Table des matières

I

Fonctions

1 Ensembles de nombres

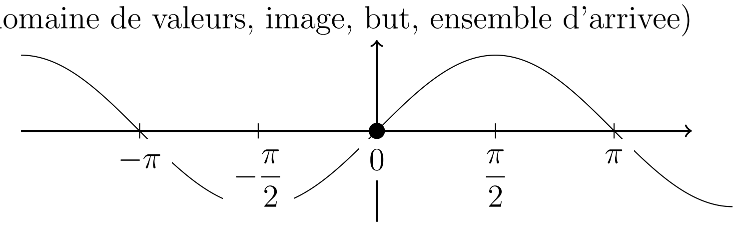
: Réels $\mathbb{R}$, Rationnels $\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels $\mathbb{N}$, entiers $\mathbb{Z} = \{-3, -2, ..., 1\}$, nombres complexes $\mathbb{C}$.

2 Intervalle

: [a, b] avec a, b réels compris dans l'intervale, dit fermé, $a < b$,]a, b[avec a, b non compris dans l'intervale dit ouvert $\rightarrow$ Intervalle bornés $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$

3 Fonctions

<u>Exemple</u> : sinus : sin : $\mathbb{R}$ (domaine de definitions, sources, ensemble de depart) $\rightarrow \mathbb{R}$ ou$[-1, 1]$ (domaine de valeurs, image, but, ensemble d'arrivee)



Définitions Soit E, F 2 ensemble de R. Une fonction f est procédé pour associer à tout élément de R un unique élément de F Le graph de F "vit" dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R}$

Définitions : Soit E et F 2 ensembles, on définit leur <u>produit cartesien</u> : comme l'ensemble dont les éléments sont les couples (x, y) avec x "vit" dans E et y dans F.
ExF = {(x, y), $x \in E, y \in F$}

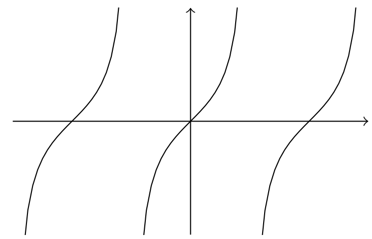
Définitions : Le <u>graphe</u> de f :$E \rightarrow F$ est un sous ensemble de $E * F$ donné par

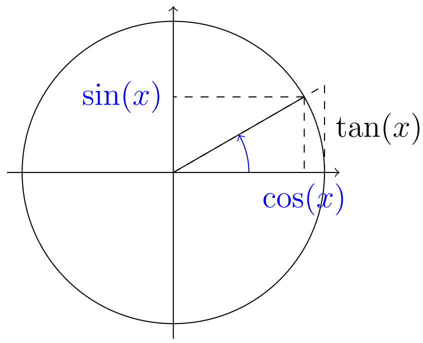
$E * F = \{(x, y), x \in E, y = f(x)\}$

$E * F = \{x :\rightarrow f(x) = y\}$

Exemples cosinus : cos : $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

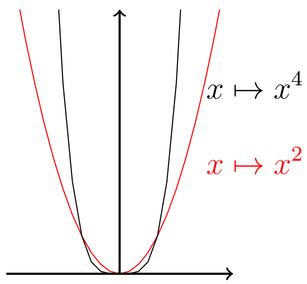
tangeante tan : $\mathbb{R} \backslash \{\pi/2 + k * \pi$, k appartient a Z$\} \rightarrow\ ] - \infty, +\infty[$





$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} x \rightarrow x^n, n \in N$
$n = 0 : x \rightarrow 1$
$n = 1 : x \rightarrow x$
$n = 2 : x \rightarrow x^2$
$n = 3 : x \rightarrow x^3$



Remarque : les fonctions sont plus étroites. Schéma typique pour $n > 0$ et n pair.

Définitions Soit $f : E \to R$ une fonction, avec E symétrique par rapport à 0.

— f est dite paire si : $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$

— f est impaire si : $\forall x \in E, f(x) = -f(-x)$ Remarque : si f est impaire $\to f(0) = 0$. En effet,

$$f(-0) = f(0) \tag{I.1}$$
$$f(0) = -f(0) \tag{I.2}$$
$$2 * f(0) = 0 \tag{I.3}$$

Exemple : fonctions paire : cosinus, x^{2p} avec p appartient à N
impaires sinus, tangeante, x^{2p+1} avec p appartient à N

4 monotonie

Soit $f : E \to \mathbb{R}$

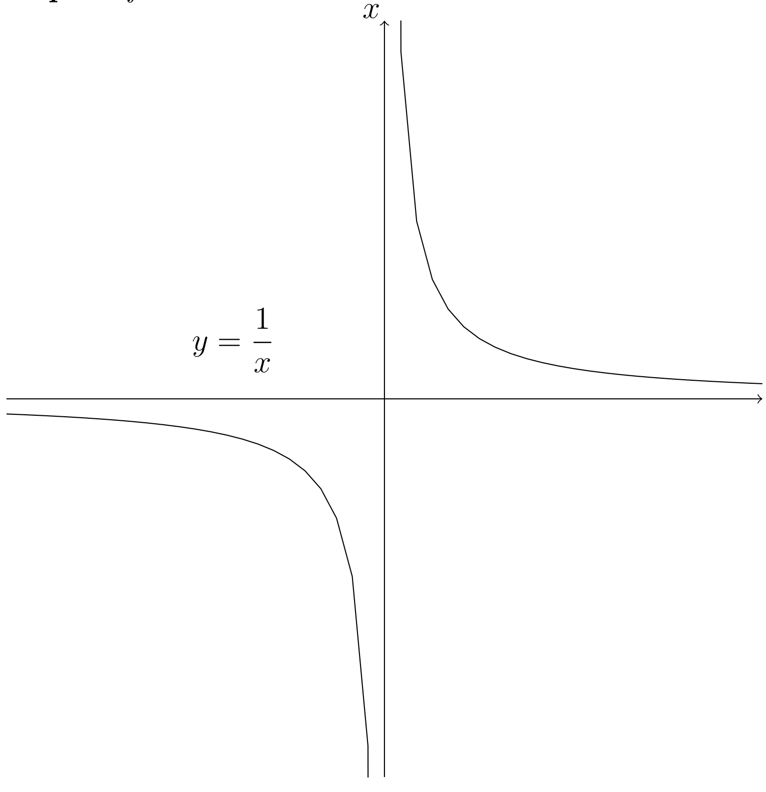
— f est croissante si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

— f est strictement croissante si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

— f est decroissant si $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$

— f est decroissant si $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) > f(b)$

Exemple $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* x \to \frac{1}{x}$



décroissante sur $]-\infty, 0[et]0, +\infty[$ mais pas sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par exemple, $-1 \leq 1$ et $\frac{1}{-1} \leq \frac{1}{1}$

Définition Soit $f : E \to F$ et A un sous ensemble de E. On appelle restriction de f a A, note $f_{|A}$. La fonction $f_{|A} : A \to F$ definie par $f_A(x) = f(x) \forall x \in A$

Soit $f : E \to F$ et E', F' des sous ensembles de R, avec $E \subset E', F \subset F'$.
La fonction $g : E' \to F'$ est un prolongement de f si $g_{|E} = F(x)$ c'est à dire $\forall x \in E, g(x) = f(x)$

Exemple logarithme népérien $ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \to ln(x)$
$ln(a) + ln(b) = ln(a * b)$ avec $\forall (a, b) \in (R^{*+})^2$

5 Opérations sur les fonctions

Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$. On peut définir :
— La fonction somme $f + g$ par $f + g : E \to \mathbb{R}$ $x \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
— La fonction produit $f * g$ par $f * g : E \to \mathbb{R}$ $x \to (f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

6 Image (direct) d'une fonction composé (composition)

Définitions : $f : E \to F$. L'image de f notée $im(f)$ c'est l'ensemble $\{y \in F$ tel que il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y\}$ aussi noté $f(E)$

Définition $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ Si l'image de $g \subset E$, on peut définir la fonction composé $fog : E' \to F$
$x \mapsto fog(x) = f(g(x))$

7 Image réciproque

Définition Soit $f : E \to F$, et $B \subset F$ L'image réciproque de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E$ tel que $f(x) \in B\}$
$f^{-1}([-1, 1]) = [a, b]$

Exemple (de composition)

$$f : E \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

composé de fonction $f = gou$

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - 4x + 3$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$\Delta = 16 - 12 = 4$ racine de u : 1 et 3

$u(x) > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty;1] \cup [3;+\infty[$ $E =]-\infty;1] \cup [3;+\infty[$

$$h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ln(x^2)$$

Pour composer h avec

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

ou doit enlever les points où v s'annule, c'est à dire $v^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$$g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2ln(x)$$

$ln(x^2) = ln(x * x) = ln(x) + ln(x) = 2ln(x)$ mais $ln(a * b) = ln(a) + ln(b)$ n'est valable que si a et $b > 0$

8 Application, surjectives, injectives, bijectives

Définition $w : E \to F$ $(E, F \in \mathbb{R})$ On dit que w est surjective si $w(E) = F$
De manière équivalente : $(y \in F$ tel que il existe $x \in E$ avec $w(x) = y) = F$ c'est à dire tout les éléments de F admette un antécédent. c'est à dire $\forall y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que $w(x) = y$

Définition $w : E \to F$ $(E, F \subset R)$ On dit que w est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent. c'est à dire que si x et x' des éléments de E qui sont différents, $w(x)$ différent $w(x')$

Exemple $w(x) = x^2$ n'est pas injectifs car -2 et 2 ont la meme image (4).

Exemple :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3$$

Cette fonction est injective car pour tout y de $\mathbb{R}$, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. On a aussi $\forall y \in \mathbb{R}$, cet antécédent est unique.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

Cette fonction n'est pas surjective (-1 par exemple n'a pas d'antécédent) et pas injective car $y = 4$ par exemple possède 2 antécédents.

Remarque : Si on considère

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

g est surjective (il y a toujours au minimum un antécédent) mais toujours pas injective Plus généralement, si on considère $f : E \to f(E)$ est toujours surjective.

$sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ est surjective mais pas injective : 0 est compris entre [-1 ;1] mais possède plusieurs antécédent ($k * \pi$ avec $k \in \mathbb{R}$)

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto e^{2x}$$

Cette fonction n'est pas surjective (antécédent de 0 n'existe pas) mais est injective.

Definition $w : E \to F(E, R \subset \mathbb{R})$ w est dîtes bijective si elle est injective et surjective, c'est à dire tout élément de F admet exactement un antécédent.

9 Fonction réciproque

Si $f : E \to F$ est bijective, pour tout y de F , il existe un unique x dans E tel que $f(x) = y$ On peut donc définir $g : F \to E$ par $g(y) = x$ (tel que $f(x) = y$) g est la réciproque de f, notée f^{-1}

Exemple

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+}$$

$$x \mapsto exp(x)$$

$$g : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ln(x)$$

Remarque si $g = f^{-1}$ avec $f : E \to F$ et $g : F \to E$ alors

$$fog : F \to F$$

$$x \mapsto x$$

et $fog = gof$

Démonstration Soit $y \in F$, quelconque, on veut calculer fog(y) Par définition de g comme fonction réciproque de f, $g(y) = x$ tel que $f(x) = y$ donc $f(g(y)) = f(x) = y$

Proposition $f : E \to F$ une fonction impaire. supposons que $f_{|E\cap\mathbb{R}^+}$ est croissante, Alors $f_{|E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante

Démonstration

$$f_{|E\cap\mathbb{R}^-} : E \cap \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$$

$$x \quad \mapsto f(x)$$

Soit x et x' dans $E \cap \mathbb{R}^-$ tels que $x \leq x'$.

$$f(x) = \ f(-x) \quad \text{car f impaire}$$

$$f(x') = -f(-x)$$

Comme $x, x' \in E \cap \mathbb{R}^-$, $-x, -x' \in E \cap \mathbb{R}^+$ et comme $x \leq x'$ et $-x \geq -x'$, $f(-x) \geq f(-x')$ car f est croissante sur $E \cap \mathbb{R}^+$
Conclusion, $-f(-x) \leq -f(-x')$ et donc $f(x) \leq f(x') \leq f(x')$. On a prouvé que $f_{|E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante.

Remarque f^{-1} pourrait être la fonction $\dfrac{1}{f}$ (la fonction f est différent de 0), la fonction réciproque de f (avec f bijective).

Pour $f : E \to \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$

$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in \mathbb{R}\}$ Est toujours définie

Proposition $f : E \to F$ et $g : F \to G$ si f et g sont bijective, alors gof l'est aussi et $(gof)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ $(gof : E \to G)$

Exemple Trouver la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \to]-7, +\infty[,\ f(x) = e^{3x+2} - 7$ On écrit $y = e^{3x+2} - 7$ et on détermine x en fonction des y.

$$y + 7 = e^{3x+2}$$

$$ln(y+7) = 3x + 2 \text{ y} > -7 \quad \text{car fonction } exp > 0$$

$$x = \frac{1}{3}(ln(y+7) - 2)$$

$$\text{d'où } f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(ln(x+7) - 2)$$

Etablie $f : E \to \mathbb{R}$ et $A \subset E$
$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \in A, f(x) = y\}$ $f(A) = im(f_{|A})$

II

Limites

1 Voisinage et adhérence

Definition si $x \in E$, on dit que E est un voisinage de x si E contient un intervalle ouvert qui contient x. Ceci est équivalent à E voisinage de x si il existe $\delta > 0$ tel que $]x-\delta; x+\delta[\subset E$.

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}$. Un réel x est adherent à E, si tout voisinage V de x intersecte E, c'est à dire $(V \cap E \neq \emptyset)$

Exemple

- si $x \in E$, x est adhérent à E, car pour tout voisinage V de x, $x \in V \cap E$
- E = $]0\,;\,1]$, 0 est adhérent à E.
- $E = \{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\}$ 1 est adhérent à E car $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

2 Limite finie en un point de $\mathbb{R}$

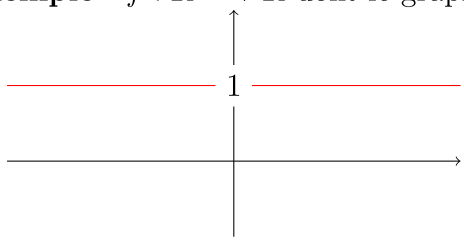
Definition $f : E \to \mathbb{R}; x_0$ un point adhérent de E.
On dit que f(x) tend vers l en x_0 ou que f(x) admet la limite l en x_0 si : $\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0, |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon$

Ceci est équivalent à dire que $\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], f(x) \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$

Pour tout voisinage V de l il existe un voisinage de x_0 U tel que si x est dans U, alors f(x) est dans V.

Notation $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$

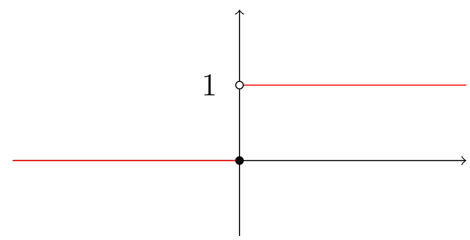
Exemple $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dont le graph est :



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Soit $\epsilon > 0$, tout $\delta > 0$ convient.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \leq 0 \\ 1 \; si \; x > 0 \end{cases}$$



f n'admet pas de limite en 0.

3 Restriction à un sous ensemble

$f : E \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}, x_0$ adhérent à A. On dit que f(x) tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tends vers x_0 dans A.

$\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0,$ tel que $\forall x \in A, |x - x_0| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$

Exemple limite à gauche de f en x_0 est $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ c'est à dire la limite de f(x) quand x tends vers x_0 dans $]-\infty, x_0[$

Exemple limite à droite de f en x_0 est $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ c'est à dire la limite de f(x) quand x tends vers x_0 dans $]x_0, +\infty[$

Exemple La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à droite en 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$, pour $f(x) = 1$
La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à gauche en 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$, pour $f(x) = 0$

Remarque On écrit aussi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$

4 Propriété

Unicité Si la limite existe, elle est unique.

démontration par l'absurde : $f : E \to \mathbb{R}, x_0$ adhérent à E. On suppose que la limite en x_0 existe mais qu'elle n'est pas unique. Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_2$ avec $l_1 \neq l_2$

Comme $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\forall \epsilon_1 > 0$, il existe $\delta_1, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_1, \text{alors} |f(x) - l_1| < \epsilon_1$ (*)
De plus $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$, $\forall \epsilon_2 > 0$, il existe $\delta_2, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_2, \text{alors} |f(x) - l_2| < \epsilon_2$ (**)

Choisissons $\epsilon < \frac{l_1 + l_2}{2}$, on remarque $]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$
On trouve δ_1 et δ_2 tel que (*) et (**) soient vraies.
On appelle $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\},]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\subset]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1[\cap]x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2[$

Soit $x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ Par (*), $f(x) \in]l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon[$
et par (**), $f(x) \in]l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon[$ donc $f(x) \in]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$ Ceci est absurde ($f(x) \neq \emptyset$)

5 Théorème des gendarmes

f, g, h 3 fonctions $E \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ adhérent à E.
(i) Si f, g, h admettent pour limites respectivs l, m, n en x_0 et si f(x) $\leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x de E, alors $l \leq m \leq n$
(ii) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur E et si f et h admettent une limite (identique) l en x_0, alors g admet une limite en x_0 et $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Remarque On remplace les inégalité de (i) par $\forall x \in E$, $f(x) < g(x) < h(x)$, on obtient aussi $l \leq m \leq n$

Exemple $f(x) = |x|$ et $g(x) = 2|x|$ Sur $E \subset R^+, f < g$ mais $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x)$

Exemple

$$\lim_{x \to 0} x. \sin(\frac{1}{x}) \text{ existe ?}$$

($\sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0)

Soit f, g, h $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|, g(x) = x \sin(\frac{1}{x}), h(x) = |x|$

On a bien $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$

Donc par le théorème des gendarmes, Comme $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$ g admet 0 comme limite quand x tends vers 0.

Fonction de référence

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to x^n$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$$

$$x \quad \to x^{ln(n)}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$$

$$x \quad \to x^{\alpha} \cdot ln(x)^{\beta}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$f : \mathbb{R}^{*} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Methode

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)-1}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \text{ donc } \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$$f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{2x}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{2x} . \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3+x}^2 - \sqrt{3}^2}{2x(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} \\ \text{Donc } \lim_{x \to 0} f(x) &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Comportement local

Proposition Si f(x) admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tends vers x_0, alors f est localement bornée. c'est à dire il existe un voisinnage de x, V, tel que il existe $M \in \mathbb{R}, \forall x \in V, |f(x)| < M$

Remarque Il existe un voisinnage de x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert contenant x_0 si et seulement si il existe $\delta > 0, x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

Demonstration Par hypothèse, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$
c'est à dire $\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ $|f(x) - l| < \epsilon$
Soit $\epsilon = 1$, On trouve δ tel que $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
$|f(x) - l| < 1$, c'est à dire $-1 < f(x) - l < 1$ Soit $|f(x)| < l + 1$

Propriété Si f(x) admet $l \neq 0$ comme limite quand x tends vers x_0, alors localement (autour de x_0), alors f est de signe constant

Démonstration bornée en x_0 (meme style que la précédente), $\epsilon = \dfrac{l}{3}$

Exemple

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 6 = f(1) \text{ avec } f = x^2 + 2x + 3$$

$$\begin{aligned}
|f(1+h) - f(1)| &= |(1+h)^2 + (1+h) * 2 + 3 - 6| \\
&= |1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3| \\
&= |h(h+4)| \\
&= |h| * (h+4) && \text{si } |h| < 1 \\
&\leq 5|h|
\end{aligned}$$

$$\lim_{h \to 0} 5|h| = 0$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h \to 0} |f(1+h) - f(1)| = 0$$

Remarque $x = 1 + h$ quand h tends vers 0 et x tends vers 1.

