemple $w(x) = x^2$ n'est pas injectifs car -2 et 2 ont la meme image (4).

Exemple :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3$$

Cette fonction est injective car pour tout y de \mathbb{R} , il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. On a aussi $\forall y \in \mathbb{R}$, cet antécédent est unique.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

Cette fonction n'est pas injective (-1 par exemple n'a pas d'antécédent) et pas surjective car $y = 4$ par exemple possède 2 antécédents.

Remarque : Si on considère

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

g est surjective (il y a toujours au minimum un antécédent) mais toujours pas injective. Plus généralement, si on considère $f : E \rightarrow f(E)$ est toujours surjective.

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$ est surjective mais pas injective : 0 est compris entre $[-1; 1]$ mais possède plusieurs antécédents ($k * \pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$)

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto e^{2x}$$

Cette fonction n'est pas surjective (antécédent de 0 n'existe pas) mais est injective.

Définition $w : E \rightarrow F(E, R \subset \mathbb{R})$ est dite bijective si elle est injective et surjective, c'est à dire tout élément de F admet exactement un antécédent.

9 Fonction réciproque

Si $f : E \rightarrow F$ est bijective, pour tout y de F , il existe un unique x dans E tel que $f(x) = y$. On peut donc définir $g : F \rightarrow E$ par $g(y) = x$ (tel que $f(x) = y$) g est la réciproque de f , notée f^{-1} .

Exemple

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$$

$$x \mapsto \exp(x)$$

et g

$$g : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x)$$

Remarque si $g = f^{-1}$ avec $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ alors

$$f \circ g : F \rightarrow F$$

$$x \mapsto x$$

$$\text{et } f \circ g = g \circ f$$

Démonstration Soit $y \in F$, quelconque, on veut calculer $f \circ g(y)$. Par définition de g comme fonction réciproque de f , $g(y) = x$ tel que $f(x) = y$ donc $f(g(y)) = f(x) = y$.

Proposition $f : E \rightarrow F$ une fonction impaire. supposons que $f|_{E \cap \mathbb{R}^+}$ est croissante, Alors $f|_{E \cap \mathbb{R}^-}$ est croissante.

Démonstration

$$f|_{E \cap \mathbb{R}^-} : E \cap \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

Soit x et x' dans $E \cap \mathbb{R}^-$ tels que $x \leq x'$.

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{car } f \text{ impaire}$$

$$f(x') = -f(-x')$$

Comme $x, x' \in E \cap \mathbb{R}^+$, $-x, -x' \in E \cap \mathbb{R}^-$ et comme $x \leq x'$ et $-x \geq -x'$, $f(-x) \geq f(-x')$ car f est croissante sur $E \cap \mathbb{R}^+$.

Conclusion, $-f(-x) \leq -f(-x')$ et donc $f(x) \leq f(x')$ et donc $f|_{E \cap \mathbb{R}^-}$ est croissante.

Remarque f^{-1} pourrait être la fonction $\frac{1}{f}$ (la fonction f est différent de 0), la fonction réciproque de f (avec f bijective).

Pour $f : E \rightarrow \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

Toujours définie.

Proposition $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ si f et g sont bijective, alors $g \circ f$ l'est aussi et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ($g \circ f : E \rightarrow G$)

Exemple Trouver la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \rightarrow]-7, +\infty[$, $f(x) = e^{3x+2} - 7$ On écrit $y = e^{3x+2} - 7$ et on détermine x en fonction des y .

$$y + 7 = e^{3x+2}$$

$$\ln(y + 7) = 3x + 2 \quad y > -7 \text{ car fonction exp} > 0$$

$$x = \frac{1}{3}(\ln(y + 7) - 2)$$

$$\text{d'où } f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(\ln(x + 7) - 2)$$

Etablie $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \in A, f(x) = y\} \quad f(A) = \text{im}(f|_A)$$

II

Limites

1 Voisinage et adhérence

Définition si $x \in E$, on dit que E est un voisinage de x si E contient un intervalle ouvert qui contient x . Ceci est équivalent à E voisinage de x si il existe $\delta > 0$ tel que $]x - \delta; x + \delta[\subset E$.

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}$. Un réel x est adhérent à E , si tout voisinage V de x intersecte E , c'est à dire $(V \cap E \neq \emptyset)$

Exemple

- si $x \in E$, x est adhérent à E , car pour tout voisinage V de x , $x \in V \cap E$
- $E =]0; 1]$, 0 est adhérent à E .
- $E = \{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\}$ 1 est adhérent à E car $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

2 Limite finie en un point de \mathbb{R}

Définition $f : E \rightarrow \mathbb{R}; x_0$ un point adhérent de E .

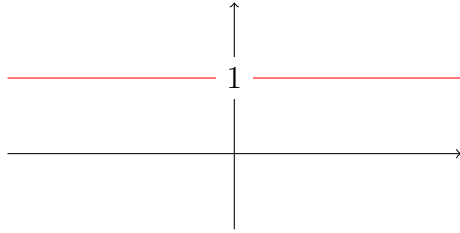
On dit que $f(x)$ tend vers l en x_0 ou que $f(x)$ admet la limite l en x_0 si : $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

Ceci est équivalent à dire que $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], f(x) \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$

Pour tout voisinage V de l il existe un voisinage de x_0 U tel que si x est dans U , alors $f(x)$ est dans V .

