

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Fonctions</b>	<b>2</b>
1	Ensembles de nombres . . . . .	2
2	Intervalle . . . . .	2
3	Fonctions . . . . .	2
4	monotonie . . . . .	4
5	Opérations sur les fonctions . . . . .	5
6	Image (direct) d'une fonction composé (composition) . . . . .	5
7	Image réciproque . . . . .	5
8	Application, surjectives, injectives, bijectives . . . . .	6
9	Fonction réciproque . . . . .	7
<b>II</b>	<b>Limites</b>	<b>9</b>
1	Voisinage et adhérence . . . . .	9
2	Limite finie en un point de $\mathbb{R}$ . . . . .	9
3	Restriction à un sous ensemble . . . . .	10
4	Propriété . . . . .	11
5	Théorème des gendarmes . . . . .	11
6	Opération sur les limites . . . . .	14
7	Limites infinies, et limites en l'infinie . . . . .	15
8	Opération sur les limites . . . . .	16
<b>III</b>	<b>Continuité</b>	<b>18</b>
1	Définition et premières propriétés . . . . .	18
2	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	20

# I

## Fonctions

### 1 Ensembles de nombres

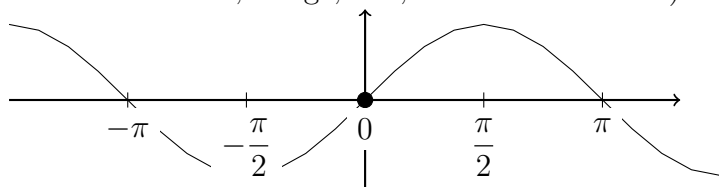
: Réels  $\mathbb{R}$ , Rationnels  $\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$  avec  $a$  et  $b$  entiers naturels  $\mathbb{N}$ , entiers  $\mathbb{Z} = \{-3, -2, \dots, 1\}$ , nombres complexes  $\mathbb{C}$ .

### 2 Intervalle

:  $[a, b]$  avec  $a, b$  réels compris dans l'intervalle, dit fermé,  $a < b$ ,  $]a, b[$  avec  $a, b$  non compris dans l'intervalle dit ouvert  $\rightarrow$  Intervalle bornés  $\mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$   $\mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$   $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$   $\mathbb{R}^- = ]-\infty; 0]$

### 3 Fonctions

Exemple : sinus :  $\sin : \mathbb{R}$  (domaine de définitions, sources, ensemble de départ)  $\rightarrow \mathbb{R}$  ou  $[-1, 1]$  (domaine de valeurs, image, but, ensemble d'arrivée)



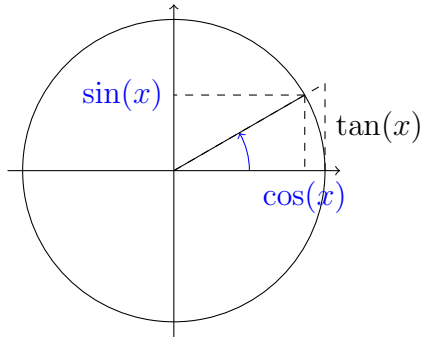
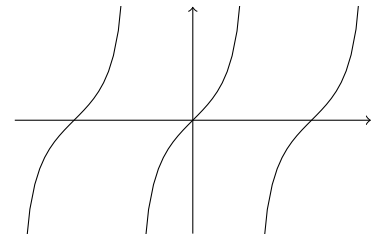
**Définitions** Soit  $E, F$  2 ensemble de  $\mathbb{R}$ . Une fonction  $f$  est procédé pour associer à tout élément de  $\mathbb{R}$  un unique élément de  $F$  Le graph de  $F$  "vit" dans  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R}$

**Définitions** : Soit  $E$  et  $F$  2 ensembles, on définit leur produit cartésien : comme l'ensemble dont les éléments sont les couples  $(x, y)$  avec  $x$  "vit" dans  $E$  et  $y$  dans  $F$ .  $E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$

**Définitions** : Le graphe de  $f : E \rightarrow F$  est un sous ensemble de  $E * F$  donné par 
$$\begin{aligned} &= \{(x, y), x \in E, y = f(x)\} \\ &= \{x \mapsto f(x) = y\} \end{aligned}$$

**Exemples** cosinus :  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

tangente  $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k * \pi, k \text{ appartient a } \mathbb{Z}\} \rightarrow ] - \infty, +\infty[$



$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

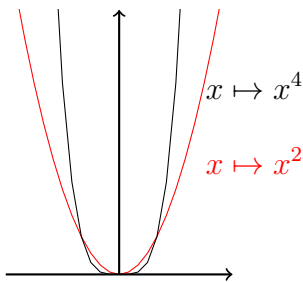
$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} x \rightarrow x^n, n \in \mathbb{N}$$

$$n = 0 : x \rightarrow 1$$

$$n = 1 : x \rightarrow x$$

$$n = 2 : x \rightarrow x^2$$

$$n = 3 : x \rightarrow x^3$$



Remarque : les fonctions sont plus étroites. Schéma typique pour

$n \neq 0$  et  $n$  pair.