6 Opération sur les limites

$f, g : E \to \mathbb{R}; x_0$ adherent à E Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l, \lim\limits_{x \to 0} g(x) = m$ Alors

— $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$ existe et vaut $l+m$

— $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x)$ existe et vaut $l.m$

— si $m \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f/g)(x)$ existe et vaut $\dfrac{l}{m}$

Composition $f : E \to F, g : F \to G$
$gof : E \to G$, x_0 adhérent à E.

Supposons que

— $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

— F est un voissinage de l.

— $\lim\limits_{y \to l} g(y) = m$

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} gof(x)$ existe et vaut m.

Exemple

$$g : y \to e^y$$

$$f : x \to \sqrt{1+x}$$

— gof est bien défini car le domaine de g est $\mathbb{R}$

— 0 est bien adhérent au domaine de f (qui est $[-1, +\infty[$)

— $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$

— $\lim\limits_{y \to 1} g(x) = e$

7 Limites infinies, et limites en l'infinie

Définition $f : E \to \mathbb{R}, x_0$ adhérent à E

On dit que f(x) tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) quand x tend vers x_0 si $\forall A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$, alors $f(x) > A$ (ou $f(x) < -A$ pour f(x) tend vers $-\infty$).

Exemple

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Définition $f : E \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset E$ On dit que f(x) tend vers $l \in E$ quand x tend vers $+\infty$
c'est à dire $\forall \epsilon > 0,$ il existe $A > 0, x > A,$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$

Définition $f : E \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe $A < 0$ tel que $] - \infty, A[\subset E$ On dit que f(x) tend vers $l \in E$ quand x tend vers $-\infty$ c'est à dire $\forall \epsilon > 0,$ il existe $A < 0, x < A,$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$

Remarque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ veut dire $\forall A > 0,$ il existe $B > 0, x < -B$ tel que $f(x) > A$

Exemple

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

Démonstration Soit $A > 0$. On cherche δ tel que si $0 < x$, $0 < \delta$ alors $f(x) = \dfrac{1}{x} > A$
Choisir $\delta = \dfrac{1}{A}$ suffit, en effet $0 < x < \dfrac{1}{A}$ alors $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{A}$.

Exemple $g(x) = 1 + e^{-x}$ Montrons que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

Exemple

$$f :] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

$$x \quad \to tan(x)$$

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} tan(x) = -\infty$$

8 Opération sur les limites

— Limites finies ($l \in \mathbb{R}$) en l'infini sont exactement les memes opérations.
— Limites infinies ($l = \pm\infty$) Attention aux cas indterminé :
$+\infty - \infty, \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 * (\pm\infty)$

Exemple $\frac{+\infty}{+\infty} = ?$

$$f : x \mapsto x$$

$$g : x \mapsto x^2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f_2 : x \mapsto x^3$$

$$g_2 x \mapsto x^2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = +\infty$$

$$f_3 : x \mapsto 3x$$

$$x \mapsto x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_3(x)}{g_3(x)} = 3$$

Plus généralement, P,Q deux polynomes, que vaut $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$? Elle est égale au rapport des thermes du plus haut degrés. Exemple :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 4x^5 + 2}{x^4 + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^5}{x^4} = +\infty$$

Exemple

$$\lim_{x \to 0} x * \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

car $\forall x \neq 0,\ 1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$

donc $0 \leq |x * \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$ avec —x— tend vers 0 pour x tend vers 0.

III

Continuité

1 Définition et premières propriétés

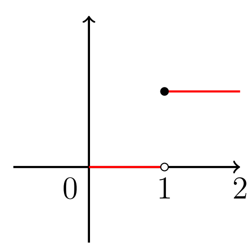
Définition $f : E \to \mathbb{R}$ et $x \in E$

- On dit que f est continue en x_0 (au point x_0) si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$
- f est continue sur E si f est continue en tout point $x_0 \in E$

o

Exemple Fonctions continues :
- $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (domaine $\mathbb{R}^*$) est continue sur $\mathbb{R}^*$
- $\sin, \cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$

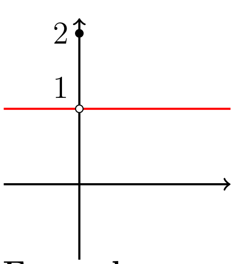
Fonctions discontinues : $x \mapsto [x]$ n'est pas continue en 1 par exemple. En effet, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = 0$et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = 1$.



Les limites à gauches et à droite étant différentes donc $\lim\limits_{x \to 1}$ n'existe pas

$g(x) = 1$ pour tout x différent de 0 mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{x \to 0 ; x<0} g(x)$

Remarque f continue en x_0 si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$



Définition
- f est continue à droite en x_0 si limite de f(x) par valeur supérieur ($\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$) en x_0 et vaut $f(x_0)$
- f est continue à gauche e en x_0 si limite de f(x) par valeur inférieur ($\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$) en x_0 et vaut $f(x_0)$

Exemple
- f(partie entière de l'exemple précédent) est continue à droite mais pas à gauche en 1. f est continue sur $[0;1[$

— g n'est pas continue ni à gauche, ni à droite en 0.

Proposition f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0

Propriété $f, g : E \to \mathbb{R}, x_0 \in E$
f et g continue en x_0
- f+g est continue en x_0
- f.g est continue en x_0
- $\frac{f}{g}$est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$

La continuité est très local, meme si pour un $x \in E$, $g(x) = 0$, temps que x_0 différent de 0, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

Composition $f : E \to F$ $g : F \to G$ et $gof : E \to G$ si f est continue en $x \in E$ et g est continue en $f(x) \in F$, alors gof est continue en x_0

Exemple
- Polynôme , $\sin + \cos, \tan + exp$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- $\sin(ln(\frac{e^x}{1+x^2}))$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $exp, 1 + x^2$ sont continue, de plus $1 + x^2 \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ donc $\frac{e^x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Finallement, e^x n'est jamais null donc $im(x \mapsto \frac{e^x}{1+x^2}) = \varphi \subset \mathbb{R}^{+*}$, d'où $ln(\varphi)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $\begin{array}{l} x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x} \\ \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, de plus, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Définition Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $\boxed{x_0 \text{ adhérent à E}}$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, alors la fonction $g : E \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ par la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases} \text{Est continue sur} \mathbb{R}$$

Exemple

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ l & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{Est continue sur} \mathbb{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} xln(x) \text{ si } x > 0 \\ \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \text{ est le prolongement par continuité en 0 de } x \mapsto xln(x)$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} \text{ , } \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Exercice Par quelles valeurs de c, la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(2x)}{x} \text{ si } x < 0 \\ \\ x + c \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

est continue ? f est continue si et seulement si $x = 2$ En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{sin(2x)}{x} \\ &= \frac{sin(2x)}{2x} * 2 = 2 \end{aligned}$$

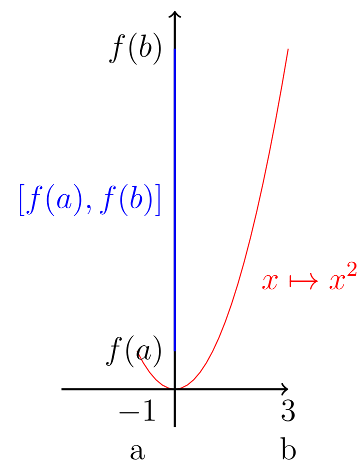
(2^{eme} méthode : $sin(2x) = 2sin(x) * cos(x)$, $\dfrac{sin(2x)}{x} = 2 * \dfrac{sin(x)}{x}. \cos(x)$ ce qui tend vers 2 pour x tend vers 0, et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = c$ donc
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$ si et seulement si $c = 2$)
Donc f est continue en 0 si $c = 0$. De plus, pour tout $x_0 > 0$, $f(x) = x + c$ qui est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x_0 < 0$, $f(x) = \dfrac{sin(2x)}{x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^{-*}$ Le seule problème possible était en 0.

Comportement local

Proposition Si f est continue en x_0, alors f est localement bornée autour de x_0 (c'est à dire il existe un voisinnage de x_0 sur lequel f est bornée, c'est à dire il existe $\delta > 0$ et $M > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x)| < M$). Si f est continue en x_0 et $f(x) \neq 0$, alors f est de signe constant (celui de $f(x_0)$ localement autour de x_0

2 Théorème des valeurs intermédiaires

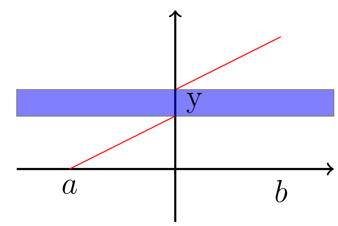
Théorème $f : [a,b]\mathbb{R}(a < b)$ et continue (sur $[a,b]$) Pour tout y compris entre f(a) et f(b) il existe au moins $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.



Exemple

$$x \mapsto x^2$$
$$[-1,3] \to \mathbb{R}$$

(Contre) exemple : la continuité est essentielle. Voici une fonction monotone et non continue pour laquel il existe des y dans $[f(a), f(b)]$ qui n'a pas d'ancédent entre a et b.



Corollaire 1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue.
si f(a) et f(b) sont non nul et de signes différents, il existe $x \in]a,b[$ tel que $f(x) = 0$

Corollaire Si $f(x) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$ avec a, b de signes différents dans $\mathbb{R}$, alors il existe un $c \in]a,b[$ tel que $f(x) = 0$

Corollaire

$$f \text{fonction continue}$$
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors f est surjective.

Idée de démonstration Ramener à un intervalle "bornée", de type $[a,b] \in \mathbb{R}^2, a < b$.
Soit $y \in \mathbb{R}$, et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = y - 1$ et $f(x_2) = y + 1$. On cherche à prouver qu'il existe au moins un antécédent.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $f(x) \geq y + 1$ pour x assez grand.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc $f(x) \leq y - 1$ pour x assez petit. On applique le théorème des valeurs intermédiaire à $f_{|[x_1,x_2]} : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ et $f_{|[x_1,x_2]}$ est bien continue.

Comme $f(x_1) \leq y - 1 < y < y + 1 \leq f(x_2)$
D'où il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) = y$.

Corollaire $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur $I \in \mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervall.

3 Continuité et extremum

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}$.

— On dit que x est le minimum de E, si pour tout élément de $x' \in E$, $x' \geq x$
— On dit que x est le maximum de E, si pour tout élément de $x' \in E$, $x' \leq x$
— Un extremum est un minimum ou un maximum.

Remarque Le maximum et le minimum sont unique.

Théorème Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}(a < b)$, continue.
L'image de f admet un minimum et un maximum.

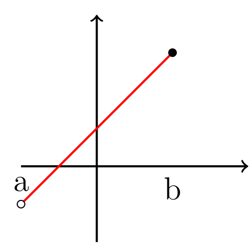
Remarque de manière équivalente : Minimum
$\exists y \in Im(f), \forall y' \in Im(f), y' \geq y$ (ou y est le minimum)
$\exists x_{min} \in [a,b], \forall x' \in [a,b], f(x') \geq f(x_{min})$ (avec $y = f(x_{min})$ et $y' = f(x')$)

Pour le maximum : $\exists x_{max} \in [a,b], \forall x' \in [a,b], f(x') \leq f(x_{max})$ ($f(x_{max})$ le maximum de $Im(f)$)

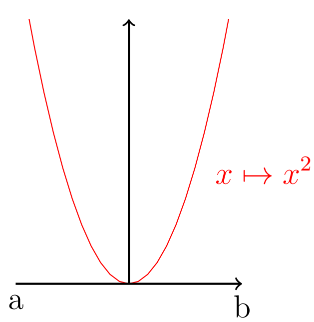
Dans ces exemples, y est forcément unique (dans le cas du minimum ou du maximum) mais il peut y avoir plusieurs antécédents (plusieurs x_{min} et x_{max})

Exemple $\sin : [0, 4\pi] \to [-1, 1]$
Le minimum de $\sin_([0, 4\pi])$ est -1. Il est atteint en $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{2}$.

Remarque 2 hypothèses. Pour avoir un maximum ou un minimum, $[a,b]$ doit etre un intervalle ferme et borne. Par exemple, Le minimum n'est pas atteint sur $]a,b]$ De meme, sur $[a,b[$ pour le maximum.



Corollaire supposons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors f admet un minimum mais pas de maximum.



Idée de démonstration

Cette fonction admet un minimum (0) mais jamais de maximum.

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe un réel A et x_0 tel que $\forall x > x_0; f(x) > A$ De même, comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ il existe un réel A et $-x_0$ tel que $\forall x < -x_0; f(x) > A$

Dans l'intervalle $]-x_0, x_0[$ comme f est continue, $f(]-x_0, x_0[)$ est un intervalle continue. Or un intervalle continu admet forcément un minimum, dans $]-x_0, x_0[$, il existe un c tel que $f(x) > f(c)$. Or, comme $\forall x < -x_0$ et $\forall x > x_0$, $f(x) > A$, on à $f(x) > A > f(x)$. Donc f admet bien un minimum et pas de maximum.

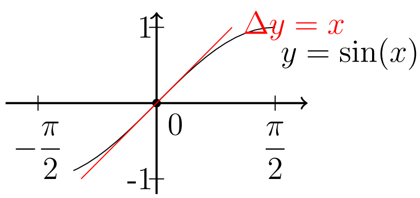
Corollaire $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
Si pour tout $x \in [a, b], f(x) > 0$ alors le minimum de $Im(f) > 0$,
c'est à dire $\exists m > 0, \forall x \in [a, b], f(x) \geq m > 0$

4 Fonctions réciproques

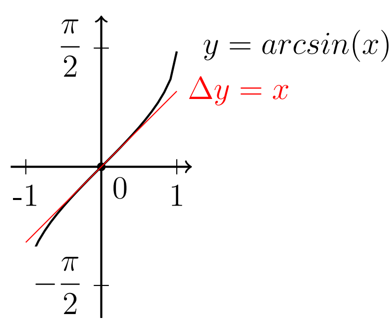
Théorème $f : I \to \mathbb{R}$, continue et strictement monotone.

1. $f(I)$ est un intervall
2. f est bijective sur J
3. f^{-1} est continue et strictement monotone, avec le meme sens de variations que f.
4. Les graphs de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bisectrice $\Delta y = x$

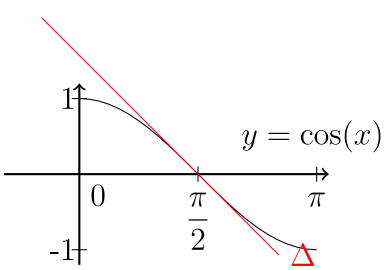
Exemple $\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ est continue et strictement croissante.



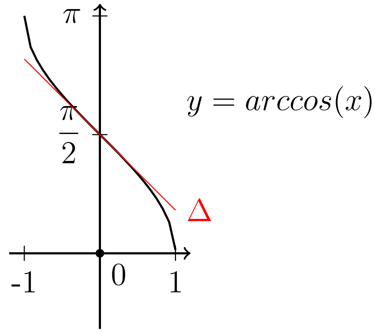
Donc f est bijective, c'est à dire $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ existe et f^{-1} vaut arcsinus.
$arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante.



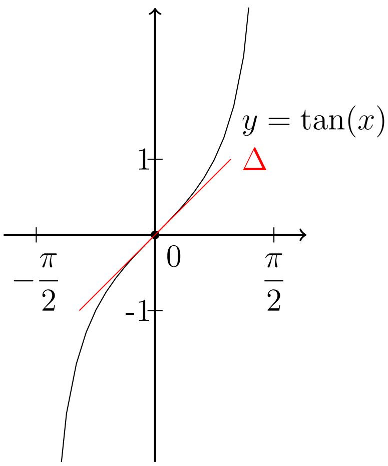
Exemple $\cos[0, \pi] \to [-1, 1]$ est continue et strictement croissante.



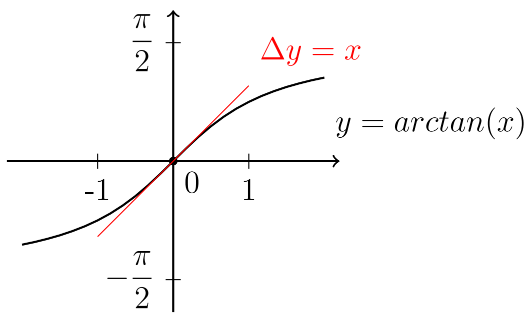
Donc f est bijective, c'est à dire $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ existe et f^{-1} vaut arccosinus.
$arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ est continue et strictement croissante.



Exemple $\tan :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante, donc sa fonction reciproque est : $arctan : \mathbb{R} \to]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ aussi.



Donc f est bijective, c'est à dire $f^{-1} : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ existe et f^{-1} vaut arctangeante.
$arctan : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante.



Exemple

$\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ x \mapsto x^n \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ si n est pair.

Elle est donc bijective : $\begin{cases} x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \end{cases}$ elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si n est impair. Reciproque

$\begin{cases} x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$

IV

Dérivabilité

Définition $f : E \to \mathbb{R}, E$ est un voisinage de x_0. f est derivable en x_0 si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite l quand x tend vers x_0 ($l \in \mathbb{R}$). $\tau(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est appelé le taux d'accroissement de f en x_0. La limite de l (quand elle existe) est la dérivée de f en x_0, elle est notée $f'(x_0)$

Exemple $\begin{array}{l} f : x \mapsto x^2 \\ \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}$ $f'(1) = ?$

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

Exemple 2 $\begin{array}{l} f : x \mapsto x^3 \\ \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}$

$\forall x \neq x_0,$

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2)}{x - x_0} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to x_0} x^2 + x.x_0 + x_0^2 = 3x_0^2$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x_0^2$

Exemple 3 $\begin{array}{l} f : \ x \ \mapsto \sqrt{x} \\ \quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \end{array}$

$$\forall x \neq x_0, x_0 \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \begin{aligned} \tau(x) &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\ &= \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\ \lim_{x\to x_0} \tau(x) &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

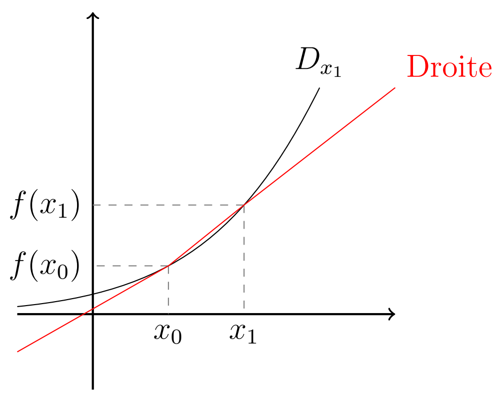
1 Interprétation géométrique

$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente du graphe de f en $(x_0, f(x_0))$

$\tau(x_1) = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ est le coefficient de la droite passant par P_{x_1} et P_{x_0} avec P_{x_1} du graph au point x_1, et P_{x_0} celui de x_0
$y = \tau(x_1)(x-x_0) + f(x_0)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$

Quand x tend vers x_0, la droite D_{x_1} "converge" vers la tangeante au graph de f au point $(x_0, f(x_0))$, d'équation :

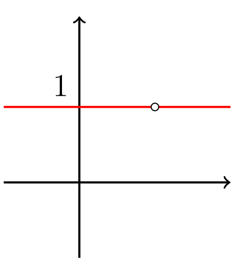
$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$



Définition Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} \tau(x) = l^-, l^- \in \mathbb{R}$
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 et on note $f'_g(x_0) = l^-$

Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} \tau(x) = l^+, l^+ \in \mathbb{R}$
f admet une dérivée à droite en x_0, que l'on note $f'_d(x_0) = l^+$

Théorème $f : E \to \mathbb{R}, E$ un voisinage de x_0. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$



Remarque Cette fonction n'est pas dérivable en 1, pourtant $f'_d(1) = f'_g(1)$, f doit donc alors être continue en x_0

Démonstration f est dérivable en x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \tau(x) = l \in \mathbb{R}$, cela signifie

$$\exists \delta > 0, |x-x_0| < \delta \text{ donc } |\tau(x) - l| < 1$$

donc que

$$l-1 \leq \tau(x) \leq l+1$$

$$l-1 \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq l+1$$

Si $x > x_0$, on obtient :

$$(l-1)(x-x_0) \leq \quad f(x) - f(x_0) \leq \quad (l+1)(x-x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}(l-1)(x-x_0) \leq \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0}(l+1)(x-x_0)$$

$$0 \leq \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) \leq 0$$

$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ par le théorème des gendarmes, et de même pour $x < x_0$

Définition $f : E \to \mathbb{R}$ f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ si f est dérivable en tout point de $x_0 \in]a,b[$ f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a,b]$ si f est dérivable sur l'intervalle ouvert et à droite en a et à gauche en b.

