Table des matières

I Les propiétés physiques **1**
1 Analyse Dimensionnelle . . . 1
1.1 Propriété physique de bases . . . 1
1.2 Les propriétés physiques dérivés . . . 2
1.3 Calcul / Analyse Dimensionnel . . . 2
2 Mesures - Incertidude - Calcul des variations . . . 2
2.1 Calcul d'incertitudes . . . 3
2.2 Calcul de variations . . . 4

II Statique du Solide **6**
1 Quelques forces . . . 6
2 Rappels sur les vecturs . . . 9
2.1 Produit Scalaire . . . 10
2.2 Produit Vectorielle . . . 10
3 Lois de la statique . . . 11

III Cinématique du point matériel **13**
1 Trajectoire rectiligne . . . 13
2 La vitesse . . . 13
3 Vitesse instantanée . . . 13
4 Accélération . . . 14
5 En 2D ou 3D . . . 14
6 vecteur accélération . . . 14
7 Dynamique du point matériel . . . 15
8 1ere loi de Newton (1686-87) : matériels . . . 15
9 2eme loi de Newton . . . 15
10 Résolution d'un problème de dynamique . . . 16
10.1 Chute d'un corps près de la surface de la terre . . . 17
10.2 Chute d'un corps dans un fluide . . . 18
10.3 Lancé oblique d'un projectile . . . 21
10.4 Oscillateurs harmoniques . . . 23
10.5 Chute d'une masse m solide dans un liquide visqueux, avec une vitesse initial v_0. . . . 24

IV Energies **26**
1 Energies mécaniques . . . 26
2 Travail d'une force . . . 27

3 Théorème de l'énergie cinétique 28
4 Forces conservatives 30
4.1 Energie Potentielle 30
4.2 Force de frottement fluide 31
4.3 Travail du poids 31
4.4 Energie potentielle 32
4.5 Exemples de calcul de E_p 33
4.6 force de frottement visqueux 33
5 Energie Mecanique 34
5.1 Théorème d'énergie mécanique 34
5.2 Forme locale du theoreme d'énergie mécanique 35
5.3 Applications E_m en absence de frottement 35
6 Equilibre et stabilités 36
6.1 Système conservatives 36
6.2 Système non conservatives 37

V Oscillations **38**
1 Introduction 38
1.1 Equation du mouvement d'un ressort 38
1.2 Solution 38
1.3 Notation Complexe 39
1.4 Aspects énergétique 39
2 Oscillateur forcé 40
2.1 Solution homogène 41
2.2 Solution particulière 41
3 Oscillateur amorti 42
3.1 Exercice 44
3.2 Exercice 44
4 Oscillateur amortie forcée 44
4.1 Solution de l'équation différentielle 45
4.2 Solution réels 46

I

Les propiétés physiques

1 Analyse Dimensionnelle

1.1 Propriété physique de bases

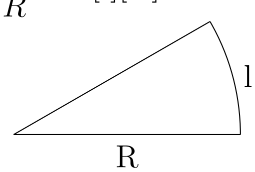
Type	Dimension	Unité (SI)
Longueur	L	mètre (m)
Temps	T	seconds (s)
Masse	M	kilogrammes (kg)
Température	Θ	Kelvin(K)
Courant	I	Ampère (A)

Remarque 1 Ne pas confondre unité et dimension.

— Unité Associé la valeur numérique d'une mesure

Remarque 2 Il existe des grandeurs ayant une unité mais sans dimensions. Par exemple un angle a pour unité le radian mais [angle] = 1.

$$\alpha = \frac{l}{R}\alpha = [l][R]^{-1} = L * L^{-1} = 1$$



définition d'un angle

1.2 Les propriétés physiques dérivés

Propriétés	Equation	Dimension	Unité (SI)
Surface	$s = x^2$	L^2	m^2
Volume	$s = x^3$	L^3	m^3
Fréquence	$f = \frac{1}{t}$	T^{-1}	Hz
Vitesse	$v = \frac{dl}{dt}$	$L * T^{-1}$	$m * s^i - 1$
Accélération	$a = \frac{d^2l}{dt^2}$	$L * T^{-2}$	$m * s^{-2}$
Force	$F = m * a$	$M * L * T^{-2}$	N
Energie	$E = F * L$	$M * L^2 * T^{-2}$	J
Puissance	$P = \frac{E}{t}$	$M * L^2 * T^{-3}$	$W(Watt)$
Pression	$P = \frac{F}{S}$	$M * L^{-1} * T^{-2}$	$Pa(Pascal)$
Tension	$U = \frac{P}{I}$	$M * L^2 * T^{-3} * I^{-1}$	$V(Volt)$

1.3 Calcul / Analyse Dimensionnel

$[Q] = M^\alpha * T^\beta * L^\gamma * \Theta^\delta * I^\epsilon$ Si Q est sans dimensions, alors $\alpha = \beta = ... = \epsilon = 0$ et $[Q] = 1$

Propriétés Générales des Equations en physique

a Toutes equations faisant intervenir des grandeurs ϕ doit etre homogène. Si $Q_1 = Q_2$ alors $[Q_1] = [Q_2]$(une Equation aux dimensions)

b Si $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + ... + Q_n$ alors $[Q] = [Q_1] = ... = [Q_n]$

c $Q = f(x) \rightarrow [Q] = [f(x)]$ Si $f(x) = e^x$ ou $f(x) = sin(x)$ Alors la dimensions de l'arguments x doit etre égale à 1. $[x] = 1$

d dimension d'un vecteur est la dimension de la norme du vecteurs et des composants.

e dimension de la dérivé d'une grandeur ϕ :
$Q = f(x)$
$[\frac{dQ}{dx}] = [\frac{df(x)}{dx}] = [\frac{\Delta Q}{\Delta x}] = \frac{[Q]}{[x]} = [Q][x]^{-1}$

2 Mesures - Incertidude - Calcul des variations

Les expériences sont susceptibles d'erreurs et donne des incertitudes. On donnes donc une estimation de la valeur réel.

2 approches d'estimations d'incertitudes.

1) incertitude due à l'expérimentation / répétition de la mesure. On estime donc l'incertitude statistique.

2) $G_V \in [G_{exp} - \delta G; G_{exp} + \delta G]$ $\delta G =$ incertitude absolue
$\dfrac{\delta G}{G} =$ incertitude relative (ou Précision)

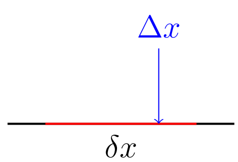
2.1 Calcul d'incertitudes

On Calcule G à partir d'autres grandeurs mesurées $G_1, G_2, G_3, ...$, avec des incertitude $\delta G_1, \delta G_2, ...$

$$G = f(x)$$

$$G_{mesure} = f(x_{mesure})$$

$$G_{exp} = f(x_\alpha) = f(x + \Delta x)$$



$$\begin{aligned}
G_{ex} &= f(x_{mesure}) + \frac{df}{dx}(x_{mes})(x - x_{mes}) + ... \\
G_{ex} - G_{mes} &\simeq \frac{df}{dx}(x_{mes})(x - x_{mes}) \\
\Delta G &\simeq \frac{df}{dx}(x_{mes}) * \Delta x \\
\delta G &\simeq |\frac{df}{dx}(x_{mes})| * \delta x
\end{aligned}$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
G \rightarrow f(x) &= \text{loi expérimental} \\
&= A * x^a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta G &= |\frac{df}{dx}|\delta x = (A\dot{a}x^{a-1})\delta x \\
&= \frac{f(x)}{x} * a * \delta x \\
\delta G &= |a * \frac{G}{x}| * \delta x \\
\frac{\delta G}{G} &= |\frac{a}{x}| * \delta x
\end{aligned}
$$

Ecriture d'un résultat : $G = (G_{exp} \pm \delta G)$(Unité)

$G = G_{exp}$ à $(\frac{\delta x}{G})$ près. Exemple : $V_{mesuree}$ avec δV Précision(incertitude relative) $\frac{\delta V}{V}$

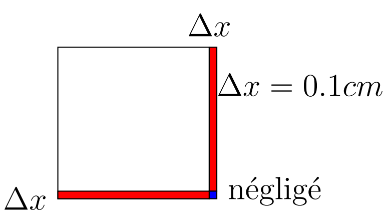
$$V = (V_{mesure} + -\delta v)m * s^{-1}$$

$$\text{et} V = V_{mesure} \qquad \text{à } \frac{\delta v}{v} \text{près}$$

Remarque Incertitude non indiquée explicitemment ext évaluée d'après dernier chiffre significatif. M = 2.50 kg signifie qu'on est précis à 10^{-2} $(\delta m = 0.01kg)$

A contrario Si on écrit une valeur calculée, il faut bien s'arreter au dernier chiffre significatif (on écrit pas $M = 2.50138$ sachant qu'on est précis à 10^{-2} près)

2.2 Calcul de variations



1 carre, x = 2cm

Si la longueur d'un côté varie, $S = x^2 = 2^2 = 4cm^2$ La variation de S quand x varie de Δx

$\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x_0) = 0.42cm^2$

Autre méthode

$$\Delta S = S(x) - S(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$$

$$= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

Si $\Delta x << x_0$, alors $(\Delta x)^2 <<< x_0$ On néglige alors $(\Delta x)^2$ (therme de second ordre) car beaucoup plus petit que x_0

$\Delta S = 2x_0\dot{\Delta} x$

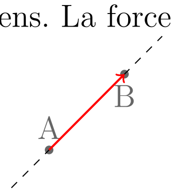
Généralisation G dépend de x, $G(x) = f(x)\dot{(}x - x_0)$

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{df}{dx}|_{x=x_0} \text{ avec } x = x_0$$

II

Statique du Solide

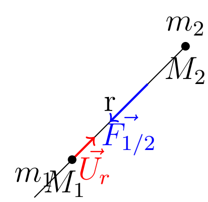
Statique : étude des solides en equilibre sous l'action de forces.
force : action exercée sur un solide / un point matériel. Elle est définie par son intensité, sa direction, son sens. La force est toujours prise comme une quantité vectorielle. Un vecteur



se note par $\vec{AB}$

1 Quelques forces

La force de gravitation C'est une force attractive, elle est exercée par une masse M_1 en présence d'une autre masse M_2



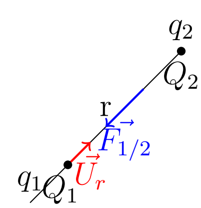
$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{1/2}} &= -\frac{G * m_1 * m_2}{||\overrightarrow{M_1M_2}||^2} * \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{||\overrightarrow{M_1M_2}||} \\ &= -\frac{G * m_1 * m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}\end{aligned}$$

G : Constante de gravitation $G = 6.67 * 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$
m_1, m_2 : Masses des corps 1 et 2
M_1, M_2 : Position des corps 1 et 2

Remarques

Force gravitationnelle inversement proportionelle à r^2. Sa portée est donc infinie
Elle fait partie des forces fondamentales.
Elle est cependant mal connu aux petites échelles (subatomique).
C'est la force de gravitation qui régule la distribution des structures dans la nature.

La force électrostatique Elle s'exerce entre 2 charges à l'immobiles.



$$\vec{F} = -\frac{1}{4 * \pi * \epsilon_0} * Q_1Q_2\frac{1}{r^2}\vec{u_r} \text{ Force de coulomb}$$

$$\epsilon_0 = 8.854 * 10^{-2} F.m^{-2}$$

ϵ_0 : Permittivité du vide

Remarque Elle est similaire dans la forme à la force de gravitation mais

$$\left.\begin{array}{l} Q => 0 \\ \\ Q =< 0 \end{array}\right\}$$ Elle est la principal cause de la cohésion de la matière : La cohésion dans un atome (entre les charge e^- et e^+) et celle des molécules.

$$[Q] = I.T$$

$$\text{Unité(Q)} = \text{Coulomb (C)}$$

Force de frottement fluide/visqueux Force exercée par un fluide sur un solide en mouvement par rapport au fluide.

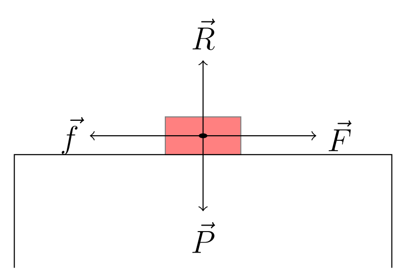
$$F = -f.\vec{v}$$

$f =$ coefficient nummérique de frottement dépend de la nature du fluide.

l'origine de cette force est l'interaction moléculaire des fluides et solides.

Remarque La forme est valable uniquement si v n'est pas trop grand.

force de frottement solide
Si $||\vec{F}|| > ||\vec{P}||.k_s$
Alors le corps est en mouvement. k_s =coefficient de frottement statique
$\vec{F}$ = Force exercé sur le corps.
Le support exerce une force



$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } ||\overrightarrow{f_s}|| < k_s mg \\ \\ \text{Le solide reste statique : la force de frottement opposé} \\ \\ \text{aux mouvement est appelé force de frottement du solide statique} \\ \\ \vec{f_s} \text{ est la force de frottement statique du solide} \end{array}\right\}$$

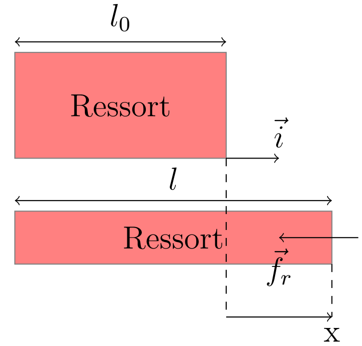
Quand $\vec{F}$ devient suffisante ($||\overrightarrow{f_c} = k_c{*}mg||$), le solide est en mouvement. La force de frottement opposé à la force de déplacement est appelé force de frottement du solide cinetique.

$k_c < k_s$ avec k_c le coefficient de frottement cinématique et k_s le coefficient de frottement statique, et on a $||\overrightarrow{f_c}|| < ||\overrightarrow{f_s}||$

Remarque Les forces de frottements statique et cinétique ne dépende que le nature des 2 surfaces en contacte. Elle ne dépend pas par exemple de la vitesse. Elle est du aux interactions entre les atomes et les molécules en surfaces.

Force élastique (ou de rappel) C'est la force qu'exerce un solide pour s'opposer à une déformation.

l_0 est la longueur au repos du ressort et l la longueur du ressort après deformation

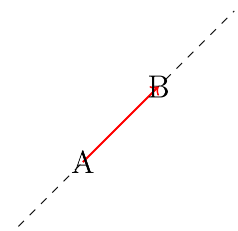


$$\overrightarrow{F_r} = -k(l - l_0) * \vec{i}$$
$$= -k.x.\vec{i}, \text{ avec } x = (l - l_0)$$

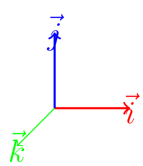
k est la constante de raideur du ressort, la forme $\vec{F_r} = -k.x.\vec{i}$ n'est valable que si on comprime le ressort ($x < 0$).

Si on déforme trop le solide (si on quitte le domaine élastique), d'après la loi de Hook, le solide entre dans le domaine plastique et ne revient plus à sa longueur original.

2 Rappels sur les vecturs



Un vecteur est définis par sa direction D, par sa norme $||\vec{AB}||$ et son sens $\vec{AB}$



Base orthonormée

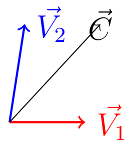
Si 3 vecteurs : $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}||$

et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont orthogonaux, alors $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ forment une base orthonormée. Tous les vecteurs $\vec{V}$ peuvent etre définis par : $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$ avec V_x, V_y, V_z les composants de V dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Propriétés l'expression dans une base orthonormée

$$\begin{cases} \vec{V_1} = V_{1x}\vec{i} + V_{1y}\vec{j} + V_{1z}\vec{k} \\ \vec{V_2} = V_{2x}\vec{i} + V_{2y}\vec{j} + V_{2z}\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{V_1} + \vec{V_2} &= \vec{C} \\ \vec{C} &= (V_{2x} + V_{1x})\vec{i} + (V_{2y} + V_{1y})\vec{j} + (V_{2z} + V_{1z})\vec{k} \end{aligned}$$

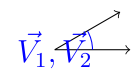


$\vec{V} = \lambda \vec{V_1}$, les composants sont multipliés par λ
Si $\vec{V_1} = \vec{V_2}$ alors

$$\begin{cases} \vec{V_{1x}} = \vec{V_{2x}} \\ \vec{V_{1y}} = \vec{V_{2y}} \\ \vec{V_{1z}} = \vec{V_{2z}} \end{cases}$$

2.1 Produit Scalaire

$$\begin{aligned} V &= \vec{V_1} \cdot \vec{V_2} \text{Le résultat est un nombre} \\ &= ||\vec{V_1}|| * ||\vec{V_2}|| * \cos(\vec{V_1}, \vec{V_2}) \\ &= (V_{1x}\vec{i} + V_{1y}\vec{j} + V_{1z}\vec{k}) * (V_{2x}\vec{i} + V_{2y}\vec{j} + V_{1z}\vec{k}) \\ &= (V_{1x}V_{2x} + V_{1y}V_{2y} + V_{1z}V_{2z} \end{aligned}$$



Le produit scalaire d'un vecteur par lui meme :

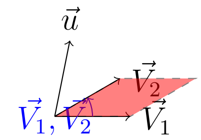
$$\begin{aligned} V &= \vec{V_1} \cdot \vec{V_1} && \text{Le résultat est un nombre} \\ &= V_{1x}^2 + V_{1y}^2 + V_{1z}^2 \\ &= ||\vec{V_1}|| * ||\vec{V_1}|| \cos(\vec{V_1}, \vec{V_1}) \\ &= \sum V_{1i}^2 && i = x, y, z \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 0 \;\; \vec{V_1}, \vec{V_2} \text{non nulle} \\ ||\vec{V_1}|| * ||\vec{V_2}|| \cos(\vec{V_1}, \vec{V_2}) = 0 \\ \cos((\vec{V_1}, \vec{V_2}) = 0 \\ (\vec{V_1}, \vec{V_2}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Si $\vec{V_1}$ perpendiculaire à $\vec{V_2}$, alors $\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 0$

2.2 Produit Vectorielle

$\vec{V} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = ||\vec{V_1}|| * ||\vec{V_2}|| * \sin(\vec{V_1}, \vec{V_2}) * \vec{u}$



$$\vec{V} \perp \vec{V_1}$$
$$\vec{V} \perp \vec{V_2}$$

Si $\vec{V_1} // \vec{V_2}$ alors $\sin(\vec{V_1}, \vec{V_2}) = 0$ et $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \vec{0}$

