

# Table des matières

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Fonctions</b>  | <b>1</b>  |
| 1          | Ensembles de nombres . . . . .                                | 1         |
| 2          | Intervalle . . . . .  | 1         |
| 3          | Fonctions . . . . .   | 1         |
| 4          | monotonie . . . . .   | 3         |
| 5          | Opérations sur les fonctions . . . . .                        | 4         |
| 6          | Image (direct) d'une fonction composé (composition) . . . . . | 4         |
| 7          | Image réciproque . . . . .                                    | 4         |
| 8          | Application, surjectives, injectives, bijectives . . . . .    | 5         |
| 9          | Fonction réciproque . . . . .                                 | 6         |
| <b>II</b>  | <b>Limites</b>  | <b>9</b>  |
| 1          | Voisinage et adhérence . . . . .                              | 9         |
| 2          | Limite finie en un point de $\mathbb{R}$ . . . . .            | 9         |
| 3          | Restriction à un sous ensemble . . . . .                      | 10        |
| 4          | Propriété . . . . .   | 10        |
| 5          | Théorème des gendarmes . . . . .                              | 11        |
| 6          | Opération sur les limites . . . . .                           | 14        |
| 7          | Limites infinies, et limites en l'infinie . . . . .           | 14        |
| 8          | Opération sur les limites . . . . .                           | 15        |
| <b>III</b> | <b>Continuité</b>   | <b>17</b> |
| 1          | Définition et premières propriétés . . . . .                  | 17        |
| 2          | Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .                 | 19        |
| 3          | Continuité et extremum . . . . .                              | 21        |
| 4          | Fonctions réciproques . . . . .                               | 22        |
| <b>IV</b>  | <b>Dérivabilité</b>   | <b>24</b> |
| 1          | Interprétation géométrique . . . . .                          | 25        |
| 2          | Dérivabilité des prolongements de fonctions . . . . .         | 26        |
| 3          | Opération usuelles . . . . .                                  | 27        |
| 4          | Extrema et points critiques . . . . .                         | 30        |
| 5          | Acroissements finis et conséquences . . . . .                 | 31        |
| <b>V</b>   | <b>Dérivées d'ordre supérieur</b>                             | <b>34</b> |
| 1          | Dérivées d'ordre supérieur . . . . .                          | 35        |
| 2          | Développement limité et formule de Taylor-Young . . . . .     | 35        |

|             |   |           |
|-------------|---|-----------|
| 3           | Formule de Taylor-Lagrange . . . . .  | 38        |
| 4           | Opération usuelles sur les DL . . . . .   | 38        |
| 5           | Applications des DL . . . . .   | 40        |
| 5.1         | Calcul de limites . . . . .   | 40        |
| 5.2         | signe local d'une fonction . . . . .  | 41        |
| 5.3         | Position par rapport à une asymptote . . . . .                                  | 42        |
| <b>VI</b>   | <b>Intégration</b>  | <b>43</b> |
| 1           | Introduction . . . . .  | 43        |
| 1.1         | Changement de variable . . . . .  | 44        |
| 1.2         | intégration par parties . . . . .   | 44        |
| 1.3         | . . . . .   | 44        |
| 2           | Définition de l'intégrale . . . . .   | 45        |
| 2.1         | "Culture" . . . . .   | 45        |
| 2.2         | Retour à la vraie vie . . . . .   | 46        |
| 3           | Liens entre primitives, intégrales (et dérivées) . . . . .                      | 46        |
| 4           | Intégration par parties . . . . .   | 48        |
| 5           | Changement de variable . . . . .  | 49        |
| 6           | Fractions rationnelles . . . . .  | 52        |
| 7           | Fractions rationnelles en cos et en sin . . . . .                               | 55        |
| 7.1         | Polynômes . . . . .   | 55        |
| 7.2         | Fractions rationnelles . . . . .  | 57        |
| <b>VII</b>  | <b>Equations différentielles</b>  | <b>58</b> |
| 1           | Équations différentielles linéaires, d'ordre 1 . . . . .                        | 60        |
| 1.1         | Équation homogène associée (on oublie " $b(t)$ ") . . . . .                     | 60        |
| 1.2         | Et le $b$ ? : équations non homogène . . . . .                                  | 61        |
| 1.3         | $b'$ et le $b$ ? Variation de la constante . . . . .                            | 62        |
| 1.4         | Équations non-résolues . . . . .  | 62        |
| <b>VIII</b> | <b>Les nombres complexes</b>  | <b>66</b> |
| 1           | Définitions, représentations . . . . .  | 66        |
| 2           | Similitudes du plan . . . . .   | 67        |
| 3           | Formules trigonométriques . . . . .   | 70        |
| 4           | Polynôme de degré 2 à coefficients réels . . . . .                              | 71        |
| 5           | Fonctions complexes . . . . .   | 72        |
| 6           | Equation différentielles, linéaires d'ordre 1. homogènes et complexes . . . . . | 73        |
| 6.1         | Cas particulier des fonctions à valeur complexes . . . . .                      | 73        |
| 6.2         | Equation différentielle d'ordre 1 homogène . . . . .                            | 75        |

# I

## Fonctions

### 1 Ensembles de nombres

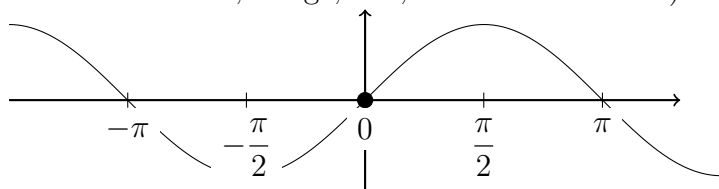
: Réels  $\mathbb{R}$ , Rationnels  $\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$  avec  $a$  et  $b$  entiers naturels  $\mathbb{N}$ , entiers  $\mathbb{Z} = \{-3, -2, \dots, 1\}$ , nombres complexes  $\mathbb{C}$ .

### 2 Intervalle

:  $[a, b]$  avec  $a, b$  réels compris dans l'intervalle, dit fermé,  $a < b$ ,  $]a, b[$  avec  $a, b$  non compris dans l'intervalle dit ouvert  $\rightarrow$  Intervalle bornés  $\mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$   $\mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$   $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$   $\mathbb{R}^- = ]-\infty; 0]$

### 3 Fonctions

Exemple : sinus :  $\sin : \mathbb{R}$  (domaine de définitions, sources, ensemble de départ)  $\rightarrow \mathbb{R}$  ou  $[-1, 1]$  (domaine de valeurs, image, but, ensemble d'arrivée)



**Définitions** Soit  $E, F$  2 ensemble de  $\mathbb{R}$ . Une fonction  $f$  est procédé pour associer à tout élément de  $\mathbb{R}$  un unique élément de  $F$  Le graph de  $F$  "vit" dans  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R}$

**Définitions** : Soit  $E$  et  $F$  2 ensembles, on définit leur produit cartésien : comme l'ensemble dont les éléments sont les couples  $(x, y)$  avec  $x$  "vit" dans  $E$  et  $y$  dans  $F$ .  
 $E * F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$

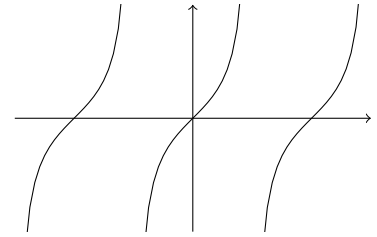
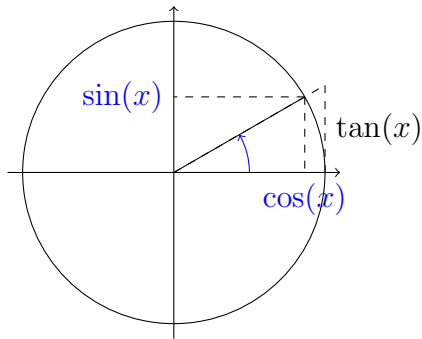
**Définitions** : Le graphe de  $f : E \rightarrow F$  est un sous ensemble de  $E * F$  donné par

$$E * F = \{(x, y), x \in E, y = f(x)\}$$

$$E * F = \{x : \rightarrow f(x) = y\}$$

**Exemples** cosinus :  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

tangente  $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k * \pi, k \text{ appartient a } \mathbb{Z}\} \rightarrow ] - \infty, +\infty[$



$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

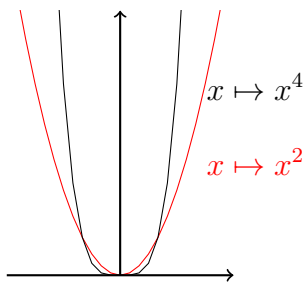
$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} x \rightarrow x^n, n \in \mathbb{N}$$

$$n = 0 : x \rightarrow 1$$

$$n = 1 : x \rightarrow x$$

$$n = 2 : x \rightarrow x^2$$

$$n = 3 : x \rightarrow x^3$$



$n > 0$  et  $n$  pair.

Remarque : les fonctions sont plus étroites. Schéma typique pour

**Définitions** Soit  $f : E \rightarrow R$  une fonction, avec  $E$  symétrique par rapport à 0.

—  $f$  est dite paire si :  $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$

—  $f$  est impaire si :  $\forall x \in E, f(x) = -f(-x)$  Remarque : si  $f$  est impaire  $\rightarrow f(0) = 0$ . En effet,

$$f(-0) = f(0) \quad (\text{I.1})$$

$$f(0) = -f(0) \quad (\text{I.2})$$

$$2 * f(0) = 0 \quad (\text{I.3})$$

Exemple : fonctions paire : cosinus,  $x^{2p}$  avec  $p$  appartient à  $\mathbb{N}$   
impaires sinus, tangente,  $x^{2p+1}$  avec  $p$  appartient à  $\mathbb{N}$

## 4 monotonie

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

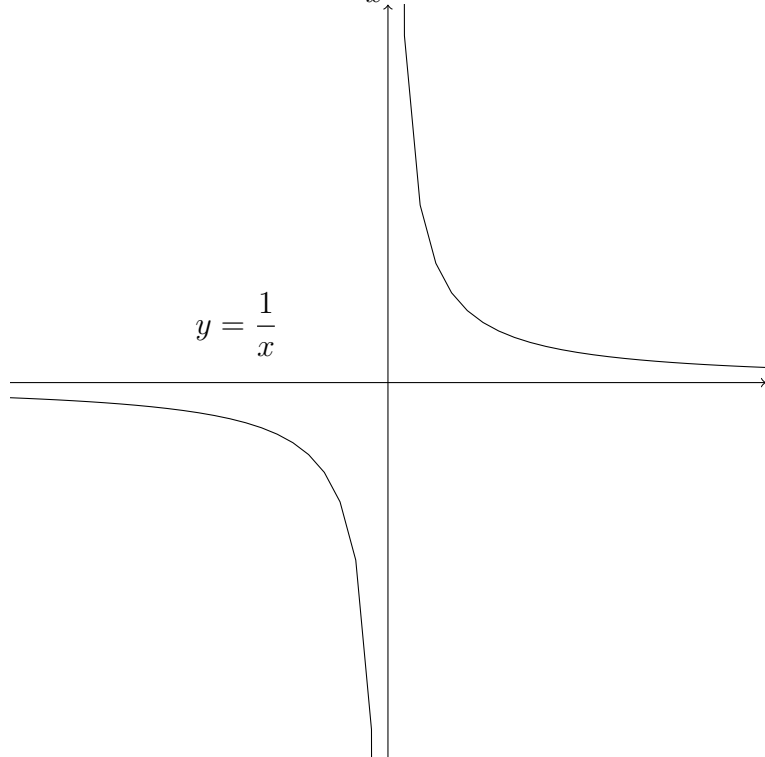
—  $f$  est croissante si  $a < b$ , alors  $f(a) \leq f(b)$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$

—  $f$  est strictement croissante si  $a < b$ , alors  $f(a) < f(b)$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$

—  $f$  est décroissant si  $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ , alors  $f(a) \geq f(b)$

—  $f$  est décroissant si  $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ , alors  $f(a) > f(b)$

**Exemple**  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* x \rightarrow \frac{1}{x}$



décroissante sur  $] -\infty, 0[$  et  $] 0, +\infty[$  mais pas sur  $] -\infty, 0[ \cup ] 0, +\infty[$  par exemple,  $-1 \leq 1$  et  $\frac{1}{-1} \leq$

$\frac{1}{1}$

**Définition** Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $A$  un sous ensemble de  $E$ . On appelle restriction de  $f$  à  $A$ , note  $f|_A$ . La fonction  $f|_A : A \rightarrow F$  définie par  $f_A(x) = f(x) \forall x \in A$

Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $E', F'$  des sous ensembles de  $\mathbb{R}$ , avec  $E \subset E', F \subset F'$ .

La fonction  $g : E' \rightarrow F'$  est un prolongement de  $f$  si  $g|_E = f$  c'est à dire  $\forall x \in E, g(x) = f(x)$

**Exemple** logarithme népérien  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln(x)$

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a * b)$  avec  $\forall (a, b) \in (R^{*+})^2$

## 5 Opérations sur les fonctions

Soit  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ . On peut définir :

— La fonction somme  $f + g$  par  $f + g : E \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

— La fonction produit  $f * g$  par  $f * g : E \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto (f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

## 6 Image (direct) d'une fonction composée (composition)

**Définitions** :  $f : E \rightarrow F$ . L'image de  $f$  notée  $im(f)$  c'est l'ensemble  $\{y \in F \text{ tel que il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y\}$  aussi noté  $f(E)$

**Définition**  $f : E \rightarrow F$  et  $g : E' \rightarrow F'$  Si l'image de  $g \subset E$ , on peut définir la fonction composée  $f \circ g : E' \rightarrow F$

$x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x))$

## 7 Image réciproque

**Définition** Soit  $f : E \rightarrow F$ , et  $B \subset F$  L'image réciproque de  $B$  par  $f$  est l'ensemble  $f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\}$

$f^{-1}([-1, 1]) = [a, b]$

**Exemple** (de composition)

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

composé de fonction  $f = g \circ u$

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - 4x + 3$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4 \text{ racine de } u : 1 \text{ et } 3$$

$$u(x) > 0 \text{ si et seulement si } x \in ]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[ \quad E = ]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$$

$$h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x^2)$$

Pour composer h avec

$$v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

ou doit enlever les points où v s'annule, c'est à dire  $v^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$$g : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2\ln(x)$$

$\ln(x^2) = \ln(x * x) = \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x)$  mais  $\ln(a * b) = \ln(a) + \ln(b)$  n'est valable que si a et b > 0

## 8 Application, surjectives, injectives, bijectives

**Définition**  $w : E \rightarrow F$  ( $E, F \in \mathbb{R}$ ) On dit que w est surjective si  $w(E) = F$   
De manière équivalente : ( $y \in F$  tel que il existe  $x \in E$  avec  $w(x) = y$ ) =  $F$  c'est à dire tout les éléments de F admette un antécédent. c'est à dire  $\forall y \in F$ , il existe un  $x \in E$  tel que  $w(x) = y$

**Définition**  $w : E \rightarrow F$  ( $E, F \subset \mathbb{R}$ ) On dit que w est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent. c'est à dire que si x et x' des éléments de E qui sont différents,  $w(x)$  différent  $w(x')$

Exemple  $w(x) = x^2$  n'est pas injectifs car -2 et 2 ont la meme image (4).

Exemple :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3$$

Cette fonction est injective car pour tout y de  $\mathbb{R}$ , il existe un  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = y$  . On a aussi  $\forall y \in \mathbb{R}$ , cet antécédent est unique.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

Cette fonction n'est pas surjective (-1 par exemple n'a pas d'antécédent) et pas injective car  $y = 4$  par exemple possède 2 antécédents.