Exemple $x \to \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[, [a,+\infty[(a > 0)$ mais pas sur $[0,+\infty[$.

2 Dérivabilité des prolongements de fonctions

Proposition $f : [a,b] \to \mathbb{R}, g[b,c] \to \mathbb{R}$ dérivable

On définit $\varphi : [a,c] \to \mathbb{R}$ par la formule $\varphi(x) \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [a,b] \\ \\ g(x) \text{ si } x \in]b,c] \end{cases}$

φ est continue sur $[a,c]$ si

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x\to b\\ x>b}} \varphi(x) = \varphi(b)$$

$$f(b) \quad = g(x) \quad = f(b)$$

Si φ est continue, φ est dérivable sur $[a,c]$ si $f'_g(b) = g'_d(b)$

Exercice Trouver α et β tels que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 2, \text{ si } x \leq 1 \\ \\ \alpha x + \beta \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Soit dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $e^x + 2$ et $\alpha x + \beta$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$, le seul problème peut survenir en 1. Pour être dérivable, f doit être continue : $e^1 + 2 = \alpha + \beta$ et on doit avoir $f'_g(1) = e = f'_d(1) = \alpha$. $\alpha = e$ et $\beta = 2$

3 Opération usuelles

$f, gE \to \mathbb{R}, E$ voisinage de x_0.
f et g sont dérivable en x_0, alors :
- f+g est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x) + g'(x)$
- f*g est dérivable en x_0 et $(f*g)'(x_0) = f'(x_0) * g(x_0) + f(x_0) * g'(x_0)$
- si $g(x_0) \neq 0$ $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $(\dfrac{f}{g})'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) * g(x_0) - f(x_0) * g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Démonstration Pour la somme :

$$(f+g)(x) - (f+g)(x_0) = f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))$$

$$= f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)$$

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Pour le produit :

$$(f*g)(x) - (f*g)(x_0) = f(x) * g(x) - (f(x_0) * g(x_0))$$

$$= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)$$

$$= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))$$

$$\frac{(f*g)(x) - (f*g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{c - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0)$$

Comme précédemment, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ car g est continue en x_0

$$\frac{f}{g} = f.\frac{1}{g}$$

$$(\frac{f}{g})' = f'.\frac{1}{g'} + f.(\frac{1}{g})'$$

Composition $f : E \to F, g : F \to G, gofE \to G$
On suppose f dérivable en x_0, g dérivable en $f(x_0)$ alors gof est dérivable en x et $(gof)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$

Exemple $f, g : E \to F$ dérivables en x_0, avec $f(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f'}{g}(x_0) = (g * \dfrac{1}{g})'(x_0)$ Et $\dfrac{1}{g}$ est la composée de g et de $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$\varphi'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ d'où $(\dfrac{1}{g})'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Soit finalement
$$\begin{aligned}(\frac{f}{g})'(x_0) = (f\cdot\frac{1}{g})'(x_0) &= f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\end{aligned}$$

Exemple dérivée $e^{\sin(x)}$

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto\sin(x)$$

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto e^x$$

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$x\mapsto gof(x)$$

D'où $\forall x\in\mathbb{R} h'(x) = \cos(x)\cdot e^{\sin(x)}$

Définissons f par la formule $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}, 1+x^2\neq 0$ Donc :

- f est définie sur $\mathbb{R}$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $f'(x) = \dfrac{-1x}{(1+x^2)^2}$

Dérivée de la fonction réciproque $f:E\to F$ dérivable sur E et bijective (Sa réciproque est notée f^{-1}) On note $f^{-1}of(x) = x\forall x\in E$ Donc $(f^{-1}of)'(x) = f'(x)\cdot(f^{-1})'(f(x)) = 1\forall x\in E$

On obtient $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Exemple $\tan]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}, x\mapsto\dfrac{\sin x}{\cos x}$

Pour $x\in\tan]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\cos x\neq 0$ et donc

$$\begin{aligned}(tan)'(x) &= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2(x)\end{aligned}$$

En effet, $1+\tan^2(x) = 1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

De plus, tan est bijective, de réciproque $arctan\mathbb{R}\to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $arctan(\tan x) = x$

donc $\tan'(x) \cdot (arctan)'(\tan(x)) = 1$ c'est à dire
$arctan'(\tan x) = \dfrac{1}{\tan'(x)} = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$
On note $z = \tan x$, $arctan'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$

Exercice a)

$$\begin{aligned} f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\to]-1,1[\\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

f est bijective et $f'(x)$ ne s'annule pas, donc

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

En effet,

$$\arcsin(\sin(x)) = x$$

$$(\arcsin(\sin(x)))' = x'$$

$$\cos(x) * \arcsin'(\sin(x)) = 1$$

$$\arcsin'(\sin(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$$

On note $z = \sin(x)$, on a

$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$

$$\arcsin'(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

b) de même, $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$

En effet,

$$\arccos(\cos(x)) = x$$

$$(\arccos(\cos(x)))' = x'$$

$$-\sin(x) * \arccos'(\cos(x)) = 1$$

$$\arccos'(\cos(x) = -\frac{1}{\sin(x)}$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$$

On note $z = \cos(x)$, on a

$$\arcsin'(\cos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2}}$$

$$\arcsin'(z) = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

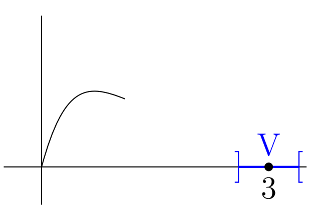
4 Extreima et points critiques

Définitions $f : E \to F$
f admet un maximum local en $\alpha \in E$, s'il existe un voisinage V de α, tel que $\forall x \in V \cap E, f(x) \leq f(\alpha)$
f admet un minimum localen $\beta \in E$, s'il existe un voisinage V de β, tel que $\forall x \in W \cap E, f(x) \geq f(\beta)$
Un extremum local est un minimum local, soit un maximum local.

Proposition $f : E \to \mathbb{R}, x_0 \in E$ avec E voisinage de x_0 Si x_0 est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$
ON dit alors que x_0 est un point critique de f.

Remarque $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Les extrema sont inclus dans $\{x \in]a, b[\text{ tel que } f'(x) = 0\} \cup \{a, b\}$

Exemple (inhabituel) $f : [0, 1] \cup \{3\}$



$V \cap E = \{3\}$ $\forall x \in V \cap E, f(x) \geq f(3)$ donc $f(3)$ est un minimum local, de même, il est aussi un maximum local car $\forall x \in V \cap E, f(x) \leq f(3)$

Exemple $\sin[-\frac{\pi}{4}, \pi] \to [-1, 1]$

La restriction de la fonction sinus à $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$ admet un unique point critique.

Théorème de Rolle Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivble sur $]a, b[$ si $f(x) = f(b)$, alors il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Démonstration Notons $y = f(a) = f(b)$ f continue sur $[a, b]$ (fermé) donc il existe un minimum global et un maximum global (atteints respectivement) en α et β, c'est à dire $\forall x \in [a, b], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$

1er cas $f(\alpha) = y = f(\beta)$

La fonction est donc constante sur $[a, b]$. N'importequel $c \in]a, b[$ convient.

2er cas soit $f(\alpha) < y$ ou $y < f(\beta)$

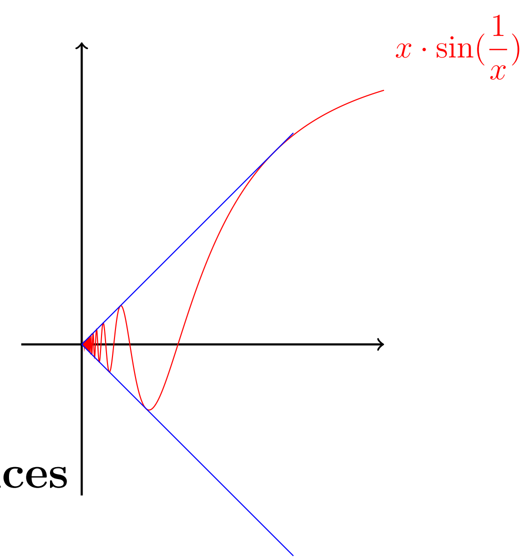
Supposons que $f(\alpha) < y$ $f(\alpha)$ est un minimum global donc un minimum local.

$\alpha \in]a, b[$, car $f(x) \neq y$ Par la proposition, $f'(\alpha) = 0$

De même, si $y < f(\beta)$, prendre $c = \beta$ convient.

Exemple

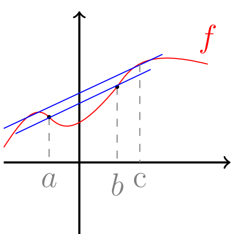
$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$



On remarque que f(0) n'est ni un minimum, ni un maximum local.

5 Acroissements finis et conséquences

Exemple



Théorème $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Démonstration Appliquer le théorème de Rolle à $g(x) = f(x) - (\frac{f(b) - f(a)}{b - a}) \cdot x$

Corollaire f est une fonction comme ci dessus,

— si $f' \geq 0$ sur $]a, b[$ alors f est croissante sur $[a, b]$
— si $f' > 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement croissante sur $[a, b]$
— si $f' \leq 0$ sur $]a, b[$ alors f est decroissante sur $[a, b]$
— si $f' < 0$ sur $]a, b[$ alors f est strictement decroissante sur $[a, b]$
— si $f' = 0$ sur $]a, b[$ alors f est constante $[a, b]$

Application Tableaux de variations.

Exemple

$$\sin h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \quad \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\sin h(0) = 0$ $\sin h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin h'(x) = \dfrac{e^x + e^-x}{2} = cosh(x)$
$sinh'(x) > 0$ pour tout x, donc le sinus hyperbolique est croissante.

De même

$$\cos h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \quad \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$\cos' h(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}{}'}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sin h$
$\cos(0) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$sin'h$			$+$		
$sinh$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$cos'h$		$-$	0	$+$	
$cosh$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$\tan h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{sinh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} \\ &= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \end{aligned}$$

De la même façon, $tanh(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} = -1$

Remarque $\sin h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective $\sin h^{-1} = arg \sin h$
$\cos h : \mathbb{R}^{+} \to [1, +\infty[$ est bijective $\cos h^{-1} = arg \cos h$

V

Dérivées d'ordre supérieur

But Approcher localement une fonction f par des polynômes.

Définition
$$k \in \mathbb{N}^+, k! = 1 * 2 * 3 * ... * k$$
$$0! = 1$$

Exemple

— polynome de degré 0 $f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))$
$$= \epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \text{ Si f continue}$$

— Polynôme de degré 1 si f est dérivable :
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))$$
$$(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)) = (x - x_0)(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0))$$
$$= \epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \text{ car f est dérivable}$$

On voudrait
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon(x)$
avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

Objectifs du cours :

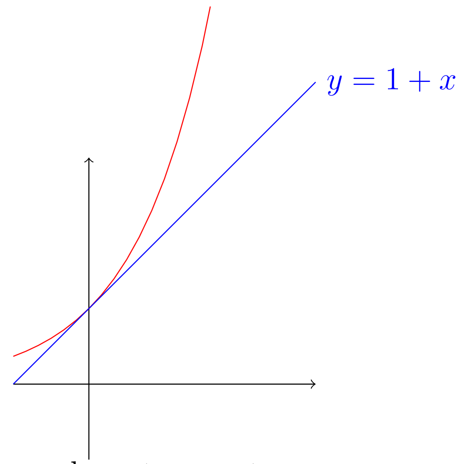
1. Comprendre $f''(x_0), f'''(x_0)$
2. Comprendre $\epsilon(x)$

Exemple En 0 ordre 2 : $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$

Application :

— Calcul de limites : $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$

— Position d'un graph par rapport à sa tangeante. On considère $f(x) -$ tangeante :



$$\begin{aligned} e^x - (x-1) &= \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \\ &= x^2(\frac{1}{2} + \epsilon(x)) \end{aligned}$$

$x^2 > 0$ et $\frac{1}{2} + \epsilon(x) > 0$ donc près de 0, la fonction est au dessus de sa tangeante.

1 Dérivées d'ordre supérieur

Définition $f : I \to \mathbb{R}$ I est un intervalle ouvert. On dit que f est C^0 si elle est :

— C^0 si elle est continue sur I.

— C^1 si elle est dérivable sur I et que f' est continue.

— C^2 si f est dérivable deux fois et f" est continue sur I

— C^k si f est dérivable k fois et $f^{(k)}$ est continue sur I

— C^∞ si f est $C^k \forall k \in \mathbb{N}$

Exemple $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \to C^0$ car $f(x)$ est dérivable, donc continue.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sin(\frac{1}{x}) + x^2(\frac{-1}{x^2})\cos(\frac{1}{x}) \\ &= 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Donc $f(x)$ n'est pas C^1 car $f'(x)$ n'est pas continue ($\cos(\frac{1}{x})$ n'est pas continue en 0).

2 Développement limité et formule de Taylor-Young

Définition Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I est un intervalle ouvert. $x_0 \in I$. f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n s'il existe :

— un polynome de degrés n : $P(x) = a_0 + a_1.x + ... + a_n.x^n$

— Un fonction $\epsilon :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ avec $\epsilon \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ tel que

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0).\epsilon(x) \text{ pour } x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_n)^n\epsilon(x)$$

Dans ce cas P est la partie principale du développement limité.

— degré de $P = n$
— ϵ définie près de x_0 et tel que $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

Théorème Si un tel développement limité existe, alors il est unique.

Exemple $p(x) = x^4 + 3x^2 - x + 17$. $DL_3(0) = 17 - x + 3x^2 + x^3 \cdot \epsilon(x)$

Formule de Taylor-Young

Théorème $f : I \to R, I$ intervalle ouvert et $x_0 \in I$
Si f est C^n sur I, alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0
De plus, $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} * (x - x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$
avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ pour $\delta > 0,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$

Exemple

1. $f(x) = exp(x)$ en $x_0 = 0$
   $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$
2. $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 1$
   $DL_6(0) : Q(x) = 1 + 3x^2 + x^3 + x^6 \epsilon(x)$ $(\epsilon(x) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0)$
   $DL_2(0) : Q(x) = 1 + 3x^2 + x^2 \epsilon(x)$ avec $(\epsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0)$
   $DL_2(1) : Q(x) = Q(1) + Q'(1) + \frac{Q''(1)}{2} + (x - 1)^2 \epsilon(x)$

$$\text{Or } Q'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$\text{donc } Q'(1) = 9$$

$$\text{et } Q''(x) = 6x + 6$$

$$\text{donc } Q''(x) = 12$$

$$\begin{aligned} DL_2(1) : Q(x) &= 5 + 9(x - 1) + \frac{12}{2}(x - 1)^2 + (x - 1)^2 \epsilon(x) \\ &= 5 + 9(x - 1) + 6(x - 1)^2 + (x - 1)^2 \epsilon(x) \end{aligned}$$

3. $f(x) = \ln(1 + x)$
   $DL_3(0) : f(x) = 0 + 1 \cdot x + -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + x^3 \epsilon(x)$

$$
\begin{aligned}
& f'(x) = \frac{1}{1+x} && \text{d'ou } f'(0) = 1 \\
\text{car} \quad & f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} && \text{d'ou } f''(0) = -1 \\
& f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} && \text{d'ou } f'''(0) = 2
\end{aligned}
$$

Comme $3! = 1 * 2 * 3$ on obtient $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$f(x) = \frac{1}{1-x} DL_n(0)$?

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n\epsilon(x)$

En effet, la somme des N premiers termes de la suite géométrique de premier terme q et de raison x est : $q\frac{1-x^N}{1-x}$

pour $q = 1$:

$\frac{1-x^N}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^{N-1}$

$$
\text{Donc} \quad
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} - \frac{\overbrace{(1+x+x^2+...+x^n)}^{N-1=n}}{1-x} &= \frac{1}{1+x} - \frac{1-x^{n+1}}{1+x} \\
&= \frac{1-(1-x^{n+1})}{1-x} \\
&= \frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \underbrace{(\frac{x}{1-x})}_{\epsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}
\end{aligned}
$$

Conclusion :

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n\epsilon(x)$

Remarque : $(\frac{1}{1-x})^{(17)}(0) = 17!$

4. $f(x) = \sin(x) DL_4(0)$?

$$g(0) = \sin(0) = 0$$

$$g'(0) = \cos(0) = 1$$

$$g''(0) = -\sin(0) = 0$$

$$g'''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$g^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$$

D'où $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + x^4\epsilon(x)$

Remarque comme sin est impaire, seuls les coefficients impairs apparaissent dans la partie principal.

3 Formule de Taylor-Lagrange

Qui aide à spécifier ϵ

Théorème $f : E \to \mathbb{R}$, I un intervalle et $x_0 \in I$ et fC^n sur I.

Pour tout x de I, il existe x entre x et x_0 tel que $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + ... + \dfrac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$

Remarque c dépend de x !
$\dfrac{f^{(n)}(c(x))}{n!}(x - x_0)^n$

Remarque pour $n = 1$ on retrouve le théorème des accroissements finis.
— On retrouve Taylor-Young en posant

$$\epsilon(x) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(x_0))$$

Car f est C^n, le $f^{(n)}$ est continue.

4 Opération usuelles sur les DL

Théorème $f, g : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert, $x_0 \in I$. Si f et g admettent un DL à l'ordre n en x_0 alors :

— $f+g$ aussi dont la partie principale est la somme des parties principales des DL respective de f et g.
i.e si $f(x) = P(x) + x^n\epsilon_1(x)$ avec P polynôme de degré $\leq n$ et $\epsilon_1 \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ et si $g(x) = Q(x) + x^n\epsilon_2(x)$ avec Q polynôme de degrés $\leq n$

Alors $(f+g)(x) = (P+Q)(x) + x^n\epsilon_3(x)$
— $f \cdot g$ aussi et sa partie principale est le produit des parties principales TRONQUE à l'ordre n.

Exemple $DL_2(0)$ de $e^x \cdot \sin(x)$

$$DL_2(0) \text{ de } e^x \ : \ 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

$$DL_2(0) \text{ de } \sin(x) = x + x^2\epsilon(x)$$

Donc $DL_2(0)$ de $e^x \cdot \sin(x)$ est : $(1 + x + \frac{x^2}{2}) \cdot (x) + x^2\epsilon(x)$ À TRONQUER, c'est à dire :

$$e^x \cdot \sin(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$$

Théorème $f : E \to \mathbb{R}, g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$, $x_0 \in I$
Si f admet un $DL_n(x_0)$ et que g admet un $DL_N(f(x_0))$ alors gof admet un $DL_n(x_0)$ et sa partie principale est la composé des parties principales tronque à l'ordre n.
i.e $f(x) = P(x) + x^n\epsilon(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n\epsilon(x)$ alors :
$gof(x) = R(x) + x^n\epsilon(x), R(x) = QoP(x)$ TRONQUE

Exercice $DL_3(0)$ de $e^{\sin x}$?

