

Table des matières

I	Fonctions	2
1	Ensembles de nombres	2
2	Intervalle	2
3	Fonctions	2
4	monotonie	4
5	Opérations sur les fonctions	5
6	Image (direct) d'une fonction composé (composition)	5
7	Image réciproque	5
8	Application, surjectives, injectives, bijectives	6
9	Fonction réciproque	7
II	Limites	9
1	Voisinage et adhérence	9
2	Limite finie en un point de \mathbb{R}	9
3	Restriction à un sous ensemble	10
4	Propriété	11
5	Théorème des gendarmes	11
6	Opération sur les limites	14
7	Limites infinies, et limites en l'infinie	15
8	Opération sur les limites	16
III	Continuité	18
1	Définition et premières propriétés	18
2	Théorème des valeurs intermédiaires	20

I

Fonctions

1 Ensembles de nombres

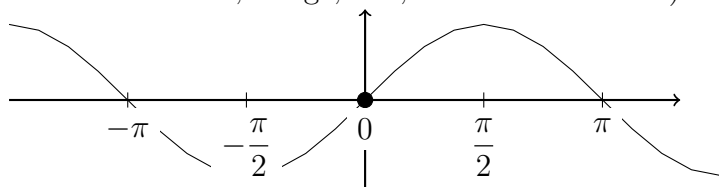
: Réels \mathbb{R} , Rationnels $\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels \mathbb{N} , entiers $\mathbb{Z} = \{-3, -2, \dots, 1\}$, nombres complexes \mathbb{C} .

2 Intervalle

: $[a, b]$ avec a, b réels compris dans l'intervalle, dit fermé, $a < b$, $]a, b[$ avec a, b non compris dans l'intervalle dit ouvert \rightarrow Intervalle bornés $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ $\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$

3 Fonctions

Exemple : sinus : $\sin : \mathbb{R}$ (domaine de définitions, sources, ensemble de départ) $\rightarrow \mathbb{R}$ ou $[-1, 1]$ (domaine de valeurs, image, but, ensemble d'arrivée)



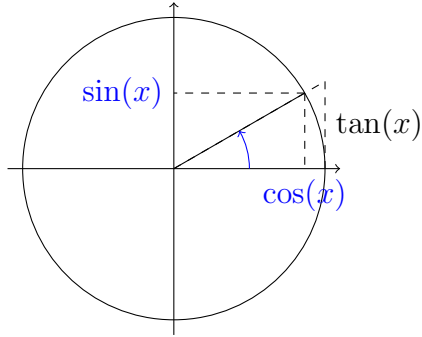
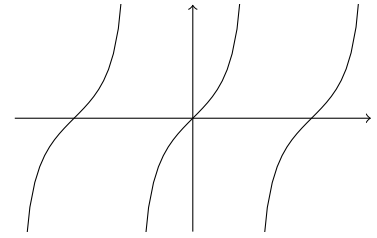
Définitions Soit E, F 2 ensemble de \mathbb{R} . Une fonction f est procédé pour associer à tout élément de \mathbb{R} un unique élément de F Le graph de F "vit" dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R}$

Définitions : Soit E et F 2 ensembles, on définit leur produit cartésien : comme l'ensemble dont les éléments sont les couples (x, y) avec x "vit" dans E et y dans F . $E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$

Définitions : Le graphe de $f : E \rightarrow F$ est un sous ensemble de $E * F$ donné par
$$\begin{aligned} &= \{(x, y), x \in E, y = f(x)\} \\ &= \{x \mapsto f(x) = y\} \end{aligned}$$

Exemples cosinus : $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

tangente $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k * \pi, k \text{ appartient a } \mathbb{Z}\} \rightarrow] - \infty, +\infty[$



$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

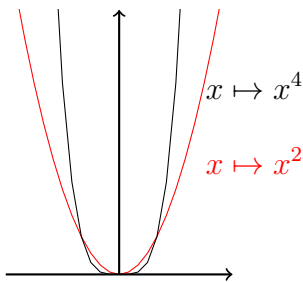
$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} x \rightarrow x^n, n \in \mathbb{N}$$

$$n = 0 : x \rightarrow 1$$

$$n = 1 : x \rightarrow x$$

$$n = 2 : x \rightarrow x^2$$

$$n = 3 : x \rightarrow x^3$$



$n \neq 0$ et n pair.

Remarque : les fonctions sont plus étroites. Schéma typique pour

Définitions Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, avec E symétrique par rapport à 0.

— f est dite paire si : $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$

— f est impaire si : $\forall x \in E, f(x) = -f(-x)$ Remarque : si f est impaire $\rightarrow f(0) = 0$. En effet,

$$f(-0) = f(0) \quad (\text{I.1})$$

$$f(0) = -f(0) \quad (\text{I.2})$$

$$2 * f(0) = 0 \quad (\text{I.3})$$

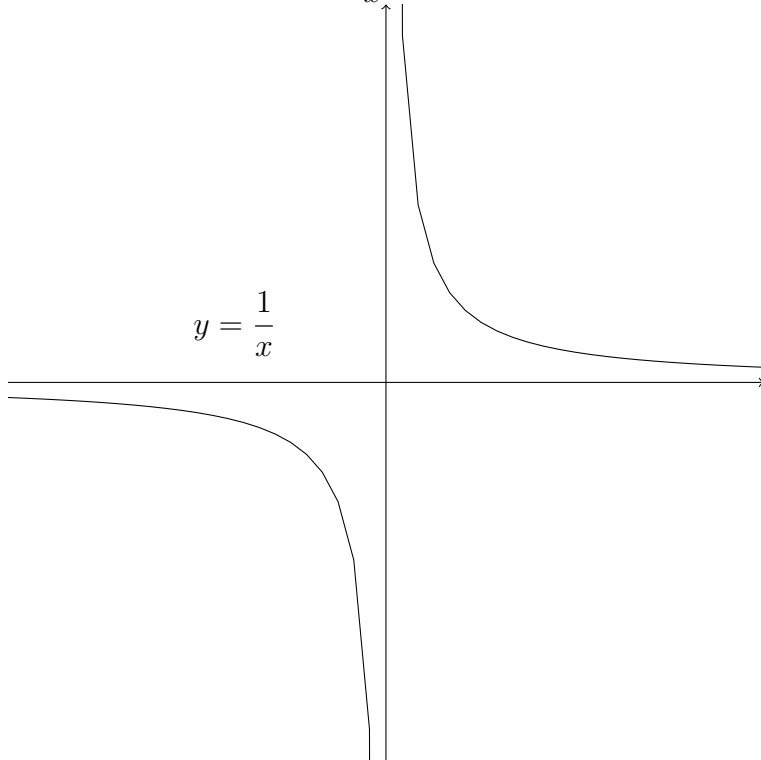
Exemple : fonctions paire : cosinus, x^{2p} avec p appartient à \mathbb{N} impaires sinus, tangente, x^{2p+1} avec p appartient à \mathbb{N}

4 monotonie

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

- f est croissante si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
- f est strictement croissante si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
- f est décroissant si $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$
- f est décroissant si $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) > f(b)$

Exemple $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* x \rightarrow \frac{1}{x}$



décroissante sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$ mais pas sur $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$ par exemple, $-1 \leq 1$ et $\frac{1}{-1} \leq$

$\frac{1}{1}$

Définition Soit $f : E \rightarrow F$ et A un sous ensemble de E . On appelle restriction de f à A , note $f|_A$. La fonction $f|_A : A \rightarrow F$ définie par $f|_A(x) = f(x) \forall x \in A$. Soit $f : E \rightarrow F$ et E', F' des sous ensembles de \mathbb{R} , avec $E \subset E', F \subset F'$. La fonction $g : E' \rightarrow F'$ est un prolongement de f si $g|_E = f$ c'est à dire $\forall x \in E, g(x) = f(x)$

Exemple logarithme népérien $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow \ln(x)$

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a * b)$ avec $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$

5 Opérations sur les fonctions

Soit $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$. On peut définir :

- La fonction somme $f + g$ par $f + g : E \rightarrow \mathbb{R} \ x \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- La fonction produit $f * g$ par $f * g : E \rightarrow \mathbb{R} \ x \rightarrow (f * g)(x) = f(x)g(x)$

6 Image (direct) d'une fonction composé (composition)

Définitions : $f : E \rightarrow F$. L'image de f notée $im(f)$ c'est l'ensemble $\{y \in F \text{ tel que il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y\}$ aussi noté $f(E)$

Définition $f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$ Si l'image de $g \subset E$, on peut définir la fonction composé $f \circ g : E' \rightarrow F$
 $x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x))$

7 Image réciproque

Définition Soit $f : E \rightarrow F$, et $B \subset F$ L'image réciproque de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\}$
 $f^{-1}([-1, 1]) = [a, b]$

Exemple (de composition)

$$\begin{array}{ll} f : E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3} \end{array}$$

composé de fonction $f = g \circ u$

$$\begin{array}{ll} u : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x : & \mapsto x^2 - 4x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} g : \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{array}$$

$\Delta = 16 - 12 = 4$ racine de u : 1 et 3

$u(x) > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$ $E = x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$

$$\begin{array}{ll} h : \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(x^2) \end{array}$$

Pour composer $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad v : x \mapsto x^2$ ou doit enlever les points où v s'annule, c'est à dire $v^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}^{+*} & & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & & \mapsto 2\ln(x) \end{array}$$

$\ln(x^2) = \ln(x * x) = \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x)$ mais $\ln(a * b) = \ln(a) + \ln(b)$ n'est valable que si a et $b > 0$

8 Application, surjectives, injectives, bijectives

Définition $w : E \rightarrow F$ ($E, F \in \mathbb{R}$) On dit que w est surjective si $w(E) = F$ De manière équivalente : ($y \in F$ tel que il existe $x \in E$ avec $w(x) = y$) = F c'est à dire tout les éléments de F admette un antécédent. c'est à dire $\forall y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que $w(x) = y$

Définition $w : E \rightarrow F$ ($E, F \subset \mathbb{R}$) On dit que w est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent. c'est à dire que si x et x' des éléments de E qui sont différents, $w(x)$ différent $w(x')$

Exemple $w(x) = x^2$ n'est pas injectifs car -2 et 2 ont la meme image (4).

Exemple :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & & \mapsto x^3 \end{array}$$

Cette fonction est surjective car pour tout y de \mathbb{R} , il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. On a aussi $\forall y \in \mathbb{R}$, cet antécédent est unique.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & & \mapsto x^2 \end{array}$$

Cette fonction n'est pas surjective (-1 par exemple n'a pas d'antécédent) et pas injective car $y = 4$ par exemple possède 2 antécédents.

Remarque : Si on considère

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & & \mapsto x^2 \end{array}$$

g est surjective (il y a toujours au minimum un antécédent) mais toujours pas injective Plus généralement, si on considère $f : E \rightarrow f(E)$ est toujours surjective.

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$ elle est subjective mais pas injective : 0 est compris entre $[-1; 1]$ mais possède plusieurs antécédent ($k * \pi$ avec $k \in \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & & \mapsto e^{2x} \end{array}$$

Cette fonction n'est pas surjective (antécédent de 0 n'existe pas) mais est injective.

Définition $w : E \rightarrow F(E, R \subset \mathbb{R})$ w est dite bijective si elle est injective et surjective, c'est à dire tout élément de F admet exactement un antécédent.

9 Fonction réciproque

Si $f : E \rightarrow F$ est bijective, pour tout y de F, il existe un unique x dans E tel que $f(x) = y$ On peut donc définir $g : F \rightarrow E$ par $g(y) = x$ (tel que $f(x) = y$) g est la réciproque de f, notée f^{-1}

Exemple

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & & \rightarrow \mathbb{R}^{*+} \\ x & & \mapsto \exp(x) \end{array}$$

et g

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}^{*+} & & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & & \mapsto \ln(x) \end{array}$$

Remarque si $g = f^{-1}$ avec $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ alors

$$\begin{array}{ccc} f \circ g : F & & \rightarrow F \\ x & & \mapsto x \end{array}$$

et $f \circ g = g \circ f$

Démonstration Soit $y \in F$, quelconque, on veut calculer $f(g(y))$ Par définition de g comme fonction réciproque de f, $g(y) = x$ tel que $f(x) = y$ donc $f(g(y)) = f(x) = y$

Proposition $f : E \rightarrow F$ une fonction impaire. supposons que $f|_{E \cap \mathbb{R}^+}$ est croissante, Alors $f|_{E \cap \mathbb{R}^-}$ est croissante

Démonstration

$$\begin{array}{ccc} f|_{E \cap \mathbb{R}^-} : E \cap \mathbb{R}^- & & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & & \mapsto f(x) \end{array}$$

Soit x et x' dans $E \cap \mathbb{R}^-$ tels que $x \leq x'$.

$$\begin{array}{ccc} f(x) = & & f(-x) \text{ car f impaire} \\ f(x') = & & -f(-x) \end{array}$$

Comme $x, x' \in E \cap \mathbb{R}^-$, $-x, -x' \in E \cap \mathbb{R}^+$ Comme $x \leq x'$, $-x \geq -x'$ et donc $f(-x) \geq f(-x')$ car f est croissante sur $E \cap \mathbb{R}^+$ Conclusion, $-f(-x) \leq -f(-x')$ et donc $f(x) \leq f(x')$ et donc $f(x) \leq f(x')$. On a prouvé que $f|_{E \cap \mathbb{R}^-}$ est croissante.

Remarque f^{-1} pourrait être la fonction $\frac{1}{f}$ (la fonction f est différent de 0), la fonction réciproque de f (avec f bijective). Pour

$$\begin{array}{ll} f : E \rightarrow & \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R} \\ f^{-1}(B) = & \{x \in E, f(x) \in B\} \end{array}$$

Toujours définie.

Proposition $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ si f et g sont bijective, alors $g \circ f$ l'est aussi et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ ($g \circ f : E \rightarrow G$)

Exemple Trouver la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \rightarrow]-7, +\infty[$, $f(x) = e^{3x+2} - 7$ On écrit $y = e^{3x+2} - 7$ et on détermine x en fonction des y .

$$\begin{array}{ll} y + 7 = & e^{3x+2} \\ \ln(y + 7) = & 3x + 2 \quad \text{car fonction exp} \\ x = & \frac{1}{3}(\ln(y + 7) - 2) \end{array}$$

$$\text{d'où } f^{-1} = \frac{1}{3}(\ln(x + 7) - 2)$$

Etablie $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, f(x) = y\} \quad f(A) = \text{im}(f|_A)$$

II

Limites

1 Voisinage et adhérence

Définition si $x \in E$, on dit que E est un voisinage de x si E contient un intervalle ouvert qui contient x . Ceci est équivalent à E voisinage de x si il existe $\delta > 0$ tel que $]x - \delta; x + \delta[\subset E$.

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}$. Un réel x est adhérent à E , si tout voisinage V de x intersecte E , c'est à dire $(V \cap E \neq \emptyset)$

Exemple

- si $x \in E$, x est adhérent à E , car pour tout voisinage V de x , $x \in V \cap E$
- $E =]0; 1]$, 0 est adhérent à E .
- $E = \{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\}$ 1 est adhérent à E car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} = 1$$

2 Limite finie en un point de \mathbb{R}

Définition $f : E \rightarrow \mathbb{R}$; x_0 un point adhérent de E . On dit que $f(x)$ tend vers l en x_0 ou que $f(x)$ admet la limite l en x_0 si : $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

Ceci est équivalent à dire que $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [x - \delta, x + \delta], f(x) \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$

Pour tout voisinage V de l il existe un voisinage de x_0 U tel que si x est dans U , alors $f(x)$ est dans V .

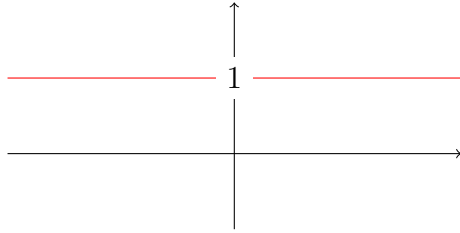
Notation

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

ou

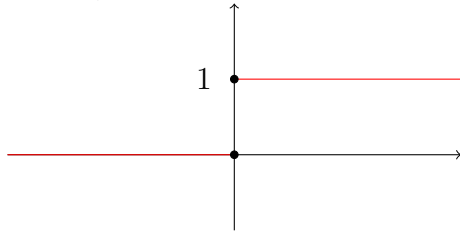
$$f(x) \rightarrow_{x \rightarrow x_0} l$$

Exemple $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dont le graph est :



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Soit $\epsilon > 0$, tout $\delta > 0$ convient.



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

f n'admet pas de limite en 0.

3 Restriction à un sous ensemble

$f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0$ adhérent à A . On dit que $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tends vers x_0 dans A .

$\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0, \forall x \in A$, tel que $|x - x_0| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$

Exemple limite à gauche de f en x_0 est $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ c'est à dire la limite de $f(x)$ quand x tends vers x_0 dans $] -\infty, x_0[$

Exemple limite à droite de f en x_0 est $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ c'est à dire la limite de $f(x)$ quand x tends vers x_0 dans $]x_0, +\infty[$

Exemple La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à droite en 0 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$, pour $f(x) = 1$

La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à gauche en 0 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$, pour $f(x) = 0$

Remarque On écrit aussi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ par $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ par $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

4 Propriété

Unicité Si la limite existe, elle est unique.

démonstration par l'absurde : $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 adhérent à E . On suppose que la limite en x_0 existe mais qu'elle n'est pas unique. Supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$ avec $l_1 \neq l_2$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$$

, $\forall \epsilon_1 > 0$, il existe $\delta_1, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_1$, alors $|f(x) - l_1| < \epsilon_1$ (*)

De plus

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$$

, $\forall \epsilon_2 > 0$, il existe $\delta_2, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_2$, alors $|f(x) - l_2| < \epsilon_2$ (**)

Choisissons $\epsilon < \frac{l_1 + l_2}{2}$, on remarque $]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$

On trouve δ_1 et δ_2 tel que (*) et (**) soient vraies.

On appelle $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\subset]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1[\cap]x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2[$

Soit $x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ Par (*), $f(x) \in]l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon[$
et par (**), $f(x) \in]l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon[$ donc $f(x) \in]l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon[= \emptyset$ Ceci est absurde ($f(x) \neq \emptyset$)

5 Théorème des gendarmes

f, g, h 3 fonctions $E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ adhérent à E .

(i) Si f, g, h admettent pour limites respectifs l, m, n en x_0 et si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x de E , alors $l \leq m \leq n$

(ii) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur E et si f et h admettent une limite (identique) l en x_0 , alors g admet une limite en x_0 et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

Remarque On remplace les inégalité de (i) par $\forall x \in E, f(x) < g(x) < h(x)$, on obtient aussi $l < m < n$

Exemple $f(x) = |x|$ et $g(x) = 2|x|$ Sur $E \subset \mathbb{R}^+, f < g$ mais

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ existe ?}$$

$(\sin(\frac{1}{x}))$ n'a pas de limite en 0)

Soit $f, g, h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|, g(x) = x \sin(\frac{1}{x}), h(x) = |x|$

On a bien $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$

Donc par le théorème des gendarmes, Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$$

g admet 0 comme limite quand x tends vers 0.

Fonction de référence

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow x^n \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow x^{\ln(n)} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow x^{(\alpha * \ln(\beta))^2} \end{array}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \frac{\sin x}{x} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Methode

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)} \end{array}$$

$$f(x) = \frac{(x+1) - 1}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{2x} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{2x} \cdot \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3+x}^2 - \sqrt{3}^2}{2x(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \\
&= \frac{1}{2(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})}
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

Comportement local

Proposition Si $f(x)$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tends vers x_0 , alors f est localement bornée. c'est à dire il existe un voisinage de x , V , tel que il existe $M \in \mathbb{R}, \forall x \in V, |f(x)| < M$

Remarque Il existe un voisinage de x_0 si et seulement si il existe un tervalle ouvert contenant x_0 si et seulement si il existe $\delta > 0,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

Demonstration Par hypothèse,

$$\begin{array}{ccc}
f(x) & \rightarrow & l \\
x & \rightarrow & x_0
\end{array}$$

c'est à dire $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$

Soit $\epsilon = 1$, On trouve δ tel que $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$|f(x) - l| < 1$, c'est à dire $-1 < f(x) - l < 1$ Soit $|f(x)| < l + 1$

Propriété Si $f(x)$ admet $l \neq 0$ comme limite quand x tends vers x_0 , alors localement (autour de x_0), alors f est de signe constant

Démonstration bornée en x_0 (meme style que la précédente), $\epsilon = \frac{l}{3}$

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6 = f(1) \text{ avec } f = x^2 + 2x + 3$$

$$\begin{aligned}
|f(1+h) - f(1)| &= |(1+h)^2 + (1+h) * 2 + 3 - 6| \\
&= |1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3| \\
&= |h(h+4)| \\
&= |h| * (h+4) \text{ si } |h| < 1 \\
&\leq 5|h| \\
&\lim_{h \rightarrow 0} 5|h| = 0
\end{aligned}$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(1+h) - f(1)| = 1$$

Remarque $x = 1 + h$ quand h tends vers 0 et x tends vers 1.

6 Opération sur les limites

$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}; x_0$ adhérent à E Supposons que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) \text{ existe et vaut } l + m$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) \text{ existe et vaut } l \cdot m$$

si $m \neq 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f/g)(x) \text{ existe et vaut } \frac{l}{m}$$

Composition $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$

$g \circ f : E \rightarrow G, x_0$ adhérent à E .

Supposons que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

F est un voisinage de l .

$$\lim_{y \rightarrow l} g(y) = m$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x)$$

existe et vaut m .

Exemple

$$\begin{array}{ll} g : y & \rightarrow e^y \\ f : x & \rightarrow \sqrt{1+x} \end{array}$$

$g \circ f$ est bien défini car le domaine de g est \mathbb{R}

0 est bien adhérent au domaine de f (qui est $[-1, +\infty[$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} g(y) = e$$

7 Limites infinies, et limites en l'infinie

Définition $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x_0$ adhérent à E

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) quand x tend vers x_0 si $\forall A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta > 0$, alors $f(x) > A$ (ou $f(x) < -A$ pour $f(x)$ tend vers $-\infty$).

Exemple

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Définition $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel qu'il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset E$ On dit que $f(x)$ tend vers $l \in E$ quand x tend vers $+\infty$

c'est à dire $\forall \epsilon > 0$, il existe $A > 0, x > A$, alors $|f(x) - l| < \epsilon$

Définition $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel qu'il existe $A < 0$ tel que $] -\infty, x[\subset E$ On dit que $f(x)$ tend vers $l \in E$ quand x tend vers $-\infty$ c'est à dire $\forall \epsilon > 0$, il existe $A < 0, x < A$, alors $|f(x) - l| < \epsilon$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ veut dire $\forall A > 0$, il existe $B > 0, x < -B$ tel que $f(x) > A$

Exemple

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^* & & \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto & & \frac{1}{x} \end{array}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

Démonstration Soit $A > 0$. On cherche δ tel que si $0 < x, 0 < \delta$ alors $f(x) = \frac{1}{x} > A$

Choisir $\delta = \frac{1}{A}$ suffit, en effet $0 < x < \frac{1}{A}$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{A}$.

Exemple $g(x) = 1 + e^{-x}$ Montrons que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

Exemple

$$\begin{array}{ccc}
 f :] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[& & \rightarrow \mathbb{R} \\
 x \mapsto & & \tan(x)
 \end{array}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty$$

8 Opération sur les limites

Limites finies ($l \in \mathbb{R}$) en l'infini sont exactement les memes opérations.

Limites infinies ($l = + - \infty$) Attention aux cas indérminé : $+\infty - \infty, \frac{+ - \infty}{+ - \infty}, 0 * (+ - \infty)$

Exemple $\frac{+\infty}{+\infty} = ?$

$$\begin{array}{ccc}
 f : x \mapsto & & x \\
 g : x \mapsto & & x^2
 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\begin{array}{ccc}
 f_2 : x \mapsto & & x^3 \\
 g_2 : x \mapsto & & x^2
 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = +\infty$$

$$\begin{array}{ccc}
 f_3 : x \mapsto & & 3x \\
 x \mapsto & & x
 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_3(x)}{g_3(x)} = 3$$

Plus généralement, P,Q deux polynomes, que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$? Elle est égale au rapport des termes du plus haut degré. Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 4x^5 + 2}{x^4 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5}{x^4} = +\infty$$

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} x * \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\text{car } \forall x \neq 0, 1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

donc $0 \leq |x * \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$ avec $|x|$ tend vers 0 pour x tend vers 0.

III

Continuité

1 Définition et premières propriétés

Définition $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \in E$

- On dit que f est continue en x_0 (au point x_0) si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$
- f est continue sur E si f est continue en tout point $x_0 \in E$

o

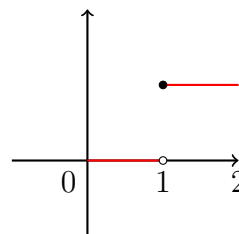
Exemple Fonctions continues :

- $x \mapsto x^2$ est continue sur \mathbb{R}
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ (domaine \mathbb{R}^*) est continue sur \mathbb{R}^*
- \sin, \cos sont continues sur \mathbb{R}

Fonctions discontinues : $x \mapsto [x]$ n'est pas continue en 1 par exemple. En effet, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 1$.

Les limites à gauche et à droite étant différentes donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ n'existe pas

$$g(x) = 1 \text{ pour tout } x \text{ différent de } 0 \text{ mais } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0; x < 0}} g(x)$$



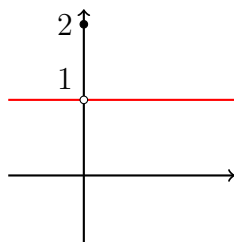
Remarque f continue en x_0 si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Définition

- f est continue à droite en x_0 si limite de $f(x)$ par valeur supérieur ($\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$) en x_0 et vaut $f(x_0)$
- f est continue à gauche en x_0 si limite de $f(x)$ par valeur inférieur ($\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$) en x_0 et vaut $f(x_0)$

Exemple

- f (partie entière de l'exemple précédent) est continue à droite mais pas à gauche en 1. f est continue sur $[0; 1[$



— g n'est pas continue ni à gauche, ni à droite en 0.

Proposition f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0

Propriété $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$

f et g continue en x_0

— $f+g$ est continue en x_0

— $f.g$ est continue en x_0

— $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$

La continuité est très local, même si pour un $x \in E$, $g(x) = 0$, tant que x_0 différent de 0, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

Composition $f : E \rightarrow F$ $g : F \rightarrow G$ et $g \circ f : E \rightarrow G$ si f est continue en $x \in E$ et g est continue en $f(x) \in F$, alors $g \circ f$ est continue en x_0

Exemple

— Polynôme, $\sin + \cos$, $\tan + \exp$ sont continues sur \mathbb{R}

— $\sin(\ln(\frac{e^x}{1+x^2}))$ est continue sur \mathbb{R} car $\exp, 1+x^2$ sont continue, de plus $1+x^2 \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ donc $\frac{e^x}{1+x^2}$ est continue sur \mathbb{R} . Finalement, e^x n'est jamais null donc $\text{im}(x \mapsto \frac{e^x}{1+x^2}) = \varphi \subset \mathbb{R}^{+*}$, d'où $\ln(\varphi)$ est continue sur \mathbb{R}

— $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est continue sur \mathbb{R}^* , de plus, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Définition Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 adhérent à E . Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, alors la fonction $g : E \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases} \text{ Est continue sur } \mathbb{R}$$

Exemple

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ l & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ Est continue sur } \mathbb{R}$$

$h(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est le prolongement par continuité en 0 de $x \mapsto x \ln(x)$

$$x \mapsto \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Exercice Par quelles valeurs de c , la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est continue? f est continue si et seulement si $x = 2$ En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(2x)}{x} \\ &= \frac{\sin(2x)}{2x} * 2 = 2 \end{aligned}$$

(2^{ème} méthode : $\sin(2x) = 2\sin(x) * \cos(x)$, $\frac{\sin(2x)}{x} = 2 * \frac{\sin(x)}{x} * \cos(x)$ ce qui tend vers 2 pour x tend vers 0, et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = c$ donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \text{ si et seulement si } c = 2$$

Donc f est continue en 0 si $c = 0$. De plus, pour tout $x_0 > 0$, $f(x) = x + c$ qui est continue sur \mathbb{R}^{+*} et pour tout $x_0 < 0$, $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$ qui est continue sur

\mathbb{R}^{-*} Le seule problème possible était en 0.

Comportement local

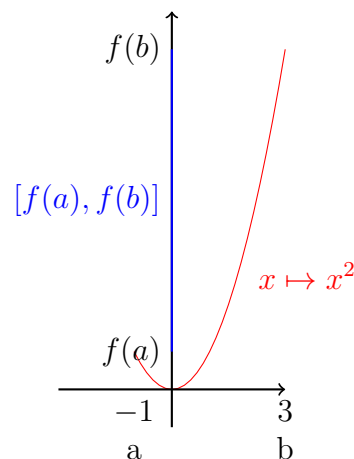
Proposition Si f est continue en x_0 , alors f est localement bornée autour de x_0 (c'est à dire il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est bornée, c'est à dire il existe $\delta > 0$ et $M > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x)| < M$). Si f est continue en x_0 et $f(x) \neq 0$, alors f est de signe constant (celui de $f(x_0)$) localement autour de x_0

2 Théorème des valeurs intermédiaires

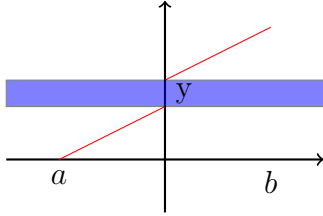
Théorème $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) et continue (sur $[a, b]$) Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Exemple

$$\begin{aligned} x &\mapsto x^2 \\ [-1, 3] &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$



(Contre) exemple : la continuité est essentielle.



Fonction monotone et non continue pour laquelle il existe des y dans $[f(a), f(b)]$ qui n'a pas d'antécédent entre a et b .

Corollaire 1 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue.

si $f(a)$ et $f(b)$ sont non nul et de signes différents, il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$