Table des matières

I

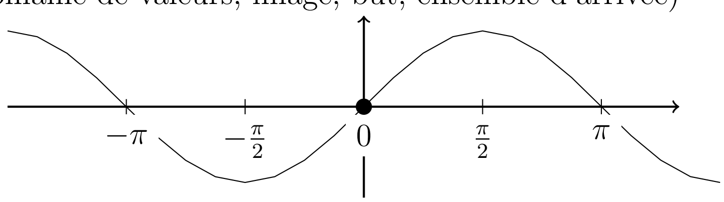
Fonctions

Ensembles de nombres : Réels $\mathbb{R}$, Rationnels $\mathbb{Q} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels $\mathbb{N}$, entiers $\mathbb{Z}$ $= \{-3, -2, ..., 1\}$, nombres complexes $\mathbb{C}$.

Intervalle : [a, b] avec a, b réels compris dans l'intervale, dit fermé, $a < b$,]a, b[avec a, b non compris dans l'intervale dit ouvert $\rightarrow$ Intervalle bornés $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$

1 Fonctions

Exemple : sinus : sin : $\mathbb{R}$ (domaine de definitions, sources, ensemble de depart) $\rightarrow \mathbb{R}$ ou$[-1, 1]$ (domaine de valeurs, image, but, ensemble d'arrivee)



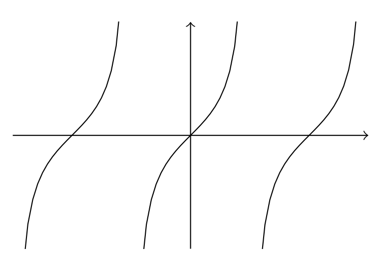
Définitions Soit E, F 2 ensemble de R. Une fonction f est procédé pour associer à tout élément de R un unique élément de F Le graph de F "vit" dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R}$

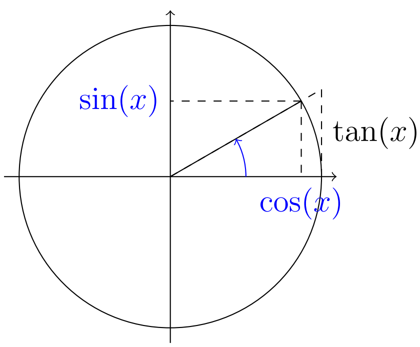
Définitions : Soit E et F 2 ensembles, on définit leur produit cartesien : comme l'ensemble dont les éléments sont les couples (x, y) avec x "vit" dans E et y dans F. ExF = {(x, y), $x \in E, y \in F$}

Définitions : Le graphe de f :$E \rightarrow F$ est un sous ensemble de $E{*}F$ donné par $\begin{array}{ll} = & \{(x, y), x \in E, y = (x)\} \\ = & \{x :\rightarrow f(x) = y\} \end{array}$

Exemples cosinus : cos : $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

tangeante tan : $\mathbb{R} \backslash \{\pi/2 + k * \pi$, k appartient a Z$\} \rightarrow]-\infty, +\infty[$





$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

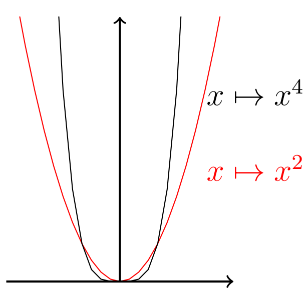
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} x \rightarrow x^n, n \in N$

$n = 0 : x \rightarrow 1$

$n = 1 : x \rightarrow x$

$n = 2 : x \rightarrow x^2$

$n = 3 : x \rightarrow x^3$



Remarque : les fonctions sont plus étroites. Schéma typique pour n ¿0 et n pair.

Définitions Soit $f : E \rightarrow R$ une fonction, avec E symétrique par rapport à 0.