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)$$

En effet, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$. De plus, $\sin(0) = 0$ Donc on veut le DL de exp en 0 :

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + y^3\epsilon(y)$$

Par composition,

$$e^{\sin x} = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6})^3 + x^3\epsilon(x)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \overbrace{\frac{1}{2}(x^2)}^{\text{On a tronque}} + \overbrace{\frac{1}{6}x^3}^{\text{Ici aussi !}} + x^3\epsilon(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + 0x^3 + x^3\epsilon(x) \end{aligned}$$

5 Applications des DL

5.1 Calcul de limites

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^x - 1}{(1+x)^2 - 1} && \textit{lim} \text{ en } 0? \\
&= \frac{(1 + x + x\epsilon(x)) - 1}{x(x+2)} \\
&= \frac{x(1+\epsilon(x))}{x(x+2)} && \text{avec } \epsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\
&= \frac{1+\epsilon(x)}{x+2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} && \text{par opérations usuelles sur les limites}
\end{aligned}$$

Exemple $g(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x))}{x^2} = \underbrace{\dfrac{1}{2} - \epsilon(x)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}}$

$$h(x) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} \qquad \textit{lim} \text{ en } 0$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + y^2\epsilon(y)$$

$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2 + (\cos x - 1)} = \sqrt{2(1 + \frac{1}{2}(\cos x -))}$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{1 + \frac{\cos x - 1}{2}})$$

$$\frac{\cos x - 1}{2} = \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)) = -\frac{x^2}{4} + x^2\epsilon(x)$$

$$\text{D'ou } \sqrt{1 + \frac{1}{2}(\cos x - 1)} = 1 + \frac{1}{2}\frac{-x^2}{4} + x^2\epsilon(x)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{8} + x^2\epsilon(x)$$

$$\text{car } (\sin x)^2 = x^2 + x^2\epsilon(x)$$

$$\text{Donc } h(x) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}(1 - \frac{x^2}{8} + x^2\epsilon(x))}{x^2 + x^2\epsilon}$$

$$= \frac{x^2(\frac{\sqrt{2}}{8} + \epsilon(x))}{x^2(1+\epsilon x)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{8} + \epsilon(x)}{1+\epsilon(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Remarque $DL_N(x_0)$ de gof.
Il faut que :

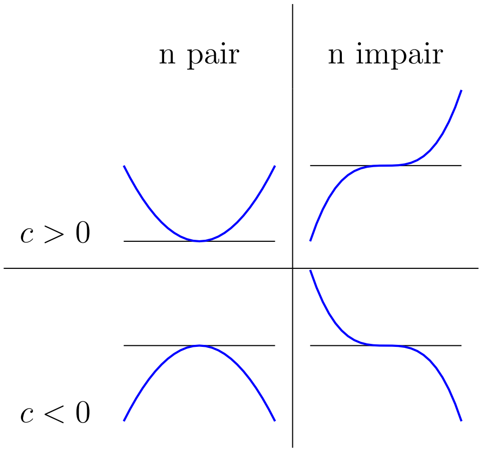
— $gof(x)$ existe pour $x \in]x_0 - \delta; x + \delta[$.

— f admette un $DL_n(x_0)$

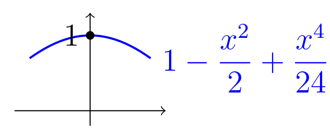
— g admette un DL_n en $f(x_0)$

5.2 signe local d'une fonction

Proposition $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$, si $f(x) = c(x-x_0)^n + (x-x_0)^2\epsilon(x)$ avec $c \neq 0, \epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$



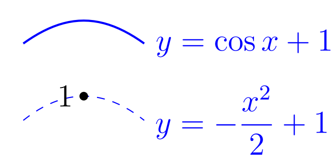
Exemple $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{}$ 0



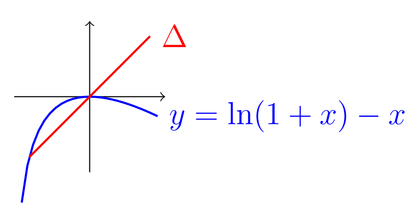
$$\begin{aligned}\text{En particulier : } (\cos x - 1) &= -\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)\\ &= \underbrace{-\frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)}_{x=2\text{: pair}}\end{aligned}$$

$$c = -\frac{1}{2} < 0$$

$$\text{De plus, } \cos x - (1 - \frac{x^2}{2}) = \underbrace{\frac{1}{24}}_{c>0}\, x^{\overbrace{4}^{\text{n pair}}} + x^4\epsilon(x)$$



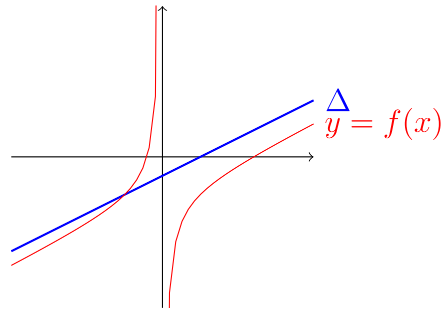
Exemple $x \mapsto \ln(1+x)$
Sa tangeante en 0 est la droite $\Delta : y = x$. De plus, $\ln(1+x) = x + -\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$



Donc $\ln(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$

5.3 Position par rapport à une asymptote

Exemple $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x+2x^2}$



$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x}+1}\right)$$

$$= \frac{x}{2}\left(\frac{1}{1+\underbrace{(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2})}_{u}}\right)$$

$$u(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^2 \qquad \text{avec } y = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^3\epsilon(u)$$

$$= 1 - (\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}) + (\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2})^2 + \frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})$$

$$= 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})$$

$$= 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})$$

$$f(x) = \frac{x}{2}(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(x))$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(x)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(x)$$

$$f(x) - (\frac{x}{2} - \frac{1}{4}) = \underbrace{-\frac{1}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(x)}_{\text{asymptote}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

$$\Delta = y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

VI

Intégration

1 Introduction

Motivation : "Sommes continues" et Calcul d'aires.

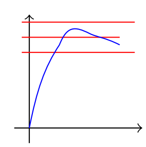
Exemple Soit un coureur. Première course sur une machine.

— $10km.h^{-1}$ pendant 20 minutes
— $12km.h^{-1}$ pendant 20 minutes
— $14km.h^{-1}$ pendant 20 minutes

Il aura donc parcouru : $(10 * \frac{1}{3}) + (12 * \frac{1}{3}) + (14 * \frac{1}{3}) = 12km$

2ème course

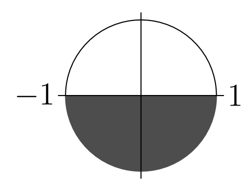
La distance parcourue est la somme de la distance parcourue instantanément pour chaque instant.



"somme continue" : $\int_0^1 v(t)dt \to$ Calcul de l'air sous la courbe

2ème exemple On veut voir le cercle comme le graphe d'une fonction. On considère donc (par exemple) la partie supérieur du cercle.

L'équation du cercle centré en 0 et de rayon 1 est :



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Ou encore} \quad y^2 &= 1 - x^2 \\ \text{Ou encore} \quad y &= \pm\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

On se restreint à $y \geq 0 : y = \sqrt{1 - x^2}$ L'Aire(DemiCercle) $= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$

1.1 Changement de variable

$$x = \cos t$$

$$\cos : [1, \pi] \to [-1, 1]$$

Cette fonction est bijective et continue.

$$dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

$$= (-\sin t)dt$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t} \cdot (-\sin t)dt$$

Or sur $[0, \pi]$, $\sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t$

$$A = \int_{\pi}^{0} -sin^2 tdt = \int_{0}^{\pi} \sin^2 tdt$$

1.2 intégration par parties

idée $(f.g)' = f'g + fg'$
donc : $fg' = (f.g)' - f'g$
Avec la linéarité de l'intégrale ($\displaystyle\int (u+v)(t)dt = \int (u)(t)dt + \int (v)(t)dt$)
donc $\displaystyle\int_a^b fg'(t)dt = \int_a^b (fg)'(t)dt - \int_a^b f'g(t)dt$
Ici, $A = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin t \cdot \sin tdt$

On pose $f'(t) = \sin t$ et g telle que $g'(t) = \sin(t)$

$$\int_0^{\pi} \sin t \sin tdt = \int_0^{\pi} [\sin t \cdot (-\cos t)]dt - \int_0^{\pi} [\cos t \cdot (-\cos t)dt]$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 tdt = \underbrace{[-\sin t \cos t]_0^{\pi}}_{0} + \int_0^{\pi} \cos^2 tdt(1)$$

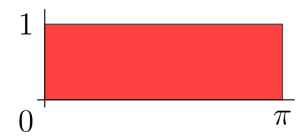
1.3

On sait que : $\forall t \in \mathbb{R}, \sin^2 t + \cos^2 t = 1$

En particulier,

$$\int_0^\pi (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \int_0^\pi 1dt$$

$$\int_0^\pi \cos^2 tdt + \int_0^\pi \sin^2 tdt = \pi$$



$$\int_0^\pi \cos^2 tdt + \int_0^\pi \sin^2 tdt = \pi$$

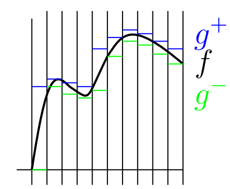
$$\text{D'après (1)} \int_0^\pi \cos^2 tdt = \int_0^\pi \sin^2 tdt$$

Donc $\boxed{2\int_0^\pi \sin^2 tdt = \pi \Rightarrow A = \int_0^\pi \sin^2 tdt = \frac{\pi}{2}}$

2 Définition de l'intégrale

2.1 "Culture"

$$\overbrace{\int_a^b g^-(t)dt}^{\text{On sait calculer}} \leq \int_a^b f(t)dt \leq \overbrace{\int_a^b g^+(t)dt}^{\text{Ça aussi}}$$



Définition $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est étapée s'il existe $a = t_0 < t_1 < t_{n-1} < t_n = b$
Si $\forall i \in [0, n-1], g_{|]t_i,t_{i+1}[}$

Définition 2 Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ étapée, on définit :

$$\int_a^b g(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

Définition 3 Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est <u>integrable</u> s'il existe 2 suites de fonctions $(g_n^-)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ étagées telles que :

$$\begin{cases} -g_n^- \leq f \leq g_n^+ \text{ et} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b g_n^-(t)dt \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b g_n^+(t)dt \end{cases}$$

existent et soient égales.

Dans ce cas, on note cette limite commune $\lim\limits_a^b f(t)dt$

Par convention, si $a < b$,

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Théorème Cette définition fonctionne, la démonstration est admise.

2.2 Retour à la vrai vie

Théorème Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue ou monotone, alors f est intégrable sur $[a,b]$

Proposition L'intégrale possède les propriétés suivantes.

— (positivité) si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$

— (Linéarité) $\begin{cases} \displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \\ \displaystyle\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda(\int_a^b f(t)dt) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$

— $\displaystyle|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

3 Liens entre primitives, intégrales (et dérivées)

Définition SOit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, continue. F est <u>une primitive</u> de f si F dérivable sur $]a,b[$ et $F' = f$.

Remarque Alors F est $C^1(]a,b[)$

Théorème

1. Soit F et G des primitives de f sur $]a,b[$. Alors $F - G = constante$ sur $]a,b[$
2. Pour toute primitive de F de f sur $]a,b[$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Démonstration Par définition des primitives, F et G sont C^1 et $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$ Donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F - G = c$

Attention : Soit $f :]-1,0[\cup]2,3[$ et $f(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \in]-1,0[\\ 3 \; si \; x \in]2,3[\end{cases}$

Remarque equivalente au théorème Si $u :]a,b[\to \mathbb{R}$, de classe C^1 alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)dt = u(b) - u(a)$

3ème énoncé équivalent
Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, continue, alors la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \text{ pour } c \in [a,b]$$

est <u>LA</u> pritimive de f qui s'annule en c .

Ce théorème s'appelle le <u>"Theoreme fondamental de calcul integral"</u>

Démonstration

— $F(x) = 0$

— On veut montrer que F'=f . Fixons$x_0 \in]a, b[$.

On veut montrer que $|\dfrac{F(x) - F(x_0}{x - x_0} - f(x_0)| \xrightarrow[x \to x_0]{?} 0$

a

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_c^x f(t)dt - \int_x^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_c^x f(t)dt + \int_{x_0}^c f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^x f(t)dt \qquad\qquad \text{Par la relation de Chasles} \end{aligned}$$

$$\text{D'ou } \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt$$

b

$$\begin{aligned} f(x_0) \in \mathbb{R} \text{ donc } \int_{x_0}^x f(x_0)dt = f(x_0) \int_{x_0}^x dt \\ = f(x_0) \cdot [t]_{x_0}^x = f(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

Donc $f(x_0) = \dfrac{1}{x - x_0} \displaystyle\int_{x_0}^x f(x_0)dt$

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^c f(x_0)dt \\ &= \frac{1}{x - x_0} (\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^x f(x_0)dt \\ &= \frac{1}{x - x_0} (\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt) \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, comme f est continue en x_0, i.e $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in]a, b[, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0| \leq \epsilon$

Pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ et pour tout t compris entre x et $x_0, |t - x_0| \leq |x - x_0| < \delta$ pour ce choix de x.

Pour tout t entre x et x_0, $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon$

$$\begin{aligned} \frac{|F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)| = |\frac{1}{x - x_0}| \cdot |\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt| &\leq |\frac{1}{x - x_0}| \cdot |\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt| \\ &\leq \frac{1}{x - x_0} |\int_{x_0}^x \epsilon dt| = \frac{1}{x - x_0} \cdot \epsilon \cdot |x - x_0| \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Exemple $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue

$$\underbrace{(\int_{e^x}^{\sin x} \frac{1}{1+t^2} dt)}_{H(x)}' = f(x)$$

Soit $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H(x) &= -\int_c^{e^x} \frac{dt}{1+t^2} + \int_c^{\sin x} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= -F(e^x) + F(\sin x) \text{ ou } F(x) = \int_c^x \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} H'(x) &= -(F(e^x))' + (F(\sin x))' \\ &= -(e^x \cdot \frac{1}{1+(e^x)^2} + \cos x \cdot \frac{1}{1+(\sin x)^2} \\ H'(x) &= \frac{-e^x}{1+e^{2x}} + \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \end{aligned}$$

4 Intégration par parties

Rappel $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, de classe C^1, $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

Donc $\int_a^b (fg)'(t)dt = \int_a^b (f'g)(t)dt + \int_a^b (fg')(t)dt$

Ou encore $\underbrace{[fg(t)]_a^b}_{\text{Notation pour} fg(b)-fg(a)} = \int_a^b (f'g)(t)dt + \int_a^b (fg')(t)dt$

D'où $\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$

Exemple $\int_a^b ln(t)dt = ?$

$$ln(t) = 1 * ln(t)$$

Par intégration par partie, $\int_a^b ln(t)dt = [t \cdot \ln t]_a^b - \int_a^b \frac{t}{t} dt = (b \ln b - a \ln a) - \int_a^b dt$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \int_a^b ln(t)dt &= (b \ln b - a \ln a) - (b - a) \\ &= (b \ln b - b) - (a \ln a - a) \end{aligned}$$

Exemple 2

$$\int_a^b \arctan(t)dt = [t\arctan t]_a^b - \int_a^b \frac{t}{1+t^2}dt$$
$$= (b\cdot\arctan b - a\cdot\arctan a) - (\int_a^b \frac{t}{1+t^2}dt)$$

De plus, $\dfrac{t}{1+t^2} = \dfrac{f'(t)}{f(t)}$ avec $f(t) = 1+t^2 \geq 0$

$$\text{D'ou } \int_a^b \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}[\ln|f(x)|]_a^b$$
$$= \frac{1}{2}(\ln(1+b^2) - \ln(1+a^2))$$

Donc une primitive de $\arctan(x)$ est : $F(x) = x\cdot\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

Exemple 3 $\displaystyle\int_a^b te^t dt = (b-1)e^b - (a-1)e^a$ avec $f'(t) = e^t$ et $g(t) = t$

En effet,

$$\int_a^b (f'g)tdt = [fg(t)]_a^b - \int_a^b (fg')(t)dt$$
$$\int_a^b (e^t\cdot tdt) = be^b - ae^a - \int_a^b e^t dt$$
$$= be^b - ae^a - e^b + e^a$$
$$= e^b(b-1) - e^a(a-1)$$

5 Changement de variable

Rappels $(Fou)' = u'F'ou$. Donc Fou est une primitive de $u'\cdot fou$
Cf exemple 2 (précédent) :

$$u(x) = 1+x^2$$
$$F(x) = \ln x$$
$$\text{et } f(x) = \frac{1}{x}$$

Cas fréquent : $\displaystyle\int^x u'(t)\cdot u(t)dt = \frac{1}{2}u^x$

$$\int^x \sin t\cos t dt = \frac{\sin^2 x}{2}$$
$$\int^x \frac{\ln t}{t}dt = \frac{\ln^2 x}{2}$$
$$\int^x \frac{arctant}{1+t^2}dt = \frac{arctan^2 x}{2}$$
$$\int e^{2t}dt = \frac{e^{2x}}{2}$$

Théorème Soit $u : I \to J$ bijective et dérivable. Si G est une primitive de $fou\cdot u'$ sur I, alors Gou^{-1} est une primitive de f sur J.

Exemple calcul de $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$

Soit $f : \begin{cases}]-1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}} \end{cases}$ et $u : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \to]-1,+\infty[\\ t \mapsto t^2-1 \end{cases}$ est bijective, et dérivable.

On pose $x = t^2 - 1$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$
$$fou(x) = \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2}}$$
$$= \frac{t^2-1}{t} \qquad \text{Car } t > 0$$
$$u'(t) = 2t$$
$$(fou.u')(t) = \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t$$
$$= 2(t^2-1)$$

G est une primitive de $2(t^2-1)$

$$G(x) = \int^x 2(t^2-1)dt$$
$$= [\frac{2}{3}t^3 - 2t]^x$$
$$= \frac{2}{3}x^3 - 2x$$

Par le théorème de changement de variable, Gou^{-1} est une primitive de f avec $u^{-1} : \begin{cases}]-1,+\infty[\to \mathbb{R}^{+*} \\ t \mapsto \sqrt{t+1} \end{cases}$

D'où $\frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1}$ est une primitive de f sur $]-1,+\infty[$

Exemple

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx \text{ air du demi cercle superieur du cercle trigo qui vaut } \frac{\pi}{2}$$

Prenons : $x = \sin t$ et $\sin[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ bijective et C^∞

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t \cdot dt \text{ Changement de borne et de variable où l'on dérive} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (cost)^2 dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(2t)}{2} dt \\
&= [\frac{t}{2}]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{[\frac{\sin(2t)}{4}]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Remarque Primitive de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

Comme $G : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$ est une primitive de $fou \cdot u'$, par le théorème, Gou^{-1} est une primitive de f.

Une primitive de f serait donc :

$$F(x)\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4}$$

$$\text{De plus} \qquad \sin(2t) = 2\sin t\cos t$$

$$\text{Donc} \qquad \sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)$$

$$2x\sqrt{1+x^2}$$

$$F(x) = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

Théorème $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ; $x_0 \in I$. On suppose que f admet un DL à l'ordre n en $x_0 = f(x) = P(x) + x^n\epsilon(x)$ avec $\begin{cases} P \text{ polynome de degre } \leq n \\ \epsilon \xrightarrow{x \to x_0} []0 \end{cases}$

Alors une primitive F de f sur I admet un DL à l'ordre $n+1$ en x_0 :

$$F(x) = F(x_0) + Q(x) + x^{n+1}\epsilon(x)$$

avec Q la primitive de P qui s'annule en x_0

Exemple $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

f admet un DL en $x_0 = 0$ à l'ordre 3 : $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\epsilon(x)$
Donc $F(x) = \ln(1+x)$ primitive de f sur $]-1; +\infty[$
F admet un DL en 0 à l'ordre 4 :

$$F(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + x^4\epsilon(x)$$

Exemple 2 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$DL_4(0) = f(x) = 1 - x^2 + x^4 + x^4\epsilon(x)$$

$F(x) = \arctan x$ primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ admet un $DL_5(0)$.

$$F(x) = 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} + x^5\epsilon(x)$$

6 Fractions rationnelles

$(\dfrac{P}{Q})$ avec P, Q des polynômes.