**Définitions** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, avec  $E$  symétrique par rapport à 0.

—  $f$  est dite paire si :  $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$

—  $f$  est impaire si :  $\forall x \in E, f(x) = -f(-x)$  Remarque : si  $f$  est impaire  $\rightarrow f(0) = 0$ . En effet,

$$f(-0) = f(0) \quad (\text{I.1})$$

$$f(0) = -f(0) \quad (\text{I.2})$$

$$2 * f(0) = 0 \quad (\text{I.3})$$

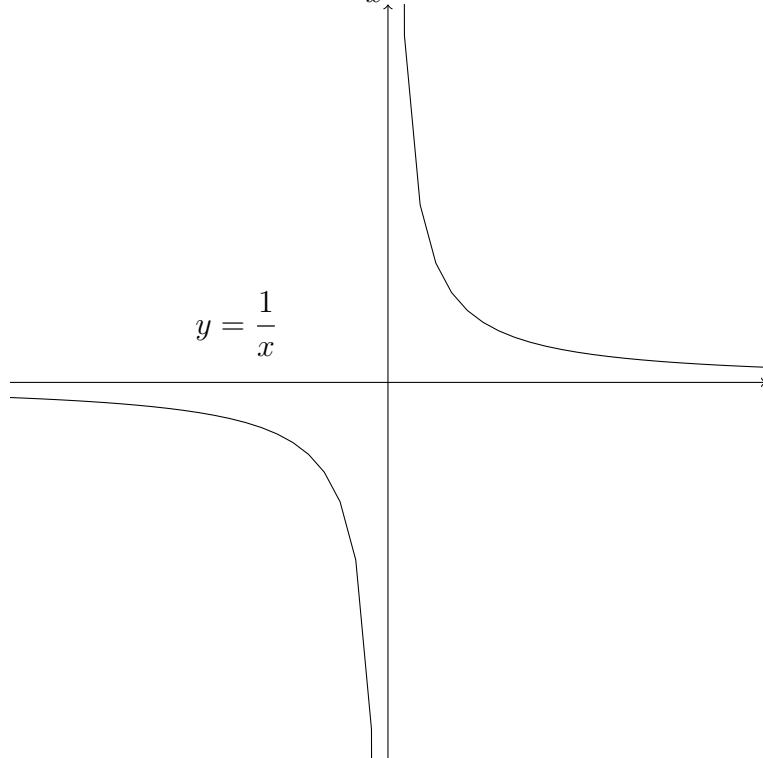
Exemple : fonctions paire : cosinus,  $x^{2p}$  avec  $p$  appartient à  $\mathbb{N}$  impaires sinus, tangente,  $x^{2p+1}$  avec  $p$  appartient à  $\mathbb{N}$

## 4 monotonie

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

- $f$  est croissante si  $a < b$ , alors  $f(a) \leq f(b)$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$
- $f$  est strictement croissante si  $a < b$ , alors  $f(a) < f(b)$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$
- $f$  est décroissant si  $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ , alors  $f(a) \geq f(b)$
- $f$  est décroissant si  $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ , alors  $f(a) > f(b)$

**Exemple**  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* x \rightarrow \frac{1}{x}$



décroissante sur  $] -\infty, 0[$  et  $] 0, +\infty[$  mais pas sur  $] -\infty, 0[ \cup ] 0, +\infty[$  par exemple,  $-1 \leq 1$  et  $\frac{1}{-1} \leq$

$\frac{1}{1}$

**Définition** Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $A$  un sous ensemble de  $E$ . On appelle restriction de  $f$  à  $A$ , note  $f|_A$ . La fonction  $f|_A : A \rightarrow F$  définie par  $f|_A(x) = f(x) \forall x \in A$ . Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $E', F'$  des sous ensembles de  $\mathbb{R}$ , avec  $E \subset E', F \subset F'$ . La fonction  $g : E' \rightarrow F'$  est un prolongement de  $f$  si  $g|_E = f$  c'est à dire  $\forall x \in E, g(x) = f(x)$

**Exemple** logarithme népérien  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow \ln(x)$

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a * b)$  avec  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$

## 5 Opérations sur les fonctions

Soit  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ . On peut définir :

- La fonction somme  $f + g$  par  $f + g : E \rightarrow \mathbb{R} \ x \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- La fonction produit  $f * g$  par  $f * g : E \rightarrow \mathbb{R} \ x \rightarrow (f * g)(x) = f(x)g(x)$

## 6 Image (direct) d'une fonction composée (composition)

**Définitions** :  $f : E \rightarrow F$ . L'image de  $f$  notée  $im(f)$  c'est l'ensemble  $\{y \in F \text{ tel que il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y\}$  aussi noté  $f(E)$

**Définition**  $f : E \rightarrow F$  et  $g : E' \rightarrow E$  Si l'image de  $g \subset E$ , on peut définir la fonction composée  $f \circ g : E' \rightarrow F$   
 $x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x))$

## 7 Image réciproque

**Définition** Soit  $f : E \rightarrow F$ , et  $B \subset F$  L'image réciproque de  $B$  par  $f$  est l'ensemble  $f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\}$   
 $f^{-1}([-1, 1]) = [a, b]$

**Exemple** (de composition)

$$\begin{array}{ll} f : E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3} \end{array}$$

composé de fonction  $f = g \circ u$

$$\begin{array}{ll} u : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x : & \mapsto x^2 - 4x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} g : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{array}$$

$\Delta = 16 - 12 = 4$  racine de  $u$  : 1 et 3

$u(x) > 0$  si et seulement si  $x \in ]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$   $E = x \in ]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$

$$\begin{array}{ll} h : \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(x^2) \end{array}$$

Pour composer  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : v : x \mapsto x^2$  ou doit enlever les points où  $v$  s'annule, c'est à dire  $v^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}^{+*} & & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & & \mapsto 2\ln(x) \end{array}$$

$\ln(x^2) = \ln(x * x) = \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x)$  mais  $\ln(a * b) = \ln(a) + \ln(b)$  n'est valable que si  $a$  et  $b > 0$

## 8 Application, surjectives, injectives, bijectives

**Définition**  $w : E \rightarrow F$  ( $E, F \in \mathbb{R}$ ) On dit que  $w$  est surjective si  $w(E) = F$  De manière équivalente : ( $y \in F$  tel que il existe  $x \in E$  avec  $w(x) = y$ ) =  $F$  c'est à dire tout les éléments de  $F$  admette un antécédent. c'est à dire  $\forall y \in F$ , il existe un  $x \in E$  tel que  $w(x) = y$

**Définition**  $w : E \rightarrow F$  ( $E, F \subset \mathbb{R}$ ) On dit que  $w$  est injective si tout élément de  $F$  admet au plus un antécédent. c'est à dire que si  $x$  et  $x'$  des éléments de  $E$  qui sont différents,  $w(x)$  différent  $w(x')$

Exemple  $w(x) = x^2$  n'est pas injectifs car -2 et 2 ont la meme image (4).

Exemple :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & & \mapsto x^3 \end{array}$$

Cette fonction est surjective car pour tout  $y$  de  $\mathbb{R}$ , il existe un  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = y$ . On a aussi  $\forall y \in \mathbb{R}$ , cet antécédent est unique.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & & \mapsto x^2 \end{array}$$

Cette fonction n'est pas surjective (-1 par exemple n'a pas d'antécédent) et pas injective car  $y = 4$  par exemple possède 2 antécédents.

**Remarque** : Si on considère

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & & \mapsto x^2 \end{array}$$

$g$  est surjective (il y a toujours au minimum un antécédent) mais toujours pas injective Plus généralement, si on considère  $f : E \rightarrow f(E)$  est toujours surjective.

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$  elle est subjective mais pas injective : 0 est compris entre  $[-1; 1]$  mais possède plusieurs antécédent ( $k * \pi$  avec  $k \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & & \mapsto e^{2x} \end{array}$$

Cette fonction n'est pas surjective (antécédent de 0 n'existe pas) mais est injective.

**Definition**  $w : E \rightarrow F(E, R \subset \mathbb{R})$  w est dite bijective si elle est injective et surjective, c'est à dire tout élément de F admet exactement un antécédent.

