

UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU



MODERNA DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA POVRŠI
NULTE SREDNJE KRIVINE
MASTER RAD

Mentor:
dr Ljubica Velimirović

Student:
Miloš Petrović

Niš, septembar 2013.

Sadržaj

Uvod	3
1 Osnovni pojmovi	5
1.1 Regularna površ u \mathbb{R}^n	5
1.2 Zakrivljenost površi u \mathbb{R}^3	11
1.3 Izotermalni parametri	14
2 Minimalne površi	17
2.1 Filmovi od sapunice	18
2.2 Normalna varijacija	19
2.3 Neki primeri minimalnih površi	21
2.3.1 Helikoid	21
2.3.2 Katenoid	25
2.3.3 Šerkova minimalna površ	29
2.3.4 Šerkova peta minimalna površ	32
2.3.5 Katalanova minimalna površ	33
2.3.6 Henebergova površ	35
2.3.7 Eneperova minimalna površ	37
3 Minimalne površi sa stanovišta kompleksne analize	39
3.1 Izometrijske deformacije minimalnih površi	41
3.2 Minimalna kriva	46
3.3 Nalaženje konjugovanih minimalnih površi i pridružene familije	49
3.4 Eneperova površ stepena n	54
3.5 Borova minimalna površ	56
3.6 Vajerštrasova reprezentacija	57
3.7 Ričmondova minimalna površ	61
3.8 Trinoid	64
4 Bjorlingova formula	65
4.1 Konstrukcija minimalnih površi	66
4.1.1 Minimalna površ koja sadrži parabolu kao geodezijsku liniju	69

4.1.2	Minimalna površ koja sadrži astroidu kao geodezijsku liniju	70
4.1.3	Minimalna površ koja sadrži lemniskatu kao geodezijsku liniju	71
4.1.4	Minimalna površ koja ima involutu hipocikloide za geodezijsku liniju	73
Zaključak		75
Literatura		76
Biografija		77

Uvod

Pojam srednje krivine je uvela Sofi Žermen¹, srednja krivina predstavlja spoljašnju meru zakrivljenosti površi i direktno zavisi od načina na koji je površ smeštena u realan Euklidov prostor. Regularne površi kod kojih je srednja krivina jednaka nuli u svakoj tački nazivaju se minimalne površi. Teorija minimalnih površi počinje Ojlerovim² radom 1744. i Lagranžovim³ radom 1760. godine. Ojler je pokazao da je katenoid minimalna površ, a Lagranž je izveo diferencijalnu jednačinu koju površ čija je jednačina oblika $z = f(x, y)$ mora da ispunjava da bi se smatrala minimalnom.

Prva glava sadrži neke osnovne pojmove diferencijalne geometrije koji su neophodni za dalje izlaganje.

Minimalne površi se najčešće povezuju sa filmom (opnom) od sapunice, belgijski fizičar Plato⁴ je sredinom XIX veka vršio eksperimente sa filmovima od sapunice i formulisao tzv. Platoov problem, gruba interpretacija ovog problema je prikazana u drugoj glavi. Uveli smo pojam normalne varijacije, i naveli neke klasične primere minimalnih površi. Ono što je još karakteristično u drugoj glavi jeste pojam savijanja površi i familija površi koja predstavlja deformaciju helikoida u katenoid.

Treća glava koristi kompleksnu analizu kao moćan aparat u teoriji minimalnih površi, harmonijske funkcije su svakako jedne od najvažnijih jer njihovim jednostavnim uopštenjem definišemo harmonijske površi koje kada se parametrizuju izotermalnim parametrima postaju minimalne. U trećoj glavi akcenat je na izometrijskim deformacijama minimalnih površi, uveden je pojam minimalne krive koja je zapravo uopštenje minimalne izotermalne površi, zatim pojam pridružene familije čime je izvršena generalizacija već pomenute deformacije helikoida u katenoid, navedeni su primeri minimalnih krivih i pridruženih familija za neke konkretne površi. Za jedan od najjačih rezultata u

¹Marie-Sophie Germain (1776-1831), francuska matematičarka.

²Leonard Euler (1707-1783), švajcarski matematičar.

³Joseph Luis Lagrange (1736-1813), francuski matematičar.

⁴Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883), belgijski fizičar.

teoriji minimalnih površi zaslužan je Vajerštras⁵. U XIX veku, vremenu kada se teško dolazilo do novih primera minimalnih površi Vajerštras je dao formulu koja omogućava lako generisanje novih minimalnih površi, pošto u radu uglavnom sve radimo lokalno, na nekom otvorenom skupu, navedena je samo lokalna Vajerštrasova reprezentacija, njena implementacija u programskom paketu *Mathematica* je ilustrovana konkretnim primerima.

Četvrta glava je posvećena Bjorlingovom⁶ problemu, posebno je razmatran specijalan slučaj Bjorlingovog problema konstrukcija minimalne površi koja za geodezijsku liniju ima unapred zadatu ravnu krivu, i ova konstrukcija je izvršena uz korišćenje programskog paketa *Mathematica*. Sve slike i izračunavanja su rađena u programskom paketu *Mathematica* 6.0.

Zahvaljujem se dr Ljubici Velimirović na korisnim sugestijama, dr Milanu Zlatanoviću koji je uticao na moje opredeljenje da se bavim diferencijalnom geometrijom. Želim da se zahvalim i kolegi sa Departmana za računarske nauke Stefanu Stanimiroviću na pomoći oko raznih tehničkih detalja.

⁵Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), nemački matematičar

⁶Emanuel Gabriel Björling (1808-1872), švedski matematičar.

1. Osnovni pojmovi

U ovoj glavi ćemo navesti neke osnovne pojmove diferencijalne geometrije, za potpuno razumevanje izložene materije neophodno je poznavanje analize realnih funkcija više promenljivih.

U prvom odeljku daćemo najpre lokalnu, a zatim i globalnu definiciju površi, pošto ćemo u radu uglavnom sve raditi lokalno, u ogromnom broju slučajeva ćemo koristiti lokalnu definiciju površi. Definisaćemo regularnu površ i definisaćemo funkciju *area* na površi, koja će meriti njenu površinu.

U drugom odeljku „merimo“ kako se regularna površ u \mathbb{R}^3 savija, definišemo krivine na površi i navodimo *Mathematica* komande za izračunavanje koeficijenata osnovnih kvadratnih formi kao i za izračunavanje krivina površi.

U trećem odeljku uvodimo izotermalne parametre.

1.1 Regularna površ u \mathbb{R}^n

Definicija 1.1.1. *Parametrizovana površ u \mathbb{R}^n je diferencijabilno preslikavanje*

$$x = (x_1, \dots, x_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

gde je $D \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup. $x(D)$ nazivamo trag, slika od x .

Napomenimo da se parametrizovana površ može definisati i na proizvoljnom skupu $A \subset \mathbb{R}^2$, u tom slučaju za preslikavanje $x : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ kažemo da je parametrizovana površ ako se može proširiti do diferencijabilnog preslikavanja iz otvorenog skupa D u \mathbb{R}^n , $x(A)$ nazivamo trag, slika od x .

Definicija 1.1.2. *Parametrizovana površ je klase $C^{(k)}$ ako je preslikavanje x klase $C^{(k)}$, gde je k prirodan broj koji se naziva stepen glatkosti parametrizovane površi.*

U nastavku ćemo uvek podrazumevati da je k dovoljno veliki prirodan broj kakav odgovarajuće razmatranje zahteva.

Neka je J Jakobijeva¹ matrica preslikavanja $x(u, v)$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u} & \frac{\partial x_n}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{bmatrix}$$

gde je $\frac{\partial x}{\partial u} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u}\right)$ i $\frac{\partial x}{\partial v} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial v}\right)$. Uvedimo Gramovu² matricu

$$G = J^T J$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial u} & \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial v} \frac{\partial x_k}{\partial u} & \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial v} \frac{\partial x_k}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Koeficijenti g_{ij} $i, j = 1, 2$ su koeficijenti prve kvadratne forme površi, koristimo i oznake

$$E = g_{11}, F = g_{12} = g_{21}, G = g_{22}.$$

Lema 1.1.1. Za vektore $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ važi jednakost Lagranža:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Na osnovu jednakosti Lagranža imamo

$$\det G = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \right|^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)} \right)^2.$$

Lema 1.1.2. Neka je D otvoren skup u \mathbb{R}^2 i $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencijabilno preslikavanje. U svakoj tački skupa D , SUE:

1. $\exists i, j \ 1 \leq i < j \leq n \therefore \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)} \neq 0$;
2. vektori $\frac{\partial x}{\partial u}$ i $\frac{\partial x}{\partial v}$ su linearno nezavisni;
3. Jakobijeva matrica J je ranga 2;

¹Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), nemački matematičar.

²Jörgen Pedersen Gramm (1850-1916), danski matematičar.

$$4. \frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \neq 0;$$

$$5. \det G > 0.$$

Definicija 1.1.3. *Parametrizovana površ S je regularna u tački ako je u toj tački ispunjen bilo koji od uslova prethodne leme. Parametrizovana površ S je regularna na skupu D ako je regularna u svakoj tački skupa D .*

Definicija 1.1.4. *Neka su A i B otvoreni skupovi u \mathbb{R}^2 , za bijektivno preslikavanje $f : A \rightarrow B$ kažemo da je homeomorfizam ako su f i f^{-1} neprekidna preslikavanja.*

Definicija 1.1.5. *Skup tačaka S iz \mathbb{R}^n nazivamo površ u \mathbb{R}^n ako za svaku tačku $P \in S$ postoji okolina V tačke P u \mathbb{R}^n i preslikavanje $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ otvorenog skupa D iz \mathbb{R}^2 „na“ skup $V \cap S$ koje ispunjava sledeće uslove:*

1. x je diferencijabilno preslikavanje,
2. $x : D \rightarrow V \cap S$ je homeomorfizam,
ako je još ispunjen i uslov
3. $x : D \rightarrow S$ je regularna parametrizovana površ,

onda za S kažemo da je regularna površ. Za parametrizovanu površ $x : D \rightarrow S$ kažemo da je lokalna parametrizacija površi S .

U nastavku ćemo koristiti termin površ podrazumevajući da se radi o parametrizovanoj površi, osim ako se ne naglasi drugačije, ako se iz konteksta može zaključiti o kakvim površima se radi onda čak nećemo ništa ni naglašavati. Dakle na dalje sve radimo lokalno, na nekom otvorenom skupu.

Definicija 1.1.6. *Neka je D otvoren skup u \mathbb{R}^2 i $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencijabilno preslikavanje. Za proizvoljnu tačku $p \in D$ i vektor $w \in \mathbb{R}^2$ neka je $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow D$ diferencijabilna kriva takva da je $\alpha(0) = p$, i $\alpha'(0) = w$. Neka je $\beta := f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, definišemo*

$$df_p(w) := \beta'(0).$$

Linearno preslikavanje $df_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazivamo diferencijal preslikavanja f u tački p .

Diferencijabilnost krive β iz prethodne definicije ćemo opravdati narednom teoremom (Teorema 1.1.1), dok činjenicu da definicija ne zavisi od izbora krive α treba pokazati, zbog jednostavnosti uradićemo to samo za slučaj $n = 3$ t.j. za $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$. Neka su (u, v) koordinate u \mathbb{R}^2 i $a_1 =$

$(1, 0)$, $a_2 = (0, 1)$ standardna baza u \mathbb{R}^2 , (x, y, z) koordinate u \mathbb{R}^3 $b_1 = (1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 1, 0)$, $b_3 = (0, 0, 1)$ standardna baza u \mathbb{R}^3 . Možemo pisati $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ i $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, tada je

$$w = \alpha'(0) = u'(0)a_1 + v'(0)a_2,$$

i

$$\beta(t) = (f \circ \alpha)(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

Koristeći teoremu o izvodu složene funkcije, pri čemu izvode uzimamo za $t = 0$, dobijamo

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) b_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) b_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) b_3 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = df_p(w). \end{aligned}$$

Vidimo da u matrici linearnog preslikavanja df_p u odnosu na standardne baze prostora \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 figurišu samo parcijalni izvodi koordinatnih funkcija x, y, z preslikavanja f , tako da definicija preslikavanja df_p ne zavisi od izbora krive α .

Teorema 1.1.1. *Neka su A i B otvoreni skupovi u \mathbb{R}^2 . Ako je preslikavanje $f : A \rightarrow B$ diferencijabilno u tački $a \in A$, a preslikavanje $g : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencijabilno u tački $b = f(a)$, tada je preslikavanje $h = g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencijabilno u tački $a \in A$ i važi*

$$dh_a = d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a,$$

odnosno

$$h'(a) = (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Definicija 1.1.7. *Neka su A i B otvoreni skupovi u \mathbb{R}^2 , za homeomorfizam $f : A \rightarrow B$ kažemo da je difeomorfizam ako su f i f^{-1} diferencijabilna preslikavanja. Za difeomorfizam f kažemo da je klase $C^{(r)}$ ako su preslikavanja f i f^{-1} klase $C^{(r)}$.*

Neka su A i B otvoreni skupovi u \mathbb{R}^2 i $f : A \rightarrow B$ difeomorfizam. Kako je $i_A = f^{-1} \circ f$, to je na osnovu Teoreme 1.1.1.

$$i'_A = (f^{-1} \circ f)' = (f^{-1})' \cdot f',$$

pa je

$$\det(f^{-1})' \cdot \det f' = 1,$$

odakle sledi da je jakobijan kako preslikavanja f , tako i preslikavanja f^{-1} različit od nule.

Neka je data površ $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, gde je $x \in C^{(r)}(D)$ i neka je dat difeomorfizam $\lambda : \tilde{D} \rightarrow D$ klase $C^{(r)}$. Nakon izvršene reparametrizacije površi S difeomorfizmom λ , dobijamo površ $\tilde{S} : x = x(\lambda(\tilde{u}, \tilde{v}))$, $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{D}$.

Za osobinu površi koja se ne menja pri promeni parametara kažemo da ne zavisi od izbora parametrizacije.

Neka je Jakobijeva matrica transformacije

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$$

matrica

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{bmatrix},$$

iz činjenice da je $(\tilde{u}, \tilde{v}) \rightarrow (u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))$ difeomorfizam sledi da je $\det U \neq 0$ u oblasti \tilde{D} . Kako je

$$\frac{\partial x_i}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \text{ i } \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{v}} = \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \text{ za } i = 1, 2, \dots, n,$$

to je $\tilde{J} = JU$, pa je

$$\tilde{G} = \tilde{J}^\top \tilde{J} = (JU)^\top JU = U^\top J^\top JU = U^\top GU$$

i

$$\det \tilde{G} = \det G (\det U)^2, \quad (1.1.1)$$

kao neposrednu posledicu ove jednačine imamo da osobina regularnosti površi u tački ne zavisi od izbora parametrizacije.

