Table des matières

I

Fonctions

1 Ensembles de nombres

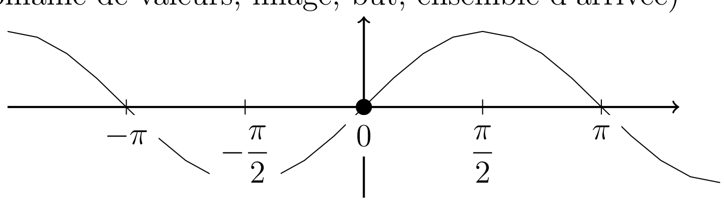
: Réels $\mathbb{R}$, Rationnels $\mathbb{Q} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels $\mathbb{N}$, entiers $\mathbb{Z} = \{-3, -2, ..., 1\}$, nombres complexes $\mathbb{C}$.

2 Intervalle

: [a, b] avec a, b réels compris dans l'intervale, dit fermé, $a < b$,]a, b[avec a, b non compris dans l'intervale dit ouvert $\rightarrow$ Intervalle bornés $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$

3 Fonctions

<u>Exemple</u> : sinus : sin : $\mathbb{R}$ (domaine de definitions, sources, ensemble de depart) $\rightarrow \mathbb{R}$ ou$[-1, 1]$ (domaine de valeurs, image, but, ensemble d'arrivee)



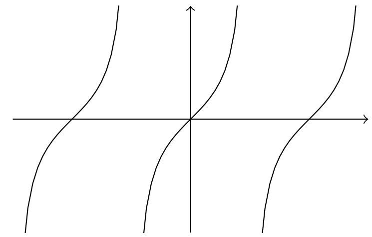
Définitions Soit E, F 2 ensemble de R. Une fonction f est procédé pour associer à tout élément de R un unique élément de F Le graph de F "vit" dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R}$

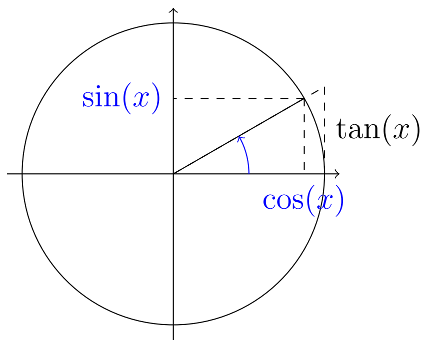
Définitions : Soit E et F 2 ensembles, on définit leur <u>produit cartesien</u> : comme l'ensemble dont les éléments sont les couples (x, y) avec x "vit" dans E et y dans F. ExF = $\{$(x, y), $x \in E, y \in F\}$

Définitions : Le <u>graphe</u> de f :$E \rightarrow F$ est un sous ensemble de $E{*}F$ donné par $\begin{array}{l} = \{(x, y), x \in E, y = (x)\} \\ = \{x :\rightarrow f(x) = y\} \end{array}$

Exemples cosinus : cos : $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

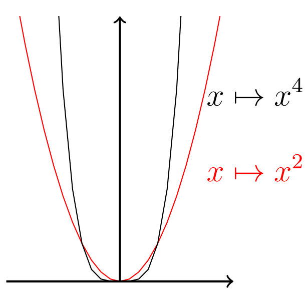
tangeante tan : $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2+k*\pi$, k appartient a Z$\}\rightarrow\ ]-\infty,+\infty[$





$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}x\rightarrow x^n, n\in N$
$n=0: x\rightarrow 1$
$n=1: x\rightarrow x$
$n=2: x\rightarrow x^2$
$n=3: x\rightarrow x^3$



Remarque : les fonctions sont plus étroites. Schéma typique pour n ¿0 et n pair.

Définitions Soit $f: E\rightarrow R$ une fonction, avec E symétrique par rapport à 0.