- f est dite <u>paire</u> si : $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$
- f est <u>impaire</u> si : $\forall x \in E, f(x) = -f(-x)$ Remarque : si f est impaire $\rightarrow f(0) = 0$. En effet,

$$f(-0) = f(0) \tag{I.1}$$

$$f(0) = -f(0) \tag{I.2}$$

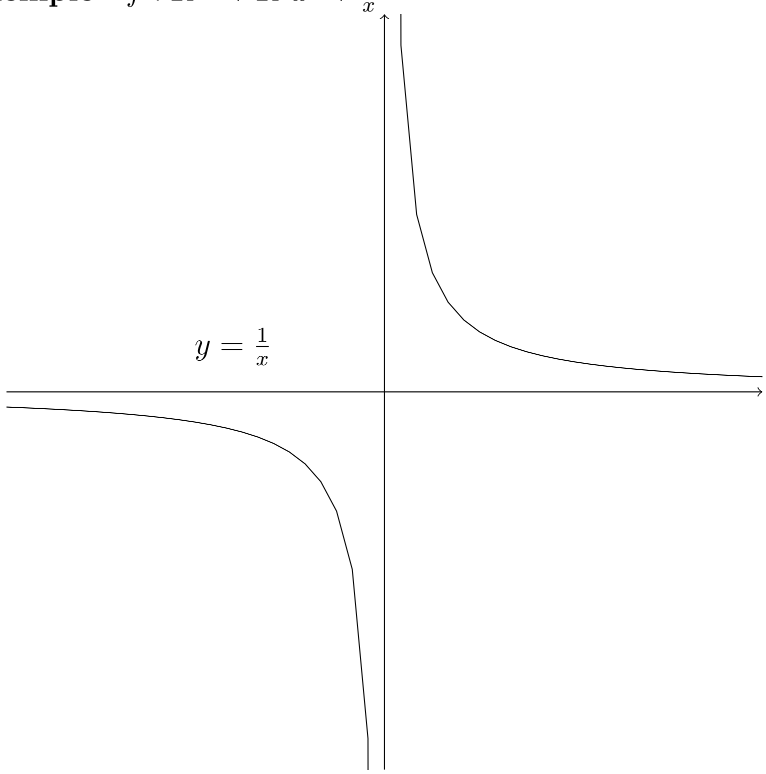
$$2 * f(0) = 0 \tag{I.3}$$

Exemple : fonctions paire : cosinus, x^{2p} avec p appartient à N impaires sinus, tangeante, x^{2p+1} avec p appartient à N

monotonie Soit $f : E \to \mathbb{R}$

- f est croissante si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
- f est strictement croissante si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
- f est decroissant si $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$
- f est decroissant si $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) > f(b)$

Exemple $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* x \to \frac{1}{x}$



décroissante sur $]-\infty, 0[et]0, +\infty[$ mais pas sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par exemple, $-1 \leq 1 et \frac{1}{-1} \leq \frac{1}{1}$

Définition Soit $f : E \to F$ et A un sous ensemble de E. On appelle restriction de f a A, note $f_{|A}$. La fonction $f_{|A} : A \to F$ definie par $f_A(x) = f(x) \forall x \in A$ Soit $f : E \to F$ et E', F' des sous ensembles de R, avec $E \subset E', F \subset F'$.La fonction$g : E' \to F'$ est un prolongement de f si $g_{|E} = F(ie \forall x \in E, g(x) = f(x))$

Exemple logarithme népérien $ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \to ln(x)$
$ln(a) + ln(b) = ln(a * b)$ avec $\forall (a, b) \in (R^{*+})^2$

2 Opérations sur les fonctions

Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$. On peut définir :

- La fonction somme $f + g$ par $f + g : E \to \mathbb{R} x \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- La fonction produit $f * g$ par $f * g : E \to \mathbb{R} x \to (f * g)(x) = f(x) \dot{g}(x)$

3 Image (direct) d'une fonction composé (composition)

Définitions : $f : E \to F$. L'image de f notée $im(f)$ c'est l'ensemble $\{y \in F$ tel que il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y\}$ aussi noté $f(E)$

Définition $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ Si l'image de $g \subset E$, on peut définir la fonction composé
$fog : E' \to F$
$x \mapsto fog(x) = f(g(x))$

4 Image réciproque

Définition $f : E \to F$, et $B \subset F$

L'image réciproque de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E$ tel que $f(x) \in B\}$
$f^{-1}([-1, 1]) = [a, b]$

Exemple (de composition)

$$\begin{aligned} f :E &\to \mathbb{R} \\ x &\to \sqrt{x^2 - 4x + 3} \end{aligned}$$

composé de fonction $f = gou$

$$\begin{aligned} u :\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x : &\to x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g :\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\to \sqrt{x} \end{aligned}$$