On décompose Q en produit de polynômes de degré 1 et de degré 2 SANS RACINE

$$Q(x) = A_1^{\alpha_1} \cdot A_2^{\alpha_2} ... A_n^{\alpha_n} \cdot B_1^{\beta_1} \cdot B_2^{\beta_2} ... B_n^{\beta_n}.$$

où $\begin{cases} A_i(x) = a_i + b_i \\ B_i(x) = c_j x^2 + d_j x + e_i \end{cases}$

Exemple $Q(x) = x^3 - 1$

$$Q(x) = (x-1)(x^2+x+1)$$

Rappel

$$\begin{aligned}x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+bx+c)\\ &= x^3 + bx^2 + cx - x^2 - bx - c\\ &= x^3 + (b-1)x^2 + (c-b)x - c\\ b = c &= 1\end{aligned}$$

$$Q(x) = A_1(x) \cdot B_1(x)$$

$$A_1(x) = x - 1 \text{ et } B_1(x) = x^2 + x + 1$$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) &+ \frac{C_{1,1}}{A_1(x)} + \frac{C_{1,2}}{A_1(x)^2} + ... + \frac{C_{1,\alpha_i}}{A_1(x)^{\alpha_i}}\\ &+ \frac{C_{2,1}}{A_2(x)} + \frac{C_{2,2}}{A_2(x)^2} + ... + \frac{C_{2,\alpha_i}}{A_2(x)^{\alpha_i}}\\ &+ \frac{d_{1,1}x + e_{1,1}}{B_1(x)} + \frac{d_{1,2}x + e_{1,2}}{B_1(x)^2} + ... + \frac{d_{1,\alpha_i}x + e_{1,\alpha_i}}{B_1(x)^{\alpha_i}}\\ &+ \frac{d_{2,1}x + e_{2,1}}{B_2(x)} + \frac{d_{2,2}x + e_{2,2}}{B_2(x)^2} + ... + \frac{d_{2,\alpha_i}x + e_{2,\alpha_i}}{B_2(x)^{\alpha_i}}\\ &+ ...\end{aligned}$$

où α_i est la puissance maximal qu'avait A_j dans la décomposition de $Q(x)$

Avec T(x) de même ordre que Q(x) si la différence entre P(x) et Q(x) est supérieur à 0 (sinon il n'existe pas).

Exemple $\dfrac{1}{(x+2)^3(x+7)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{(x+2)^2} + \dfrac{C}{(x+2)^3} + \dfrac{D}{x+7}$
avec $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

Retour sur l'exemple

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\\ &= T(x) + \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} \qquad \text{avec a, b, c des réels}\\ &= \frac{a(x^2+x+1) + (bx+c)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\end{aligned}$$

Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$ax^2 + ax + a + bx^2 - bx + cx - c = 1$$

$$(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c) = 1$$

$$a+b=0, a-b+c=0, a-c=0$$

$$\begin{cases} a = -b \\ 2a + c = 0 \\ a = 1 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1})$$

Une primitive de $\frac{1}{x-1}$ est $x \mapsto \ln(|x-1|)$ Que dire pour $\frac{x+2}{x^2+x+1}$?

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}}_{\text{Primitive de } \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{3}{x^2+x+1}}_{?}$$

Rappel La primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ est $\arctan(x)$.

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1} &= \frac{3}{2}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{\frac{3}{4}(\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2+1)} \\ &= 2\frac{1}{\underbrace{[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})]}_{X^2}+1}(*)\end{aligned}$$

$$X = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}) \rightsquigarrow 2\frac{1}{1+X^2}$$

Un primitive de (*) est : $2\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sqrt{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2$$

Exemple

$$F(x) = \frac{3x^3+6x^2}{x^2+2x-3} = \underbrace{T(x)}_{\text{de degre1}} + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$$

$$\begin{aligned}
x^2+2x-3 &= (x-1)(x+3) \\
3x^3+6x^2 &= T(x)(x^2+2x-3)+R(x) && R(x) \text{ est de degré plus petit que celui de } Q(x) \\
&= (3x+c)(x^2+2x-3)+R(x) \\
(3x+c)(x^2+2x-3) &= 3x^3+6x^2-9x+cx^2+2cx-3c \\
&= 3x^3+(6+c)x^2+(-9+2c)x-3c \\
&= 3x^3+6x^2+(-9x) && c=0 \text{ pour retrouver } P(x)
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } 3x^3+6x^2 = \underbrace{3x}_{T(x)}(x^2+2x-3) + \underbrace{9x}_{R(x)}$$

$$\begin{aligned}
F(x) = \frac{3x^3+6x^2}{x^2+2x-3} = \frac{3x(x^2+2x-3)+9x}{x^2+2x-3} &= 3x + \frac{9x}{x^2+2x-3} \\
&= 3x + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}
\end{aligned}$$

Exemple

$$\frac{x^4+1}{x(x^2-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{x+1} + \frac{e}{(x+1)^2}$$

$$x(x^2-1)^2 = x(x-1)^2(x+1)^2$$

7 Fractions rationnelles en cos et en sin

7.1 Polynômes

On cherche une primitive de $\cos^n x \cdot \sin^m x$.

— Supposons que n ou m soit impair, par exemple :

$$m = 2p+1$$

$$\begin{aligned}\cos^n x \cdot \sin^{2p+1} x &= \cos^n x \cdot (\sin^2 x)^p \cdot \sin x \\ &= \cos^n \cdot (1-\cos^2 x)^p \cdot \sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int f(x)dx = \int \cos^n x \cdot \sin^m x \cdot dx &= -\int \cos^n x(1-\cos^2 x)^p(-\sin x)dx \\ &= -\int X^n(1-X^2)^p dX \qquad \text{avec } X = \cos x\end{aligned}$$

Donc si F est une primitive de $t^n(1-t^2)^p$ alors $G(x) = -F\cos(x)$ est une primitive de f

— Supposons que m <u>et</u> n soient pairs On peut par exemple remplacer $\sin^m x = (\sin^2 x)^p = (1-\cos^2 x)^p$

Puis utiliser $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ à répétition.

Exemple

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin^2 x dx &= \int \cos^2 x(1-\cos^2 x)dx \\ &= \int \cos^2 x dx - \int \cos^4 x dx\end{aligned}$$

$$\cos^4(x) = (\cos^2 x)^2 = (\frac{1+\cos 2x}{2})^2$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\cos 2x}{2}dx &= \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{\cos 2x}{2}dx \\ &= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \frac{1}{4}(\int dx + 2\int \cos(2x)dx + \int \cos^2(2x)dx) \\ &= \frac{1}{4}(t + \sin(2t) + \int (\frac{1+\cos(4x)}{2})dx)\end{aligned}$$

$$\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2}$$

$$\begin{aligned}\int \cos^2(2x) &= \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{\cos(4x)}{2}dx \\ &= \frac{t}{2} + \frac{\sin(4x)}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'où } \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x dx &= \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{1}{4}(t + \sin(2t) + \frac{t}{2} + \frac{\sin(4t)}{8}) \\ &= \frac{7t}{8} + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{\sin(4t)}{32}\end{aligned}$$

7.2 Fractions rationnelles

$$\frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} = R(\cos x, \sin x)$$

Regles de Bioche : Si $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariant par :
- $x \mapsto -x$ poser $x = \arccos(t)$
- $x \mapsto \pi - x$ poser $x = \arcsin(t)$
- $x \mapsto \pi + x$ poser $x = \arctan(t)$

Exemple $\int \frac{1}{\sin x} dx$
$x \mapsto \sin x dx$
- $\sin(-x)d(-x) = (-\sin x)(-dx) = \sin x dx$ OK
- $\sin(\pi - x)d(\pi - x) = (\sin x)(-dx) = -\sin x dx$
- $\sin(\pi + x)d(\pi + x) = (-\sin x)(dx) = -\sin x dx$

Sinon, on peut poser $t = \tan(\frac{x}{2})$

En particulier,
- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

En effet,

$$\tan(\frac{x}{2}) = \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} = \frac{\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}$$

$$\text{et } \sin x = \sin(2 \cdot \frac{x}{2}) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

$$\text{d'ou } 2\tan(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{x}{2}) = \sin(x)$$

$$\tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-\cos^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} - 1$$

$$\text{Donc } \tan^2(\frac{x}{2}) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} \text{ soit } \cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$$

$$\text{Et on obtient } \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \sin x$$

Exercice Montrer $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx = -\frac{1}{4\sin^4 x} + \frac{1}{2\sin^2 x}$

VII

Equations différentielles

Etude d'équations dont la variable est une fonction permettant de décrire des fonctions.

Exemple $f(x) = e^x$ est la seul fonction C^1 telle que

$$\begin{cases} f' = f \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

Exemple Variation de population $y(t)$ en fonction du temps.

Modèle 1 $y' = ky, k \in \mathbb{R}$ Ce modele est trop simpliste.

Modèle 2 $y' = k(t)y$, k une fonction continue. La variation n'est pas nécessairement linéaire en la population.

Modèle 3 $y' = k(t)g(y)$ avec k, g des fonctions continues. $\boxed{\frac{dy}{dt} = k(t)g(y)}$ Pour g différent de 0,

$$\frac{dy}{g(y)} = k(t)dt$$

Par "primitivisation" :

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)dt$$

Exemple

$$g: \begin{array}{rl} y \mapsto & y^2 \\ \mathbb{R} \to & \mathbb{R}^+ \end{array}$$

$$k: \begin{array}{rl} t \mapsto & 6t \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}$$

$$(E) \quad y' = \quad 6ty^2$$

ou encore

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 6tdt$$

$$\text{Soit } -\frac{1}{y} = 3t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{On obtient} y(t) = \frac{1}{-3t^2 - c}$$

$$= \frac{1}{d - 3t^2}, \quad d \in \mathbb{R}$$

C'est à dire la fonction $y(t) = \dfrac{1}{d - 3t^2}$ avec $d \in \mathbb{R}$ sont des solutions de (E), sur I (à préciser)

2ème étape Utiliser les conditions initiales pour trouver d.

Conditions initiales : $y(0) = 2$ (on avait deux individus à l'instant $t = 0$)

En particulier, $y(0) = \dfrac{1}{d} = 2$

soit $d = \dfrac{1}{2}$

D'où $y(t) = \dfrac{2}{1 - 6t^2}$ est une solution de (E) qui vérifie $g(0) = 2$

Problème : quel est l'intervalle I ?

La fonction y est définie sur : $]-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{6}[\cup]-\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}[\cup]\frac{\sqrt{6}}{6}; +\infty[$

Ici, $y : t \mapsto \dfrac{2}{1 - 6t^2}$ est solution de (E) sur $]-\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}[$ et vérifie $y(0) = 2$

Remarque On cherchait une fonction dérivable (pour "y'" soit défini). Si on trouve y, en fait y est de classe C^1 (car $k(t)g(t)$ est continue)

1 Équations différentielles linéaires, d'ordre 1

$(E) : \overbrace{y'}^{\text{ordre 1}} = a(t) \underbrace{y}_{\text{"linéaire"}} + \underbrace{b(t)}_{\text{Non homogène}}$ avec $a, b : I \to \mathbb{R}$ avec I une intervalle ouvert et a, b des fonctions continue.

Résoudre (E) c'est trouver toutes les fonctions C^1 qui vérifient (E) pour tout $t \in I$. Ici (par (E)), ceci est faisable.

Résolution

1.1 Équation homogène associée (on oublie "$b(t)$")

$$(E_0) y' = a(t)y$$

Est une équations à variables séparables. Supposons que y ne s'annule pas.

On réécrit : $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int a(t)dt$

Soit $ln(|y|) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)ds + c$ pour $c \in \mathbb{R}; t_0 \in I$

Via l'exponentielle, on obtient :

$$|y(t)| = \exp(c + \int_{t_0}^{t} a(s)ds)$$

ou encore :

$$|y(t)| = d \cdot e^{A(t)} \qquad \text{avec primitive de a choisie}$$

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds \qquad\qquad d \in \mathbb{R}^{+*}$$

Remarque Si $y(t) = 0$, y solution de (E) alors $y'(t) = 0$

Remarque 2 Il y a trois cas mutuellement exclusif :

— $y(t) = 0$ pour tout $t \in I; y(t) = 0 \cdot e^{A(t)}$
— $y(t) > 0$ pour tout $t \in I; y(t) = d \cdot e^{A(t)}$ avec $d > 0$
— $y(t) < 0$ pour tout $t \in I; y(t) = d \cdot e^{A(t)}$ avec $d < 0$

$y(t)$ ne peux donc pas s'annuler sur I, car sinon il y(t) serait une constante pour tout $t \in I$.

Les solutions de (E_0) sont les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ définie par $y(t) = de^{A(t)}$ avec $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)ds$

Remarque y est bien C^1

1.2 Et le b ? : équations non homogène

Théorème Soit $a, b : I \to \mathbb{R}$ continue. Toutes les solutions de l'équation (E) sur I sont les fonctions C^1

$$y(t) = e^{A(t)}(C + \int_\alpha^t e^{-A(s)} b(s) ds)$$

$$\text{où} \begin{cases} C \in \mathbb{R} \\ \alpha \in I \\ A(t) \text{ primitive de } a(t) \end{cases}$$

Démonstration

- y est de classe C^1 sur I
- reste à voir si y satisfait (E) ?

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^{A(t)'}(C + \int_\alpha^t e^{-A(s)} b(s) ds) + e^{A(t)} e^{-A(t)} b(t) \\ &= a(t) e^{A(t)}(C + \int_\alpha^t e^{-A(s)} b(s) ds) + b(t) \\ &= a(t) y(t) + b(t) \end{aligned}$$

Reste à voir si toutes les solutions sont de la forme ci dessus.
On pose $z(t) = y(t)e^{-A(t)}$

$$\begin{aligned} z'(t) = (y \cdot e^{-A(t)})' &= y' e^{-A(t)} + y(-a(t)) e^{-A(t)} \\ &= a(t) y e^{-A(t)} + b(t) e^{-A(t)} - a(t) y e^{-A(t)} \\ &= b(t) e^{-A(t)} \end{aligned}$$

Donc $z = \displaystyle\int b(s) e^{-A(s)} ds$, c'est à dire il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$z(t) = \int_\alpha^t b(s) e^{-A(s)} ds + C$$

. D'où

$$\boxed{y(t) = z(t) e^{A(t)} = e^{A(t)}(C + \int_\alpha^t e^{-A(s)} b(s) ds)}$$

Théorème Soit $a, b : I \to \mathbb{R}$ continue avec I un intervalle ouvert
Il existe une unique solution de $y' = a(t)y + b(t)$ telle que pour t_0 et $y_0 \in \mathbb{R}, y(t_0) = y_0$

Démonstration C'est la solution avec C_0 qui vérifie :

$$y(t_0) = y_0$$

$$e^{A(t_0)}(C_0 + \int_\alpha^t e^{-A(s)} bsds) = y_0$$

$$\text{c'est à dire } C_0 = y_0 e^{-A(t_0)} - \int_\alpha^t e^{-A(s)} b(s)ds$$

Le tout étant des constantes, C_0 est une constante unique.

Remarque Si on avait choisie $\alpha = t_0$, alors $C_0 = y_0 e^{-A(t_0)}$ et la solution de (E) qui vérifie $y(t_0) = y_0$ est :

$$y(t) = e^{A(t)}(y_0 e^{-A(t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s)ds)$$

Remarque le système $\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ est nommé "Problème de Cauchy".

La théorème ci dessus est un cas particulière du théorème de Cauchy Lipschitz.

1.3 b' et le b ? Variation de la constante

Rappel Solution de $y' = a(t)y$ est $C \exp(A(t))$ avec $A = \int^t a(s)ds$ et $C \in \mathbb{R}$

On cherche une solution de $y' = a(t)y + b(t)$. On fait "varier" la constante. C'est à dire on considère $C(t)e^{A(t)} = y(t)$

Alors si y est bien solution de (E),

$$y' = a(t)y + b(t)$$

$$C'(t)e^{A(t)} + C(t)(a(t) \cdot e^{A(t)}) = a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t)$$

$$\text{On obtient } C'(t)e^{A(t)} = b(t)$$

$$\text{Soit } C'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

$$\text{Donc } C(t) = \int_\alpha^t b(s)e^{-A(s)}ds + D \; D \in \mathbb{R}$$

1.4 Équations non-résolues

$$u(t)y' = v(t)y + w(t) \; (F)$$

Avec $u, v, w : I \to \mathbb{R}$ continues, (I un intervalle ouvert).

On travaille sur les intervalles où u ne s'annule pas.

Sur $J \subset I$ J un intervalle ouvert où u ne s'annule pas, on réécrit (F) comme $y' = \underbrace{\frac{v(t)}{u(t)}}_{a(t)} y + \underbrace{\frac{w(t)}{u(t)}}_{b(t)}$

On regarde si on peut "raccorder" les solutions de manière C^1

Remarque On perd l'unicité des solutions (même en imposant des conditions initiales)

Exemple

$$(\sin t)y' - (\cos t)y = e^t \cdot \sin^2 t \ (E)$$

(E) n'est pas résolue !

On se restreint aux intervalles où $\sin t \neq 0$. Par exemple $\underbrace{]-\pi, 0[}_{J^-}$ et $\underbrace{]0, \pi[}_{J^+}$

Sur J^- ou J^+, (E) s'écrit

$$y' = \frac{\cos t}{\sin t} y + e^t \sin t (F)$$

Les solutions de l'équation différent homogène associée

$$y' = \frac{\cos t}{\sin t} y \ (E_0)$$

Les solutions sont

$$y(t) = C\exp(\int_\alpha^t \underbrace{\frac{\cos s}{\sin s}}_{\frac{\sin' t}{\sin t}} ds) \qquad \text{sur} J^+ (\alpha \in J^+)$$

$$y(t) = C\exp(\int_\alpha^t \frac{\sin' s}{\sin s} ds)$$

$$y(t) = C\exp([\ln(|\sin t|)]_\alpha^t)$$

$$y(t) = C\exp([\ln(|\sin t|)]_{\frac{\pi}{2}}^t) \text{ On choisi } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$y(t) = C\exp(\ln(|\sin t|))$$

Soit $\quad = C|\sin t| \qquad C \in \mathbb{R}$

$$= C \cdot \sin t \qquad \text{sur } J^+$$

Sur J^-, on choisit $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ et on obtient

$$y(t) = C \cdot |\sin t| \ , C \in \mathbb{R}$$

$$= D \cdot \sin t \quad , D \in \mathbb{R}$$

Résolution de l'équations non homogène.
Sur J^+
On cherche juste

$$\begin{aligned}
&\int e^{-A(s)}b(s)ds \\
&= \int \frac{1}{e^{ln(\sin s)}} \cdot e^s \sin s ds \\
&= \int \frac{1}{\sin s} \cdot e^s \cdot \frac{\sin^2 s}{\sin s} ds \\
&= \int e^s ds \\
&= e^t + C
\end{aligned}$$

D'où la solution particulière étant :

$$\begin{aligned}
y &= e^{A(t)} \int e^{-A(s)}b(s)ds \\
&= e^{A(t)} \cdot (e^t + C) \\
&= \sin t(e^t + C)
\end{aligned}$$

D'où la solution générale de (F) sur J^+ est :

$$\boxed{y(t) = \sin t(C + e^t), C \in \mathbb{R}}$$

De même, sur J^- la solution générale de (F) est : $y(t) = \sin t(D + e^t), D \in \mathbb{R}$
Existe-t-il des fonctions continues vérifiant (F) sur $I =]-\pi, \pi[$
si une telle fonction f existe alors f et en particulier solution sur J^- et J^+ donc

$$\begin{cases} \sin t(C + e^t) \text{ si } t \in J^- \\ \sin t(D + e^t) \text{ si } t \in J^+ \end{cases}$$

On veut prolonger en 0 :

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} f(t) = 0 = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} f(t)$$

De plus

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \sin t(C + e^t) + \sin t(e^t) \text{ Sur } J^- \\
&= \cos t(C + e^t) + \sin t \cdot e^t
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} f'(t) = C + 1 = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} f'(t)$$

Par le théorème de prolongement C^1, f est C^1 si et seulement si $C = D$

Donc les solutions de (E) sur $I =]-\pi, \pi[$ sont les fonctions

$$f(t) = \sin t(C + e^t), C \in \mathbb{R}$$

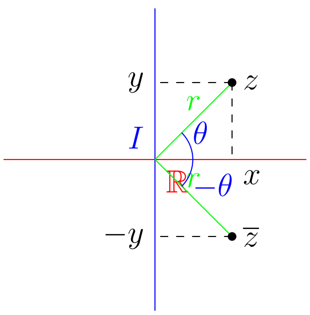
Remarque Il y a une infinité de solutions de (E) sur $]-\pi, \pi[$ tel que $y(0) = 0$. Cependant, aucune ne satisfait $y(0) = 3$

Finalement, si $t_0 \in J^-$ ou J^+ et si $y_0 \in \mathbb{R}$. Il y a une unique solution qui satisfait $y(t_0) = y_0$

VIII

Les nombres complexes

1 Définitions, représentations



On note i un nombre tel que $i^2 = -1$

	Euclidien	Polaire
$z \in \mathbb{C}$	$x + y, x, y \in \mathbb{R}$	$re^{i\theta}$
$Re(z)$	x	$r \cos \theta : r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$
$Im(z)$	y	$r \sin \theta$
$\lvert z \rvert$	$\sqrt{x^2 + y^2}$	r
$arg(z)$	$\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}) = \arcsin(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$	θ
$\bar{}(z)$: conjugué	$x - iy$	$r \cdot e^{-i\theta}$
nombre réels	$x \in \mathbb{R}$	r
imaginaire purs	$iy, y \in \mathbb{R}$	$re^{i(\frac{\pi}{2}+k\pi)}, k \in \mathbb{Z}$

Propriétés

$$z = x + iy = re^{i\theta}, z' = x' + iy' = r'e^{i\theta'}$$

- $z = z'$
  - $x = x'$ et $y = y'$
  - $r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

  Donc $z = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ et } y = 0 \\ \\ r = 0 \end{cases}$

addition

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

multiplication

$$z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

$$= rr'e^{i\theta \cdot \theta'}$$

multiplication par $a \in \mathbb{R}$

$$az = (ax) + i(ay)$$

$$= (|a|r)e^{i\theta} \qquad \text{si } a > 0$$

$$= (|a|r)e^{i(\theta+\pi)} \text{ si } a < 0$$

conjugués et opération

$$\bar{(}z + z') = \bar{(}z) + \bar{(}z'), \bar{(} - z) = -\bar{(}z)$$

$$\bar{(}z \cdot z') = \bar{(}z) \cdot \bar{(}z')$$

$$z + \bar{(}z) = 2Re(z)$$

$$z - \bar{(}z) = 2Im(z)$$

$$z\bar{(}z) = Re(z)^2 + Im(z)^2 = |z|^2$$

Proposition z est réel si et seulement si $s = \bar{(}z)$ z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{(}z)$

Remarque

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - iy) = \frac{1}{|z|^2}\bar{(}z)$$

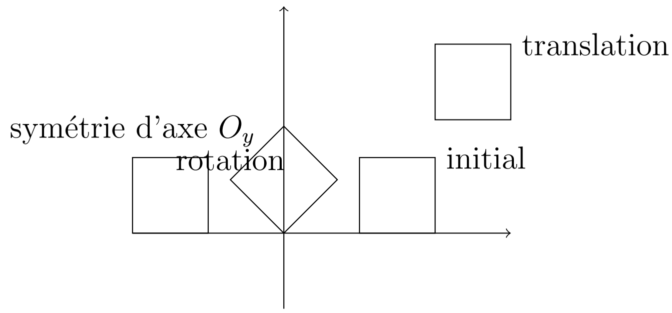
2 Similitudes du plan

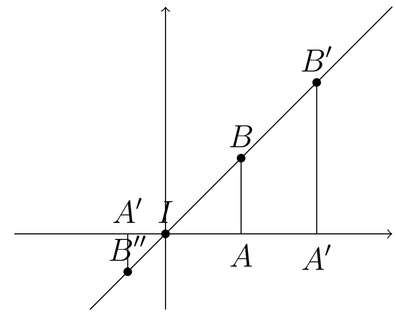
Transformation du plan qui multiplie toutes les longueurs par une même constante.

Prenons $cste = 1$: La translations, la rotation et la symétries conviennent (ainsi que leurs composées).

Pour $cste \neq 1$: l'homothétie de centre I et de rapport λ

centre $(0,0) = I$, $\lambda = 2$





$$A' = \text{ image de } A$$

$$B' = \text{ image de } B$$

$$I\vec{A}' = 2I\vec{A}$$

$$I\vec{B}' = 2I\vec{B}$$

centre $(0,0) = I, \lambda = -\dfrac{1}{2}$

$$I\vec{A}'' = -\frac{1}{2}I\vec{A}$$

$$I\vec{B}'' = -\frac{1}{2}I\vec{B}$$

Les distances sont multipliées par $|\lambda|$

Définition On appelle similitude directe une similitude qui préserve l'orientation. (c'est à dire on peut passer d'une triangle à son image en gardant le triangle dans le plan).

Theoreme Une transformation T du plan est une similitude directe si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{C}, a \neq 0$ tels que

$T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \mapsto az + b$

C'est à dire $\forall z \in \mathbb{C}, T(z) = az + b$

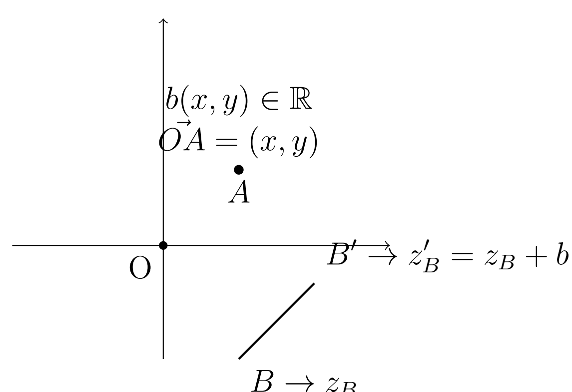
Remarque Similitude directe

$$T(z) = az + b, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$$

si $a = 1$, $T(z) = z + b$. On a donc une translation de "vecteur" b

$b = (x + iy)$, translation de vecteur (x, y).

Si $b = 0$, $T(z) = az, a \in \mathbb{C}^*$



C'est la composée d'une rotation d'angle arg(a) et d'une homothétie de rapport $|a|$ (et les deux de centre O)

cas général : $T(z) = az + b$

$z \to [translation]z + b \to [h+z]a(z+b) = az + ab$ Faux.

$z \to [h+z]az \to [translation]az + b = az + b$ Correct.

C'est faire l'homothétie et la rotation (dues à a) puis la translation (due à b)

Donc $T(z) = az + b$ est une similitude direct de :

— de rapport $|a|$
— d'angle $arg(a)$
— de centre (si $a \neq 1$) $\dfrac{b}{1-a} \in \mathbb{C}$. Si $a = 1$, il n'y a qu'une translation et une translation n'a aucun point fixe (et donc aucune rotation).

Remarque Le centre est le seul point fixe de la transformation.

$$Tz_0 = z_0$$

$$az + b = z_0$$

$$b = z_0 - az_0 = z_0(1-a)$$

$$z_0 = \frac{b}{1-a}$$

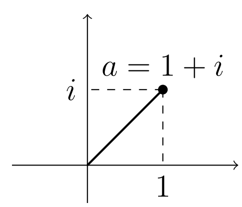
Exemple $a = 1, b = \dfrac{1}{2} + 3i$

Ceci est une translation de vecteur $(\dfrac{1}{2}, 3)$

$a = 1 + i, b = 0$

$|a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, arg(a) = \dfrac{\pi}{4}$

$T(z) = (1+i)z + (\dfrac{1}{2} + 3i)$ est



La composée de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre 0 et rapport $\sqrt{2}$. Puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{\dfrac{1}{2}, 3}$

La similitude directe :

— d'angle $\dfrac{\pi}{4}$
— de rapport $\sqrt{2}$
— de centre $\dfrac{\frac{1}{2} + 3i}{1 - (1+i)} = \dfrac{\frac{1}{2} + 3i}{-i} = -3 - \dfrac{1}{2i} = -3 + \dfrac{i}{2}$

Remarque IL suffit de connaître l'image de 2 points (distincts) pour déterminer la similitude.
Soit $s_1 \neq z_2$ dont connaît les images respectives $z_1' \neq z_2'$

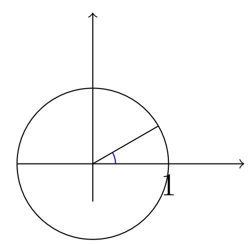
$$\text{On a alors} \begin{cases} z_1' = az_1 + b \\ \\ z_2' = az_2 + b \end{cases}$$

Donc $a = \dfrac{z_1' - z_2'}{z_1 - z_2}$ et donc $b = z_1' - \dfrac{z_1' - z_2'}{z_1 - z_2} z_1$

3 Formules trigonométriques

Notation : $e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$

Remarque



$$\cos\theta = Re(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = Im(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} 2 e^{-i\theta}}{2}$$

$$z + \overline{(}z) = 2Re(z)$$

Propriété On a $e^{i\theta_i} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 \cdot \theta_2)}$ pour tout $\theta_1, \theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \cos(\theta_1 + \theta_2) &= Re(e^{i(\theta_1 + \theta_2)}) \\ &= Re(e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}) \\ &= (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \cdot (\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \\ &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1)) \end{aligned}$$

D'où $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$
De même, $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)\sin(\theta_1)$

Exercice $\cos(\theta_1 - \theta_2); \sin(\theta_1 - \theta_2)$

Proposition (formule de Moivre) $\forall\theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : e^{(i\theta)^n} = e^{in\theta}$
C'est à dire $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Exercice

$$\cos(3\theta) = Re(e^{i3\theta}) = Re((e^{i\theta})^3)$$
$$= Re((\cos\theta + i\sin\theta)^3)$$
$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

Exercice À partir de $\cos(\theta_1 \pm \theta_2)$ retrouver

$$\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 = \frac{\cos(\theta_1+\theta_2)+\cos(\theta_1-\theta_2)}{2}$$

De même, retrouver, a partir de $\sin(\theta_1 \pm \theta_2)$ retrouver

$$\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 = \frac{\cos(\theta_1-\theta_2)-\cos(\theta_1-\theta_2)}{2}$$

4 POlynôme de degré 2 à coefficient réels

$P(x) = ax^2 + bx + c, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$
Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ il y a 2 racines réels : $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0$ il existe une racine double : $\dfrac{-b}{2a}$

$\Delta < 0$ il n'y a pas de racines réels, mais il existe 2 racines réels conjugués $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Remarque , il existe une seul formule : $\sqrt{-b \pm \delta 2a}$ avec δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Exemple

$$x^2 + 1 = 0$$
$$\Delta = 0 - 4 = -4 < 0$$
$$\text{Les racines sont : } \frac{-0 \pm i\sqrt{4}}{2} = \pm i$$

Exemple $x^2 - 2x + 2$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$$
$$\text{2 racines complexe : } \frac{\sqrt{2 \pm i\sqrt{4}}}{2} = 1 \pm i$$

5 Fonctions complexes

$$f : A \to \mathbb{C} \text{ avec } A \cup \mathbb{C}$$

$Re, Im, |z|\mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \\ z \to \overline{z}\end{array}\right) \text{Symétrie d'axe } O_x$$

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$\theta \to e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

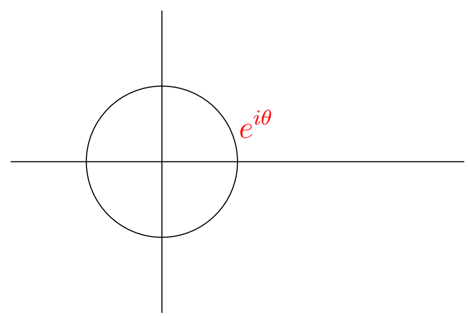
$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to e^x$$

On cherche à définir une fonction exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tel que

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$



En particulier, on a pour $z = x + iy$

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}$$

$$= re^{i\theta}$$

$$e^z = e^{Re(z)}(\cos(Im(2)) + i\sin(Im(2))) \text{ Definition de l'exponentielle complexe}$$

$$|e^z| = e^{Re(z)}$$

Remarque comme pour les fonctions réelles, $f : A \to \mathbb{C}$

— f est injective si pour tous $z_1 \in A, z_2 \in A, z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

— f est surjective si $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists z' \in A,$ tq $f(z') = z$

— f est bijective si elle est injective et surjective.

Exemple exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n'est pas surjective : $|e^z| = e^{Re(z)} > 0$. 0 n'a donc pas d'antécédent par exp

n'est pas injective.

$$z_1 = x + iy \neq z_2 = x + i(y + 2\pi)$$

$$e^{z_2} = e^x \cdot e^{i(y+2\pi)} = e^x \cdot e^{iy}$$

$$= e^{z_2}$$

Remarque On a bien :

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$$

$$z = x + iz$$

$$\overline{e^z} = \overline{e^x \cdot e^{iy}} = \overline{e^x} \cdot \overline{e^{iy}}$$

$$= e^x \cdot e^{iy}$$

$$= e^{x-iy} = e^{\overline{z}}$$

6 Equation différentielles, linéaires d'ordre 1. homogènes et complexes

6.1 Cas particulier des fonctions à valeur complexes

$f : I \to \mathbb{C}, I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
On peut écrire pour tout $t \in I$

$$f(t) = \underbrace{Re(f(t))}_{f_1} + i \underbrace{Im(f(t))}_{f_2}$$

avec $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$

Remarque

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) = Reof$$

$$f_2 = \frac{1}{2}(f - \overline{f}) = Imof$$

Proposition $f : I \to \mathbb{C}, t_0 \in I$

f est continue en t_0 si et seulement si $Re(f), Im(f) I \to \mathbb{R}$ sont continues en t_0

Proposition $f : I \to \mathbb{C}, t_0 \in I$

f est dérivable en t_0 si et seulement si $Re(f), Im(f) I \to \mathbb{R}$ sont dérivable en t_0 ET $f'(t_0) = (Re(f))'(t_0) + i(Im(f))'(t_0)$

Proposition $f : I \to \mathbb{C}, t_0 \in I$

f est intégrable en I si et seulement si $Re(f), Im(f) I \to \mathbb{R}$ sont intégrables sur I ET $\displaystyle\int f(t)dt = (\int Re(f(t))dt) + i(\int Im(f(t))dt)$

Remarque $z_n \to l$ avec $z_n \in \mathbb{C}, l \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Re(z_n) \to Re(l) \\ Im(z_n) \to Im(l) \end{cases}$$

Exemple

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$t \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞

$$f(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= (\cos' t) + i(\sin' t) \\ &= -\sin t + i \cos t \\ &= i(\cos t + i \sin t) \\ &= i \cdot (e^{it}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \int f(t)dt &= (\int \cos t dt) + i(\int \sin t dt) \\ &= \sin t - i \cos t \\ &= \frac{1}{i}(i \sin t + \cos t) \\ &= \frac{1}{i} e^{it} + (c_1 + ic_2) \end{aligned}$$

6.2 Equation différentielle d'ordre 1 homogène

Théorème Soit $a : I \to \mathbb{C}$

(I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) continue. Les solutions de l'équation différentielle

$$(E) z' = az$$

Sont

$$\begin{cases} z : I \to \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto De^{A(t)} \; D \in \mathbb{C} \end{cases}$$

et $A(t) = \int a(s)ds$ (une primitive de a).

Exemple $E : z' = (2 + 8it)$

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$t \mapsto 2 + 8it$$

Toutes les solutions de (E) sont les fonctions du type

$$\begin{aligned}
z &: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\
z(t) &= De^{A(t)} & D \in \mathbb{C} \\
A(t) &= \int a(s)ds = \int (2+8is)ds \\
&= (\int 2ds) + i(\int 8sds) \\
&= 2t + i(4t^2) \\
z(t) &= De^{(2t+4it^2)}
\end{aligned}$$

avec $D \in \mathbb{C}$

IX

Géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

1 Géométrie dans $\mathbb{R}^2$

Équation de droite :

$$x = constante \qquad \text{(droite vertical)}$$

$$y = constante \qquad \text{(droite horizontal)}$$

$$y = ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ (toutes les droites non verticales)}$$

En général, l'équation $ax + by + c = 0 (E)$ est l'équation d'une droite D. Avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by + c = 0\}$$

1.1 Pente et vecteur directeur

D d'équation $y = ax + b$ a pour pente a

D d'équation $ax + by + c = 0$

— $b \neq 0, (E) \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. La pente est $-\frac{a}{b}$

— $b = 0$ a pour pente infini.

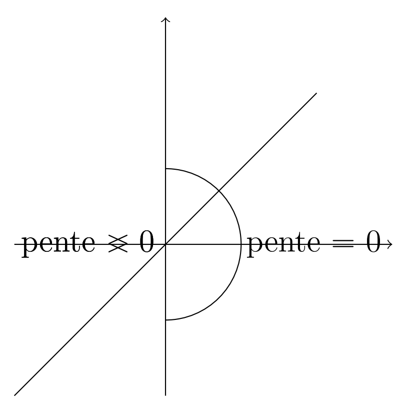
Une droite D et ses paralléles correspondent à une pente

— correspondent à une pente

— correspondent un vecteur directeur (et ses multiples)

Un vecteur directeur est un vecteur qui "porte" la droite D

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OU} \text{ où } U = (u_1, u_2)$$



pente infinie

D d'équation $ax + by + c = 0$. Un vecteur directeur est donné :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ p \end{pmatrix} \text{ avec la pente si } p \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \text{ si } p \text{ est infinie}$$

Remarque On se donne 2 points sur D, $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$

$$\vec{v} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ est vecteur directeur}$$

$$\text{ou } x_B - x_A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \end{pmatrix} = \frac{1}{x_B - x_A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \\ p \end{pmatrix}$$

si $x_B \neq x_A$, c'est à dire D non verticale.

Remarque $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \\ u_2 \end{pmatrix}$ porte la droite.

D est d'équation $ax + by + c = 0$ si
— $\frac{u_2}{u_1} = -\frac{a}{b}(b \neq 0)$
— $u_1 = 0(b = 0)$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ p \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de D

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{-b} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ \\ a \end{pmatrix}$

$\vec{v'} = \begin{pmatrix} -b \\ \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D

1.2 Caractérisation des droites

On caractérise une droite par :
- Par 2 points distinct
- Il existe une unique droite passant par un point donné, et paralèle à une autre droite donné.
- Il existe une unique droite passant par un point donné, et orthogonal à une autre droite donné.

Exemple $A = (0, 1), B = (3, 2)$

Les coordonnées de A et B satisfaient l'équation de $(AB) = D$, donc

$$\begin{cases} ax_A + by_A + c = 0 \\ ax_B + by_B + c = 0 \end{cases}$$

d'inconnu a, b et c

Ici,

$$\begin{cases} 0 + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ b = -3a \end{cases}$$

D d'équation $ax - 3ay + 3a = 0$ ou $\boxed{x - 3y + 3 = 0}$

Alternative Le vecteur $\vec{AB}$ est directeur

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \frac{1}{3} = pp = -\frac{a}{b} \text{ pente de } D$$

Ici, on a donc $b = -3a$

Pour trouver c, on utilise les coordonnées d'un des points (comme précédemment)

Par la méthode alternative. Pb : déterminer l'équation de D, droite qui passe par $P = (5, 3)$ est parallèle à la droite Δ d'équation

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$$

Comme D et Δ sont parallèles, elles ont le même vecteur directeur.

Le rapport $-\dfrac{a}{b}$ est le même pour les deux droites.

Donc l'équation de D est du type

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y + c = 0$$

De plus, $P \in D$, ses coordonnées vérifient

$$\frac{3}{4}5 + \frac{1}{2}3 + c = 0$$
$$c = -\frac{21}{4}$$

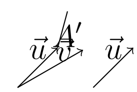
D est d'équation

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{21}{4} = 0$$

2 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$

2.1 Définition géométrique

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le produit de la longueur $\vec{v}$ et de la longueur algébrique du projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$



A', projeté orthogonal de A sur la droite portée de $\vec{v}$, passant pr 0. $\vec{OA'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OB.\overline{OA'}$$
$$= OB \cdot OA \cos(\vec{OB}, \vec{OA})$$

Remarque Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou les les droites portées par $\vec{u} et \vec{v}$ orthogonales, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2.2 Définition analytique

On se donne un repère orthonormé. Dans ce repère, on se donne 2 vecteurs : $\vec{u} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Démonstration On fixe A et B tels que $\vec{OA} = \vec{u}$ et $\vec{OB} = \vec{v}$
$A = (u_1, u_2)$ et $B = (v_1, v_2)$ (coordonnées cartésiennes)
A et B sont d'affixe respective

$$A = u_1 + iu_2 \; et \; B = v_1 + iv_2$$

$$A = \; r_A e^{i\theta_A} \qquad B = r_B e^{i\theta_B}$$

Maintenant :

$$\begin{aligned}
\vec{OA} \cdot \vec{OB} &= OA \cdot OB \cos(\theta) \\
&= r_A r_B \cos(\theta_B - \theta_A) \\
&= r_A r_B (\cos(\theta_B)\cos(\theta_A) + \sin(\theta_B)\sin(\theta_A)) \\
&= (r_A \cos(\theta_B))(r_B \cos(\theta_B)) + (r_A \cos(\theta_A))(r_B \cos(\theta_A)) \\
&= u_1 v_1 + u_2 v_2
\end{aligned}$$

Remarque Le produit scalaire est symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Exemple D d'équation $ax + by + c = 0$ passant par $P = (1, 4)$ et perpendiculaire à Δ d'équation $-x + 2y + 1 = 0$

Δ a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $D\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$
On cherche $\vec{v}$ vecteur directeur de D tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$-2v_1 - v_2 = 0$$

, par exemple, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ convient.
$u_1 = -v_2$ et $u_2 = v_1$
L'équation de D est du type

$$-2x - y + c = 0$$

en utilisant P, on trouve $c = +$

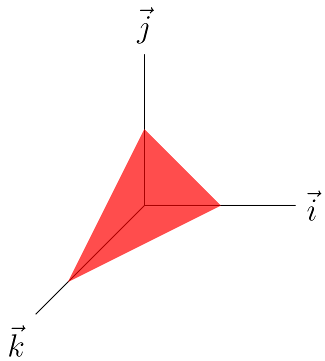
Remarque $D \perp \{(x, y) | ax + by + c = 0\}$
$D = \{(x, y) | bx - ay + c' = 0\}$

3 Géométrie dans $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormee

$M = (x, y, z)$
Si on fixe une direction, on obtient l'équation d'un plan : $ax + by + cz + d = 0$

Exemple (P) contient :

$$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \text{ avec } (a,b,c) \neq (0,0,0)$$



Cela revient à résoudre :

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ b + d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}$$

c'est à dire $a = b = c = -d \Rightarrow x + y + z - 1 = 0$

3.1 Intersection de 2 plans

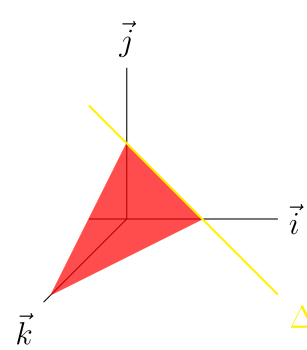
— Vide si les 2 plans sont parallèles et distincs
— un plan si les 2 plans coincident
— une droite dans tout les autres cas

<u>typiquements</u> :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax + by + cz + d' = 0 \text{ avec } d \neq d' \end{cases}$$

Exemple (suite) $M \in (P) \cup (xOz) = D$

M satisfait $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y = 0 \text{ avec } d \neq d' \end{cases}$



4 Produit dans $\mathbb{R}^3$

4.1 Produit scalaire

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 \cdot \mathbb{R}^3 \quad \to \quad \mathbb{R} \\ \\ (\vec{u}, \vec{v}) \to \vec{u} \cdot \vec{v} \end{cases}$$

défini dans une Base Orthornormée par :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \\ u_2 \\ \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \\ \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} = \vec{OU} \text{ avec } U(u_1, u_2, u_3)$$

Propriete algébriques

— symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ pour tout vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$
— linéarité : $\vec{u} \cdot (\vec{v_1} + \lambda \vec{v_2}) = \vec{u}\vec{v_1} + \vec{u}\lambda\vec{v_2}$ pour tout $\vec{u}, \vec{v_1}, \vec{v_2}$ de $\mathbb{R}^{\nvDash}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
— positivité : pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$-$\{0\}$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u} &= ||\vec{u}||^2 > 0 \\ &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}^2 \end{aligned}$$

4.2 produit vectoriel

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 \cdot \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \\ (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \\ u_2 \\ \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \\ \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ \\ -u_1 v_3 + u_3 v_1 \\ \\ v_1 v_2 + u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Propriétés algébriques

— anti-symétrique : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ pour tout vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$
— distributif : $\vec{u} \wedge (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \vec{u} \wedge \vec{v_1} + \vec{u} \wedge \vec{v_2}$ pour tout $\vec{u}, \vec{v_1}, \vec{v_2}$ de $\mathbb{R}^{\nvDash}$
— compatibilité avec le produit externe :

$$\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \wedge (\vec{v}$$

— n'est pas associatif :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge (\vec{w}) \neq (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$$

$\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$ n'a aucun sens. En réalité,

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

Propriété géométrique

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires
$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} \vec{w} \text{ est orthogonal a } \vec{v} \text{ et a } \vec{u} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est une base direct} \\ ||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v}) \end{cases}$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{w} = \vec{0}$

Remarque Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe, alors $(-\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(-\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ sont indirectes

Remarque $||\vec{w}|| = ||\vec{u}||$ (norme du projeté de $\vec{v}$ sur l'orthogonal de $\vec{u}$).

5 Déterminer les droites et plans dans $\mathbb{R}^3$

Un plan donné par 1 point et 2 vecteurs non colinéaires. On cherche le plan (P) à partir du point A et de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$

On choisit B et C tel que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$

Les points de (P) vérifient :

$$\vec{AM} = \lambda \vec{AB} + \nu \vec{AC} \text{ avec } (\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^2$$

On en déduit $M = (x, y, z) \in P$

$$x - x_A = \lambda(x_B - x_A) + \nu(x_C - x_A)$$

(P) a pour équation $w_1x + w_2y + w_3z + d = 0$ avec $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \\ w_2 \\ \\ w_3 \end{pmatrix} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

et on utilise les coordonnées du point A pour obtenir d.
En effet, si $M = (x, y, z) \in P$, alors

$$w_1x + w_2y + w_3z = \vec{w} \cdot O\vec{M}$$

et donc $w_1x + w_2y + w_3z = 0$ indique juste que $\vec{w}$ et $O\vec{M}$ sont orthogonaux.
Si on veut exprimer $A\vec{M}$ et $\vec{w}$ comme étant othogonaux, on a :

$$w_1(x - x_A) + w_2(y - y_A) + w_3(z - z_A) = 0$$

$$w_1x + w_2y + w_3z - \underbrace{(w_1x_A + w_2y_A + w_3z_A)}_{=d} = 0$$

Remarque

$$A\vec{M} \cdot \vec{w} = 0$$

$$(A\vec{O} + O\vec{M}) \cdot \vec{w} = 0$$

$$A\vec{O} \cdot \vec{w} + O\vec{M}\vec{w} = 0$$

$$-(w_1x_A + w_2y_A + w_3z_A) + w_1x + w_2y + w_3z = 0$$

Plan de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonal à une droite donnée et passant par A.

Δ une droite dont $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ \\ n_2 \\ \\ n_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

Si $B \in \Delta$, les points de Δ sont déterminés par le fait : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B\vec{M} = \lambda\vec{n}$
En particulier (P) est orthogonal à $\vec{n}$ ($\vec{n}$ est normal au plan (P))
$M = (x, y, z)$ est un point de (P) si et seulement si $A\vec{M} \cdot \vec{n} = 0$. C'est à dire

$$(x - x_A)n_1 + (y - y_A)n_2 + (z - z_A)n_3 = 0$$

$$n_1x + n_2y + n_3y - (n_1x_A + n_2y_A + n_3z_A) = 0$$

X

Courbes paramétrique en coordonnées cartésiennes

Définition
$$\begin{aligned}\gamma : I &\to \mathbb{R}^2\\ t &\to (x(t), y(t))\end{aligned}$$

(I intervalle de $\mathbb{R}$) est une courbe paramétré, avec $x, y : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1 sur I.

Remarque Ceci est un "graph généralisé".

Exemple :
$$\begin{aligned}&x(t) = t\\ &\gamma : t \mapsto (t, e^t)\end{aligned}$$

$$\{(t, e^t), (t \in \mathbb{R})\} : \text{ graph de exp } \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Plus générallement,

$$\{(x(t), yt()), (t \in I)\} : \text{ s'appelle le support de } \gamma$$

Les courbes paramétrés sont principallement utilisé pour modéliser la trajectoire d'un mobile, d'une particule, etc.

Exemple

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

Est le support de γ : le cercle de centre 0 et de rayon 1.

$$\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t)$$

possède le même support.

Définition

Vecteur de vitesse moyenne entre t_0 et t_1 :

$$\overrightarrow{v_m}(t_0,t_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0} \\ \dfrac{y(t_1)-y(t_0)}{t_1-t_0} \end{pmatrix}$$

Vecteur de vitesse instantanée entre t_0 :

$$\overrightarrow{v_i}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$$

C'est à dire $\lim\limits_{t_1 \to t_0} \vec{v_m}(t_0,t_1)$

On la note souvent $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$

La vitesse instantannée est : $v(t) = ||\gamma'(t)|| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

La distance parcourue entre t_0 et t_1

$$d(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

Remarque Le signe de $d(t_0,t_1)$ nous donne l'ordre entre t_0 et t_1 ($d(t_0,t_1) \geq 0$ si et seulement si $t_1 \geq t_0$)
La fonction $t \mapsto d(t_0,t)$ est aussi appelé abscisse curviligne d'origine t_0, c'est à dire la primitive de v qui s'annule en t_0

La tangente à la courbe γ, au point $\gamma(t_0)$ est porté par $\gamma'(t_0)$

Exemple $\gamma(t,e^t)$, on a pour tout t : $\gamma'(t) = (1,e^t)$.
On retrouve bien que la pente du graph de f en t_0 est $f'(t_0)$ (graph en "t_0", c'est à dire le point (t_0,e^{t_0}) sa tangeante est portée par $(1,e^{t_0})$ et donc la pente de la tangeante est donc bien e^{t_0})
Si $\gamma'(t_0) = \vec{0}$, la tangente de $\gamma(t_0)$ es porté par $\gamma^{(P)}(t_0) = (x^{(P)}(t_0), y^{(P)}(t_0))$ où p est le plus petit entre supérieur ou égale à 1 par lequel $\gamma^{(P)}(t_0) \neq 0$ (ici, x et y (au moins) sont de classe C^P)

Définition Si $\gamma'(t_0) = 0$, le point $\gamma(t_0)$ est dit point singulier

Plan d'étude : Pour étudier on courbe paramétré on fait :

1. Trouver le domaine de définition
2. Réduire l'intervalle d'étude en considérant : la périodicité, la parité et les trucs ad hoc de la courbe paramétré (On cherche des symétries du support)
3. Faire le tableau de variations (avec les points singuliers, tangentes horizontale et verticale).
4. Tracer la courbe

Exemple

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

Le domaine de définition ici est $\mathbb{R}$

Comme cosinus et sinus sont périodique (de période 2π), on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[-\pi, +\pi]$

Effectivement, $\gamma(t + 2\pi) = (\cos(t + 2\pi), \sin(t + 2\pi)) = (\cos t, \sin t) = \gamma(t)$

Sur $[-\pi, \pi]$, $\gamma(-t) = (\cos(-t), \sin(-t)) = (\cos t, -\sin t)$

Donc $\gamma(-t)$ est le symétrie de $\gamma(t)$ par la symétrie d'axe (Ox).

On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$ puis complété par symétrie.

(Finallement, $\gamma(t + \frac{\pi}{2}) = (\cos(t + \frac{\pi}{2}), \sin(t + \frac{\pi}{2})) = (-\sin t, \cos t) = (-y(t), x(t))$

$\gamma(t + \frac{\pi}{2})$ est l'image de $\gamma(t)$ par la rotation d'anglais 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ Pas si utile en général)

Exemple 2

$$\gamma(t) = (t^2, t^3 - 3t), t \in \mathbb{R}$$

On remarque que

$$\gamma(-t) = (t^2, -(t^3 - 3t)) = (x(t), -y(t))$$

Donc le support de γ est symétrique par rapport à (Ox).

On peut donc restreindre l'étude à $\mathbb{R}^+$

Points singuliers ? Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

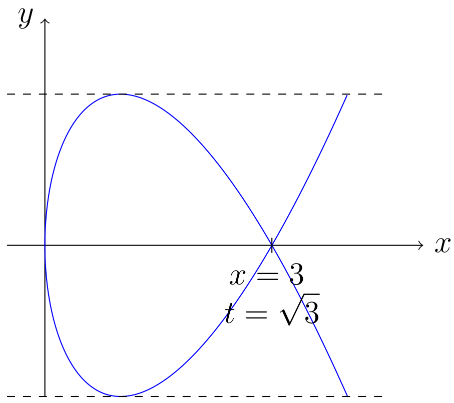
$\gamma'(t) = (2t, 3t^2 - 3) = (x'(t), y'(t))$

$$\begin{cases} x'(t) = 0 & \text{si et seulement si } t = 0 \\ y'(t) = 0 & \text{si et seulement si } t = -1 \end{cases}$$

Il n'y a donc pas de point singulier ($\gamma'(t) \neq (0, 0)$ pour tout t)

Il y a une tangeante horizontale en $t = 1$ (au point $\gamma(t) = (1, -2)$) Il y a une tangente verticale en t=0 ($\gamma(0) = (0, 0)$)

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x'	0	$+$			$+$		
x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
y'	-3	$-$	0		$+$		
y	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$



Exemple

$$\gamma(t) = (e^t, 3e^{t+\ln(2)} - 1)$$

$$= (x(t), y(t))$$

$$y(t) = 3e^{t+\ln(2)} - 1$$

$$= 3e^t \cdot e^{\ln(2)} - 1$$

$$= 6e^t - 1 = 66x(t) - 1$$

Exemple

$$\gamma(t) = (3t - 6t^2 + 4t^3, 3t(1-t)), t \in \mathbb{R}$$

Point singuliers ?

$$\gamma'(t_0) = 0$$

$$= (3 - 12t + 12t^2, 3 - 6t)$$

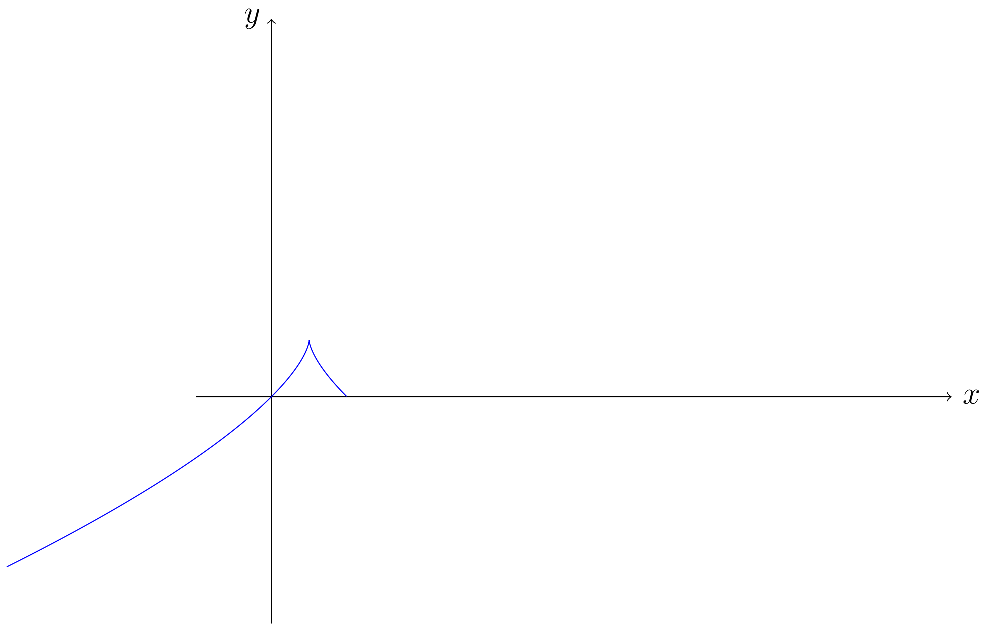
$$= 3((1-2t)^2, 1-2t)$$

pour $t = \frac{1}{2}$, $\gamma'(\frac{1}{2}) = 0, \gamma(\frac{1}{2})$ est un point singulier.

Pour obtenir la pente de la tangente en $\gamma(\frac{1}{2})$, on doit dérivé de nouveau :

$$y''(t) = 3(-4(1-2t), -2) \neq (0,0)$$

En $\frac{1}{2}, y''(\frac{1}{2}) = (0, -6)$: Une tangente vertical.


y
x

XI

Fonctions de 2 (et 3) variables

Une fonction de 2 variables réelles est une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ où A est un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. Son graphes : $\Gamma_f = \{((x,y), f(x,y)) | (x,y) \in A\} \subset \mathbb{R}^3$

Exemple 1

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

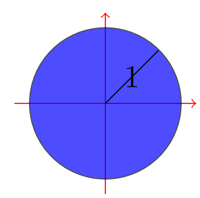
$$(x,y) \mapsto 2x - y$$

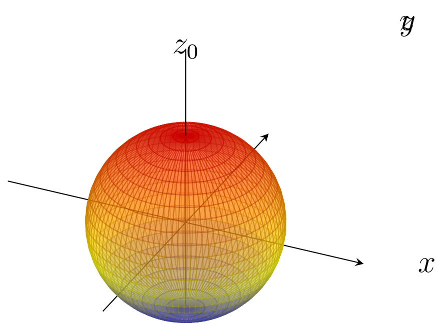
graphe : $\{(x,y,z) | (x,y) \in \mathbb{R}^2, z = 2x - y\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y - z = 0\}$

Exemple 2

$$f : A \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto x^2 + y^2$$





graphe de f

Notation $r > 0, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$D \subset \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$$

Avec D le disque centré en (x_0, y_0) de rayon r, sans son bord.