- f est dite <u>paire</u> si : $\forall x\in E, f(-x)=f(x)$
- f est <u>impaire</u> si : $\forall x\in E, f(x)=-f(-x)$ Remarque : si f est impaire $\rightarrow f(0)=0$. En effet,

$$f(-0) = f(0) \tag{I.1}$$
$$f(0) = -f(0) \tag{I.2}$$
$$2*f(0) = 0 \tag{I.3}$$

Exemple : fonctions paire : cosinus, x^{2p} avec p appartient à N impaires sinus, tangeante, x^{2p+1} avec p appartient à N

4 monotonie

Soit $f : E \to \mathbb{R}$

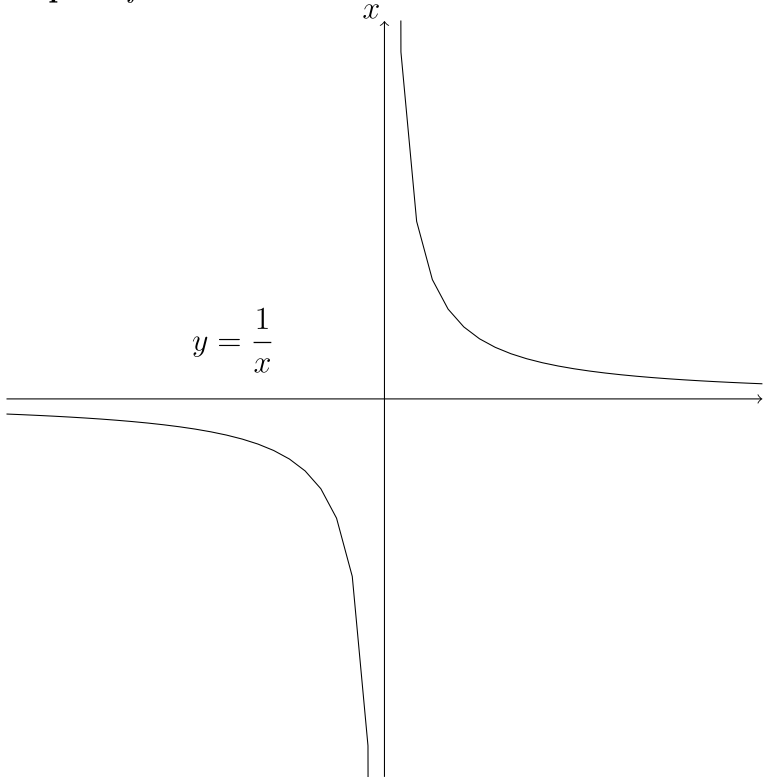
— f est <u>croissante</u> si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

— f est <u>strictement croissante</u> si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

— f est <u>decroissant</u> si $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$

— f est <u>decroissant</u> si $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) > f(b)$

Exemple $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* x \to \dfrac{1}{x}$



décroissante sur $]-\infty, 0[et]0, +\infty[$ mais pas sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par exemple, $-1 \leq 1$ et $\dfrac{1}{-1} \leq \dfrac{1}{1}$

Définition Soit $f : E \to F$ et A un sous ensemble de E. On appelle <u>restriction</u> de f a A, note $f_{|A}$. La fonction $f_{|A} : A \to F$ definie par $f_A(x) = f(x) \forall x \in A$ Soit $f : E \to F$ et E', F' des sous ensembles de R, avec $E \subset E', F \subset F'$.La fonction $g : E' \to F'$ est un <u>prolongement</u> de f si $g_{|E} = F(x)$ c'est à dire $\forall x \in E, g(x) = f(x))$

Exemple logarithme népérien $ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \to ln(x)$
$ln(a) + ln(b) = ln(a * b)$ avec $\forall (a, b) \in (R^{*+})^2$

5 Opérations sur les fonctions

Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$. On peut définir :
— La fonction somme $f + g$ par $f + g : E \to \mathbb{R}$ $x \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
— La fonction produit $f * g$ par $f * g : E \to \mathbb{R}$ $x \to (f * g)(x) = f(x)\dot{g}(x)$