$\Delta = 16 - 12 = 4$ racine de u : 1 et 3

$u(x) > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$ $E = x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$

$$\begin{aligned} h :\mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ln(x^2) \end{aligned}$$

Pour composer $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $v : x \mapsto x^2$ ou doit enlever les points où v s'annule, c'est à dire $v^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^{+*} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2ln(x) \end{aligned}$$

$ln(x^2) = ln(x * x) = ln(x) + ln(x) = 2ln(x)$ mais $ln(a * b) = ln(a) + ln(b)$ n'est valable que si a et $b > 0$

5 Application, surjectives, injectives, bijectives

Définition $w : E \to F$ $(E, F \in \mathbb{R})$ On dit que w est surjective si $w(E) = F$ De manière équivalente : $(y \in F$ tel que il existe $x \in E$ avec $w(x) = y) = F$ c'est à dire tout les éléments de F admette un antécédent. c'est à dire $\forall y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que $w(x) = y$

Définition $w : E \to F$ $(E, F \subset R)$ On dit que w est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent. c'est à dire que si x et x' des éléments de E qui sont différents, $w(x)$ différent $w(x')$

Exemple $w(x) = x^2$ n'est pas injectifs car -2 et 2 ont la meme image (4).

Exemple :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

Cette fonction est surjective car pour tout y de $\mathbb{R}$, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. On a aussi $\forall y \in \mathbb{R}$, cet antécédent est unique.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Cette fonction n'est pas surjective (-1 par exemple n'a pas d'antécédent) et pas injective car $y = 4$ par exemple possède 2 antécédents.

Remarque : Si on considère

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{+} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

g est surjective (il y a toujours au minimum un antécédent) mais toujours pas injective Plus généralement, si on considère $f : E \to f(E)$ est toujours surjective.

$sin : R \to [-1; 1]$ elle est subjective mais pas injective : 0 est compris entre [-1 ;1] mais possède plusieurs antécédent ($k * \pi$ avec $k \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{+} \\ x &\mapsto e^{2x} \end{aligned}$$

Cette fonction n'est pas surjective (antécédent de 0 n'existe pas) mais est injective.

Definition $w : E \to F(E, R \subset \mathbb{R})$ w est dîtes bijective si elle est injective et surjective, c'est à dire tout élément de F admet exactement un antécédent.

6 Fonction réciproque

Si $f : E \to F$ est bijective, pour tout y de F , il existe un unique x dans E tel que $f(x) = y$ On peut donc définir $g : F \to E$ par $g(y) = x$ (tel que $f(x) = y$) g est la réciproque de f, notée f^{-1}

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{*+} \\ x &\mapsto exp(x) \end{aligned}$$

et g

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}{*+} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ln(x) \end{aligned}$$

Remarque si $g = f^{-1}$ avec $f : E \to F$ et $g : F \to E$ alors

$$\begin{aligned} fog : F &\to F \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

et $fog = gof$

Démonstration Soit $y \in F$, quelconque, on veut calculer fog(y) Par définition de g comme fonction réciproque de f, $g(y) = x$ tel que $f(x) = y$ donc $f(g(y)) = f(x) = y$

Proposition $f : E \to F$ une fonction impaire. supposons que $f_{|E\cap\mathbb{R}^+}$ est croissante, Alors $f_{|E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante

Démonstration

$$\begin{aligned} f_{|E\cap\mathbb{R}^-} : E \cap \mathbb{R}^- &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Soit x et x' dans $E \cap \mathbb{R}^-$ tels que $x \leq x'$.

$$\begin{aligned} f(x) = &\quad f(-x) \text{ car f impaire} \\ f(x') = &\quad -f(-x) \end{aligned}$$

Comme $x, x' \in E \cap \mathbb{R}^-$, $-x, -x' \in E \cap \mathbb{R}^-$ Comme $x \leq x'$, $-x \geq -x'$ et donc $f(-x) \geq f(-x')$ car f est coissante sur $E \cap \mathbb{R}^+$ Conclusion, $-f(-x) \leq -f(-x')$ et donc $f(x) \leq f(x')$ et donc $f(x) \leq f(x')$. On a prouvé que $f_{|E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante.