Table des matières

I

Fonctions

1 Ensembles de nombres

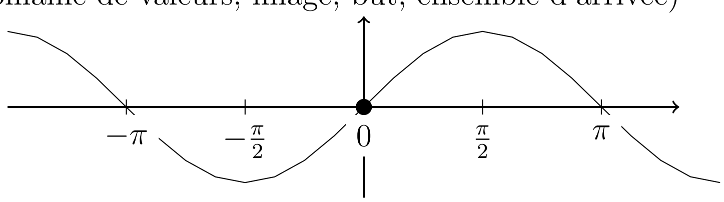
: Réels $\mathbb{R}$, Rationnels $\mathbb{Q} = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels $\mathbb{N}$, entiers $\mathbb{Z} = \{-3, -2, ..., 1\}$, nombres complexes $\mathbb{C}$.

2 Intervalle

: [a, b] avec a, b réels compris dans l'intervale, dit fermé, $a < b$,]a, b[avec a, b non compris dans l'intervale dit ouvert $\rightarrow$ Intervalle bornés $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$

3 Fonctions

Exemple : sinus : sin : $\mathbb{R}$ (domaine de definitions, sources, ensemble de depart) $\rightarrow \mathbb{R}$ ou$[-1, 1]$ (domaine de valeurs, image, but, ensemble d'arrivee)



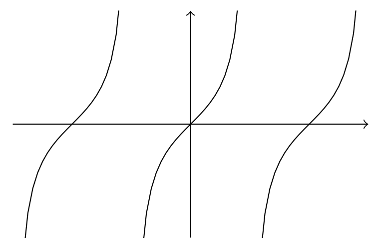
Définitions Soit E, F 2 ensemble de R. Une fonction f est procédé pour associer à tout élément de R un unique élément de F Le graph de F "vit" dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R}$

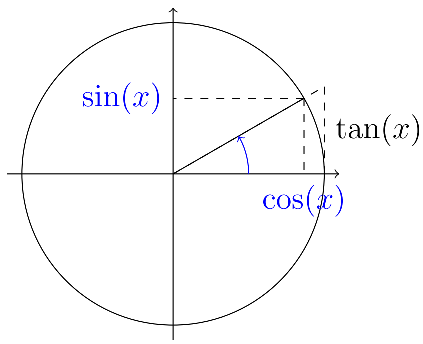
Définitions : Soit E et F 2 ensembles, on définit leur produit cartesien : comme l'ensemble dont les éléments sont les couples (x, y) avec x "vit" dans E et y dans F. ExF = {(x, y), $x \in E, y \in F\}$

Définitions : Le graphe de f :$E \rightarrow F$ est un sous ensemble de $E*F$ donné par $\begin{aligned} &= \{(x, y), x \in E, y = (x)\} \\ &= \{x :\rightarrow f(x) = y\} \end{aligned}$

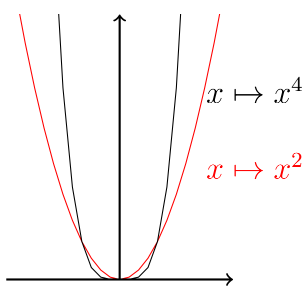
Exemples cosinus : cos : $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

tangeante tan : $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k * \pi$, k appartient a Z$\}\rightarrow$ $]-\infty, +\infty[$





$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}x \to x^n, n \in N$
$n = 0 : x \to 1$
$n = 1 : x \to x$
$n = 2 : x \to x^2$
$n = 3 : x \to x^3$



Remarque : les fonctions sont plus étroites. Schéma typique pour n ¿0 et n pair.

Définitions Soit $f : E \to R$ une fonction, avec E symétrique par rapport à 0.