6 Image (direct) d'une fonction composé (composition)

Définitions : $f : E \to F$. L'image de f notée $im(f)$ c'est l'ensemble $\{y \in F$ tel que il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y\}$ aussi noté $f(E)$

Définition $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ Si l'image de $g \subset E$, on peut définir la fonction composé $fog : E' \to F$
$x \mapsto fog(x) = f(g(x))$

7 Image réciproque

Définition Soit $f : E \to F$, et $B \subset F$ L'image réciproque de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E$ tel que $f(x) \in B\}$
$f^{-1}([-1, 1]) = [a, b]$

Exemple (de composition)

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3} \end{aligned}$$

composé de fonction $f = gou$

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x : &\mapsto x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

$\Delta = 16 - 12 = 4$ racine de u : 1 et 3

$u(x) > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$ $E = x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ln(x^2) \end{aligned}$$

Pour composer $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $v : x \mapsto x^2$ ou doit enlever les points où v s'annule, c'est à dire $v^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$$\begin{aligned} g :& \mathbb{R}^{+*} && \to \mathbb{R} \\ & x && \mapsto 2ln(x) \end{aligned}$$

$ln(x^2) = ln(x * x) = ln(x) + ln(x) = 2ln(x)$ mais $ln(a * b) = ln(a) + ln(b)$ n'est valable que si a et $b > 0$

8 Application, surjectives, injectives, bijectives

Définition $w : E \to F$ $(E, F \in \mathbb{R})$ On dit que w est surjective si $w(E) = F$ De manière équivalente : $(y \in F$ tel que il existe $x \in E$ avec $w(x) = y) = F$ c'est à dire tout les éléments de F admette un antécédent. c'est à dire $\forall y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que $w(x) = y$

Définition $w : E \to F$ $(E, F \subset R)$ On dit que w est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent. c'est à dire que si x et x' des éléments de E qui sont différents, $w(x)$ différent $w(x')$

Exemple $w(x) = x^2$ n'est pas injectifs car -2 et 2 ont la meme image (4).

Exemple :

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R} && \to \mathbb{R} \\ & x && \mapsto x^3 \end{aligned}$$

Cette fonction est surjective car pour tout y de $\mathbb{R}$, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. On a aussi $\forall y \in \mathbb{R}$, cet antécédent est unique.

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R} && \to \mathbb{R} \\ & x && \mapsto x^2 \end{aligned}$$

Cette fonction n'est pas surjective (-1 par exemple n'a pas d'antécédent) et pas injective car $y = 4$ par exemple possède 2 antécédents.

Remarque : Si on considère

$$\begin{aligned} g :& \mathbb{R} && \to \mathbb{R}^+ \\ & x && \mapsto x^2 \end{aligned}$$

g est surjective (il y a toujours au minimum un antécédent) mais toujours pas injective Plus généralement, si on considère $f : E \to f(E)$ est toujours surjective.

$sin : R \to [-1; 1]$ elle est subjective mais pas injective : 0 est compris entre [-1 ;1] mais possède plusieurs antécédent ($k * \pi$ avec $k \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} g :& \mathbb{R} && \to \mathbb{R}^+ \\ & x && \mapsto e^{2x} \end{aligned}$$

Cette fonction n'est pas surjective (antécédent de 0 n'existe pas) mais est injective.

Definition $w : E \to F(E, R \subset \mathbb{R})$ w est dîtes bijective si elle est injective et surjective, c'est à dire tout élément de F admet exactement un antécédent.

9 Fonction réciproque

Si $f : E \to F$ est bijective, pour tout y de F , il existe un unique x dans E tel que $f(x) = y$ On peut donc définir $g : F \to E$ par $g(y) = x$ (tel que $f(x) = y$) g est la réciproque de f, notée f^{-1}

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{*+} \\ x &\mapsto exp(x) \end{aligned}$$

et g

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}{*}{+} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ln(x) \end{aligned}$$

Remarque si $g = f^{-1}$ avec $f : E \to F$ et $g : F \to E$ alors

$$\begin{aligned} fog : F &\to F \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

et $fog = gof$

Démonstration Soit $y \in F$, quelconque, on veut calculer fog(y) Par définition de g comme fonction réciproque de f, $g(y) = x$ tel que $f(x) = y$ donc $f(g(y)) = f(x) = y$

Proposition $f : E \to F$ une fonction impaire. supposons que $f_{|E\cap\mathbb{R}^+}$ est croissante, Alors $f_{|E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante

Démonstration

$$\begin{aligned} f_{|E\cap\mathbb{R}^-} : E \cap \mathbb{R}^- &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Soit x et x' dans $E \cap \mathbb{R}^-$ tels que $x \leq x'$.

$$\begin{aligned} f(x) = & f(-x) \text{ car f impaire} \\ f(x') = & -f(-x) \end{aligned}$$

Comme $x, x' \in E \cap \mathbb{R}^-$, $-x, -x' \in E \cap \mathbb{R}^-$ Comme $x \leq x'$, $-x \geq -x'$ et donc $f(-x) \geq f(-x')$ car f est coissante sur $E \cap \mathbb{R}^+$ Conclusion, $-f(-x) \leq -f(-x')$ et donc $f(x) \leq f(x')$ et donc $f(x) \leq f(x')$. On a prouvé que $f_{|E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante.

Remarque f^{-1} pourrait être la fonction $\frac{1}{f}$ (la fonction f est différent de 0), la fonction réciproque de f (avec f bijective). Pour

$$\begin{aligned} f : E \rightarrow & \quad \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R} \\ f^{-1}(B) = & \quad \{x \in E, f(x) \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Toujours définie.

Proposition $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ si f et g sont bijective, alors gof l'est aussi et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ $(gof : E \rightarrow G)$

Exemple Trouver la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \rightarrow]-7, +\infty[$, $f(x) = e^{3x+2} - 7$ On écrit $y = e^{3x+2} - 7$ et on détermine x en fonction des y.

$$\begin{aligned} y + 7 = & \quad e^{3x+2} \\ ln(y+7) = & \quad 3x + 2\text{y ¿ -7 car fonction exp ¿ 0} \\ x = & \quad \frac{1}{3}(ln(y+7) - 2) \end{aligned}$$

d'où $f^{-1} = \frac{1}{3}(ln(x+7) - 2)$

Etablie $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset E$
$f(A) = \{g \in \mathbb{R}\text{tel que} x \in A, f(x) = y\}$ $f(A) = im(f_{|A})$

II

Limites

1 Voisinage et adhérence

Definition si $x \in E$, on dit que E est un voisinage de x si E contient un intervalle ouvert qui contient x. Ceci est équivalent à E voisinage de x si il existe $\delta > 0$ tel que $]x - \delta; x + \delta[\subset E$.

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}$. Un réel x est adherent à E, si tout voisinage V de x intersecte E, c'est à dire $(V \cap E \neq \emptyset)$

Exemple

— si $x \in E$, x est adhérent à E, car pour tout voisinage V de x, $x \in V \cap E$

— E = $]0\,;\,1]$, 0 est adhérent à E.

— $E = \{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\}$ 1 est adhérent à E car

$$\lim_{n\to+\infty} = 1$$

2 Limite finie en un point de $\mathbb{R}$

Definition $f : E \to \mathbb{R}; x_0$ un point adhérent de E. On dit que f(x) tend vers l en x_0 ou que f(x) admet la limite l en x_0 si : $\forall \epsilon > 0, \text{il existe } \delta > 0, |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon$

Ceci est équivalent à dire que $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [x - \delta, x + \delta], f(x) \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$

Pour tout voisinage V de l il existe un voisinage de x_0 U tel que si x est dans U, alors f(x) est dans V.

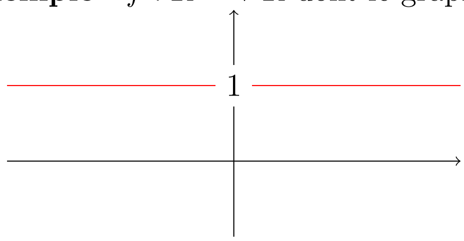
Notation

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

ou

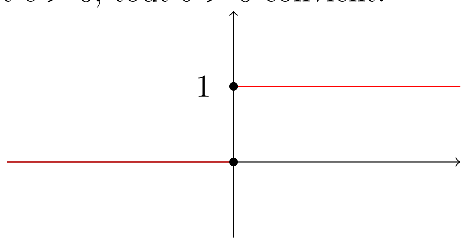
$$f(x) \to_{x\to x_0} l$$

Exemple $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dont le graph est :



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Soit $\epsilon > 0$, tout $\delta > 0$ convient.



$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

f n'admet pas de limite en 0.

3 Restriction à un sous ensemble

$f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0$ adhérent à A. On dit que f(x) tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tends vers x_0 dans A.

$\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0, \forall x \in A,$ tel que$|x - x_0| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$

Exemple limite à gauche de f en x_0 est $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ c'est à dire la limite de f(x) quand x tends vers x_0 dans $] - \infty, x_0[$

Exemple limite à droite de f en x_0 est $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ c'est à dire la limite de f(x) quand x tends vers x_0 dans $]x_0, +\infty[$

Exemple La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à droite en 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$, pour $f(x) = 1$
La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à gauche en 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$, pour $f(x) = 0$

Remarque On écrit aussi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$

4 Propriété

Unicité Si la limite existe, elle est unique.

démontration par l'absurde : $f : E \to \mathbb{R}, x_0$ adhérent à E. On suppose que la limite en x_0 existe mais qu'elle n'est pas unique. Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ avec $l_1 \neq l_2$

Comme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$$

, $\forall \epsilon_1 > 0$, il existe $\delta_1, \forall x \in E|x - x_0| < \delta_1, \text{alors}|f(x) - l_1| < \epsilon_1$ (*)
De plus

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$

, $\forall \epsilon_2 > 0$, il existe $\delta_2, \forall x \in E|x - x_0| < \delta_2, \text{alors}|f(x) - l_2| < \epsilon_2$ (**)

Choisissons $\epsilon < \dfrac{l_1 + l_2}{2}$, on remarque $]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$
On trouve δ_1 et δ_2 tel que (*) et (**) soient vraies.
On appelle $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\},]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\subset]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1[\cap]x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2[$

Soit $x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ Par (*), $f(x) \in]l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon[$
et par (**), $f(x) \in]l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon[$ donc $f(x) \in]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$ Ceci est absurde ($f(x) \neq \emptyset$)

5 Théorème des gendarmes

f, g, h 3 fonctions $E \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ adhérent à E.
(i) Si f, g, h admettent pour limites respectivs l, m, n en x_0 et si f(x) $\leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x de t, alors $l \leq m \leq n$
(ii) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur E et si f et h admettent une limite (identique) l en x_0, alors g admet une limite en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

Remarque On remplace les inégalité de (i) par $\forall x \in E$, $f(x) < g(x) < h(x)$, on obtient aussi $l \leq m \leq n$

Exemple $f(x) = |x|$ et $g(x) = 2|x|$ Sur $E \subset R^+, f < g$ mais

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x)$$

Exemple

$$\lim_{x \to 0} x. \sin(\frac{1}{x}) \text{ existe ?}$$

($\sin(\dfrac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0)

Soit f, g, h $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|, g(x) = x \sin(\dfrac{1}{x}), h(x) = |x|$

On a bien $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$

Donc par le théorème des gendarmes, Comme

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0} h(x) = 0$$

g admet 0 comme limite quand x tends vers 0.

Fonction de référence

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R} && \to \mathbb{R} \\ &x && \to x^n \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R}^{+*} && \to \mathbb{R} \\ &x && \to x^{ln(n)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R}^{+*} && \to \mathbb{R} \\ &x && \to x^{(\alpha * ln(\beta))^2} \end{aligned}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R}^{*} && \to \mathbb{R} \\ &x && \to \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Methode

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R} && \to \mathbb{R} \\ &x && \to \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{(x+1) - 1}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} \text{ donc}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R}^{+} && \to \mathbb{R} \\ &x && \to \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{2x} . \frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3+x}^2-\sqrt{3}^2}{2x(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})} \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

Comportement local

Proposition Si f(x) admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tends vers x_0, alors f est localement bornée. c'est à dire il existe un voisinnage de x, V, tel que il existe $M \in \mathbb{R}, \forall x \in V, |f(x)| < M$

Remarque Il existe un voisinnage de x_0 si et seulement si il existe un tervalle ouvert contenant x_0 si et seilement si il existe $\delta > 0,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

Demonstration Par hypothèse,

$$\begin{aligned} f(x) &\to l \\ x &\to x_0 \end{aligned}$$

c'est à dire $\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ $|f(x) - l| < \epsilon$
Soit $\epsilon = 1$, On trouve δ tel que $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
$|f(x) - l| < 1$, c'est à dire $-1 < f(x) - l < 1$ Soit $|f(x)| < l + 1$

Propriété Si f(x) admet $l \neq 0$ comme limite quand x tends vers x_0, alors localement (autour de x_0), alors f est de signe constant

Démonstration bornée en x_0 (meme style que la précédente), $\epsilon = \dfrac{l}{3}$

Exemple

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 6 = f(1) \text{ avec } f = x^2 + 2x + 3$$

$$\begin{aligned} |f(1+h) - f(1)| &= |(1+h)^2 + (1+h) * 2 + 3 - 6| \\ &= |1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3| \\ &= |h(h+4)| \\ &= |h| * (h+4) \text{ si } |h| < 1 \\ &\leq 5|h| \\ & \lim_{h\to 0} 5|h| = 0 \end{aligned}$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h \to 0} |f(1+h) - f(1)| = 1$$

Remarque $x = 1 + h$ quand h tends vers 0 et x tends vers 1.

6 Opération sur les limites

$f, g : E \to \mathbb{R}; x_0$ adherent à E Supposons que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \lim_{x \to 0} g(x) = m$$

Alors

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) \text{ existe et vaut } l + m$$

$$\lim_{x \to x_0} (f.g)(x) \text{ existe et vaut } l.m$$

si $m \neq 0$, alors

$$\lim_{x \to x_0} (f/g)(x) \text{ existe et vaut } \frac{l}{m}$$

Composition $f : E \to F, g : F \to G$
$gof : E \to G$, x_0 adhérent à E.
Supposons que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

F est un voissinage de l.

$$\lim_{y \to l} g(y) = m$$

Alors

$$\lim_{x \to x_0} gof(x)$$

existe et vaut m.

Exemple

$$\begin{aligned} g :& y && \to e^y \\ f :& x && \to \sqrt{1+x} \end{aligned}$$

gof est bien défini car le domaine de g est $\mathbb{R}$
0 est bien adhérent au domaine de f (qui est $[-1, +\infty[$)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = l$$

$$\lim_{y \to 1} g(x) = e$$

7 Limites infinies, et limites en l'infinie

Définition $f : E \to \mathbb{R}, x_0$ adhérent à E

On dit que f(x) tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) quand x tend vers x_0 si$\forall A > 0,$ il existe $\delta > 0$tel que$|x - x_0| < \delta > 0$, alors $f(x) > A$ (ou $f(x) < -A$ pour f(x) tend vers $-\infty$).