Pretpostavimo sada da je Δ poddomen od D , takav da je $\bar{\Delta} \subset D$. Označimo sa Σ restrikciju površi $x(u, v)$ na poddomen Δ , definisaćemo funkciju *area*, označavaćemo je sa A , na sledeći način

$$A(\Sigma) = \int \int_{\Delta} \sqrt{\det G} du dv.$$

Ako izvršimo smenu parametara sa

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$$

i označimo sa $\tilde{\Sigma}$ površ dobijenu nakon smene parametara, funkcija *area* na toj površi imaće sledeću vrednost

$$\begin{aligned} A(\tilde{\Sigma}) &= \int \int_{\tilde{\Delta}} \sqrt{\det \tilde{G}} d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_2 = \int \int_{\tilde{\Delta}} \sqrt{\det G} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)} \right| d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_2 \\ &= \int \int_{\Delta} \sqrt{\det G} du dv = A(\Sigma), \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili (1.1.1) i pravilo smene promenljivih u dvostrukom integralu. Vidimo da vrednost funkcije *area* ne zavisi od izbora parametrizacije.

Za površ u \mathbb{R}^n zadatu jednačinama

$$x_k = f_k(x_i, x_j) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad k \neq i, j \quad (x_i, x_j) \in D$$

kažemo da je zadata eksplicitno ili neparametarski, za slučaj $n = 3$ imamo samo jednu jednačinu $z = f(x, y)$. Možemo x_i i x_j uzeti za parametre, tako prelazimo na parametarski oblik

$$x_i = u, \quad x_j = v, \quad x_k = f_k(u, v) \quad k \neq i, j,$$

tada je

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f_3}{\partial u}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial f_3}{\partial v}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}\right).$$

Primetimo da su vektori $\frac{\partial x}{\partial u}$ i $\frac{\partial x}{\partial v}$ linearno nezavisni, tako da je svaka površ zadata neparametarski automatski regularna.

Lema 1.1.3. *Neka je data površ S parametrizacijom $x = x(u, v)$, $(u, v) \in D$ i neka je $(u_0, v_0) \in D$ tačka u kojoj je površ S regularna, onda postoji okolina Δ tačke a , takva da površ Σ dobijena kao restrikcija $x(u, v)$ na Δ ima reparametrizaciju u neparametarskom obliku.*

Tako da, kada posmatramo površ lokalno, a mi to do sada sve vreme radimo, možemo pretpostaviti da je površ zadata u neparametarskom obliku.

Pod krivom u \mathbb{R}^n podrazumevaćemo neprekidno diferencijabilno preslikavanje

$$\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

gde je $[\alpha, \beta]$ interval realne prave.

Tangentni vektor krive

$$\varphi' = \varphi'(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

u tački t_0 je vektor

$$\varphi'(t_0) = (\varphi'_1(t_0), \varphi'_2(t_0), \dots, \varphi'_n(t_0)).$$

Kriva φ je regularna u tački t_0 ako je $\varphi'(t_0) \neq 0$. Za tangentni vektor krive φ imamo formulu

$$\varphi'(t_0) = u'_1(t_0) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + u'_2(t_0) \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

gde su $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ izračunati u tački $u = a$.

Lema 1.1.4. *Ako u regularnoj tački površi S posmatramo sve krive koje leže na površi S i prolaze kroz tu tačku, onda skup njihovih tangentnih vektora čini dvodimenzionalan vektorski prostor.*

Definicija 1.1.8. *Vektorski prostor opisan u prethodnoj lemi nazivamo tangentnim prostorom površi S u tački $P \in S$ i označavamo sa $T_P S$.*

Površ S u svakoj svojoj regularnoj tački ima tangentnu ravan koja na osnovu same njene definicije ne zavisi od izbora parametrizacije.

1.2 Zakrivljenost površi u \mathbb{R}^3

Želimo da „merimo“ kako se regularna površ u \mathbb{R}^3 savija. Dobar način da to ocenimo je da posmatramo kako se normala površi menja od tačke do tačke. Kod ravne površi normala je ista u svakoj tački. Za površ koja nije ravna, normala U te površi se menja od tačke do tačke, intuitivno je jasno da što se normala U brže menja to je površ više zakrivljena.

Definicija 1.2.1. *Neka je data lokalna parametrizacija $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularne površi S . Diferencijabilno preslikavanje $U : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ koje svakoj tački $P = x(u, v) \in S$ pridružuje jediničnu normalu*

$$U(P) := \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}(u, v)$$

naziva se Gausovo preslikavanje.

Primetimo da su vrednosti preslikavanja U na jediničnoj sferi

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Diferencijal preslikavanja U u tački $P \in S$ je linearno preslikavanje

$$dU_P : T_P S \rightarrow T_{U(P)} S^2.$$

Pošto su ravni $T_P S$ i $T_{U(P)} S^2$ paralelne možemo dU_P posmatrati kao preslikavanje $dU_P : T_P S \rightarrow T_P S$.

Definicija 1.2.2. *Prva kvadratna forma površi S u tački $P \in S$ definiše se kao kvadratna forma $I_P : T_P S \rightarrow \mathbb{R}$ data sa*

$$I_P(w) = w \cdot w, w \in T_P S.$$

Definicija 1.2.3. *Druga kvadratna forma površi S u tački $P \in S$ definiše se kao kvadratna forma $II_P : T_P S \rightarrow T_P S$ data sa*

$$II_P(w) = -dU_P(w) \cdot w, w \in T_P S.$$

Normalna krivina površi S u pravcu vektora $w \in T_P S$ je data sa

$$k(w) = \frac{II_P(w)}{I_P(w)}.$$

Maksimalnu i minimalnu vrednost normalne krivine površi S u tački P označavamo sa k_1 i k_2 i nazivamo glavnim krivinama površi S u tački P . Normalna krivina je potpuno određena glavnim krivinama, ovo tvrđenje je poznato kao Ojlerova formula.

Neka je $P \in S$ i $dU_P : T_P S \rightarrow T_P S$ diferencijal Gausovog preslikavanja, dU_P je simetričan linearan operator određen matricom

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}.$$

Gausova krivina površi S u tački P se definiše kao determinanta ove matrice

$$K = \det A = k_1 \cdot k_2,$$

dok se srednja krivina definiše na sledeći način

$$H = -\frac{1}{2} \text{tr} A = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Glavne krivine su kao rešenja kvadratne jednačine

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

date sa

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}. \quad (1.2.2)$$

Gausova i srednja krivina se mogu izraziti preko koeficijenata prve i druge kvadratne forme površi

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (1.2.3)$$

i

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}. \quad (1.2.4)$$

Gausova krivina se može izraziti samo preko koeficijenata prve kvadratne forme, ovo tvrđenje je Gaus nazvao Theorema Egregium-„Veličanstvena teorema“.

Teorema 1.2.1. *Gausova krivina površi je objekat unutrašnje geometrije površi i izražava se*

$$K = \frac{1}{4(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right).$$

U narednoj posledici navodimo formulu za Gausovu krivinu površi kod koje je koeficijent $F = 0$.

Posledica 1.2.1. *Neka je $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ površ kod koje je $F = 0$, tada je Gausova krivina površi x data sa*

$$K = \frac{-1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right). \quad (1.2.5)$$

Definišimo u programskom paketu *Mathematica* komande za izračunavanje koeficijenata prve kvadratne forme E , F , G tim redom sa

```
ee[x_][u_,v_] := Simplify[D[x[uu,vv],uu].D[x[uu,vv],uu]]/.
{uu->u,vv->v}
ff[x_][u_,v_] := Simplify[D[x[uu,vv],uu].D[x[uu,vv],vv]]/.
{uu->u,vv->v}
gg[x_][u_,v_] := Simplify[D[x[uu,vv],vv].D[x[uu,vv],vv]]/.
{uu->u,vv->v}
```

definišimo i komande za koeficijente druge kvadratne forme L , M i N

```
eee[x_][u_,v_] := Simplify[Det[{
  D[x[uu,vv],uu,uu],D[x[uu,vv],uu],D[x[uu,vv],vv]}]/
  Sqrt[
    Simplify[D[x[uu,vv],uu].D[x[uu,vv],uu]*
      D[x[uu,vv],vv].D[x[uu,vv],vv] -
      (D[x[uu,vv],uu].D[x[uu,vv],vv])^2]]]/. {uu->u,vv->v}
```

```

fff[x_][u_,v_] := Simplify[Det[{
  D[x[uu,vv],uu,vv], D[x[uu,vv],uu], D[x[uu,vv],vv]}] /
  Sqrt[
    Simplify[D[x[uu,vv],uu].D[x[uu,vv],uu]*
      D[x[uu,vv],vv].D[x[uu,vv],vv] -
      (D[x[uu,vv],uu].D[x[uu,vv],vv])^2]] /. {uu->u,vv->v}
ggg[x_][u_,v_] := Simplify[Det[{
  D[x[uu,vv],vv,vv], D[x[uu,vv],uu], D[x[uu,vv],vv]}] /
  Sqrt[
    Simplify[D[x[uu,vv],uu].D[x[uu,vv],uu]*
      D[x[uu,vv],vv].D[x[uu,vv],vv] -
      (D[x[uu,vv],uu].D[x[uu,vv],vv])^2]] /. {uu->u,vv->v}

```

Na osnovu formula za Gausovu i srednju krivinu (1.2.3) i (1.2.4) možemo definisati komande za Gausovu i srednju krivinu

```

gaussiancurvature[x_][u_,v_] := Simplify[
  (eee[x][uu,vv]*ggg[x][uu,vv]-fff[x][uu,vv]^2)/
  (ee[x][uu,vv]*gg[x][uu,vv]-
    ff[x][uu,vv]^2)] /. {uu->u,vv->v}
meancurvature[x_][u_,v_] := Simplify[
  (eee[x][uu,vv]*gg[x][uu,vv]-
    2*fff[x][uu,vv]*ff[x][uu,vv]+
    ggg[x][uu,vv]*ee[x][uu,vv])/
  (2*(ee[x][uu,vv]*gg[x][uu,vv]-
    ff[x][uu,vv]^2)))] /. {uu->u,vv->v}

```

Sada kada znamo komande za Gausovu i srednju krivinu `gaussiancurvature` i `meancurvature` na osnovu formula (1.2.2) možemo definisati komande za glavne krivine

```

k1[x_][u_,v_] := meancurvature[x][u,v] +
  Sqrt[Simplify[meancurvature[x][u,v]^2-gaussiancurvature[x][u,v]]]
k2[x_][u_,v_] := meancurvature[x][u,v] -
  Sqrt[Simplify[meancurvature[x][u,v]^2-gaussiancurvature[x][u,v]]]

```

1.3 Izotermalni parametri

Kada proučavamo osobine površi koje ne zavise od izbora parametризacije pogodno je izabrati parametre tako da se geometrijske osobine površi reflektuju na dvodimenzionalnu oblast parametara. Ako je preslikavanje koje preslikava dvodimenzionalnu oblast parametara na površ konformno, onda će

uglovi između krivih na površi biti jednaki uglovima između odgovarajućih krivih u parametarskoj ravni. Ovaj uslov je analitički izražen preko koeficijenata prve kvadratne forme i glasi

$$g_{11} = g_{22}, \quad g_{12} = 0, \quad (1.3.6)$$

koristeći Kronekerov³ simbol ovaj uslov možemo zapisati i kao

$$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}, \quad \lambda = \lambda(u, v) > 0, \quad (1.3.7)$$

gde je λ diferencijabilna funkcija koju nazivamo funkcijom skaliranja.

Parametri u i v koji zadovoljavaju (1.3.6) odnosno (1.3.7) nazivaju se izotermalni parametri. Naziv izotermalni je uveo Lamé⁴ 1833. godine.

Definicija 1.3.1. *Neka je D otvoren skup u \mathbb{R}^2 , površ $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ se naziva izotermalna ako se može parametrizovati izotermalnim parametrima.*

U izotermalnim parametrima mnoge formule se pojednostavljaju, na primer $\det(g_{ij}) = \lambda^4$.

Teorema 1.3.1. *Gausova krivina izotermalne površi $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ kojoj odgovara funkcija skaliranja λ data je sa*

$$K = \frac{-\Delta \log \lambda}{\lambda^2}, \quad (1.3.8)$$

gde je $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 u} + \frac{\partial^2}{\partial^2 v}$.

Dokaz. Formula (1.3.8) je specijalan slučaj formule (1.2.5).

$$\begin{aligned} K &= \frac{-1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) \right) \\ &= \frac{-1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} \log \lambda + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \log \lambda \right) \\ &= \frac{-\Delta \log \lambda}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

□

Lema 1.3.1. *Neka je $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularna izotermalna površ sa funkcijom skaliranja λ , tada je srednja krivina površi x data sa*

$$H = \frac{L + N}{2\lambda^2}, \quad (1.3.9)$$

i važi

$$x_{uu} + x_{vv} = 2\lambda^2 HU, \quad (1.3.10)$$

gde je $U = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$ jedinična normala.

³Leopold Kronecker (1823-1891), nemački matematičar.

⁴Gabriel Lamé (1795-1870), francuski inženjer, fizičar i matematičar.

Dokaz. Pošto je x izotermalna površ važe jednačine

$$x_u \cdot x_u = x_v \cdot x_v, \quad x_u \cdot x_v = 0,$$

čijim diferenciranjem po u, v redom dobijamo

$$x_{uu} \cdot x_u = x_{vu} \cdot x_v \text{ i } x_u \cdot x_{vv} = -x_{uv} \cdot x_v.$$

Odakle dobijamo da je $(x_{uu} + x_{vv}) \cdot x_u = (x_{vu} - x_{uv}) \cdot x_v = 0$, slično se dobija da je $(x_{uu} + x_{vv}) \cdot x_v = 0$. Dakle vektor $x_{uu} + x_{vv}$ je kolinearan sa jediničnom normalom U .

Iskoristimo sada formulu za srednju krivinu (1.2.4) i činjenicu da je x izotermalna t.j. da važi $E = G, F = 0$ i $EG - F^2 = \lambda^4$, dobijamo

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} = \frac{L + N}{2\lambda^2} = \frac{x_{uu} + x_{vv}}{2\lambda^2},$$

odakle dobijamo formule (1.3.9) i (1.3.10). □

2. Minimalne površi

Lagranž je razmatrao problem nalaženja površi $z = z(x, y)$ najmanje površine koja se proteže preko date zatvorene konture, on je izveo diferencijalnu jednačinu koju površ treba da ispunjava da bi se smatrala minimalnom, to je jednačina

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) = 0,$$

međutim osim ravni nije uspeo da pronađe nijednu drugu površ koja zadovoljava ovu jednačinu.

Lagranžova jednačina u razvijenom obliku izgleda

$$(1 + z_x^2)z_{yy} - 2z_x z_y z_{xy} + (1 + z_y^2)z_{xx} = 0.$$

Postoji nekoliko definicija minimalnih površi sa stanovišta raznih matematičkih disciplina. Mi ćemo koristiti sledeću Lagranžovu definiciju.

Definicija 2.0.1. *Regularna površ $S \subset \mathbb{R}^3$ se naziva minimalna površ ako je njena srednja krivina jednaka nuli u svakoj tački.*

Šta možemo zaključiti o površi čija je srednja krivina jednaka nuli u svakoj tački?

Najpre takva površ ne može biti kompaktna, jer svaka kompaktna površ sadrži tačku u kojoj je Gausova krivina strogo pozitivna, to znači da su u toj tački glavne krivine k_1 i k_2 istog znaka, pa njihova aritmetička sredina nikako ne može biti jednaka nuli.

Definicija 2.0.2. *Neka je S regularna površ u \mathbb{R}^3 , $P \in S$, k_1 i k_2 glavne krivine površi S u tački P . Tačka P je:*

- *sedlasta ako je $k_1 = -k_2$,*
- *sferna ili ombilička ako je $k_1 = k_2$,*
- *planarna ako je $k_1 = k_2 = 0$.*

U svakoj tački površi nulte srednje krivine za glavne krivine važi $k_1 = -k_2$, što znači da je svaka tačka takve površi sedlasta, njene jedine ombiličke tačke su planarne tačke.

Gausovo preslikavanje minimalne površi ima neke „lepe“ koje su date narednim teoremama.

Teorema 2.0.1. *Gausovo preslikavanje minimalne površi je konformno.*

Teorema 2.0.2 (Osserman). *Neka je $S \subset \mathbb{R}^3$ regularna, zatvorena minimalna površ u \mathbb{R}^3 koja nije ravna, tada je slika Gausovog preslikavanja $N : S \rightarrow S^2$ gusta na sferi.*

Više o osobinama minimalnih površi može se naći u [7].

2.1 Filmovi od sapunice

Mnoge pojave u prirodi imaju matematičku interpretaciju, minimalne površi su jedan od mnogih primera da je zaista tako. Obično se minimalne površi povezuju sa filmom (opnom) od sapunice, koji nam može poslužiti za fizičku konstrukciju minimalnih površi. Film od sapunice se može dobiti potapanjem žičanog rama u rastvor od sapunice i pažljivim izvlačenjem. Opna od sapunice sadrži dva sloja molekula sapunice razdvojenih tankim slojem fluida (tečnosti) koji je najdeblji neposredno nakon formiranja opne, a zatim počinje da slabi. Suvišna voda se drenira i debljina opne se smanjuje sve do tzv. ravnotežnog položaja, tada je površ podjednako zategnuta u svim tačkama i baš tada se postiže da formirana površ zauzima najmanju oblast t.j. ima najmanju površinu. Skrenimo pažnju da nisu sve opne od sapunice minimalne površi u smislu navedene definicije.

Veza između opni od sapunice i minimalnih površi je poslužila kao motivacija za formulisanje Platoovog problema, koji se grubo može opisati na sledeći način: *dokazati da za svaku zatvorenu krivu $C \subset \mathbb{R}^3$ postoji površ S minimalne površine čija je C granica.*

U zavisnosti od toga kakve krive i površi su dozvoljene za korišćenje i šta se podrazumeva pod granicom površi dobijamo razne verzije Platoovog problema. Neke verzije Platoovog problema su 1930. godine rešili Daglas¹ i Rado². Daglas je problem rešio koristeći potpuno novu ideju i za taj svoj trud je 1936. godine odlikovan Fildsovom medaljom.

¹Jesse Douglas (1897-1965), američki matematičar.

²Tibor Radó (1895-1965), mađarski matematičar.

2.2 Normalna varijacija

Definisali smo minimalnu površ kao površ čija je srednja krivina jednaka nuli u svakoj tački, kako bismo bar malo opravdali korišćenje reči „minimalna“ uvodimo pojam normalne varijacije. Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ i $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna parametrizovana površ. Posmatrajmo ograničen poddomen $\Delta \subset D$ i diferencijabilnu funkciju $h : \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^3$, gde je $\bar{\Delta} = \Delta \cup \partial\Delta$. Označimo sa U jediničnu normalu površi x . Normalna varijacija za $x(\bar{\Delta})$ određena sa h je preslikavanje

$$\varphi : \bar{\Delta} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definisano sa

$$\varphi(u, v, t) := x(u, v) + th(u, v)U(u, v), \quad (u, v) \in \bar{\Delta}, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Za svako fiksirano $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ preslikavanje $x[t] : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisano sa $x[t](u, v) := \varphi(u, v, t)$ je parametrizovana površ, parcijalni izvodi ove površi su dati sa

$$\begin{aligned} x[t]_u &= x_u + th_u U + thU_u, \\ x[t]_v &= x_v + th_v U + thU_v. \end{aligned}$$

Ako označimo sa $E(t)$, $F(t)$ i $G(t)$ koeficijente prve kvadratne forme površi $x[t]$, nakon lake računice dobijamo da je

$$\begin{aligned} E(t) &= E + th(x_u U_u + x_u U_u) + t^2 h^2 U_u U_u + t^2 h_u h_u, \\ F(t) &= F + th(x_u U_v + x_v U_u) + t^2 h^2 U_u U_v + t^2 h_u h_v, \\ G(t) &= G + th(x_v U_v + x_v U_v) + t^2 h^2 U_v U_v + t^2 h_v h_v. \end{aligned}$$

Diferenciranjem jednačina

$$x_u \cdot U = 0 \quad \text{i} \quad x_v \cdot U = 0,$$

po u i v dobijamo da je

$$x_u U_u = -L, \quad x_u U_v + x_v U_u = -2M, \quad x_v U_v = -N,$$

na osnovu čega, nakon lake računice dobijamo da je

$$E(t)G(t) - F(t)^2 = EG - F^2 - 2th(EN - 2FM + GL) + R, \quad (2.2.1)$$

gde je R ostatak za koji važi $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0$, iskoristimo sada obrazac za srednju krivinu

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

t.j. činjenicu da je

$$(EN - 2FM + GL) = 2H(EG - F^2),$$

zamenom u (2.2.1) dobijamo da je

$$E(t)G(t) - F(t)^2 = (EG - F^2)(1 - 4thH) + R,$$

gde je $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0$. Odavde sledi da će za dovoljno malo ϵ , pošto $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, izraz

$$E(t)G(t) - F(t)^2$$

biti predstavljen izrazom

$$EG - F^2,$$

stoga će za dovoljno malo ϵ , $x[t]$ biti regularna parametrizovana površ. Štaviše, funkcija *area* za $x[t](\bar{\Delta})$ je

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\bar{\Delta}} \sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2} dudv \\ &= \int_{\bar{\Delta}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} \sqrt{EG - F^2} dudv, \end{aligned}$$

gde je $\bar{R} = \frac{R}{EG - F^2}$. Odavde sledi da ako je ϵ dovoljno malo, A je diferencijabilna funkcija i njen izvod u tački $t = 0$ je

$$A'(0) = \int_{\bar{\Delta}} (-2hH) \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (2.2.2)$$

Teorema 2.2.1. *Regularna parametrizovana površ $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ je minimalna akko je $A'(0) = 0$ za svaki ograničen poddomen $\Delta \subset D$ i svaku normalnu varijaciju od $x(\bar{\Delta})$.*

Dokaz. Neka je $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna parametrizovana površ.

(\Rightarrow) : Pretpostavimo da je x minimalna, tada je $H = 0$, pa iz (2.2.2) sledi da je $A'(0) = 0$ za bilo koji ograničen poddomen $\Delta \subset D$ i bilo koju normalnu varijaciju od $x(\bar{\Delta})$.

(\Leftarrow) : Neka je $A'(0) = 0$ za svaki ograničen poddomen $\Delta \subset D$ i svaku normalnu varijaciju od $x(\bar{\Delta})$. Pretpostavimo da postoji tačka $q \in D$ u kojoj je $H(q) \neq 0$. Izaberimo ograničen poddomen $\Delta \subset D$ takav da $q \in \Delta$ i diferencijabilnu funkciju h takvu da je $h(q) = H(q)$ i da je h identički jednaka nuli izvan dovoljno male okoline od q . Tada će za normalnu varijaciju određenu sa h t.j. njenu *area* funkciju važiti $A'(0) < 0$, što je kontradikcija. \square

2.3 Neki primeri minimalnih površi

Nakon Ojlera koji je 1744. godine dokazao da je katenoid minimalna površ i Menijea³ koji je 1776. godine dokazao da je helikoid minimalna površ dugo vremena nije bilo novih primera minimalnih površi, period stagnacije je prekinuo Šerk⁴. U ovom poglavlju ćemo navesti nekoliko klasičnih primera minimalnih površi, kao i neke njihove osobine. Jedna od najinteresantnijih osobina koju ćemo prikazati je savijanje od helikoida do katenoida kroz familiju izometričnih površi.

2.3.1 Helikoid

Naziv helikoid potiče iz osobine da za svaku njegovu tačku postoji kriva helikoida⁵ na njemu koja prolazi kroz tu tačku.

Parametarska jednačina kružne helikoide je

$$h(t) = (a \cos t, a \sin t, ct),$$

gde su a i c konstante.

Geometrijska definicija kružnog helikoida je da je to površ koju generiše duž L koja ortogonalno seče fiksiranu osu s tako da se duž L translira duž ose s i istovremeno konstantnom brzinom rotira oko nje.

Na osnovu uvedene definicije kružnog helikoida možemo zaključiti da je kružni helikoid pravolinijska površ.

Definicija 2.3.1. *Pravolinijska površ se zove konoidna površ ili konoid ako je generisana pravom paralelnom datoj ravni, i seče fiksiranu pravu-osu konoida i fiksnu (stalnu) krivu. Ako je osa normalna na ravan paralelnosti i na generatrise onda se konoid naziva pravi konoid.*

Iz geometrijske definicije kružnog helikoida možemo zaključiti da je kružni helikoid konoidna površ, i to pravi konoid jer je osa s normalna na ravan paralelnosti i na generatrise.

Katalan⁶ je 1842. godine dokazao da su helikoid i ravan jedini primeri pravolinijskih minimalnih površi.

Parametarska jednačina kružnog helikoida je

$$x(u, v) = (av \cos u, av \sin u, cu),$$

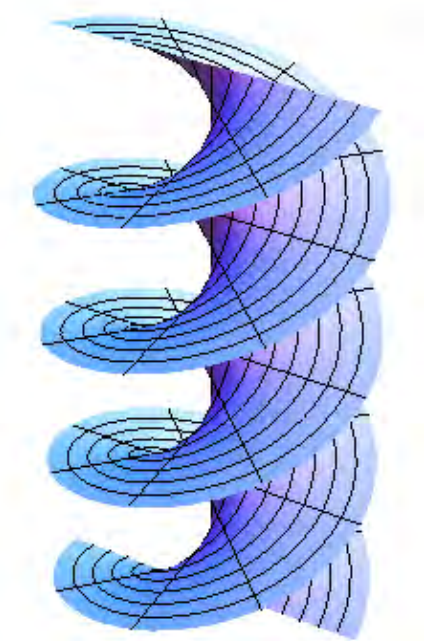
³Jean Babtiste Meusnier de la Place (1754-1793), francuski matematičar.

⁴Heinrich Ferdinand Scherk (1798-1885), nemački matematičar.

⁵U literaturi se za kružnu helikoidu mogu sresti i termini cilindarska zavojnica ili zavojna linija.

⁶Eugene Charles Catalan (1814-1894), belgijski matematičar.

gde su a i c konstante.



Slika 2.3.1: Kružni helikoid

Koeficijenti prve kvadratne forme kružnog helikoida su

$$E = c^2 + a^2v^2, \quad F = 0, \quad G = a^2,$$

koeficijenti druge kvadratne kružnog helikoida su

$$L = 0, \quad M = \frac{a^2c}{\sqrt{a^2(c^2 + a^2v^2)}}, \quad N = 0.$$

Glavne krivine kružnog helikoida su

$$k_1 = \sqrt{\frac{c^2}{(c^2 + a^2v^2)^2}}, \quad k_2 = -\sqrt{\frac{c^2}{(c^2 + a^2v^2)^2}}$$

pa je srednja krivina

$$H = 0,$$

dok je Gausova krivina

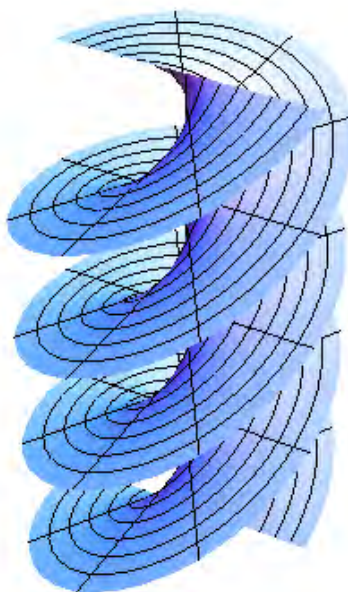
$$K = -\frac{c^2}{(c^2 + a^2v^2)^2} < 0.$$

Definicija 2.3.2. *Neka je data površ $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, fiksirajmo $(u_0, v_0) \in D$. Krive*

$$u \rightarrow x(u, v_0) \text{ i } v \rightarrow x(u_0, v)$$

se nazivaju redom u -linija, v -linija površi x .

u -linije kružnog helikoida su kružne helikoide, dok su v -linije prave.



Slika 2.3.2: Eliptički helikoid

Kružni helikoid je zapravo specijalan slučaj eliptičkog helikoida čija je parametarska jednačina

$$x(u, v) = (av \cos u, bv \sin u, cu),$$

gde su a, b i c konstante.

Kroz svaku tačku eliptičkog helikoida prolazi kriva eliptička helikoida čija je parametarska jednačina

$$h(t) = (a \cos t, b \sin t, ct),$$

gde su a, b i c konstante.

u -linije eliptičkog helikoida su eliptičke helikoide, v -linije eliptičkog helikoida su prave.

Koeficijenti prve kvadratne forme eliptičkog helikoida su

$$E = c^2 + b^2 v^2 \cos^2 u + a^2 v^2 \sin^2 u, \quad F = (-a^2 + b^2)v \sin u \cos u,$$

$$G = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u.$$

Definicija 2.3.3. *Kriva α na površi S je asimptotska linija ako normalna krivina površi S ima vrednost nula na svakom tangentnom vektoru krive α . Pravac na površi za koji normalna krivina površi vredi nula naziva se asimptotski pravac.*

Prave linije na nekoj površi su uvek asimptotske linije, međutim ne moraju sve asimptotske linije neke površi biti prave linije.

Teorema 2.3.1. *Neka su L , M i N koeficijenti druge kvadratne forme površi x , pretpostavimo da je M u svakoj tački različit od nule. Tada su u -linije i v -linije površi x asimptotske linije akko su L i N identički jednaki nuli.*

Koeficijenti druge kvadratne forme eliptičkog helikoida su

$$L = 0, \quad M = \frac{\sqrt{2}abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2(c^2 + 2b^2v^2) + (a^2 - b^2)c^2 \cos 2u}}, \quad N = 0.$$

Na osnovu Teoreme 2.3.1 možemo zaključiti da su u -linije i v -linije eliptičkog helikoida asimptotske linije.

Teorema 2.3.2. *Pretpostavimo da površ $S \subset \mathbb{R}^3$ ima negativnu Gausovu krivinu K u tački P . Tada:*

1. *postoje tačno dva asimptotska pravca u tački P ,*
2. *asimptotski pravci u tački P su ortogonalni akko je srednja krivina površi S u tački P jednaka nuli.*

2.3.2 Katenoid

Katenoid je minimalna površ koja nastaje rotacijom krive lančanice (na engleskom *catenary*) oko z ose, pa je katenoid i rotaciona površ, i to pored ravni jedina minimalna rotaciona površ.

Jednačina lančanice je

$$y = a \operatorname{ch} \frac{z}{a},$$

gde je a konstanta.

Parametrizacija katenoida je

$$x(u, v) = \left(a \cos u \operatorname{ch} \frac{v}{a}, a \sin u \operatorname{ch} \frac{v}{a}, v \right), \quad (u, v) \in [0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty)$$

gde je a konstanta.

Teorema 2.3.3. *Neka je S minimalna rotaciona površ, tada je S deo ravni ili katenoida.*

Dokaz. Neka je $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ površ takva da je $x(D) \subset S$, pošto je S rotaciona površ, x je data sa $x(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v))$, gde je $\alpha = (\varphi, \psi)$ kriva koja generiše rotacionu površ S . Postoje tri slučaja:

1. $\psi' \equiv 0$, u ovom slučaju je ψ konstanta, tako da je kriva α horizontalna linija, a S je deo ravni koja je ortogonalna na osu rotacije.
2. ψ' u svakoj tački uzima vrednosti različite od nule. Sada na osnovu teoreme o inverznoj funkciji postoji ψ^{-1} . Definišimo

$$\tilde{\alpha}(t) := \alpha(\psi^{-1}(t)) = (h(t), t),$$

gde je $h = \varphi \circ \psi^{-1}$.

Definišimo novu površ y sa

$$y(u, v) = (h(v) \cos u, h(v) \sin u, v).$$

Pošto je kriva $\tilde{\alpha}$ reparametrizacija krive α , to površi x i y imaju istu sliku, pa je dovoljno pokazati da je površ y deo katenoida.

Kada izračunamo glavne krivine dobijamo

$$k_1 = \frac{L}{E} = \frac{1}{h\sqrt{h'^2 + 1}}, \quad k_2 = \frac{N}{G} = -\frac{h''}{(h'^2 + 1)^{3/2}}.$$

Sada osnovu činjenice da je $H = 0$ sledi da je

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h\sqrt{h'^2 + 1}} - \frac{h''}{(h'^2 + 1)^{3/2}} \right) = 0,$$

odakle dobijamo da h mora da zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$h''h = 1 + h'^2. \quad (2.3.3)$$

Da bismo rešili ovu jednačinu predstavimo je u obliku

$$\frac{2h'h''}{1 + h'^2} = \frac{2h'}{h},$$

nakon integracije dobijamo

$$\log(1 + h'^2) = \log(h^2) - \log(c^2)$$

za neku konstantu $c \neq 0$. Primenjujući sada eksponencijalnu funkciju dobićemo

$$1 + h'^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2,$$

poslednja diferencijalna jednačina može da se predstavi kao

$$\frac{h'/c}{\sqrt{(h/c)^2 - 1}} = \frac{1}{c},$$

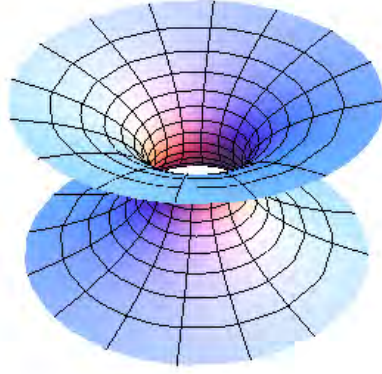
integraleći obe strane dobićemo

$$\operatorname{arcch}\left(\frac{h}{c}\right) = \frac{v}{c} + b,$$

prema tome rešenje diferencijalne jednačine (2.3.3) dato je sa

$$h(v) = c \operatorname{ch}\left(\frac{v}{c} + b\right),$$

sada imamo da je $y(u, v) = (c \operatorname{ch}(\frac{v}{c} + b) \cos u, c \operatorname{ch}(\frac{v}{c} + b) \sin u, v)$, čime smo dokazali da je y deo katenoida, a na osnovu ranijeg komentara ovim smo dokazali da je i x , a time i S deo katenoda.

Slika 2.3.3: Katenoid $a = 1$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $-2 \leq v \leq 2$

3. ψ' u nekim tačkama uzima vrednosti različite od nule, a u nekim tačkama ima vrednost 0. Može se (koristeći prethodni deo) pokazati da ovaj slučaj nije moguć.

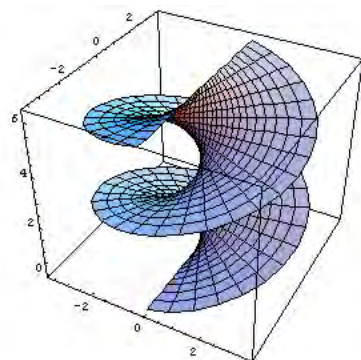
□

Savijanje površi je izometrijska deformacija površi pri kojoj se površ uključuje u familiju njoj izometričnih površi. Karakterističan primer je savijanje od helikoida do katenoida kroz familiju izometričnih površi, specijalno i između helikoida i katenoida se može uspostaviti izometrijska transformacija. Za $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ definisaćemo površ

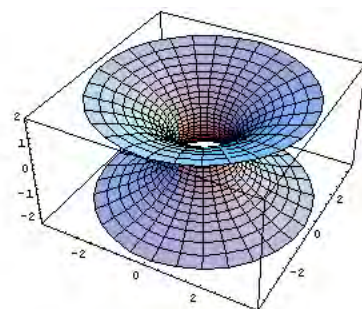
$$\begin{aligned} \text{heltocat}[t](u, v) := & \cos t(\operatorname{sh} v \cdot \sin u, -\operatorname{sh} v \cdot \cos u, u) \\ & + \sin t(\operatorname{ch} v \cdot \cos u, \operatorname{ch} v \cdot \sin u, v) \end{aligned}$$

Primetimo da je $\text{heltocat}[0](u, v)$ kružni helikoid za $a = c = 1$, sa parametrima $\tilde{u} = u - \pi/2$ i $\tilde{v} = \operatorname{sh} v$, dok je $\text{heltocat}[\pi/2](u, v)$ katenoid za $a = 1$.

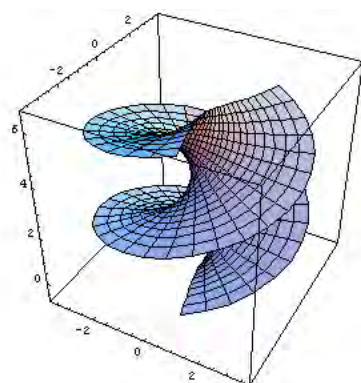
Teorema 2.3.4. *Jednparametarska familija površi $\{\text{heltocat}[t] : t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$ takva da je $\text{heltocat}[0]$ helikoid, a $\text{heltocat}[\frac{\pi}{2}]$ katenoid je deformacija helikoida u katenoid. Štaviše za $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\text{heltocat}[t]$ je minimalna površ koja je lokalno izometrična sa $\text{heltocat}[0]$ t.j. helikoidom, specijalno i katenoid je lokalno izometričan sa helikoidom. Pošto su koeficijenti druge kvadratne forme površi $\text{heltocat}[t]$ nekonstantne funkcije koje zavise od parametra t , to potapanje zavisi od t .*



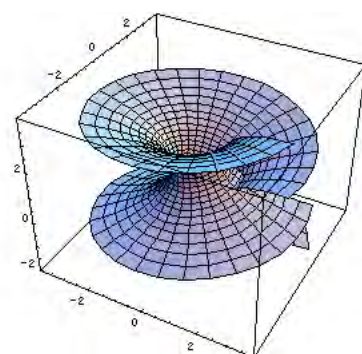
$$t = 0$$



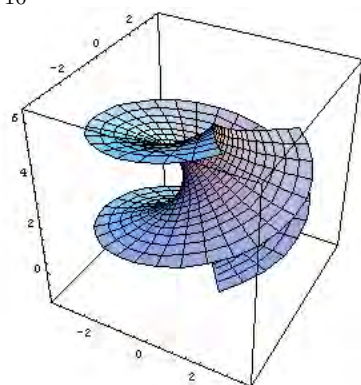
$$t = \frac{\pi}{2}$$



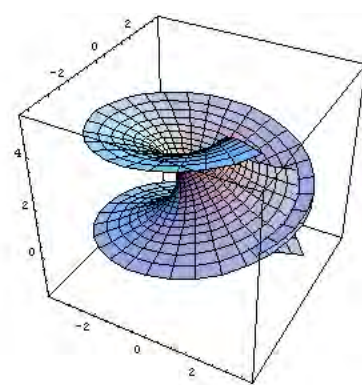
$$t = \frac{\pi}{10}$$



$$t = \frac{4\pi}{10}$$



$$t = \frac{2\pi}{10}$$



$$t = \frac{3\pi}{10}$$

Helikoid i katenoid nemaju samopreseke. Međutim, svaka površ „između“ helikoida i katenoida (tj. površ koja nastaje nepotpunom deformacijom helikoida u katenoid) ima samopreseke. Asimptotske linije helikoida se postepeno transformišu u linije krivine katenoida.

2.3.3 Šerkova minimalna površ

Definicija 2.3.4. Za parametrizovanu površ $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadatu sa

$$x(u, v) = (u, v, h(u, v)),$$

gde je D otvoren skup u \mathbb{R}^2 , a $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija kažemo da je Monžova⁷ površ.

Kako izgledaju koeficijenti prve i druge kvadratne forme, Gausova i srednja krivina pokazuje nam sledeća lema.

Lema 2.3.1. Za Monžovu površ $x(u, v) = (u, v, h(u, v))$ važi

$$\begin{aligned} E &= 1 + h_u^2, & F &= h_u h_v, & G &= 1 + h_v^2, \\ L &= \frac{h_{uu}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{\frac{1}{2}}}, & M &= \frac{h_{uv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{\frac{1}{2}}}, & N &= \frac{h_{vv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ K &= \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^2}, & H &= \frac{(1 + h_v^2)h_{uu} - 2h_u h_v h_{uv} + (1 + h_u^2)h_{vv}}{2(1 + h_u^2 + h_v^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Lema 2.3.2. Monžova površ $(u, v) \rightarrow (u, v, h(u, v))$ je minimalna površ akko funkcija h zadovoljava sledeću jednačinu

$$(1 + h_v^2)h_{uu} - 2h_u h_v h_{uv} + (1 + h_u^2)h_{vv} = 0. \quad (2.3.4)$$

Dokaz. Na osnovu formule za srednju krivinu Monžove površi iz prethodne leme dokaz ove leme neposredno sledi. \square

Šerk je pretpostavio da je funkcija h oblika $h(u, v) = f(u) + g(v)$ i 1835. godine definisao je minimalne površi čija je parametarska jednačina oblika $x(u, v) = (u, v, f(u) + g(v))$.

Teorema 2.3.5. Neka je data Monžova površ $x : D \rightarrow S$, $x(u, v) = (u, v, h(u, v))$, gde je $h(u, v) = f(u) + g(v)$. Ako je S minimalna površ, onda ili je S deo ravni ili postoji nenula konstanta a takva da je

$$f(u) = -\frac{1}{a} \log \cos au \quad i \quad g(v) = \frac{1}{a} \log \cos av, \quad (2.3.5)$$

ili ekvivalentno $h(u, v) = \frac{1}{a} \log \left(\frac{\cos av}{\cos au} \right)$.

⁷Gaspard Monge (1746-1818), francuski matematičar.

Dokaz. $h(u, v) = f(u) + g(v)$, pa je

$$h_u = f'(u), \quad h_v = g'(v), \quad h_{uu} = f''(u), \quad h_{uv} = 0, \quad h_{vv} = g''(v),$$

zamenom u jednačinu (2.3.4) dobijamo

$$\frac{f''(u)}{1 + (f'(u))^2} = \frac{-g''(v)}{1 + (g'(v))^2},$$

kako su promenljive u i v međusobno nezavisne zaključujemo da obe strane u prethodnoj jednakosti moraju biti jednake nekoj konstanti a .

Ako je $a = 0$, f i g su linearne funkcije, znači S je deo ravni.

Pretpostavimo da je $a \neq 0$, rešavanjem diferencijalnih jednačina

$$\frac{f''(u)}{1 + (f'(u))^2} = a = \frac{-g''(v)}{1 + (g'(v))^2}$$

dobijamo (2.3.5). □

Definišemo Šerkovu površ u programskom paketu *Mathematica* sa

```
scherk[a_] [u_, v_] := {u, v, (1/a) Log[Cos[a*v]/Cos[a*u]]}
```

da bi uprostiti razmatranje posmatraćemo slučaj kada je $a = 1$, t.j. površ `scherk[1]`. Šerkova površ je dobro definisana na skupu

$$D = \{(u, v) : \cos u \cos v > 0\}.$$

Skup D možemo da zamislamo kao uniju crnih polja beskonačne šahovske table. Stavimo

$$Q(m, n) = \{(x, y) | m\pi - \frac{\pi}{2} < x < m\pi + \frac{\pi}{2} \text{ i } n\pi - \frac{\pi}{2} < y < n\pi + \frac{\pi}{2}\}$$

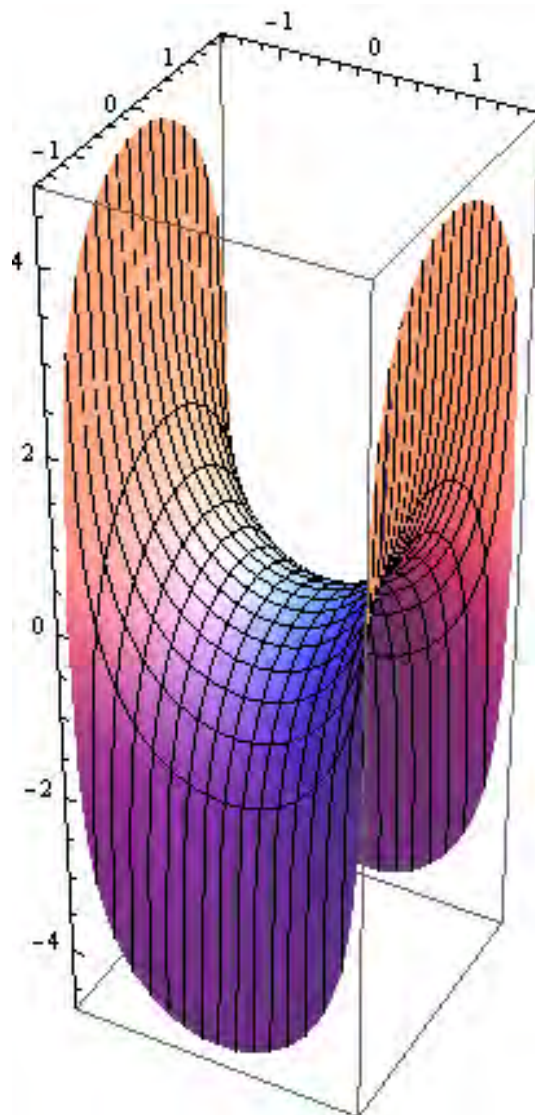
i obojimo kvadrat $Q(m, n)$ u crno ako je $m + n$ paran, a belo ako je $m + n$ neparan broj, tada je $D = \cup \{Q(m, n) | m, n \in \mathbb{Z}, m + n \equiv_2 0\}$.