## 9 Fonction réciproque

Si  $f : E \rightarrow F$  est bijective, pour tout y de F, il existe un unique x dans E tel que  $f(x) = y$  On peut donc définir  $g : F \rightarrow E$  par  $g(y) = x$  (tel que  $f(x) = y$ ) g est la réciproque de f, notée  $f^{-1}$

**Exemple**

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & & \rightarrow \mathbb{R}^{*+} \\ x & & \mapsto \exp(x) \end{array}$$

et g

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}^{*+} & & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & & \mapsto \ln(x) \end{array}$$

**Remarque** si  $g = f^{-1}$  avec  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow E$  alors

$$\begin{array}{ccc} f \circ g : F & & \rightarrow F \\ x & & \mapsto x \end{array}$$

et  $f \circ g = g \circ f$

**Démonstration** Soit  $y \in F$ , quelconque, on veut calculer  $f(g(y))$  Par définition de g comme fonction réciproque de f,  $g(y) = x$  tel que  $f(x) = y$  donc  $f(g(y)) = f(x) = y$

**Proposition**  $f : E \rightarrow F$  une fonction impaire. supposons que  $f|_{E \cap \mathbb{R}^+}$  est croissante, Alors  $f|_{E \cap \mathbb{R}^-}$  est croissante

**Démonstration**

$$\begin{array}{ccc} f|_{E \cap \mathbb{R}^-} : E \cap \mathbb{R}^- & & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & & \mapsto f(x) \end{array}$$

Soit x et x' dans  $E \cap \mathbb{R}^-$  tels que  $x \leq x'$ .

$$\begin{array}{ccc} f(x) = & & f(-x) \text{ car f impaire} \\ f(x') = & & -f(-x) \end{array}$$

Comme  $x, x' \in E \cap \mathbb{R}^-$ ,  $-x, -x' \in E \cap \mathbb{R}^+$  Comme  $x \leq x'$ ,  $-x \geq -x'$  et donc  $f(-x) \geq f(-x')$  car f est croissante sur  $E \cap \mathbb{R}^+$  Conclusion,  $-f(-x) \leq -f(-x')$  et donc  $f(x) \leq f(x')$  et donc  $f(x) \leq f(x')$ . On a prouvé que  $f|_{E \cap \mathbb{R}^-}$  est croissante.

**Remarque**  $f^{-1}$  pourrait être la fonction  $\frac{1}{f}$  (la fonction  $f$  est différent de 0), la fonction réciproque de  $f$  (avec  $f$  bijective). Pour

$$\begin{array}{ll} f : E \rightarrow & \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R} \\ f^{-1}(B) = & \{x \in E, f(x) \in B\} \end{array}$$

Toujours définie.

**Proposition**  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  si  $f$  et  $g$  sont bijective, alors  $g \circ f$  l'est aussi et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$  ( $g \circ f : E \rightarrow G$ )

**Exemple** Trouver la fonction réciproque de  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]-7, +\infty[$ ,  $f(x) = e^{3x+2} - 7$  On écrit  $y = e^{3x+2} - 7$  et on détermine  $x$  en fonction des  $y$ .

$$\begin{array}{ll} y + 7 = & e^{3x+2} \\ \ln(y + 7) = & 3x + 2 \quad \text{car fonction exp} \\ x = & \frac{1}{3}(\ln(y + 7) - 2) \end{array}$$

$$\text{d'où } f^{-1} = \frac{1}{3}(\ln(x + 7) - 2)$$

**Etablie**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $A \subset E$   
 $f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$   $f(A) = \text{im}(f|_A)$



# II

## Limites

### 1 Voisinage et adhérence

**Définition** si  $x \in E$ , on dit que  $E$  est un voisinage de  $x$  si  $E$  contient un intervalle ouvert qui contient  $x$ . Ceci est équivalent à  $E$  voisinage de  $x$  si il existe  $\delta > 0$  tel que  $]x - \delta; x + \delta[ \subset E$ .