Exemple

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Définition $f : E \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset E$ On dit que f(x) tend vers $l \in E$ quand x tend vers $+\infty$

c'est à dire $\forall \epsilon > 0,$ il existe $A > 0, x > A,$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$

Définition $f : E \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe $A < 0$ tel que $]-\infty, x[\subset E$ On dit que f(x) tend vers $l \in E$ quand x tend vers $-\infty$ c'est à dire $\forall \epsilon > 0,$ il existe $A < 0, x < A,$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ veut dire $\forall A > 0,$ il existe $B > 0, x < -B$ tel que $f(x) > A$

Exemple

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R}^* && \to \mathbb{R} \\ x \mapsto& && \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

Démonstration Soit $A > 0$. On cherche δ tel que si $0 < x$, $0 < \delta$ alors $f(x) = \frac{1}{x} > A$

Choisir $\delta = \frac{1}{A}$ suffit, en effet $0 < x < \frac{1}{A}$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{A}$.

Exemple $g(x) = 1 + e^{-x}$ Montrons que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

Exemple

$$\begin{aligned} f :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[&\to \mathbb{R} \\ x \to & \quad tan(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} tan(x) = -\infty$$

8 Opération sur les limites

Limites finies ($l \in \mathbb{R}$) en l'infini sont exactement les memes opérations.
Limites infinies ($l = + - \infty$) Attention aux cas indermіné : $+\infty - \infty$, $\frac{+-\infty}{+-\infty}$, $0 * (+ - \infty)$

Exemple $\frac{+\infty}{+\infty} =?$

$$\begin{aligned} f : x \mapsto & \quad x \\ g : x \mapsto & \quad x^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\begin{aligned} f_2 : x \mapsto & \quad x^3 \\ g_2 x \mapsto & \quad x^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = +\infty$$

$$\begin{aligned} f_3 : x \mapsto & \quad 3x \\ x \mapsto & \quad x \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_3(x)}{g_3(x)} = 3$$

Plus généralement, P,Q deux polynomes, que vaut $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$? Elle est égale au rapport des thermes du plus haut degrés. Exemple :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 4x^5 + 2}{x^4 + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^5}{x^4} = +\infty$$

Exemple

$$\lim_{x \to 0} x * \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

car $\forall x \neq 0,\ 1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$

donc $0 \leq |x * \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$ avec —x— tend vers 0 pour x tend vers 0.

III

Continuité

1 Définition et premières propriétés

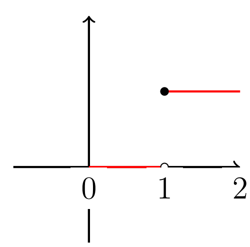
Définition $f : E \to \mathbb{R}$ et $x \in E$

- On dit que f est continue en x_0 (au point x_0) si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$
- f est continue sur E si f est continue en tout point $x_0 \in E$

o

Exemple Fonctions continues :
- $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (domaine $\mathbb{R}^*$) est continue sur $\mathbb{R}^*$
- $\sin, \cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Fonctions discontinues : $x \mapsto [x]$ n'est pas continue en 1 par exemple. En effet, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 0$et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 1$.
Les limites à gauches et à droite étant différentes donc $\lim\limits_{x \to 1}$ n'existe pas

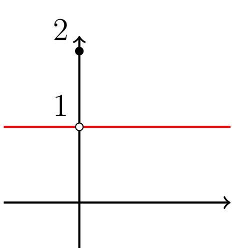


$g(x) = 1$ pour tout x différent de 0 mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim\limits_{x \to 0; x < 0} g(x)$

Remarque f continue en x_0 si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Définition
- f est continue à droite en x_0 si limite de f(x) par valeur supérieur $(\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x))$ en x_0 et vaut $f(x_0)$
- f est continue à gauche e en x_0 si limite de f(x) par valeur inférieur $(\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x))$ en x_0 et vaut $f(x_0)$

Exemple
- f(partie entière de l'exemple précédent) est continue à droite mais pas à gauche en 1. f est continue sur $[0; 1[$



— g n'est pas continue ni à gauche, ni à droite en 0.