Za Šerkovu površ važi da je `scherk[1](u+2mπ, v+2nπ) = scherk[1](u, v)`, za sve realne vrednosti u i v , i sve cele brojeve m i n , stoga je deo Šerkove površi iznad crnog kvadrata $Q(m, n)$ isti kao onaj deo iznad kvadrata $Q(0, 0)$.

Mathematica funkcija `ParametricPlot3D` služi za iscrtavanje parametrizovanih 3D krivih i površi, bilo da su regularne ili ne, ovom funkcijom se na površi iscrtava mreža koordinatnih linija.

Za iscrtavanje Šerkove površi u programskom paketu *Mathematica* možemo koristiti sledeći kod

```
ParametricPlot3D[scherk[1][u,v],{u,-Pi/2+0.01,Pi/2-0.01},
{v,-Pi/2+0.01,Pi/2-0.01},PlotPoints->{40,20}]
```



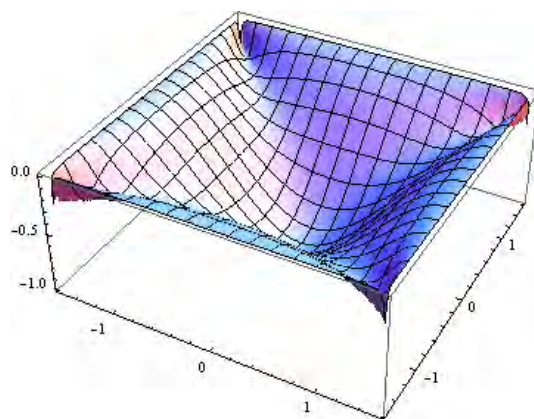
Funkcija `PlotPoints` određuje broj uzoračkih tačaka u kojima se računa vrednost funkcije. Povećavanjem broja uzoračkih tačaka može se povećati preciznost grafika, ali je programu potrebno više vremena za iscrtavanje grafika. Funkciju `PlotPoints` možemo pozivati na sledeća dva načina:

`PlotPoints->n` broj uzoračkih tačaka i za promenljivu u i za promenljivu v je n .

`PlotPoints->{vrednost1,vrednost2}` određuje različite brojeve uzoračkih tačaka za u i v .

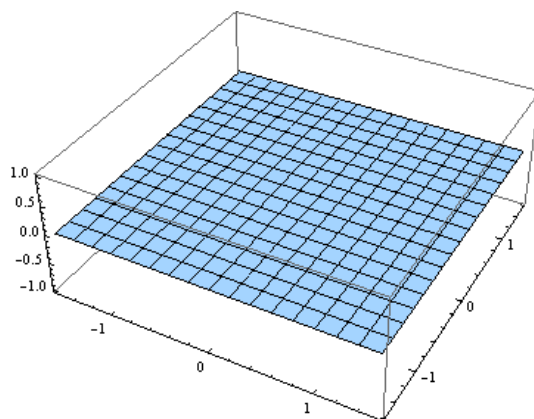
Za iscrtavanje 3D krivih i površi možemo koristiti i *Mathematica* funkciju `Plot3D` koja je brža od funkcije `ParametricPlot3D`, ali je prednost funkcije `ParametricPlot3D` u tome što prikazuje realnije slike. Iskoristimo funkciju `Plot3D` za iscrtavanje Gausove krivine Šerkove površi.

```
Plot3D[gaussiancurvature[scherk[1]][u,v],{u,-Pi/2+0.01,Pi/2-0.01},
{v,-Pi/2+0.01,Pi/2-0.01},PlotPoints->{40,20}]
```



Na isti način vršimo iscrtavanje srednje krivine.

```
Plot3D[meancurvature[scherk[1]][u,v],{u,-Pi/2+0.01,Pi/2-0.01},
{v,-Pi/2+0.01,Pi/2-0.01},PlotPoints->{40,20}]
```



2.3.4 Šerkova peta minimalna površ

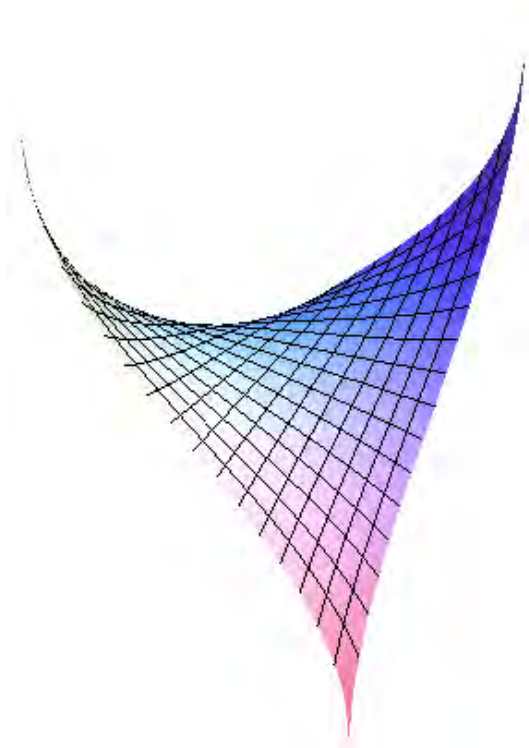
Jednačina Šerkove pete minimalne površi u implicitnom obliku je

$$\sin z = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

dok je parametarska jednačina

$$x(u, v) = (a \operatorname{arcsch} u, b \operatorname{arcsch} v, c \arcsin uv),$$

gde su $a, b, c \in \{\pm 1\}$.



Slika 2.3.5: Šerkova peta minimalna površ

2.3.5 Katalanova minimalna površ

Parametarska jednačina Katalanove minimalne površi je

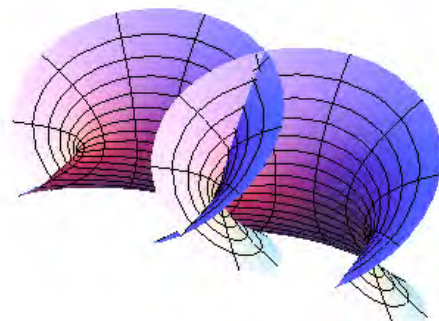
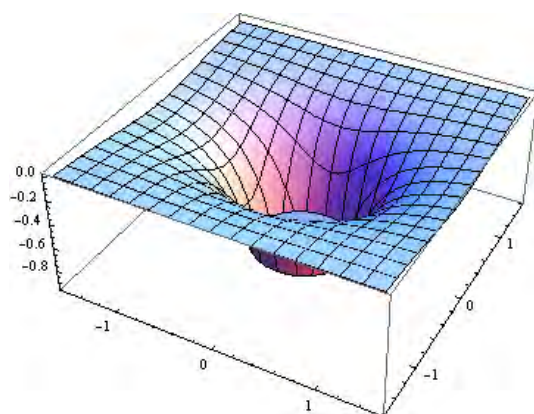
$$x(u, v) = a \left(u - \sin u \operatorname{ch} v, 1 - \cos u \operatorname{ch} v, -4 \sin \frac{u}{2} \operatorname{sh} \frac{v}{2} \right),$$

gde je a konstanta.

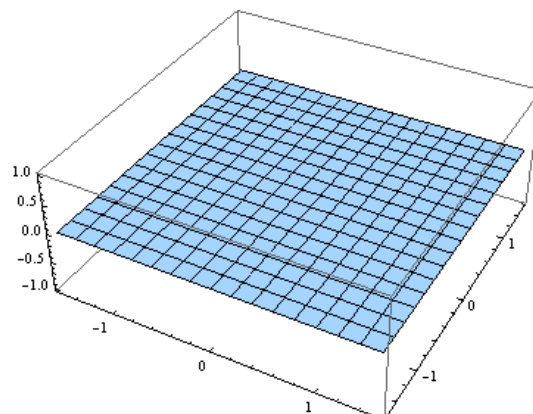
Koeficijenti prve kvadratne forme su

$$E = G = 2a^2 \operatorname{ch} \left(\frac{v}{2} \right)^2 (-\cos u + \operatorname{ch} v), \quad F = 0,$$

što znači da je ova parametrizacija izotermalna.

Slika 2.3.6: Katalanova minimalna površ $a = 1$, $0 \leq u \leq 4\pi$, $-2 \leq v \leq 2$ 

Gausova krivina Katalanove minimalne površi



Srednja krivina Katalanove minimalne površi

Navedimo još jednu parametrizaciju Katalanove minimalne površi

$$\begin{aligned} x &= x(r, \varphi) = a \left(\sin 2\varphi - 2\varphi + \frac{\left(\frac{1}{r} - r\right)^2}{2} \cos 2\varphi \right), \\ y &= y(r, \varphi) = -a \left(1 + \frac{\left(\frac{1}{r} - r\right)^2}{2} \right) \cos 2\varphi, \\ z &= z(r, \varphi) = 2a \left(\frac{1}{r} - r \right) \sin \varphi. \end{aligned}$$

2.3.6 Henebergova površ

Parametrizaciju Henebergove⁸ minimalne površi ćemo odmah implementirati u programskom paketu *Mathematica*

```
henneberg[u_,v_] :=
  {2*Sinh[u]*Cos[v]-(2/3)*Sinh[3*u]*Cos[3*v],
   2*Sinh[u]*Sin[v]+(2/3)*Sinh[3*u]*Sin[3*v],
   2*Cosh[2*u]*Cos[2*v]}
```

Koeficijenti prve kvadratne forme koji odgovaraju ovoj parametrizaciji Henebergove površi su $E = G = 8 \operatorname{ch}^2 u (-\cos 4v + \operatorname{ch} 4u)$, $F = 0$, što znači da je ova parametrizacija izotermalna.

Koristeći funkciju `FullSimplify`, koja daje najjednostavniji oblik izraza primenom svih poznatih transformacija, tačnije sledeći kod

```
henneberg[u,v]
FullSimplify[henneberg[-u,v+Pi]]
```

možemo se uveriti da za gore navedenu parametrizaciju Henebergove površi važi $\text{henneberg}(u, v) = \text{henneberg}(-u, v + \pi)$. Definisaćemo komandu za Jakobijevu matricu površi

```
surfacejacobianmatrix[x_] [u_,v_] := {D[x[uu,vv],uu],
  D[x[uu,vv],vv]}/.{uu->u,vv->v}
```

zatim i za jakobijan

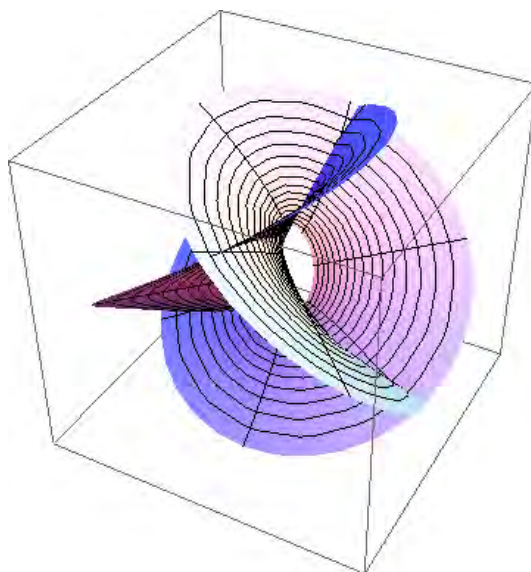
```
surfacejacobian[x_] [u_,v_] :=
  Det[surfacejacobianmatrix[x] [u,v].
  Transpose[surfacejacobianmatrix[x] [u,v]]]
```

Jakobijan Henebergove površi u programskom paketu *Mathematica* možemo izračunati koristeći sledeći kod

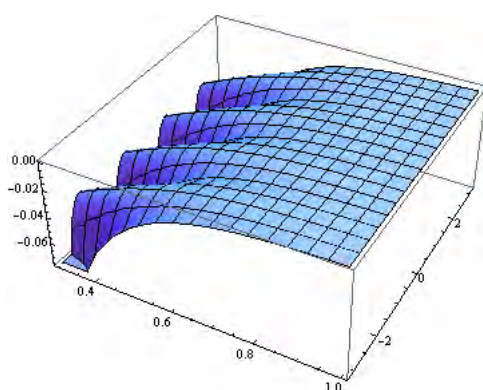
```
surfacejacobian[henneberg] [u,v]//Simplify
```

dobićemo da je jakobijan jednak $J = 64(\operatorname{ch} u)^4(\cos 4v - \operatorname{ch} 4u)^2$, možemo zaključiti da ova parametrizacija Henebergove površi nije regularna u tačkama $(0, \frac{n\pi}{2})$, gde je n ceo broj.

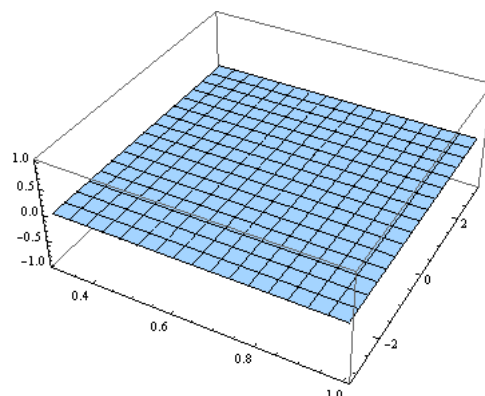
⁸Ernst Lebrecht Henneberg (1850-1922), nemački matematičar.



