Table des matières

I Fonctions **2**
1 Ensembles de nombres 2
2 Intervalle 2
3 Fonctions 2
4 monotonie 4
5 Opérations sur les fonctions 5
6 Image (direct) d'une fonction composé (composition) 5
7 Image réciproque 5
8 Application, surjectives, injectives, bijectives 6
9 Fonction réciproque 7

II Limites **10**
1 Voisinage et adhérence 10
2 Limite finie en un point de $\mathbb{R}$ 10
3 Restriction à un sous ensemble 11
4 Propriété 12
5 Théorème des gendarmes 12
6 Opération sur les limites 15
7 Limites infinies, et limites en l'infinie 16
8 Opération sur les limites 17

III Continuité **19**
1 Définition et premières propriétés 19
2 Théorème des valeurs intermédiaires 21
3 Continuité et extremum 23
4 Fonctions réciproques 24

IV Dérivabilité **27**
1 Interprétation géométrique 28
2 Dérivabilité des prolongements de fonctions 29
3 Opération usuelles 30
4 Extreima et points critiques 32
5 Acroissements finis et conséquences 33

V Dérivées d'ordre supérieur **35**
1 Dérivées d'ordre supérieur 36
2 Développement limité et formule de Taylor-Young 36

I

Fonctions

1 Ensembles de nombres

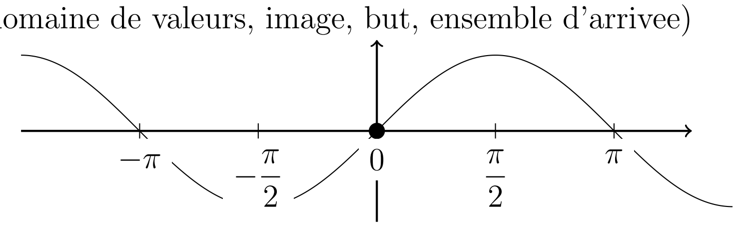
: Réels $\mathbb{R}$, Rationnels $\mathbb{Q} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels $\mathbb{N}$, entiers $\mathbb{Z} = \{-3, -2, ..., 1\}$, nombres complexes $\mathbb{C}$.

2 Intervalle

: [a, b] avec a, b réels compris dans l'intervale, dit fermé, $a < b$,]a, b[avec a, b non compris dans l'intervale dit ouvert $\rightarrow$ Intervalle bornés $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$

3 Fonctions

Exemple : sinus : sin : $\mathbb{R}$ (domaine de definitions, sources, ensemble de depart) $\rightarrow \mathbb{R}$ ou$[-1, 1]$ (domaine de valeurs, image, but, ensemble d'arrivee)



Définitions Soit E, F 2 ensemble de R. Une fonction f est procédé pour associer à tout élément de R un unique élément de F Le graph de F "vit" dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R}$

Définitions : Soit E et F 2 ensembles, on définit leur produit cartesien : comme l'ensemble dont les éléments sont les couples (x, y) avec x "vit" dans E et y dans F.
ExF = {(x, y), $x \in E, y \in F$}

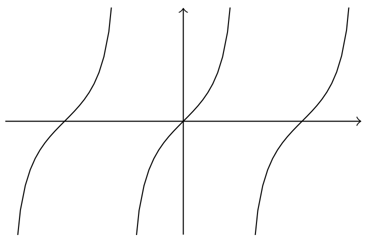
Définitions : Le graphe de f :$E \rightarrow F$ est un sous ensemble de $E * F$ donné par

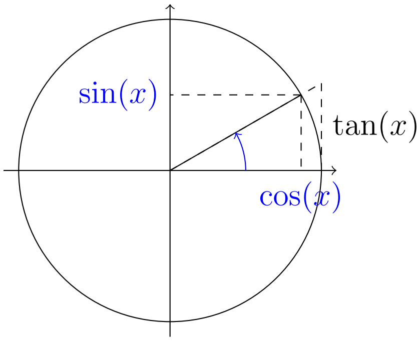
$$E * F = \{(x, y), x \in E, y = f(x)\}$$

$$E * F = \{x :\to f(x) = y\}$$

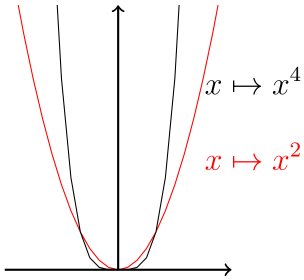
Exemples cosinus : cos : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$

tangeante tan : $\mathbb{R} \backslash \{\pi/2 + k * \pi$, k appartient a Z$\} \to\ ] - \infty, +\infty[$





$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$\mathbb{R} \to \mathbb{R} x \to x^n, n \in N$
$n = 0 : x \to 1$
$n = 1 : x \to x$
$n = 2 : x \to x^2$
$n = 3 : x \to x^3$



Remarque : les fonctions sont plus étroites. Schéma typique pour $n > 0$ et n pair.

Définitions Soit $f : E \to R$ une fonction, avec E symétrique par rapport à 0.
- f est dite paire si : $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$
- f est impaire si : $\forall x \in E, f(x) = -f(-x)$ Remarque : si f est impaire $\to f(0) = 0$. En effet,

$$f(-0) = f(0) \tag{I.1}$$

$$f(0) = -f(0) \tag{I.2}$$

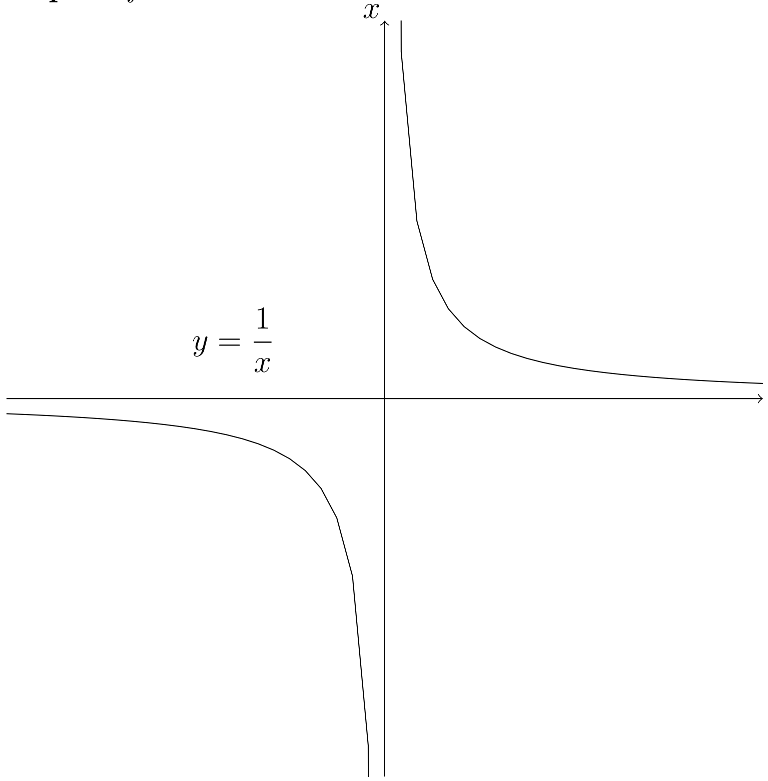
$$2 * f(0) = 0 \tag{I.3}$$

Exemple : fonctions paire : cosinus, x^{2p} avec p appartient à N
impaires sinus, tangeante, x^{2p+1} avec p appartient à N