— f est dite paire si : $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$

— f est impaire si : $\forall x \in E, f(x) = -f(-x)$ Remarque : si f est impaire $\to f(0) = 0$. En effet,

$$
\begin{aligned}
f(-0) &= f(0) && \text{(I.1)}\\
f(0) &= -f(0) && \text{(I.2)}\\
2 * f(0) &= 0 && \text{(I.3)}
\end{aligned}
$$

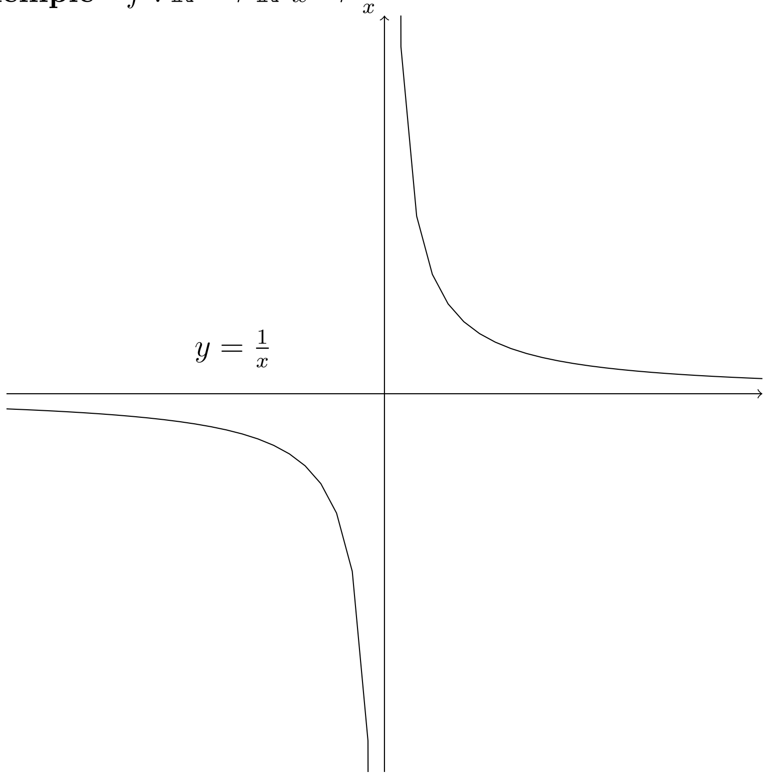
Exemple : fonctions paire : cosinus, x^{2p} avec p appartient à N impaires sinus, tangeante, x^{2p+1} avec p appartient à N

4 monotonie

Soit $f : E \to \mathbb{R}$

— f est croissante si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
— f est strictement croissante si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
— f est decroissant si $\forall\{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$
— f est decroissant si $\forall\{a, b\} \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $f(a) > f(b)$

Exemple $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* x \to \frac{1}{x}$



décroissante sur $]-\infty, 0[et]0, +\infty[$ mais pas sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par exemple, $-1 \leq 1 et \frac{1}{-1} \leq \frac{1}{1}$

Définition Soit $f : E \to F$ et A un sous ensemble de E. On appelle restriction de f a A, note $f_{|A}$. La fonction $f_{|A} : A \to F$ definie par $f_A(x) = f(x) \forall x \in A$ Soit $f : E \to F$ et E', F' des sous ensembles de R, avec $E \subset E', F \subset F'$.La fonction$g : E' \to F'$ est un prolongement de f si $g_{|E} = F(ie \forall x \in E, g(x) = f(x))$

Exemple logarithme népérien $ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \to ln(x)$
$ln(a) + ln(b) = ln(a * b)$ avec $\forall (a, b) \in (R^{*+})^2$

5 Opérations sur les fonctions

Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$. On peut définir :
- La fonction somme $f + g$ par $f + g : E \to \mathbb{R}x \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- La fonction produit $f * g$ par $f * g : E \to \mathbb{R}x \to (f * g)(x) = f(x)\dot{g}(x)$

6 Image (direct) d'une fonction composé (composition)

Définitions : $f : E \to F$. L'image de f notée $im(f)$ c'est l'ensemble $\{y \in F$ tel que il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y\}$ aussi noté $f(E)$

Définition $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ Si l'image de $g \subset E$, on peut définir la fonction composé $fog : E' \to F$
$x \mapsto fog(x) = f(g(x))$

7 Image réciproque

Définition $f : E \to F$, et $B \subset F$

L'image réciproque de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E$ tel que $f(x) \in B\}$
$f^{-1}([-1, 1]) = [a, b]$

Exemple (de composition)

$$\begin{aligned} f :E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3} \end{aligned}$$

composé de fonction $f = gou$

$$\begin{aligned} u :\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x : &\mapsto x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g :\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

$\Delta = 16 - 12 = 4$ racine de u : 1 et 3

$u(x) > 0$ si et seulement si $x \in] - \infty; 1] \cup [3; +\infty[$ $E = x \in] - \infty; 1] \cup [3; +\infty[$

$$\begin{aligned} h :\mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ln(x^2) \end{aligned}$$

Pour composer $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $v : x \mapsto x^2$ ou doit enlever les points où v s'annule, c'est à dire $v^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$$\begin{aligned} g : &\mathbb{R}^{+*} &&\to \mathbb{R} \\ &x &&\mapsto 2ln(x) \end{aligned}$$

$ln(x^2) = ln(x * x) = ln(x) + ln(x) = 2ln(x)$ mais $ln(a * b) = ln(a) + ln(b)$ n'est valable que si a et $b > 0$

8 Application, surjectives, injectives, bijectives

Définition $w : E \to F$ $(E, F \in \mathbb{R})$ On dit que w est surjective si $w(E) = F$ De manière équivalente : $(y \in F$ tel que il existe $x \in E$ avec $w(x) = y) = F$ c'est à dire tout les éléments de F admette un antécédent. c'est à dire $\forall y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que $w(x) = y$

Définition $w : E \to F$ $(E, F \subset R)$ On dit que w est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent. c'est à dire que si x et x' des éléments de E qui sont différents, $w(x)$ différent $w(x')$

Exemple $w(x) = x^2$ n'est pas injectifs car -2 et 2 ont la meme image (4).

Exemple :

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R} &&\to \mathbb{R} \\ &x &&\mapsto x^3 \end{aligned}$$

Cette fonction est surjective car pour tout y de $\mathbb{R}$, il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. On a aussi $\forall y \in \mathbb{R}$, cet antécédent est unique.

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R} &&\to \mathbb{R} \\ &x &&\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Cette fonction n'est pas surjective (-1 par exemple n'a pas d'antécédent) et pas injective car $y = 4$ par exemple possède 2 antécédents.

Remarque : Si on considère

$$\begin{aligned} g : &\mathbb{R} &&\to \mathbb{R}^+ \\ &x &&\mapsto x^2 \end{aligned}$$

g est surjective (il y a toujours au minimum un antécédent) mais toujours pas injective Plus généralement, si on considère $f : E \to f(E)$ est toujours surjective.

$sin : R \to [-1; 1]$ elle est subjective mais pas injective : 0 est compris entre [-1 ;1] mais possède plusieurs antécédent $(k * \pi$ avec $k \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} g : &\mathbb{R} &&\to \mathbb{R}^+ \\ &x &&\mapsto e^{2x} \end{aligned}$$

Cette fonction n'est pas surjective (antécédent de 0 n'existe pas) mais est injective.

Definition $w : E \to F(E, R \subset \mathbb{R})$ w est dîtes bijective si elle est injective et surjective, c'est à dire tout élément de F admet exactement un antécédent.

9 Fonction réciproque

Si $f : E \to F$ est bijective, pour tout y de F , il existe un unique x dans E tel que $f(x) = y$ On peut donc définir $g : F \to E$ par $g(y) = x$ (tel que $f(x) = y$) g est la réciproque de f, notée f^{-1}

Exemple

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R} && \to \mathbb{R}^{*+} \\ &x && \mapsto exp(x) \end{aligned}$$

et g

$$\begin{aligned} g : &\mathbb{R}*+ && \to \mathbb{R} \\ &x && \mapsto ln(x) \end{aligned}$$

Remarque si $g = f^{-1}$ avec $f : E \to F$ et $g : F \to E$ alors

$$\begin{aligned} fog : &F && \to F \\ &x && \mapsto x \end{aligned}$$

et $fog = gof$

Démonstration Soit $y \in F$, quelconque, on veut calculer fog(y) Par définition de g comme fonction réciproque de f, $g(y) = x$ tel que $f(x) = y$ donc $f(g(y)) = f(x) = y$