Slika 2.3.8: Henebergova minimalna površ



Gausova krivina Henebergove minimalne površi



Srednja krivina Henebergove minimalne površi

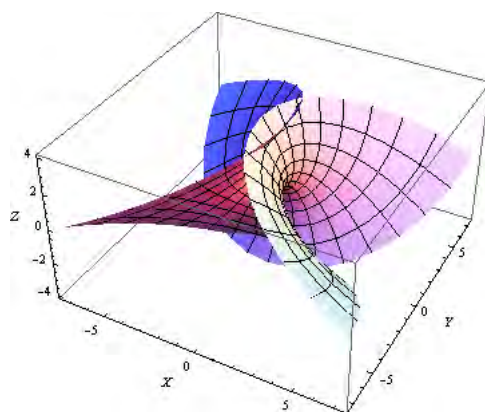
Još jedna parametrizacija Henebergove površi je data sa

$$\begin{aligned} x &= x(r, \varphi) = \frac{2(r^2 - 1) \cos \varphi}{r} - \frac{2(r^6 - 1) \cos 3\varphi}{3r^3}, \\ y &= y(r, \varphi) = -\frac{6r^2(r^2 - 1) \sin \varphi + 2(r^6 - 1) \sin 3\varphi}{3r^3}, \\ z &= z(r, \varphi) = \frac{2(r^4 + 1) \cos 2\varphi}{r^2}. \end{aligned}$$

2.3.7 Eneperova minimalna površ

Jednu od najjednostavnijih minimalnih površi je otkrio Eneper⁹ 1864. godine. Eneperova minimalna površ ima sledeću parametrizaciju

$$x(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

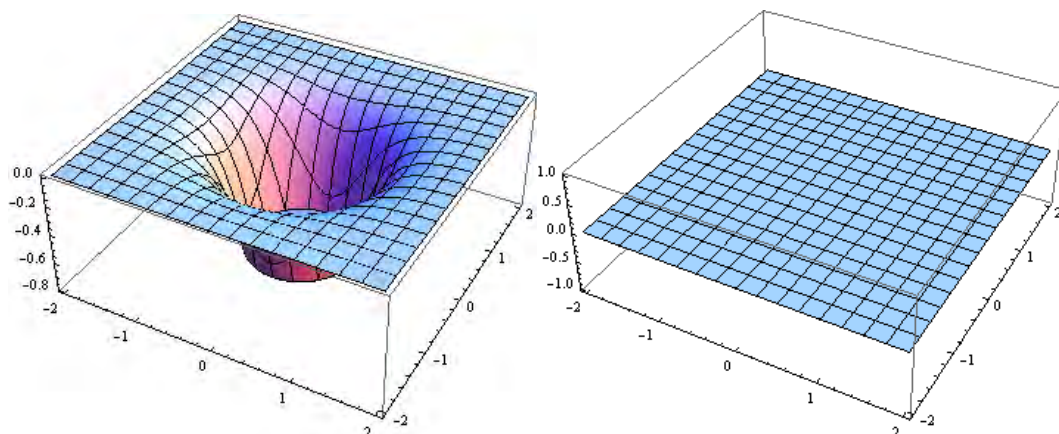


Koeficijenti prve kvadratne forme ovako parametrizovane Eneperove površi su

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, F = 0,$$

što znači da je ova parametrizacija izotermalna. Gausova i srednja krivina su

$$K = -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^4} < 0, H = 0.$$



⁹Alfred Enneper (1830-1885), nemački matematičar.

Još jedna parametrizacija Eneperove površi je data sa

$$x(r, \varphi) = \left(r \cos \varphi - \frac{r^3}{3} \cos 3\varphi, -r \sin \varphi - \frac{r^3}{3} \sin 3\varphi, r^2 \cos 2\varphi \right).$$

Koeficijenti prve kvadratne forme ovako parametrizovane Eneperove površi su $E = (1 + r^2)^2$, $F = 0$, $G = r^2(1 + r^2)^2$, znači da ova parametrizacija Eneperove površi nije izotermalna.

3. Minimalne površi sa stanovišta kompleksne analize

U ovoj glavi koristimo aparate kompleksne analize, zarad potpunog razumevanja materije nephodno je poznavanje osobina kompleksnih funkcija. Najpre ćemo se podsetiti nekih pojmova kompleksne analize.

Definicija 3.0.1. Funkcija $l : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je \mathbb{R} -linearna (\mathbb{C} -linearna) ako važi:

1. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad l(z_1 + z_2) = l(z_1) + l(z_2);$
2. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad l(\lambda z) = \lambda l(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad l(\lambda z) = \lambda l(z)).$

Definicija 3.0.2. Neka je D otvoren skup u \mathbb{C} . Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ je \mathbb{R} -diferencijabilna (\mathbb{C} -diferencijabilna) u tački $z \in D$ ako važi

$$f(z+h) = f(z) + l(h) + o(h),$$

gde je l neka \mathbb{R} -linearna (\mathbb{C} -linearna) funkcija, a $\frac{o(h)}{h} \rightarrow 0$, kada $h \rightarrow 0$. Funkcija $l(h)$ se naziva diferencijal funkcije f u tački z i označava sa $df(h)$.

Umesto standardnih realnih koordinata u, v u \mathbb{R}^2 često prelazimo na kompleksne koordinate z i \bar{z} . Formule koje povezuju ove koordinate su date sa

$$z = u + iv, \quad \bar{z} = u - iv, \tag{3.0.1}$$

$$u = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad v = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \tag{3.0.2}$$

Uvođenje koordinata z i \bar{z} može napraviti malu zabunu jer neko može pomisliti da z određuje \bar{z} , to jeste slučaj kada startujemo sa koordinatama u i v pa definišemo z i \bar{z} kao u (3.0.1), ali mi prvo uvodimo koordinate z i \bar{z} , a zatim definišemo u i v sa (3.0.2). Iz (3.0.1) imamo

$$dz = du + idv, \quad d\bar{z} = du - idv \quad \text{i} \quad |dz|^2 = dzd\bar{z} = du^2 + dv^2.$$

Diferencijal \mathbb{R} -diferencijabilne funkcije f se može predstaviti u obliku

$$df(h) = \frac{\partial f}{\partial u} h_1 + \frac{\partial f}{\partial v} h_2,$$

gde je $h = h_1 + ih_2$. Odnosno,

$$df(h) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{(h + \bar{h})}{2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{(h - \bar{h})}{2i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right) h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right) \bar{h}.$$

Uvedimo operatore

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \text{ i } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

sada diferencijal \mathbb{R} -diferencijabilne funkcije f možemo predstaviti u obliku

$$df(h) = \frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}.$$

Važi i formula

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}.$$

Teorema 3.0.1. *Neka je D otvoren skup u \mathbb{C} i $f = x + iy : D \rightarrow \mathbb{C}$, gde su x i y realne funkcije. Funkcija $(u, v) = z \rightarrow f(z) = x(u, v) + iy(u, v)$ je \mathbb{C} -diferencijabilna u tački $z_0 = u_0 + iv_0 \in D$ akko važe sledeća dva uslova:*

1. *realne funkcije $(u, v) \rightarrow x(u, v)$ i $(u, v) \rightarrow y(u, v)$ su diferencijabilne u tački (u_0, v_0) ;*
2. *u tački (u_0, v_0) su ispunjeni Koši-Rimanovi uslovi*

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \quad \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = -\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Primetimo da su Koši-Rimanovi uslovi uslovi ekvivalentni uslovu $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, jer je

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} + i \left(\frac{\partial x}{\partial v} + i \frac{\partial y}{\partial v} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \right).$$

Definicija 3.0.3. *Neka je D otvoren skup u \mathbb{C} i $f = x + iy : D \rightarrow \mathbb{C}$, granična vrednost (ukoliko postoji)*

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

naziva se izvod funkcije f u tački z_0 .

Izvod funkcije f u tački z_0 ne zavisi od načina (pravca) po kom z teži ka z_0 .

Teorema 3.0.2. *Neka je D otvoren skup u \mathbb{C} i $f = x + iy : D \rightarrow \mathbb{C}$. Izvod funkcije f u tački $z_0 \in D$ postoji akko je funkcija f \mathbb{C} -diferencijabilna u tački z_0 .*

Definicija 3.0.4. *Funkcija f je analitička u tački $z_0 \in \mathbb{C}$ ako se može razložiti u stepeni red u nekoj okolini tačke z_0 .*

Definicija 3.0.5. *Funkcija f je holomorfna u tački $z_0 \in \mathbb{C}$ ako je \mathbb{C} -diferencijabilna u nekoj okolini tačke z_0 .*

U kompleksnoj analizi se pokazuje da je funkcija f analitička akko je holomorfna, tako da za definiciju analitičke funkcije možemo koristiti navedenu definiciju holomorfne funkcije, što ćemo u nastavku i činiti.

Definicija 3.0.6. *Tačka $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ je izolovani singularitet funkcije f ako postoji šuplja okolina te tačke t.j. skup $\{z : 0 < |z - z_0| < r, r > 0\}$ ako je z_0 konačna tačka, odnosno skup $\{z : R < |z| < \infty, R > 0\}$ ako je $z_0 = \infty$, u kojoj je f holomorfna.*

Izolovani singularitet z_0 može biti:

1. *otklonjiv singularitet ako je $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) < \infty$;*
2. *pol ako je $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;*
3. *esencijalni singularitet ako $\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.*

3.1 Izometrijske deformacije minimalnih površi

Ovo poglavlje ima za cilj opisivanje opšte metode za dobijanje jednoparametarske familije izometričnih minimalnih površi, koja ustvari predstavlja generalizaciju deformacije helikoida u katenoid koju smo opisali u drugoj glavi.

Definicija 3.1.1. *Neka je D otvoren skup u \mathbb{R}^2 , za površ $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ kažemo da je harmonijska ako ispunjava uslov $x_{uu} + x_{vv} = 0$, koji je ekvivalentan sa uslovom da je svaka koordinatna funkcija od x harmonijska.*

Definicija 3.1.2. *Neka je D otvoren skup u \mathbb{R}^2 , za površi $x, y : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ kažemo da zadovoljavaju Koši-Rimanove uslove ako za njih važi*

$$x_u = y_v \text{ i } x_v = -y_u.$$

Lema 3.1.1. *Ako površi $x, y : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ zadovoljavaju Koši-Rimanove uslove, onda su one harmonijske, u tom slučaju kažemo da su x i y konjugovano harmonijske.*

Dokaz. Pošto x i y zadovoljavaju Koši-Rimanove uslove imamo da je

$$x_{uu} + x_{vv} = y_{uv} - y_{vu} = 0,$$

dakle x je harmonijska, slično se pokazuje da je y harmonijska. \square

Kao direktnu posledicu jednačine (1.3.10) Leme 1.3.1 dobijamo:

Posledica 3.1.1. *Regularna izotermalna površ $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ je minimalna površ akko je harmonijska.*

Upravo navedena posledica je razlog zašto su harmonijske funkcije korisne za izučavanje minimalnih površi, jer nam govori kako da definišemo minimalnu površ u \mathbb{R}^n za svako $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 3.1.3. *Minimalna izotermalna površ $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je površ koja je istovremeno izotermalna i harmonijska.*

Definicija 3.1.4. *Neka su $x, y : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ konjugovano harmonijske minimalne izotermalne površi. Pridružena familija za x i y je jednoparametarska familija površi $t \rightarrow z[t]$, gde je $z[t] : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ površ u \mathbb{R}^n data sa*

$$z[t] = (\cos t)x + (\sin t)y = \Re(e^{-it}(x + iy)).$$

Lema 3.1.2. *Neka su $x, y : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ konjugovano harmonijske minimalne izotermalne površi, tada pridružena familija $t \rightarrow z[t]$ za x i y zadovoljava:*

$$z[t]_u = (\cos t)x_u - (\sin t)x_v, \quad (3.1.3)$$

$$z[t]_v = (\sin t)x_u + (\cos t)x_v, \quad (3.1.4)$$

$$z[t]_{uu} = -z[t]_{vv} = (\cos t)x_{uu} - (\sin t)x_{uv}, \quad (3.1.5)$$

$$z[t]_{uv} = (\sin t)x_{uu} + (\cos t)x_{uv}. \quad (3.1.6)$$

Takođe, $z[t]$ i $z[t + \pi/2]$ su konjugovano harmonijske.

Navedenu lemu ćemo iskoristiti za dobijanje informacija o prvoj i drugoj kvadratnoj formi pridružene familije.

Teorema 3.1.1. *Neka su $x, y : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ konjugovano harmonijske minimalne izotermalne površi, i neka je $t \rightarrow z[t]$ njihova pridružena familija, tada je $z[t]$ minimalna izotermalna površ za svako t . Štaviše, sve površi pridružene familije imaju istu prvu kvadratnu formu, odakle sledi da je jednoparametarska familija površi $t \rightarrow z[t]$ izometrijska deformacija.*

Dokaz. Da je $z[t]$ harmonijska sledi iz (3.1.5). Neka su $E(t)$, $F(t)$ i $G(t)$ koeficijenti prve kvadratne forme površi $z[t]$, koristeći (3.1.3) imamo da je

$$\begin{aligned} E(t) &= z[t]_u \cdot z[t]_u \\ &= ((\cos t)x_u - (\sin t)x_v) \cdot ((\cos t)x_u - (\sin t)x_v) \\ &= (\cos t)^2(x_u \cdot x_u) + (\sin t)^2(x_v \cdot x_v) - 2(\sin t \cos t)(x_u \cdot x_v). \end{aligned}$$

Pošto je $E = x_u \cdot x_u = x_v \cdot x_v$ i $x_u \cdot x_v = 0$, to je $E(t) = E$. Slično se pokazuje da je $F(t) = 0$ i $G(t) = x_v \cdot x_v = E$ za svako t , odakle sledi da je za svako t površ $z[t]$ izotermalna i ima istu prvu kvadratnu formu kao i x . \square

Posmatraćemo minimalne površi u \mathbb{R}^3 i pokazaćemo da do na paralenu translaciju svi članovi pridružene familije imaju istu jediničnu normalu i shodno tome isti tangentni prostor.

Lema 3.1.3. *Neka su $x, y : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ konjugovano harmonijske minimalne izotermalne površi, tada:*

1. *za svako t važi $z[t]_u \times z[t]_v = x_u \times x_v$;*
2. *jedinična normala U površi $z[t]$ u tački $z[t](u, v)$ je paralelna jediničnoj normali površi x u tački $x(u, v)$;*
3. *tangentni prostor površi $z[t]$ u tački $z[t](u, v)$ je paralelan tangentnom prostoru površi x u tački $x(u, v)$.*

Dokaz. 1. se dobija koristeći (3.1.3) i (3.1.4), 2. sledi iz 1., a 3. sledi iz 2. \square

Posledica 3.1.2. *Svi članovi pridružene familije imaju isto Gausovo preslikavanje.*

Lema 3.1.4. *Koeficijenti druge kvadratne forme površi $z[t] : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ su povezani sa koeficijentima druge kvadratne forme površi x sledećim relacijama*

$$\begin{cases} L(t) = -N(t) = L \cos t - M \sin t, \\ M(t) = M \cos t + L \sin t. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Dokaz. Koristimo (3.1.5) da sračunamo

$$\begin{aligned} -N(t) &= L(t) = z[t]_{uu} \cdot U \\ &= ((\cos t)x_{uu} - (\sin t)x_{uv}) \cdot U \\ &= (\cos t)L - (\sin t)M, \end{aligned}$$

slično iz (3.1.6) sledi druga jednačina iz (3.1.7). \square

Posledica 3.1.3. *Neka su $x, y : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ konjugovano harmonijske minimalne izotermalne površi, i neka je w tangentni vektor za x u tački P (koji na osnovu Leme 3.1.3 može biti posmatran i kao tangentni vektor za y). Tada važi:*

1. *w je asimptotski vektor za x akko je glavni vektor za y ;*
2. *w je glavni vektor za x akko je asimptotski vektor za y .*

Definicija 3.1.5. *Kompleksni izvod površi $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je*

$$\frac{\partial x}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}(x_u - ix_v)(u, v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} - i\frac{\partial x_1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u} - i\frac{\partial x_n}{\partial v}\right)(u, v),$$

gde je $z = u + iv$.