Notation $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$

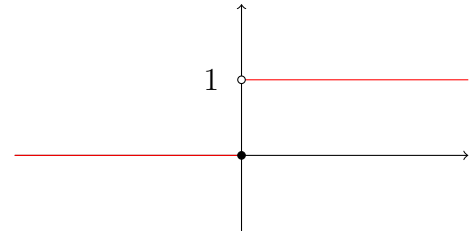
Exemple $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dont le graph est :



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Soit $\epsilon > 0$, tout $\delta > 0$ convient.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



f n'admet pas de limite en 0.

3 Restriction à un sous ensemble

$f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0$ adhérent à A. On dit que $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tends vers x_0 dans A.

$\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0, \forall x \in A$, tel que $|x - x_0| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$

Exemple limite à gauche de f en x_0 est $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ c'est à dire la limite de f(x) quand x tends vers x_0 dans $] -\infty, x_0[$

Exemple limite à droite de f en x_0 est $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ c'est à dire la limite de f(x) quand x tends vers x_0 dans $]x_0, +\infty[$

Exemple La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à droite en 0 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$, pour $f(x) = 1$
La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à gauche en 0 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$, pour $f(x) = 0$

Remarque On écrit aussi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ par $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ par $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

4 Propriété

Unicité Si la limite existe, elle est unique.

démonstration par l'absurde : $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x_0$ adhérent à E. On suppose que la limite en x_0 existe mais qu'elle n'est pas unique. Supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$ avec $l_1 \neq l_2$

Comme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1, \forall \epsilon_1 > 0$, il existe $\delta_1, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_1$, alors $|f(x) - l_1| < \epsilon_1$ (*)

De plus $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2, \forall \epsilon_2 > 0$, il existe $\delta_2, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_2$, alors $|f(x) - l_2| < \epsilon_2$ (**)

Choisissons $\epsilon < \frac{l_1 + l_2}{2}$, on remarque $]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$

On trouve δ_1 et δ_2 tel que (*) et (**) soient vraies.

On appelle $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\subset]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1[\cap]x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2[$

Soit $x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ Par (*), $f(x) \in]l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon[$
et par (**), $f(x) \in]l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon[$ donc $f(x) \in]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$ Ceci est absurde ($f(x) \neq \emptyset$)

5 Théorème des gendarmes

f, g, h 3 fonctions $E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ adhérent à E.

(i) Si f, g, h admettent pour limites respectifs l, m, n en x_0 et si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x de E, alors $l \leq m \leq n$

(ii) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur E et si f et h admettent une limite (identique) l en x_0 , alors g admet une limite en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

Remarque On remplace les inégalité de (i) par $\forall x \in E, f(x) < g(x) < h(x)$, on obtient aussi $l < m < n$

Exemple $f(x) = |x|$ et $g(x) = 2|x|$ Sur $E \subset \mathbb{R}^+, f < g$ mais $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ existe ?}$$

$\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ n'a pas de limite en 0)

Soit f, g, h $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|, g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), h(x) = |x|$

On a bien $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$

Donc par le théorème des gendarmes, Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ g admet 0 comme limite quand x tends vers 0.

Fonction de référence

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^{\ln(n)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^\alpha \cdot x^{\ln(x)^\beta}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Methode

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)}$$

$$f(x) = \frac{(x+1) - 1}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{2x}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{2x} \cdot \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3+x}^2 - \sqrt{3}^2}{2x(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

Comportement local

Proposition Si $f(x)$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tends vers x_0 , alors f est localement bornée. c'est à dire il existe un voisinage de x_0 , V , tel que il existe $M \in \mathbb{R}, \forall x \in V, |f(x)| < M$

Remarque Il existe un voisinage de x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert contenant x_0 si et seulement si il existe $\delta > 0, x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

Démonstration Par hypothèse, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$

c'est à dire $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$

Soit $\epsilon = 1$, On trouve δ tel que $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$|f(x) - l| < 1$, c'est à dire $-1 < f(x) - l < 1$ Soit $|f(x)| < l + 1$

Propriété Si $f(x)$ admet $l \neq 0$ comme limite quand x tends vers x_0 , alors localement (autour de x_0), alors f est de signe constant

Démonstration bornée en x_0 (meme style que la précédente), $\epsilon = \frac{l}{3}$

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6 = f(1) \text{ avec } f = x^2 + 2x + 3$$

$$|f(1+h) - f(1)| = |(1+h)^2 + (1+h) * 2 + 3 - 6|$$

$$= |1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3|$$

$$= |h(h+4)|$$

$$= |h| * (h+4) \quad \text{si } |h| < 1$$

$$\leq 5|h|$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 5|h| = 0$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(1+h) - f(1)| = 0$$

Remarque $x = 1 + h$ quand h tends vers 0 et x tends vers 1.

6 Opération sur les limites

$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}; x_0$ adhérent à E Supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$ Alors

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$ existe et vaut $l + m$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x)$ existe et vaut $l \cdot m$
- si $m \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (f/g)(x)$ existe et vaut $\frac{l}{m}$

Composition $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$

$g \circ f : E \rightarrow G, x_0$ adhérent à E.