Définition On dit que (x_0, y_0) est adherent à $A \subset \mathbb{R}^2$ si :

$$\forall \delta > 0, D((x_0, y_0), \delta) \cap A \neq 0$$

Exemple (cf A de l'exemple 2)
L'ensemble des points adhérents à A est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$
("$A\cup$ est son bord")

Définition On dit que f tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand (x, y) tend vers (x_0, y_0) si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in D((x_0, y_0), \delta), |f(x, y) - l| < \epsilon$$

Et on note alors $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$

Définition $f : A \to \mathbb{R}(A \subset \mathbb{R}^2)$ est continue en $(x_0, y_0) \in A$ si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Propriété $f, g : A \to \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in A$
- $f + g$, $f \cdot g$ sont continues en (x_0, y_0)
- Si $g(x_0, y_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est continue en (x_0, y_0)

Définition $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in A$
f est differentiable en (x_0, y_0) s'il existe
- $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- $\epsilon D((x_0, y_0), \delta) \to \mathbb{R}$ avec $\epsilon(x, y) \xrightarrow{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0$

tel que :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + ||(x - x_0, y - y_0)||\epsilon(x, y)$$

Remarque Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$.
f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, c'est à dire

$$\exists a \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x)$$

Définition Si A ne contient que des points "intérieurs", f est différentiable sur A si elle est différentiable en tout $(x_0, y_0) \in A$
Si f est différentiable en $(x_0, y_0), (h, k) \mapsto ah + bk$ est la différentielle de f.

Remarque 2 différentiabilité peut aussi s'exprimer sous la forme :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + ||(h, k)||\epsilon(h, k)$$

avec $\epsilon : D((0, 0), \delta) \to \mathbb{R}$ et $\epsilon(h, k) \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} 0$
$h = x - x_0, k = y - y - 0$
Si f est différentiable en (x_0, y_0), On note sa différentielle par $df(x_0, y_0)$ ou $d_{(x_0,y_0)}f$.

Remarque $f(x,y) = f(x_0,y_0) + d_{(x_0,y_0)}f(h,k) + ||(h,k)||\epsilon(h,k)$

Remarque

$$\begin{aligned} d_{(x_0,y_0)}f(h,k) &= ah + bk \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le gradiant de f en (x_0,y_0), noté $\vec{grad}(f)(x_0,y_0)$ ou $\vec{\bigtriangledown}_{(x_0,y_0)}f$

Récapitulatif $d_{z_0}f(h,k) = \vec{\bigtriangledown}_{z_0}f \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ avec $z_0 = (x_0,y_0)$

$$f'(z_0)(h) = f'(z_0)\cdot h$$

Exemple

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto x^2 + y^2$$

$$\vec{\bigtriangledown}_{(x_0,y_0)}f = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{f(x_0+h, y_0+k)}_{(x_0+h)^2+(y_0+h)^2} = f(x_0,y_0) + d_{(x,y_0)}f(h,k) + ||(h,k)||\epsilon(h,k)$$

$$x_0^2 + 2x_0h + h^2 + y_0^2 + 2y_0^k + k^2 = \underbrace{(x_0^2+y_0^2)}_{f(x_0,y_0)} + \underbrace{(2x_0^h + 2y_0k)}_{d_{(x_0,y_0)}f(h,k)} + \underbrace{h^2+k^2}_{?}$$

$$\begin{aligned} h^2 + k^2 &= ||(h,k)||\epsilon(h,k) \\ &= \sqrt{h^2+k^2} \end{aligned}$$

On pose $\epsilon(h,k) = \sqrt{h^2+k^2}$

1 Fonctions partielles

Définition fonctions partielles $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in A$ fixé.

— $x \mapsto f(x, y_0)$ est la fonction partielle de f par rapport à x, notée $f_{|y=y_0}$ ou f_{y_0}.

— $y \mapsto f(x_0, y)$ est la fonction partielle de f par rapport à y, notée $f_{|x=x_0}$ ou f_{x_0}.

Définition de dérivée partielles $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in A$

Si f_{y_0} est dérivable en x_0, sa dérivée est dites dérivée partielles de f par rapport à x en y_0.

$(f_{y_0})'(x_0)$ notée $\frac{df}{dx}(x_0, y_0)$

$(f_{y_0})'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f_{y_0}(x_0 + h) - f_{y_0}(x_0)}{h}$

De même pour y si f_{x_0} est dérivable en x_0.

Exemple $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^4 + 3x^2y + 7xy^2 + 5y^2$

On veut la dérivée partielle par rapport à x en y_0

On fixe $y = y_0$, $f_{y_0}(x) = x^4 + 3y_0x^2 + 7y_0^2x + 5y_0^3$

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x_0, y_0) &= (4x^3 + 3 * 2y_0x + 7y_0^2 * 1 + 0)_{|x=x_0} \\
&= 4x_0^3 + 6x_0y_0 + 7y_0
\end{aligned}$$

Et $\frac{df}{dy}(x_0, y_0) = 3x_0^2 + 14x_0 * y_0 + 15y_0^2$

Théorème (Formule de Taylor à l'ordre 1) $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2, A$ est constituer de points 'intérieurs'.

Si les dérivées partielles existent et sont continues, alors f est différentiable et $\forall (h, k) \in D((x_0, y_0), \delta), \delta > 0$ tel que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{df}{dx}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{df}{dy}(x_0, y_0) \cdot k + ||(h, k)||\epsilon(h, k)$$

1.1 Application : différentielle et gradient

Reformulation :

$$\begin{aligned}
d_{(x_0,y_0)}f(h, k) &= \frac{df}{dx}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{df}{dy}(x_0, y_0) \cdot k \\
&= \begin{pmatrix} \frac{df}{dx}(x_0, y_0) \\ \frac{df}{dy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\
&= \vec{\nabla}_{(x_0,y_0)} f
\end{aligned}$$

Remarque Si f est différentiable, la différentielle et le gradient ont cette forme.

Ce n'est pas parce que $\dfrac{df}{dx}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{df}{dy}(x_0, y_0)$ existent que f est différentiable.

Si elles existent et sont continues, alors f est différentiables.

1.2 Application Equation du plan tangent

Rappel (1 variable) $g : I \to \mathbb{R}$

$$g(x_0 + h) = g'(x_0) \cdot h + h\epsilon(h)$$

Est l'équation de la tangente au graphe en $(x_0, g(x_0))$:

$$y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \; h = x - x_0$$

c'est à dire $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$

Ici (2 variables) aussi, la partie principale du DL à l'ordre 1 donne l'équation du plan tangent au graph en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.$[f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2]$

$$z - f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{df}{dx}(x_0, y_0) \\ \dfrac{df}{dy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

C'est à dire $z = f(x_0, y_0) + \dfrac{df}{dx}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{df}{dy}(x_0, y_0)(y - y_0)$

Exemple

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

$\vec{\nabla}_{(x_0,y_0)} f = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ \\ 2y_0 \end{pmatrix}$ est la fonction partielle par rapport à x :

$$x \mapsto x^2 + y_0^2$$

d'où dérivée partielle en (x, y_0) :

$$\frac{df}{dx}(x, y_0) = 2x$$

De même, $\dfrac{df}{dy}(x_0, y) = 2y$

Plan tangent en $(x, y_0, x_0^2 + y_0^2)$:

$$z = (x_0^2, y_0^2) + 2x(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

2 dérivées le long d'une courbe

Soit $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$
$\gamma(t) = (x(t), y(t))$, avec f différentiable sur A et x, y sont C^1 et $im(\gamma) \subset A$
On peut définir : $fo\gamma : I \to \mathbb{R}$ défini par

$$(fo\gamma)(t) = f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$$

Et cette fonction est dérivable sur I.

$$\begin{aligned}(fo\gamma)'(t) &= \vec{\nabla}_{\gamma(t)} f \cdot \gamma'(t) = d_{\gamma(t)} f(\gamma'(t)) \\ &= \frac{df}{dx}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{df}{dy}(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\end{aligned}$$

Remarque

— 1 variable : $f'(u(t)) \cdot u'(t)$
— 2 variables : $\vec{\nabla}_{\gamma(t)} f \cdot \gamma'(t)$

Démonstration Par définition :

$$(fo\gamma)'(t_0) = \lim \epsilon \to 0 \frac{fo\gamma(t_0 + \epsilon) - fo\gamma(t_0)}{\epsilon}$$

$$\text{donc } \frac{fo\gamma(t_0 + \epsilon) - fo\gamma(t_0)}{\epsilon} = \frac{df}{dx}(\gamma(t_0))(\frac{x(t_0 + \epsilon) - x(t_0)}{\epsilon}) + ||_{|}|\eta(--)$$

$$\text{d'ou } (fo\gamma)'(t_0) = \frac{df}{dx}(\gamma(t_0))x'(t_0) + \frac{df}{dy}(\gamma(t_0)) \cdot y'(t_0)$$

$$fo\gamma(t_0 + \epsilon) = fo\gamma(t_0) + \frac{df}{dx}(\gamma(t_0 + \epsilon))(x(t_0 + \epsilon) - x(t_0))$$

$$(f(x(t), y(t)))'(t_0)$$

$$fo\gamma(t_0) = f(x(t), y(t_0)) = f(x_0, y_0)$$

$$fo\gamma(t_0 + \epsilon) = f(x(t_0 + \epsilon), y(t_0 + \epsilon)) = f(x, y)$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{df}{dx}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{df}{dy}(x_0, y_0)(y - y_0) + || \begin{pmatrix} x - x_0 \\ \\ y - y_0 \end{pmatrix} ||\eta(x, y)$$

$$fo\gamma(t_0, \epsilon) = fo\gamma(t_0) + \frac{df}{dx}(\gamma(t_0))(x(t_0 + \epsilon) - x(t_0)) + \frac{df}{dy}(\gamma(t_0))(y(t_0 + \epsilon) - y(t_0))|| \begin{pmatrix} -- \end{pmatrix} ||$$

Exemple

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$f o \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1 \\ (f o\gamma)'(t) &= \frac{df}{dx}(\gamma(t)) \cdot x'(t) + \frac{df}{dy}(\gamma(t)) \cdot y'(t) \\ &= (2\cos t) \cdot (-\sin(t)) + 2(\sin t) \cdot \cos(t) = 0 \end{aligned}$$

3 Travail d'une force dérivant d'un potentiel

Définition $\vec{F}$ agit sur une particule, le travail de $\vec{F}$ le long du déplacement $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ est

$$W = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{u} = \int_I \vec{F} \cdot \gamma'(t) dt$$

Définition Force conservative : Une force dont le travail ne dépend pas de la trajectoire mais seulement des points de départ et d'arrivée

Définition $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

Exemple Force gravitationnelle, potentiel : $-\dfrac{GM}{r} = U$

Théorème Une force dérive d'un potentiel si et seulement si elle est conservative.

Démonstration hypothèse : $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ pour un certain $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}} &= \int_I \vec{F}_{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t) dt = -\int_I \vec{\nabla} U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= -\int_I (U o\gamma)'(t) dt \\ &= -\int_a^b (U o\gamma)'(t) dt \\ &= -((U o\gamma)(b) - (U o\gamma)(a)) \\ &= U(\gamma(a)) - U(\gamma(b)) \end{aligned}$$

donc $\vec{F}$ est conservative.

4 Courbes de niveau

(Lignes de niveau)

Définition $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2$. La ligne de niveau c (pour $c \in \mathbb{R}$),

$$\{(x, y) \in A | f(x, y) = x\} = f^{-1}(c)$$

Exemple $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$
$L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = c\}$

- si $c < 0, L_c = \phi$
- si $c = 0, L_= \{(0, 0)\}$
- $c > 0 L_c = C((0, 0), \sqrt{c})$

Remarque Lien entre graphe et ligne de niveau : $L_c = p(\{graphe(f)\} \cap \underbrace{P_c}_{\text{Plan d'equation } \{z=c\}})$

p est la projection

$$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y)$$

$$\{graph(f)\} \cap P_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y)\} \cap \{(x, y, c)\mathbb{R}^3 | z = c\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y) = c\}$$

Remarque Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée. (I un intervalle réel, $\gamma(t) = (x(t), y(t)), x, y : I \to \mathbb{R}, C^1$) incluse dans une ligne de niveau de $f : A\mathbb{R}, (A \in \mathbb{R}^2)$

ie $\text{im}(\gamma) \subset L_c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$ ie, $\forall t \in I, \gamma(t) \in L_c = \{(x, y) \in A | f(x, y) = c\}$ c'est à dire $\forall t \in I, f(x(t), y(t)) = c$

Démonstration Un vecteur directeur de la tangente en $\gamma(t_0)$ est $(x'(t_0), y(t_0)) = \gamma'(t_0)$

On considère le produit scalaire :

$$\vec{\nabla}_{\gamma(t_0)} f \cdot \gamma'(t_0) = d_{\gamma(t_0)} f(\gamma'(t_0))$$

$$= (f o \gamma)'(t_0) = 0$$

En effet $f o\gamma : I \to \mathbb{R}$, $f o\gamma$ est constante par l'hypothèse ($\forall t, f(\gamma(t)) = c$)

Exemple $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f(x,y) = x^2 + y^2 \end{array}$

Soit $c \in \mathbb{R}^{+*} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = c\}$
On considère la courbe paramétrée

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (\sqrt(c) \cos t, \sqrt{c} \sin t)$$

On a bien $im(\gamma) \subset L_c$ car :

$$\forall t : f(\gamma(t)) = f(\sqrt{c}\cos(t), \sqrt{c}\sin(t))$$

$$= (\sqrt{c}\cos(t))^2 + (\sqrt{c}\sin(t))^2$$

$$= c(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = c$$

$$\text{De plus, } \vec{\nabla}_{(x_0,y_0)} f = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx}(x_0,y_0) \\ \frac{df}{dy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ \\ 2y_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \gamma'(t_0) = (-\sqrt{c}\sin(t_0), \sqrt{x}\cos(t_0))$$

$$\text{donc } \vec{\nabla}_{\gamma(t_0)} f = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{c}\cos(t_0) \\ \\ 2 \cdot \sqrt{c}\sin(t_0) \end{pmatrix}$$

Donc $\vec{\nabla}_{\gamma(t_0)} f \cdot \gamma'(t_0) = (-\sqrt{c}\sin(t_0)) \cdot \sqrt{c}\cos(t_0) + \sqrt{c}\cos(t_0) \cdot \sqrt{c}\sin(t_0) = 0$
De la remarque précédente, on tire : la tangeante à la ligne de niveau L_c en $(x_0, y_0) \in L_c$ est la droite orthogonale à $\vec{\nabla}_{(x_0,y_0)} f$ et passant par $\underbrace{(x_0, y_0)}_{M_0}$.

Donc si $M = \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} \in \Delta$ (tangente à L_c en (x_0, y_0)) alors :

$$M_0\vec{M} \cdot \nabla \vec{M}_0 f = 0$$

c'est à dire $(x - x_0)\frac{df}{dx}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{df}{dy}(x_0, y_0) = 0$

Remarque C'est vrai si l'on peut paramétrer L_c. On peut le faire si (x_0, y_0) n'est pas un point critique de f (par le théorème des fonctions implicites).

5 Extrema et points critiques

Définition $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2, (x_0, y_0)$ intérieur à A. (x_0, y_0) est un point critiques de f si $d_{(x_0,y_0)}f = 0$ (ou encore $\vec{\nabla}_{(x_0,y_0)}f = \vec{0}$ ou encore $\frac{df}{dx}(x_0, y_0) = \frac{df}{dy}(x_0, y_0) = 0$)

Définition $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2$

Le point (x_0, y_0) est un :

- minimum local de f s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \forall (x, y) \in D((x_0, y_0), \delta) \cap A$
- maximum local de f s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \forall (x, y) \in D((x_0, y_0), \delta) \cap A$
- minimum global si pour tout $(x, y) \in A$, $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$
- maximum global si pour tout $(x, y) \in A$, $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$

Un extremum (global ou local) est soit un maximum, soit un minimum (global ou local)

Théorème (existance d'extrema globaux) $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2$, fermé et borné, alors il existe un maximum et un minimum globaux de f avec f continue sur A.

fermé tous les points adhérents à A sont dans A,c'est à dire A = A ∪ à son bord.

bornée il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $A \subset D((0, 0), M)$

Théorème (candidats à extrema locaux $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2, C^1$. Si f admet un extremum local en (x_0, y_0), aors (x_0, y_0) est un point critique de f.

Méthode de détermination des extrema

- On commence par les points critiques de f.
- Sinon
- on regarde les points où f n'est pas C^1.
- on regarde les points du bord.

Exemple $f : A \to \mathbb{R}$, défini par $f(x, y) = 2 \cdot x \cdot y$

$$A = D((x_0, y_0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Trouver ses extremas : f est C^1 sur $D((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$

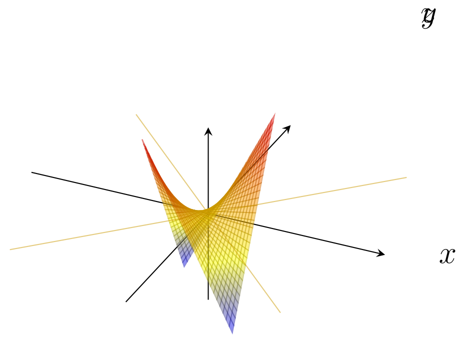
On cherche les points critiques de f sur $D((0, 0), 1)$ or :

$$\vec{\nabla}_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx}(x, y) \\ \frac{df}{dy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \end{pmatrix} = \vec{0}$$

si et seulement si $x = y = 0$

Donc f admet un unique point critique, le point $(0, 0)$

Mais le point $(0, 0)$ n'est pas un extremum local de f car :



Sur Δ, $f(x, y) = f(x, x) = 2x^2 > 0$

Sur Δ', $f(x, y) = f(x, -x) = -2x^2 < 0$

Or $f(0, 0) = 0$, donc pour tout point (x, y) de Δ, $f(x, x) > f(0, 0)$ et pour tout point $(x, -x)$ de Δ', $f(x, -x) < f(0, 0)$

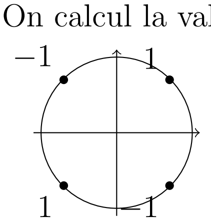
Il reste à étudier f sur le bord du disque. Le bord du disque est paramétrable par : $\gamma : [0, 2\pi]J \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$

On étudie
$$\begin{aligned} fo\gamma : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 2\cos(t)\sin(t) = \sin(2t) \end{aligned}$$

$fo\gamma$ est C^1 et $(fo\gamma)'() = 2\cos(2t)$

$$\begin{aligned} \text{D'ou } (fo\gamma)'(t) = 0 \quad & \text{si et seulement si} \\ 2\cos(2t) = 0 & \\ \cos(2t) = 0 & \\ 2t = \frac{\pi}{2} \quad & \mod \pi \\ t = \frac{\pi}{4} \quad & \mod \frac{\pi}{2} \\ t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\} & \end{aligned}$$

On calcul la valeur de f en ces points :



Donc les extrema de f sur $D((0,0),1)$ sont atteints :

$$\gamma(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ et } \gamma(\frac{5\pi}{4} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

sont les points où f atteint son maximum global qui est 1.

6 Fonctions de 3 variables

Une fonction de 3 variables est une fonction

$$f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

Son graph est le sous ensemble de $\mathbb{R}^4$: $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | w = f(x, y, z)\}$

6.1 Limites

On remplace le disque par la boule :

$$f(x,y,z) \xrightarrow[(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)]{} l \text{ si } \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall(x,y,z) \in B((x_0,y_0,z_0),\delta), |f(x,y,z) - l| < \epsilon$$

$$B((x_0, y_0, z_0), r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}$$

6.2 Continues

Une fonction $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^3$ est continue en $(x_0, y_0, z_0) \in A$ si..... (exercice)

6.3 Différentiables

(x_0, y_0, z_0) intérieur de A, f est différentiable en (x_0, y_0, z_0) s'il existe :

$$\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} \\ \epsilon : B((0,0,0),\delta) \text{ pour un } \delta > 0 \text{ et } \epsilon(x,y,z) \xrightarrow[(x,y,z)\to(0,0,0)]{} 0 \end{cases}$$

tel que $f(x + h, y + k, z + j) = f(x_0, y_0, z_0) + ah + bk + c + ||(h, k, j||\epsilon(h, k, j)$
Si les dérivées partielles (exo) existent, et sont continue, on a :

$$a = \frac{df}{dx}(x_0, y_0, z_0), b = \frac{df}{dy}(x_0, y_0, z_0), c = \frac{df}{dz}(x_0, y_0, z_0)$$