Table des matières

I

Fonctions

1 Ensembles de nombres

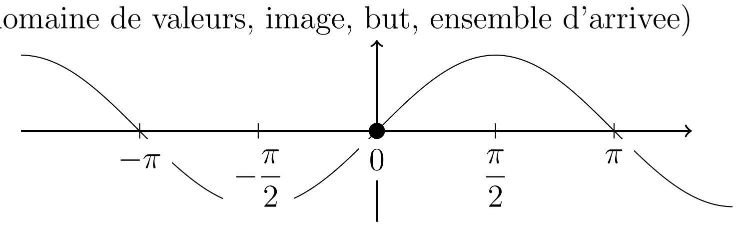
: Réels $\mathbb{R}$, Rationnels $\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels $\mathbb{N}$, entiers $\mathbb{Z} = \{-3, -2, ..., 1\}$, nombres complexes $\mathbb{C}$.

2 Intervalle

: [a, b] avec a, b réels compris dans l'intervale, dit fermé, $a < b$,]a, b[avec a, b non compris dans l'intervale dit ouvert $\rightarrow$ Intervalle bornés $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$

3 Fonctions

Exemple : sinus : sin : $\mathbb{R}$ (domaine de definitions, sources, ensemble de depart) $\rightarrow \mathbb{R}$ ou$[-1, 1]$ (domaine de valeurs, image, but, ensemble d'arrivee)



Définitions Soit E, F 2 ensemble de R. Une fonction f est procédé pour associer à tout élément de R un unique élément de F Le graph de F "vit" dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R}$

Définitions : Soit E et F 2 ensembles, on définit leur produit cartesien : comme l'ensemble dont les éléments sont les couples (x, y) avec x "vit" dans E et y dans F.
ExF = {(x, y), $x \in E, y \in F$}

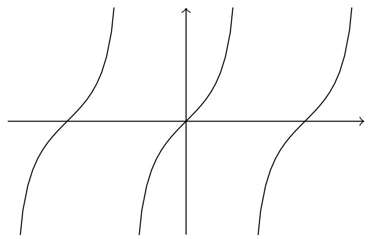
Définitions : Le graphe de f :$E \rightarrow F$ est un sous ensemble de $E * F$ donné par

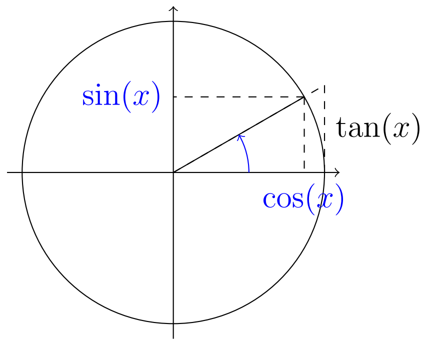
$$E * F = \{(x, y), x \in E, y = f(x)\}$$

$$E * F = \{x :\to f(x) = y\}$$

Exemples cosinus : cos : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$

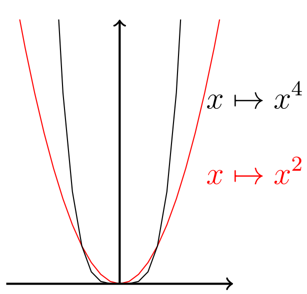
tangeante tan : $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k * \pi$, k appartient a Z$\}\to\,]-\infty, +\infty[$





$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R} x \to x^n, n \in N$
$n = 0 : x \to 1$
$n = 1 : x \to x$
$n = 2 : x \to x^2$
$n = 3 : x \to x^3$



Remarque : les fonctions sont plus étroites. Schéma typique pour $n > 0$ et n pair.

Définitions Soit $f : E \to R$ une fonction, avec E symétrique par rapport à 0.
— f est dite paire si : $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$
— f est impaire si : $\forall x \in E, f(x) = -f(-x)$ Remarque : si f est impaire $\to f(0) = 0$. En effet,

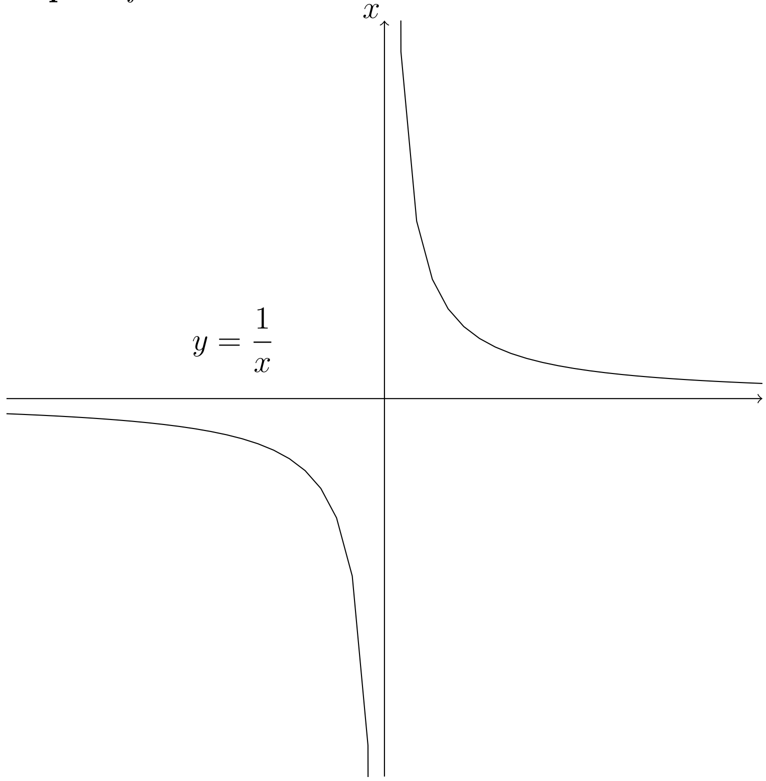
$$f(-0) = f(0) \tag{I.1}$$
$$f(0) = -f(0) \tag{I.2}$$
$$2 * f(0) = 0 \tag{I.3}$$

Exemple : fonctions paire : cosinus, x^{2p} avec p appartient à N
impaires sinus, tangeante, x^{2p+1} avec p appartient à N

4 monotonie

Soit $f : E \to \mathbb{R}$
— f est croissante si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
— f est strictement croissante si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
— f est decroissant si $\forall\{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$
— f est decroissant si $\forall\{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) > f(b)$

Exemple $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* x \to \frac{1}{x}$



décroissante sur $]-\infty, 0[et]0, +\infty[$ mais pas sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par exemple, $-1 \leq 1$ et $\frac{1}{-1} \leq \frac{1}{1}$

Définition Soit $f : E \to F$ et A un sous ensemble de E. On appelle restriction de f a A, note $f_{|A}$. La fonction $f_{|A} : A \to F$ definie par $f_A(x) = f(x) \forall x \in A$

Soit $f : E \to F$ et E', F' des sous ensembles de R, avec $E \subset E', F \subset F'$.
La fonction $g : E' \to F'$ est un prolongement de f si $g_{|E} = F(x)$ c'est à dire $\forall x \in E, g(x) = f(x)$

Exemple logarithme népérien $ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \to ln(x)$
$ln(a) + ln(b) = ln(a * b)$ avec $\forall (a, b) \in (R^{*+})^2$

5 Opérations sur les fonctions

Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$. On peut définir :
— La fonction somme $f + g$ par $f + g : E \to \mathbb{R}$ $x \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
— La fonction produit $f * g$ par $f * g : E \to \mathbb{R}$ $x \to (f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

6 Image (direct) d'une fonction composé (composition)

Définitions : $f : E \to F$. L'image de f notée $im(f)$ c'est l'ensemble $\{y \in F$ tel que il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y\}$ aussi noté $f(E)$

Définition $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ Si l'image de $g \subset E$, on peut définir la fonction composé $fog : E' \to F$
$x \mapsto fog(x) = f(g(x))$

7 Image réciproque

Définition Soit $f : E \to F$, et $B \subset F$ L'image réciproque de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E$ tel que $f(x) \in B\}$
$f^{-1}([-1, 1]) = [a, b]$

Exemple (de composition)

$$f : E \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

composé de fonction $f = gou$

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - 4x + 3$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$\Delta = 16 - 12 = 4$ racine de u : 1 et 3

$u(x) > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$ $E =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$

$$h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ln(x^2)$$

Pour composer h avec

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

ou doit enlever les points où v s'annule, c'est à dire $v^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$$g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2ln(x)$$

$ln(x^2) = ln(x * x) = ln(x) + ln(x) = 2ln(x)$ mais $ln(a * b) = ln(a) + ln(b)$ n'est valable que si a et $b > 0$

8 Application, surjectives, injectives, bijectives

Définition $w : E \to F$ $(E, F \in \mathbb{R})$ On dit que w est surjective si $w(E) = F$
De manière équivalente : $(y \in F$ tel que il existe $x \in E$ avec $w(x) = y) = F$ c'est à dire tout les éléments de F admette un antécédent. c'est à dire $\forall y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que $w(x) = y$

Définition $w : E \to F$ $(E, F \subset R)$ On dit que w est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent. c'est à dire que si x et x' des éléments de E qui sont différents, $w(x)$ différent $w(x')$

Exemple $w(x) = x^2$ n'est pas injectifs car -2 et 2 ont la meme image (4).

Exemple :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3$$

Cette fonction est injective car pour tout y de $\mathbb{R}$, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. On a aussi $\forall y \in \mathbb{R}$, cet antécédent est unique.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

Cette fonction n'est pas surjective (-1 par exemple n'a pas d'antécédent) et pas injective car $y = 4$ par exemple possède 2 antécédents.

Remarque : Si on considère

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

g est surjective (il y a toujours au minimum un antécédent) mais toujours pas injective Plus généralement, si on considère $f : E \to f(E)$ est toujours surjective.

$sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ est surjective mais pas injective : 0 est compris entre [-1 ;1] mais possède plusieurs antécédent ($k * \pi$ avec $k \in \mathbb{R}$)

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto e^{2x}$$

Cette fonction n'est pas surjective (antécédent de 0 n'existe pas) mais est injective.

Definition $w : E \to F(E, R \subset \mathbb{R})$ w est dîtes bijective si elle est injective <u>et</u> surjective, c'est à dire tout élément de F admet exactement un antécédent.

9 Fonction réciproque

Si $f : E \to F$ est bijective, pour tout y de F , il existe un unique x dans E tel que $f(x) = y$ On peut donc définir $g : F \to E$ par $g(y) = x$ (tel que $f(x) = y$) g est la réciproque de f, notée f^{-1}

Exemple

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+}$$

$$x \mapsto exp(x)$$

$$g : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ln(x)$$

Remarque si $g = f^{-1}$ avec $f : E \to F$ et $g : F \to E$ alors

$$fog : F \to F$$

$$x \mapsto x$$

et $fog = gof$

Démonstration Soit $y \in F$, quelconque, on veut calculer fog(y) Par définition de g comme fonction réciproque de f, $g(y) = x$ tel que $f(x) = y$ donc $f(g(y)) = f(x) = y$

Proposition $f : E \to F$ une fonction impaire. supposons que $f_{|E\cap\mathbb{R}^+}$ est croissante, Alors $f_{|E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante

Démonstration

$$f_{|E\cap\mathbb{R}^-} : E \cap \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$$

$$x \quad \mapsto f(x)$$

Soit x et x' dans $E \cap \mathbb{R}^-$ tels que $x \leq x'$.

$$f(x) = \ f(-x) \quad \text{car f impaire}$$

$$f(x') = -f(-x)$$

Comme $x, x' \in E \cap \mathbb{R}^-$, $-x, -x' \in E \cap \mathbb{R}^+$ et comme $x \leq x'$ et $-x \geq -x'$, $f(-x) \geq f(-x')$ car f est croissante sur $E \cap \mathbb{R}^+$
Conclusion, $-f(-x) \leq -f(-x')$ et donc $f(x) \leq f(x') \leq f(x')$. On a prouvé que $f_{|E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante.

Remarque f^{-1} pourrait être la fonction $\dfrac{1}{f}$ (la fonction f est différent de 0), la fonction réciproque de f (avec f bijective).

Pour $f : E \to \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$

$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in \mathbb{R}\}$ Est toujours définie

Proposition $f : E \to F$ et $g : F \to G$ si f et g sont bijective, alors gof l'est aussi et $(gof)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ $(gof : E \to G)$

Exemple Trouver la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \to]-7, +\infty[,\ f(x) = e^{3x+2} - 7$ On écrit $y = e^{3x+2} - 7$ et on détermine x en fonction des y.

$$y + 7 = e^{3x+2}$$

$$ln(y+7) = 3x + 2 \text{ y} > -7 \qquad \text{car fonction } exp > 0$$

$$x = \frac{1}{3}(ln(y+7) - 2)$$

$$\text{d'où } f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(ln(x+7) - 2)$$

Etablie $f : E \to \mathbb{R}$ et $A \subset E$
$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \in A, f(x) = y\}$ $f(A) = im(f_{|A})$

II

Limites

1 Voisinage et adhérence

Definition si $x \in E$, on dit que E est un voisinage de x si E contient un intervalle ouvert qui contient x. Ceci est équivalent à E voisinage de x si il existe $\delta > 0$ tel que $]x - \delta; x + \delta[\subset E$.

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}$. Un réel x est adherent à E, si tout voisinage V de x intersecte E, c'est à dire $(V \cap E \neq \emptyset)$

Exemple

- si $x \in E$, x est adhérent à E, car pour tout voisinage V de x, $x \in V \cap E$
- E = $]0\,;\,1]$, 0 est adhérent à E.
- $E = \{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\}$ 1 est adhérent à E car $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

2 Limite finie en un point de $\mathbb{R}$

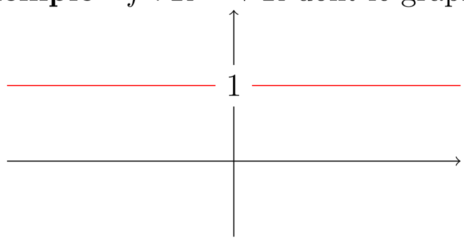
Definition $f : E \to \mathbb{R}; x_0$ un point adhérent de E.
On dit que f(x) tend vers l en x_0 ou que f(x) admet la limite l en x_0 si : $\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0, |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon$

Ceci est équivalent à dire que $\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], f(x) \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$

Pour tout voisinage V de l il existe un voisinage de x_0 U tel que si x est dans U, alors f(x) est dans V.

Notation $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$

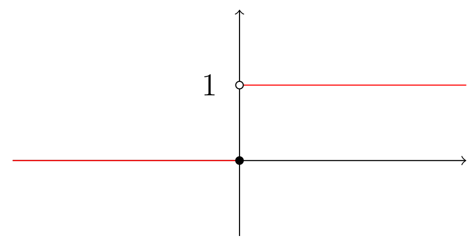
Exemple $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dont le graph est :



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Soit $\epsilon > 0$, tout $\delta > 0$ convient.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \leq 0 \\ \\ 1 \; si \; x > 0 \end{cases}$$



f n'admet pas de limite en 0.

3 Restriction à un sous ensemble

$f : E \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}, x_0$ adhérent à A. On dit que f(x) tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tends vers x_0 dans A.

$\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0,$ tel que $\forall x \in A, |x - x_0| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$

Exemple limite à gauche de f en x_0 est $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ c'est à dire la limite de f(x) quand x tends vers x_0 dans $]-\infty, x_0[$

Exemple limite à droite de f en x_0 est $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ c'est à dire la limite de f(x) quand x tends vers x_0 dans $]x_0, +\infty[$

Exemple La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à droite en 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$, pour $f(x) = 1$
La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à gauche en 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$, pour $f(x) = 0$

Remarque On écrit aussi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$

4 Propriété

Unicité Si la limite existe, elle est unique.

démontration par l'absurde : $f : E \to \mathbb{R}, x_0$ adhérent à E. On suppose que la limite en x_0 existe mais qu'elle n'est pas unique. Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_2$ avec $l_1 \neq l_2$

Comme $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\forall \epsilon_1 > 0$, il existe $\delta_1, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_1, \text{alors} |f(x) - l_1| < \epsilon_1$ (*)
De plus $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$, $\forall \epsilon_2 > 0$, il existe $\delta_2, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_2, \text{alors} |f(x) - l_2| < \epsilon_2$ (**)

Choisissons $\epsilon < \frac{l_1 + l_2}{2}$, on remarque $]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$
On trouve δ_1 et δ_2 tel que (*) et (**) soient vraies.
On appelle $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\},]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\subset]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1[\cap]x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2[$

Soit $x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ Par (*), $f(x) \in]l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon[$
et par (**), $f(x) \in]l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon[$ donc $f(x) \in]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$ Ceci est absurde ($f(x) \neq \emptyset$)

5 Théorème des gendarmes

f, g, h 3 fonctions $E \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ adhérent à E.
(i) Si f, g, h admettent pour limites respectivs l, m, n en x_0 et si f(x) $\leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x de E, alors $l \leq m \leq n$
(ii) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur E et si f et h admettent une limite (identique) l en x_0, alors g admet une limite en x_0 et $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Remarque On remplace les inégalité de (i) par $\forall x \in E$, $f(x) < g(x) < h(x)$, on obtient aussi $l \leq m \leq n$

Exemple $f(x) = |x|$ et $g(x) = 2|x|$ Sur $E \subset R^+, f < g$ mais $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x)$

Exemple

$$\lim_{x \to 0} x.\sin(\frac{1}{x}) \text{ existe ?}$$

($\sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0)

Soit f, g, h $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|, g(x) = x\sin(\frac{1}{x}), h(x) = |x|$
On a bien $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$
Donc par le théorème des gendarmes, Comme $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$ g admet 0 comme limite quand x tends vers 0.

Fonction de référence

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to x^n$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$$

$$x \quad \to x^{ln(n)}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$$

$$x \quad \to x^{\alpha} \cdot ln(x)^{\beta}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$f : \mathbb{R}^{*} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Methode

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)}$$

$$f(x) = \frac{(x+1) - 1}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \text{ donc } \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$$f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{2x}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{2x} . \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3+x}^2 - \sqrt{3}^2}{2x(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \\ \text{Donc } \lim_{x \to 0} f(x) &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Comportement local

Proposition Si f(x) admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tends vers x_0, alors f est localement bornée. c'est à dire il existe un voisinnage de x, V, tel que il existe $M \in \mathbb{R}, \forall x \in V, |f(x)| < M$

Remarque Il existe un voisinnage de x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert contenant x_0 si et seulement si il existe $\delta > 0, x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

Demonstration Par hypothèse, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$

c'est à dire $\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ $|f(x) - l| < \epsilon$
Soit $\epsilon = 1$, On trouve δ tel que $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
$|f(x) - l| < 1$, c'est à dire $-1 < f(x) - l < 1$ Soit $|f(x)| < l + 1$

Propriété Si f(x) admet $l \neq 0$ comme limite quand x tends vers x_0, alors localement (autour de x_0), alors f est de signe constant

Démonstration bornée en x_0 (meme style que la précédente), $\epsilon = \dfrac{l}{3}$

Exemple

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 6 = f(1) \text{ avec } f = x^2 + 2x + 3$$

$$\begin{aligned}
|f(1+h) - f(1)| &= |(1+h)^2 + (1+h) * 2 + 3 - 6| \\
&= |1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3| \\
&= |h(h+4)| \\
&= |h| * (h+4) && \text{si } |h| < 1 \\
&\leq 5|h|
\end{aligned}$$

$$\lim_{h \to 0} 5|h| = 0$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h \to 0} |f(1+h) - f(1)| = 0$$

Remarque $x = 1 + h$ quand h tends vers 0 et x tends vers 1.

6 Opération sur les limites

$f, g : E \to \mathbb{R}; x_0$ adherent à E Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l, \lim\limits_{x \to 0} g(x) = m$ Alors

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$ existe et vaut $l + m$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x)$ existe et vaut $l.m$
- si $m \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f/g)(x)$ existe et vaut $\dfrac{l}{m}$

Composition $f : E \to F, g : F \to G$
$gof : E \to G$, x_0 adhérent à E.

Supposons que

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$
- F est un voissinage de l.
- $\lim\limits_{y \to l} g(y) = m$

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} gof(x)$ existe et vaut m.

Exemple

$$g : y \to e^y$$

$$f : x \to \sqrt{1+x}$$

- gof est bien défini car le domaine de g est $\mathbb{R}$
- 0 est bien adhérent au domaine de f (qui est $[-1, +\infty[$)
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$
- $\lim\limits_{y \to 1} g(x) = e$

7 Limites infinies, et limites en l'infinie

Définition $f : E \to \mathbb{R}, x_0$ adhérent à E

On dit que f(x) tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) quand x tend vers x_0 si $\forall A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$, alors $f(x) > A$ (ou $f(x) < -A$ pour f(x) tend vers $-\infty$).

Exemple

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Définition $f : E \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset E$ On dit que f(x) tend vers $l \in E$ quand x tend vers $+\infty$
c'est à dire $\forall \epsilon > 0,$ il existe $A > 0, x > A,$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$

Définition $f : E \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe $A < 0$ tel que $]-\infty, A[\subset E$ On dit que f(x) tend vers $l \in E$ quand x tend vers $-\infty$ c'est à dire $\forall \epsilon > 0,$ il existe $A < 0, x < A,$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$

Remarque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ veut dire $\forall A > 0,$ il existe $B > 0, x < -B$ tel que $f(x) > A$

Exemple

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

Démonstration Soit $A > 0$. On cherche δ tel que si $0 < x$, $0 < \delta$ alors $f(x) = \dfrac{1}{x} > A$
Choisir $\delta = \dfrac{1}{A}$ suffit, en effet $0 < x < \dfrac{1}{A}$ alors $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{A}$.

Exemple $g(x) = 1 + e^{-x}$ Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

Exemple

$$f :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

$$x \quad \to tan(x)$$

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} tan(x) = -\infty$$

8 Opération sur les limites

- Limites finies ($l \in \mathbb{R}$) en l'infini sont exactement les memes opérations.
- Limites infinies ($l = \pm\infty$) Attention aux cas inderminé :
  $+\infty - \infty, \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 * (\pm\infty)$

Exemple $\dfrac{+\infty}{+\infty} =?$

$$f : x \mapsto x$$

$$g : x \mapsto x^2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f_2 : x \mapsto x^3$$

$$g_2 x \mapsto x^2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = +\infty$$

$$f_3 : x \mapsto 3x$$

$$x \mapsto x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_3(x)}{g_3(x)} = 3$$

Plus généralement, P,Q deux polynomes, que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$? Elle est égale au rapport des thermes du plus haut degrés. Exemple :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 4x^5 + 2}{x^4 + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^5}{x^4} = +\infty$$

Exemple

$$\lim_{x \to 0} x * \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

car $\forall x \neq 0,\ 1 \leq \sin(\dfrac{1}{x}) \leq 1$

donc $0 \leq |x * \sin(\dfrac{1}{x})| \leq |x|$ avec —x— tend vers 0 pour x tend vers 0.

III

Continuité

1 Définition et premières propriétés

Définition $f : E \to \mathbb{R}$ et $x \in E$

— On dit que f est continue en x_0 (au point x_0) si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$

— f est continue sur E si f est continue en tout point $x_0 \in E$

o

Exemple Fonctions continues :

— $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$

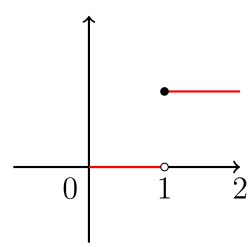
— $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (domaine $\mathbb{R}^*$) est continue sur $\mathbb{R}^*$

— $\sin, \cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$

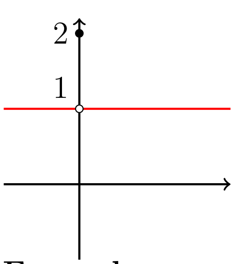
Fonctions discontinues : $x \mapsto [x]$ n'est pas continue en 1 par exemple. En effet, $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 0$et $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 1$.