Supposons que

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$
- F est un voisinage de l.
- $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = m$

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x)$ existe et vaut m.

Exemple

$$g : y \rightarrow e^y$$

$$f : x \rightarrow \sqrt{1+x}$$

- $g \circ f$ est bien défini car le domaine de g est \mathbb{R}
- 0 est bien adhérent au domaine de f (qui est $[-1, +\infty[$)
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$
- $\lim_{y \rightarrow 1} g(y) = e$

7 Limites infinies, et limites en l'infinie

Définition $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x_0$ adhérent à E

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) quand x tend vers x_0 si $\forall A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta > 0$, alors $f(x) > A$ (ou $f(x) < -A$ pour $f(x)$ tend vers $-\infty$).

Exemple

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Définition $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel qu'il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset E$ On dit que $f(x)$ tend vers $l \in E$ quand x tend vers $+\infty$
c'est à dire $\forall \epsilon > 0$, il existe $A > 0, x > A$, alors $|f(x) - l| < \epsilon$

Définition $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel qu'il existe $A < 0$ tel que $] - \infty, A[\subset E$ On dit que $f(x)$ tend vers $l \in E$ quand x tend vers $-\infty$ c'est à dire $\forall \epsilon > 0$, il existe $A < 0, x < A$, alors $|f(x) - l| < \epsilon$

Remarque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ veut dire $\forall A > 0$, il existe $B > 0, x < -B$ tel que $f(x) > A$

Exemple

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

Démonstration Soit $A > 0$. On cherche δ tel que si $0 < x, 0 < \delta$ alors $f(x) = \frac{1}{x} > A$

Choisir $\delta = \frac{1}{A}$ suffit, en effet $0 < x < \frac{1}{A}$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{A}$.

Exemple $g(x) = 1 + e^{-x}$ Montrons que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

Exemple

$$f :] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \tan(x)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty$$

8 Opération sur les limites

- Limites finies ($l \in \mathbb{R}$) en l'infini sont exactement les memes opérations.
- Limites infinies ($l = \pm\infty$) Attention aux cas indéterminé :

$$+\infty - \infty, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 * (\pm\infty)$$

Exemple $\frac{+\infty}{+\infty} = ?$

$$f : x \mapsto x$$

$$g : x \mapsto x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f_2 : x \mapsto x^3$$

$$g_2 x \mapsto x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = +\infty$$

$$f_3 : x \mapsto 3x$$

$$x \mapsto x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_3(x)}{g_3(x)} = 3$$

Plus généralement, P,Q deux polynomes, que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$? Elle est égale au rapport des termes du plus haut degrés. Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 4x^5 + 2}{x^4 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5}{x^4} = +\infty$$

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} x * \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\text{car } \forall x \neq 0, 1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

donc $0 \leq |x * \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$ avec $|x|$ tend vers 0 pour x tend vers 0.

III

Continuité

1 Définition et premières propriétés

Définition $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \in E$

- On dit que f est continue en x_0 (au point x_0) si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$
- f est continue sur E si f est continue en tout point $x_0 \in E$

o

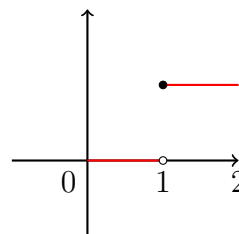
Exemple Fonctions continues :

- $x \mapsto x^2$ est continue sur \mathbb{R}
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ (domaine \mathbb{R}^*) est continue sur \mathbb{R}^*
- \sin, \cos sont continues sur \mathbb{R}

Fonctions discontinues : $x \mapsto [x]$ n'est pas continue en 1 par exemple. En effet, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 1$.

Les limites à gauche et à droite étant différentes donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ n'existe pas

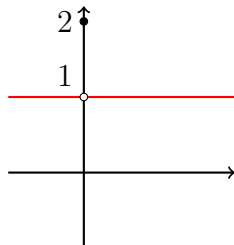
$$g(x) = 1 \text{ pour tout } x \text{ différent de } 0 \text{ mais } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0; x < 0} g(x)$$



Remarque f continue en x_0 si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Définition

- f est continue à droite en x_0 si limite de $f(x)$ par valeur supérieure $(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x))$ en x_0 et vaut $f(x_0)$
- f est continue à gauche en x_0 si limite de $f(x)$ par valeur inférieure $(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x))$ en x_0 et vaut $f(x_0)$



Exemple

- f (partie entière de l'exemple précédent) est continue à droite mais pas à gauche en 1. f est continue sur $[0; 1[$

— g n'est pas continue ni à gauche, ni à droite en 0.