**Définition** Soit  $E \subset \mathbb{R}$ . Un réel  $x$  est adhérent à  $E$ , si tout voisinage  $V$  de  $x$  intersecte  $E$ , c'est à dire  $(V \cap E \neq \emptyset)$

**Exemple**

- si  $x \in E$ ,  $x$  est adhérent à  $E$ , car pour tout voisinage  $V$  de  $x$ ,  $x \in V \cap E$
- $E = ]0; 1]$ ,  $0$  est adhérent à  $E$ .
- $E = \{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\}$   $1$  est adhérent à  $E$  car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} = 1$$

### 2 Limite finie en un point de $\mathbb{R}$

**Définition**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $x_0$  un point adhérent de  $E$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $l$  en  $x_0$  ou que  $f(x)$  admet la limite  $l$  en  $x_0$  si :  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$ ,  $|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

Ceci est équivalent à dire que  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $\forall x \in [x - \delta, x + \delta], f(x) \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$

Pour tout voisinage  $V$  de  $l$  il existe un voisinage de  $x_0$   $U$  tel que si  $x$  est dans  $U$ , alors  $f(x)$  est dans  $V$ .

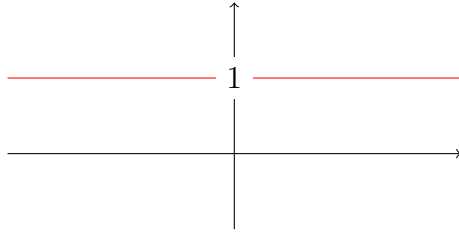
**Notation**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

ou

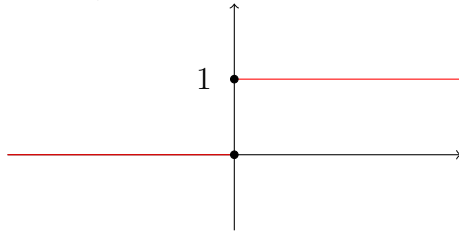
$$f(x) \rightarrow_{x \rightarrow x_0} l$$

**Exemple**  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dont le graph est :



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Soit  $\epsilon > 0$ , tout  $\delta > 0$  convient.



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f$  n'admet pas de limite en 0.

### 3 Restriction à un sous ensemble

$f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0$  adhérent à  $A$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $l \in \mathbb{R}$  quand  $x$  tends vers  $x_0$  dans  $A$ .

$\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0, \forall x \in A$ , tel que  $|x - x_0| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$

**Exemple limite à gauche** de  $f$  en  $x_0$  est  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$  c'est à dire la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tends vers  $x_0$  dans  $] -\infty, x_0[$

**Exemple limite à droite** de  $f$  en  $x_0$  est  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$  c'est à dire la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tends vers  $x_0$  dans  $]x_0, +\infty[$

**Exemple** La fonction  $f$  de l'exemple [x] admet une limite à droite en 0 :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ , pour  $f(x) = 1$

La fonction  $f$  de l'exemple [x] admet une limite à gauche en 0 :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$ , pour  $f(x) = 0$

**Remarque** On écrit aussi  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  par  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  par  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

## 4 Propriété

**Unicité** Si la limite existe, elle est unique.

démonstration par l'absurde :  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  adhérent à  $E$ . On suppose que la limite en  $x_0$  existe mais qu'elle n'est pas unique. Supposons que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$  avec  $l_1 \neq l_2$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$$

,  $\forall \epsilon_1 > 0$ , il existe  $\delta_1, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_1$ , alors  $|f(x) - l_1| < \epsilon_1$  (\*)

De plus

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$$

,  $\forall \epsilon_2 > 0$ , il existe  $\delta_2, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_2$ , alors  $|f(x) - l_2| < \epsilon_2$  (\*\*)

Choisissons  $\epsilon < \frac{l_1 + l_2}{2}$ , on remarque  $]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[ \cap ]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[ = \emptyset$

On trouve  $\delta_1$  et  $\delta_2$  tel que (\*) et (\*\*) soient vraies.

On appelle  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ,  $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[ \subset ]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1[ \cap ]x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2[$

Soit  $x \in ]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$  Par (\*),  $f(x) \in ]l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon[$   
et par (\*\*),  $f(x) \in ]l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon[$  donc  $f(x) \in ]l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon[ \cap ]l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon[ = \emptyset$  Ceci est absurde ( $f(x) \neq \emptyset$ )

## 5 Théorème des gendarmes

$f, g, h$  3 fonctions  $E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  adhérent à  $E$ .