Les limites à gauches et à droite étant différentes donc $\lim_{x\to 1}$ n'existe pas

$g(x) = 1$ pour tout x différent de 0 mais $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{x\to 0; x<0} g(x)$



Remarque f continue en x_0 si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$



Définition

— f est continue à droite en x_0 si limite de f(x) par valeur supérieur ($\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$) en x_0 et vaut $f(x_0)$

— f est continue à gauche e en x_0 si limite de f(x) par valeur inférieur ($\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$) en x_0 et vaut $f(x_0)$

Exemple

— f(partie entière de l'exemple précédent) est continue à droite mais pas à gauche en 1. f est continue sur $[0; 1[$

— g n'est pas continue <u>ni</u> à gauche, <u>ni</u> à droite en 0.

Proposition f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche <u>et</u> à droite en x_0

Propriété $f, g : E \to \mathbb{R}, x_0 \in E$
f et g continue en x_0
- f+g est continue en x_0
- f.g est continue en x_0
- $\frac{f}{g}$est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$

La continuité est très local, meme si pour un $x \in E$, $g(x) = 0$, temps que x_0 différent de 0, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

Composition $f : E \to F$ $g : F \to G$ et $gof : E \to G$ si f est continue en $x \in E$ et g est continue en $f(x) \in F$, alors gof est continue en x_0

Exemple
- Polynôme , $\sin + \cos, \tan + exp$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- $\sin(ln(\frac{e^x}{1+x^2}))$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $exp, 1+x^2$ sont continue, de plus $1+x^2 \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ donc $\frac{e^x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Finallement, e^x n'est jamais null donc $im(x \mapsto \frac{e^x}{1+x^2}) = \varphi \subset \mathbb{R}^{+*}$, d'où $ln(\varphi)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $\begin{matrix} x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \\ \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \end{matrix}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, de plus, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Définition Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $\boxed{x_0 \text{ adhérent à E}}$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, alors la fonction $g : E \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ par la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases} \quad \text{Est continue sur}\mathbb{R}$$

Exemple

$$g(x) = \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ l & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{Est continue sur}\mathbb{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} xln(x) \text{ si } x > 0 \\ \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \text{ est le prolongement par continuité en 0 de } x \mapsto xln(x)$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}\ ,\ \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Exercice Par quelles valeurs de c, la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(2x)}{x} \text{ si } x < 0 \\ \\ x + c \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

est continue ? f est continue si et seulement si $x = 2$ En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{sin(2x)}{x} \\ &= \frac{sin(2x)}{2x} * 2 = 2 \end{aligned}$$

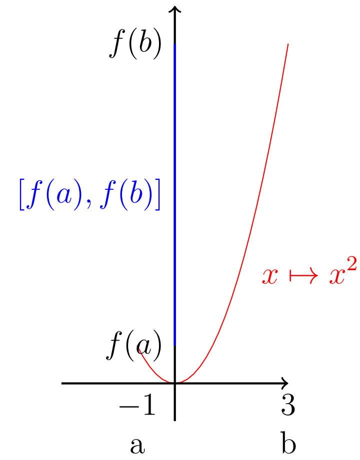
(2^{eme} méthode : $sin(2x) = 2sin(x) * cos(x)$, $\dfrac{sin(2x)}{x} = 2 * \dfrac{sin(x)}{x}. \cos(x)$ ce qui tend vers 2 pour x tend vers 0, et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = c$ donc
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$ si et seulement si $c = 2$)
Donc f est continue en 0 si $c = 0$. De plus, pour tout $x_0 > 0$, $f(x) = x + c$ qui est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x_0 < 0$, $f(x) = \dfrac{sin(2x)}{x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^{-*}$ Le seule problème possible était en 0.

Comportement local

Proposition Si f est continue en x_0, alors f est localement bornée autour de x_0 (c'est à dire il existe un voisinnage de x_0 sur lequel f est bornée, c'est à dire il existe $\delta > 0$ et $M > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x)| < M$). Si f est continue en x_0 et $f(x) \neq 0$, alors f est de signe constant (celui de $f(x_0)$ localement autour de x_0

2 Théorème des valeurs intermédiaires

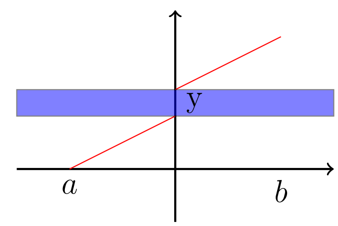
Théorème $f : [a,b]\mathbb{R}(a < b)$ et continue (sur $[a,b]$) Pour tout y compris entre f(a) et f(b) il existe au moins $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.



Exemple

$$x \mapsto x^2$$
$$[-1,3] \to \mathbb{R}$$

(Contre) exemple : la continuité est essentielle. Voici une fonction monotone et non continue pour laquel il existe des y dans $[f(a), f(b)]$ qui n'a pas d'ancédent entre a et b.



Corollaire 1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue.
si f(a) et f(b) sont non nul et de signes différents, il existe $x \in]a,b[$ tel que $f(x) = 0$

Corollaire Si $f(x) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$ avec a, b de signes différents dans $\mathbb{R}$, alors il existe un $c \in]a,b[$ tel que $f(x) = 0$

Corollaire

$$f \text{fonction continue}$$
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors f est surjective.

Idée de démonstration Ramener à un intervalle "bornée", de type $[a,b] \in \mathbb{R}^2, a < b$.
Soit $y \in \mathbb{R}$, et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = y - 1$ et $f(x_2) = y + 1$. On cherche à prouver qu'il existe au moins un antécédent.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $f(x) \geq y + 1$ pour x assez grand.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc $f(x) \leq y - 1$ pour x assez petit. On applique le théorème des valeurs intermédiaire à $f_{|[x_1,x_2]} : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ et $f_{|[x_1,x_2]}$ est bien continue.

Comme $f(x_1) \leq y - 1 < y < y + 1 \leq f(x_2)$
D'où il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) = y$.

Corollaire $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur $I \in \mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervall.

3 Continuité et extremum

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}$.

- On dit que x est le minimum de E, si pour tout élément de $x' \in E$, $x' \geq x$
- On dit que x est le maximum de E, si pour tout élément de $x' \in E$, $x' \leq x$
- Un extremum est un minimum ou un maximum.

Remarque Le maximum et le minimum sont unique.

Théorème Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}(a < b)$, continue.
L'image de f admet un minimum et un maximum.

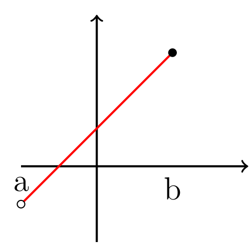
Remarque de manière équivalente : Minimum
$\exists y \in Im(f), \forall y' \in Im(f), y' \geq y$ (ou y est le minimum)
$\exists x_{min} \in [a, b], \forall x' \in [a, b], f(x') \geq f(x_{min})$ (avec $y = f(x_{min})$ et $y' = f(x')$)

Pour le maximum : $\exists x_{max} \in [a, b], \forall x' \in [a, b], f(x') \leq f(x_{max})$ ($f(x_{max})$ le maximum de $Im(f)$)

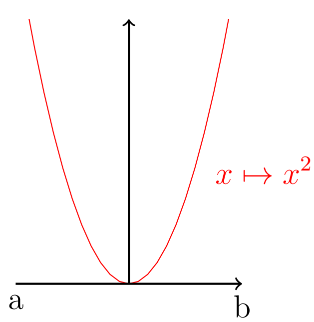
Dans ces exemples, y est forcément unique (dans le cas du minimum ou du maximum) mais il peut y avoir plusieurs antécédents (plusieurs x_{min} et x_{max})

Exemple $\sin : [0, 4\pi] \to [-1, 1]$
Le minimum de $\sin_([0, 4\pi])$ est -1. Il est atteint en $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{2}$.

Remarque 2 hypothèses. Pour avoir un maximum ou un minimum, $[a, b]$ doit etre un intervalle ferme et borne. Par exemple, Le minimum n'est pas atteint sur $]a, b]$ De meme, sur $[a, b[$ pour le maximum.



Corollaire supposons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors f admet un minimum mais pas de maximum.



Idée de démonstration

Cette fonction admet un minimum (0) mais jamais de maximum.

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe un réel A et x_0 tel que $\forall x > x_0; f(x) > A$ De même, comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ il existe un réel A et $-x_0$ tel que $\forall x < -x_0; f(x) > A$

Dans l'intervalle $]-x_0, x_0[$ comme f est continue, $f(]-x_0, x_0[)$ est un intervalle continue. Or un intervalle continu admet forcément un minimum, dans $]-x_0, x_0[$, il existe un c tel que $f(x) > f(c)$. Or, comme $\forall x < -x_0$ et $\forall x > x_0$, $f(x) > A$, on à $f(x) > A > f(x)$. Donc f admet bien un minimum et pas de maximum.

Corollaire $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
Si pour tout $x \in [a, b], f(x) > 0$ alors le minimum de $Im(f) > 0$,
c'est à dire $\exists m > 0, \forall x \in [a, b], f(x) \geq m > 0$

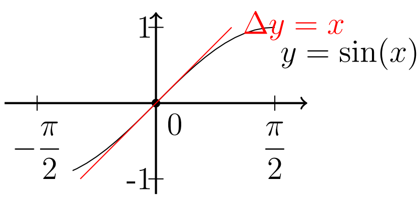
4 Fonctions réciproques

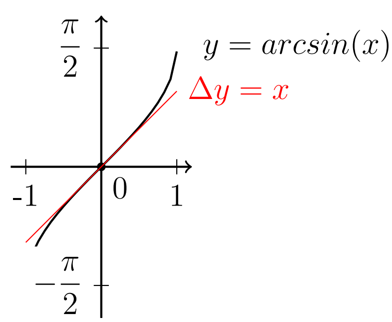
Théorème $f : I \to \mathbb{R}$, continue et strictement monotone.

1. $f(I)$ est un intervall
2. f est bijective sur J
3. f^{-1} est continue et strictement monotone, avec le meme sens de variations que f.
4. Les graphs de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bisectrice $\Delta y = x$

Exemple $\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ est continue et strictement croissante.

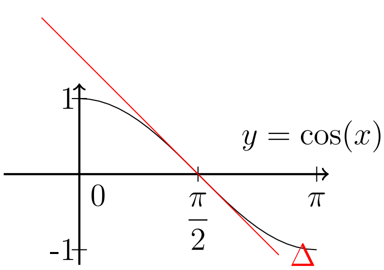
Donc f est bijective, c'est à dire $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ existe et f^{-1} vaut arcsinus.
$arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante.

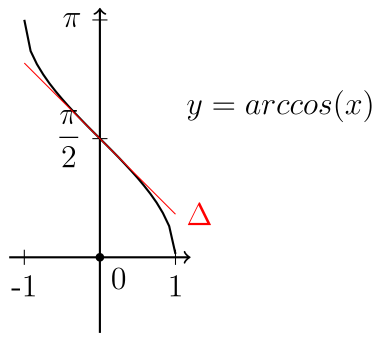




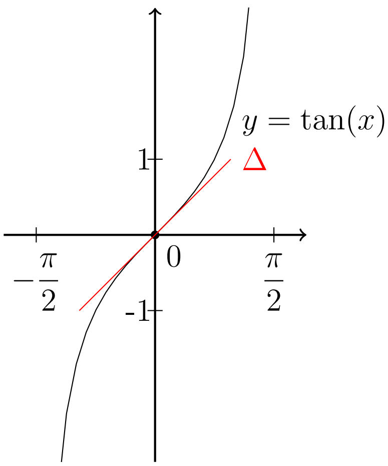
Exemple $\cos[0, \pi] \to [-1, 1]$ est continue et strictement croissante.

Donc f est bijective, c'est à dire $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ existe et f^{-1} vaut arccosinus.
$arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ est continue et strictement croissante.

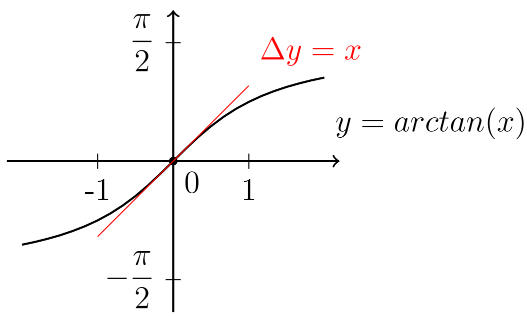




Exemple tan :]$\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$[$\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante, donc sa fonction reciproque est : $arctan : \mathbb{R} \to]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ aussi.



Donc f est bijective, c'est à dire $f^{-1} : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ existe et f^{-1} vaut arctangeante.
$arctan : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante.



Exemple

$\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ x \mapsto x^n \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ si n est pair.

Elle est donc bijective : $\begin{cases} x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \end{cases}$ elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si n est impair. Reciproque

$\begin{cases} x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$

IV

Dérivabilité

Définition $f : E \to \mathbb{R}, E$ est un voisinage de x_0. f est derivable en x_0 si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite l quand x tend vers x_0 $(l \in \mathbb{R})$. $\tau(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est appelé le taux d'accroissement de f en x_0. La limite de l (quand elle existe) est la dérivée de f en x_0, elle est notée $f'(x_0)$

Exemple
$$\begin{aligned} f : x &\mapsto x^2 \\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \end{aligned} \qquad f'(1) = ?$$

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

Exemple 2
$$\begin{aligned} f : x &\mapsto x^3 \\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\forall x \neq x_0, \qquad \begin{aligned} \tau(x) &= \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2)}{x - x_0} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to x_0} x^2 + x.x_0 + x_0^2 = 3x_0^2$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x_0^2$

Exemple 3
$$\begin{aligned} f : \ x &\mapsto \sqrt{x} \\ \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\forall x \neq x_0, x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\
&= \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\
\lim_{x\to x_0} \tau(x) &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

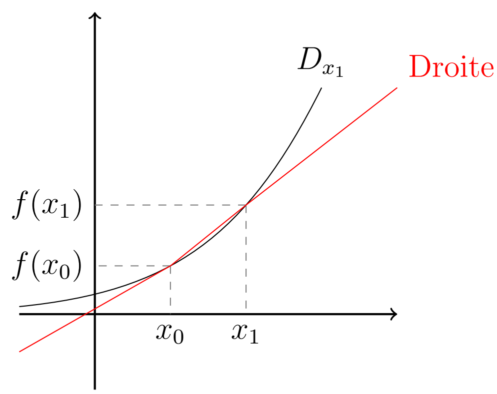
1 Interprétation géométrique

$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente du graphe de f en $(x_0, f(x_0))$

$\tau(x_1) = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ est le coefficient de la droite passant par P_{x_1} et P_{x_0} avec P_{x_1} du graph au point x_1, et P_{x_0} celui de x_0
$y = \tau(x_1)(x-x_0) + f(x_0)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$

Quand x tend vers x_0, la droite D_{x_1} "converge" vers la tangeante au graph de f au point $(x_0, f(x_0))$, d'équation :

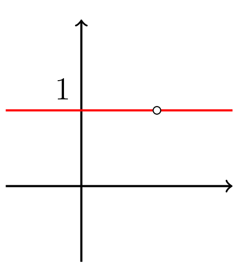
$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$



Définition Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} \tau(x) = l^-, l^- \in \mathbb{R}$
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 et on note $f'_g(x_0) = l^-$

Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \tau(x) = l^+, l^+ \in \mathbb{R}$
f admet une dérivée à droite en x_0, que l'on note $f'_d(x_0) = l^+$

Théorème $f : E \to \mathbb{R}, E$ un voisinage de x_0. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$



Remarque Cette fonction n'est pas dérivable en 1, pourtant $f'_d(1) = f'_g(1)$, f doit donc alors être continue en x_0

Démonstration f est dérivable en x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \tau(x) = l \in \mathbb{R}$, cela signifie

$$\exists \delta > 0, |x-x_0| < \delta \text{ donc } |\tau(x) - l| < 1$$

donc que

$$\begin{aligned}
l-1 &\leq \tau(x) \leq l+1 \\
l-1 &\leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq l+1
\end{aligned}$$

Si $x > x_0$, on obtient :

$$(l-1)(x-x_0) \leq \quad f(x)-f(x_0) \leq \quad (l+1)(x-x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}(l-1)(x-x_0) \leq \lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0}(l+1)(x-x_0)$$

$$0 \leq \lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) \leq 0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = 0 \text{ par le théorème des gendarmes, et de même pour } x < x_0$$

Définition $f : E \to \mathbb{R}$ f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ si f est dérivable en tout point de $x_0 \in]a,b[$ f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a,b]$ si f est dérivable sur l'intervalle ouvert et à droite en a et à gauche en b.

Exemple $x \to \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[, [a,+\infty[(a>0)$ mais pas sur $[0,+\infty[$.

2 Dérivabilité des prolongements de fonctions

Proposition $f : [a,b] \to \mathbb{R}, g[b,c] \to \mathbb{R}$ dérivable

On définit $\varphi : [a,c] \to \mathbb{R}$ par la formule $\varphi(x) \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [a,b] \\ g(x) \text{ si } x \in]b,c] \end{cases}$

φ est continue sur $[a,c]$ si

$$\lim_{\substack{x\to b\\x<b}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x\to b\\x>b}} \varphi(x) = \varphi(b)$$

$$f(b) \quad = g(x) \quad = f(b)$$

Si φ est continue, φ est dérivable sur $[a,c]$ si $f'_g(b) = g'_d(b)$

Exercice Trouver α et β tels que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 2, \text{ si } x \leq 1 \\ \alpha x + \beta \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Soit dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $e^x + 2$ et $\alpha x + \beta$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$, le seul problème peut survenir en 1. Pour être dérivable, f doit être continue : $e^1 + 2 = \alpha + \beta$ et on doit avoir $f'_g(1) = e = f'_d(1) = \alpha$. $\alpha = e$ et $\beta = 2$

3 Opération usuelles

$f, gE \to \mathbb{R}, E$ voisinage de x_0.
f et g sont dérivable en x_0, alors :
- f+g est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x) + g'(x)$
- f*g est dérivable en x_0 et $(f*g)'(x_0) = f'(x_0)*g(x_0) + f(x_0)*g'(x_0)$
- si $g(x_0) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)*g(x_0) - f(x_0)*g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Démonstration Pour la somme :

$$(f+g)(x) - (f+g)(x_0) = f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))$$

$$= f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)$$

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Pour le produit :

$$(f*g)(x) - (f*g)(x_0) = f(x)*g(x) - (f(x_0)*g(x_0))$$

$$= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)$$

$$= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))$$

$$\frac{(f*g)(x) - (f*g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0)$$

Comme précédemment, $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ car g est continue en x_0

$$\frac{f}{g} = f.\frac{1}{g}$$

$$(\frac{f}{g})' = f'.\frac{1}{g'} + f.(\frac{1}{g})'$$

Composition $f : E \to F, g : F \to G, gofE \to G$
On suppose f dérivable en x_0, g dérivable en $f(x_0)$ alors gof est dérivable en x et $(gof)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$

Exemple $f, g : E \to F$ dérivables en x_0, avec $f(x_0) \neq 0, \frac{f}{g}'(x_0) = (g * \frac{1}{g})'(x_0)$ Et $\frac{1}{g}$ est la composée de g et de $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}$

$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$ d'où $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Soit finalement $$\begin{aligned}(\frac{f}{g})'(x_0) &= (f \cdot \frac{1}{g})'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\end{aligned}$$

Exemple dérivée $e^{\sin(x)}$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sin(x)$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^x$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto gof(x)$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R} h'(x) = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$

Définissons f par la formule $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x^2 \neq 0$ Donc :

- f est définie sur $\mathbb{R}$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $f'(x) = \dfrac{-1x}{(1+x^2)^2}$

Dérivée de la fonction réciproque $f : E \to F$ dérivable sur E et bijective (Sa réciproque est notée f^{-1}) On note $f^{-1}of(x) = x \forall x \in E$ Donc $(f^{-1}of)'(x) = f'(x) \cdot (f^{-1})'(f(x)) = 1 \forall x \in E$

On obtient $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Exemple $\tan] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Pour $x \in \tan] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \cos x \neq 0$ et donc

$$\begin{aligned}(tan)'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)\end{aligned}$$

En effet, $1 + \tan^2(x) = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

De plus, tan est bijective, de réciproque $arctan \mathbb{R} \to] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $arctan(\tan x) = x$

donc $\tan'(x) \cdot (arctan)'(\tan(x)) = 1$ c'est à dire
$arctan'(\tan x) = \dfrac{1}{\tan'(x)} = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$
On note $z = \tan x$, $arctan'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$

Exercice a)

$$f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to]-1, 1[$$

$$x \mapsto \sin x$$

f est bijective et $f'(x)$ ne s'annule pas, donc

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

En effet,

$$\arcsin(\sin(x)) = x$$

$$(\arcsin(\sin(x)))' = x'$$

$$\cos(x) * \arcsin'(\sin(x)) = 1$$

$$\arcsin'(\sin(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$$

On note $z = \sin(x)$, on a

$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$

$$\arcsin'(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

b) de même, $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$

En effet,

$$\arccos(\cos(x)) = x$$

$$(\arccos(\cos(x)))' = x'$$

$$-\sin(x) * \arccos'(\cos(x)) = 1$$

$$\arccos'(\cos(x) = -\frac{1}{\sin(x)}$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$$

On note $z = \cos(x)$, on a

$$\arcsin'(\cos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2}}$$

$$\arcsin'(z) = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

4 Extreima et points critiques

Définitions $f : E \to F$

f admet un maximum local en $\alpha \in E$, s'il existe un voisinage V de α, tel que $\forall x \in V \cap E, f(x) \leq f(\alpha)$

f admet un minimum localen $\beta \in E$, s'il existe un voisinage V de β, tel que $\forall x \in W \cap E, f(x) \geq f(\beta)$

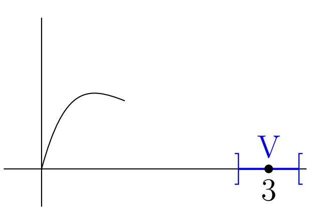
Un extremum local est un minimum local, soit un maximum local.

Proposition $f : E \to \mathbb{R}, x_0 \in E$ avec E voisinage de x_0 Si x_0 est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$

ON dit alors que x_0 est un point critique de f.

Remarque $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Les extrema sont inclus dans $\{x \in]a, b[\text{ tel que } f'(x) = 0\} \cup \{a, b\}$

Exemple (inhabituel) $f : [0, 1] \cup \{3\}$



$V \cap E = \{3\}$ $\forall x \in V \cap E, f(x) \geq f(3)$ donc $f(3)$ est un minimum local, de même, il est aussi un maximum local car $\forall x \in V \cap E, f(x) \leq f(3)$

Exemple $\sin[-\frac{\pi}{4}, \pi] \to [-1, 1]$

La restriction de la fonction sinus à $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$ admet un unique point critique.

Théorème de Rolle Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivble sur $]a,b[$ si $f(x) = f(b)$, alors il existe au moins un $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

Démonstration Notons $y = f(a) = f(b)$ f continue sur $[a,b]$ (fermé) donc il existe un minimum global et un maximum global (atteints respectivement) en α et β, c'est à dire $\forall x \in [a,b], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$

1er cas $f(\alpha) = y = f(\beta)$

La fonction est donc constante sur $[a,b]$. N'importequel $c \in]a,b[$ convient.

2er cas soit $f(\alpha) < y$ ou $y < f(\beta)$

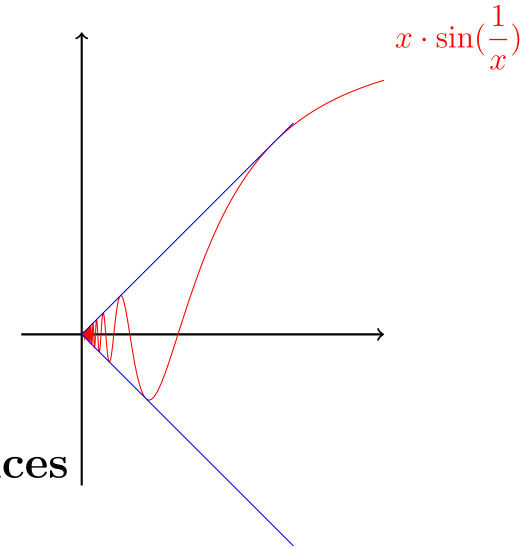
Supposons que $f(\alpha) < y$ $f(\alpha)$ est un minimum global donc un minimum local.

$\alpha \in]a,b[$, car $f(x) \neq y$ Par la proposition, $f'(\alpha) = 0$

De même, si $y < f(\beta)$, prendre $c = \beta$ convient.

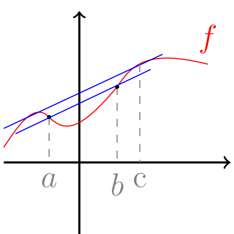
Exemple

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$



On remarque que f(0) n'est ni un minimum, ni un maximum local.

5 Acroissements finis et conséquences



Exemple

Théorème $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Démonstration Appliquer le théorème de Rolle à $g(x) = f(x) - (\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}) \cdot x$

Corollaire f est une fonction comme ci dessus,

— si $f' \geq 0$ sur $]a,b[$ alors f est croissante sur $[a,b]$
— si $f' > 0$ sur $]a,b[$ alors f est strictement croissante sur $[a,b]$
— si $f' \leq 0$ sur $]a,b[$ alors f est decroissante sur $[a,b]$
— si $f' < 0$ sur $]a,b[$ alors f est strictement decroissante sur $[a,b]$
— si $f' = 0$ sur $]a,b[$ alors f est constante $[a,b]$

Application Tableaux de variations.

Exemple

$$\sin h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \quad \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\sin h(0) = 0$ $\sin h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin h'(x) = \dfrac{e^x + e^-x}{2} = cosh(x)$
$sinh'(x) > 0$ pour tout x, donc le sinus hyperbolique est croissante.

De même

$$\cos h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \quad \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$\cos' h(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}{}'}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sin h$
$\cos(0) = 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$sin'h$		$+$	
$sinh$			$+\infty$
		0	
	$-\infty$		

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$cos'h$		$-$	0	$+$	
$cosh$	$+\infty$				$+\infty$
			1		

$$\tan h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{sinh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})}$$
$$= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

De la même façon, $tanh(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} = -1$

Remarque $\sin h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective $\sin h^{-1} = arg \sin h$
$\cos h : \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty[$ est bijective $\cos h^{-1} = arg \cos h$

V

Dérivées d'ordre supérieur

But Approcher localement une fonction f par des polynômes.

Définition
$$k \in \mathbb{N}^+, k! = 1 * 2 * 3 * ... * k$$
$$0! = 1$$

Exemple

— polynome de degré 0 $f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))$
$$= \epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \text{ Si f continue}$$

— Polynôme de degré 1 si f est dérivable :
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))$$
$$(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)) = (x - x_0)(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0))$$
$$= \epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \text{ car f est dérivable}$$
On voudrait
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon(x)$
avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

Objectifs du cours :

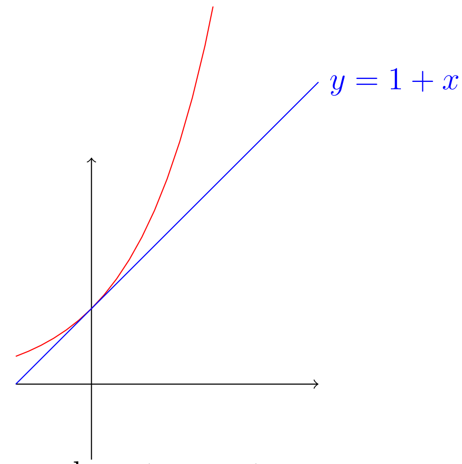
1. Comprendre $f''(x_0), f'''(x_0)$
2. Comprendre $\epsilon(x)$

Exemple En 0 ordre 2 : $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$

Application :

— Calcul de limites : $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$

— Position d'un graph par rapport à sa tangeante. On considère $f(x) -$ tangeante :



$$\begin{aligned} e^x - (x-1) &= \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \\ &= x^2(\frac{1}{2} + \epsilon(x)) \end{aligned}$$

$x^2 > 0$ et $\frac{1}{2} + \epsilon(x) > 0$ donc près de 0, la fonction est au dessus de sa tangeante.

1 Dérivées d'ordre supérieur

Définition $f : I \to \mathbb{R}$ I est un intervalle ouvert. On dit que f est C^0 si elle est :

— C^0 si elle est continue sur I.

— C^1 si elle est dérivable sur I et que f' est continue.

— C^2 si f est dérivable deux fois et f" est continue sur I

— C^k si f est dérivable k fois et $f^{(k)}$ est continue sur I

— C^∞ si f est $C^k \forall k \in \mathbb{N}$

Exemple $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \to C^0$ car $f(x)$ est dérivable, donc continue.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sin(\frac{1}{x}) + x^2(\frac{-1}{x^2})\cos(\frac{1}{x}) \\ &= 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Donc $f(x)$ n'est pas C^1 car $f'(x)$ n'est pas continue ($\cos(\frac{1}{x})$ n'est pas continue en 0).

2 Développement limité et formule de Taylor-Young

Définition Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I est un intervalle ouvert. $x_0 \in I$. f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n s'il existe :

— un polynome de degrés n : $P(x) = a_0 + a_1.x + ... + a_n.x^n$

— Un fonction $\epsilon :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ avec $\epsilon \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ tel que

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0).\epsilon(x) \text{ pour } x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_n)^n\epsilon(x)$$

Dans ce cas P est la partie principale du développement limité.

— degré de $P = n$
— ϵ définie près de x_0 et tel que $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

Théorème Si un tel développement limité existe, alors il est unique.

Exemple $p(x) = x^4 + 3x^2 - x + 17$. $DL_3(0) = 17 - x + 3x^2 + x^3 \cdot \epsilon(x)$

Formule de Taylor-Young

Théorème $f : I \to R, I$ intervalle ouvert et $x_0 \in I$
Si f est C^n sur I, alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0
De plus, $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} * (x - x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$
avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ pour $\delta > 0,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$

Exemple

1. $f(x) = exp(x)$ en $x_0 = 0$
   $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$
2. $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 1$
   $DL_6(0) : Q(x) = 1 + 3x^2 + x^3 + x^6 \epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0)$
   $DL_2(0) : Q(x) = 1 + 3x^2 + x^2 \epsilon(x)$ avec $(\epsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0)$
   $DL_2(1) : Q(x) = Q(1) + Q'(1) + \frac{Q''(1)}{2} + (x - 1)^2 \epsilon(x)$

$$\text{Or } Q'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$\text{donc } Q'(1) = 9$$

$$\text{et } Q''(x) = 6x + 6$$

$$\text{donc } Q''(x) = 12$$

$$\begin{aligned} DL_2(1) : Q(x) &= 5 + 9(x - 1) + \frac{12}{2}(x - 1)^2 + (x - 1)^2 \epsilon(x) \\ &= 5 + 9(x - 1) + 6(x - 1)^2 + (x - 1)^2 \epsilon(x) \end{aligned}$$

3. $f(x) = \ln(1 + x)$
   $DL_3(0) : f(x) = 0 + 1 \cdot x + -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + x^3 \epsilon(x)$

$$\begin{array}{rll} & f'(x) = \dfrac{1}{1+x} & \text{d'ou } f'(0) = 1 \\ \text{car} & f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{d'ou } f''(0) = -1 \\ & f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} & \text{d'ou } f'''(0) = 2 \end{array}$$

Comme $3! = 1 * 2 * 3$ on obtient $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$f(x) = \frac{1}{1-x} DL_n(0)$?

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n\epsilon(x)$

En effet, la somme des N premiers termes de la suite géométrique de premier terme q et de raison x est : $q\frac{1-x^N}{1-x}$

pour $q = 1$:

$\frac{1-x^N}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^{N-1}$

$$\text{Donc} \quad \begin{aligned} \frac{1}{1-x} - \frac{\overbrace{(1 + x + x^2 + ... + x^n)}^{N-1=n}}{1-x} &= \frac{1}{1+x} - \frac{1-x^{n+1}}{1+x} \\ &= \frac{1-(1-x^{n+1})}{1-x} \\ &= \frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \underbrace{(\frac{x}{1-x})}_{\epsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0} \end{aligned}$$

Conclusion :

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n\epsilon(x)$

Remarque : $(\frac{1}{1-x})^{(17)}(0) = 17!$

4. $f(x) = \sin(x) DL_4(0)$?

$$g(0) = \sin(0) = 0$$

$$g'(0) = \cos(0) = 1$$

$$g''(0) = -\sin(0) = 0$$

$$g'''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$g^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$$

D'où $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\epsilon(x)$

Remarque comme sin est impaire, seuls les coefficients impairs apparaissent dans la partie principal.

3 Formule de Taylor-Lagrange

Qui aide à spécifier ϵ

Théorème $f : E \to \mathbb{R}$, I un intervalle et $x_0 \in I$ et fC^n sur I.

Pour tout x de I, il existe x entre x et x_0 tel que $f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+...+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$

Remarque c dépend de x !
$\frac{f^{(n)}(c(x))}{n!}(x-x_0)^n$

Remarque pour $n = 1$ on retrouve le théorème des accroissements finis.
— On retrouve Taylor-Young en posant

$$\epsilon(x) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(x_0))$$

Car f est C^n, le $f^{(n)}$ est continue.

4 Opération usuelles sur les DL

Théorème $f, g : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert, $x_0 \in I$. Si f et g admettent un DL à l'ordre n en x_0 alors :

— $f+g$ aussi dont la partie principale est la somme des parties principales des DL respective de f et g.
i.e si $f(x) = P(x) + x^n\epsilon_1(x)$ avec P polynôme de degré $\leq n$ et $\epsilon_1 \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ et si $g(x) = Q(x) + x^n\epsilon_2(x)$ avec Q polynôme de degrés $\leq n$

Alors $(f+g)(x) = (P+Q)(x) + x^n\epsilon_3(x)$

— $f \cdot g$ aussi et sa partie principale est le produit des parties principales TRONQUE à l'ordre n.

Exemple $DL_2(0)$ de $e^x \cdot \sin(x)$

$$DL_2(0) \text{ de } e^x \ : \ 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

$$DL_2(0) \text{ de } \sin(x) = x + x^2\epsilon(x)$$

Donc $DL_2(0)$ de $e^x \cdot \sin(x)$ est : $(1 + x + \frac{x^2}{2}) \cdot (x) + x^2\epsilon(x)$ À TRONQUER, c'est à dire :

$$e^x \cdot \sin(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$$

Théorème $f : E \to \mathbb{R}, g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$, $x_0 \in I$
Si f admet un $DL_n(x_0)$ et que g admet un $DL_N(f(x_0))$ alors gof admet un $DL_n(x_0)$ et sa partie principale est la composé des parties principales tronque à l'ordre n.
i.e $f(x) = P(x) + x^n\epsilon(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\epsilon(x)$ alors :
$gof(x) = R(x) + x^n\epsilon(x), R(x) = QoP(x)$ TRONQUE

Exercice $DL_3(0)$ de $e^{\sin x}$?

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)$$

En effet, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$. De plus, $\sin(0) = 0$ Donc on veut le DL de exp en 0 :

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + y^3\epsilon(y)$$

Par composition,

$$e^{\sin x} = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6})^3 + x^3\epsilon(x)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \overbrace{\frac{1}{2}(x^2)}^{\text{On a tronque}} + \overbrace{\frac{1}{6}x^3}^{\text{Ici aussi !}} + x^3\epsilon(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + 0x^3 + x^3\epsilon(x) \end{aligned}$$

5 Applications des DL

5.1 Calcul de limites

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^x - 1}{(1+x)^2 - 1} && \textit{lim} \text{ en } 0? \\
&= \frac{(1 + x + x\epsilon(x)) - 1}{x(x+2)} \\
&= \frac{x(1+\epsilon(x))}{x(x+2)} && \text{avec } \epsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\
&= \frac{1+\epsilon(x)}{x+2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} && \text{par opérations usuelles sur les limites}
\end{aligned}$$

Exemple $g(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x))}{x^2} = \underbrace{\dfrac{1}{2} - \epsilon(x)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} && \textit{lim} \text{ en } 0 \\
\sqrt{1+y} &= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + y^2\epsilon(y) \\
\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2 + (\cos x - 1)} &= \sqrt{2(1 + \frac{1}{2}(\cos x -))} \\
&= \sqrt{2}(\sqrt{1 + \frac{\cos x - 1}{2}}) \\
\frac{\cos x - 1}{2} &= \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)) = -\frac{x^2}{4} + x^2\epsilon(x) \\
\text{D'ou } \sqrt{1 + \frac{1}{2}(\cos x - 1)} &= 1 + \frac{1}{2}\frac{-x^2}{4} + x^2\epsilon(x) \\
&= 1 - \frac{x^2}{8} + x^2\epsilon(x) \\
\text{car } (\sin x)^2 &= x^2 + x^2\epsilon(x) \\
\text{Donc } h(x) &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}(1 - \frac{x^2}{8} + x^2\epsilon(x))}{x^2 + x^2\epsilon} \\
&= \frac{x^2(\frac{\sqrt{2}}{8} + \epsilon(x))}{x^2(1+\epsilon x)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{8} + \epsilon(x)}{1 + \epsilon(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\sqrt{2}}{8}
\end{aligned}$$

Remarque $DL_N(x_0)$ de gof.
Il faut que :

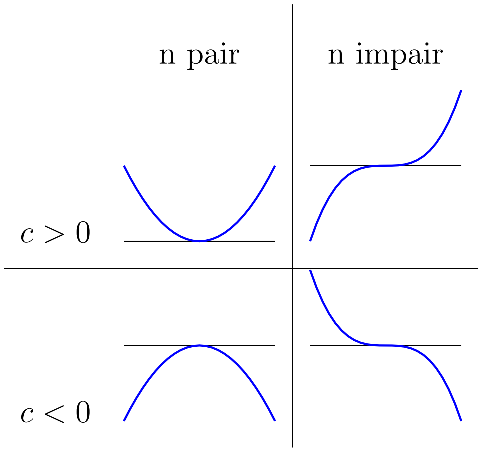
— $gof(x)$ existe pour $x \in]x_0 - \delta; x + \delta[$.

— f admette un $DL_n(x_0)$

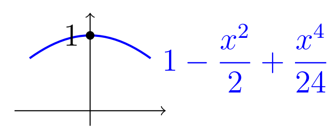
— g admette un DL_n en $f(x_0)$

5.2 signe local d'une fonction

Proposition $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$, si $f(x) = c(x-x_0)^n + (x-x_0)^2\epsilon(x)$ avec $c \neq 0, \epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

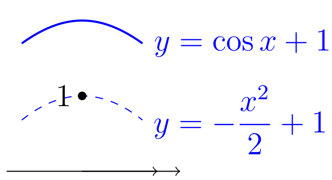


Exemple $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{}$ 0

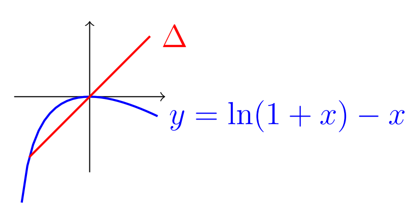


$$\begin{aligned} \text{En particulier : } (\cos x - 1) &= -\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)}_{x=2\text{: pair}} \\ c &= -\frac{1}{2} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{De plus, } \cos x - (1 - \frac{x^2}{2}) = \underbrace{\frac{1}{24}}_{c>0} x^{\overbrace{4}^{\text{n pair}}} + x^4\epsilon(x)$$



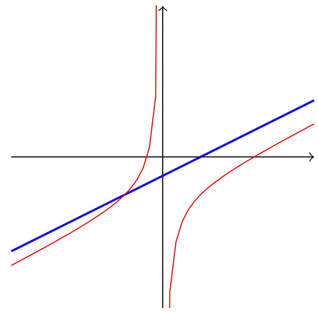
Exemple $x \mapsto \ln(1+x)$
Sa tangeante en 0 est la droite $\Delta : y = x$. De plus, $\ln(1+x) = x + -\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$



Donc $\ln(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$

5.3 Position par rapport à une asymptote

Exemple $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x+2x^2}$



$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x}+1}\right)$$
$$= \frac{x}{2}\left(\frac{1}{1+\underbrace{(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2})}_{u}}\right)$$

$$u(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^2 \qquad \text{avec } y = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^3\epsilon(u)$$
$$= 1 - (\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}) + (\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2})^2 + \frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})$$
$$= 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})$$
$$= 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})$$
$$f(x) = \frac{x}{2}(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(x))$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(x)$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(x)$$
$$f(x) - (\frac{x}{2} - \frac{1}{4}) = \underbrace{-\frac{1}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(x)}_{\text{asymptote}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$
$$\Delta = y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

VI

Intégration

1 Introduction

Motivation : "Sommes continues" et Calcul d'aires.

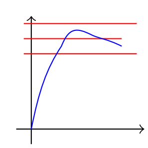
Exemple Soit un coureur. Première course sur une machine.
- $10km.h^{-1}$ pendant 20 minutes
- $12km.h^{-1}$ pendant 20 minutes
- $14km.h^{-1}$ pendant 20 minutes

Il aura donc parcouru : $(10 * \frac{1}{3}) + (12 * \frac{1}{3}) + (14 * \frac{1}{3}) = 12km$

2ème course

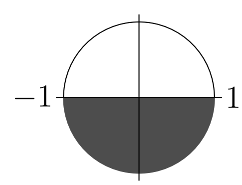
La distance parcourue est la somme de la distance parcourue instantanément pour chaque instant.

"somme continue" : $\int_0^1 v(t)dt \to$ Calcul de l'air sous la courbe



2ème exemple On veut voir le cercle comme le graphe d'une fonction. On considère donc (par exemple) la partie supérieur du cercle.

L'équation du cercle centré en 0 et de rayon 1 est :



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Ou encore} \quad y^2 &= 1 - x^2 \\ \text{Ou encore} \quad y &= \pm\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

On se restreint à $y \geq 0 : y = \sqrt{1 - x^2}$ L'Aire(DemiCercle) $= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx$

1.1 Changement de variable

$$x = \cos t$$

$$\cos : [1, \pi] \to [-1, 1]$$

Cette fonction est bijective et continue.

$$dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

$$= (-\sin t)dt$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t} \cdot (-\sin t)dt$$

Or sur $[0, \pi]$, $\sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t$

$$A = \int_{\pi}^{0} -sin^2 tdt = \int_{0}^{\pi} \sin^2 tdt$$

1.2 intégration par parties

idée $(f.g)' = f'g + fg'$
donc : $fg' = (f.g)' - f'g$
Avec la linéarité de l'intégrale ($\displaystyle\int (u+v)(t)dt = \int (u)(t)dt + \int (v)(t)dt$)
donc $\displaystyle\int_a^b fg'(t)dt = \int_a^b (fg)'(t)dt - \int_a^b f'g(t)dt$
Ici, $\displaystyle A = \int_0^\pi \sin t \cdot \sin tdt$

On pose $f'(t) = \sin t$ et g telle que $g'(t) = \sin(t)$

$$\int_0^\pi \sin t \sin tdt = \int_0^\pi [\sin t \cdot (-\cos t)]dt - \int_0^\pi [\cos t \cdot (-\cos t)dt]$$

$$\int_0^\pi \sin^2 tdt = \underbrace{[-\sin t \cos t]_0^\pi}_{0} + \int_0^\pi \cos^2 tdt(1)$$

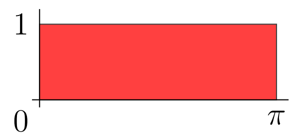
1.3

On sait que : $\forall t \in \mathbb{R}, \sin^2 t + \cos^2 t = 1$

En particulier,

$$\int_0^\pi (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \int_0^\pi 1dt$$
$$\int_0^\pi \cos^2 tdt + \int_0^\pi \sin^2 tdt = \pi$$

$$\int_0^\pi \cos^2 tdt + \int_0^\pi \sin^2 tdt = \pi$$
$$\text{D'après (1)} \int_0^\pi \cos^2 tdt = \int_0^\pi \sin^2 tdt$$

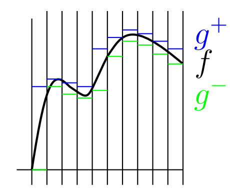


Donc $\boxed{2\int_0^\pi \sin^2 tdt = \pi \Rightarrow A = \int_0^\pi \sin^2 tdt = \frac{\pi}{2}}$

2 Définition de l'intégrale

2.1 "Culture"

$$\overbrace{\int_a^b g^-(t)dt}^{\text{On sait calculer}} \leq \int_a^b f(t)dt \leq \overbrace{\int_a^b g^+(t)dt}^{\text{Ça aussi}}$$



Définition $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est étapée s'il existe $a = t_0 < t_1 < t_{n-1} < t_n = b$
Si $\forall i \in [0, n-1], g_{|]t_i,t_{i+1}[}$

Définition 2 Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ étapée, on définit :

$$\int_a^b g(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

Définition 3 Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est <u>integrable</u> s'il existe 2 suites de fonctions $(g_n^-)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ étagées telles que :

$$\begin{cases} -g_n^- \leq f \leq g_n^+ \text{ et} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b g_n^-(t)dt \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b g_n^+(t)dt \end{cases}$$

existent et soient égales.

Dans ce cas, on note cette limite commune $\overset{b}{\underset{a}{\lim}} f(t)dt$

Par convention, si $a < b$,

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Théorème Cette définition fonctionne, la démonstration est admise.

2.2 Retour à la vrai vie

Théorème Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue ou monotone, alors f est intégrable sur $[a,b]$

Proposition L'intégrale possède les propriétés suivantes.

— (positivité) si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$

— (Linéarité) $\begin{cases} \displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \\ \displaystyle\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda(\int_a^b f(t)dt) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$

— $\displaystyle|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

3 Liens entre primitives, intégrales (et dérivées)

Définition SOit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, continue. F est <u>une primitive</u> de f si F dérivable sur $]a,b[$ et $F' = f$.

Remarque Alors F est $C^1(]a,b[)$

Théorème

1. Soit F et G des primitives de f sur $]a,b[$. Alors $F - G = constante$ sur $]a,b[$
2. Pour toute primitive de F de f sur $]a,b[$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Démonstration Par définition des primitives, F et G sont C^1 et $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$
Donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F - G = c$

Attention : Soit $f :]-1,0[\cup]2,3[$ et $f(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \in]-1,0[\\ 3 \; si \; x \in]2,3[\end{cases}$

Remarque equivalente au théorème Si $u :]a,b[\to \mathbb{R}$, de classe C^1 alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)dt = u(b) - u(a)$

3ème énoncé équivalent
Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, continue, alors la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \text{ pour } c \in [a,b]$$

est <u>LA</u> pritimive de f qui s'annule en c .

Ce théorème s'appelle le <u>"Theoreme fondamental de calcul integral"</u>

Démonstration

— $F(x) = 0$

— On veut montrer que F'=f . Fixons$x_0 \in]a, b[$.

On veut montrer que $|\dfrac{F(x) - F(x_0}{x - x_0} - f(x_0)| \xrightarrow[x \to x_0]{?} 0$

a

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_c^x f(t)dt - \int_x^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_c^x f(t)dt + \int_{x_0}^c f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^x f(t)dt \qquad \text{Par la relation de Chasles} \end{aligned}$$

$$\text{D'ou } \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt$$

b

$$\begin{aligned} f(x_0) \in \mathbb{R} \text{ donc } \int_{x_0}^x f(x_0)dt &= f(x_0) \int_{x_0}^x dt \\ &= f(x_0) \cdot [t]_{x_0}^x = f(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

Donc $f(x_0) = \dfrac{1}{x - x_0} \displaystyle\int_{x_0}^x f(x_0)dt$

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^c f(x_0)dt \\ &= \frac{1}{x - x_0} (\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^x f(x_0)dt \\ &= \frac{1}{x - x_0} (\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt) \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, comme f est continue en x_0, i.e $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]a, b[, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0| \leq \epsilon$

Pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ et pour tout t compris entre x et $x_0, |t - x_0| \leq |x - x_0| < \delta$ pour ce choix de x.

Pour tout t entre x et x_0, $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon$

$$\begin{aligned} \frac{|F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)| = |\frac{1}{x - x_0}| \cdot |\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt| &\leq |\frac{1}{x - x_0}| \cdot |\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt| \\ &\leq \frac{1}{x - x_0} |\int_{x_0}^x \epsilon dt| = \frac{1}{x - x_0} \cdot \epsilon \cdot |x - x_0| \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Exemple $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue

$$\underbrace{(\int_{e^x}^{\sin x} \frac{1}{1+t^2} dt)}_{H(x)}{}' = f(x)$$

Soit $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H(x) &= -\int_c^{e^x} \frac{dt}{1+t^2} + \int_c^{\sin x} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= -F(e^x) + F(\sin x) \text{ ou } F(x) = \int_c^x \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} H'(x) &= -(F(e^x))' + (F(\sin x))' \\ &= -(e^x \cdot \frac{1}{1+(e^x)^2} + \cos x \cdot \frac{1}{1+(\sin x)^2} \\ H'(x) &= \frac{-e^x}{1+e^{2x}} + \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \end{aligned}$$

4 Intégration par parties

Rappel $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe C^1, $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

Donc $\int_a^b (fg)'(t)dt = \int_a^b (f'g)(t)dt + \int_a^b (fg')(t)dt$

Ou encore $\underbrace{[fg(t)]_a^b}_{\text{Notation pour} fg(b)-fg(a)} = \int_a^b (f'g)(t)dt + \int_a^b (fg')(t)dt$

D'où $\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$

Exemple $\int_a^b ln(t)dt = ?$

$$ln(t) = 1 * ln(t)$$

Par intégration par partie, $\int_a^b ln(t)dt = [t \cdot \ln t]_a^b - \int_a^b \frac{t}{t} dt = (b \ln b - a \ln a) - \int_a^b dt$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \int_a^b ln(t)dt &= (b \ln b - a \ln a) - (b-a) \\ &= (b \ln b - b) - (a \ln a - a) \end{aligned}$$

Exemple 2

$$\begin{aligned}\int_a^b \arctan(t)dt &= [t\arctan t]_a^b - \int_a^b \frac{t}{1+t^2}dt \\ &= (b\cdot\arctan b - a\cdot\arctan a) - (\int_a^b \frac{t}{1+t^2}dt)\end{aligned}$$

De plus, $\dfrac{t}{1+t^2} = \dfrac{f'(t)}{f(t)}$ avec $f(t) = 1+t^2 \geq 0$

$$\begin{aligned}\text{D'ou } \int_a^b \frac{1}{1+t^2}dt &= \frac{1}{2}[\ln|f(x)|]_a^b \\ &= \frac{1}{2}(\ln(1+b^2) - \ln(1+a^2))\end{aligned}$$

Donc une primitive de $\arctan(x)$ est : $F(x) = x\cdot\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

Exemple 3 $\displaystyle\int_a^b te^t dt = (b-1)e^b - (a-1)e^a$ avec $f'(t) = e^t$ et $g(t) = t$

En effet,

$$\begin{aligned}\int_a^b (f'g)tdt &= [fg(t)]_a^b - \int_a^b (fg')(t)dt \\ \int_a^b (e^t\cdot tdt) &= be^b - ae^a - \int_a^b e^t dt \\ &= be^b - ae^a - e^b + e^a \\ &= e^b(b-1) - e^a(a-1)\end{aligned}$$

5 Changement de variable

Rappels $(Fou)' = u'F'ou$. Donc Fou est une primitive de $u'\cdot fou$
Cf exemple 2 (précédent) :

$$u(x) = 1+x^2$$

$$F(x) = \ln x$$

$$\text{et } f(x) = \frac{1}{x}$$

Cas fréquent : $\int^x u'(t) \cdot u(t)dt = \frac{1}{2}u^x$

$$\int^x \sin t \cos t dt = \frac{\sin^2 x}{2}$$
$$\int^x \frac{\ln t}{t} dt = \frac{\ln^2 x}{2}$$
$$\int^x \frac{arctant}{1+t^2} dt = \frac{arctan^2 x}{2}$$
$$\int e^{2t} dt = \frac{e^{2x}}{2}$$

Théorème Soit $u : I \to J$ bijective et dérivable. Si G est une primitive de $fou \cdot u'$ sur I, alors Gou^{-1} est une primitive de f sur J.

Exemple calcul de $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

Soit $f : \begin{cases}]-1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x}} \end{cases}$ et $u : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \to]-1,+\infty[\\ t \mapsto t^2-1 \end{cases}$ est bijective, et dérivable.

On pose $x = t^2 - 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x}} \\ fou(x) &= \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2}} \\ &= \frac{t^2-1}{t} \qquad \text{Car } t > 0 \\ u'(t) &= 2t \\ (fou.u')(t) &= \frac{t^2-1}{t} \cdot 2t \\ &= 2(t^2-1) \end{aligned}$$

G est une primitive de $2(t^2-1)$

$$\begin{aligned} G(x) &= \int^x 2(t^2-1)dt \\ &= [\frac{2}{3}t^3 - 2t]^x \\ &= \frac{2}{3}x^3 - 2x \end{aligned}$$

Par le théorème de changement de variable, Gou^{-1} est une primitive de f avec $u^{-1} : \begin{cases}]-1,+\infty[\to \mathbb{R}^{+*} \\ t \mapsto \sqrt{t+1} \end{cases}$

D'où $\frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1}$ est une primitive de f sur $]-1,+\infty[$

Exemple

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx \text{ air du demi cercle superieur du cercle trigo qui vaut } \frac{\pi}{2}$$

Prenons : $x = \sin t$ et $\sin[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ bijective et C^∞

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t \cdot dt \text{ Changement de borne et de variable où l'on dérive} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (cost)^2 dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(2t)}{2} dt \\
&= [\frac{t}{2}]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{[\frac{\sin(2t)}{4}]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Remarque Primitive de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

Comme $G : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$ est une primitive de $fou \cdot u'$, par le théorème, Gou^{-1} est une primitive de f.

Une primitive de f serait donc :

$$F(x)\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4}$$

$$\text{De plus} \qquad \sin(2t) = 2\sin t \cos t$$

$$\text{Donc} \qquad \sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)$$

$$2x\sqrt{1+x^2}$$

$$F(x) = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

Théorème $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ; $x_0 \in I$. On suppose que f admet un DL à l'ordre n en $x_0 = f(x) = P(x) + x^n\epsilon(x)$ avec $\begin{cases} P \text{ polynome de degre } \leq n \\ \epsilon \xrightarrow{x \to x_0} []0 \end{cases}$

Alors une primitive F de f sur I admet un DL à l'ordre $n+1$ en x_0 :

$$F(x) = F(x_0) + Q(x) + x^{n+1}\epsilon(x)$$

avec Q la primitive de P qui s'annule en x_0

Exemple $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

f admet un DL en $x_0 = 0$ à l'ordre 3 : $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\epsilon(x)$
Donc $F(x) = \ln(1+x)$ primitive de f sur $]-1; +\infty[$
F admet un DL en 0 à l'ordre 4 :

$$F(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + x^4\epsilon(x)$$

Exemple 2 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$DL_4(0) = f(x) = 1 - x^2 + x^4 + x^4\epsilon(x)$$

$F(x) = \arctan x$ primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ admet un $DL_5(0)$.

$$F(x) = 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} + x^5\epsilon(x)$$

6 Fractions rationnelles

$(\dfrac{P}{Q})$ avec P, Q des polynômes.

On décompose Q en produit de polynômes de degré 1 et de degré 2 SANS RACINE

$$Q(x) = A_1^{\alpha_1} \cdot A_2^{\alpha_2} ... A_n^{\alpha_n} \cdot B_1^{\beta_1} \cdot B_2^{\beta_2} ... B_n^{\beta_n}.$$

où $\begin{cases} A_i(x) = a_i + b_i \\ B_i(x) = c_j x^2 + d_j x + e_i \end{cases}$

Exemple $Q(x) = x^3 - 1$

$$Q(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

Rappel

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + bx + c)$$
$$= x^3 + bx^2 + cx - x^2 - bx - c$$
$$= x^3 + (b-1)x^2 + (c-b)x - c$$
$$b = c = 1$$

$$Q(x) = A_1(x) \cdot B_1(x)$$
$$A_1(x) = x - 1 \text{ et } B_1(x) = x^2 + x + 1$$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= T(x) + \frac{C_{1,1}}{A_1} + \frac{C_{1,2}}{A_1^2} + ... + \frac{C_{1,\alpha_i}}{A_1^{\alpha_i}} \\ &+ \frac{C_{2,1}}{A_2} + \frac{C_{2,2}}{A_2^2} + ... + \frac{C_{2,\alpha_i}}{A_2^{\alpha_i}} \\ &+ ...\end{aligned}$$

où α_i est la puissance maximal qu'avait A_j dans la décomposition de $Q(x)$

Avec T(x) de même ordre que Q(x) si la différence entre P(x) et Q(x) est supérieur à 0 (sinon il n'existe pas).

Exemple

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+2)^3(x+7)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} + \frac{D}{x+7} \\ &+ \frac{d_{1,1}x + e_{1,1}}{B_1(x)} + \frac{d_{1,2}x + e_{1,2}}{B_1(x)^2} + ... + \frac{d_{1,\alpha_i}x + e_{1,\alpha_i}}{B_1(x)_i^\alpha} \\ &+ \frac{d_{2,1}x + e_{2,1}}{B_2(x)} + \frac{d_{2,2}x + e_{2,2}}{B_2(x)^2} + ... + \frac{d_{2,\alpha_i}x + e_{2,\alpha_i}}{B_2(x)_i^\alpha} \\ &+ ...\end{aligned}$$

avec $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

Retour sur l'exemple

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^3-1} &= \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= T(x) + \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \qquad \text{avec a, b, c des réels} \\ &= \frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\end{aligned}$$

Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$ax^2 + ax + a + bx^2 - bx + cx - c = 1$$

$$(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c) = 1$$

$$a+b=0, a-b+c=0, a-c=0$$

$$\begin{cases} a = -b \\ 2a + c = 0 \\ a = 1 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right)$$

Une primitive de $\frac{1}{x-1}$ est $x \mapsto \ln(|x-1|)$ Que dire pour $\frac{x+2}{x^2+x+1}$?

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}}_{\text{Primitive de } \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{3}{x^2+x+1}}_{?}$$

Rappel La primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ est $\arctan(x)$.

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1} &= \frac{3}{2}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{\frac{3}{4}(\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2+1)} \\ &= 2\frac{1}{\underbrace{[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})]}_{X^2}+1}(*)\end{aligned}$$

$$X = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}) \rightsquigarrow 2\frac{1}{1+X^2}$$

Un primitive de (*) est : $2\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sqrt{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2$$

Exemple

$$F(x) = \frac{3x^3+6x^2}{x^2+2x-3} = \underbrace{T(x)}_{\text{de degre1}} + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$$

$$x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$$

$$3x^3+6x^2 = T(x)(x^2+2x-3) + R(x) \qquad R(x) \text{ est de degré plus petit que celui de } Q(x)$$

$$= (3x+c)(x^2+2x-3) + R(x)$$

$$(3x+c)(x^2+2x-3) = 3x^3+6x^2-9x+cx^2+2cx-3c$$

$$= 3x^3+(6+c)x^2+(-9+2c)x-3c$$

$$= 3x^3+6x^2+(-9x) \qquad c=0 \text{ pour retrouver } P(x)$$

$$\text{Donc } 3x^3+6x^2 = \underbrace{3x}_{T(x)}(x^2+2x-3) + \underbrace{9x}_{R(x)}$$

$$F(x) = \frac{3x^3+6x^2}{x^2+2x-3} = \frac{3x(x^2+2x-3)+9x}{x^2+2x-3} = 3x + \frac{9x}{x^2+2x-3}$$

$$= 3x + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$$

Exemple

$$\frac{x^4+1}{x(x^2-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{x+1} + \frac{e}{(x+1)^2}$$

$$x(x^2-1)^2 = x(x-1)^2(x+1)^2$$

7 Fractions rationnelles en cos et en sin

7.1 Polynômes

On cherche une primitive de $\cos^n x \cdot \sin^m x$.

— Supposons que n ou m soit impair, par exemple :

$$m = 2p+1$$

$$\cos^n x \cdot \sin^{2p+1} x = \cos^n x \cdot (\sin^2 x)^p \cdot \sin x$$

$$= \cos^n \cdot (1-\cos^2 x)^p \cdot \sin x$$

$$\int f(x)dx = \int \cos^n x \cdot \sin^m x \cdot dx = -\int \cos^n x (1-\cos^2 x)^p (-\sin x) dx$$

$$= -\int X^n (1-X^2)^p dX \qquad \text{avec } X = \cos x$$

Donc si F est une primitive de $t^n(1-t^2)^p$ alors $G(x) = -F\cos(x)$ est une primitive de f

— Supposons que m <u>et</u> n soient pairs On peut par exemple remplacer $\sin^m x = (\sin^2 x)^p = (1-\cos^2 x)^p$

Puis utiliser $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ à répétition.

Exemple

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x (1-\cos^2 x) dx$$

$$= \int \cos^2 x dx - \int \cos^4 x dx$$

$$\cos^4(x) = (\cos^2 x)^2 = (\frac{1+\cos 2x}{2})^2$$

$$\int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}$$

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}(\int dx + 2\int \cos(2x)dx + \int \cos^2(2x)dx)$$

$$= \frac{1}{4}(t + \sin(2t) + \int (\frac{1+\cos(4x)}{2})dx)$$

$$\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2}$$

$$\int \cos^2(2x) = \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{\cos(4x)}{2} dx$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin(4x)}{8}$$

$$\text{D'où } \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x dx = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{1}{4}(t + \sin(2t) + \frac{t}{2} + \frac{\sin(4t)}{8})$$

$$= \frac{7t}{8} + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{\sin(4t)}{32}$$

7.2 Fractions rationnelles

$$\frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} = R(\cos x, \sin x)$$

Regles de Bioche : Si $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariant par :

- $x \mapsto -x$ poser $x = \arccos(t)$
- $x \mapsto \pi - x$ poser $x = \arcsin(t)$
- $x \mapsto \pi + x$ poser $x = \arctan(t)$

Exemple $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$

$x \mapsto \sin x dx$

- $\sin(-x)d(-x) = (-\sin x)(-dx) = \sin x dx$ OK
- $\sin(\pi - x)d(\pi - x) = (\sin x)(-dx) = -\sin x dx$
- $\sin(\pi + x)d(\pi + x) = (-\sin x)(dx) = -\sin x dx$

Sinon, on peut poser $t = \tan(\dfrac{x}{2})$

<u>En particulier</u>,

- $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$
- $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
- $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

<u>En effet</u>,

$$\tan(\frac{x}{2}) = \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} = \frac{\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}$$

$$\text{et } \sin x = \sin(2 \cdot \frac{x}{2}) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

$$\text{d'ou } 2\tan(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{x}{2}) = \sin(x)$$

$$\tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-\cos^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} - 1$$

$$\text{Donc } \tan^2(\frac{x}{2}) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} \text{ soit } \cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$$

$$\text{Et on obtient } \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \sin x$$

Exercice Montrer $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx = -\frac{1}{4\sin^4 x} + \frac{1}{2\sin^2 x}$

VII

Equations différentielles

Etude d'équations dont la variable est une fonction permettant de décrire des fonctions.

Exemple $f(x) = e^x$ est la seul fonction C^1 telle que

$$\begin{cases} f' = f \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

Exemple Variation de population $y(t)$ en fonction du temps.

Modèle 1 $y' = ky, k \in \mathbb{R}$ Ce modele est trop simpliste.

Modèle 2 $y' = k(t)y$, k une fonction continue. La variation n'est pas nécessairement linéaire en la population.

Modèle 3 $y' = k(t)g(y)$ avec k, g des fonctions continues. $\boxed{\frac{dy}{dt} = k(t)g(y)}$ Pour g différent de 0,

$$\frac{dy}{g(y)} = k(t)dt$$

Par "primitivisation" :

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)dt$$

Exemple

$$g : \quad y \mapsto \quad y^2$$

$$\mathbb{R} \to \quad \mathbb{R}^+$$

$$k : \quad t \mapsto \quad 6t$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(E) \quad y' = \quad 6ty^2$$

ou encore

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 6tdt$$

$$\text{Soit } -\frac{1}{y} = 3t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{On obtient} y(t) = \frac{1}{-3t^2 - c}$$

$$= \frac{1}{d - 3t^2}, \; d \in \mathbb{R}$$

C'est à dire la fonction $y(t) = \dfrac{1}{d - 3t^2}$ avec $d \in \mathbb{R}$ sont des solutions de (E), sur I (à préciser)

2ème étape Utiliser les conditions initiales pour trouver d.

Conditions initiales : $y(0) = 2$ (on avait deux individus à l'instant $t = 0$)

En particulier, $y(0) = \dfrac{1}{d} = 2$

soit $d = \dfrac{1}{2}$

D'où $y(t) = \dfrac{2}{1 - 6t^2}$ est une solution de (E) qui vérifie $g(0) = 2$

Problème : quel est l'intervalle I ?

La fonction y est définie sur : $]-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{6}[\cup]-\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}[\cup]\frac{\sqrt{6}}{6}; +\infty[$

Ici, $y : t \mapsto \dfrac{2}{1 - 6t^2}$ est solution de (E) sur $]-\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}[$ et vérifie $y(0) = 2$

Remarque On cherchait une fonction dérivable (pour "y'" soit défini). Si on trouve y, en fait y est de classe C^1 (car $k(t)g(t)$ est continue)

1 Équations différentielles linéaires, d'ordre 1

$(E) : \overbrace{y'}^{\text{ordre 1}} = a(t) \underbrace{y}_{\text{"linéaire"}} + \underbrace{b(t)}_{\text{Non homogène}}$ avec $a, b : I \to \mathbb{R}$ avec I une intervalle ouvert et a, b des fonctions continue.

Résoudre (E) c'est trouver toutes les fonctions C^1 qui vérifient (E) pour tout $t \in I$. Ici (par (E)), ceci est faisable.

Résolution

1.1 Équation homogène associée (on oublie "$b(t)$")

$$(E_0) y' = a(t)y$$

Est une équations à variables séparables. Supposons que y ne s'annule pas.

On réécrit : $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int a(t)dt$

Soit $ln(|y|) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)ds + c$ pour $c \in \mathbb{R}; t_0 \in I$

Via l'exponentielle, on obtient :

$$|y(t)| = \exp(c + \int_{t_0}^{t} a(s)ds)$$

ou encore :

$$|y(t)| = d \cdot e^{A(t)} \qquad \text{avec primitive de a choisie}$$

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds \qquad\qquad d \in \mathbb{R}^{+*}$$

Remarque Si $y(t) = 0$, y solution de (E) alors $y'(t) = 0$

Remarque 2 Il y a trois cas mutuellement exclusif :
- $y(t) = 0$ pour tout $t \in I; y(t) = 0 \cdot e^{A(t)}$
- $y(t) > 0$ pour tout $t \in I; y(t) = d \cdot e^{A(t)}$ avec $d > 0$
- $y(t) < 0$ pour tout $t \in I; y(t) = d \cdot e^{A(t)}$ avec $d < 0$

$y(t)$ ne peux donc pas s'annuler sur I, car sinon il y(t) serait une constante pour tout $t \in I$.

Les solutions de (E_0) sont les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ définie par $y(t) = de^{A(t)}$ avec $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)ds$

Remarque y est bien C^1

1.2 Et le b ? : équations non homogène

Théorème Soit $a, b : I \to \mathbb{R}$ continue. Toutes les solutions de l'équation (E) sur I sont les fonctions C^1

$$y(t) = e^{A(t)}(C + \int_\alpha^t e^{-A(t)} b(s)ds$$

où $\begin{cases} C \in \mathbb{R} \\ \alpha \in I \\ A(t) \text{ primitive de } a(t) \end{cases}$

Démonstration

— y est de classe C^1 sur I
— reste à voir si y satisfait (E) ?

$$y'(t) = e^{A(t)'}(C + \int_\alpha^t e^{-A(t)} b(s)ds + e^{A(t)} e^{-A(t)} b(t)$$

$$= a(t)y(t) + b(t)$$

$$\text{car } y'(t) = a(t)e^{A(t)}(C + \int_\alpha^t e^{-A(t)} b(s)ds) + b(t)$$

Reste à voir si toutes les solutions sont de la forme ci dessus.
On pose $z(t) = y(t)e^{-A(t)}$

$$z'(t) = (y \cdot e^{-A(t)})' = y'e^{-A(t)} + y(-a(t))e^{-A(t)}$$

$$= a(t)y + b(t)e^{-A(t)} - a(t)ye^{A(t)}$$

$$= b(t)e^{-A(t)}$$

Donc $z = \int b(s)e^{-A(s)}ds$, c'est à dire il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$z(t) = \int_\alpha^t b(s)e^{-A(s)}ds + C$$

. D'où

$$\boxed{y(t) = z(t)e^{A(t)} = e^{A(t)}(C + \int_\alpha^t e^{-A(s)} b(s)ds)}$$

Théorème Soit $a, b : I \to \mathbb{R}$ continue avec I un intervalle ouvert
Il existe une unique solution de $y' = a(t)y + b(t)$ telle que pour t_0 et $y_0 \in \mathbb{R}, y(t_0) = y_0$

Démonstration C'est la solution avec C_0 qui vérifie :

$$y(t_0) = y_0$$

$$e^{A(t_0)}(C_0 + \int_\alpha^t e^{-A(s)bsds}) = y_0$$

$$\text{c'est à dire } C_0 = y_0 e^{-A(t_0)} - \int_\alpha^t e^{-A(s)} b(s)ds$$

Le tout étant des constantes, C_0 est une constante unique.

Remarque Si on avait choisie $\alpha = t_0$, alors $C_0 = y_0 e^{-A(t_0)}$ et la solution de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$ est :

$$y(t) = e^{A(t)}(y_0 e^{-A(t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s)ds)$$

Remarque le système $\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ est nommé "Problème de Cauchy".

La théorème ci dessus est un cas particulière du théorème de Cauchy Lipschitz.