**Remarque** : Si on considère

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

$g$  est surjective (il y a toujours au minimum un antécédent) mais toujours pas injective. Plus généralement, si on considère  $f : E \rightarrow f(E)$  est toujours surjective.

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$  est surjective mais pas injective : 0 est compris entre  $[-1; 1]$  mais possède plusieurs antécédent ( $k * \pi$  avec  $k \in \mathbb{R}$ )

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto e^{2x}$$

Cette fonction n'est pas surjective (antécédent de 0 n'existe pas) mais est injective.

**Définition**  $w : E \rightarrow F(E, R \subset \mathbb{R})$   $w$  est dite bijective si elle est injective et surjective, c'est à dire tout élément de  $F$  admet exactement un antécédent.

## 9 Fonction réciproque

Si  $f : E \rightarrow F$  est bijective, pour tout  $y$  de  $F$ , il existe un unique  $x$  dans  $E$  tel que  $f(x) = y$ . On peut donc définir  $g : F \rightarrow E$  par  $g(y) = x$  (tel que  $f(x) = y$ )  $g$  est la réciproque de  $f$ , notée  $f^{-1}$ .

**Exemple**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$$

$$x \mapsto \exp(x)$$

$$g : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x)$$



**Remarque** si  $g = f^{-1}$  avec  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow E$  alors

$$f \circ g : F \rightarrow F$$

$$x \mapsto x$$

$$\text{et } f \circ g = g \circ f$$

**Démonstration** Soit  $y \in F$ , quelconque, on veut calculer  $f \circ g(y)$  Par définition de  $g$  comme fonction réciproque de  $f$ ,  $g(y) = x$  tel que  $f(x) = y$  donc  $f(g(y)) = f(x) = y$

**Proposition**  $f : E \rightarrow F$  une fonction impaire. supposons que  $f|_{E \cap \mathbb{R}^+}$  est croissante, Alors  $f|_{E \cap \mathbb{R}^-}$  est croissante

**Démonstration**

$$f|_{E \cap \mathbb{R}^-} : E \cap \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

Soit  $x$  et  $x'$  dans  $E \cap \mathbb{R}^-$  tels que  $x \leq x'$ .

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{car } f \text{ impaire}$$

$$f(x') = -f(-x')$$

Comme  $x, x' \in E \cap \mathbb{R}^-$ ,  $-x, -x' \in E \cap \mathbb{R}^+$  et comme  $x \leq x'$  et  $-x \geq -x'$ ,  $f(-x) \geq f(-x')$  car  $f$  est croissante sur  $E \cap \mathbb{R}^+$

Conclusion,  $-f(-x) \leq -f(-x')$  et donc  $f(x) \leq f(x') \leq f(x')$ . On a prouvé que  $f|_{E \cap \mathbb{R}^-}$  est croissante.

**Remarque**  $f^{-1}$  pourrait être la fonction  $\frac{1}{f}$  (la fonction  $f$  est différent de 0), la fonction réciproque de  $f$  (avec  $f$  bijective).

Pour  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $B \subset \mathbb{R}$

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \text{ Est toujours définie}$$

**Proposition**  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  si  $f$  et  $g$  sont bijective, alors  $g \circ f$  l'est aussi et  $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$  ( $g \circ f : E \rightarrow G$ )

**Exemple** Trouver la fonction réciproque de  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]-7, +\infty[$ ,  $f(x) = e^{3x+2} - 7$  On écrit  $y = e^{3x+2} - 7$  et on détermine  $x$  en fonction des  $y$ .

$$y + 7 = e^{3x+2}$$

$$\ln(y + 7) = 3x + 2 \quad y > -7 \quad \text{car fonction exp} > 0$$

$$x = \frac{1}{3}(\ln(y + 7) - 2)$$

$$\text{d'où } f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(\ln(x + 7) - 2)$$

**Etablie**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $A \subset E$

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \in A, f(x) = y\} \quad f(A) = \text{im}(f|_A)$$

# II

## Limites

### 1 Voisinage et adhérence

**Définition** si  $x \in E$ , on dit que  $E$  est un voisinage de  $x$  si  $E$  contient un intervalle ouvert qui contient  $x$ . Ceci est équivalent à  $E$  voisinage de  $x$  si il existe  $\delta > 0$  tel que  $]x - \delta; x + \delta[ \subset E$ .

**Définition** Soit  $E \subset \mathbb{R}$ . Un réel  $x$  est adhérent à  $E$ , si tout voisinage  $V$  de  $x$  intersecte  $E$ , c'est à dire  $(V \cap E \neq \emptyset)$

**Exemple**

- si  $x \in E$ ,  $x$  est adhérent à  $E$ , car pour tout voisinage  $V$  de  $x$ ,  $x \in V \cap E$
- $E = ]0; 1]$ ,  $0$  est adhérent à  $E$ .
- $E = \{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\}$   $1$  est adhérent à  $E$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

### 2 Limite finie en un point de $\mathbb{R}$

**Définition**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}; x_0$  un point adhérent de  $E$ .

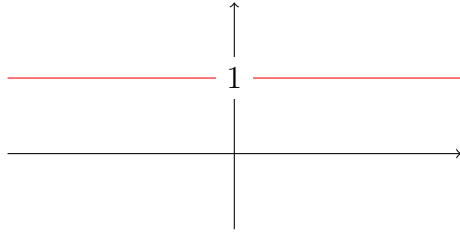
On dit que  $f(x)$  tend vers  $l$  en  $x_0$  ou que  $f(x)$  admet la limite  $l$  en  $x_0$  si :  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$ ,  $|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

Ceci est équivalent à dire que  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], f(x) \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$

Pour tout voisinage  $V$  de  $l$  il existe un voisinage de  $x_0$   $U$  tel que si  $x$  est dans  $U$ , alors  $f(x)$  est dans  $V$ .

**Notation**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$

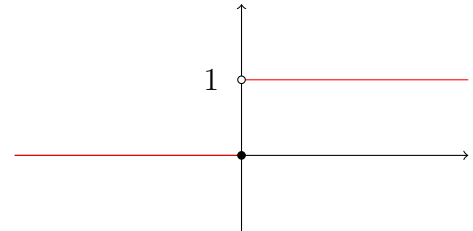
**Exemple**  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dont le graph est :



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Soit  $\epsilon > 0$ , tout  $\delta > 0$  convient.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



$f$  n'admet pas de limite en 0.

### 3 Restriction à un sous ensemble

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0$  adhérent à  $A$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $l \in \mathbb{R}$  quand  $x$  tends vers  $x_0$  dans  $A$ .

$\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$ , tel que  $\forall x \in A$ ,  $|x - x_0| < \delta$ ,  $|f(x) - l| < \epsilon$

**Exemple limite à gauche** de  $f$  en  $x_0$  est  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$  c'est à dire la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tends vers  $x_0$  dans  $] -\infty, x_0[$

**Exemple limite à droite** de  $f$  en  $x_0$  est  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$  c'est à dire la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tends vers  $x_0$  dans  $]x_0, +\infty[$

**Exemple** La fonction  $f$  de l'exemple [x] admet une limite à droite en 0 :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ , pour  $f(x) = 1$   
 La fonction  $f$  de l'exemple [x] admet une limite à gauche en 0 :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$ , pour  $f(x) = 0$

**Remarque** On écrit aussi  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  par  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  par  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$

### 4 Propriété

**Unicité** Si la limite existe, elle est unique.

démonstration par l'absurde :  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  adhérent à  $E$ . On suppose que la limite en  $x_0$  existe mais qu'elle n'est pas unique. Supposons que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$  avec  $l_1 \neq l_2$

Comme  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1, \forall \epsilon_1 > 0$ , il existe  $\delta_1, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_1$ , alors  $|f(x) - l_1| < \epsilon_1$  (\*)

De plus  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2, \forall \epsilon_2 > 0$ , il existe  $\delta_2, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_2$ , alors  $|f(x) - l_2| < \epsilon_2$  (\*\*)

Choisissons  $\epsilon < \frac{l_1 + l_2}{2}$ , on remarque  $]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[ \cap ]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[ = \emptyset$

On trouve  $\delta_1$  et  $\delta_2$  tel que (\*) et (\*\*) soient vraies.

On appelle  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ,  $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[ \subset ]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1[ \cap ]x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2[$

Soit  $x \in ]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$  Par (\*),  $f(x) \in ]l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon[$   
et par (\*\*),  $f(x) \in ]l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon[$  donc  $f(x) \in ]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[ \cap ]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[ = \emptyset$  Ceci est absurde ( $f(x) \neq \emptyset$ )

## 5 Théorème des gendarmes

f, g, h 3 fonctions  $E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  adhérent à E.

(i) Si f, g, h admettent pour limites respectifs l, m, n en  $x_0$  et si  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  pour tout x de E, alors  $l \leq m \leq n$

(ii) Si  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  sur E et si f et h admettent une limite (identique) l en  $x_0$ , alors g admet une limite en  $x_0$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

**Remarque** On remplace les inégalité de (i) par  $\forall x \in E, f(x) < g(x) < h(x)$ , on obtient aussi  $l < m < n$

**Exemple**  $f(x) = |x|$  et  $g(x) = 2|x|$  Sur  $E \subset \mathbb{R}^+, f < g$  mais  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

**Exemple**

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ existe ?}$$

$\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$  n'a pas de limite en 0)

Soit f, g, h  $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -|x|, g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), h(x) = |x|$

On a bien  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  car  $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$

Donc par le théorème des gendarmes, Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$  g admet 0 comme limite quand x tends vers 0.

**Fonction de référence**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^{\ln(n)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^\alpha \cdot \ln(x)^\beta$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

### Methode

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)}$$

$$f(x) = \frac{(x+1) - 1}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{2x}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{2x} \cdot \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3+x}^2 - \sqrt{3}^2}{2x(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

**Comportement local**

**Proposition** Si  $f(x)$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}$  quand  $x$  tends vers  $x_0$ , alors  $f$  est localement bornée. c'est à dire il existe un voisinage de  $x_0$ ,  $V$ , tel que il existe  $M \in \mathbb{R}, \forall x \in V, |f(x)| < M$

**Remarque** Il existe un voisinage de  $x_0$  si et seulement si il existe un intervalle ouvert contenant  $x_0$  si et seulement si il existe  $\delta > 0, x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

**Démonstration** Par hypothèse,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$

c'est à dire  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$

Soit  $\epsilon = 1$ , On trouve  $\delta$  tel que  $\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$|f(x) - l| < 1$ , c'est à dire  $-1 < f(x) - l < 1$  Soit  $|f(x)| < l + 1$

**Propriété** Si  $f(x)$  admet  $l \neq 0$  comme limite quand  $x$  tends vers  $x_0$ , alors localement (autour de  $x_0$ ), alors  $f$  est de signe constant

**Démonstration** bornée en  $x_0$  (meme style que la précédente),  $\epsilon = \frac{l}{3}$

**Exemple**

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6 = f(1) \text{ avec } f = x^2 + 2x + 3$$

$$|f(1+h) - f(1)| = |(1+h)^2 + (1+h) * 2 + 3 - 6|$$

$$= |1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3|$$

$$= |h(h+4)|$$

$$= |h| * (h+4) \quad \text{si } |h| < 1$$

$$\leq 5|h|$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 5|h| = 0$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(1+h) - f(1)| = 0$$

**Remarque**  $x = 1 + h$  quand  $h$  tends vers 0 et  $x$  tends vers 1.

## 6 Opération sur les limites

$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}; x_0$  adhérent à E Supposons que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$  Alors

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$  existe et vaut  $l + m$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x)$  existe et vaut  $l \cdot m$
- si  $m \neq 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f/g)(x)$  existe et vaut  $\frac{l}{m}$

Composition  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$

$g \circ f : E \rightarrow G, x_0$  adhérent à E.

Supposons que

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$
- F est un voisinage de l.
- $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = m$

Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x)$  existe et vaut m.

### Exemple

$$g : y \rightarrow e^y$$

$$f : x \rightarrow \sqrt{1+x}$$

- $g \circ f$  est bien défini car le domaine de g est  $\mathbb{R}$
- 0 est bien adhérent au domaine de f (qui est  $[-1, +\infty[$ )
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$
- $\lim_{y \rightarrow 1} g(y) = e$

## 7 Limites infinies, et limites en l'infinie

**Définition**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x_0$  adhérent à E

On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) quand  $x$  tend vers  $x_0$  si  $\forall A > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|x - x_0| < \delta$ , alors  $f(x) > A$  (ou  $f(x) < -A$  pour  $f(x)$  tend vers  $-\infty$ ).

### Exemple

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$



**Définition**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  tel qu'il existe  $A > 0$  tel que  $]A; +\infty[ \subset E$  On dit que  $f(x)$  tend vers  $l \in E$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$   
c'est à dire  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $A > 0, x > A$ , alors  $|f(x) - l| < \epsilon$

**Définition**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  tel qu'il existe  $A < 0$  tel que  $] - \infty, A[ \subset E$  On dit que  $f(x)$  tend vers  $l \in E$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  c'est à dire  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $A < 0, x < A$ , alors  $|f(x) - l| < \epsilon$

**Remarque**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  veut dire  $\forall A > 0$ , il existe  $B > 0, x < -B$  tel que  $f(x) > A$

**Exemple**

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

**Démonstration** Soit  $A > 0$ . On cherche  $\delta$  tel que si  $0 < x, 0 < \delta$  alors  $f(x) = \frac{1}{x} > A$

Choisir  $\delta = \frac{1}{A}$  suffit, en effet  $0 < x < \frac{1}{A}$  alors  $\frac{1}{x} > \frac{1}{A}$ .

**Exemple**  $g(x) = 1 + e^{-x}$  Montrons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

**Exemple**

$$f : ] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan(x)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty$$

## 8 Opération sur les limites

- Limites finies ( $l \in \mathbb{R}$ ) en l'infini sont exactement les memes opérations.
- Limites infinies ( $l = \pm\infty$ ) Attention aux cas indéterminé :  
 $+\infty - \infty, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 * (\pm\infty)$

**Exemple**  $\frac{+\infty}{+\infty} = ?$

$$f : x \mapsto x$$

$$g : x \mapsto x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f_2 : x \mapsto x^3$$

$$g_2 x \mapsto x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = +\infty$$

$$f_3 : x \mapsto 3x$$

$$x \mapsto x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_3(x)}{g_3(x)} = 3$$

Plus généralement, P,Q deux polynomes, que vaut  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$  ? Elle est égale au rapport des termes du plus haut degrés. Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 4x^5 + 2}{x^4 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5}{x^4} = +\infty$$

**Exemple**

$$\lim_{x \rightarrow 0} x * \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\text{car } \forall x \neq 0, 1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

donc  $0 \leq |x * \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$  avec  $|x|$  tend vers 0 pour  $x$  tend vers 0.

# III

## Continuité

### 1 Définition et premières propriétés

**Définition**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x \in E$

- On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  (au point  $x_0$ ) si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe et vaut  $f(x_0)$
- $f$  est continue sur  $E$  si  $f$  est continue en tout point  $x_0 \in E$

o

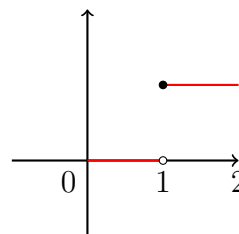
**Exemple** Fonctions continues :

- $x \mapsto x^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \frac{1}{x}$  (domaine  $\mathbb{R}^*$ ) est continue sur  $\mathbb{R}^*$
- $\sin, \cos$  sont continues sur  $\mathbb{R}$

Fonctions discontinues :  $x \mapsto [x]$  n'est pas continue en 1 par exemple. En effet,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 0$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 1$ .

Les limites à gauche et à droite étant différentes donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  n'existe pas

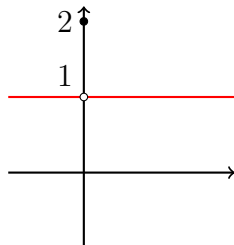
$$g(x) = 1 \text{ pour tout } x \text{ différent de } 0 \text{ mais } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0; x < 0} g(x)$$



**Remarque**  $f$  continue en  $x_0$  si et seulement si  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|x - x_0| < \delta$  et  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

**Définition**

- $f$  est continue à droite en  $x_0$  si limite de  $f(x)$  par valeur supérieure  $(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x))$  en  $x_0$  et vaut  $f(x_0)$
- $f$  est continue à gauche en  $x_0$  si limite de  $f(x)$  par valeur inférieure  $(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x))$  en  $x_0$  et vaut  $f(x_0)$



**Exemple**

- $f$  (partie entière de l'exemple précédent) est continue à droite mais pas à gauche en 1.  $f$  est continue sur  $[0; 1[$

—  $g$  n'est pas continue ni à gauche, ni à droite en 0.

**Proposition**  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en  $x_0$

**Propriété**  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$

$f$  et  $g$  continue en  $x_0$

- $f+g$  est continue en  $x_0$
- $f \cdot g$  est continue en  $x_0$
- $\frac{f}{g}$  est continue en  $x_0$  si  $g(x_0) \neq 0$

La continuité est très local, même si pour un  $x \in E$ ,  $g(x) = 0$ , temps que  $x_0$  différent de 0,  $\frac{f}{g}$  est continue en  $x_0$

**Composition**  $f : E \rightarrow F$   $g : F \rightarrow G$  et  $g \circ f : E \rightarrow G$  si  $f$  est continue en  $x \in E$  et  $g$  est continue en  $f(x) \in F$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $x_0$

**Exemple**

- Polynôme,  $\sin + \cos$ ,  $\tan + \exp$  sont continues sur  $\mathbb{R}$
- $\sin(\ln(\frac{e^x}{1+x^2}))$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  $\exp, 1+x^2$  sont continue, de plus  $1+x^2 \neq 0$  pour  $x \in \mathbb{R}$  donc  $\frac{e^x}{1+x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Finalement,  $e^x$  n'est jamais null donc  $\text{im}(x \mapsto \frac{e^x}{1+x^2}) = \varphi \subset \mathbb{R}^{+*}$ , d'où  $\ln(\varphi)$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ , de plus,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$   
 $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

**Définition** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  adhérent à  $E$ . Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , alors la fonction  $g : E \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  par la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases} \quad \text{Est continue sur } \mathbb{R}$$

**Exemple**

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ l & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{Est continue sur } \mathbb{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{est le prolongement par continuité en 0 de } x \mapsto x \ln(x)$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

**Exercice** Par quelles valeurs de  $c$ , la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est continue ?  $f$  est continue si et seulement si  $x = 2$  En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(2x)}{x} \\ &= \frac{\sin(2x)}{2x} * 2 = 2 \end{aligned}$$

(2<sup>ème</sup> méthode :  $\sin(2x) = 2\sin(x) * \cos(x)$ ,  $\frac{\sin(2x)}{x} = 2 * \frac{\sin(x)}{x} * \cos(x)$  ce qui tend vers 2 pour  $x$  tend vers 0, et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = c$  donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \text{ si et seulement si } c = 2$$

Donc  $f$  est continue en 0 si  $c = 2$ . De plus, pour tout  $x_0 > 0$ ,  $f(x) = x + c$  qui est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et pour tout  $x_0 < 0$ ,  $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$  qui est continue sur  $\mathbb{R}^{-*}$  Le seul problème possible était en 0.

## Comportement local

**Proposition** Si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors  $f$  est localement bornée autour de  $x_0$  (c'est à dire il existe un voisinage de  $x_0$  sur lequel  $f$  est bornée, c'est à dire il existe  $\delta > 0$  et  $M > 0$  tel que  $|x - x_0| < \delta$  et  $|f(x)| < M$ ). Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $f(x) \neq 0$ , alors  $f$  est de signe constant (celui de  $f(x_0)$ ) localement autour de  $x_0$

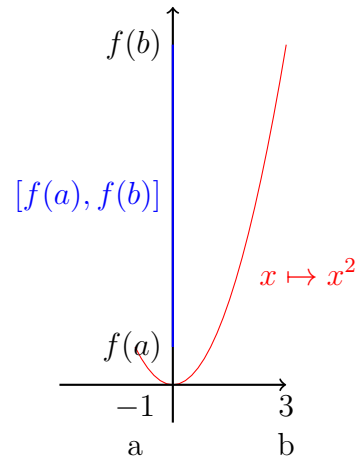
## 2 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a < b$ ) et continue (sur  $[a, b]$ ) Pour tout  $y$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x) = y$ .

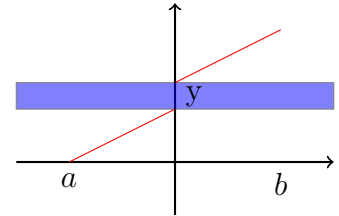
**Exemple**

$$x \mapsto x^2$$

$$[-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$



**(Contre) exemple** : la continuité est essentielle. Voici une fonction monotone et non continue pour laquelle il existe des  $y$  dans  $[f(a), f(b)]$  qui n'ont pas d'antécédent entre  $a$  et  $b$ .



**Corollaire 1**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue.

si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont non nul et de signes différents, il existe  $x \in ]a, b[$  tel que  $f(x) = 0$

**Corollaire** Si  $f(a) \neq 0$  et  $f(b) \neq 0$  avec  $a, b$  de signes différents dans  $\mathbb{R}$ , alors il existe un  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$

**Corollaire**

$f$  fonction continue  
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  alors  $f$  est surjective.

**Idée de démonstration** Ramener à un intervalle "bornée", de type  $[a, b] \in \mathbb{R}^2, a < b$ .

Soit  $y \in \mathbb{R}$ , et  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tel que  $x_1 < x_2$  et  $f(x_1) = y - 1$  et  $f(x_2) = y + 1$ . On cherche à prouver qu'il existe au moins un antécédent.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  donc  $f(x) \geq y + 1$  pour  $x$  assez grand.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  donc  $f(x) \leq y - 1$  pour  $x$  assez petit. On applique le théorème des valeurs

intermédiaires à  $f|_{[x_1, x_2]} : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f|_{[x_1, x_2]}$  est bien continue.

Comme  $f(x_1) \leq y - 1 < y < y + 1 \leq f(x_2)$

D'où il existe  $x \in [x_1, x_2]$  tel que  $f(x) = y$ .

**Corollaire**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $I \in \mathbb{R}$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.

### 3 Continuité et extremum

**Définition** Soit  $E \subset \mathbb{R}$ .

- On dit que  $x$  est le minimum de  $E$ , si pour tout élément de  $x' \in E$ ,  $x' \geq x$
- On dit que  $x$  est le maximum de  $E$ , si pour tout élément de  $x' \in E$ ,  $x' \leq x$
- Un extremum est un minimum ou un maximum.

**Remarque** Le maximum et le minimum sont unique.

**Théorème** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (a < b)$ , continue.

L'image de  $f$  admet un minimum et un maximum.

**Remarque** de manière équivalente : Minimum

$\exists y \in \text{Im}(f), \forall y' \in \text{Im}(f), y' \geq y$  (ou  $y$  est le minimum)

$\exists x_{\min} \in [a, b], \forall x' \in [a, b], f(x') \geq f(x_{\min})$  (avec  $y = f(x_{\min})$  et  $y' = f(x')$ )

Pour le maximum :  $\exists x_{\max} \in [a, b], \forall x' \in [a, b], f(x') \leq f(x_{\max})$  ( $f(x_{\max})$  le maximum de  $\text{Im}(f)$ )

Dans ces exemples,  $y$  est forcément unique (dans le cas du minimum ou du maximum) mais il peut y avoir plusieurs antécédents (plusieurs  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$ )

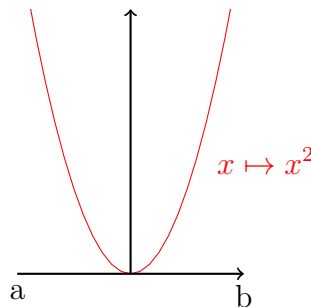
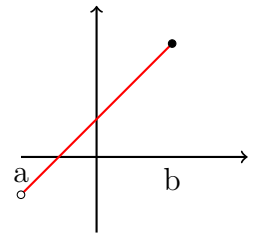
**Exemple**  $\sin : [0, 4\pi] \rightarrow [-1, 1]$

Le minimum de  $\sin([0, 4\pi])$  est -1. Il est atteint en  $\frac{3\pi}{2}$  et  $\frac{7\pi}{2}$ .

**Remarque** 2 hypothèses. Pour avoir un maximum ou un minimum,  $[a, b]$  doit être un intervalle fermé et borné. Par exemple, Le minimum n'est pas atteint sur  $]a, b]$  De même, sur  $[a, b[$  pour le maximum.

**Corollaire** supposons  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , alors  $f$  admet un minimum mais pas de maximum.



**Idée de démonstration**

Cette fonction admet un minimum (0) mais jamais de maximum.

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , alors il existe un réel  $A$  et  $x_0$  tel que  $\forall x > x_0; f(x) > A$ . De même, comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  il existe un réel  $A$  et  $-x_0$  tel que  $\forall x < -x_0; f(x) > A$

Dans l'intervalle  $] -x_0, x_0[$  comme  $f$  est continue,  $f(] -x_0, x_0[)$  est un intervalle continu. Or un intervalle continu admet forcément un minimum, dans  $] -x_0, x_0[$ , il existe un  $c$  tel que  $f(x) > f(c)$ . Or, comme  $\forall x < -x_0$  et  $\forall x > x_0$ ,  $f(x) > A$ , on a  $f(x) > A > f(x)$ . Donc  $f$  admet bien un minimum et pas de maximum.

**Corollaire**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Si pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) > 0$  alors le minimum de  $Im(f) > 0$ ,  
c'est à dire  $\exists m > 0, \forall x \in [a, b], f(x) \geq m > 0$

## 4 Fonctions réciproques

**Théorème**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continue et strictement monotone.

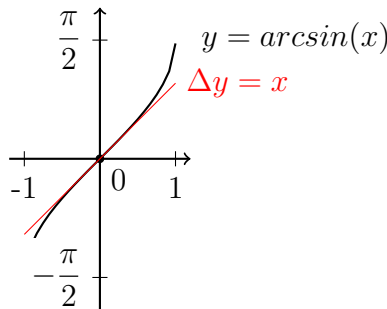
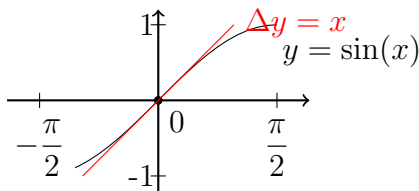
1.  $f(I)$  est un intervalle
2.  $f$  est bijective sur  $J$
3.  $f^{-1}$  est continue et strictement monotone, avec le même sens de variations que  $f$ .
4. Les graphes de  $f$  et  $f^{-1}$  sont symétriques par rapport à la première bissectrice  $\Delta y = x$

Exemple  $\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  est continue et strictement croissante.

Donc  $f$  est bijective, c'est à dire  $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  existe

et  $f^{-1}$  vaut arcsinus.

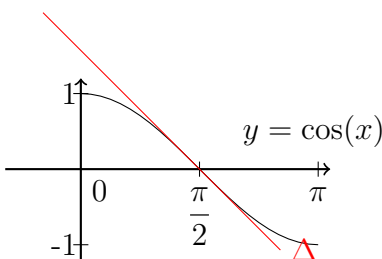
$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  est continue et strictement croissante.



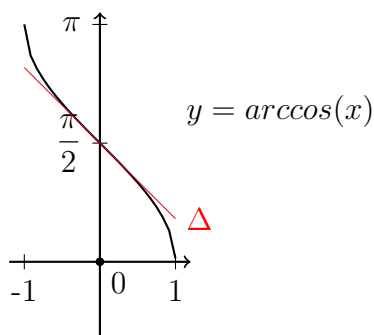
**Exemple**  $\cos[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  est continue et strictement décroissante.

Donc  $f$  est bijective, c'est à dire  $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  existe et  $f^{-1}$  vaut arccosinus.

$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  est continue et strictement décroissante.

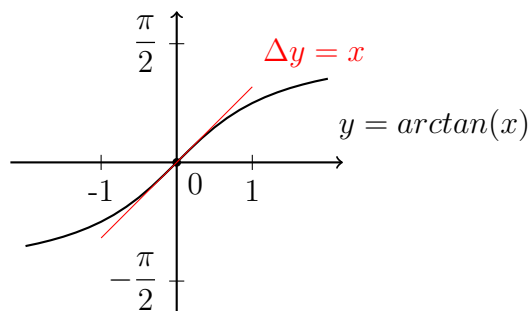
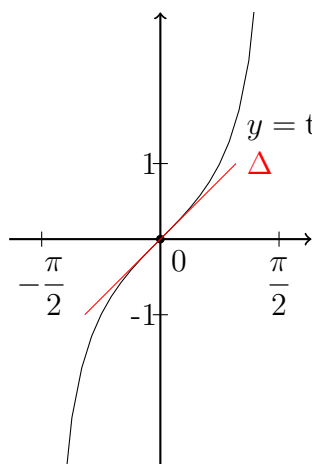






**Exemple**  $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et strictement croissante, donc sa fonction réciproque est :  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  aussi.

Donc  $f$  est bijective, c'est à dire  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  existe et  $f^{-1}$  vaut arctangente.  
 $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  est continue et strictement croissante.



**Exemple**

$\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ x \mapsto x^n \end{cases}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Elle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  si  $n$  est pair.

Elle est donc bijective :  $\begin{cases} x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \\ \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \end{cases}$  elle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  si  $n$  est impair. Réciproque

$\begin{cases} x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

# IV

## Dérivabilité

**Définition**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E$  est un voisinage de  $x_0$ .  $f$  est derivable en  $x_0$  si  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite  $l$  quand  $x$  tend vers  $x_0$  ( $l \in \mathbb{R}$ ).  $\tau(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  est appelé le taux d'accroissement de  $f$  en  $x_0$ . La limite de  $l$  (quand elle existe) est la dérivée de  $f$  en  $x_0$ , elle est notée  $f'(x_0)$

**Exemple**  $f : x \mapsto x^2$   
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f'(1) = ?$

$$\tau(x) = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0$$

**Exemple 2**  $f : x \mapsto x^3$   
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tau(x) = \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2)}{x - x_0}$$

$$\forall x \neq x_0, \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 + x.x_0 + x_0^2 = 3x_0^2$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x_0^2$$

**Exemple 3**  $f : x \mapsto \sqrt{x}$   
 $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \\
&= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\
\forall x \neq x_0, x_0 \in \mathbb{R}^{+*} &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\
\lim_{x \rightarrow x_0} \tau(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

## 1 Interprétation géométrique

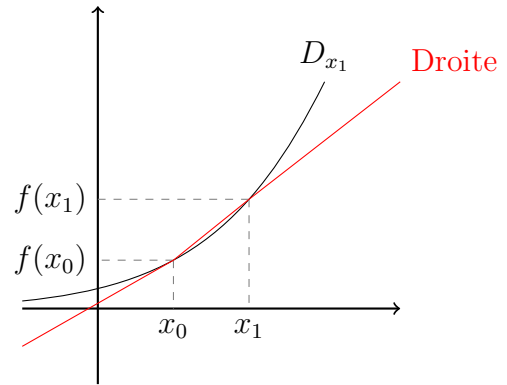
$f'(x_0)$  est le coefficient directeur de la tangente du graphe de  $f$  en  $(x_0, f(x_0))$

$\tau(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$  est le coefficient de la droite passant par  $P_{x_1}$  et  $P_{x_0}$  avec  $P_{x_1}$  du graph au point  $x_1$ , et  $P_{x_0}$  celui de  $x_0$

$y = \tau(x_1)(x - x_0) + f(x_0)$  avec  $x_1 \in \mathbb{R}$

Quand  $x$  tend vers  $x_0$ , la droite  $D_{x_1}$  "converge" vers la tangente au graph de  $f$  au point  $(x_0, f(x_0))$ , d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



**Définition** Si  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \tau(x) = l^-, l^- \in \mathbb{R}$

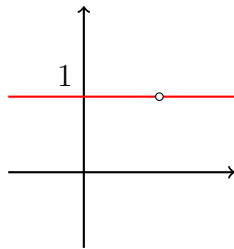
On dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$  et on note  $f'_g(x_0) = l^-$

Si  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \tau(x) = l^+, l^+ \in \mathbb{R}$

$f$  admet une dérivée à droite en  $x_0$ , que l'on note  $f'_d(x_0) = l^+$

**Théorème**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E$  un voisinage de  $x_0$ .  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est dérivable à droite et à gauche en  $x_0$  et  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

**Remarque** Cette fonction n'est pas dérivable en 1, pourtant  $f'_d(1) = f'_g(1)$ ,  $f$  doit donc alors être continue en  $x_0$



**Démonstration**  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tau(x) = l \in \mathbb{R}$ , cela signifie

$$\exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \text{ donc } |\tau(x) - l| < 1$$

donc que

$$l - 1 \leq \tau(x) \leq l + 1$$

$$l - 1 \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq l + 1$$

Si  $x > x_0$ , on obtient :

$$(l-1)(x-x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq (l+1)(x-x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (l-1)(x-x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} (l+1)(x-x_0)$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \text{ par le théorème des gendarmes, et de même pour } x < x_0$$

**Définition**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$  si  $f$  est dérivable en tout point de  $x_0 \in ]a, b[$   $f$  est dérivable sur l'intervalle fermé  $[a, b]$  si  $f$  est dérivable sur l'intervalle ouvert et à droite en  $a$  et à gauche en  $b$ .

**Exemple**  $x \rightarrow \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[, [a, +\infty[ (a > 0)$  mais pas sur  $[0, +\infty[$ .

## 2 Dérivabilité des prolongements de fonctions

**Proposition**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable

On définit  $\varphi : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  par la formule 
$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ g(x) & \text{si } x \in ]b, c] \end{cases}$$

$\varphi$  est continue sur  $[a, c]$  si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} \varphi(x) = \varphi(b)$$

$$f(b) = g(b) = \varphi(b)$$

Si  $\varphi$  est continue,  $\varphi$  est dérivable sur  $[a, c]$  si  $f'_g(b) = g'_d(b)$

**Exercice** Trouver  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 2, & \text{si } x \leq 1 \\ \alpha x + \beta & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Soit dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $e^x + 2$  et  $\alpha x + \beta$  sont dérivable sur  $\mathbb{R}$ , le seul problème peut survenir en 1. Pour être dérivable,  $f$  doit être continue :  $e^1 + 2 = \alpha + \beta$  et on doit avoir  $f'_g(1) = e = f'_d(1) = \alpha$ .  
 $\alpha = e$  et  $\beta = 2$

### 3 Opération usuelles

$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E$  voisinage de  $x_0$ .

$f$  et  $g$  sont dérivable en  $x_0$ , alors :

- $f+g$  est dérivable en  $x_0$  et  $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $f \cdot g$  est dérivable en  $x_0$  et  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- si  $g(x_0) \neq 0$   $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $x_0$  et  $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

**Démonstration** Pour la somme :

$$\begin{aligned} (f+g)(x) - (f+g)(x_0) &= f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0)) \\ &= f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0) \\ \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Pour le produit :

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) &= f(x) \cdot g(x) - (f(x_0) \cdot g(x_0)) \\ &= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) \\ &= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0)) \\ \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \end{aligned}$$

Comme précédemment,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$  car  $g$  est continue en  $x_0$

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} &= f \cdot \frac{1}{g} \\ (\frac{f}{g})' &= f' \cdot \frac{1}{g'} + f \cdot (\frac{1}{g})' \end{aligned}$$

**Composition**  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G, g \circ f : E \rightarrow G$

On suppose  $f$  dérivable en  $x_0$ ,  $g$  dérivable en  $f(x_0)$  alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et  $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$

**Exemple**  $f, g : E \rightarrow F$  dérivables en  $x_0$ , avec  $f(x_0) \neq 0$ ,  $\frac{f'}{g}(x_0) = (g \cdot \frac{1}{f})'(x_0)$  Et  $\frac{1}{f}$  est la

composée de  $g$  et de  $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ d'où } (\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit finalement } \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - f(x_0) \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \end{aligned}$$

**Exemple** dérivée  $e^{\sin(x)}$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sin(x)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^x$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g \circ f(x)$$

D'où  $\forall x \in \mathbb{R} h'(x) = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$

Définissons  $f$  par la formule  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $1+x^2 \neq 0$  Donc :

—  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$

—  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\text{et } f'(x) = \frac{-1x}{(1+x^2)^2}$$

**Dérivée de la fonction réciproque**  $f : E \rightarrow F$  dérivable sur  $E$  et bijective (Sa réciproque est notée  $f^{-1}$ ) On note  $f^{-1} \circ f(x) = x \forall x \in E$  Donc  $(f^{-1} \circ f)'(x) = f'(x) \cdot (f^{-1})'(f(x)) = 1 \forall x \in E$

$$\text{On obtient } (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\text{Exemple } \tan] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$$

Pour  $x \in \tan] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\cos x \neq 0$  et donc

$$\begin{aligned} (\tan)'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x) \end{aligned}$$

$$\text{En effet, } 1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

De plus,  $\tan$  est bijective, de réciproque  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$   $\arctan$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\arctan(\tan x) = x$

donc  $\tan'(x) \cdot (\arctan)'(\tan(x)) = 1$  c'est à dire

$$\arctan'(\tan x) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

On note  $z = \tan x$ ,  $\arctan'(z) = \frac{1}{1 + z^2}$

**Exercice** a)

$$f : ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow ] - 1, 1[$$

$$x \mapsto \sin x$$

f est bijective et  $f'(x)$  ne s'annule pas, donc

$$\forall x \in ] - 1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

En effet,

$$\arcsin(\sin(x)) = x$$

$$(\arcsin(\sin(x)))' = x'$$

$$\cos(x) * \arcsin'(\sin(x)) = 1$$

$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

On note  $z = \sin(x)$ , on a

$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}}$$

$$\arcsin'(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

b) de même,  $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$  sur  $] - 1, 1[$

En effet,

$$\arccos(\cos(x)) = x$$

$$(\arccos(\cos(x)))' = x'$$

$$-\sin(x) * \arccos'(\cos(x)) = 1$$

$$\arccos'(\cos(x)) = -\frac{1}{\sin(x)}$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$$

On note  $z = \cos(x)$ , on a

$$\arcsin'(\cos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2}}$$

$$\arcsin'(z) = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

## 4 Extreima et points critiques

**Définitions**  $f : E \rightarrow F$

$f$  admet un maximum local en  $\alpha \in E$ , s'il existe un voisinage  $V$  de  $\alpha$ , tel que  $\forall x \in V \cap E, f(x) \leq f(\alpha)$

$f$  admet un minimum local en  $\beta \in E$ , s'il existe un voisinage  $V$  de  $\beta$ , tel que  $\forall x \in V \cap E, f(x) \geq f(\beta)$

Un extremum local est un minimum local, soit un maximum local.

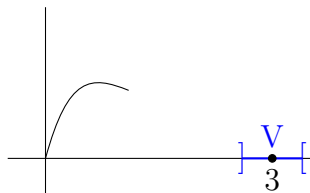
**Proposition**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E$  avec  $E$  voisinage de  $x_0$  Si  $x_0$  est un extremum local de  $f$ , alors  $f'(x_0) = 0$

ON dit alors que  $x_0$  est un point critique de  $f$ .

**Remarque**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Les extrema sont inclus dans  $\{x \in ]a, b[ \text{ tel que } f'(x) = 0\} \cup \{a, b\}$

**Exemple (inhabituel)**  $f : [0, 1] \cup \{3\}$

$V \cap E = \{3\} \forall x \in V \cap E, f(x) \geq f(3)$  donc  $f(3)$  est un minimum local, de même, il est aussi un maximum local car  $\forall x \in V \cap E, f(x) \leq f(3)$



**Exemple**  $\sin[-\frac{\pi}{4}, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

La restriction de la fonction sinus à  $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$  admet un unique point critique.



**Théorème de Rolle** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  si  $f(a) = f(b)$ , alors il existe au moins un  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$

**Démonstration** Notons  $y = f(a) = f(b)$   $f$  continue sur  $[a, b]$  (fermé) donc il existe un minimum global et un maximum global (atteints respectivement) en  $\alpha$  et  $\beta$ , c'est à dire  $\forall x \in [a, b], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$

1er cas  $f(\alpha) = y = f(\beta)$

La fonction est donc constante sur  $[a, b]$ . N'importe quel  $c \in ]a, b[$  convient.

2er cas soit  $f(\alpha) < y$  ou  $y < f(\beta)$

Supposons que  $f(\alpha) < y$   $f(\alpha)$  est un minimum global donc un minimum local.

$\alpha \in ]a, b[$ , car  $f(x) \neq y$  Par la proposition,  $f'(\alpha) = 0$

De même, si  $y < f(\beta)$ , prendre  $c = \beta$  convient.

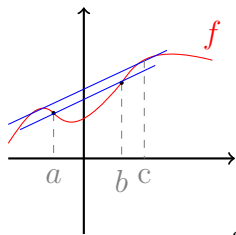
**Exemple**



On remarque que  $f(0)$  n'est ni un minimum, ni un maximum local.

## 5 Acroissements finis et conséquences

**Exemple**



**Théorème**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Il existe un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ .

**Démonstration** Appliquer le théorème de Rolle à

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \cdot x$$

**Corollaire**  $f$  est une fonction comme ci dessus,

- si  $f' \geq 0$  sur  $]a, b[$  alors  $f$  est croissante sur  $[a, b]$
- si  $f' > 0$  sur  $]a, b[$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $[a, b]$
- si  $f' \leq 0$  sur  $]a, b[$  alors  $f$  est décroissante sur  $[a, b]$
- si  $f' < 0$  sur  $]a, b[$  alors  $f$  est strictement décroissante sur  $[a, b]$
- si  $f' = 0$  sur  $]a, b[$  alors  $f$  est constante  $[a, b]$

**Application** Tableaux de variations.

**Exemple**

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\sinh(0) = 0$   $\sinh$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$   
 $\sinh'(x) > 0$  pour tout  $x$ , donc le sinus hyperbolique est croissante.

De même

$$\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

$$\cosh(0) = 1$$

|          |           |     |           |
|----------|-----------|-----|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $\sinh'$ |           | $+$ |           |
| $\sinh$  | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $x$      | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $\cosh'$ |           | $0$ | $+$       |
| $\cosh$  | $+\infty$ | $1$ | $+\infty$ |

$$\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} \\ &= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

De la même façon,  $\tanh(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$

**Remarque**  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est bijective  $\sinh^{-1} = \operatorname{arg\,sinh}$   
 $\cosh : \mathbb{R}^+ \rightarrow [1, +\infty[$  est bijective  $\cosh^{-1} = \operatorname{arg\,cosh}$

# V

## Dérivées d'ordre supérieur

**But** Approcher localement une fonction  $f$  par des polynômes.

$$k \in \mathbb{N}^+, k! = 1 * 2 * 3 * \dots * k$$

**Définition**

$$0! = 1$$

**Exemple**

polynome de degré 0  $f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))$

$$= \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \text{ Si } f \text{ continue}$$

— Polynôme de degré 1 si  $f$  est dérivable :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))$$

$$(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)) = (x - x_0) \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right)$$

$$= \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \text{ car } f \text{ est dérivable}$$

On voudrait

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

avec  $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$

Objectifs du cours :

1. Comprendre  $f''(x_0), f'''(x_0)$
2. Comprendre  $\epsilon(x)$

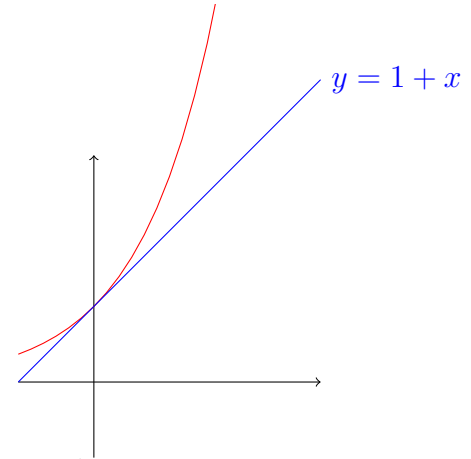
**Exemple** En 0 ordre 2 :  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$

Application :

- Calcul de limites :  $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$
- Position d'un graph par rapport à sa tangente. On considère  $f(x) - \text{tangente}$  :

$$\begin{aligned} e^x - (x - 1) &= \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \\ &= x^2\left(\frac{1}{2} + \epsilon(x)\right) \end{aligned}$$

$x^2 > 0$  et  $\frac{1}{2} + \epsilon(x) > 0$  donc près de 0, la fonction est au dessus de sa tangente.



## 1 Dérivées d'ordre supérieur

**Définition**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $I$  est un intervalle ouvert. On dit que  $f$  est  $C^0$  si elle est :

- $C^0$  si elle est continue sur  $I$ .
- $C^1$  si elle est dérivable sur  $I$  et que  $f'$  est continue.
- $C^2$  si  $f$  est dérivable deux fois et  $f''$  est continue sur  $I$
- $C^k$  si  $f$  est dérivable  $k$  fois et  $f^{(k)}$  est continue sur  $I$
- $C^\infty$  si  $f$  est  $C^k \forall k \in \mathbb{N}$

**Exemple**  $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \rightarrow C^0$  car  $f(x)$  est dérivable, donc continue.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc  $f(x)$  n'est pas  $C^1$  car  $f'(x)$  n'est pas continue ( $\cos(\frac{1}{x})$  n'est pas continue en 0).

## 2 Développement limité et formule de Taylor-Young

**Définition** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  est un intervalle ouvert.  $x_0 \in I$ .  $f$  admet un développement limité en  $x_0$  à l'ordre  $n$  s'il existe :

- un polynôme de degrés  $n$  :  $P(x) = a_0 + a_1.x + \dots + a_n.x^n$
- Une fonction  $\epsilon : ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\epsilon \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x - x_0) + (x - x_0).\epsilon(x) \text{ pour } x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \\ &= a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n \epsilon(x) \end{aligned}$$

Dans ce cas  $P$  est la partie principale du développement limité.

- degré de  $P = n$
- $\epsilon$  définie près de  $x_0$  et tel que  $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$

**Théorème** Si un tel développement limité existe, alors il est unique.

**Exemple**  $p(x) = x^4 + 3x^2 - x + 17$  .  $DL_3(0) = 17 - x + 3x^2 + x^3 \cdot \epsilon(x)$

### Formule de Taylor-Young

**Théorème**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervalle ouvert et  $x_0 \in I$

Si  $f$  est  $C^n$  sur  $I$ , alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$

De plus,  $\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ,  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$   
avec  $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  pour  $\delta > 0$ ,  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \subset I$

### Exemple

1.  $f(x) = \exp(x)$  en  $x_0 = 0$   
 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$  avec  $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
2.  $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 1$   
 $DL_6(0) : Q(x) = 1 + 3x^2 + x^3 + x^6 \epsilon(x)$  ( $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ )  
 $DL_2(0) : Q(x) = 1 + 3x^2 + x^2 \epsilon(x)$  avec  $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$   
 $DL_2(1) : Q(x) = Q(1) + Q'(1) + \frac{Q''(1)}{2} + (x - 1)^2 \epsilon(x)$

$$\text{Or } Q'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$\text{donc } Q'(1) = 9$$

$$\text{et } Q''(x) = 6x + 6$$

$$\text{donc } Q''(x) = 12$$

$$\begin{aligned} DL_2(1) : Q(x) &= 5 + 9(x - 1) + \frac{12}{2} (x - 1)^2 + (x - 1)^2 \epsilon(x) \\ &= 5 + 9(x - 1) + 6(x - 1)^2 + (x - 1)^2 \epsilon(x) \end{aligned}$$

3.  $f(x) = \ln(1 + x)$   
 $DL_3(0) : f(x) = 0 + 1 \cdot x + -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + x^3 \epsilon(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} & \text{d'ou } f'(0) &= 1 \\ \text{car } f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} & \text{d'ou } f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} & \text{d'ou } f'''(0) &= 2 \end{aligned}$$

Comme  $3! = 1 * 2 * 3$  on obtient  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x)$  avec  $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} DL_n(0)?$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n\epsilon(x)$$

En effet, la somme des N premiers termes de la suite géométrique de premier terme q et de raison x est :  $q \frac{1-x^N}{1-x}$

pour  $q = 1$  :

$$\frac{1-x^N}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{N-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \frac{1}{1-x} - \frac{\overbrace{(1+x+x^2+\dots+x^n)}^{N-1=n}}{1-x} &= \frac{1}{1+x} - \frac{1-x^{n+1}}{1+x} \\ &= \frac{1-(1-x^{n+1})}{1-x} \\ &= \frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \underbrace{\left(\frac{x}{1-x}\right)}_{\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n\epsilon(x)$$

Remarque :  $(\frac{1}{1-x})^{(17)}(0) = 17!$

$$4. f(x) = \sin(x) DL_4(0)?$$

$$g(0) = \sin(0) = 0$$

$$g'(0) = \cos(0) = 1$$

$$g''(0) = -\sin(0) = 0$$

$$g'''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$g^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$$

$$\text{D'où } \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\epsilon(x)$$

**Remarque** comme  $\sin$  est impaire, seuls les coefficients impairs apparaissent dans la partie principal.

### 3 Formule de Taylor-Lagrange

Qui aide à spécifier  $\epsilon$

**Théorème**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  un intervalle et  $x_0 \in I$  et  $f \in C^n$  sur  $I$ .

Pour tout  $x$  de  $I$ , il existe  $c$  entre  $x$  et  $x_0$  tel que 
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

**Remarque**  $c$  dépend de  $x$  !

$$\frac{f^{(n)}(c(x))}{n!}(x - x_0)^n$$

**Remarque** pour  $n = 1$  on retrouve le théorème des accroissements finis.

— On retrouve Taylor-Young en posant

$$\epsilon(x) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(x_0))$$

Car  $f$  est  $C^n$ , le  $f^{(n)}$  est continue.

### 4 Opération usuelles sur les DL

**Théorème**  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervalle ouvert,  $x_0 \in I$ . Si  $f$  et  $g$  admettent un DL à l'ordre  $n$  en  $x_0$  alors :



- $f + g$  aussi dont la partie principale est la somme des parties principales des DL respective de  $f$  et  $g$ .  
i.e si  $f(x) = P(x) + x^n \epsilon_1(x)$  avec  $P$  polynôme de degré  $\leq n$  et  $\epsilon_1 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  et si  $g(x) = Q(x) + x^n \epsilon_2(x)$  avec  $Q$  polynôme de degrés  $\leq n$   
Alors  $(f + g)(x) = (P + Q)(x) + x^n \epsilon_3(x)$
- $f \cdot g$  aussi et sa partie principale est le produit des parties principales TRONQUE à l'ordre  $n$ .

**Exemple**  $DL_2(0)$  de  $e^x \cdot \sin(x)$

$$DL_2(0) \text{ de } e^x : 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \epsilon(x)$$

$$DL_2(0) \text{ de } \sin(x) = x + x^2 \epsilon(x)$$

Donc  $DL_2(0)$  de  $e^x \cdot \sin(x)$  est :  $(1 + x + \frac{x^2}{2}) \cdot (x) + x^2 \epsilon(x)$  À TRONQUER, c'est à dire :

$$e^x \cdot \sin(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + x^2 \epsilon(x)$$

**Théorème**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}, g : J \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(I) \subset J, x_0 \in I$

Si  $f$  admet un  $DL_n(x_0)$  et que  $g$  admet un  $DL_N(f(x_0))$  alors  $g \circ f$  admet un  $DL_n(x_0)$  et sa partie principale est la composé des parties principales tronque à l'ordre  $n$ .

i.e  $f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x)$  et  $g(x) = Q(x) + x^n \epsilon(x)$  alors :

$g \circ f(x) = R(x) + x^n \epsilon(x), R(x) = Q \circ P(x)$  TRONQUE

**Exercice**  $DL_3(0)$  de  $e^{\sin x}$  ?

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 \epsilon(x)$$

En effet,  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \epsilon(x)$ . De plus,  $\sin(0) = 0$  Donc on veut le DL de exp en 0 :

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + y^3 \epsilon(y)$$

Par composition,

$$e^{\sin x} = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6})^3 + x^3 \epsilon(x)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \overbrace{\frac{1}{2}(x^2)}^{\text{On a tronque}} + \overbrace{\frac{1}{6}x^3}^{\text{Ici aussi!}} + x^3 \epsilon(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + 0x^3 + x^3 \epsilon(x) \end{aligned}$$

## 5 Applications des DL

### 5.1 Calcul de limites

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{e^x - 1}{(1+x)^2 - 1} && \text{lim en 0?} \\
 &= \frac{(1+x+x\epsilon(x)) - 1}{x(x+2)} \\
 &= \frac{x(1+\epsilon(x))}{x(x+2)} && \text{avec } \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\
 &= \frac{1+\epsilon(x)}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} && \text{par opérations usuelles sur les limites}
 \end{aligned}$$

**Exemple**  $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x))}{x^2} = \frac{1}{2} - \underbrace{\epsilon(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} && \text{lim en 0} \\
 \sqrt{1+y} &= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + y^2\epsilon(y) \\
 \sqrt{1 + \cos x} &= \sqrt{2 + (\cos x - 1)} = \sqrt{2(1 + \frac{1}{2}(\cos x - 1))} \\
 &= \sqrt{2}(\sqrt{1 + \frac{\cos x - 1}{2}}) \\
 \frac{\cos x - 1}{2} &= \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)) = -\frac{x^2}{4} + x^2\epsilon(x) \\
 \text{D'où } \sqrt{1 + \frac{1}{2}(\cos x - 1)} &= 1 + \frac{1-x^2}{2 \cdot 4} + x^2\epsilon(x) \\
 &= 1 - \frac{x^2}{8} + x^2\epsilon(x)
 \end{aligned}$$

$$\text{car } (\sin x)^2 = x^2 + x^2\epsilon(x)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } h(x) &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}(1 - \frac{x^2}{8} + x^2\epsilon(x))}{x^2 + x^2\epsilon} \\
 &= \frac{x^2(\frac{\sqrt{2}}{8} + \epsilon(x))}{x^2(1 + \epsilon(x))} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{8} + \epsilon(x)}{1 + \epsilon(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}}{8}
 \end{aligned}$$

**Remarque**  $DL_N(x_0)$  de  $gof$ .

Il faut que :

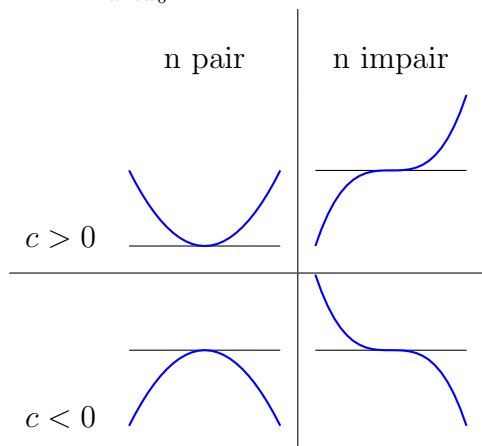
—  $gof(x)$  existe pour  $x \in ]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ .

—  $f$  admette un  $DL_n(x_0)$

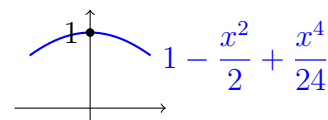
—  $g$  admette un  $DL_n$  en  $f(x_0)$

## 5.2 signe local d'une fonction

**Proposition**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ , si  $f(x) = c(x - x_0)^n + (x - x_0)^2 \epsilon(x)$  avec  $c \neq 0, \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$

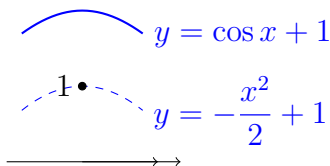


**Exemple**  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \epsilon(x)$  avec  $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$



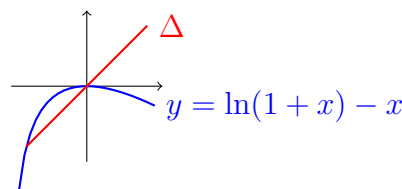
$$\begin{aligned} \text{En particulier : } (\cos x - 1) &= -\frac{x^2}{2} + x^2 \epsilon(x) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2}x^2 + x^2 \epsilon(x)}_{x=2: \text{ pair}} \\ c &= -\frac{1}{2} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{De plus, } \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \underbrace{\frac{1}{24}}_{c>0} x^{\overbrace{4}^{\text{n pair}}} + x^4 \epsilon(x)$$



**Exemple**  $x \mapsto \ln(1+x)$

Sa tangente en 0 est la droite  $\Delta : y = x$ . De plus,  $\ln(1+x) = x + -\frac{x^2}{2} + x^2 \epsilon(x)$



$$\text{Donc } \ln(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$$

### 5.3 Position par rapport à une asymptote

**Exemple**  $f(x) = \frac{x^3}{1+x+2x^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{2x^2 \left( \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x} + 1 \right)} \\ &= \frac{x}{2} \left( \frac{1}{1 + \underbrace{\left( \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} \right)}_u} \right) \end{aligned}$$

$$u(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^2$$

avec  $y = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^3\epsilon(u)$$

$$= 1 - \left( \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} \right) + \left( \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} \right)^2 + \frac{1}{x^2}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

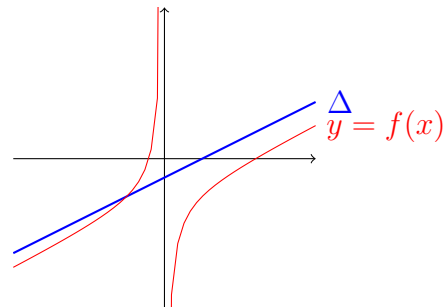
$$f(x) = \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(x) \right)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(x)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(x)$$

$$f(x) - \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) = \underbrace{-\frac{1}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(x)}_{\text{asymptote}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$$

$$\Delta = y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$



# VI

## Intégration

### 1 Introduction

**Motivation** : "Sommes continues" et Calcul d'aires.

**Exemple** Soit un coureur. Première course sur une machine.

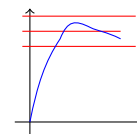
- $10km.h^{-1}$  pendant 20 minutes
- $12km.h^{-1}$  pendant 20 minutes
- $14km.h^{-1}$  pendant 20 minutes

Il aura donc parcouru :  $(10 * \frac{1}{3}) + (12 * \frac{1}{3}) + (14 * \frac{1}{3}) = 12km$

2ème course

La distance parcourue est la somme de la distance parcourue instantanément pour chaque instant.

"somme continue" :  $\int_0^1 v(t)dt \rightarrow$  Calcul de l'air sous la courbe



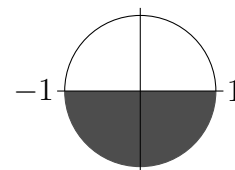
**2ème exemple** On veut voir le cercle comme le graphe d'une fonction. On considère donc (par exemple) la partie supérieure du cercle.

L'équation du cercle centré en 0 et de rayon 1 est :

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{Ou encore } y^2 = 1 - x^2$$

$$\text{Ou encore } y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$



On se restreint à  $y \geq 0$  :  $y = \sqrt{1 - x^2}$  L'Aire(DemiCercle) =  $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

## 1.1 Changement de variable

$$x = \cos t$$

$$\cos : [1, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

Cette fonction est bijective et continue.

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx}{dt} \cdot dt \\ &= (-\sin t)dt \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\pi}^0 \sqrt{1-\cos^2 t} \cdot (-\sin t) dt$$

$$\text{Or sur } [0, \pi], \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t$$

$$A = \int_{\pi}^0 -\sin^2 t dt = \int_0^{\pi} \sin^2 t dt$$

## 1.2 intégration par parties

**idée**  $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

donc :  $fg' = (f \cdot g)' - f'g$

Avec la linéarité de l'intégrale  $(\int (u+v)(t)dt = \int (u)(t)dt + \int (v)(t)dt)$

donc  $\int_a^b fg'(t)dt = \int_a^b (fg)'(t)dt - \int_a^b f'g(t)dt$

Ici,  $A = \int_0^{\pi} \sin t \cdot \sin t dt$

On pose  $f'(t) = \sin t$  et  $g$  telle que  $g'(t) = \sin(t)$

$$\int_0^{\pi} \sin t \sin t dt = \int_0^{\pi} [\sin t \cdot (-\cos t)] dt - \int_0^{\pi} [\cos t \cdot (-\cos t) dt]$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \underbrace{[-\sin t \cos t]_0^{\pi}}_0 + \int_0^{\pi} \cos^2 t dt (1)$$

## 1.3

On sait que :  $\forall t \in \mathbb{R}, \sin^2 t + \cos^2 t = 1$

En particulier,

$$\int_0^\pi (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \int_0^\pi 1 dt$$

$$\int_0^\pi \cos^2 t dt + \int_0^\pi \sin^2 t dt = \pi$$

$$\int_0^\pi \cos^2 t dt + \int_0^\pi \sin^2 t dt = \pi$$

$$\text{D'après (1)} \quad \int_0^\pi \cos^2 t dt = \int_0^\pi \sin^2 t dt$$



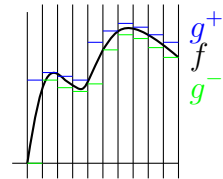
Donc 
$$2 \int_0^\pi \sin^2 t dt = \pi \Rightarrow A = \int_0^\pi \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}$$

## 2 Définition de l'intégrale

### 2.1 "Culture"

$$\overbrace{\int_a^b g^-(t) dt}^{\text{On sait calculer}} \leq \int_a^b f(t) dt \leq \overbrace{\int_a^b g^+(t) dt}^{\text{Ça aussi}}$$

**Définition**  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est étagée s'il existe  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$   
Si  $\forall i \in [0, n-1], g|_{]t_i, t_{i+1}[}$



**Définition 2** Si  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  étagée, on définit :

$$\int_a^b g(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

**Définition 3** Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable s'il existe 2 suites de fonctions  $(g_n^-)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  étagées telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -g_n^- \leq f \leq g_n^+ \text{ et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g_n^-(t) dt \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g_n^+(t) dt \end{array} \right.$$

existent et soient égales.

Dans ce cas, on note cette limite commune  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

Par convention, si  $a < b$ ,

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

**Théorème** Cette définition fonctionne, la démonstration est admise.

## 2.2 Retour à la vraie vie

**Théorème** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue ou monotone, alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$

**Proposition** L'intégrale possède les propriétés suivantes.

- (positivité) si  $f \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(t)dt \geq 0$
- (Linéarité)  $\begin{cases} \int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \\ \int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \left( \int_a^b f(t)dt \right) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$
- $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

## 3 Liens entre primitives, intégrales (et dérivées)

**Définition** Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continue.  $F$  est une primitive de  $f$  si  $F$  dérivable sur  $]a, b[$  et  $F' = f$ .

**Remarque** Alors  $F$  est  $C^1(]a, b[)$

**Théorème**

1. Soit  $F$  et  $G$  des primitives de  $f$  sur  $]a, b[$ . Alors  $F - G = \text{constante}$  sur  $]a, b[$
2. Pour toute primitive  $F$  de  $f$  sur  $]a, b[$ ,  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

**Démonstration** Par définition des primitives,  $F$  et  $G$  sont  $C^1$  et  $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$   
Donc il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que  $F - G = c$

$$\text{Attention : Soit } f : ]-1, 0[ \cup ]2, 3[ \text{ et } f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in ]-1, 0[ \\ 3 \text{ si } x \in ]2, 3[ \end{cases}$$

**Remarque équivalente au théorème** Si  $u : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  alors  $\int_a^b u'(t)dt = u(b) - u(a)$

### 3ème énoncé équivalent

Si  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continue, alors la fonction  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \text{ pour } c \in [a, b]$$

est LA primitive de  $f$  qui s'annule en  $c$ .

Ce théorème s'appelle le "Théorème fondamental de calcul intégral"



**Démonstration**

—  $F(x) = 0$

— On veut montrer que  $F' = f$ . Fixons  $x_0 \in ]a, b[$ .

On veut montrer que  $\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$

a

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_c^x f(t) dt - \int_x^{x_0} f(t) dt \\ &= \int_c^x f(t) dt + \int_{x_0}^c f(t) dt \\ &= \int_{x_0}^x f(t) dt \end{aligned} \quad \text{Par la relation de Chasles}$$

$$\text{D'où } \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt$$

b

$$\begin{aligned} f(x_0) \in \mathbb{R} \text{ donc } \int_{x_0}^x f(x_0) dt &= f(x_0) \int_{x_0}^x dt \\ &= f(x_0) \cdot [t]_{x_0}^x = f(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0) dt$$

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0) dt \\ &= \frac{1}{x - x_0} \left( \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \left( \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right) \end{aligned}$$

Soit  $\epsilon > 0$ , comme  $f$  est continue en  $x_0$ , i.e  $\exists \delta > 0$  tel que  $\forall x \in ]a, b[, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$

Pour tout  $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  et pour tout  $t$  compris entre  $x$  et  $x_0$ ,  $|t - x_0| \leq |x - x_0| < \delta$  pour ce choix de  $x$ .

Pour tout  $t$  entre  $x$  et  $x_0$ ,  $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon$

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \right| \cdot \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \left| \frac{1}{x - x_0} \right| \cdot \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x - x_0} \left| \int_{x_0}^x \epsilon dt \right| = \frac{1}{x - x_0} \cdot \epsilon \cdot |x - x_0| \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

**Exemple**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue

$$\underbrace{\left( \int_{e^x}^{\sin x} \frac{1}{1+t^2} dt \right)'}_{H(x)} = f(x)$$

Soit  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} H(x) &= - \int_c^{e^x} \frac{dt}{1+t^2} + \int_c^{\sin x} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= -F(e^x) + F(\sin x) \text{ ou } F(x) = \int_c^x \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} H'(x) &= -(F(e^x))' + (F(\sin x))' \\ &= -(e^x \cdot \frac{1}{1+(e^x)^2} + \cos x \cdot \frac{1}{1+(\sin x)^2}) \\ H'(x) &= \frac{-e^x}{1+e^{2x}} + \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \end{aligned}$$

## 4 Intégration par parties

**Rappel**  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ ,  $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

Donc  $\int_a^b (fg)'(t) dt = \int_a^b (f'g)(t) dt + \int_a^b (fg')(t) dt$

Ou encore  $\underbrace{[fg(t)]_a^b}_{\text{Notation pour } fg(b) - fg(a)} = \int_a^b (f'g)(t) dt + \int_a^b (fg')(t) dt$

D'où  $\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt$

**Exemple**  $\int_a^b \ln(t) dt = ?$

$$\ln(t) = 1 * \ln(t)$$

Par intégration par partie,  $\int_a^b \ln(t) dt = [t \cdot \ln t]_a^b - \int_a^b \frac{t}{t} dt = (b \ln b - a \ln a) - \int_a^b dt$

Donc  $\int_a^b \ln(t) dt = (b \ln b - a \ln a) - (b - a)$

$$= (b \ln b - b) - (a \ln a - a)$$

**Exemple 2**

$$\begin{aligned}\int_a^b \arctan(t) dt &= [t \arctan t]_a^b - \int_a^b \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= (b \cdot \arctan b - a \cdot \arctan a) - \left( \int_a^b \frac{t}{1+t^2} dt \right)\end{aligned}$$

De plus,  $\frac{t}{1+t^2} = \frac{f'(t)}{f(t)}$  avec  $f(t) = 1+t^2 \geq 0$

$$\begin{aligned}\text{D'ou } \int_a^b \frac{1}{1+t^2} dt &= \frac{1}{2} [\ln |f(x)|]_a^b \\ &= \frac{1}{2} (\ln(1+b^2) - \ln(1+a^2))\end{aligned}$$

Donc une primitive de  $\arctan(x)$  est :  $F(x) = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

**Exemple 3**  $\int_a^b t e^t dt = (b-1)e^b - (a-1)e^a$  avec  $f'(t) = e^t$  et  $g(t) = t$

En effet,

$$\begin{aligned}\int_a^b (f'g) dt &= [fg(t)]_a^b - \int_a^b (fg')(t) dt \\ \int_a^b (e^t \cdot t dt) &= be^b - ae^a - \int_a^b e^t dt \\ &= be^b - ae^a - e^b + e^a \\ &= e^b(b-1) - e^a(a-1)\end{aligned}$$

## 5 Changement de variable

**Rappels**  $(Fou)' = u'F'ou$  . Donc  $Fou$  est une primitive de  $u' \cdot fou$   
Cf exemple 2 (précédent) :

$$u(x) = 1+x^2$$

$$F(x) = \ln x$$

$$\text{et } f(x) = \frac{1}{x}$$

**Cas fréquent** :  $\int^x u'(t) \cdot u(t) dt = \frac{1}{2} u^x$

$$\begin{aligned}\int^x \sin t \cos t dt &= \frac{\sin^2 x}{2} \\ \int^x \frac{\ln t}{t} dt &= \frac{\ln^2 x}{2} \\ \int^x \frac{\arctan t}{1+t^2} dt &= \frac{\arctan^2 x}{2} \\ \int e^{2t} dt &= \frac{e^{2x}}{2}\end{aligned}$$

**Théorème** Soit  $u : I \rightarrow J$  bijective et dérivable. Si  $G$  est une primitive de  $f \circ u \cdot u'$  sur  $I$ , alors  $G \circ u^{-1}$  est une primitive de  $f$  sur  $J$ .

**Exemple** calcul de  $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

Soit  $f : \begin{cases} ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x}} \end{cases}$  et  $u : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \rightarrow ]-1, +\infty[ \\ t \mapsto t^2 - 1 \end{cases}$  est bijective, et dérivable.

On pose  $x = t^2 - 1$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x}} \\ f \circ u(x) &= \frac{t^2 - 1}{\sqrt{t^2}} \\ &= \frac{t^2 - 1}{t} \quad \text{Car } t > 0\end{aligned}$$

$$u'(t) = 2t$$

$$\begin{aligned}(f \circ u \cdot u')(t) &= \frac{t^2 - 1}{t} \cdot 2t \\ &= 2(t^2 - 1)\end{aligned}$$

$G$  est une primitive de  $2(t^2 - 1)$

$$\begin{aligned}G(x) &= \int^x 2(t^2 - 1) dt \\ &= \left[ \frac{2}{3} t^3 - 2t \right]^x \\ &= \frac{2}{3} x^3 - 2x\end{aligned}$$

Par le théorème de changement de variable,  $Gou^{-1}$  est une primitive de  $f$  avec  $u^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ t \mapsto \sqrt{t+1} \end{array} \right.$

D'où  $\frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1}$  est une primitive de  $f$  sur  $] -1, +\infty[$

### Exemple

$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$  air du demi cercle superieur du cercle trigo qui vaut  $\frac{\pi}{2}$

Prenons :  $x = \sin t$  et  $\sin[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  bijective et  $C^\infty$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \cdot dt \text{ Changement de borne et de variable où l'on dérive} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)}{2} dt \\ &= \left[ \frac{t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\left[ \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

**Remarque** Primitive de  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

Comme  $G : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$  est une primitive de  $fou \cdot u'$ , par le théorème,  $Gou^{-1}$  est une primitive de  $f$ .

Une primitive de  $f$  serait donc :

$$F(x) \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{\sin(2 \arcsin x)}{4}$$

$$\text{De plus} \quad \sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\text{Donc} \quad \sin(2 \arcsin x) = 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x)$$

$$\begin{aligned} &2x\sqrt{1-x^2} \\ F(x) &= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

**Théorème**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervalle;  $x_0 \in I$ . On suppose que  $f$  admet un DL à l'ordre  $n$  en

$$x_0 = f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \begin{cases} P \text{ polynome de degre } \leq n \\ \epsilon \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{cases}$$

Alors une primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  admet un DL à l'ordre  $n+1$  en  $x_0$  :

$$F(x) = F(x_0) + Q(x) + x^{n+1} \epsilon(x)$$

avec  $Q$  la primitive de  $P$  qui s'annule en  $x_0$

**Exemple**  $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$f$  admet un DL en  $x_0 = 0$  à l'ordre 3 :  $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3 \epsilon(x)$

Donc  $F(x) = \ln(1+x)$  primitive de  $f$  sur  $] -1; +\infty[$

$F$  admet un DL en 0 à l'ordre 4 :

$$F(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + x^4 \epsilon(x)$$

**Exemple 2**  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$DL_4(0) = f(x) = 1 - x^2 + x^4 + x^4 \epsilon(x)$$

$F(x) = \arctan x$  primitive de  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  admet un  $DL_5(0)$ .

$$F(x) = 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} + x^5 \epsilon(x)$$

## 6 Fractions rationnelles

$\left(\frac{P}{Q}\right)$  avec  $P, Q$  des polynômes.

On décompose  $Q$  en produit de polynômes de degré 1 et de degré 2 SANS RACINE

$$Q(x) = A_1^{\alpha_1} \cdot A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n} \cdot B_1^{\beta_1} \cdot B_2^{\beta_2} \dots B_n^{\beta_n}.$$

$$\text{où } \begin{cases} A_i(x) = a_i + b_i \\ B_i(x) = c_i x^2 + d_i x + e_i \end{cases}$$

**Exemple**  $Q(x) = x^3 - 1$

$$Q(x) = (x-1)(x^2+x+1)$$

**Rappel**

$$\begin{aligned}
x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + bx + c) \\
&= x^3 + bx^2 + cx - x^2 - bx - c \\
&= x^3 + (b - 1)x^2 + (c - b)x - c \\
b = c &= 1
\end{aligned}$$

$$Q(x) = A_1(x) \cdot B_1(x)$$

$$A_1(x) = x - 1 \text{ et } B_1(x) = x^2 + x + 1$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= T(x) + \frac{C_{1,1}}{A_1} + \frac{C_{1,2}}{A_1^2} + \dots + \frac{C_{1,\alpha_i}}{A_1^{\alpha_i}} \\
&\quad + \frac{C_{2,1}}{A_2} + \frac{C_{2,2}}{A_2^2} + \dots + \frac{C_{2,\alpha_i}}{A_2^{\alpha_i}} \\
&\quad + \frac{d_{1,1}x + e_{1,1}}{B_1(x)} + \frac{d_{1,2}x + e_{1,2}}{B_1(x)^2} + \dots + \frac{d_{1,\alpha_i}x + e_{1,\alpha_i}}{B_1(x)^{\alpha_i}} \\
&\quad + \frac{d_{2,1}x + e_{2,1}}{B_2(x)} + \frac{d_{2,2}x + e_{2,2}}{B_2(x)^2} + \dots + \frac{d_{2,\alpha_i}x + e_{2,\alpha_i}}{B_2(x)^{\alpha_i}} \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

où  $\alpha_i$  est la puissance maximal qu'avait  $A_j$  dans la décomposition de  $Q(x)$

Avec  $T(x)$  de même ordre que  $Q(x)$  si la différence entre  $P(x)$  et  $Q(x)$  est supérieur à 0 (sinon il n'existe pas).

**Exemple** 
$$\frac{1}{(x+2)^3(x+7)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} + \frac{D}{x+7}$$

avec  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

**Retour sur l'exemple**

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \\
&= T(x) + \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1} \quad \text{avec } a, b, c \text{ des réels} \\
&= \frac{a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}
\end{aligned}$$

Trouver  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que

$$ax^2 + ax + a + bx^2 - bx + cx - c = 1$$

$$(a + b)x^2 + (a - b + c)x + (a - c) = 1$$

$$a + b = 0, a - b + c = 0, a - c = 0$$

$$\begin{cases} a = -b \\ 2a + c = 0 \\ a = 1 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} \right)$$

Une primitive de  $\frac{1}{x - 1}$  est  $x \mapsto \ln(|x - 1|)$  Que dire pour  $\frac{x + 2}{x^2 + x + 1}$  ?

$$\frac{x + 2}{x^2 + x + 1} = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}}_{\text{Primitive de } \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1)} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{3}{x^2 + x + 1}}_?$$

**Rappel** La primitive de  $\frac{1}{1 + x^2}$  est  $\arctan(x)$ .

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1} &= \frac{3}{2} \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{\frac{3}{4} (\frac{4}{3} (x + \frac{1}{2})^2 + 1)} \\ &= 2 \frac{1}{\underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}} (x + \frac{1}{2})}_{X^2} + 1} (*) \end{aligned}$$

$$X = \frac{2}{\sqrt{3}} (x + \frac{1}{2}) \rightsquigarrow 2 \frac{1}{1 + X^2}$$

Un primitive de (\*) est :  $2 \arctan(\frac{2}{\sqrt{3}} (x + \frac{1}{2})) \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sqrt{3} \arctan(\frac{2}{\sqrt{3}} (x + \frac{1}{2}))^2$$



**Exemple**

$$F(x) = \frac{3x^3 + 6x^2}{x^2 + 2x - 3} = \underbrace{T(x)}_{\text{de degré 1}} + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

$$3x^3 + 6x^2 = T(x)(x^2 + 2x - 3) + R(x) \quad R(x) \text{ est de degré plus petit que celui de } Q(x)$$

$$= (3x + c)(x^2 + 2x - 3) + R(x)$$

$$(3x + c)(x^2 + 2x - 3) = 3x^3 + 6x^2 - 9x + cx^2 + 2cx - 3c$$

$$= 3x^3 + (6 + c)x^2 + (-9 + 2c)x - 3c$$

$$= 3x^3 + 6x^2 + (-9x)$$

$c = 0$  pour retrouver  $P(x)$

$$\text{Donc } 3x^3 + 6x^2 = \underbrace{3x}_{T(x)}(x^2 + 2x - 3) + \underbrace{9x}_{R(x)}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{3x^3 + 6x^2}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3x(x^2 + 2x - 3) + 9x}{x^2 + 2x - 3} = 3x + \frac{9x}{x^2 + 2x - 3} \\ &= 3x + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} \end{aligned}$$

**Exemple**

$$\frac{x^4 + 1}{x(x^2 - 1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{x+1} + \frac{e}{(x+1)^2}$$

$$x(x^2 - 1)^2 = x(x-1)^2(x+1)^2$$

**7 Fractions rationnelles en cos et en sin****7.1 Polynômes**

On cherche une primitive de  $\cos^n x \cdot \sin^m x$ .