Composantes du produit vectorielle

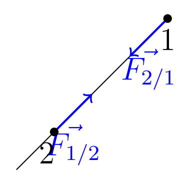
$$\vec{V} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{pmatrix} V_{1x} \; V_{2x} \\ \\ V_{1y} \; V_{2y} \\ \\ V_{1z} \; V_{2z} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{i} \\ \\ \vec{j} \\ \\ \vec{k} \end{array} = \begin{array}{c} (V_{1y} * V_{2z}) - (V_{2y} * V_{1z}) + \\ \\ (V_{1z} * V_{2x} - V_{2z} * V_{1x}) + \\ \\ (V_{1x} * V_{2y} - V_{2x} * V_{1y}) \end{array}$$

3 Lois de la statique

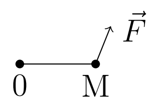
Un ensemble de points matériels soumis à des forces est en équilibre statique ou immobile alors

1ere lois de la statique : $\sum(\vec{F}) = \vec{0}$

2ème lois : Soit 2 systèmes 1, 2 en interaction mutuelles. La force exercé par 1 sur 2 est égale à l'inverse de la force exercé par 2 sur 1 (meme direction, meme norme, sens opposé) $\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{F_{2/1}}$



$\vec{F_{1/2}}$ s'exerce en 2, et $\vec{F_{2/1}}$ s'applique en 1.

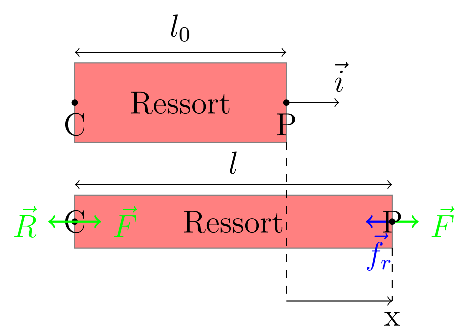


Le moment de $\vec{F}$ par rapport à O est égale à : $\overrightarrow{M_0(\vec{F})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ Loi de la statistique en rotation dit qu'il existe un point P par rapport auquel $\sum(\overrightarrow{M_P(\vec{F_i})}) = \vec{0}$ Le moment d'une force est la capacité de cette force à faire tourner un objet au niveau du point d'étude.

Exemple

Quelles force appliqué en P est nécessaore pour que le système soit en équilibre ?

Quelles est la force en C pour que le système reste fixe en C ?



$\sum \vec{F} = \vec{0}$ en P Bilan des forces en P : $\vec{F}, \vec{f_r}$

Expression des forces :

$$\begin{aligned} \vec{f_r} =& k(l - l_0)(\vec{i}) \\ =& -kx\vec{i} \end{aligned}$$

Application de la loi de la statique

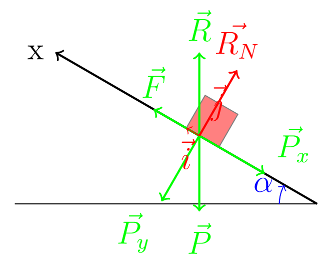
$$\begin{aligned}\vec{F}+\vec{f_r} &= \vec{0}\\ \vec{F} &= -\vec{f_r}\\ &= -(-kx\vec{i})\\ &= kx\vec{i}\end{aligned}$$

Bilan des forces en C :

$$\begin{aligned}\vec{F}+\vec{R} &= \vec{0}\\ \vec{R} &= -\vec{F} = -(-\vec{f_r}) = -kx\vec{i}\\ \vec{R} &= -kx\vec{i}\end{aligned}$$

Contact avec frottement solide À l'équilibre, avec la loi statique : $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$

En projection sur (x, y) : $\begin{cases}\vec{R}=\vec{R_N}+\vec{F}=F*\vec{i}+R_N*\vec{j}\\ \vec{P}=\vec{P_x}+\vec{P_y}=-mg*sin(\alpha)*\vec{i}-mg\cos(\alpha)\vec{j}\end{cases}$



$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{0} = \text{en projection}\begin{cases}\text{sur } \vec{i}\ : F-mg\sin(\alpha) = 0\\ \text{sur}\vec{j} : R_N-mg\cos(\alpha)=0\end{cases} = \begin{cases}F=mg\sin(\alpha)\\ R_N=mg\cos(\alpha)\end{cases}$$

$\boxed{\dfrac{F}{R_N}=\tan(\alpha)}$ D'après le comportement expérimental obsérvé, comme $F \leq k_s * P$, $F < k_s R_N$

$k_s > \dfrac{F}{R_N} = \tan(\alpha)$

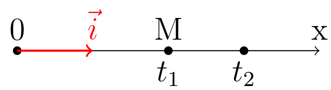
Condition d'équilibre : $\boxed{\tan(\alpha) < k_s}$

III

Cinématique du point matériel

La cinématique est la description des mouvements sans s'intéressé à leur causes. Pour décrire un mouvement il faut connaître les trajectoires (position en fonction du temps), la vitesse ainsi que son accélération.

1 Trajectoire rectiligne



M se déplace sur $ox, (o, \vec{i})$ On repère M par $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ avec x l'abscisse de M et $\overrightarrow{OM}$ le vecteur position.

En général, M dépend de t : $\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i}}$

2 La vitesse

La vitesse moyenne entre t_1 et t_2 : $< \vec{v} >_{[t_1,t_2]} = \dfrac{x(t_2)\vec{i} - x(t_1)\vec{i}}{t_2 - t_1}$

$$< \vec{v} > = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{\Delta t}\vec{i}$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t \downarrow < \vec{v} >_{\Delta t} = \frac{dM}{\Delta t}\vec{i} \text{Distance parcourue pendant} \Delta t$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}$$

3 Vitesse instantanée

$v(t) = \lim\limits_{\substack{t_2 \to t_1 \\ \Delta t \to 0}} \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\vec{i}$ Ce qui donne $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ (dérivée de x par rapport à t).

On note la dérivée $/_t$: $\boxed{\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt} = v(t)}$

4 Accélération

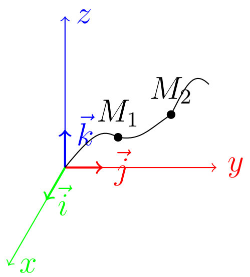
L'accélération $\vec{a}$ sur $[t_1, t_2]$ c'est la variation de $\vec{v}$ sur $[t_1, t_2]$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv(t)}{dt}\vec{i} = \dot{v}\vec{i}$

or
$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$
$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

donc $\boxed{\vec{a} = \dot{v}\vec{i} = \ddot{x}\vec{i}}$

5 En 2D ou 3D



La trajectoire est une courbe en 3D. M repéré par (x, y, z) dans la base orthonormée (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

Le vecteur vitesse :

$$\begin{aligned}
< \vec{v}(t)_{[t_1,t_2]} > &= \frac{\overrightarrow{OM}(t_2) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{t_2 - t_1} \\
\vec{v}(t) &= \frac{d(\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1)}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}[(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2k) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1k)] \\
&= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \\
&= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}
\end{aligned}$$

6 vecteur accélération

$< \vec{a} >_{[t_1,t_2]} = \dfrac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$ pour tout $t_2 - t_1 = \Delta t \to \delta t$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \\
&= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}
\end{aligned}$$

7 Dynamique du point matériel

C'est l'étude des applications d'une force ou d'une action qui va modifier les mouvements des points matériels.

8 1ere loi de Newton (1686-87) : matériels

1ère loi Tout corps matériel persévère à l'état de repos ou de mouvement rectiligne dans lequel il se trouve à moins qu'une force quelconque n'agisse sur lui et le contraigne à changer d'état.

Les actions extérieures (Forces) changent l'état du système.

Force action dynamique qui va changer l'etat du système physique

9 2eme loi de Newton

énoncé Le changement de mouvement d'un système se fait proportionnellement à l'action qui le provoque et dans le sens de celle ci. La force change la quantite de mouvement : proportionnelle à $\vec{v}$ et le facteur de proportionnalité m : masse.

On note $\vec{P} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement.

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}}$$

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

pour des masses constantes : $\left\{ \begin{aligned} m\vec{a} &= \sum \vec{F}_{ext} \\ m\frac{d\vec{v}}{dt} &= \sum \vec{F}_{ext} \end{aligned} \right\}$ = Principe Fondamentale de la Dynamique.

En général $\vec{F}$ dépend du temps et/ou de la position et/ou de la vitesse

$\boxed{\vec{F}(O\vec{M}, \vec{v}) = m\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$ relation entre les coordonees et leurs dérivées : c'est une équation différentielle.

Rappel

$$[F] = MLT^{-2}$$

$$[\overrightarrow{v}] = LT^{-1}$$

$$[\overrightarrow{a}] = LT^{-2}$$

10 Résolution d'un problème de dynamique

1. identifier le systeme et repérer les points dont on veut étudier le comportement
2. faire le bilan des force qui agissent en ce point $\downarrow$ prédire le comportement des points en applicant le principe fondamentale de la dynamique : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
3. définit la base orthonormé qui permet de "simplifier" l'étude.
4. on somme les forces et on les projette sur la base.

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$F_x = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\dot{x}$$

$$F_y = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\dot{y}$$

$$F_z = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\dot{z}$$

Solution des Equations différentielles.

Exemple d'application du PFD Remarque Si $\sum \vec{F} = \vec{0}$, alors $m\vec{a} = \vec{0}$.

Choix d'une direction $\vec{i}(\overrightarrow{ox})$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$m\frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

$$v(t) = constante$$

$\frac{dx}{dt} = v(t) = constante = c(t) \Rightarrow x(t) = c.t + k$

Avec les conditions à t donne, on fixe une valeur pour c et pour k.

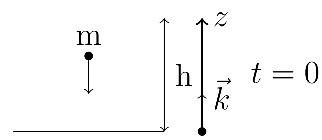
10.1 Chute d'un corps près de la surface de la terre

— sans frottement
— mass m_i ponctuelle
— vitesse $v_0 = 0$
— altitude : h

$$\text{Bilan des forces} = \vec{P}$$

$$= m\vec{g} \qquad ||\vec{g}|| = g$$

$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$



PFD : $\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{P} = -mg\vec{k}$

$$\text{Equations différentielles du mouvement : derive seconde} \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

Solution des equations differentielles :

$$\text{derive premiere} \begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = C_2 \\ \dot{z} = -mg \end{cases} \begin{cases} \ddot{z} = -g \\ \dot{z} = -gt + C_z \end{cases} \text{On passe par la primitive}$$

$$\text{pour } t = 0 \ \vec{v} \begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases}$$

On remplace pour $t = 0$:
$\dot{x}(0) = C_1 = 0$
$\dot{y}(0) = C_2 = 0$
$\dot{z}(0) = (-gt + C_3) = C_3 = 0$

$$\text{Donc : } \vec{v} \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -gt \end{cases}$$

Les positions à chaque $\underline{\text{t}}$:

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \text{Les primitives de } \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_x \\ y(t) = C_y \\ z(t) = \int -gtdt = -\frac{g}{2}t^2 + C_z \end{cases}$$

$$\text{pour } t = 0 \begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow C_x = 0 \\ y(0) = 0 \Rightarrow C_y = 0 \\ z(0) = h \Rightarrow C_z = h \end{cases}$$

10.2 Chute d'un corps dans un fluide

— m : ponctuelle.

—

$$t = 0 \begin{cases} z = h \\ v = 0 \end{cases}$$

— Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$, force de frottement visqueux / fluide : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$

— PFD :

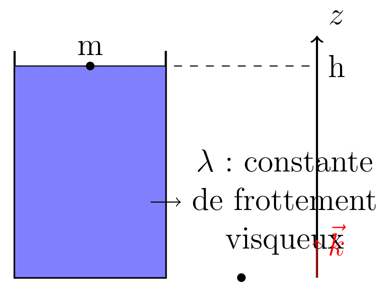
$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{P} + \vec{f} \\ &= -mg\vec{k} - \lambda\vec{v} \quad ||\vec{g}|| = g \\ &= -mg\vec{k} - \lambda v\vec{k} \quad v \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ \\ m\ddot{y} = 0 \\ \\ m\ddot{z} = -mg - \lambda\dot{z} \end{cases} \quad \begin{cases} m\dot{v}_x = 0 \\ \\ m\dot{v}_y = 0 \\ \\ m\dot{v}_z = -mg - \lambda v_z \ (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = C_x \\ \\ v_y = C_y \end{cases}$$

(3) $\dot{v}_z + \dfrac{\lambda}{m} v_z = -g$

On pose : $\dfrac{\lambda}{m} = \dfrac{1}{\tau} \Rightarrow \dot{v}_z + \dfrac{v_z}{\tau} = -g(3)'$

La solution de $(3)'$ est la solution de l'équation sans second membre (ou équation homogène) $\boxed{\dot{v}_z + \dfrac{v_z}{\tau} = 0}$ (équation homogène) + Une Solution particuliere de (3)



$$v_z = V_z^{(P)} + V_z^{(H)}$$

La solution de l'équation Homogène :
$\dot{v}_z + \dfrac{v_z}{\tau} = 0$ est de la forme :

$$\boxed{V_z^H(t) = K * e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

La solution particulière est de la même forme que le 2^{nd} membre donc

$$V_z^{(P)} = constante$$

$$\dot{V}_z^{(P)} = 0$$

On remplace dans (3)' : $0 + \dfrac{V_z^P}{\tau} = -g \Rightarrow V_z^{(P)} = -g\tau$
Donc la solution de l'équation différentielle de (3) est :

$$\boxed{v_z(t) = V_z^H + V_z^P = Ke^{-\frac{t}{\tau}} - g \cdot \tau}$$

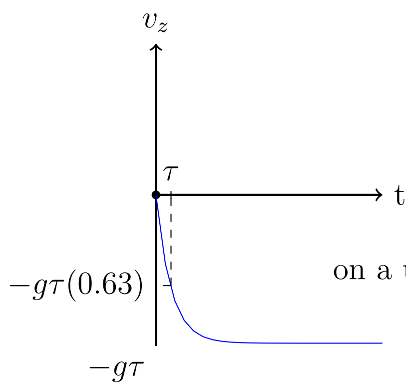
à $t = 0$ $v_z = 0$

$$v_z(0) = K * (1) - g\tau = 0$$

$$K = g\tau \Rightarrow \begin{cases} v_z(t) = g\tau e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau \\ \qquad\quad = -g\tau[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}] \end{cases}$$

à $t = 0$, $e^{-\frac{t}{\tau}} = 1$ et $v_z = 0$

Pour $t >> \tau$, alors
$$e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \rightarrow \quad 0$$
$$v_z \rightarrow -g\tau$$



La vitesse tend vers
une vitesse constante :
on a un mouvement uniforme rectiligne

Calcul de z(t)

$$v_z(t) = \dot{z}(t)$$
$$\begin{aligned} z(t) &= \int \dot{z}(t) = \int [-g\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})]dt \\ &= \int [(-g\tau)]dt + \int [(g\tau e^{-\frac{t}{\tau}})]dt \\ &= -g\tau \cdot t + g\tau(-\frac{1}{\frac{1}{\tau}})e^{-\frac{t}{\tau}} + K_z \\ &= -g\tau t - g\tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}} + K_z \\ &= -g\tau^2[\frac{t}{\tau} + e^{-\frac{t}{\tau}}] + K_z \end{aligned}$$

à $t = 0$, $z(0) = h$

$z(0) = 0 - g\tau^2 * 1 + K_z = h$
$K_z = h + g\tau^2$

On remplace dans (4) :

$$z(t) = -g\tau^2[\frac{t}{\tau} + e^{-\frac{t}{\tau}}] + h + g\tau^2$$

$$\boxed{z(t) = h - g\tau^2[\frac{t}{\tau} + e^{-\frac{t}{\tau}} - 1]}$$

Pour $t >> \tau$, $\begin{cases} e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0 \\ (\frac{t}{\tau}) - 1 \to \frac{t}{\tau} \end{cases}$

$$\text{D'où } \boxed{z(t) \simeq h - gt\tau}$$

D'où le mouvement uniforme rectiligne pour $t >> \tau$

Rappels

— Mouvement rectiligne uniformément accéléré : $\vec{F} = \overrightarrow{Constante}$

— Mouvement rectiligne amortie : F dépend de la fonction de la vitesse, et des frottements visqueux / fluide

10.3 Lancé oblique d'un projectile

— m ponctuelle

— lancé avec $\vec{v} = \vec{v_0}$

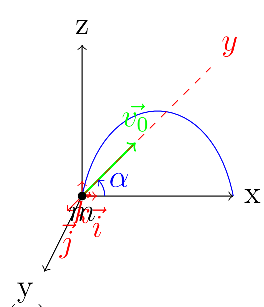
— On néglige les forces de frottement avec l'air ainsi que la poussé d'archimède

— bilan des forces :

$$\vec{P} = m\vec{g} = m \cdot g \cdot \vec{k}$$

— PFD : $m\vec{a} = \vec{P} = -mg\vec{k}$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = C_x \\ \dot{y} = C_y \\ \dot{z} = -gt + C_z \end{cases}$$



À $t = 0, v(0) = v_0$Composantes sur x, z : A $t = 0$ $\begin{cases} v_x = v_0 \cos(\alpha) \\ v_z = v_0 \sin(\alpha) \\ v_y = 0 \end{cases}$

$$\text{D'où} \begin{cases} C_x = v_0\cos(\alpha) \\ C_y = 0 \\ C_z = v_0\sin(\alpha) \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = v_0\cos(\alpha) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0\sin(\alpha) \end{cases} \qquad \vec{v}(t) = v_0\cos(\alpha)\vec{i} + (-gt + v_0\sin(\alpha))\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$x(t) = v_0\cos(\alpha)\cdot t + C'_x$$

$$y(t) = C'_y = 0$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)\cdot t + C'_z$$

$$\text{À } t = 0, \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C'_x = 0 \\ C'_y = 0 \\ C'_z = 0 \end{cases}$$

D'où un mouvement uniforme par rapport à Ox, et un mouvement uniforme accéléré par rapport à Oz. Le mouvement est dans le plan de $\vec{v_0}$ car abscence de $\vec{F} \perp \vec{v_0}$

Équation de la trajectoire $z(x)$

$$x(t) = v_0\cos(\alpha)t \qquad (1)$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)\cdot t \ (2)$$

Ce qui donne : $t = \dfrac{x}{v_0\cos(\alpha)} \Rightarrow z = -\dfrac{1}{2}g\dfrac{x^2}{v_0^2\cos(\alpha)^2} + v_0\sin(\alpha)\cdot\dfrac{x}{v_0\cos(\alpha)}$

D'où $\boxed{z(x) = x - (\frac{g}{2v_0^2\cos(\alpha)^2}x + \tan(\alpha))}$

Ceci est :
- Une équation d'une parabole
- Passant par : $(x, z) = (0, 0)$

Pour $z = 0$, $\boxed{\begin{array}{ll} x_p = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\dfrac{V_0^2}{g} & \\ x_p = \sin(2\alpha)\dfrac{v_0^2}{g} & \text{Donne la portée maximal} \end{array}}$

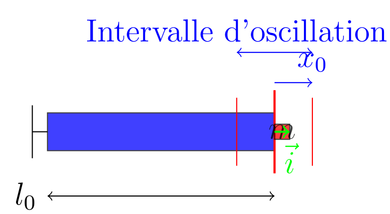
La portée est maximal pour $\sin(2\alpha) = 1$ donc pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Hauteur maximal Elle est maximal pour $z'(x) = 0$ et, comme la trajectoire est une parabole, elle est symétrique par une droite parallèle à O_z passant par $\frac{x_p}{2}$

$$z(\frac{x_p}{2}) = \text{ hauteur maximal}$$

10.4 Oscillateurs harmoniques

System :
- masse m
- Ressort de raideur k et de longueur l_0
- t=0, on déforme de x_0
- On néglige les frottements et le poids du ressort
- Bilan de forces : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ s'équilibre car abscence de frottements.
- $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{i} = -kx(t)\vec{i}$
- PFD : $m\vec{a} = \vec{F} = -kx\vec{i}$



Projection sur O_x

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx} \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}\vec{i} = 0}$$

On pose $\frac{k}{m} = \omega^2$:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

La fonction sinusoïdale est celle dont la dérivée second est le produit de cette fonction par une constante.
La solution générale est de la forme $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$
La vitesse : $\dot{x} = -A\omega\sin(\omega)t + B\omega\cos(\omega)t$

Pour déterminer A et B, on regarde les conditions initiales :

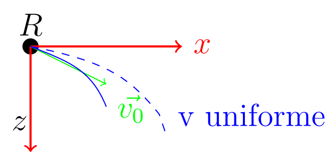
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = A = x_0 \\ \\ \dot{x}(0) = B\omega \Rightarrow B = 0 \end{cases} \text{D'ou} \begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\ \\ \dot{x}(t) = -x_0 \omega \sin(\omega t) \end{cases}$$

10.5 Chute d'une masse m solide dans un liquide visqueux, avec une vitesse initial v_0.

— Lancé à une vitesse v_0 avec un angle $(\vec{k}, \vec{v_0}) = \alpha$.
— liquide de viscosité η.
— force de frottement : $\vec{f} = -(6\pi\eta R)\vec{v}$ d'après la relation d'Einstein.

Bilan des forces

— Le poids $\vec{P}$
— Une force de frottement $\vec{f}$



$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = f_x \\ \\ \ddot{y} = 0 \\ \\ \ddot{z} = P_z + f_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{-6\pi\eta R}{m}\dot{x} \\ \\ \ddot{y} = 0 \\ \\ \ddot{z} = -g \cdot \dfrac{-6\pi\eta R}{m}\dot{z} \end{cases}$$

On pose $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{6\pi\eta R}{m}$ On a donc :

Sur l'axe des x

$$\dot{v_x} + \frac{v_x}{\tau} = 0$$

Comme dans la chute d'un corps dans un liquide visqueux, cette equation a pour solution $v_x(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

A $t = 0$, $v_x(0) = \sin(\alpha)v_0$, donc $K = \sin(\alpha) \cdot v_0$ (car $e^{-\frac{0}{\tau}} = 1$), d'où

$$v_x(t) = \sin(\alpha) \cdot v_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On remarque que pour t très très grand, $v_x(t)$ tend vers 0, et que donc l'objet sera considéré comme étant en chute libre.

Sur l'axe des z

$$\dot{v_z} + \frac{v_z}{\tau} = -g(3)$$

Solution homogène : $v_z^{(H)}(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Solution particulière : $v_z^{(P)} = g \Rightarrow \dot{v}_z^{(P)} = 0$. En remplaçant v_z et $\dot{v}_z$ par $v_z^{(P)}$ et $\dot{v}_z^{(P)}$ dans l'équation (3), on a ceci :

$$\dot{v_z}^{(P)} + \frac{v_z^{(P)}}{\tau} = -g$$
$$0 + \frac{v_z^{(P)}}{\tau} = -g$$
$$v_z^{(P)} = -g\tau$$

La solution de l'équation différentielle (3) est donc :

$$\boxed{v_z(t) = v_z^{(H)} + v_z^{(P)} = Ke^{-\frac{t}{\tau}} - g \cdot \tau}$$

a $t = 0$, $v_z = \cos(\alpha) \cdot v_0$. On trouve donc $K = \cos(\alpha) \cdot v_0 + g\tau$ d'où

$$v_z = (\cos(\alpha) \cdot v_0 + g\tau) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau$$

On remarque que pour t très très grand, la vitesse en z (v_z) tend vers une constante $-g\tau$. Comme v_x tend à être nul, l'objet sera considéré pour t suffisamment grand comme ayant un mouvement rectiligne uniforme vertical vers le bas.

IV

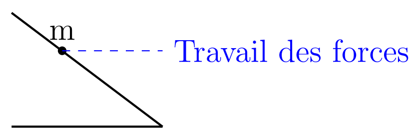
Energies

1 Energies mécaniques

Dans un système mécanique, on a 2 formes d'énergies :

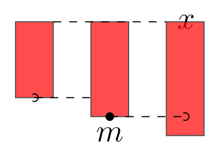
— une énergie communiquée par $\vec{v}$ dîtes cinétique (qui peut être conservé s'il n'y a pas d'intéraction avec le système) noté E_c.

— Le travail des forces qui s'appliquent sur m noté E_p.



Exemple Ressort de raideur k.

PFD :



$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} + kx &= 0 \\
m(\dot{x} \cdot \ddot{x}) + k\dot{x}x &= 0 && \text{Multiplication par } \dot{x} \\
m\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}[(\dot{x})]^2 + \frac{1}{2}k\frac{d}{dt}[(x)^2] &= 0 && \text{Expression sous forme de derive} \\
\frac{d}{dt}[(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2)] &= 0
\end{aligned}
$$

On écrit $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_m = $ constante .

$$
\begin{aligned}
[m\dot{x}^2] &= M \cdot (LT^{-1})^2 \\
&= ML^2T^{-2} \\
[kx^2] &= ML^2T^{-2}
\end{aligned}
$$

— $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ est l'énergie cinétique. Elle est maximum quand $\frac{1}{2}kx^2 = 0$

— $\frac{1}{2}kx^2$ est l'énergie potentielle élastique (conservative) du ressort emmagasinée dans Δx. La force de rappel du ressort est une force conservative

Dans un fluide visqueux (λ) : PFD

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0 \qquad \text{multiplication par} \dot{x} \text{ et écriture sous forme de dérivé}$$

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2] = -\lambda\dot{x}^2$$

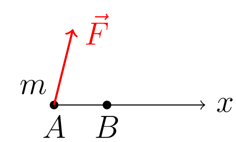
$$\frac{d}{dt}E_m = \underbrace{-\lambda\dot{x}^2}_{\text{terme dissipatif}} \qquad \text{theoreme d'Energie mecanique}$$

$$\begin{cases} \lambda > 0 \\ \dot{x} > 0 \end{cases}$$

Contrairement à E_p, $-\lambda\dot{x}^2$ est une force de frottement qui n'est pas conservative.

2 Travail d'une force

$\vec{F}$: Une force aggissant sur m se déplaçant suivant Ox



Définition Le travail d'une force $\vec{F}$ est défini par : $W_{A\to B} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

Remarque : $W_{B\to A} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{BA} = -W_{A\to B}$

Pour une force $\vec{F}$ quelconque (variable en fonction de la position). On divise l'intervalle $\vec{AB}$ en N sous intervalles sur lesqueles $\vec{F}$ est constante.

$$\vec{F}\overrightarrow{AB} = \sum_N (\vec{f}(x) \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{N})$$

$$= \vec{F}(x) \sum_{l=1}^{N} (\delta x_l \vec{i})$$

$$\delta x = \frac{||\overrightarrow{AB}||}{N}$$

$$W_{A\to B} = \sum_{l=1}^{N} \delta W_l$$

$$W_{AB} = \lim_{\delta x \to dx} \sum_{l=1}^{N} dW_l$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(x) \cdot dx\vec{i}$$

Travail d'une force

$$\text{Sur 3 dimensions : } W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(x,y,z) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Remarque

$$[W] = [Energie]$$

$$= ML^2T^{-2}$$

— Si $W_{AB} > 0$, il y a apport d'énergie au système.
— Si $W_{AB} < 0$, il y a dissipation d'énergie.

Exemples de travail $\vec{F} = -kx \cdot \vec{i}$ sur un chemin $A \to B$.

$$\begin{aligned} W_{A\to B}(\vec{F}) &= \int_A^B (-kx)\vec{i} \cdot (dx\vec{i}) \\ &= \int_A^B (-kxdx) \\ &= [-\frac{1}{2}kx^2]_A^B \\ &= -[\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A]^2 \\ &= \frac{1}{2}k[x_A^2 - x_B^2] \end{aligned}$$

Remarque Le travail d'une force conservatrice ne dépend Pas du chemin suivi (Ici il dépend du point de départ, et du point d'arrivé).

3 Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique d'un système entre 2 points A et B est égale à la somme des travaux des forces appliquées entre ces points.

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum_{\vec{F}} (W_{A\to B}(\vec{F}))$$

Démonstration
— Une masse m soumis aux forces F_c
— PFD : $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$

— Sur une seule dimension :

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{x} \cdot \vec{i} \\ \vec{F_i} = F_{ix}\vec{i} \end{cases}$$

$$m\ddot{x}\vec{i} = \sum_i F_{ix}\vec{i}$$

$$(m\ddot{x}\vec{i})(\dot{x}\vec{i}) = (\sum_i F_{ix}\vec{i})(\dot{x}\vec{i})$$

$$m\ddot{x}\dot{x} = \sum_i F_{ix} \cdot \dot{x}$$

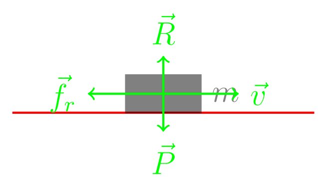
$$m(\frac{d}{dt}(x\dot{(t)}))^2\frac{1}{2} = \sum_i F_{ix} \cdot \dot{x}$$

$$\int_A^B m(\frac{d}{dt}(x\dot{(t)}))^2\frac{1}{2}dt = \int_A^B \sum_i F_{ix}dx \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{2}m[x\dot{(t)}^2]_A^B = \int_A^B \sum_i F_{ix}\vec{i}dx = \int_A^B \sum_i dW(F_{ix}\vec{i})dx$$

D'où $\frac{1}{2}m[\dot{x}^2]_A^B = \sum_i W_{A\to B}(\vec{F_i})$

Exemple d'utilisation Quelle est la distance parcourue par m avant de s'arrêter ?



$$\begin{cases} \text{Soit une masse m de vitesse initiale } \vec{v_0} \\ \text{Force de frottement solide} \\ \vec{dl} = \vec{i} \cdot x \text{ le déplacement élémentaire} \\ \vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \\ \delta E_c = \sum_i W(\vec{F_i}) \\ \sum_i W(\vec{F_i}) = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f}) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} W(\vec{P}) = 0 \\ W(\vec{R}) = 0 \end{matrix}\right\} \text{Car } \vec{P} \text{ et } \vec{R} \text{ sont perpendiculaire de } \vec{v}$$

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f}\vec{dl} = \int_A^B (||\vec{f}|| \cdot \vec{i})(dx\vec{i})$$

$$||\vec{f} = k_c||\vec{R}|| = k_c||m\vec{g}||$$

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_A^B -(k_c mg) \cdot dx$$

$$= -k_c mg[x]_A^B$$

$$\delta E_c = \frac{1}{2}m[v_B^2 - v_A^2] = -k_c mg[x_B - x_A]$$

$$\begin{cases} x_A = \text{ point de départ } v = v_0 \\ \\ x_B = \text{ point d'arriver de la masse} v = 0 \end{cases}$$

Donc

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -k_c mg(d_{AB})$$

$$d_{AB} = \frac{mv_0^2}{2gk_c m} = \frac{v_0^2}{2gk_c}$$

Autre forme de théorème E_c

$$E_c = W_{AB}(\vec{F}) \Rightarrow dE_c = dW(\vec{f})$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{dW(\vec{f})}{dt} \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \frac{\vec{F}\vec{dl}}{dt}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$$

$$P = \frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad \text{Puissance développée par } \vec{F}$$

$$[P] = ML^2T^{-3}$$

4 Forces conservatives

4.1 Energie Potentielle

Définition Une force est conservative si elle ne dépend que de la position des points d'arrivée de de départ, <u>et</u> son travaille ne dépend pas du chemin suivi entre 2 points A et B pour tout <u>A et B</u>.

Exemple Force rappel d'un ressort :
— $\vec{F} = -kx\vec{i}$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\vec{dl} = \int_A^B (-kx\vec{i})dx\vec{i}$$

$$W_{A\to B} = [-\frac{1}{2}kx^2]_A^B$$

$$= \frac{1}{2}k[x_A^2 - x_B^2]$$

$$\text{Si on passe par c } W_{A\to B} = W_{A\to C} + W_{C\to B}$$

$$= \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_C^2) + \frac{1}{2}k(x_C^2 - x_B^2)$$

$$= \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2)$$

o La force de rappel d'un ressort est conservative.

4.2 Force de frottement fluide

$$\vec{f} = -\lambda\vec{v}$$

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f}\vec{dl}$$

$$= \int_A^B (-\lambda\vec{v})\vec{dl}$$

$$= -\lambda \int_A^B (\dot{x})(\vec{i})(dx\vec{i})$$

$$= -\lambda \int_A^B (\frac{dx}{dt})dx$$

$$= -\lambda \int_A^B (\ddot{x^2})dt \qquad dx = \frac{dx}{dt}dt$$

La force de frottement n'est donc pas conservatrice car dépend du temps.

4.3 Travail du poids

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{P}\cdot\vec{dl}$$

$$= \int_A^B (||m\vec{g}||)\vec{k}\cdot\vec{dl} = ||m\vec{g}|| \int_A^B \vec{k}\vec{dl} = ||m\vec{g}|| \int_A^B ||\vec{dl}||\cdot\cos(\Theta)$$

4.4 Energie potentielle

Quand une force est conservative, il existe une fonction E_p tel que :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B)$$

pour tout A, B. Sur une chemin rectiligne $AB//O_x$

$$W_{AB}(\vec{F}) = E_p(x_A) - E_p(x_B)$$

Dans le cas globale : $\overrightarrow{AB}(x, y, z)$:

$$W_{AB}(\vec{F}) = E_p(x_A, y_A, z_A) - E_p(x_B, y_B, z_B)$$

Relation $\vec{F}$ et E_p

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = E_p^{(A)} - E_p^{(B)}$$

Sur chaque direction, $W_{A\to B} = \displaystyle\int_A^B F_{x,y,z} d(x, y, z) = E_p(x, y, z)_A - E_p(x, y, z)_B$

$$\text{Donc} \begin{cases} F_x dx = -dE_p(x)|_A^B \\ \\ F_y dy = -dE_p(y)|_A^B \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{dE_p}{dx} \\ F_y = -\dfrac{dE_p}{dy} \\ F_z = -\dfrac{dE_p}{dz} \end{cases}$$

On dit que $\vec{F}$ dérive de E_p, avec E_p l'énergie potentielle.

En 3D

$$dW = \vec{F}\vec{dl} = -dE_p$$

Ou $\vec{F} = -(\dfrac{dE_p}{dx}\vec{i} + \dfrac{dE_p}{dy}\vec{j} + \dfrac{dE_p}{dz}\vec{k})$

À l'inverse,

$$dE_p(x, y, z) = F_x dx + Fy dy + F_z dz$$

$$= \overrightarrow{grad}(E_p)$$

E_p est connu à une constante près.

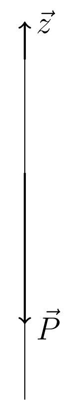
4.5 Exemples de calcul de E_p

$\vec{F} = -kx\vec{i}$ Force de rappel elastique
$\vec{F}$ est elle conservative ? .

$$F = -kx$$
$$= -d\frac{E_p}{dx}$$
$$dE_p = -Fd_x = -(-kx)dx$$
$$E_p(x) = \int kxdx$$
$$= \frac{1}{2}dx^2 + c$$

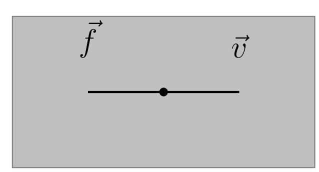
Si on prend l'origine des E_p en $x = 0$, alors $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$ **Energie potentiel elastique**

force de pensanteur



$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$
$$\text{Si F est conservative } F = -\frac{dE_p(z)}{dz}$$
$$dE_p(z) = -Fdz$$
$$\text{et } F = P = -mg$$
$$dE_p(z) = -(-mg)dz$$
$$E_p(z) = mgz + C$$
$$\text{Si } E_p(0) = 0 \Rightarrow E_p(z) = mgz$$

4.6 force de frottement visqueux



$$\vec{f} = -\lambda\vec{v}$$
$$f = -\lambda\dot{x} \ ?\exists E_p(x) \text{ tel que } (-\lambda \cdot x) = -\frac{E_p}{dx}$$

Impossible car dépend de la vitesse, donc du temps et du chemin parcourue.

5 Energie Mecanique

Il y a deux type d'énergie : l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, l'énergie potentielle $E_p(x)$

L'énergie Mécanique est défini comme étant :

$$\boxed{E_m = E_p + E_c}$$

5.1 Théorème d'énergie mécanique

Soit m soumise à des $\vec{F}$ conservative $\vec{F_c}$ et des $\vec{f}$ non conservative $\vec{F_{nc}}$

$$\delta E_c = \sum_i W(\vec{F_i}) = \sum_{i_1} W(\vec{F_{i_1c}}) + \sum_{i_2} W(\vec{F_{i_2nc}})$$

$$\text{or } \sum_{i_1} W_{A\to B}(\vec{F_{i_1c}}) = E_p(A) - E_p(B)$$

$$\delta_{A\to B} E_c = E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) + \sum_{i_2} W(\vec{F_{i_2nc}})$$

$$[E_c(B) + E_p(B)] - [E_c(A) + E_p(A)] = \sum_{i_2} (\vec{F_{i_2nc}})$$

Enonce La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservative.

$$\boxed{E_m(B) - E_m(A) = \sum_{i_2} W(\vec{F_{i_2nc}})}$$

Conséquence En absence de forces non conservative, l'énergie mécanique est constante du mouvement.

5.2 Forme locale du theoreme d'énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p$$

$$dE_m = dE_c + dE_p$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt}$$

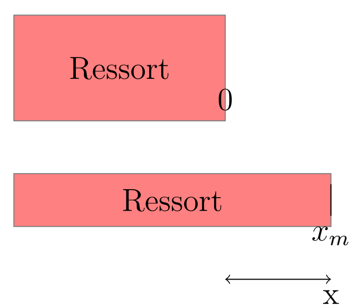
$$\begin{aligned}\frac{dE_m}{dt} &= \frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt}\\ &= \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v^2)\\ &= \frac{1}{2}m(2v \cdot \dot{v})\\ \frac{dE_m}{dt} &= (m\dot{v})v = f \cdot v\end{aligned}$$

en 3D $\boxed{\frac{dE_m}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}}$ avec $\vec{f}$ la résultante des forces.

5.3 Applications E_m en absence de frottement

Cas du ressort : $E_m = E_p + E_c$

$$= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$



Quelle est sa vitesse maximal v_{max} et où ? Position initiale : x_m, $v_i = 0$

$$E_{mi} = 0 + \frac{1}{2}k(x_m^2)$$

Quand v est maximal :

$$\begin{aligned}E_{m_f} &= \frac{1}{2}mv_{max}^2 + \frac{1}{2}(kx_0^2)\\ &= \frac{1}{2}kx_m^2\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}(kx_0^2) = C$$

Donc v_m est maximal quand x_0^2 est minimal : $x_0 = 0$.

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}kx_m^2$$

$$v_m = \sqrt{\frac{k}{m}}x_m$$

Calculer l'énergie potentielle d'un satellite dans le champ de gravitation de la terre en absence de frottement avec l'atmosphère, $E_p(\infty) = 0$

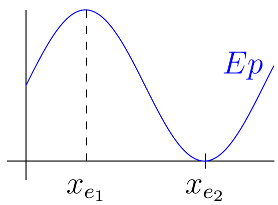
Celle d'une comète et d'une planète. $v_0 = 0$, $E_p(\infty) = 0$

6 Equilibre et stabilités

6.1 Système conservatives

Toutes les forces qui agissent sur le système sont conservatives. Soit un système conservatif :

$$EcEp$$



Condition d'équilibre

$\sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$ d'après le PFD

Position d'équilibre

en x_e :

$$x = \quad x_e \quad \text{est solution du PFD}$$

$$F = -\frac{dEp}{dx} = 0$$

Donc $Ep(x)$ est un extremum (avec $x = x_e$) car la dérivé en x_e est égal à 0.

Stabilité de l'équilibre

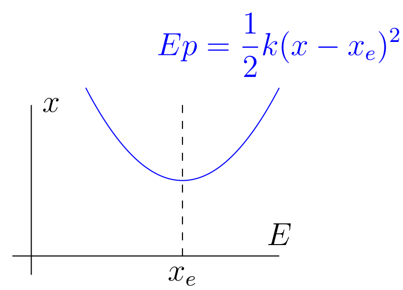
si on éloigne le système de la position x_e, on aura $x = x_e + \Delta x$, avec Δx assez petit (négatif ou positif)

Dans ce cas :

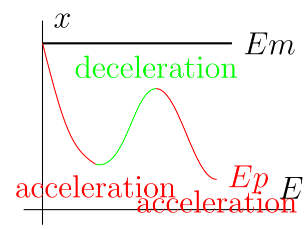
— Si le système tend à revenir à $x = x_e$, alors la position x_e est une position d'équilibre stable.

— Si le système s'écarte de $x = x_e + \Delta$, alors la position x est une position d'équilibre instable.

Pour un ressort de raideur k, on a :



La position d'équilibre stable/ instable est égal au développement limité de $\frac{dEp}{dx}$ à l'ordre 1. Or en $x = x_e$, $\frac{dEp}{dx} = 0$ par définition de l'équation d'équilibre.



$$\text{Donc } \underbrace{\frac{dEp}{dx}}_{x \simeq x_e} \simeq \underbrace{\frac{dEp}{dx}}_{x = x_e} + \underbrace{\frac{d^2Ep}{dx}}_{x = x_e} \cdot \overbrace{(x - x_e)}^{\Delta x}$$

$$\underbrace{\frac{dEp}{dx}}_{x \to x_e} \simeq \underbrace{(\frac{(d^2Ep)}{dx^2})}_{x = x_e} \cdot \overbrace{(x - x_e)}^{\Delta x}$$

$$\underbrace{\frac{dEp}{dx}}_{x \to x_e} \cdot \Delta x \simeq \underbrace{(\frac{(d^2Ep)}{dx^2})}_{x = x_e} \cdot (\Delta x)^2$$

$$\underbrace{\frac{dEp}{dx}}_{x \to x_e} \cdot \Delta x > 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{d^2Ep}{dx^2}}_{x = x_e} > 0 \Rightarrow x_e \text{ est un minimum}$$

$$Em = Ep + \frac{1}{2}m \cdot v^2$$

$$Em \geq 0 \quad \frac{1}{2}m \cdot v^2 \geq 0 \Rightarrow Ep \geq 0$$

Dans un système conservatif donc, la position d'équilibre correspond à un minimum d'Ep

6.2 Système non conservatives

L'analyse est la même que dans les systèmes conservatifs, mais il y a un ammortissement dû aux pertes d'énergies (frottements).

Remarque Les forces de frottements solides peuvent entrainées des positions d'équilibres mais qui ne sont pas des positions d'équilibres stables.

V

Oscillations

1 Introduction

Un ressort, un circuit inductance/condensateur sont des système harmonique oscillateur.
Pour tous ses phénomènes :
— Ep est une variable admettant un minimum
— la force pour remettre Ep_{min} est linéaire
— L'énergie potentielle est quadratique autour de Ep_{min} (elle dépend du carré d'une variable).
On obtient dans ces conditions une équation différentielles du type

$$\ddot{x} + \omega x = 0$$

La période des oscillations est indépendantes de l'énergie et de l'amplitude du système.

1.1 Equation du mouvement d'un ressort

$$\begin{cases} -kx = m\ddot{x} \\ \ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0 \\ \ddot{x} + \omega^2 x = 0;\ \text{avec } \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{cases}$$

Période propre : $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ Fréquence propre : $\nu_0 = \dfrac{1}{T_0}$

1.2 Solution

$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Avec les conditions initiales, à $t = 0, x = x_0$ et $v = v_0$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

Il est plus facile de représenter $x(t) = X_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 \cdot X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{Pour } t_0 = 0, \quad x_0 = X_0 \cos(\varphi) \qquad (a)$$

$$v_0 = -\omega_0 X_0 \sin(\varphi) \qquad (b)$$

$$\frac{(b)}{(a)} \qquad \tan\varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_0}{X_0} &= \cos\varphi \\ \frac{v_0}{\omega_0 X_0} &= -\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{x_0^2}{X_0^2} + \frac{v_0^2}{\omega_0^2 X_0^2} &= 1 \\ X_0 &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \end{aligned}$$

1.3 Notation Complexe

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0; \text{ solution complexe } \tilde{x}(t) = \tilde{A} e^{i\omega_0 t}$$

$$\tilde{x}(t) = A e^{i\varphi} e^{i\omega_0 t}$$

Seul la partie réel a un sens physique réel. Cette notation sert à simplifier les calculs.

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A e^{i\varphi}(i\omega_0 e^{i\omega_0 t}) \ = \ (i\omega_0)\tilde{x}(t)$$

$$\ddot{\tilde{x}}(t) = A e^{i\varphi}(i\omega_0)^2 e^{i\omega_0 t} = (i\omega_0)^2 \tilde{x}(t)$$

$$\tilde{x}(t) = A e^{i(\omega_t + \varphi)}$$

$$Re(\tilde{x}) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

1.4 Aspects énergétique

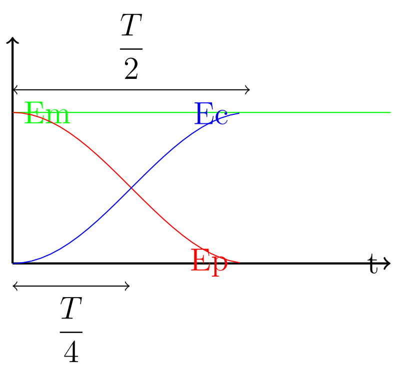
$$\begin{cases} F = -kx \\ \quad = -\dfrac{dEp}{dx} \end{cases} \Rightarrow Ep = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_0 t) \\ \dot{x} = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) \Rightarrow \text{ pour } v_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Ep(x) = & \quad \frac{1}{2}k(x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)) \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ = & \quad \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$Ec(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} Em = & \quad Ec + Ep \\ = & \quad \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 = constante \end{aligned}$$



$$\text{a } t = \frac{T}{4}, Ep \text{ se convertie en } Ec$$

2 Oscillateur forcé

Soit un oscillateur harmonique libre. On excite avec une force extérieur $F_{ext}(t) = F_{ext}\cos(\omega t)$
Le PFD :
— force de rappel$(-kx)$
— force extérieur $F_{ext}(t)$
L'équation différentielles du mouvement :

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_{ext}}{m}\cos(\omega t)$$

La solution de cette équation différentielles est de la forme

$$x(t) = x_p + x_h$$

On cherche les formes complexes de $x(t)$: $\tilde{x_p}$ et $\tilde{x_h}$

$$x(t) = Re(\tilde{x}(t))$$

2.1 Solution homogène

$$\ddot{x}_h + \omega_0^2 \cdot x_h = 0$$

$$x_h = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Vu au point 1.1 et 1.2.

2.2 Solution particulière

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_p &= \tilde{A}e^{i\omega t} && \tilde{A} = Ae^{i\varphi} \\
\dot{\tilde{x}}_p &= i\omega\tilde{x}_p && \\
\ddot{\tilde{x}}_p &= -\omega^2\tilde{x}_p && \\
-\omega^2\tilde{x}_p + \omega_0^2\tilde{x}_p &= \frac{F_{ext}}{m}e^{i\omega t} && \forall t \\
(-\omega^2 + \omega_0^2)\tilde{x}_p &= \frac{F_{ext}}{m}e^{i\omega t} && \\
(-\omega^2 + \omega_0^2)\tilde{A}e^{i\omega t} &= \frac{F_{ext}}{m}e^{i\omega t} && \\
\tilde{A} &= \frac{F_{ext}}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} && \\
\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow &\quad \tilde{A} = \frac{F_{ext}}{k} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} && \\
\text{Comme } \tilde{A} &= Ae^{i\varphi} && x = Ae^{i(\omega t + \varphi)} \\
Re &= \frac{F_{ext}}{k} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega t + \varphi) && \\
&= A\cos(\omega t + \varphi) && \\
A &= \frac{F_{ext}}{k} \cdot \frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} && \\
\cos(\omega t + \varphi) &= \cos(\omega t) && \varphi = 0, \omega < \omega_0 \\
& && \varphi = \pi, \omega > \omega_0
\end{aligned}$$

Solution générale :

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)+A\cos(\omega t+\varphi) \\ &= X_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)+A_{ext}(\frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2-\omega^2|})\cos(\omega t+\varphi) \text{ avec } A_{ext}=\frac{F_{ext}}{k} \end{aligned}$$

3 Oscillateur amorti

— Oscillateur Harmonique
— Force de frottement visqueux, $\lambda : \vec{f} = -\lambda\dot{x}\vec{i}$
L'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x}+\frac{\lambda}{m}\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

Choix de changement de variable :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$[\frac{\lambda}{m}]=T^{-1}$$

On définit $\frac{\lambda}{m}=\frac{2}{\tau}$

$$\ddot{x}+\frac{2}{\tau}\cdot\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

Oscillation harmonique ammortie
La solution générale est de la forme

$$x(t)=e^{-rt}$$

avec r quelconque !

$$\dot{x}=-rx$$

$$\ddot{x}=r^2x$$

$$r^2x-\frac{2}{\tau}rx+\omega_0^2x=0$$

$$r^2-\frac{2}{\tau}\cdot r+\omega_0^2=0$$

est l'équation caractéristique de l'équation différentielle.
Solution de l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} r_\pm &= \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}; \qquad \text{avec } a=1, b=-\frac{2}{\tau}, c=\omega_0^2 \\ &= \frac{1}{\tau}\pm\sqrt{\frac{1}{\tau^2}-\omega_0^2} \\ &= \frac{1}{\tau^2}\sqrt{1-\omega_0^2\tau^2} \end{aligned}$$

Selon les valeurs de $\frac{1}{\tau^2}$ et ω_0^2, on aura deux types de solutions.o

Cas $\omega_0\tau < 1$ (λ grands, frottement fort $r_\pm$ sont réelles :

$$x(t) = \qquad Ae^{-r_+\cdot t} + Be^{-r_-\cdot t} \qquad A, B \text{ sont à définir avec les conditions initiales}$$

$$= \frac{1}{r_+ - r_-}[-r_+x_0 + v_0)e^{-r_-\cdot t} - (r_- \cdot x_0 + v_0)e^{-r_+\cdot t}$$

Pour des temps longs :

$$r_\pm = \frac{1}{\tau}[1 \pm \sqrt{1 - \omega^2\tau^2}]$$

$e^{-r_+\cdot t} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$
Le comportement de x suis $e^{-r_-\cdot t}$

Cas $\omega_0\tau > 1$, frottement faible

$$r_\pm = \frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau}\omega_0^2} = \frac{1}{\tau^2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

On note $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{\tau}$
La solution générale est de la forme :

$$x(t) = Ce^{-r_+\cdot t} + De^{-r_-\cdot t}$$

$$= e^{-\frac{t}{\tau}}(Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega_1 t}$$

Pour que la solution soit réelle, $C = \overline{D}$ On note $C = \overline{D} = \frac{\tilde{k}}{2}$

$$\frac{\tilde{k}}{2} = \frac{K}{2}e^{i\varphi}$$

On remplace dans $x(t)$:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{K}{2}(e^{i(\omega_1 t+\varphi)} + e^{-i(\omega_1 t+\varphi)}$$

$$= K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}(\cos(\omega_1 t + \varphi))$$

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(a\cos(\omega_1 t) + b\sin(\omega_1 \cdot t))$$

ω_1 est une pseudo pulsation. $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}}$$

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}}}$$

On observe que $T_1 > T_0$

La variation d'amplitude sur une période : $x(t) \hookrightarrow x(t+T)$
$e^{-\frac{t}{\tau}}$. On définit :

$$\delta = -(\ln(e^{-\frac{T}{\tau}}))$$

$$= \frac{T}{\tau} \qquad \text{décrément}$$

3.1 Exercice

Calcules E_m de l'oscillateur harmonique amorti
Définir $Q = \dfrac{E_m(t)}{E_m(t+T)}$ (facteur de qualité)

3.2 Exercice

Oscillateur amorti force
PFD : frottements et force extérieur.
Calculer la solution de l'équation différentielle.

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

$$\tilde{x}_{particuliere} = \tilde{A}e^{i\omega t}$$

$$= Ae^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi}$$

$$A = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{2\omega}{\tau}}}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\frac{2\omega}{\tau}}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

4 Oscillateur amortie forcée

Soit un ressort de raideur k soumis aux forces extérieurs $\vec{F} = \vec{F_{ext}} \cdot \cos(\omega t)$ et aux frottements.

PFD :

$$m\vec{a} = (-kx - \lambda\dot{x} + F_{ext})\vec{i}$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\lambda}{m}}_{\frac{2}{\tau}}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x = \frac{F_{ext}}{m}\cos(\omega t)$$

4.1 Solution de l'équation différentielle

$$x(t) = x^H(t) + x^P(t)$$

$$x(t) = Re(\tilde{x}(t))$$

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{d\tilde{x}}{dt} + \omega_0^2\tilde{x} = \frac{F_{ext}}{m}e^{i\omega t} \qquad (e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$$

$$= \frac{F_{ext}}{k}\omega_0^2 e^{i\omega t}$$

$$= A_{ext}\omega_0^2 e^{i\omega t}$$

Solution particulière : $\tilde{x}^{(P)}(t) = \tilde{A}e^{i\omega t}$ $\qquad \tilde{A} = Ae^{i\varphi}$

$$\dot{\tilde{x}}^{(P)} = (i\omega)\tilde{A}e^{i\omega t} = (i\omega)\tilde{x}^{(P)}$$

$$\ddot{\tilde{x}}^{(P)} = (i\omega)^2\tilde{A}e^{i\omega t} = -\omega^2\tilde{x}^{(P)}$$

Et on remplace dans l'équation différentielle :

$$-\omega^2\tilde{x}^{(P)} + \frac{2}{\tau}(i\omega)\tilde{x}^{(P)} + \omega_0^2\tilde{x}^{(P)} = A_{ext}\omega_0^2 e^{i\omega t}$$

On replace $\tilde{x}^{(P)}$ par $\tilde{A}e^{i\omega t}$:

$$(-\omega^2 + \frac{2}{\tau}(i\omega) + \omega_0^2)\cdot\tilde{A}e^{i\omega t} = A_{ext}i\omega_0^2 e^{i\omega t}$$

$$\tilde{A} = \frac{A_{ext}\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{2}{\tau}(i\omega)}$$

$$\tilde{x}^{(P)} = \frac{\omega_0^2 A_{ext}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{2}{\tau}i\omega}e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$$

4.2 Solution réels

$$x^{(P)} = Re(\tilde{x}^{(P)}) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = |\tilde{A}| \qquad \varphi = arg(\tilde{A})$$

$$= \frac{A_{ext}\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{2}{\tau}\omega)^2}}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{2\omega\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Observation : À force constante, $A = \dfrac{A_{ext}}{\omega_0^2}$

$A \xrightarrow[\omega \to +\infty]{} 0$