(i) Si  $f, g, h$  admettent pour limites respectifs  $l, m, n$  en  $x_0$  et si  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  pour tout  $x$  de  $t$ , alors  $l \leq m \leq n$

(ii) Si  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  sur  $E$  et si  $f$  et  $h$  admettent une limite (identique)  $l$  en  $x_0$ , alors  $g$  admet une limite en  $x_0$  et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

**Remarque** On remplace les inégalité de (i) par  $\forall x \in E, f(x) < g(x) < h(x)$ , on obtient aussi  $l < m < n$

**Exemple**  $f(x) = |x|$  et  $g(x) = 2|x|$  Sur  $E \subset \mathbb{R}^+, f < g$  mais

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

**Exemple**

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ existe ?}$$

$(\sin(\frac{1}{x}))$  n'a pas de limite en 0)

Soit  $f, g, h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -|x|, g(x) = x \sin(\frac{1}{x}), h(x) = |x|$

On a bien  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  car  $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$

Donc par le théorème des gendarmes, Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$$

g admet 0 comme limite quand x tends vers 0.

### Fonction de référence

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow x^n \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow x^{\ln(n)} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow x^{(\alpha * \ln(\beta))^2} \end{array}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \frac{\sin x}{x} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

### Methode

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)} \end{array}$$

$$f(x) = \frac{(x+1) - 1}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{2x} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{2x} \cdot \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3+x}^2 - \sqrt{3}^2}{2x(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \\
&= \frac{1}{2(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})}
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

### Comportement local

**Proposition** Si  $f(x)$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}$  quand  $x$  tends vers  $x_0$ , alors  $f$  est localement bornée. c'est à dire il existe un voisinage de  $x$ ,  $V$ , tel que il existe  $M \in \mathbb{R}, \forall x \in V, |f(x)| < M$

**Remarque** Il existe un voisinage de  $x_0$  si et seulement si il existe un tervalle ouvert contenant  $x_0$  si et seilement si il existe  $\delta > 0, ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

**Demonstration** Par hypothèse,

$$\begin{array}{ccc}
f(x) & \rightarrow & l \\
x & \rightarrow & x_0
\end{array}$$

c'est à dire  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$

Soit  $\epsilon = 1$ , On trouve  $\delta$  tel que  $\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$|f(x) - l| < 1$ , c'est à dire  $-1 < f(x) - l < 1$  Soit  $|f(x)| < l + 1$

**Propriété** Si  $f(x)$  admet  $l \neq 0$  comme limite quand  $x$  tends vers  $x_0$ , alors localement (autour de  $x_0$ ), alors  $f$  est de signe constant

**Démonstration** bornée en  $x_0$  (meme style que la précédente),  $\epsilon = \frac{l}{3}$

### Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6 = f(1) \text{ avec } f = x^2 + 2x + 3$$

$$\begin{aligned}
|f(1+h) - f(1)| &= |(1+h)^2 + (1+h) * 2 + 3 - 6| \\
&= |1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3| \\
&= |h(h+4)| \\
&= |h| * (h+4) \text{ si } |h| < 1 \\
&\leq 5|h| \\
&\lim_{h \rightarrow 0} 5|h| = 0
\end{aligned}$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(1+h) - f(1)| = 1$$

**Remarque**  $x = 1 + h$  quand  $h$  tends vers 0 et  $x$  tends vers 1.

## 6 Opération sur les limites

$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}; x_0$  adhérent à  $E$  Supposons que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) \text{ existe et vaut } l + m$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) \text{ existe et vaut } l \cdot m$$

si  $m \neq 0$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f/g)(x) \text{ existe et vaut } \frac{l}{m}$$

Composition  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$

$g \circ f : E \rightarrow G, x_0$  adhérent à  $E$ .

Supposons que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$F$  est un voisinage de  $l$ .

$$\lim_{y \rightarrow l} g(y) = m$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x)$$

existe et vaut  $m$ .

### Exemple

$$\begin{array}{ll} g : y & \rightarrow e^y \\ f : x & \rightarrow \sqrt{1+x} \end{array}$$

$g \circ f$  est bien défini car le domaine de  $g$  est  $\mathbb{R}$

0 est bien adhérent au domaine de  $f$  (qui est  $[-1, +\infty[$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} g(y) = e$$

## 7 Limites infinies, et limites en l'infinie

**Définition**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  adhérent à  $E$

On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) quand  $x$  tend vers  $x_0$  si  $\forall A > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|x - x_0| < \delta > 0$ , alors  $f(x) > A$  (ou  $f(x) < -A$  pour  $f(x)$  tend vers  $-\infty$ ).

**Exemple**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

**Définition**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  tel qu'il existe  $A > 0$  tel que  $]A; +\infty[ \subset E$  On dit que  $f(x)$  tend vers  $l \in E$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$

c'est à dire  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $A > 0$ ,  $x > A$ , alors  $|f(x) - l| < \epsilon$

**Définition**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  tel qu'il existe  $A < 0$  tel que  $] -\infty, x[ \subset E$  On dit que  $f(x)$  tend vers  $l \in E$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  c'est à dire  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $A < 0$ ,  $x < A$ , alors  $|f(x) - l| < \epsilon$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  veut dire  $\forall A > 0$ , il existe  $B > 0$ ,  $x < -B$  tel que  $f(x) > A$

**Exemple**

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^* & & \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto & & \frac{1}{x} \end{array}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

**Démonstration** Soit  $A > 0$ . On cherche  $\delta$  tel que si  $0 < x$ ,  $0 < \delta$  alors  $f(x) = \frac{1}{x} > A$

Choisir  $\delta = \frac{1}{A}$  suffit, en effet  $0 < x < \frac{1}{A}$  alors  $\frac{1}{x} > \frac{1}{A}$ .

**Exemple**  $g(x) = 1 + e^{-x}$  Montrons que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

**Exemple**

$$\begin{array}{ccc}
 f : ] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ & & \rightarrow \mathbb{R} \\
 x \mapsto & & \tan(x)
 \end{array}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty$$

**8 Opération sur les limites**

Limites finies ( $l \in \mathbb{R}$ ) en l'infini sont exactement les memes opérations.

Limites infinies ( $l = + - \infty$ ) Attention aux cas indérminé :  $+\infty - \infty, \frac{+ - \infty}{+ - \infty}, 0 * (+ - \infty)$

**Exemple**  $\frac{+\infty}{+\infty} = ?$

$$\begin{array}{ccc}
 f : x \mapsto & & x \\
 g : x \mapsto & & x^2
 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\begin{array}{ccc}
 f_2 : x \mapsto & & x^3 \\
 g_2 : x \mapsto & & x^2
 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = +\infty$$

$$\begin{array}{ccc}
 f_3 : x \mapsto & & 3x \\
 x \mapsto & & x
 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_3(x)}{g_3(x)} = 3$$

Plus généralement, P,Q deux polynomes, que vaut  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$  ? Elle est égale au rapport des termes du plus haut degré. Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 4x^5 + 2}{x^4 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5}{x^4} = +\infty$$



**Exemple**

$$\lim_{x \rightarrow 0} x * \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\text{car } \forall x \neq 0, 1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

donc  $0 \leq |x * \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$  avec  $|x|$  tend vers 0 pour  $x$  tend vers 0.

# III

## Continuité

### 1 Définition et premières propriétés

**Définition**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x \in E$

- On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  (au point  $x_0$ ) si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe et vaut  $f(x_0)$
- $f$  est continue sur  $E$  si  $f$  est continue en tout point  $x_0 \in E$

o

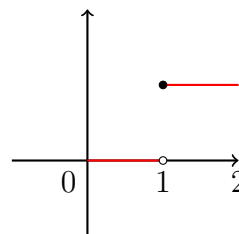
**Exemple** Fonctions continues :

- $x \mapsto x^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \frac{1}{x}$  (domaine  $\mathbb{R}^*$ ) est continue sur  $\mathbb{R}^*$
- $\sin, \cos$  sont continues sur  $\mathbb{R}$

Fonctions discontinues :  $x \mapsto [x]$  n'est pas continue en 1 par exemple. En effet,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 0$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 1$ .

Les limites à gauche et à droite étant différentes donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  n'existe pas

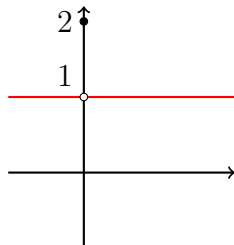
$$g(x) = 1 \text{ pour tout } x \text{ différent de } 0 \text{ mais } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0; x < 0} g(x)$$



**Remarque**  $f$  continue en  $x_0$  si et seulement si  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|x - x_0| < \delta$  et  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

**Définition**

- $f$  est continue à droite en  $x_0$  si limite de  $f(x)$  par valeur supérieure  $(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x))$  en  $x_0$  et vaut  $f(x_0)$
- $f$  est continue à gauche en  $x_0$  si limite de  $f(x)$  par valeur inférieure  $(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x))$  en  $x_0$  et vaut  $f(x_0)$



**Exemple**

- $f$  (partie entière de l'exemple précédent) est continue à droite mais pas à gauche en 1.  $f$  est continue sur  $[0; 1[$

—  $g$  n'est pas continue ni à gauche, ni à droite en 0.