Proposition $f : E \to F$ une fonction impaire. supposons que $f_{|E\cap\mathbb{R}^+}$ est croissante, Alors $f_{|E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante

Démonstration

$$\begin{aligned} f_{|E\cap\mathbb{R}^-} : &E \cap \mathbb{R}^- && \to \mathbb{R} \\ &x && \mapsto f(x) \end{aligned}$$

Soit x et x' dans $E \cap \mathbb{R}^-$ tels que $x \leq x'$.

$$\begin{aligned} f(x) = && f(-x) \text{ car f impaire} \\ f(x') = && -f(-x) \end{aligned}$$

Comme $x, x' \in E \cap \mathbb{R}^-$, $-x, -x' \in E \cap \mathbb{R}^-$ Comme $x \leq x'$, $-x \geq -x'$ et donc $f(-x) \geq f(-x')$ car f est coissante sur $E \cap \mathbb{R}^+$ Conclusion, $-f(-x) \leq -f(-x')$ et donc $f(x) \leq f(x')$ et donc $f(x) \leq f(x')$. On a prouvé que $f_{|E\cap\mathbb{R}^-}$ est croissante.

Remarque f^{-1} pourrait être la fonction $\frac{1}{f}$ (la fonction f est différent de 0), la fonction réciproque de f (avec f bijective). Pour

$$\begin{aligned} f : E \to & \quad \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R} \\ f^{-1}(B) = & \quad \{x \in E, f(x) \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Toujours définie.

Proposition $f : E \to F$ et $g : F \to G$ si f et g sont bijective, alors gof l'est aussi et $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ $(gof : E \to G)$

Exemple Trouver la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \to]-7, +\infty[$, $f(x) = e^{3x+2} - 7$ On écrit $y = e^{3x+2} - 7$ et on détermine x en fonction des y.

$$\begin{aligned} y + 7 = & \quad e^{3x+2} \\ ln(y+7) = & \quad 3x + 2\text{y ¿ -7 car fonction exp ¿ 0} \\ x = & \quad \frac{1}{3}(ln(y+7) - 2) \end{aligned}$$

d'où $f^{-1} = \frac{1}{3}(ln(x+7) - 2)$

Etablie $f : E \to \mathbb{R}$ et $A \subset E$
$f(A) = \{g \in \mathbb{R}\text{tel que}x \in A, f(x) = y\}$ $f(A) = im(f_{|A})$

II

Limites

1 Voisinage et adhérence

Definition si $x \in E$, on dit que E est un voisinage de x si E contient un intervalle ouvert qui contient x. Ceci est équivalent à E voisinage de x si il existe $\delta > 0$ tel que $]x - \delta; x + \delta[\in E$.

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}$. Un réel x est adherent à E, si tout voisinage V de x intersecte E, c'est à dire $(V \cap E \neq \emptyset)$

Exemple
- si $x \in E$, x est adhérent à E, car pour tout voisinage V de x, $x \in V \cap E$
- E = $]0\,;\,1]$, 0 est adhérent à E.
- $E = \{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\}$ 1 est adhérent à E car

$$\lim_{n \to +\infty} = 1$$

2 Limite finie en un point de $\mathbb{R}$

Definition $f : E \to \mathbb{R}; x_0$ un point adhérent de E. On dit que f(x) tend vers l en x_0 ou que f(x) admet la limite l en x_0 si : $\forall \epsilon > 0, \text{il existe } \delta > 0, |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon$

Ceci est équivalent à dire que $\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [x - \delta, x + \delta], f(x) \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$

Pour tout voisinage V de l il existe un voisinage de x_0 U tel que si x est dans U, alors f(x) est dans V.

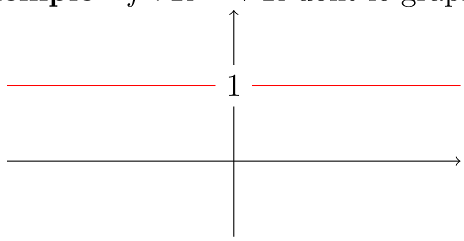
Notation

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

ou

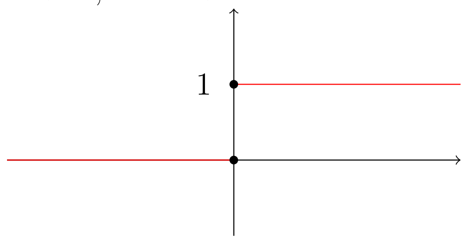
$$f(x) \to_{x \to x_0} l$$

Exemple $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dont le graph est :



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Soit $\epsilon > 0$, tout $\delta > 0$ convient.