Proposition f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0

Propriété $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$

f et g continue en x_0

- $f+g$ est continue en x_0
- $f \cdot g$ est continue en x_0
- $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$

La continuité est très local, même si pour un $x \in E$, $g(x) = 0$, temps que x_0 différent de 0, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

Composition $f : E \rightarrow F$ $g : F \rightarrow G$ et $g \circ f : E \rightarrow G$ si f est continue en $x \in E$ et g est continue en $f(x) \in F$, alors $g \circ f$ est continue en x_0

Exemple

- Polynôme, $\sin + \cos$, $\tan + \exp$ sont continues sur \mathbb{R}
- $\sin(\ln(\frac{e^x}{1+x^2}))$ est continue sur \mathbb{R} car $\exp, 1+x^2$ sont continue, de plus $1+x^2 \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ donc $\frac{e^x}{1+x^2}$ est continue sur \mathbb{R} . Finalement, e^x n'est jamais null donc $\text{im}(x \mapsto \frac{e^x}{1+x^2}) = \varphi \subset \mathbb{R}^{+*}$, d'où $\ln(\varphi)$ est continue sur \mathbb{R}
- $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est continue sur \mathbb{R}^* , de plus, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
 $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

Définition Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 adhérent à E . Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, alors la fonction $g : E \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases} \quad \text{Est continue sur } \mathbb{R}$$

Exemple

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ l & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{Est continue sur } \mathbb{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{est le prolongement par continuité en 0 de } x \mapsto x \ln(x)$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Exercice Par quelles valeurs de c , la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est continue ? f est continue si et seulement si $x = 2$ En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(2x)}{x} \\ &= \frac{\sin(2x)}{2x} * 2 = 2 \end{aligned}$$

(2^{ème} méthode : $\sin(2x) = 2\sin(x) * \cos(x)$, $\frac{\sin(2x)}{x} = 2 * \frac{\sin(x)}{x} * \cos(x)$ ce qui tend vers 2 pour x tend vers 0, et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = c$ donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \text{ si et seulement si } c = 2$$

Donc f est continue en 0 si $c = 2$. De plus, pour tout $x_0 > 0$, $f(x) = x + c$ qui est continue sur \mathbb{R}^{+*} et pour tout $x_0 < 0$, $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$ qui est continue sur \mathbb{R}^{-*} Le seul problème possible était en 0.

Comportement local

Proposition Si f est continue en x_0 , alors f est localement bornée autour de x_0 (c'est à dire il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est bornée, c'est à dire il existe $\delta > 0$ et $M > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x)| < M$). Si f est continue en x_0 et $f(x) \neq 0$, alors f est de signe constant (celui de $f(x_0)$) localement autour de x_0

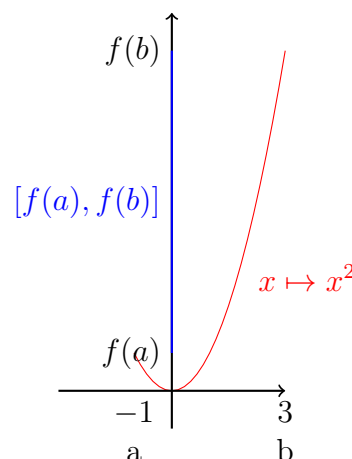
2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) et continue (sur $[a, b]$) Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

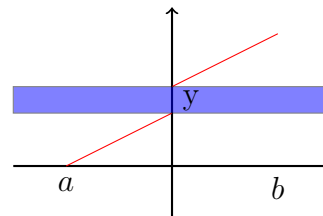
Exemple

$$x \mapsto x^2$$

$$[-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$



(Contre) exemple : la continuité est essentielle. Voici une fonction monotone et non continue pour laquelle il existe des y dans $[f(a), f(b)]$ qui n'a pas d'antécédent entre a et b .



Corollaire 1 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue.

si $f(a)$ et $f(b)$ sont non nul et de signes différents, il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$

Corollaire Si $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$ avec a, b de signes différents dans \mathbb{R} , alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$

Corollaire

f fonction continue

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ alors f est surjective.

Idée de démonstration Ramener à un intervalle "bornée", de type $[a, b] \in \mathbb{R}^2, a < b$.

Soit $y \in \mathbb{R}$, et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = y - 1$ et $f(x_2) = y + 1$. On cherche à prouver qu'il existe au moins un antécédent.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc $f(x) \geq y + 1$ pour x assez grand.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ donc $f(x) \leq y - 1$ pour x assez petit. On applique le théorème des valeurs

intermédiaire à $f|_{[x_1, x_2]} : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f|_{[x_1, x_2]}$ est bien continue.

Comme $f(x_1) \leq y - 1 < y < y + 1 \leq f(x_2)$

D'où il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) = y$.

Corollaire $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $I \in \mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle.

3 Continuité et extremum

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}$.

- On dit que x est le minimum de E , si pour tout élément de $x' \in E$, $x' \geq x$
- On dit que x est le maximum de E , si pour tout élément de $x' \in E$, $x' \leq x$
- Un extremum est un minimum ou un maximum.

Remarque Le maximum et le minimum sont unique.

Théorème Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (a < b)$, continue.

L'image de f admet un minimum et un maximum.