**Proposition**  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en  $x_0$

**Propriété**  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$

$f$  et  $g$  continue en  $x_0$

- $f+g$  est continue en  $x_0$
- $f \cdot g$  est continue en  $x_0$
- $\frac{f}{g}$  est continue en  $x_0$  si  $g(x_0) \neq 0$

La continuité est très local, même si pour un  $x \in E$ ,  $g(x) = 0$ , temps que  $x_0$  différent de 0,  $\frac{f}{g}$  est continue en  $x_0$

**Composition**  $f : E \rightarrow F$   $g : F \rightarrow G$  et  $g \circ f : E \rightarrow G$  si  $f$  est continue en  $x \in E$  et  $g$  est continue en  $f(x) \in F$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $x_0$

**Exemple**

- Polynôme,  $\sin + \cos$ ,  $\tan + \exp$  sont continues sur  $\mathbb{R}$
- $\sin(\ln(\frac{e^x}{1+x^2}))$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  $\exp, 1+x^2$  sont continue, de plus  $1+x^2 \neq 0$  pour  $x \in \mathbb{R}$  donc  $\frac{e^x}{1+x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Finalement,  $e^x$  n'est jamais null donc  $\text{im}(x \mapsto \frac{e^x}{1+x^2}) = \varphi \subset \mathbb{R}^{+*}$ , d'où  $\ln(\varphi)$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ , de plus,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

**Définition** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  adhérent à  $E$ . Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , alors la fonction  $g : E \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  par la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases} \text{ Est continue sur } \mathbb{R}$$

**Exemple**

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ l & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ Est continue sur } \mathbb{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ est le prolongement par continuité en 0 de } x \mapsto x \ln(x)$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

**Exercice** Par quelles valeurs de  $c$ , la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est continue?  $f$  est continue si et seulement si  $x = 2$  En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(2x)}{x} \\ &= \frac{\sin(2x)}{2x} * 2 = 2 \end{aligned}$$

(2<sup>eme</sup> méthode :  $\sin(2x) = 2\sin(x) * \cos(x)$ ,  $\frac{\sin(2x)}{x} = 2 * \frac{\sin(x)}{x} * \cos(x)$  ce qui tend vers 2 pour  $x$  tend vers 0, et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = c$  donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \text{ si et seulement si } c = 2$$

Donc  $f$  est continue en 0 si  $c = 0$ . De plus, pour tout  $x_0 > 0$ ,  $f(x) = x + c$  qui est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et pour tout  $x_0 < 0$ ,  $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$  qui est continue sur  $\mathbb{R}^{-*}$  Le seul problème possible était en 0.

### Comportement local

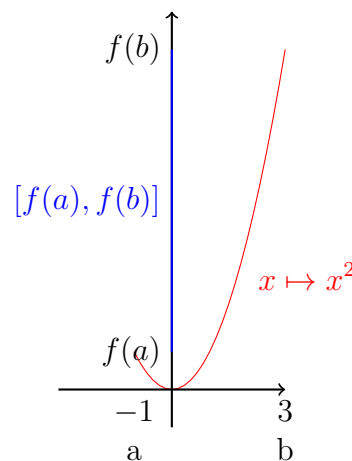
**Proposition** Si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors  $f$  est localement bornée autour de  $x_0$  (c'est à dire il existe un voisinage de  $x_0$  sur lequel  $f$  est bornée, c'est à dire il existe  $\delta > 0$  et  $M > 0$  tel que  $|x - x_0| < \delta$  et  $|f(x)| < M$ ). Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $f(x) \neq 0$ , alors  $f$  est de signe constant (celui de  $f(x_0)$ ) localement autour de  $x_0$

## 2 Théorème des valeurs intermédiaires

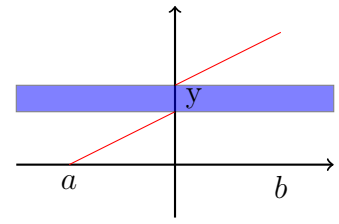
**Théorème**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a < b$ ) et continue (sur  $[a, b]$ ) Pour tout  $y$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x) = y$ .

**Exemple**

$$\begin{aligned} x &\mapsto x^2 \\ [-1, 3] &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$



**(Contre) exemple** : la continuité est essentielle. Fonction monotone et non continue pour laquelle il existe des  $y$  dans  $[f(a), f(b)]$  qui n'ont pas d'antécédent entre  $a$  et  $b$ .



**Corollaire 1**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue.

si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont non nul et de signes différents, il existe  $x \in ]a, b[$  tel que  $f(x) = 0$