— Supposons que  $n$  ou  $m$  soit impair, par exemple :

$$m = 2p + 1$$

$$\cos^n x \cdot \sin^{2p+1} x = \cos^n x \cdot (\sin^2 x)^p \cdot \sin x$$

$$= \cos^n x \cdot (1 - \cos^2 x)^p \cdot \sin x$$

$$\int f(x) dx = \int \cos^n x \cdot \sin^m x \cdot dx = - \int \cos^n x (1 - \cos^2 x)^p (-\sin x) dx$$

$$= - \int X^n (1 - X^2)^p dX \quad \text{avec } X = \cos x$$

Donc si  $F$  est une primitive de  $t^n(1 - t^2)^p$  alors  $G(x) = -F(\cos x)$  est une primitive de  $f$

— Supposons que  $m$  et  $n$  soient pairs. On peut par exemple remplacer  $\sin^m x = (\sin^2 x)^p = (1 - \cos^2 x)^p$

Puis utiliser  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$  à répétition.

### Exemple

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x) dx$$

$$= \int \cos^2 x dx - \int \cos^4 x dx$$

$$\cos^4(x) = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}$$

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \left( \int dx + 2 \int \cos(2x) dx + \int \cos^2(2x) dx \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left( t + \sin(2t) + \int \left( \frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) dx \right)$$

$$\cos^2(2x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2}$$

$$\int \cos^2(2x) dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos(4x)}{2} dx$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin(4t)}{8}$$

$$\text{D'où } \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x dx = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{1}{4} \left( t + \sin(2t) + \frac{t}{2} + \frac{\sin(4t)}{8} \right)$$

$$= \frac{7t}{8} + \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{\sin(4t)}{32}$$

## 7.2 Fractions rationnelles

$$\frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} = R(\cos x, \sin x)$$

**Regles de Bioche** : Si  $R(\cos x, \sin x)dx$  est invariant par :

- $x \mapsto -x$  poser  $x = \arccos(t)$
- $x \mapsto \pi - x$  poser  $x = \arcsin(t)$
- $x \mapsto \pi + x$  poser  $x = \arctan(t)$

**Exemple**  $\int \frac{1}{\sin x} dx$

$x \mapsto \sin x dx$

- $\sin(-x)d(-x) = (-\sin x)(-dx) = \sin x dx$  OK
- $\sin(\pi - x)d(\pi - x) = (\sin x)(-dx) = -\sin x dx$
- $\sin(\pi + x)d(\pi + x) = (-\sin x)(dx) = -\sin x dx$

Sinon, on peut poser  $t = \tan(\frac{x}{2})$

En particulier,

- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

En effet,

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} = \frac{\sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}$$

$$\text{et } \sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\text{d'où } 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x)$$

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1 - \cos^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} - 1$$

$$\text{Donc } \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} \text{ soit } \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

$$\text{Et on obtient } \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} = \sin x$$

**Exercice** Montrer  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx = -\frac{1}{4 \sin^4 x} + \frac{1}{2 \sin^2 x}$

# VII

## Equations différentielles

Etude d'équations dont la variable est une fonction permettant de décrire des fonctions.

**Exemple**  $f(x) = e^x$  est la seule fonction  $C^1$  telle que

$$\begin{cases} f' = f \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

**Exemple** Variation de population  $y(t)$  en fonction du temps.

**Modèle 1**  $y' = ky, k \in \mathbb{R}$  Ce modèle est trop simpliste.

**Modèle 2**  $y' = k(t)y$ ,  $k$  une fonction continue. La variation n'est pas nécessairement linéaire en la population.

**Modèle 3**  $y' = k(t)g(y)$  avec  $k, g$  des fonctions continues.  $\frac{dy}{dt} = k(t)g(y)$  Pour  $g$  différent de 0,

$$\frac{dy}{g(y)} = k(t)dt$$

Par "primitivisation" :

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int k(t)dt$$

**Exemple**

$$g : y \mapsto y^2$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$k : t \mapsto 6t$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(E) \quad y' = 6ty^2$$

ou encore

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 6t dt$$

$$\text{Soit } -\frac{1}{y} = 3t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{On obtient } y(t) &= \frac{1}{-3t^2 - c} \\ &= \frac{1}{d - 3t^2}, \quad d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

C'est à dire la fonction  $y(t) = \frac{1}{d - 3t^2}$  avec  $d \in \mathbb{R}$  sont des solutions de (E), sur I (à préciser)

**2ème étape** Utiliser les conditions initiales pour trouver d.

Conditions initiales :  $y(0) = 2$  (on avait deux individus à l'instant  $t = 0$ )

En particulier,  $y(0) = \frac{1}{d} = 2$

soit  $d = \frac{1}{2}$

D'où  $y(t) = \frac{2}{1 - 6t^2}$  est une solution de (E) qui vérifie  $y(0) = 2$

Problème : quel est l'intervalle I ?

La fonction y est définie sur :  $] -\infty; -\frac{\sqrt{6}}{6}[\cup ] -\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}[\cup ] \frac{\sqrt{6}}{6}; +\infty[$

Ici,  $y : t \mapsto \frac{2}{1 - 6t^2}$  est solution de (E) sur  $] -\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}[$  et vérifie  $y(0) = 2$

**Remarque** On cherchait une fonction dérivable (pour "y'" soit défini). Si on trouve y, en fait y est de classe  $C^1$  (car  $k(t)g(t)$  est continue)

# 1 Équations différentielles linéaires, d'ordre 1

$$(E) : \overbrace{y'}^{\text{ordre 1}} = a(t) \underbrace{y}_{\text{"linéaire"}} + \underbrace{b(t)}_{\text{Non homogène}} \quad \text{avec } a, b : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } I \text{ une intervalle ouvert et } a, b \text{ des}$$

fonctions continue.

**Résoudre (E)** c'est trouver toutes les fonctions  $C^1$  qui vérifient (E) pour tout  $t \in I$ . Ici (par (E)), ceci est faisable.

## Résolution

### 1.1 Équation homogène associée (on oublie "b(t)")

$$(E_0)y' = a(t)y$$

Est une équations à variables séparables. Supposons que y ne s'annule pas.

$$\text{On réécrit : } \int \frac{dy}{y} = \int a(t)dt$$

$$\text{Soit } \ln(|y|) = \int_{t_0}^t a(s)ds + c \text{ pour } c \in \mathbb{R}; t_0 \in I$$

Via l'exponentielle, on obtient :

$$|y(t)| = \exp(c + \int_{t_0}^t a(s)ds)$$

ou encore :

$$|y(t)| = d \cdot e^{A(t)} \quad \text{avec primitive de } a \text{ choisie}$$

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds \quad d \in \mathbb{R}^{+*}$$

**Remarque** Si  $y(t) = 0$ , y solution de (E) alors  $y'(t) = 0$

**Remarque 2** Il y a trois cas mutuellement exclusif :

$$— y(t) = 0 \text{ pour tout } t \in I; y(t) = 0 \cdot e^{A(t)}$$

$$— y(t) > 0 \text{ pour tout } t \in I; y(t) = d \cdot e^{A(t)} \text{ avec } d > 0$$

$$— y(t) < 0 \text{ pour tout } t \in I; y(t) = d \cdot e^{A(t)} \text{ avec } d < 0$$

$y(t)$  ne peut donc pas s'annuler sur I, car sinon il y(t) serait une constante pour tout  $t \in I$ .

Les solutions de  $(E_0)$  sont les fonctions  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $y(t) = de^{A(t)}$  avec  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$

**Remarque** y est bien  $C^1$

## 1.2 Et le b ? : équations non homogène

**Théorème** Soit  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Toutes les solutions de l'équation (E) sur I sont les fonctions  $C^1$

$$y(t) = e^{A(t)} \left( C + \int_{\alpha}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right)$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} C \in \mathbb{R} \\ \alpha \in I \\ A(t) \text{ primitive de } a(t) \end{array} \right.$$

### Démonstration

- y est de classe  $C^1$  sur I
- reste à voir si y satisfait (E) ?

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^{A(t)'} \left( C + \int_{\alpha}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right) + e^{A(t)} e^{-A(t)} b(t) \\ &= a(t) e^{A(t)} \left( C + \int_{\alpha}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right) + b(t) \\ &= a(t) y(t) + b(t) \end{aligned}$$

Reste à voir si toutes les solutions sont de la forme ci dessus.

On pose  $z(t) = y(t) e^{-A(t)}$

$$\begin{aligned} z'(t) &= (y \cdot e^{-A(t)})' = y' e^{-A(t)} + y(-a(t)) e^{-A(t)} \\ &= a(t) y e^{-A(t)} + b(t) e^{-A(t)} - a(t) y e^{-A(t)} \\ &= b(t) e^{-A(t)} \end{aligned}$$

Donc  $z = \int b(s) e^{-A(s)} ds$ , c'est à dire il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  tel que

$$z(t) = \int_{\alpha}^t b(s) e^{-A(s)} ds + C$$

. D'où

$$y(t) = z(t) e^{A(t)} = e^{A(t)} \left( C + \int_{\alpha}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right)$$

**Théorème** Soit  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue avec I un intervalle ouvert

Il existe une unique solution de  $y' = a(t)y + b(t)$  telle que pour  $t_0$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y(t_0) = y_0$

**Démonstration** C'est la solution avec  $C_0$  qui vérifie :

$$y(t_0) = y_0$$

$$e^{A(t_0)}(C_0 + \int_{\alpha}^t e^{-A(s)} b(s) ds) = y_0$$

$$\text{c'est à dire } C_0 = y_0 e^{-A(t_0)} - \int_{\alpha}^t e^{-A(s)} b(s) ds$$

Le tout étant des constantes,  $C_0$  est une constante unique.

**Remarque** Si on avait choisie  $\alpha = t_0$ , alors  $C_0 = y_0 e^{-A(t_0)}$  et la solution de (E) qui vérifie  $y(t_0) = y_0$  est :

$$y(t) = e^{A(t)}(y_0 e^{-A(t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds)$$

**Remarque** le système  $\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$  est nommé "Problème de Cauchy".

La théorème ci dessus est un cas particulière du théorème de Cauchy Lipschitz.

### 1.3 b' et le b ? Variation de la constante

**Rappel** Solution de  $y' = a(t)y$  est  $C \exp(A(t))$  avec  $A = \int a(s) ds$  et  $C \in \mathbb{R}$

On cherche une solution de  $y' = a(t)y + b(t)$ . On fait "varier" la constante. C'est à dire on considère  $C(t)e^{A(t)} = y(t)$

Alors si  $y$  est bien solution de (E),

$$y' = a(t)y + b(t)$$

$$C'(t)e^{A(t)} + C(t)(a(t) \cdot e^{A(t)}) = a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t)$$

$$\text{On obtient } C'(t)e^{A(t)} = b(t)$$

$$\text{Soit } C'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

$$\text{Donc } C(t) = \int_{\alpha}^t b(s)e^{-A(s)} ds + D \quad D \in \mathbb{R}$$

### 1.4 Équations non-résolues

$$u(t)y' = v(t)y + w(t) \quad (F)$$



Avec  $u, v, w : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues, ( $I$  un intervalle ouvert).

On travaille sur les intervalles où  $u$  ne s'annule pas.

Sur  $J \subset I$  un intervalle ouvert où  $u$  ne s'annule pas, on réécrit (F) comme  $y' = \underbrace{\frac{v(t)}{u(t)}}_{a(t)} y + \underbrace{\frac{w(t)}{u(t)}}_{b(t)}$

On regarde si on peut "raccorder" les solutions de manière  $C^1$

**Remarque** On perd l'unicité des solutions (même en imposant des conditions initiales)

**Exemple**

$$(\sin t)y' - (\cos t)y = e^t \cdot \sin^2 t \quad (E)$$

(E) n'est pas résolue !

On se restreint aux intervalles où  $\sin t \neq 0$ . Par exemple  $\underbrace{]-\pi, 0[}_{J^-}$  et  $\underbrace{]0, \pi[}_{J^+}$

Sur  $J^-$  ou  $J^+$ , (E) s'écrit

$$y' = \frac{\cos t}{\sin t} y + e^t \sin t \quad (F)$$

Les solutions de l'équation différentielle homogène associée

$$y' = \frac{\cos t}{\sin t} y \quad (E_0)$$

Les solutions sont

$$y(t) = C \exp\left(\int_{\alpha}^t \underbrace{\frac{\cos s}{\sin s}}_{\frac{\sin' s}{\sin s}} ds\right) \quad \text{sur } J^+ (\alpha \in J^+)$$

$$y(t) = C \exp\left(\int_{\alpha}^t \frac{\sin' s}{\sin s} ds\right)$$

$$y(t) = C \exp([\ln(|\sin t|)]_{\alpha}^t)$$

$$y(t) = C \exp([\ln(|\sin t|)]_{\frac{\pi}{2}}^t) \quad \text{On choisit } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$y(t) = C \exp(\ln(|\sin t|))$$

$$\text{Soit} \quad = C |\sin t| \quad C \in \mathbb{R}$$

$$= C \cdot \sin t \quad \text{sur } J^+$$

Sur  $J^-$ , on choisit  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  et on obtient

$$y(t) = C \cdot |\sin t|, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$= D \cdot \sin t, \quad D \in \mathbb{R}$$

Résolution de l'équation non homogène.