Lema 3.1.5. *Kompleksni izvod površi $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ zadovoljava sledeće identitete*

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}(x_u \cdot x_u - x_v \cdot x_v - 2ix_u \cdot x_v) = \frac{1}{4}(E - G - 2iF),$$

$$\sum_{k=1}^n \left|\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)\right|^2 = \frac{1}{4}(x_u \cdot x_u + x_v \cdot x_v) = \frac{1}{4}(E + G).$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)\right)^2 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)^2 - 2i\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}(x_u \cdot x_u - x_v \cdot x_v - 2ix_u \cdot x_v) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left|\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)\right|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial x_k}{\partial u} - i\frac{\partial x_k}{\partial v}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\left|\frac{\partial x_k}{\partial u}\right|^2 + \left|\frac{\partial x_k}{\partial v}\right|^2\right) = \frac{1}{4}(x_u \cdot x_u + x_v \cdot x_v). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.2. *Neka je data površ $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tada:*

1. *x je harmonijska akko je njen kompleksni izvod $\frac{\partial x}{\partial z}$ analitička funkcija;*
2. *x je izotermalna akko je*

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) \right)^2 = 0;$$

3. *ako je x izotermalna, onda je x regularna akko je*

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) \right|^2 \neq 0.$$

Obrnuto, ako je skup D prosto povezan i $\Phi_1, \dots, \Phi_n : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ analitičke funkcije koje zadovoljavaju

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k^2 = 0 \text{ i } \sum_{k=1}^n |\Phi_k|^2 \neq 0,$$

onda postoji regularna minimalna izotermalna površ $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ takva da je $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ kompleksni izvod od x .

Definicija 3.1.6. *Kompleksifikacija para konjugovano harmonijskih minimalnih izotermalnih površi $x, y : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je preslikavanje*

$$x + iy : D \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

Lema 3.1.6. *Kompleksifikacija $x + iy : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ para $x, y : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ konjugovanih minimalnih površi je analitička funkcija, i važi*

$$2 \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{d}{dz} (x + iy) = x_u - ix_v.$$

Dokaz. Na osnovu pretpostavki leme možemo zaključiti da je $x + iy$ n -torka kompleksnih funkcija, pri čemu je svaka od njih analitička.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} &= \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) (x + iy) \\ &= \frac{1}{2} (x_u - ix_v + y_v + iy_u) = x_u - ix_v = 2 \frac{\partial x}{\partial z}. \end{aligned}$$

□

3.2 Minimalna kriva

Minimalnu krivu je prvi izučavao Lie¹, ona može biti shvaćena sa jedne strane kao generalizacija realne krive u \mathbb{R}^n , a sa druge strane kao generalizacija minimalne izotermalne površi.

Definicija 3.2.1. *Neka je D otvoren skup u \mathbb{C} . Minimalna kriva je analitička funkcija $\Psi : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ koja ispunjava uslov*

$$\Psi'(z)\Psi'(z) = 0 \text{ za svako } z \in D,$$

ako još zadovoljava uslov

$$\Psi'(z)\overline{\Psi'}(z) \neq 0 \text{ za svako } z \in D,$$

onda kažemo da je Ψ regularna minimalna kriva.

Lema 3.2.1. *Ako imamo date minimalne izotermalne površi x i y , onda je njihova kompleksifikacija minimalna kriva. Obrnuto, ako je data minimalna kriva $\Psi : D \rightarrow \mathbb{C}^n$, onda su*

$$x(u, v) = \Re(\Psi(u + iv)) \text{ i } y(u, v) = \Im(\Psi(u + iv))$$

konjugovane minimalne izotermalne površi, u tom slučaju kažemo da su x i y konjugovane minimalne izotermalne površi određene sa Ψ .

Na osnovu navedene leme možemo zaključiti da postoji „1-1“ korespondencija između minimalnih krivih i parova konjugovanih minimalnih izotermalnih površi.

Definicija 3.2.2. *Neka je $\Psi : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ minimalna kriva. Pridružena familija za Ψ je jednoparametarska familija površi $t \mapsto z[t]$, gde je površ*

$$z[t] : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

data sa

$$z[t](u, v) = \Re(e^{-it}\Psi(u + iv)).$$

Tako da je pridružena familija za Ψ ista kao i pridružena familija koja odgovara konjugovanim minimalnim izotermalnim površima određenim sa Ψ .

Na osnovu Teoreme 3.1.1 imamo da je pridružena familija minimalne krive Ψ izometrijska deformacija, i da je $z[t]$ minimalna izotermalna površ za svako t . Sada Lemu 3.1.2 možemo iskazati u terminima minimalne krive.

¹Marius Sophus Lie (1842-1899), norveški matematičar.

Posledica 3.2.1. *Neka je $\Psi : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ minimalna kriva. Pridružena familija $t \rightarrow z[t]$ za Ψ zadovoljava*

$$z[t]_u \times iz[t]_v = e^{-it}\Psi'. \quad (3.2.8)$$

Takođe važi,

$$\left\{ \begin{array}{l} z[t]_u(u, v) = \Re(e^{-it}\Psi'(u + iv)), \\ z[t]_v(u, v) = \Im(e^{-it}\Psi'(u + iv)), \\ z[t]_{uu}(u, v) = -z[t]_{vv}(u, v) = \Re(e^{-it}\Psi''(u + iv)), \\ z[t]_{uv}(u, v) = \Im(e^{-it}\Psi''(u + iv)). \end{array} \right.$$

Koristićemo oznake

$$\frac{\Psi'}{2} = x_z = \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}(x_u - ix_v) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n),$$

tada je

$$\frac{\overline{\Psi'}}{2} = x_{\bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(x_u + ix_v) = (\overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_n).$$

Definicija 3.2.3. *Gausovo preslikavanje minimalne krive Ψ je Gausovo preslikavanje bilo kog člana pridružene familije za Ψ .*

Lema 3.2.2. *Neka je $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$, tada važi*

$$\|a \times \bar{a}\| = \|a\|^2, \quad (3.2.9)$$

$$a \times a = 2i(\Im(a_2\bar{a}_3), \Im(a_3\bar{a}_1), \Im(a_1\bar{a}_2)). \quad (3.2.10)$$

Lema 3.2.3. *Neka je $\Psi : D \rightarrow \mathbb{C}^3$ minimalna kriva. Tada je*

$$\begin{aligned} \frac{\Psi' \times \overline{\Psi'}}{4} &= x_z \times x_{\bar{z}} = \frac{i}{2}x_u \times x_v \\ &= 2i(\Im(\varphi_2\overline{\varphi}_3), \Im(\varphi_3\overline{\varphi}_1), \Im(\varphi_1\overline{\varphi}_2)) \end{aligned}$$

i

$$U = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = \frac{x_z \times x_{\bar{z}}}{i\|x_z\|^2} = \frac{\Psi' \times \overline{\Psi'}}{i\|\Psi'\|^2} = \frac{2(\Im(\varphi_2\overline{\varphi}_3), \Im(\varphi_3\overline{\varphi}_1), \Im(\varphi_1\overline{\varphi}_2))}{\|\Psi'\|^2}. \quad (3.2.11)$$

Neka je S^2 jedinična sfera u \mathbb{R}^3 sa centrom u koordinatnom početku. Neka je $p = (p_1, p_2, p_3) \in S^2$ bilo koja tačka različita od tačke $(0, 0, 1)$. Linija L koja prolazi kroz tačku p i tačku $(0, 0, 1)$ seče kompleksnu ravan \mathbb{C} (identifikujemo kompleksnu ravan \mathbb{C} sa \mathbb{R}^2) u nekoj tački $q = (q_1, q_2)$. Liniju L možemo parametrizovati na sledeći način

$$t \rightarrow (tq_1, tq_2, 1 - t).$$

Postoji t_0 tako da je

$$(p_1, p_2, p_3) = (t_0q_1, t_0q_2, 1 - t_0). \quad (3.2.12)$$

Iz (3.2.12) sledi da je $t_0 = 1 - p_3$, tako da je

$$q_1 = \frac{p_1}{t_0} = \frac{p_1}{1 - p_3} \text{ i } q_2 = \frac{p_2}{t_0} = \frac{p_2}{1 - p_3}.$$

Definicija 3.2.4. *Stereografska projekcija je preslikavanje*

$$st : S^2 \setminus (0, 0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$$

dato sa

$$st(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z}.$$

Lema 3.2.4. *Neka je $\Psi : D \rightarrow \mathbb{C}^3$ minimalna kriva i $\Psi' = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, neka je U vektorsko polje jediničnih normala dato sa (3.2.11), tada je*

$$st \circ U = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}.$$

Lema 3.2.5. *Neka je $\Psi : D \rightarrow \mathbb{C}^3$ minimalna kriva sa vektorskim poljem jediničnih normala U i pridruženom familijom $t \rightarrow z[t]$. Tada su koeficijenti druge kvadratne forme površi $z[t]$ dati sa*

$$\begin{cases} L(t) = -N(t) = \Re(e^{-it}\Psi''), \\ M(t) = -\Im(e^{-it}\Psi''). \end{cases}$$

Na osnovu Teoreme 3.1.1 sledi da su sve površi pridružene familije minimalnoj krivoj izometrične, kako izometrične površi imaju u odgovarajućim tačkama istu Gausovu krivinu, sledi da sve površi pridružene familije imaju istu Gausovu krivinu, tako da možemo govoriti o Gausovoj krivini minimalne krive Ψ podrazumevajući pod tim pojmom Gausovu krivinu bilo kog člana pridružene familije za Ψ .

Lema 3.2.6. *Gausova krivina minimalne krive $\Psi : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ je data sa*

$$K = \frac{-4(\|\Psi'\|^2\|\Psi''\|^2 - |\Psi'' \cdot \overline{\Psi'}|^2)}{\|\Psi'\|^6}.$$

Dokaz. Na osnovu Leme 3.2.3 imamo da je $\frac{\Psi' \times \overline{\Psi'}}{4} = \frac{i}{2}x_u \times x_v$, odakle na osnovu (3.2.9) sledi $\|\Psi'\|^2 = 2\|x_u \times x_v\| = 2\lambda^2$.

$$\begin{aligned} \Delta \log \lambda &= \frac{1}{2} \Delta \log \lambda^2 = 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} \log \|\Psi'\|^2 = 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} \log(\Psi' \cdot \overline{\Psi'}) \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\Psi'' \cdot \overline{\Psi'}}{\|\Psi'\|^2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\|\Psi'\|^2 \|\Psi''\|^2 - (\Psi'' \cdot \overline{\Psi'}) (\Psi' \cdot \overline{\Psi''})}{\|\Psi'\|^4} \right) \\ &= \frac{2(\|\Psi'\|^2 \|\Psi''\|^2 - |\Psi'' \cdot \overline{\Psi'}|^2)}{\|\Psi'\|^4}. \end{aligned}$$

Sada na osnovu formule za Gausovu krivinu izotermalne površi (1.3.8) imamo

$$\begin{aligned} K &= \frac{-\Delta \log \lambda}{\lambda^2} = - \left(\frac{2}{\|\Psi'\|^2} \right) \left(\frac{2(\|\Psi'\|^2 \|\Psi''\|^2 - |\Psi'' \cdot \overline{\Psi'}|^2)}{\|\Psi'\|^4} \right) \\ &= \frac{-4(\|\Psi'\|^2 \|\Psi''\|^2 - |\Psi'' \cdot \overline{\Psi'}|^2)}{\|\Psi'\|^6}. \end{aligned}$$

□

3.3 Nalaženje konjugovanih minimalnih površi i pridružene familije

Znamo da je minimalna izotermalna površ $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ realni deo n -torke (Ψ_1, \dots, Ψ_n) analitičkih funkcija. Postavlja se pitanje kako odrediti (Ψ_1, \dots, Ψ_n) polazeći od x ? Prvo se postavlja pitanje kako odrediti analitičku funkciju $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ čiji je realni deo data harmonijska funkcija $h : D \rightarrow \mathbb{R}$. To možemo uraditi koristeći Koši-Rimanove jednačine, ovaj metod zahteva integraciju. Međutim mnogo efikasniji metod je algebarski. Ideja je da u izrazu $h(x, y)$ realne promenljive x i y zamenimo kompleksnim promenljivama.

Lema 3.3.1. *Neka je $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija, gde je D otvoren podskup od $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, i neka je $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{C}$*

analitička funkcija takva da je $\Re(f(x+iy)) = h(x, y)$ i $\Im(f(z_0)) = 0$, tada je

$$f(z) = 2h\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - h(x_0, y_0). \quad (3.3.13)$$

Obrnuto, ako je f definisana sa (3.3.13), tada je $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analitička funkcija takva da je $f(z_0) = h(x_0, y_0)$.

Posledica 3.3.1. Neka je $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ minimalna izotermalna površ, gde je D otvoren podskup od $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Neka je $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n)$ kompleksifikacija za x takva da je $\Im(\Psi(0)) = 0$. Tada je

$$\Psi(z) = 2x\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - x(0, 0). \quad (3.3.14)$$

Konjugovana minimalna izotermalna površ y koja odgovara površi x i ispunjava uslov $y(0, 0) = (0, \dots, 0)$ je data sa

$$y(u, v) = \Im\left(2x\left(\frac{u+iv}{2}, \frac{u+iv}{2i}\right) - x(0, 0)\right). \quad (3.3.15)$$

Dokaz. Neka je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i za $j = 1, 2, \dots, n$ neka je Ψ_j kompleksifikacija od x_j takva da je $\Im\Psi_j(0) = 0$. Na osnovu prethodne leme imamo da je za svako $j = 1, 2, \dots, n$ funkcija Ψ_j oblika

$$\Psi_j(z) = 2x_j\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - x_j(0, 0),$$

pa je

$$\Psi(z) = 2x\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - x(0, 0)$$

odakle sledi (3.3.15). □

Prethodnu posledicu, tačnije formulu (3.3.14) možemo implementirati u programskom paketu *Mathematica* na sledeći način

```
harmonicctoanalytic[x_][z_] := Simplify[2*x[z/2, z/(2*I)] - x[0, 0]]
```

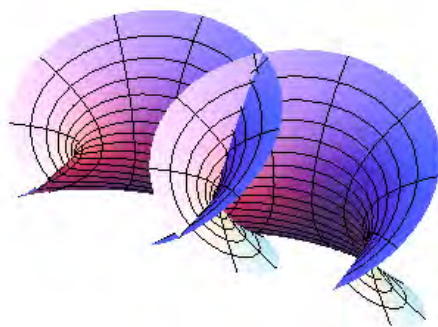
Sada nam je potreban operator koji će nam na osnovu date minimalne krive Ψ odrediti njen realni deo t.j. minimalnu izotermalnu površ x , takođe nam je potreban i operator za određivanje konjugovane minimalne izotermalne površi minimalnoj izotermalnoj površi x . U programskom paketu *Mathematica* ćemo definisati operator `analytictominimal` koji će nam na osnovu date minimalne krive odrediti čitavu pridruženu familiju.

```
analytictominimal[Psi_][t_][u_, v_] :=  
ComplexExpand[Re[E^(-I*t)*Psi[zz]] /. zz -> u + I*v]
```

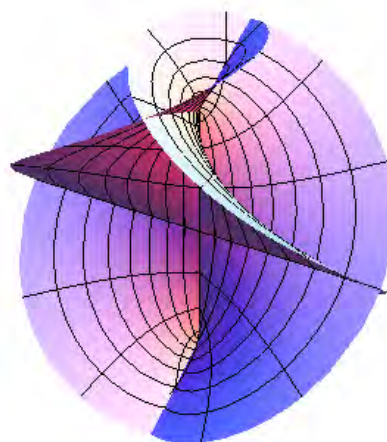
3.3. NALAŽENJE KONJUGOVANIH MINIMALNIH POVRŠI I PRIDRUŽENE FAMILIJE 51

Odgovarajućim izborom parametra t možemo dobiti bilo koju površ pridrūzene familije. Minimalnu izotermalnu površ x dobijamo za $t = 0$, dok njenu konjugovanu dobijamo za $t = \frac{\pi}{2}$.