Remarque de manière équivalente : Minimum

$\exists y \in \text{Im}(f), \forall y' \in \text{Im}(f), y' \geq y$ (ou y est le minimum)

$\exists x_{\min} \in [a, b], \forall x' \in [a, b], f(x') \geq f(x_{\min})$ (avec $y = f(x_{\min})$ et $y' = f(x')$)

Pour le maximum : $\exists x_{\max} \in [a, b], \forall x' \in [a, b], f(x') \leq f(x_{\max})$ ($f(x_{\max})$ le maximum de $\text{Im}(f)$)

Dans ces exemples, y est forcément unique (dans le cas du minimum ou du maximum) mais il peut y avoir plusieurs antécédents (plusieurs x_{\min} et x_{\max})

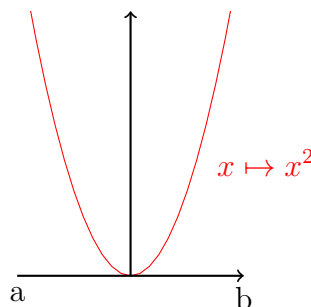
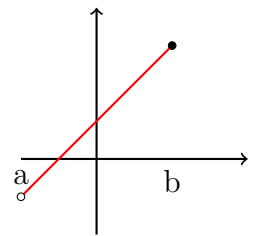
Exemple $\sin : [0, 4\pi] \rightarrow [-1, 1]$

Le minimum de $\sin([0, 4\pi])$ est -1. Il est atteint en $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{2}$.

Remarque 2 hypothèses. Pour avoir un maximum ou un minimum, $[a, b]$ doit être un intervalle fermé et borné. Par exemple, Le minimum n'est pas atteint sur $]a, b]$ De même, sur $[a, b[$ pour le maximum.

Corollaire supposons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f admet un minimum mais pas de maximum.



Idée de démonstration

Cette fonction admet un minimum (0) mais jamais de maximum.

Corollaire $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

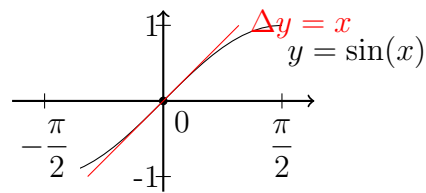
Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > 0$ alors le minimum de $Im(f) > 0$,
c'est à dire $\exists m > 0, \forall x \in [a, b], f(x) \geq m > 0$

4 Fonctions réciproques

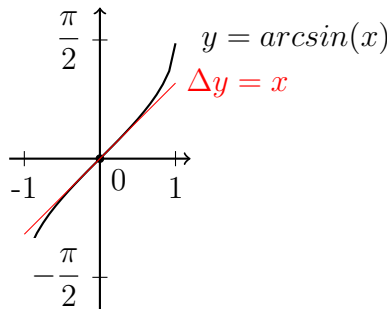
Théorème $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue et strictement monotone.

1. $f(I)$ est un intervalle
2. f est bijective sur J
3. f^{-1} est continue et strictement monotone, avec le même sens de variations que f .
4. Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta y = x$

Exemple $\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est continue et strictement croissante.

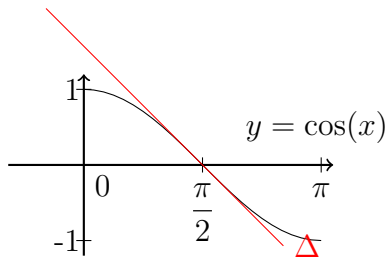


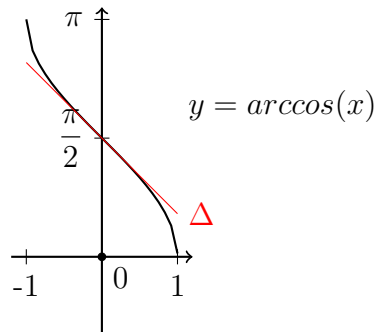
Donc f est bijective, c'est à dire $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ existe
et f^{-1} vaut arcsinus.
 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante.



Exemple $\cos[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est continue et strictement décroissante.

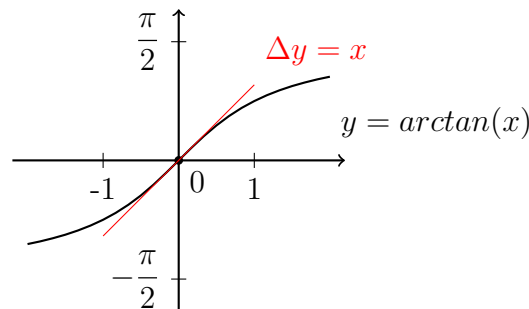
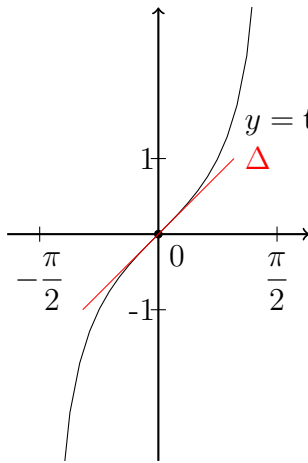
Donc f est bijective, c'est à dire $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ existe et
 f^{-1} vaut arccosinus.
 $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est continue et strictement décroissante.





Exemple $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante, donc sa fonction réciproque est : $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ aussi.

Donc f est bijective, c'est à dire $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ existe et f^{-1} vaut arctangente.
 $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est continue et strictement croissante.



Exemple

$\left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}^* \\ x \mapsto x^n \end{array} \right.$ est continue sur \mathbb{R} . Elle est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ si n est pair.

Elle est donc bijective : $\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \\ \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$ elle est strictement croissante sur \mathbb{R} si n est impair. Réciproque

$\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right.$

IV

Dérivabilité

Définition $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, E est un voisinage de x_0 . f est derivable en x_0 si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite l quand x tend vers x_0 ($l \in \mathbb{R}$). $\tau(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est appelé le taux d'accroissement de f en x_0 . La limite de l (quand elle existe) est la dérivée de f en x_0 , elle est notée $f'(x_0)$

Exemple $f : x \mapsto x^2$
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f'(1) = ?$

$$\tau(x) = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0$$

Exemple 2 $f : x \mapsto x^3$
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tau(x) = \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2)}{x - x_0}$$

$$\forall x \neq x_0, \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 + x.x_0 + x_0^2 = 3x_0$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x_0^2$$

Exemple 3 $f : x \mapsto \sqrt{x}$
 $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \\
&= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\
&= \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\
\forall x \neq x_0, x_0 \in \mathbb{R}^{+*} & \\
\lim_{x \rightarrow x_0} \tau(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

1 Interprétation géométrique

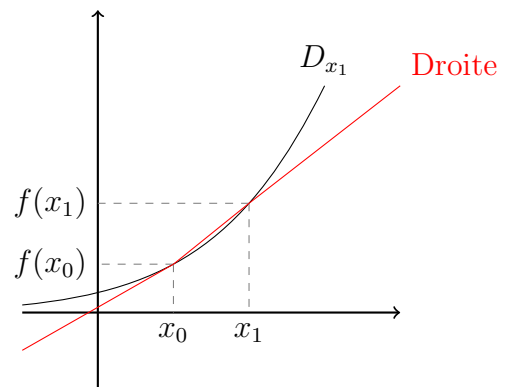
$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente du graphe de f en $(x_0, f(x_0))$

$\tau(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ est le coefficient de la droite passant par P_{x_1} et P_{x_0} avec P_{x_1} du graph au point x_1 , et P_{x_0} celui de x_0

$y = \tau(x_1)(x - x_0) + f(x_0)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$

Quand x tend vers x_0 , la droite D_{x_1} "converge" vers la tangente au graph de f au point $(x_0, f(x_0))$, d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Définition Si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \tau(x) = l^-, l^- \in \mathbb{R}$

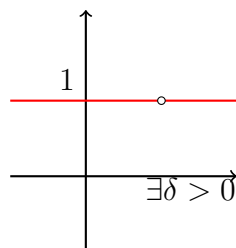
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 et on note $f'_g(x_0) = l^-$

Si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \tau(x) = l^+, l^+ \in \mathbb{R}$

f admet une dérivée à droite en x_0 , que l'on note $f'_d(x_0) = l^+$

Théorème $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, E un voisinage de x_0 . f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Remarque Cette fonction n'est pas dérivable en 1, pourtant $f'_d(1) = f'_g(1)$, f doit donc alors être continue en x_0



Démonstration f est dérivable en x_0 , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \tau(x) = l \in \mathbb{R}$, cela signifie

$$\exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \text{ donc } |\tau(x) - l| < 1$$

donc que

$$l - 1 \leq \tau(x) \leq l + 1$$

$$l - 1 \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq l + 1$$

Si $x > x_0$, on obtient :

$$(l-1)(x-x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq (l+1)(x-x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (l-1)(x-x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} (l+1)(x-x_0)$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \text{ par le théorème des gendarmes, et de même pour } x < x_0$$

Définition $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ si f est dérivable en tout point de $x_0 \in]a, b[$ f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si f est dérivable sur l'intervalle ouvert et à droite en a et à gauche en b .

Exemple $x \rightarrow \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[, [a, +\infty[(a > 0)$ mais pas sur $[0, +\infty[$.

2 Dérivabilité des prolongements de fonctions

Proposition $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

On définit $\varphi : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule $\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ g(x) & \text{si } x \in]b, c] \end{cases}$

φ est continue sur $[a, c]$ si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} \varphi(x) = \varphi(b)$$

$$f(b) = g(b) = \varphi(b)$$

Si φ est continue, φ est dérivable sur $[a, c]$ si $f'_g(b) = g'_d(b)$

Exercice Trouver α et β tels que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 2, & \text{si } x \leq 1 \\ \alpha x + \beta & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Soit dérivable sur \mathbb{R} . Comme $e^x + 2$ et $\alpha x + \beta$ sont dérivable sur \mathbb{R} , le seul problème peut survenir en 1. Pour être dérivable, f doit être continue : $e^1 + 2 = \alpha + \beta$ et on doit avoir $f'_g(1) = e = f'_d(1) = \alpha$.
 $\alpha = 1$ et $\beta = 2$

3 Opération usuelles

$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$, E voisinage de x_0 .

f et g sont dérivable en x_0 , alors :

- $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $f \cdot g$ est dérivable en x_0 et $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- si $g(x_0) \neq 0$ f/g est dérivable en x_0 et $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Démonstration Pour la somme :

$$\begin{aligned} (f+g)(x) - (f+g)(x_0) &= f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0)) \\ &= f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0) \\ \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Pour le produit :