Proposition f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0

Propriété $f, g : E \to \mathbb{R}, x_0 \in E$
f et g continue en x_0
- f+g est continue en x_0
- f.g est continue en x_0
- $\frac{f}{g}$est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$

La continuité est très local, meme si pour un $x \in E$, $g(x) = 0$, temps que x_0 différent de 0, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

Composition $f : E \to F$ $g : F \to G$ et $gof : E \to G$ si f est continue en $x \in E$ et g est continue en $f(x) \in F$, alors gof est continue en x_0

Exemple
- Polynôme , $\sin + \cos, \tan + exp$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- $\sin(ln(\frac{e^x}{1+x^2}))$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $exp, 1+x^2$ sont continue, de plus $1+x^2 \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ donc $\frac{e^x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Finallement, e^x n'est jamais null donc $im(x \mapsto \frac{e^x}{1+x^2}) = \phi \subset \mathbb{R}^{+*}$, d'où $ln(\phi)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $\begin{array}{l} x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \\ \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, de plus, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Définition Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $\boxed{x_0 \text{ adhérent à E}}$. Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

, alors la fonction $g : E \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ par la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases} \text{ Est continue sur} \mathbb{R}$$

Exemple

$$g(x) = \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ l & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ Est continue sur} \mathbb{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} xln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$ est le prolongement par continuité en 0 de $x \mapsto xln(x)$

$$x \mapsto \frac{1}{x} \text{ , } \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Exercice Par quelles valeurs de c, la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(2x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est continue ? f est continue si et seulement si $x = 2$ En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{sin(2x)}{x} \\ &= \frac{sin(2x)}{2x} * 2 = 2 \end{aligned}$$

(2^{eme} méthode : $sin(2x) = 2sin(x) * cos(x)$, $\dfrac{sin(2x)}{x} = 2 * \dfrac{sin(x)}{x}.\cos(x)$ ce qui tend vers 2 pour x tend vers 0, et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = c$$

donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) \text{ si et seulement si } c = 2$$

Donc f est continue en 0 si $c = 0$. De plus, pour tout $x_0 > 0$, $f(x) = x + c$ qui est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x_0 < 0$, $f(x) = \dfrac{sin(2x)}{x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^{-*}$ Le seule problème possible était en 0.

Comportement local

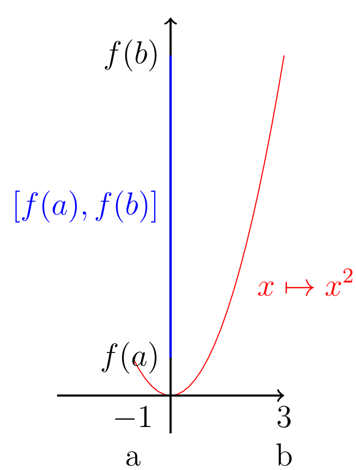
Proposition Si f est continue en x_0, alors f est localement bornée autour de x_0 (c'est à dire il existe un voisinnage de x_0 sur lequel f est bornée, c'est à dire il existe $\delta > 0$ et $M > 0$, $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x)| < M$). Si f est continue en x_0 et $f(x) \neq 0$, alors f est de signe constant (celui de $f(x_0)$ localement autour de x_0

2 Théorème des valeurs intermédiaires

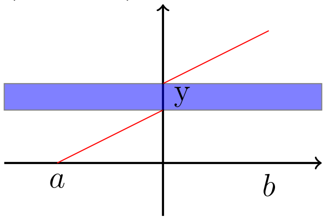
Théorème $f : [a, b]\mathbb{R}(a < b)$ et continue (sur $[a, b]$) Pour tout y compris entre f(a) et f(b) il existe au moins $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Exemple

$$\begin{aligned} x &\mapsto x^2 \\ [-1, 3] &\to \mathbb{R} \end{aligned}$$



(Contre) exemple : la continuité est essentielle.



Fonction monotone et non continue pour laquel il existe des y dans $[f(a), f(b)]$ qui n'a pas d'ancédent entre a et b.

Corollaire 1 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue.
si f(a) et f(b) sont non nul et de signes différents, il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$