4 monotonie

Soit $f : E \to \mathbb{R}$
- f est croissante si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
- f est strictement croissante si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
- f est decroissant si $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$
- f est decroissant si $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) > f(b)$

Exemple $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* x \to \dfrac{1}{x}$



décroissante sur $]-\infty, 0[et]0, +\infty[$ mais pas sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par exemple, $-1 \leq 1$ et $\dfrac{1}{-1} \leq \dfrac{1}{1}$

Définition Soit $f : E \to F$ et A un sous ensemble de E. On appelle restriction de f a A, note $f_{|A}$. La fonction $f_{|A} : A \to F$ definie par $f_A(x) = f(x) \forall x \in A$

Soit $f : E \to F$ et E', F' des sous ensembles de R, avec $E \subset E', F \subset F'$.
La fonction $g : E' \to F'$ est un prolongement de f si $g_{|E} = F(x)$ c'est à dire $\forall x \in E, g(x) = f(x)$

Exemple logarithme népérien $ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \to ln(x)$
$ln(a) + ln(b) = ln(a * b)$ avec $\forall (a, b) \in (R^{*+})^2$

5 Opérations sur les fonctions

Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$. On peut définir :
— La fonction somme $f + g$ par $f + g : E \to \mathbb{R}$ $x \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
— La fonction produit $f * g$ par $f * g : E \to \mathbb{R}$ $x \to (f * g)(x) = f(x)\dot{g}(x)$

6 Image (direct) d'une fonction composé (composition)

Définitions : $f : E \to F$. L'image de f notée $im(f)$ c'est l'ensemble $\{y \in F$ tel que il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y\}$ aussi noté $f(E)$

Définition $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ Si l'image de $g \subset E$, on peut définir la fonction composé $fog : E' \to F$
$x \mapsto fog(x) = f(g(x))$

7 Image réciproque

Définition Soit $f : E \to F$, et $B \subset F$ L'image réciproque de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E$ tel que $f(x) \in B\}$
$f^{-1}([-1, 1]) = [a, b]$

Exemple (de composition)

$$f : E \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

composé de fonction $f = gou$

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - 4x + 3$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$\Delta = 16 - 12 = 4$ racine de u : 1 et 3

$u(x) > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$ $E =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$

$$h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ln(x^2)$$

Pour composer h avec

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

ou doit enlever les points où v s'annule, c'est à dire $v^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$$g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2ln(x)$$

$ln(x^2) = ln(x * x) = ln(x) + ln(x) = 2ln(x)$ mais $ln(a * b) = ln(a) + ln(b)$ n'est valable que si a et $b > 0$

8 Application, surjectives, injectives, bijectives

Définition $w : E \to F$ $(E, F \in \mathbb{R})$ On dit que w est surjective si $w(E) = F$
De manière équivalente : $(y \in F$ tel que il existe $x \in E$ avec $w(x) = y) = F$ c'est à dire tout les éléments de F admette un antécédent. c'est à dire $\forall y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que $w(x) = y$

Définition $w : E \to F$ $(E, F \subset R)$ On dit que w est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent. c'est à dire que si x et x' des éléments de E qui sont différents, $w(x)$ différent $w(x')$

Exemple $w(x) = x^2$ n'est pas injectifs car -2 et 2 ont la meme image (4).

Exemple :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3$$

Cette fonction est injective car pour tout y de $\mathbb{R}$, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. On a aussi $\forall y \in \mathbb{R}$, cet antécédent est unique.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

Cette fonction n'est pas injective (-1 par exemple n'a pas d'antécédent) et pas injective car $y = 4$ par exemple possède 2 antécédents.

Remarque : Si on considère

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

g est surjective (il y a toujours au minimum un antécédent) mais toujours pas injective Plus généralement, si on considère $f : E \to f(E)$ est toujours surjective.

$sin : R \to [-1; 1]$ est surjective mais pas injective : 0 est compris entre [-1 ;1] mais possède plusieurs antécédent ($k * \pi$ avec $k \in \mathbb{R}$)

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto e^{2x}$$

Cette fonction n'est pas surjective (antécédent de 0 n'existe pas) mais est injective.

Definition $w : E \to F(E, R \subset \mathbb{R})$ w est dîtes bijective si elle est injective et surjective, c'est à dire tout élément de F admet exactement un antécédent.

9 Fonction réciproque

Si $f : E \to F$ est bijective, pour tout y de F , il existe un unique x dans E tel que $f(x) = y$ On peut donc définir $g : F \to E$ par $g(y) = x$ (tel que $f(x) = y$) g est la réciproque de f, notée f^{-1}

Exemple

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+}$$

$$x \mapsto exp(x)$$

et g

$$g : \mathbb{R}{*+} \to \mathbb{R}$$

$$x \quad \mapsto ln(x)$$

Remarque si $g = f^{-1}$ avec $f : E \to F$ et $g : F \to E$ alors

$$fog : F \to F$$

$$x \mapsto x$$

et $fog = gof$

Démonstration Soit $y \in F$, quelconque, on veut calculer fog(y) Par définition de g comme fonction réciproque de f, $g(y) = x$ tel que $f(x) = y$ donc $f(g(y)) = f(x) = y$

Proposition $f : E \to F$ une fonction impaire. supposons que $f_{|E\cap\mathbb{R}^+}$ est croissante, Alors $f_{|E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante

Démonstration

$$f_{|E\cap\mathbb{R}^-} : E \cap \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$$

$$x \quad \mapsto f(x)$$

Soit x et x' dans $E \cap \mathbb{R}^-$ tels que $x \leq x'$.

$$f(x) = \ f(-x) \quad \text{car f impaire}$$

$$f(x') = -f(-x)$$

Comme $x, x' \in E \cap \mathbb{R}^+$, $-x, -x' \in E \cap \mathbb{R}^-$ et comme $x \leq x'$ et $-x \geq -x'$, $f(-x) \geq f(-x')$ car f est croissante sur $E \cap \mathbb{R}^+$
Conclusion, $-f(-x) \leq -f(-x')$ et donc $f(x) \leq f(x')$ et donc $f(x) \leq f(x')$. On a prouvé que $f_{|E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante.

Remarque f^{-1} pourrait être la fonction $\dfrac{1}{f}$ (la fonction f est différent de 0), la fonction réciproque de f (avec f bijective).

$$\text{Pour } f : E \to \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Toujours définie.

Proposition $f : E \to F$ et $g : F \to G$ si f et g sont bijective, alors gof l'est aussi et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ $(gof : E \to G)$

Exemple Trouver la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \rightarrow]-7, +\infty[,\ f(x) = e^{3x+2} - 7$ On écrit $y = e^{3x+2} - 7$ et on détermine x en fonction des y.

$$y + 7 = e^{3x+2}$$

$$ln(y + 7) = 3x + 2 \text{ y} > -7 \text{ car fonction } exp > 0$$

$$x = \frac{1}{3}(ln(y + 7) - 2)$$

d'où $f^{-1} = \dfrac{1}{3}(ln(x + 7) - 2)$

Etablie $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$
$f(A) = \{y \in \mathbb{R}$ tel que $x \in A, f(x) = y\}$ $f(A) = im(f_{|A})$

II

Limites

1 Voisinage et adhérence

Definition si $x \in E$, on dit que E est un voisinage de x si E contient un intervalle ouvert qui contient x. Ceci est équivalent à E voisinage de x si il existe $\delta > 0$ tel que $]x - \delta; x + \delta[\subset E$.

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}$. Un réel x est <u>adherent</u> à E, si tout voisinage V de x intersecte E, c'est à dire $(V \cap E \neq \emptyset)$

Exemple
- si $x \in E$, x est adhérent à E, car pour tout voisinage V de x, $x \in V \cap E$
- E = $]0\,;\,1]$, 0 est adhérent à E.
- $E = \{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\}$ 1 est adhérent à E car

$$\lim_{n \to +\infty} = 1$$

2 Limite finie en un point de $\mathbb{R}$

Definition $f : E \to \mathbb{R}; x_0$ un point adhérent de E. On dit que f(x) <u>tend vers</u> l en x_0 ou que f(x) <u>admet la limite</u> l en x_0 si : $\forall \epsilon > 0, \text{il existe } \delta > 0, |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon$

Ceci est équivalent à dire que $\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [x - \delta, x + \delta], f(x) \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$

Pour tout voisinage V de l il existe un voisinage de x_0 U tel que si x est dans U, alors f(x) est dans V.

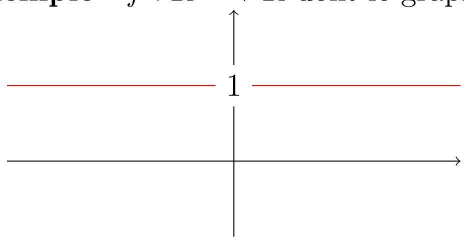
Notation

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

ou

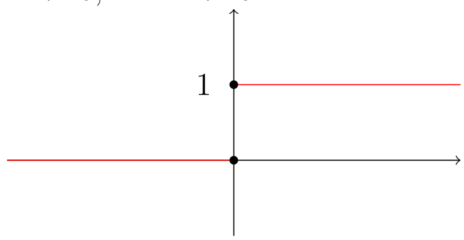
$$f(x) \to_{x \to x_0} l$$

Exemple $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dont le graph est :



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Soit $\epsilon > 0$, tout $\delta > 0$ convient.



$$f(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x \leq 0 \\ \\ 1 \ si \ x > 0 \end{cases}$$

f n'admet pas de limite en 0.

3 Restriction à un sous ensemble

$f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0$ adhérent à A. On dit que f(x) tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tends vers x_0 dans A.

$\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0, \forall x \in A,$ tel que$|x - x_0| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$

Exemple limite à gauche de f en x_0 est $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ c'est à dire la limite de f(x) quand x tends vers x_0 dans $]-\infty, x_0[$

Exemple limite à droite de f en x_0 est $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ c'est à dire la limite de f(x) quand x tends vers x_0 dans $]x_0, +\infty[$

Exemple La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à droite en 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$, pour $f(x) = 1$
La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à gauche en 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$, pour $f(x) = 0$

Remarque On écrit aussi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$

4 Propriété

Unicité Si la limite existe, elle est unique.

démontration par l'absurde : $f : E \to \mathbb{R}, x_0$ adhérent à E. On suppose que la limite en x_0 existe mais qu'elle n'est pas unique. Supposons que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$et $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$ avec $l_1 \neq l_2$

Comme

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$$

, $\forall \epsilon_1 > 0$, il existe $\delta_1, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_1, \text{alors} |f(x) - l_1| < \epsilon_1$ (*)
De plus

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$$

, $\forall \epsilon_2 > 0$, il existe $\delta_2, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_2, \text{alors} |f(x) - l_2| < \epsilon_2$ (**)

Choisissons $\epsilon < \frac{l_1 + l_2}{2}$, on remarque $]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$
On trouve δ_1 et δ_2 tel que (*) et (**) soient vraies.
On appelle $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\},]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\subset]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1[\cap]x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2[$

Soit $x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ Par (*), $f(x) \in]l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon[$
et par (**), $f(x) \in]l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon[$ donc $f(x) \in]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$ Ceci est absurde ($f(x) \neq \emptyset$)

5 Théorème des gendarmes

f, g, h 3 fonctions $E \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ adhérent à E.
(i) Si f, g, h admettent pour limites respectivs l, m, n en x_0 et si f(x) $\leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x de t, alors $l \leq m \leq n$
(ii) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur E et si f et h admettent une limite (identique) l en x_0, alors g admet une limite en x_0 et

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = l$$

Remarque On remplace les inégalité de (i) par $\forall x \in E$, $f(x) < g(x) < h(x)$, on obtient aussi $l \leq m \leq n$

Exemple $f(x) = |x|$ et $g(x) = 2|x|$ Sur $E \subset R^+, f < g$ mais

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x)$$

Exemple

$$\lim_{x\to 0} x. \sin(\frac{1}{x}) \text{ existe ?}$$

($\sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0)

Soit f, g, h $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|, g(x) = x \sin(\frac{1}{x}), h(x) = |x|$

On a bien $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$

Donc par le théorème des gendarmes, Comme

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

g admet 0 comme limite quand x tends vers 0.

Fonction de référence

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R} &&\to \mathbb{R} \\ &x &&\to x^n \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R}^{+*} &&\to \mathbb{R} \\ &x &&\to x^{ln(n)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R}^{+*} &&\to \mathbb{R} \\ &x &&\to x^{\alpha} \cdot x^{ln(x)^{\beta}} \end{aligned}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R}^{*} &&\to \mathbb{R} \\ &x &&\to \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

Methode

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R} &&\to \mathbb{R} \\ &x &&\to \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

$f(x) = \dfrac{(x+1)-1}{x(x+1)} = \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{x+1}$ donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R}^{+} &&\to \mathbb{R} \\ &x &&\to \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = && \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{2x}.\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3}} \\ = && \frac{\sqrt{3+x}^2-\sqrt{3}^2}{2x(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})} \\ = && \frac{1}{2(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})} \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

Comportement local

Proposition Si f(x) admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tends vers x_0, alors f est localement bornée. c'est à dire il existe un voisinnage de x, V, tel que il existe $M \in \mathbb{R}, \forall x \in V, |f(x)| < M$

Remarque Il existe un voisinnage de x_0 si et seulement si il existe un tervalle ouvert contenant x_0 si et seilement si il existe $\delta > 0,]x_0-\delta, x_0+\delta[$

Demonstration Par hypothèse,

$$\begin{aligned} f(x) \to && l \\ x \to && x_0 \end{aligned}$$

c'est à dire $\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0$ tel que $|x-x_0| < \delta$ $|f(x)-l| < \epsilon$
Soit $\epsilon = 1$, On trouve δ tel que $\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$
$|f(x)-l| < 1$, c'est à dire $-1 < f(x)-l < 1$ Soit $|f(x)| < l+1$

Propriété Si f(x) admet $l \neq 0$ comme limite quand x tends vers x_0, alors localement (autour de x_0), alors f est de signe constant

Démonstration bornée en x_0 (meme style que la précédente), $\epsilon = \dfrac{l}{3}$

Exemple

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 6 = f(1) \text{ avec } f = x^2+2x+3$$

$$\begin{aligned} |f(1+h)-f(1)| = && |(1+h)^2+(1+h)*2+3-6| \\ = && |1+2h+h^2+2+2h-3| \\ = && |h(h+4)| \\ = && |h|*(h+4) \text{ si } |h| < 1 \\ \leq && 5|h| \\ && \lim_{h\to 0} 5|h| = 0 \end{aligned}$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h\to 0} |f(1+h) - f(1)| = 1$$

Remarque $x = 1+h$ quand h tends vers 0 et x tends vers 1.

6 Opération sur les limites

$f, g : E \to \mathbb{R}; x_0$ adherent à E Supposons que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l, \lim_{x\to 0} g(x) = m$$

Alors

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) \text{ existe et vaut } l+m$$

$$\lim_{x\to x_0} (f.g)(x) \text{ existe et vaut } l.m$$

si $m \neq 0$, alors

$$\lim_{x\to x_0} (f/g)(x) \text{ existe et vaut } \frac{l}{m}$$

Composition $f : E \to F, g : F \to G$
$gof : E \to G$, x_0 adhérent à E.
Supposons que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

F est un voissinage de l.

$$\lim_{y\to l} g(y) = m$$

Alors

$$\lim_{x\to x_0} gof(x)$$

existe et vaut m.

Exemple

$$\begin{aligned} g :& y && \to e^y \\ f :& x && \to \sqrt{1+x} \end{aligned}$$

gof est bien défini car le domaine de g est $\mathbb{R}$
0 est bien adhérent au domaine de f (qui est $[-1, +\infty[$)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = l$$

$$\lim_{y\to 1} g(x) = e$$

7 Limites infinies, et limites en l'infinie

Définition $f : E \to \mathbb{R}, x_0$ adhérent à E

On dit que f(x) tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) quand x tend vers x_0 si$\forall A > 0,$ il existe $\delta > 0$tel que$|x - x_0| < \delta > 0$, alors $f(x) > A$ (ou $f(x) < -A$ pour f(x) tend vers $-\infty$).

Exemple

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Définition $f : E \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset E$ On dit que f(x) tend vers $l \in E$ quand x tend vers $+\infty$
c'est à dire $\forall \epsilon > 0,$ il existe $A > 0, x > A,$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$

Définition $f : E \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe $A < 0$ tel que $]-\infty, x[\subset E$ On dit que f(x) tend vers $l \in E$ quand x tend vers $-\infty$ c'est à dire $\forall \epsilon > 0,$ il existe $A < 0, x < A,$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ veut dire $\forall A > 0,$ il existe $B > 0, x < -B$ tel que $f(x) > A$

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto & \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

Démonstration Soit $A > 0$. On cherche δ tel que si $0 < x$, $0 < \delta$ alors $f(x) = \frac{1}{x} > A$

Choisir $\delta = \frac{1}{A}$ suffit, en effet $0 < x < \frac{1}{A}$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{A}$.

Exemple $g(x) = 1 + e^{-x}$ Montrons que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

Exemple

$$\begin{aligned} f :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[&& \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow && tan(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x\to -\frac{pi}{2} \\ x>-\frac{\pi}{2}}} tan(x) = -\infty$$

8 Opération sur les limites

Limites finies ($l \in \mathbb{R}$) en l'infini sont exactement les memes opérations.
Limites infinies ($l = \pm\infty$) Attention aux cas indermine : $+\infty - \infty, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 * (\pm\infty)$

Exemple $\frac{+\infty}{+\infty} = ?$

$$\begin{aligned} f : x \mapsto && x \\ g : x \mapsto && x^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\begin{aligned} f_2 : x \mapsto && x^3 \\ g_2 x \mapsto && x^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = +\infty$$

$$\begin{aligned} f_3 : x \mapsto && 3x \\ x \mapsto && x \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_3(x)}{g_3(x)} = 3$$

Plus généralement, P,Q deux polynomes, que vaut $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$? Elle est égale au rapport des thermes du plus haut degrés. Exemple :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x + 4x^5 + 2}{x^4 + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5}{x^4} = +\infty$$

Exemple

$$\lim_{x \to 0} x * \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

car $\forall x \neq 0$, $1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$
donc $0 \leq |x * \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$ avec —x— tend vers 0 pour x tend vers 0.

III

Continuité

1 Définition et premières propriétés

Définition $f : E \to \mathbb{R}$ et $x \in E$

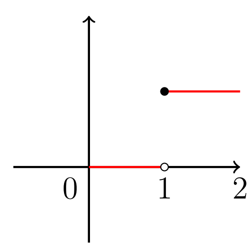
- On dit que f est continue en x_0 (au point x_0) si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$
- f est continue sur E si f est continue en tout point $x_0 \in E$

o

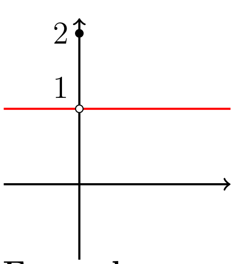
Exemple Fonctions continues :
- $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (domaine $\mathbb{R}^*$) est continue sur $\mathbb{R}^*$
- $\sin, \cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Fonctions discontinues : $x \mapsto [x]$ n'est pas continue en 1 par exemple. En effet, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 0$et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 1$.
Les limites à gauches et à droite étant différentes donc $\lim_{x \to 1}$ n'existe pas

$g(x) = 1$ pour tout x différent de 0 mais $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{x \to 0; x < 0} g(x)$



Remarque f continue en x_0 si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$



Définition
- f est continue à droite en x_0 si limite de f(x) par valeur supérieur ($\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$) en x_0 et vaut $f(x_0)$
- f est continue à gauche e en x_0 si limite de f(x) par valeur inférieur ($\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$) en x_0 et vaut $f(x_0)$

Exemple
- f(partie entière de l'exemple précédent) est continue à droite mais pas à gauche en 1. f est continue sur $[0; 1[$

— g n'est pas continue ni à gauche, ni à droite en 0.

Proposition f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0

Propriété $f, g : E \to \mathbb{R}, x_0 \in E$
f et g continue en x_0
— f+g est continue en x_0
— f.g est continue en x_0
— $\frac{f}{g}$est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$

La continuité est très local, meme si pour un $x \in E$, $g(x) = 0$, temps que x_0 différent de 0, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

Composition $f : E \to F$ $g : F \to G$ et $gof : E \to G$ si f est continue en $x \in E$ et g est continue en $f(x) \in F$, alors gof est continue en x_0

Exemple
— Polynôme , $\sin + \cos, \tan + exp$ sont continues sur $\mathbb{R}$
— $\sin(ln(\frac{e^x}{1+x^2}))$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $exp, 1 + x^2$ sont continue, de plus $1 + x^2 \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ donc $\frac{e^x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Finallement, e^x n'est jamais null donc $im(x \mapsto \frac{e^x}{1+x^2}) = \varphi \subset \mathbb{R}^{+*}$, d'où $ln(\varphi)$ est continue sur $\mathbb{R}$
— $\begin{matrix} x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \\ \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \end{matrix}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, de plus, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Définition Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $\boxed{x_0 \text{ adhérent à E}}$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, alors la fonction $g : E \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ par la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases} \text{ Est continue sur}\mathbb{R}$$

Exemple

$$g(x) = \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ l & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ Est continue sur}\mathbb{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} xln(x) \text{ si } x > 0 \\ \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \text{ est le prolongement par continuité en 0 de } x \mapsto xln(x)$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} \text{ , } \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Exercice Par quelles valeurs de c, la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(2x)}{x} \text{ si } x < 0 \\ \\ x + c \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

est continue ? f est continue si et seulement si $x = 2$ En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{sin(2x)}{x} \\ &= \frac{sin(2x)}{2x} * 2 = 2 \end{aligned}$$

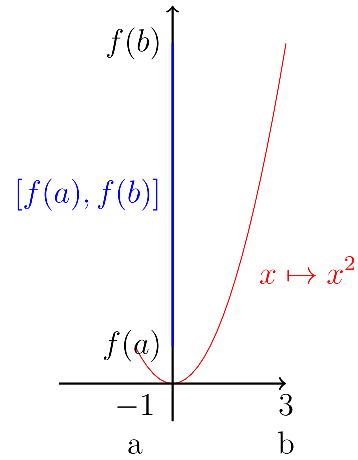
(2^{eme} méthode : $sin(2x) = 2sin(x) * cos(x)$, $\dfrac{sin(2x)}{x} = 2 * \dfrac{sin(x)}{x}. \cos(x)$ ce qui tend vers 2 pour x tend vers 0, et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = c$ donc
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$ si et seulement si $c = 2$)
Donc f est continue en 0 si $c = 0$. De plus, pour tout $x_0 > 0$, $f(x) = x + c$ qui est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x_0 < 0$, $f(x) = \dfrac{sin(2x)}{x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^{-*}$ Le seule problème possible était en 0.

Comportement local

Proposition Si f est continue en x_0, alors f est localement bornée autour de x_0 (c'est à dire il existe un voisinnage de x_0 sur lequel f est bornée, c'est à dire il existe $\delta > 0$ et $M > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x)| < M$). Si f est continue en x_0 et $f(x) \neq 0$, alors f est de signe constant (celui de $f(x_0)$ localement autour de x_0

2 Théorème des valeurs intermédiaires

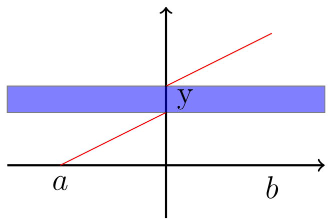
Théorème $f : [a,b]\mathbb{R}(a < b)$ et continue (sur $[a,b]$) Pour tout y compris entre f(a) et f(b) il existe au moins $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.



Exemple

$$x \mapsto x^2$$
$$[-1,3] \to \mathbb{R}$$

(Contre) exemple : la continuité est essentielle. Voici une fonction monotone et non continue pour laquel il existe des y dans $[f(a), f(b)]$ qui n'a pas d'ancédent entre a et b.



Corollaire 1 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue.
si f(a) et f(b) sont non nul et de signes différents, il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$

Corollaire Si $f(x) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$ avec a, b de signes différents dans $\mathbb{R}$, alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$

Corollaire

$$f \text{fonction continue}$$
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors f est surjective.

Idée de démonstration Ramener à un intervalle "bornée", de type $[a, b] \in \mathbb{R}^2, a < b$.
Soit $y \in \mathbb{R}$, et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = y - 1$ et $f(x_2) = y + 1$. On cherche à prouver qu'il existe au moins un antécédent.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $f(x) \geq y + 1$ pour x assez grand.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc $f(x) \leq y - 1$ pour x assez petit. On applique le théorème des valeurs intermédiaire à $f_{|[x_1,x_2]} : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ et $f_{|[x_1,x_2]}$ est bien continue.

Comme $f(x_1) \leq y - 1 < y < y + 1 \leq f(x_2)$
D'où il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) = y$.

Corollaire $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur $I \in \mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervall.

3 Continuité et extremum

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}$.

— On dit que x est le <u>minimum</u> de E, si pour tout élément de $x' \in E$, $x' \geq x$
— On dit que x est le <u>maximum</u> de E, si pour tout élément de $x' \in E$, $x' \leq x$
— Un <u>extremum</u> est un minimum ou un maximum.

Remarque Le maximum et le minimum sont unique.

Théorème Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}(a < b)$, continue.
L'image de f admet un minimum et un maximum.

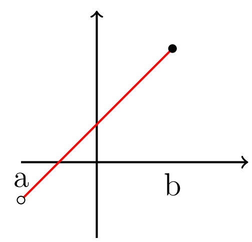
Remarque de manière équivalente : Minimum
$\exists y \in Im(f), \forall y' \in Im(f), y' \geq y$ (ou y est le minimum)
$\exists x_{min} \in [a,b], \forall x' \in [a,b], f(x') \geq f(x_{min})$ (avec $y = f(x_{min})$ et $y' = f(x')$)

Pour le maximum : $\exists x_{max} \in [a,b], \forall x' \in [a,b], f(x') \leq f(x_{max})$ ($f(x_{max})$ le maximum de $Im(f)$)

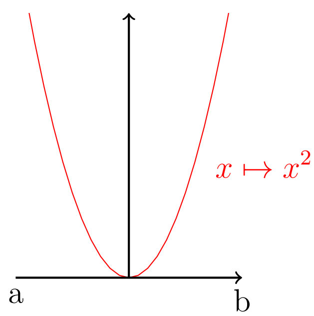
Dans ces exemples, y est forcément unique (dans le cas du minimum ou du maximum) mais il peut y avoir plusieurs antécédents (plusieurs x_{min} et x_{max})

Exemple $\sin : [0, 4\pi] \to [-1, 1]$
Le minimum de $\sin_{(}[0,4\pi])$ est -1. Il est atteint en $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{2}$.

Remarque 2 hypothèses. Pour avoir un maximum ou un minimum, $[a,b]$ doit etre un intervalle ferme et borne. Par exemple, Le minimum n'est pas atteint sur $]a,b]$ De meme, sur $[a,b[$ pour le maximum.



Corollaire supposons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f admet un minimum mais pas de maximum.



Idée de démonstration
Cette fonction admet un minimum (0) mais jamais de maximum.

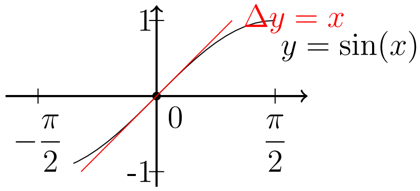
Corollaire $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
Si pour tout $x \in [a,b], f(x) > 0$ alors le minimum de $Im(f) > 0$,
c'est à dire $\exists m > 0, \forall x \in [a,b], f(x) \geq m > 0$

4 Fonctions réciproques

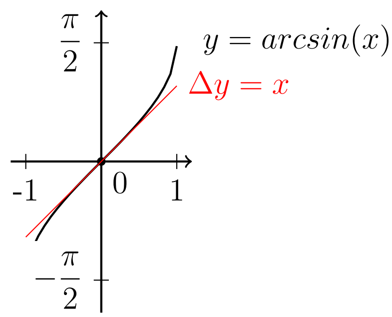
Théorème $f : I \to \mathbb{R}$, continue et strictement monotone.

1. $f(I)$ est un intervall
2. f est bijective sur J
3. f^{-1} est continue et strictement monotone, avec le meme sens de variations que f.
4. Les graphs de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bisectrice $\Delta y = x$

Exemple $\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ est continue et strictement croissante.

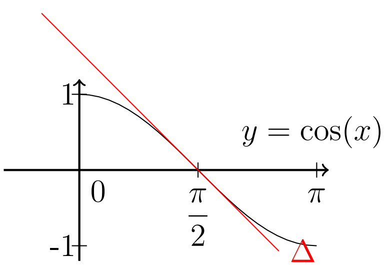


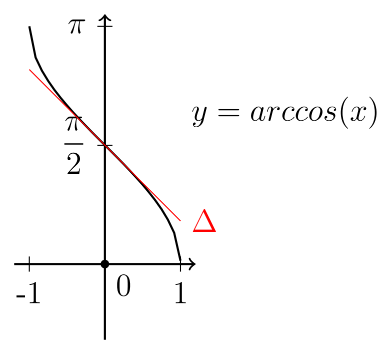
Donc f est bijective, c'est à dire $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ existe et f^{-1} vaut arcsinus.
$arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante.



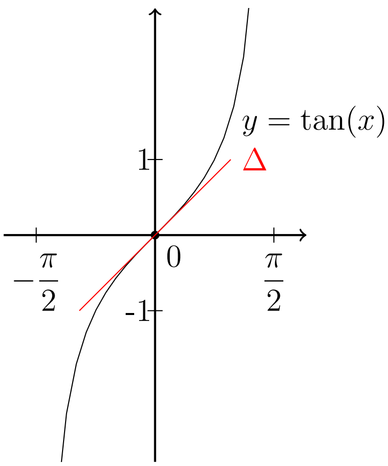
Exemple $\cos[0, \pi] \to [-1, 1]$ est continue et strictement croissante.

Donc f est bijective, c'est à dire $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ existe et f^{-1} vaut arccosinus.
$arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ est continue et strictement croissante.

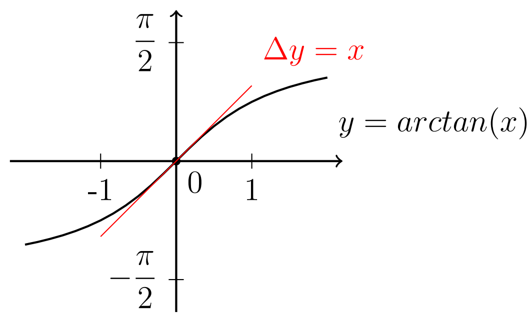




Exemple tan $:]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante, donc sa fonction reciproque est : $arctan:\mathbb{R}\rightarrow]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ aussi.



Donc f est bijective, c'est à dire $f^{-1}:\mathbb{R}\rightarrow[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ existe et f^{-1} vaut arctangeante.
$arctan:\mathbb{R}\rightarrow[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante.



Exemple

$\begin{cases} n\in\mathbb{N}^* \\ x\mapsto x^n \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ si n est pair.

Elle est donc bijective : $\begin{cases} x\mapsto x^{\frac{1}{n}} \\ \mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}^+ \end{cases}$ elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si n est impair. Reciproque

$\begin{cases} x\mapsto x^{\frac{1}{n}} \\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \end{cases}$

IV

Dérivabilité

Définition $f : E \to \mathbb{R}, E$ est un voisinage de x_0. f est derivable en x_0 si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite l quand x tend vers x_0 ($l \in \mathbb{R}$). $\tau(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est appelé le taux d'accroissement de f en x_0. La limite de l (quand elle existe) est la dérivée de f en x_0, elle est notée $f'(x_0)$

Exemple $\begin{array}{c} f : x \mapsto x^2 \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}$ $f'(1) = ?$

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

Exemple 2 $\begin{array}{c} f : x \mapsto x^3 \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}$

$\forall x \neq x_0,$

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2)}{x - x_0} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to x_0} x^2 + x.x_0 + x_0^2 = 3x_0$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x_0^2$

Exemple 3 $\begin{array}{c} f : \ x \ \mapsto \sqrt{x} \\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \end{array}$

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\
\forall x \neq x_0, x_0 \in \mathbb{R}^{+*} \qquad &= \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\
\lim_{x\to x_0} \tau(x) &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

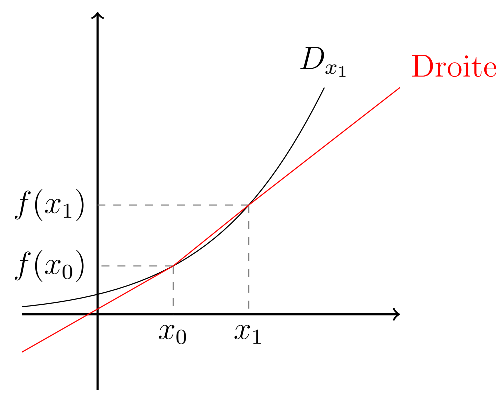
1 Interprétation géométrique

$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente du graphe de f en $(x_0, f(x_0))$

$\tau(x_1) = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ est le coefficient de la droite passant par P_{x_1} et P_{x_0} avec P_{x_1} du graph au point x_1, et P_{x_0} celui de x_0
$y = \tau(x_1)(x-x_0)+f(x_0)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$

Quand x tend vers x_0, la droite D_{x_1} "converge" vers la tangeante au graph de f au point $(x_0, f(x_0))$, d'équation :

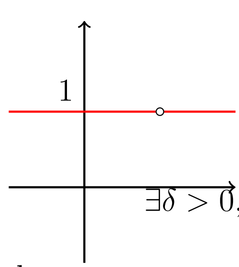
$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$



Définition Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \tau(x) = l^-, l^- \in \mathbb{R}$
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 et on note $f'_g(x_0) = l^-$

Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \tau(x) = l^+, l^+ \in \mathbb{R}$
f admet une dérivée à droite en x_0, que l'on note $f'_d(x_0) = l^+$

Théorème $f : E \to \mathbb{R}, E$ un voisinage de x_0. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$



Remarque Cette fonction n'est pas dérivable en 1, pourtant $f'_d(1) = f'_g(1)$, f doit donc alors être continue en x_0

Démonstration f est dérivable en x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \tau(x) = l \in \mathbb{R}$, cela signifie

$$\exists \delta > 0, |x-x_0| < \delta \;\text{ donc }\; |\tau(x)-l| < 1$$

donc que

$$l-1 \leq \tau(x) \leq l+1$$

$$l-1 \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq l+1$$

Si $x > x_0$, on obtient :

$$(l-1)(x-x_0) \leq \quad f(x) - f(x_0) \leq \quad (l+1)(x-x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}(l-1)(x-x_0) \leq \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0}(l+1)(x-x_0)$$

$$0 \leq \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) \leq 0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \text{ par le théorème des gendarmes, et de même pour } x < x_0$$

Définition $f : E \to \mathbb{R}$ f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ si f est dérivable en tout point de $x_0 \in]a, b[$ f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si f est dérivable sur l'intervalle ouvert et à droite en a et à gauche en b.

Exemple $x \to \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[, [a, +\infty[(a > 0)$ mais pas sur $[0, +\infty[$.

2 Dérivabilité des prolongements de fonctions

Proposition $f : [a, b] \to \mathbb{R}, g[b, c] \to \mathbb{R}$ dérivable

On définit $\varphi : [a, c] \to \mathbb{R}$ par la formule $\varphi(x) \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [a, b] \\ \\ g(x) \text{ si } x \in]b, c] \end{cases}$

φ est continue sur $[a, c]$ si

$$\lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x\to b \\ x>b}} \varphi(x) = \varphi(b)$$

$$f(b) \quad = g(x) \quad = f(b)$$

Si φ est continue, φ est dérivable sur $[a, c]$ si $f'_g(b) = g'_d(b)$

Exercice Trouver α et β tels que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 2, six \leq 1 \\ \\ \alpha x + \beta \ six > 1 \end{cases}$$

Soit dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $e^x + 2$ et $\alpha x + \beta$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$, le seul problème peut survenir en 1. Pour être dérivable, f doit être continue : $e^1 + 2 = \alpha + \beta$ et on doit avoir $f'_g(1) = e = f'_d(1) = \alpha$. $\alpha = 1$ et $\beta = 2$

3 Opération usuelles

$f, gE \to \mathbb{R}, E$ voisinage de x_0.
f et g sont dérivable en x_0, alors :

— f+g est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x) + g'(x)$

— f*g est dérivable en x_0 et $(f*g)'(x_0) = f'(x_0) * g(x_0) + f(x_0) * g'(x_0)$

— si $g(x_0) \neq 0$ f/g est dérivable en x_0 et $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) * g(x_0) - f(x_0) * g'(x_0)}{g^(x_0)}$

Démonstration Pour la somme :

$$(f+g)(x) - (f+g)(x_0) = f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))$$

$$= f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)$$

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Pour le produit :

$$(f*g)(x) - (f*g)(x_0) = f(x) * g(x) - (f(x_0) * g(x_0))$$

$$= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)$$

$$= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))$$

$$\frac{(f*g)(x) - (f*g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0)$$

Comme précédemment, $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ car g est continue en x_0

$$\frac{f}{g} = f.\frac{1}{g}$$

$$(\frac{f}{g})' = f'.\frac{1}{g'} + f.(\frac{1}{g})'$$

Composition $f : E \to F, g : F \to G, gofE \to G$
On suppose f dérivable en x_0, g dérivable en $f(x_0)$ alors gof est dérivable en x et $(gof)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$

Exemple $f, g : E \to F$ dérivables en x_0, avec $f(x_0) \neq 0, \frac{f'}{g}(x_0) = (g * \frac{1}{g})'(x_0)$ Et $\frac{1}{g}$ est la composée de g et de $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}$

$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$ d'où $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Soit finalement
$$\begin{aligned}(\frac{f}{g})'(x_0) = (f \cdot \frac{1}{g})'(x_0) &= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\end{aligned}$$

Exemple dérivée $e^{\sin(x)}$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sin(x)$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto e^x$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto gof(x)$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R} h'(x) = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$

Définissons f par la formule $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x^2 \neq 0$ Donc :
- f est définie sur $\mathbb{R}$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $f'(x) = \dfrac{-1x}{(1+x^2)^2}$

Dérivée de la fonction réciproque $f : E \to F$ dérivable sur E et bijective (Sa réciproque est notée f^{-1}) On note $f^{-1}of(x) = x \forall x \in E$ Donc $(f^{-1}of)'(x) = f'(x) \cdot (f^{-1})'(f(x)) = 1 \forall x \in E$

On obtient $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Exemple $\tan]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Pour $x \in \tan]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \cos x \neq 0$ et donc

$$\begin{aligned}(tan)'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)\end{aligned}$$

En effet, $1 + \tan^2(x) = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

De plus, tan est bijective, de réciproque $arctan \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $arctan(\tan x) = x$

donc $\tan'(x) \cdot (arctan)'(\tan(x)) = 1$ c'est à dire
$arctan'(\tan x) = \dfrac{1}{\tan'(x)} = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$
On note $z = \tan x$, $arctan'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$

Exercice a) $\begin{aligned} f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\to]-1,1[\\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$

f est bijective et $f'(x)$ ne s'annule pas, donc $\forall x \in]-1,1[, archsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) de même, $arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$

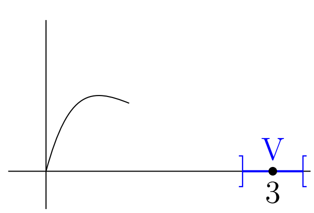
4 Extreima et points critiques

Définitions $f : E \to F$
f admet un maximum local en $\alpha \in E$, s'il existe un voisinage V de α, $V \subset E$, tel que $\forall x \in V \cap E, f(x) \leq f(\alpha)$
f admet un minimum localen $\beta \in E$, s'il existe un voisinage V de β, $W \subset E$, tel que $\forall x \in W \cap E, f(x) \geq f(\beta)$
Un extremum local est un minimum local, soit un maximum local.

Proposition $f : E \to \mathbb{R}, x_0 \in E$ avec E voisinage de x_0 Si x_0 est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$
ON dit alors que x_0 est un point critique de f.

Remarque $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Les extrema sont inclus dans $\{x \in]a,b[$ tel que $f'(x) = 0\} \cup \{a,b\}$

Exemple (inhabituel) $f : [0,1] \cup \{3\}$
$V \cap E = \{3\}$ $\forall x \in V \cap E, f(x) \geq f(3)$ donc $f(3)$ est un minimum local, de même, il est aussi un maximum local car $\forall x \in V \cap E, f(x) \leq f(3)$



Exemple $\sin[-\frac{\pi}{4}, \pi] \to [-1,1]$
La restriction de la fonction sinus à $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$ admet un unique point critique.

Théorème de Rolle Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivble sur $]a,b[$ si $f(x) = f(b)$, alors il existe au moins un $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

Démonstration Notons $y = f(a) = f(b)$ f continue sur $[a,b]$ (fermé) donc il existe un minimum global et un maximum global (atteints respectivement) en α et β, c'est à dire $\forall x \in [a,b], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$

1er cas $f(\alpha) = y = f(\beta)$

La fonction est donc constante sur $[a, b]$. N'importequel $c \in]a, b[$ convient.

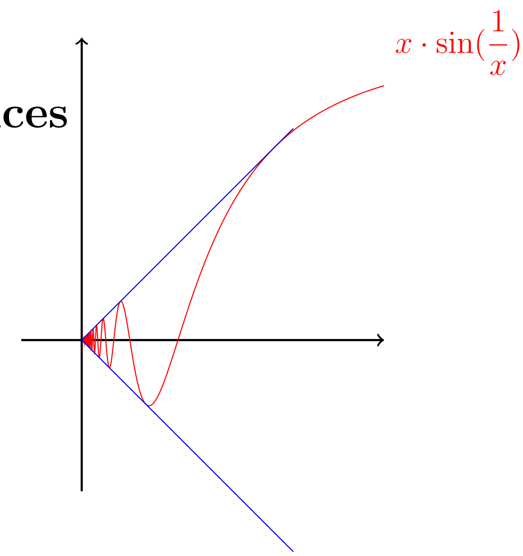
2er cas soit $f(\alpha) < y$ ou $y < f(\beta)$

Supposons que $f(\alpha) < y$ $f(\alpha)$ est un minimum global donc un minimum local.
$\alpha \in]a, b[$, car $f(x) \neq y$ Par la proposition, $f'(\alpha) = 0$
De même, si $y < f(\beta)$, prendre $c = \beta$ convient.

Exemple

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

On remarque que f(0) n'est ni un minimum, ni un maximum local.

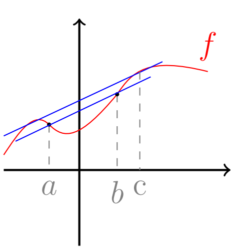


5 Acroissements finis et conséquences

Exemple

Théorème $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Démonstration Appliquer le théorème de Rolle à $g(x) = f(x) - (\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}) \cdot x$



Corollaire f est une fonction comme ci dessus,

- si $f' \geq 0$ sur $]a, b[$ alors f est croissante sur $[a, b]$
- si $f' > 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement croissante sur $[a, b]$
- si $f' \leq 0$ sur $]a, b[$ alors f est decroissante sur $[a, b]$
- si $f' < 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement decroissante sur $[a, b]$
- si $f' = 0$ sur $]a, b[$ alors f est constante $[a, b]$

Application Tableaux de variations.

Exemple

$$\sin h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\sin h(0) = 0$ $\sin h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin h'(x) = \dfrac{e^x + e^- x}{2} = cosh(x)$
$sinh'(x) > 0$ pour tout x, donc le sinus hyperbolique est croissante.

De même

$$\cos h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \quad \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$\cos' h(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}\,'}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sin h$
$\cos(0) = 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$sin'h$		$+$	
$sinh$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$cos'h$	$-$	0	$+$
$cosh$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

$$\tan h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{sinh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\begin{aligned}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} \\ &= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1\end{aligned}$$

De la même façon, $tanh(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} = -1$

Remarque $\sin h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective $\sin h^{-1} = arg \sin h$
$\cos h : \mathbb{R}^+ \to [1, +\infty[$ est bijective $\cos h^{-1} = arg \cos h$

V

Dérivées d'ordre supérieur

But Approcher localement une fonction f par des polynômes.

Définition

$$k \in \mathbb{N}^+, k! = 1 * 2 * 3 * ... * k$$

$$0! = 1$$

Exemple

— polynome de degré 0 $f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))$

$$= \epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \text{ Si f continue}$$

— Polynôme de degré 1 si f est dérivable :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))$$

$$(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)) = (x - x_0)(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0))$$

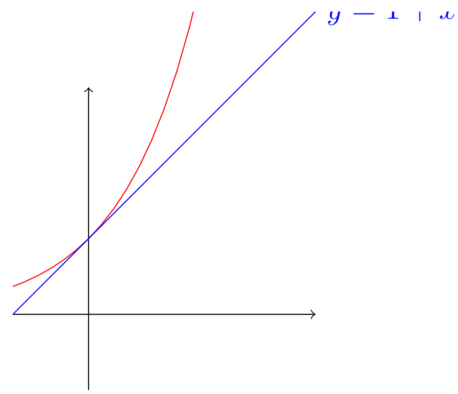
$$= \epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \text{ car f est dérivable}$$

On voudrait
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$
avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

Objectifs du cours :

1. Comprendre $f''(x_0), f'''(x_0)$
2. Comprendre $\epsilon(x)$

Exemple En 0 ordre 2 : $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$



Application :

- Calcul de limites : $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$
- Position d'un graph par rapport à sa tangeante.
  On considère $f(x) -$ tangeante :

$$\begin{aligned} e^x - (x-1) &= \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \\ &= x^2(\frac{1}{2} + \epsilon(x)) \end{aligned}$$

$x^2 > 0$ et $\frac{1}{2} + \epsilon(x) > 0$ donc près de 0, la fonction est au dessus de sa tangeante.

1 Dérivées d'ordre supérieur

Définition $f : I \to \mathbb{R}$ I est un intervalle ouvert. On dit que f est C^0 si elle est :

- C^0 si elle est continue sur I.
- C^1 si elle est dérivable sur I et que f' est continue.
- C^2 si f est dérivable deux fois et f" est continue sur I
- C^k si f est dérivable k fois et $f^{(k)}$ est continue sur I
- C^∞ si f est $C^k \forall k \in \mathbb{N}$

Exemple $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \to C^0$ car $f(x)$ est dérivable, donc continue.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sin(\frac{1}{x}) + x^2(\frac{-1}{x^2})\cos(\frac{1}{x}) \\ &= 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos 1x \end{aligned}$$

Donc $f(x)$ n'est pas C^1 car $f'(x)$ n'est pas continue ($\cos(\frac{1}{x})$ n'est pas continue en 0).

2 Développement limité et formule de Taylor-Young

Définition Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I est un intervalle ouvert. $x_0 \in I$. f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n s'il existe :

- un polynome de degrés n : $P(x) = a_0 + a_1.x + ... + a_n.x^n$
- Un fonction $\epsilon :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ avec $\epsilon \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ tel que

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0).\epsilon(x) \text{ pour } x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_n)^n\epsilon(x)$$

Dans ce cas P est la partie principale du développement limité.