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) &= f(x) \cdot g(x) - (f(x_0) \cdot g(x_0)) \\ &= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) \\ &= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0)) \\ \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \end{aligned}$$

Comme précédemment, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ car g est continue en x_0

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} &= f \cdot \frac{1}{g} \\ (\frac{f}{g})' &= f' \cdot \frac{1}{g'} + f \cdot (\frac{1}{g})' \end{aligned}$$

Composition $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G, g \circ f : E \rightarrow G$

On suppose f dérivable en x_0 , g dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$

Exemple $f, g : E \rightarrow F$ dérivables en x_0 , avec $f(x_0) \neq 0, \frac{f'}{g}(x_0) = (g \cdot \frac{1}{f})'(x_0)$ Et $\frac{1}{f}$ est la

composée de g et de $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ d'où } (\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit finalement } \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - f(x_0) \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \end{aligned}$$

Exemple dérivée $e^{\sin(x)}$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sin(x)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^x$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g \circ f(x)$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R} h'(x) = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$

Définissons f par la formule $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \neq 0$ Donc :

- f est définie sur \mathbb{R}
- f est dérivable sur \mathbb{R}

$$\text{et } f'(x) = \frac{-1x}{(1+x^2)^2}$$

Dérivée de la fonction réciproque $f : E \rightarrow F$ dérivable sur E et bijective (Sa réciproque est notée f^{-1}) On note $f^{-1} \circ f(x) = x \forall x \in E$ Donc $(f^{-1} \circ f)'(x) = f'(x) \cdot (f^{-1})'(f(x)) = 1 \forall x \in E$

$$\text{On obtient } (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Exemple $\tan] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$

Pour $x \in \tan] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos x \neq 0$ et donc

$$\begin{aligned} (\tan)'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x) \end{aligned}$$

$$\text{En effet, } 1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

De plus, \tan est bijective, de réciproque $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ \arctan est dérivable sur \mathbb{R} et $\arctan(\tan x) = x$

donc $\tan'(x) \cdot (\arctan)'(\tan(x)) = 1$ c'est à dire

$$\arctan'(\tan x) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

On note $z = \tan x$, $\arctan'(z) = \frac{1}{1 + z^2}$

Exercice a) $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]-1, 1[$

$$x \mapsto \sin x$$

f est bijective et $f'(x)$ ne s'annule pas, donc $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) de même, $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $] -1, 1[$

4 Extreima et points critiques

Définitions $f : E \rightarrow F$

f admet un maximum local en $\alpha \in E$, s'il existe un voisinage V de α , $V \subset E$, tel que $\forall x \in V \cap E, f(x) \leq f(\alpha)$

f admet un minimum local en $\beta \in E$, s'il existe un voisinage V de β , $V \subset E$, tel que $\forall x \in V \cap E, f(x) \geq f(\beta)$

Un extremum local est un minimum local, soit un maximum local.

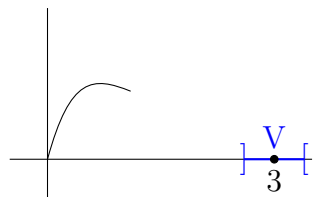
Proposition $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$ avec E voisinage de x_0 Si x_0 est un extremum local de f , alors $f'(x_0) = 0$

ON dit alors que x_0 est un point critique de f .

Remarque $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Les extrema sont inclus dans $\{x \in]a, b[\text{ tel que } f'(x) = 0\} \cup \{a, b\}$

Exemple (inhabituel) $f : [0, 1] \cup \{3\}$

$V \cap E = \{3\} \forall x \in V \cap E, f(x) \geq f(3)$ donc $f(3)$ est un minimum local, de même, il est aussi un maximum local car $\forall x \in V \cap E, f(x) \leq f(3)$



Exemple $\sin[-\frac{\pi}{4}, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

La restriction de la fonction sinus à $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$ admet un unique point critique.

Théorème de Rolle Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ si $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Démonstration Notons $y = f(a) = f(b)$ f continue sur $[a, b]$ (fermé) donc il existe un minimum global et un maximum global (atteints respectivement) en α et β , c'est à dire $\forall x \in [a, b], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$

1er cas $f(\alpha) = y = f(\beta)$

La fonction est donc constante sur $[a, b]$. N'importe quel $c \in]a, b[$ convient.

2er cas soit $f(\alpha) < y$ ou $y < f(\beta)$

Supposons que $f(\alpha) < y$ $f(\alpha)$ est un minimum global donc un minimum local.

$\alpha \in]a, b[$, car $f(x) \neq y$ Par la proposition, $f'(\alpha) = 0$

De même, si $y < f(\beta)$, prendre $c = \beta$ convient.

Exemple

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On remarque que $f(0)$ n'est ni un minimum, ni un maximum local.