$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

f n'admet pas de limite en 0.

3 Restriction à un sous ensemble

$f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0$ adhérent à A. On dit que f(x) tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tends vers x_0 dans A.

$\forall \epsilon > 0,$ il existe $\delta > 0, \forall x \in A,$ tel que$|x - x_0| < \delta, |f(x) - l| < \epsilon$

Exemple limite à gauche de f en x_0 est

$$\lim_{x \to x_0; x < x_0} f(x)$$

c'est à dire la limite de f(x) quand x tends vers x_0 dans $]-\infty, x_0[$

Exemple limite à droite de f en x_0 est

$$\lim_{x \to x_0; x > x_0} f(x)$$

c'est à dire la limite de f(x) quand x tends vers x_0 dans $]x_0, +\infty[$

Exemple La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à droite en 0 :

$$\lim_{x \to 0; x > 0} f(x)$$

, $f(x) = 1$ La fonction f de l'exemple [x] admet une limite à gauche en 0 :

$$\lim_{x \to 0; x < 0} f(x)$$

, $f(x) = 0$

Remarque On écrit aussi

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

par

$$\lim_{x \to 0; x<0} f(x)$$

et

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

par

$$\lim_{x \to x_0; x>0} f(x)$$

4 Propriété

Unicité Si la limite existe, elle est unique.

démontration par l'absurde : $f : E \to \mathbb{R}, x_0$ adhérent à E. On suppose que la limite en x_0 existe mais qu'elle n'est pas unique. Supposons que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \text{et} \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$

avec $l_1 \neq l_2$

Comme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$$

, $\forall \epsilon_1 > 0$, il existe $\delta_1, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_1, \text{alors} |f(x) - l_1| < \epsilon_1$ (*)
De plus

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$

, $\forall \epsilon_2 > 0$, il existe $\delta_2, \forall x \in E |x - x_0| < \delta_2, \text{alors} |f(x) - l_2| < \epsilon_2$ (**)

Choisissons $\epsilon < \frac{l_1 + l_2}{2}$, on remarque $]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$
On trouve δ_1 et δ_2 tel que (*) et (**) soient vraies.
On appelle $\delta = min\{d_1, d_2\},]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\subset]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1[\cap]x - \delta_2; x_0 + \delta_2[$

Soit $x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ Par (*), $f(x) \in]l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon[$
et par (**), $f(x) \in]l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon[$ donc $f(x) \in]l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon[\cap]l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon[= \emptyset$ Ceci est absurde ($f(x) \neq \emptyset$)

5 Théorème des gendarmes

f, g, h 3 fonctions $E \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ adhérent à E.
(i) Si f, g, h admettent pour limites respectivs l, m, n en x_0 et si f(x) $\in g(x) \leq h(x)$ pour tout x de t, alors$l \leq m \leq n$
(ii) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur E et si f et h admettent une limite (identique) l en x_0, alors g admet en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

Remarque ON remplace les inégalité de (i) par $\forall x \in E,\ f(x) < g(x) < h(x)$, on obtient $l \leq m \leq n$

Exemple $f(x) = |x|$ et $g(x) = 2|x|$ Sur $E \subset R^{+}, f < g$ mais

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x)$$

Exemple

$$\lim_{x \to 0} x\sin(\frac{1}{/}x)$$

existe ? ($\sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0)

Soit f, g, h $\mathbb{R}^{*} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|, g(x) = x\sin(\frac{1}{x}), h(x) = |x|$

On a bien $\forall x \in \mathbb{R}^{*}, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$

Donc par le théorème des gendarmes, Comme

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \text{et} \lim_{x \to 0} h(x) = 0$$

g admet 0 comme limite quand x tends vers 0.