Sur  $J^+$

On cherche juste

$$\begin{aligned}
 & \int e^{-A(s)} b(s) ds \\
 &= \int \frac{1}{e^{\ln(\sin s)}} \cdot e^s \sin s ds \\
 &= \int \frac{1}{\sin s} \cdot e^s \cdot \frac{\sin^2 s}{\sin s} ds \\
 &= \int e^s ds \\
 &= e^t + C
 \end{aligned}$$

D'où la solution particulière étant :

$$\begin{aligned}
 y &= e^{A(t)} \int e^{-A(s)} b(s) ds \\
 &= e^{A(t)} \cdot (e^t + C) \\
 &= \sin t (e^t + C)
 \end{aligned}$$

D'où la solution générale de (F) sur  $J^+$  est :

$$y(t) = \sin t (C + e^t), C \in \mathbb{R}$$

De même, sur  $J^-$  la solution générale de (F) est :  $y(t) = \sin t (D + e^t), D \in \mathbb{R}$

Existe-t-il des fonctions continues vérifiant (F) sur  $I = ]-\pi, \pi[$

si une telle fonction  $f$  existe alors  $f$  est en particulier solution sur  $J^-$  et  $J^+$  donc

$$\begin{cases} \sin t (C + e^t) & \text{si } t \in J^- \\ \sin t (D + e^t) & \text{si } t \in J^+ \end{cases}$$

On veut prolonger en 0 :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t) = 0 = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} f(t)$$

De plus

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= \sin t (C + e^t) + \sin t (e^t) \text{ Sur } J^- \\
 &= \cos t (C + e^t) + \sin t \cdot e^t
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} f'(t) = C + 1 = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f'(t)$$

Par le théorème de prolongement  $C^1$ ,  $f$  est  $C^1$  si et seulement si  $C = D$

Donc les solutions de (E) sur  $I = ]-\pi, \pi[$  sont les fonctions

$$f(t) = \sin t(C + e^t), C \in \mathbb{R}$$

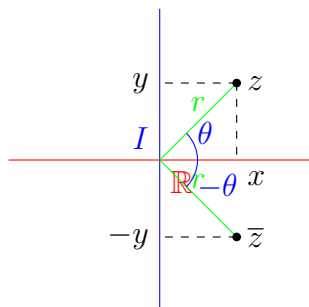
**Remarque** Il y a une infinité de solutions de (E) sur  $] -\pi, \pi[$  tel que  $y(0) = 0$ . Cependant, aucune ne satisfait  $y(0) = 3$

Finalement, si  $t_0 \in J^-$  ou  $J^+$  et si  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Il y a une unique solution qui satisfait  $y(t_0) = y_0$

# VIII

## Les nombres complexes

### 1 Définitions, représentations



On note  $i$  un nombre tel que  $i^2 = -1$

|                      | Euclidien   | Polaire   |
|----------------------|---|---|
| $z \in \mathbb{C}$   | $x + iy, x, y \in \mathbb{R}$   | $re^{i\theta}$                                    |
| $Re(z)$              | $x$   | $r \cos \theta : r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$ |
| $Im(z)$              | $y$   | $r \sin \theta$                                   |
| $ z $                | $\sqrt{x^2 + y^2}$  | $r$   |
| $arg(z)$             | $\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) = \arcsin(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$ | $\theta$  |
| $\bar{z}$ : conjugué | $x - iy$  | $r \cdot e^{-i\theta}$                            |
| nombre réels         | $x \in \mathbb{R}$  | $r$   |
| imaginaire purs      | $iy, y \in \mathbb{R}$  | $re^{i(\frac{\pi}{2} + k\pi)}, k \in \mathbb{Z}$  |

**Propriétés**

$$z = x + iy = re^{i\theta}, z' = x' + iy' = r'e^{i\theta'}$$

$$\text{--- } z = z'$$

$$\text{--- } x = x' \text{ et } y = y'$$

$$\text{--- } r = r' \text{ et } \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } z = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ et } y = 0 \\ r = 0 \end{cases}$$

addition

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

multiplication

$$z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

$$= rr'e^{i\theta \cdot \theta'}$$

multiplication par  $a \in \mathbb{R}$ 

$$az = (ax) + i(ay)$$

$$= (|a|r)e^{i\theta} \quad \text{si } a > 0$$

$$= (|a|r)e^{i(\theta+\pi)} \quad \text{si } a < 0$$

conjugués et opération

$$\overline{(z + z')} = \overline{(z)} + \overline{(z')}, \overline{(-z)} = -\overline{(z)}$$

$$\overline{(z \cdot z')} = \overline{(z)} \cdot \overline{(z')}$$

$$z + \overline{(z)} = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \overline{(z)} = 2i\operatorname{Im}(z)$$

$$z\overline{(z)} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2$$

**Proposition**  $z$  est réel si et seulement si  $s = \overline{(z)}$   $z$  est imaginaire pur si et seulement si  $z = -\overline{(z)}$

**Remarque**

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - iy) = \frac{1}{|z|^2}\overline{(z)}$$

**2 Similitudes du plan**

Transformation du plan qui multiplie toutes les longueurs par une même constante.

Prenons  $cste = 1$  : La translations, la rotation et la symétries conviennent (ainsi que leurs composées).

Pour  $cste \neq 1$  : l'homothétie de centre I et de rapport  $\lambda$

centre  $(0, 0) = I, \lambda = 2$

$A' = \text{image de } A$

$B' = \text{image de } B$

$$I\vec{A}' = 2I\vec{A}$$

$$I\vec{B}' = 2I\vec{B}$$

centre  $(0, 0) = I, \lambda = -\frac{1}{2}$

$$I\vec{A}'' = -\frac{1}{2}I\vec{A}$$

$$I\vec{B}'' = -\frac{1}{2}I\vec{B}$$

Les distances sont multipliées par  $|\lambda|$

**Définition** On appelle similitude directe une similitude qui préserve l'orientation. (c'est à dire on peut passer d'une triangle à son image en gardant le triangle dans le plan).

**Theoreme** Une transformation T du plan est une similitude directe si et seulement si il existe  $(a, b) \in \mathbb{C}, a \neq 0$  tels que

$$T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto az + b$$

C'est à dire  $\forall z \in \mathbb{C}, T(z) = az + b$

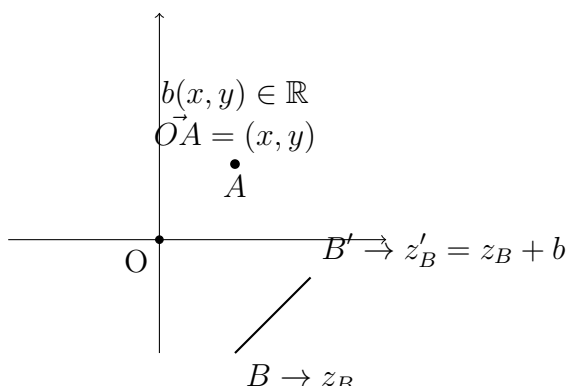
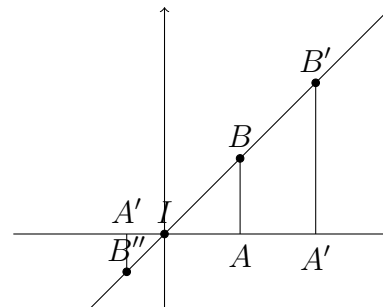
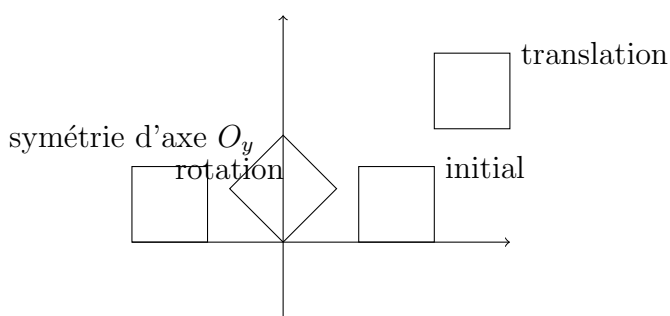
**Remarque** Similitude directe

$$T(z) = az + b, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$$

si  $a = 1, T(z) = z + b$ . On a donc une translation de "vecteur" b

$b = (x + iy)$ , translation de vecteur (x, y).

Si  $b = 0, T(z) = az, a \in \mathbb{C}^*$



C'est la composée d'une rotation d'angle  $\arg(a)$  et d'une homothétie de rapport  $|a|$  (et les deux de centre O)

cas général :  $T(z) = az + b$

$$z \rightarrow [\text{translation}]z + b \rightarrow [h + z]a(z + b) = az + ab$$

Faux.

$$z \rightarrow [h + z]az \rightarrow [\text{translation}]az + b = az + b$$

Correct.

C'est faire l'homothétie et la rotation (dus à a) puis la translation (due à b)

Donc  $T(z) = az + b$  est une similitude direct de :

- de rapport  $|a|$
- d'angle  $\arg(a)$
- de centre (si  $a \neq 1$ )  $\frac{b}{1-a} \in \mathbb{C}$ . Si  $a = 1$ , il n'y a qu'une translation et une translation n'a aucun point fixe (et donc aucune rotation).

**Remarque** Le centre est le seul point fixe de la transformation.

$$Tz_0 = z_0$$

$$az + b = z_0$$

$$b = z_0 - az_0 = z_0(1 - a)$$

$$z_0 = \frac{b}{1 - a}$$

**Exemple**  $a = 1, b = \frac{1}{2} + 3i$

Ceci est une translation de vecteur  $(\frac{1}{2}, 3)$

$$a = 1 + i, b = 0$$

$$|a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \arg(a) = \frac{\pi}{4}$$

$$T(z) = (1 + i)z + (\frac{1}{2} + 3i) \text{ est}$$

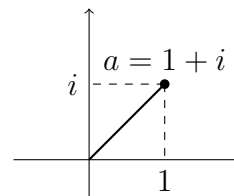
La composée de la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et de l'homothétie de centre 0 et rapport  $\sqrt{2}$ . Puis de la translation de vecteur  $\frac{1}{2}, 3$

La similitude directe :

— d'angle  $\frac{\pi}{4}$

— de rapport  $\sqrt{2}$

— de centre  $\frac{\frac{1}{2} + 3i}{1 - (1 + i)} = \frac{\frac{1}{2} + 3i}{-i} = -3 - \frac{1}{2i} = -3 + \frac{i}{2}$



**Remarque** IL suffit de connaître l'image de 2 points (distincts) pour déterminer la similitude.

Soit  $z_1 \neq z_2$  dont connaît les images respectives  $z'_1 \neq z'_2$

$$\text{On a alors } \begin{cases} z'_1 = az_1 + b \\ z'_2 = az_2 + b \end{cases}$$

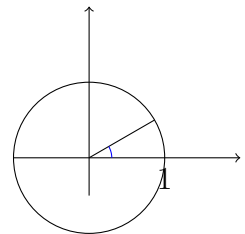
$$\text{Donc } a = \frac{z'_1 - z'_2}{z_1 - z_2} \text{ et donc } b = z'_1 - \frac{z'_1 - z'_2}{z_1 - z_2} z_1$$

### 3 Formules trigonométriques

Notation :  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$

**Remarque**

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re}(z) \end{aligned}$$



**Propriété** On a  $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$  pour tout  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \operatorname{Re}(e^{i(\theta_1 + \theta_2)}) \\ &= \operatorname{Re}(e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}) \\ &= (\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) \cdot (\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) \\ &= \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + i(\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) \cos(\theta_1)) \end{aligned}$$

D'où  $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)$

De même,  $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)$

**Exercice**  $\cos(\theta_1 - \theta_2); \sin(\theta_1 - \theta_2)$

**Proposition (formule de Moivre)**  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : e^{(i\theta)^n} = e^{in\theta}$

C'est à dire  $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$



**Exercice**

$$\cos(3\theta) = \operatorname{Re}(e^{i3\theta}) = \operatorname{Re}((e^{i\theta})^3)$$

$$= \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^3)$$

$$= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

**Exercice** À partir de  $\cos(\theta_1 \pm \theta_2)$  retrouver

$$\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 = \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2}$$

De même, retrouver, à partir de  $\sin(\theta_1 \pm \theta_2)$  retrouver

$$\sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2)}{2}$$

## 4 Polynôme de degré 2 à coefficient réels

$$P(x) = ax^2 + bx + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{Discriminant } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0 \text{ il y a 2 racines réels : } \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \text{ il existe une racine double : } \frac{-b}{2a}$$

$$\Delta < 0 \text{ il n'y a pas de racines réels, mais il existe 2 racines réels conjugués } \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

**Remarque** , il existe une seule formule :  $\frac{-b \pm \delta}{2a}$  avec  $\delta$  tel que  $\delta^2 = \Delta$ .

**Exemple**

$$x^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 0 - 4 = -4 < 0$$

$$\text{Les racines sont : } \frac{-0 \pm i\sqrt{4}}{2} = \pm i$$

**Exemple**  $x^2 - 2x + 2$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$$

$$2 \text{ racines complexes : } \frac{\sqrt{2 \pm i\sqrt{4}}}{2} = 1 \pm i$$

## 5 Fonctions complexes

$$f : A \rightarrow \mathbb{C} \text{ avec } A \subset \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Re}, \operatorname{Im}, |z| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \rightarrow \bar{z} \end{array} \right\} \text{Symétrie d'axe } O_x$$

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\theta \rightarrow e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow e^x$$

On cherche à définir une fonction exponentielle  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
tel que

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

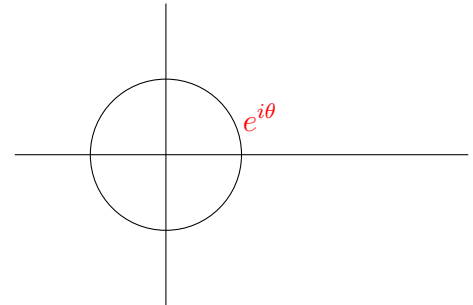
En particulier, on a pour  $z = x + iy$

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}$$

$$= re^{i\theta}$$

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z))) \text{ Definition de l'exponentielle complexe}$$

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$$



**Remarque** comme pour les fonctions réelles,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$

- $f$  est injective si pour tous  $z_1 \in A, z_2 \in A, z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$
- $f$  est surjective si  $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in A, \text{ tq } f(z') = z$
- $f$  est bijective si elle est injective et surjective.

**Exemple**  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  n'est pas surjective :  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} > 0$ . 0 n'a donc pas d'antécédent par  $\exp$   
n'est pas injective.

$$z_1 = x + iy \neq z_2 = x + i(y + 2\pi)$$

$$e^{z_2} = e^x \cdot e^{i(y+2\pi)} = e^x \cdot e^{iy}$$

$$= e^{z_1}$$

**Remarque** On a bien :

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \overline{e^z} = e^{\bar{z}}$$

$$z = x + iy$$

$$\overline{e^z} = \overline{e^x \cdot e^{iy}} = \overline{e^x} \cdot \overline{e^{iy}}$$

$$= e^x \cdot e^{-iy}$$

$$= e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$$

## 6 Equation différentielles, linéaires d'ordre 1. homogènes et complexes

### 6.1 Cas particulier des fonctions à valeur complexes

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $I$  intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .

On peut écrire pour tout  $t \in I$

$$f(t) = \underbrace{\operatorname{Re}(f(t))}_{f_1} + i \underbrace{\operatorname{Im}(f(t))}_{f_2}$$

avec  $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$

**Remarque**

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) = \operatorname{Re} f$$

$$f_2 = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) = \operatorname{Im} f$$

**Proposition**  $f : I \rightarrow \mathbb{C}, t_0 \in I$

$f$  est continue en  $t_0$  si et seulement si  $Re(f), Im(f) : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues en  $t_0$

**Proposition**  $f : I \rightarrow \mathbb{C}, t_0 \in I$

$f$  est dérivable en  $t_0$  si et seulement si  $Re(f), Im(f) : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont dérivable en  $t_0$  ET  $f'(t_0) = (Re(f))'(t_0) + i(Im(f))'(t_0)$

**Proposition**  $f : I \rightarrow \mathbb{C}, t_0 \in I$

$f$  est intégrable en  $I$  si et seulement si  $Re(f), Im(f) : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont intégrables sur  $I$  ET  $\int f(t)dt = (\int Re(f(t))dt) + i(\int Im(f(t))dt)$

**Remarque**  $z_n \rightarrow l$  avec  $z_n \in \mathbb{C}, l \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Re(z_n) \rightarrow Re(l) \\ Im(z_n) \rightarrow Im(l) \end{cases}$$

**Exemple**

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t$$

est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^\infty$

$$f(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$f'(t) = (\cos' t) + i(\sin' t)$$

$$= -\sin t + i \cos t$$

$$= i(\cos t + i \sin t)$$

$$= i \cdot (e^{it})$$

$$\text{et } \int f(t)dt = \left( \int \cos t dt \right) + i \left( \int \sin t dt \right)$$

$$= \sin t - i \cos t$$

$$= \frac{1}{i} (i \sin t + \cos t)$$

$$= \frac{1}{i} e^{it} + (c_1 + ic_2)$$

## 6.2 Equation différentielle d'ordre 1 homogène

**Théorème** Soit  $a : I \rightarrow \mathbb{C}$

( $I$  intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ) continue. Les solutions de l'équation différentielle

$$(E)z' = az$$

Sont

$$\left\{ \begin{array}{l} z : I \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto De^{A(t)} \quad D \in \mathbb{C} \end{array} \right.$$

et  $A(t) = \int a(s)ds$  (une primitive de  $a$ ).

**Exemple**  $E : z' = (2 + 8it)$

$$a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto 2 + 8it$$

Toutes les solutions de (E) sont les fonctions du type

$$z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z(t) = De^{A(t)} \qquad D \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} A(t) &= \int a(s)ds = \int (2 + 8is)ds \\ &= \left( \int 2ds \right) + i \left( \int 8sds \right) \\ &= 2t + i(4t^2) \end{aligned}$$

$$z(t) = De^{(2t+4it^2)}$$

avec  $D \in \mathbb{C}$