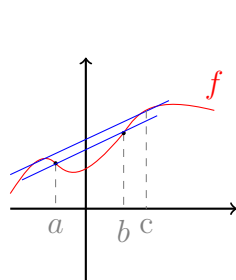
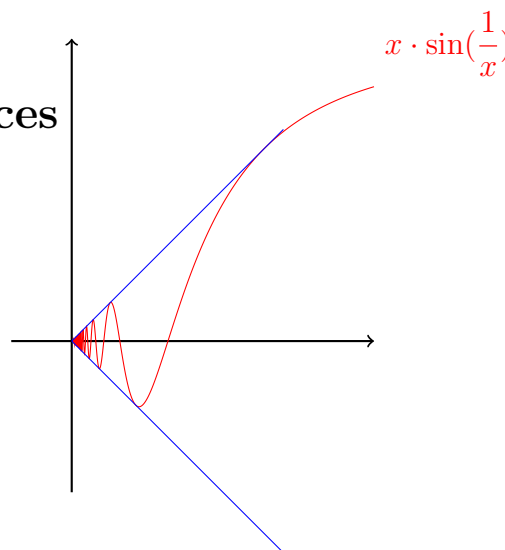
5 Acroissements finis et conséquences

Exemple

Théorème $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Démonstration Appliquer le théorème de Rolle à

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \cdot x$$



Corollaire f est une fonction comme ci dessus,

- si $f' \geq 0$ sur $]a, b[$ alors f est croissante sur $[a, b]$
- si $f' > 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement croissante sur $[a, b]$
- si $f' \leq 0$ sur $]a, b[$ alors f est décroissante sur $[a, b]$
- si $f' < 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$
- si $f' = 0$ sur $]a, b[$ alors f est constante $[a, b]$

Application Tableaux de variations.

Exemple

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\sin h(0) = 0$ $\sin h$ est dérivable sur \mathbb{R} et $\sin h'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$
 $\sinh'(x) > 0$ pour tout x , donc le sinus hyperbolique est croissante.

De même

$$\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh'(x) = \frac{e^x + e^{-x'}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh$$

$$\cosh(0) = 1$$

| | | | |
|----------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| \sinh' | | $+$ | |
| \sinh | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| \cosh' | $-$ | 0 | $+$ |
| \cosh | $+\infty$ | 1 | $+\infty$ |

$$\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} \\ &= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

De la même façon, $\tanh(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$

Remarque $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective $\sinh^{-1} = \arg \sinh$
 $\cosh : \mathbb{R}^+ \rightarrow [1, +\infty[$ est bijective $\cosh^{-1} = \arg \cosh$

V

Dérivées d'ordre supérieur

But Approcher localement une fonction f par des polynômes.

$$k \in \mathbb{N}^+, k! = 1 * 2 * 3 * \dots * k$$

Définition

$$0! = 1$$

Exemple

polynome de degré 0 $f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))$

$$= \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \text{ Si } f \text{ continue}$$

— Polynôme de degré 1 si f est dérivable :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))$$

$$(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)) = (x - x_0) \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right)$$

$$= \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \text{ car } f \text{ est dérivable}$$

On voudrait

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$

Objectifs du cours :

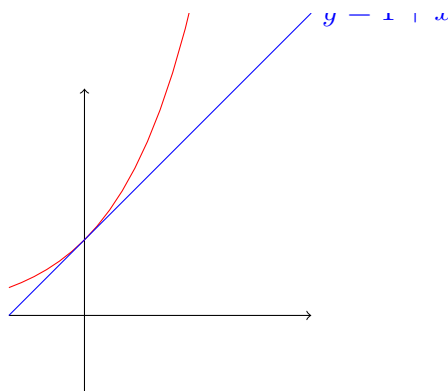
1. Comprendre $f''(x_0), f'''(x_0)$
2. Comprendre $\epsilon(x)$

Exemple En 0 ordre 2 : $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$

Application :

- Calcul de limites : $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$
- Position d'un graph par rapport à sa tangente.
On considère $f(x) - \text{tangente}$:

$$\begin{aligned} e^x - (x + 1) &= \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \\ &= x^2\left(\frac{1}{2} + \epsilon(x)\right) \end{aligned}$$



$x^2 > 0$ et $\frac{1}{2} + \epsilon(x) > 0$ donc près de 0, la fonction est au dessus de sa tangente.

1 Dérivées d'ordre supérieur

Définition $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ I est un intervalle ouvert. On dit que f est C^0 si elle est :

- C^0 si elle est continue sur I .
- C^1 si elle est dérivable sur I et que f' est continue.
- C^2 si f est dérivable deux fois et f'' est continue sur I
- C^k si f est dérivable k fois et $f^{(k)}$ est continue sur I
- C^∞ si f est $C^k \forall k \in \mathbb{N}$

Exemple $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow C^0$ car $f(x)$ est dérivable, donc continue.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc $f(x)$ n'est pas C^1 car $f'(x)$ n'est pas continue ($\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0).

2 Développement limité et formule de Taylor-Young

Définition Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I est un intervalle ouvert. $x_0 \in I$. f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n s'il existe :

- un polynome de degrés n : $P(x) = a_0 + a_1.x + \dots + a_n.x^n$
- Une fonction $\epsilon :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ avec $\epsilon \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x - x_0) + (x - x_0). \epsilon(x) \text{ pour } x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\\ &= a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n \epsilon(x) \end{aligned}$$

Dans ce cas P est la partie principale du développement limité.