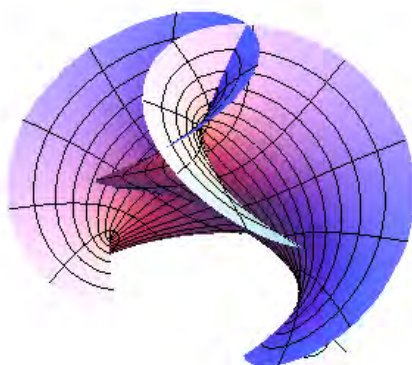
Prikaćemo pridrūzene familije nekih nama već poznatih površi. Na narednim slikama su prikazane neke od površi pridrūzene familije Katalanove minimalne površi.



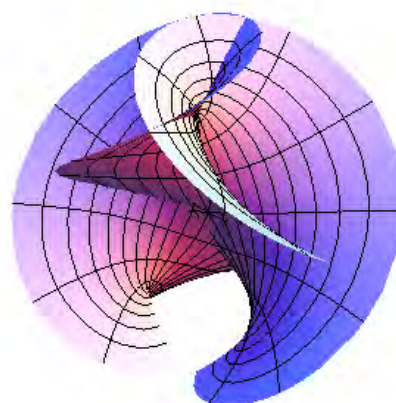
$$t = 0$$



$$t = \frac{\pi}{2}$$



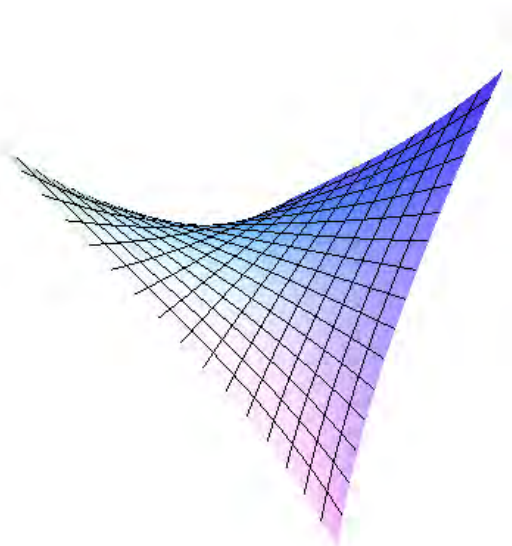
$$t = \frac{2\pi}{7}$$



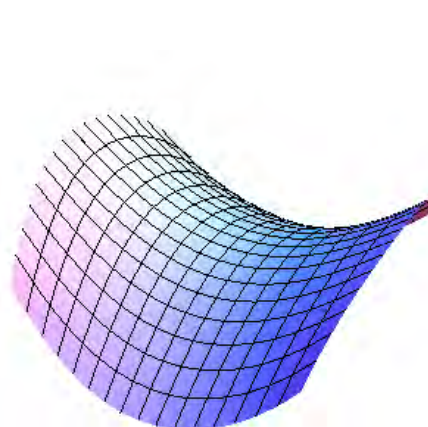
$$t = \frac{2\pi}{5}$$

3.3. NALAŽENJE KONJUGOVANIH MINIMALNIH POVRŠI I PRIDRUŽENE FAMILIJE 52

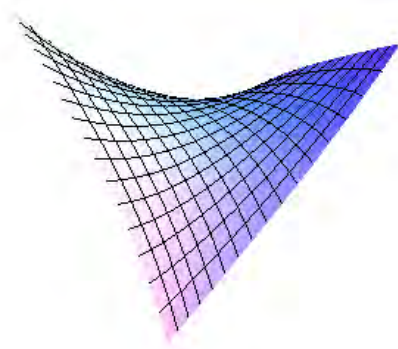
Na slikama su prikazane neke od površi pridružene familije Šerkove pete minimalne površi.



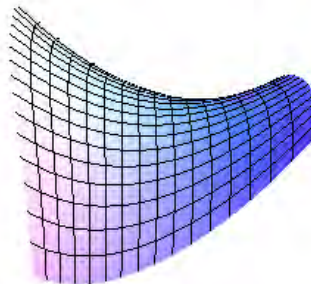
$$t = 0$$



$$t = \frac{\pi}{2}$$



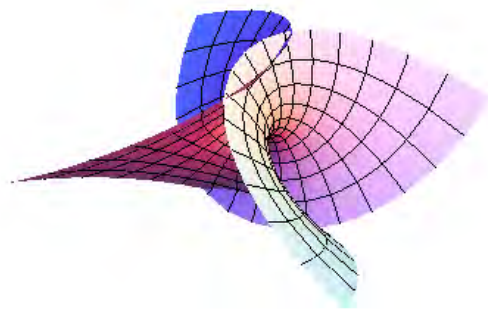
$$t = \frac{\pi}{6}$$



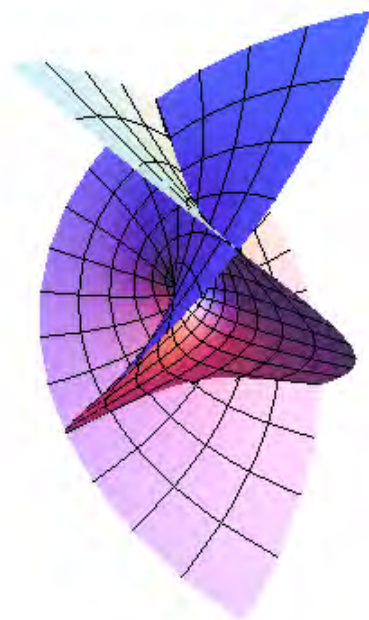
$$t = \frac{\pi}{3}$$

Na sledećim slikama ćemo prikazati neke od površi pridružene familije koja odgovara Eneperovoj minimalnoj površi.

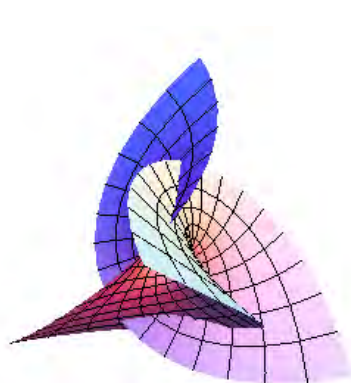
3.3. NALAŽENJE KONJUGOVANIH MINIMALNIH POVRŠI I PRIDRUŽENE FAMILIJE 53



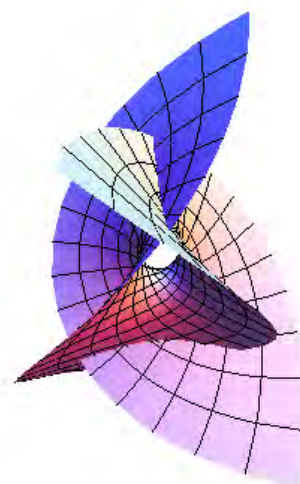
$$t = 0$$



$$t = \frac{\pi}{2}$$



$$t = \frac{\pi}{4}$$



$$t = \frac{3\pi}{8}$$

3.4 Eneperova površ stepena n

Izvršićemo uopštenje Eneperove površi, definisaćemo najpre minimalnu krivu

$$\text{ennepermincurve}[n](z) := \left(z - \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, i \left(z + \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \right), \frac{2z^{n+1}}{n+1} \right),$$

isto uradimo i u paketu *Mathematica*

```
ennepermincurve[n_][z_] := {z - z^(2*n+1)/(2*n+1),  
  I*(z + z^(2*n+1)/(2*n+1)), 2*z^(n+1)/(n+1)}
```

Neka je $\text{ennepermincurve}[n]' = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, može se proveriti da je $\Phi_1^2 \Phi_2^2 \Phi_3^2 = 0$ i da $|\Phi_1|^2 |\Phi_2|^2 |\Phi_3|^2$ nikad nije nula. Na osnovu Teoreme 3.1.2 možemo zaključiti da je $(u, v) \rightarrow \Re(\text{ennepermincurve}[n](u, v))$ minimalna površ. Nađimo polarnu parametrizaciju ove površi kao i svake površi njene pridružene familije jer ćemo tako lakše izvršiti vizualizaciju dotičnih površi.

Unesimo kod u programski paket *Mathematica*

```
PowerExpand[  
Simplify[  
ComplexExpand[  
analytictominimal[ennepermincurve[n]][t][  
r*Cos[theta], r*Sin[theta]], TargetFunctions->{Re, Im}]]]/.  
{ArcTan[r^2, 0] -> 0,  
ArcTan[r*Cos[theta], r*Sin[theta]] -> theta}]
```

kao rezultat dobijamo polarnu parametrizaciju proizvoljne površi pridružene familije, to je sledeća parametrizacija

$$\text{enneperpolar}[n][t](r, \theta) = \left(r \cos(t - \theta) - \frac{r^{2n+1} \cos(t - (2n+1)\theta)}{2n+1}, \right. \\ \left. r \sin(t - \theta) + \frac{r^{2n+1} \sin(t - (2n+1)\theta)}{2n+1}, \frac{2r^{n+1} \cos(t - (n+1)\theta)}{n+1} \right),$$

izvršimo njenu implementaciju

```
enneperpolar[n_][t_][r_, theta_] :=  
  {r*Cos[t-theta] - r^(2*n+1)*Cos[t-(2*n+1)*theta]/(2*n+1),  
   r*Sin[t-theta] + r^(2*n+1)*Sin[t-(2*n+1)*theta]/(2*n+1),  
   2*r^(n+1)*Cos[t-(n+1)*theta]/(n+1)}
```


Da izračunamo Gausovu krivinu ove površi, koristimo

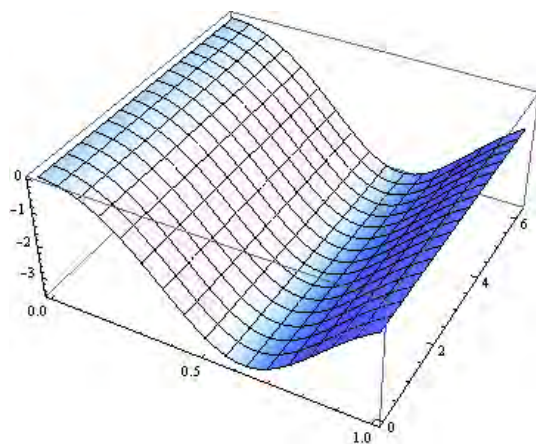
`gaussiancurvature[enneperpolar[n][t]][r,theta]`

i dobijamo da je Gausova krivina jednaka

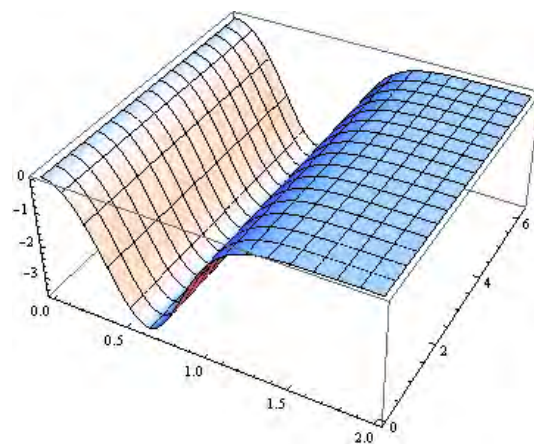
$$\frac{-4n^2 r^{-2+2n}}{(1+r^{2n})^4},$$

vidimo da ona teži nuli kada $r \rightarrow \infty$ i anulira se u koordinatnom početku kada je $n \geq 2$.

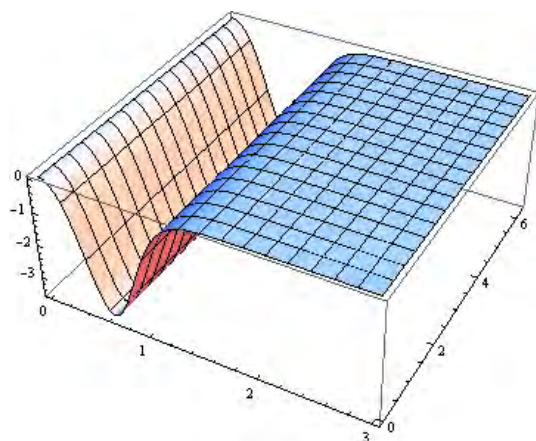
Prikažimo kako izgleda grafik ove Gausove krivine za $n = 2$ i $t = 0$, za različite vrednosti parametra r .



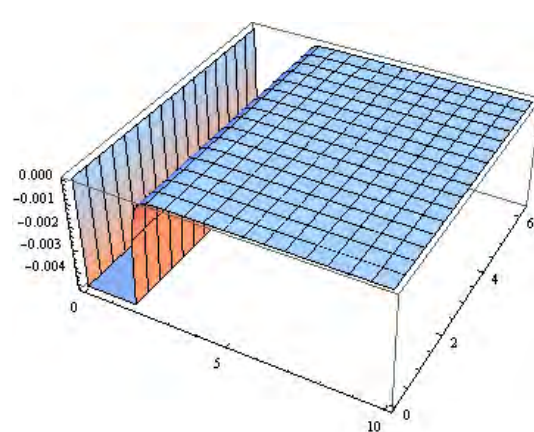
$$0 \leq r \leq 1$$



$$0 \leq r \leq 2$$



$$0 \leq r \leq 3$$



$$0 \leq r \leq 10$$

3.5 Borova minimalna površ

Pokazaćemo kako na osnovu Borove² minimalne krive

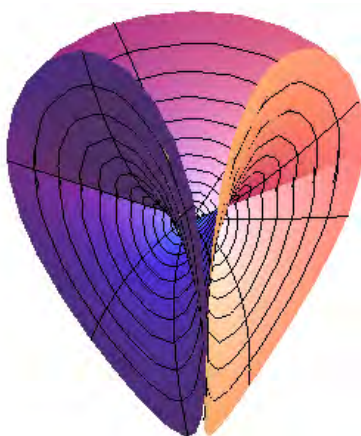
```
bourmincurve[m_][z_] :=
  {z^(m-1)/(m-1)-z^(m+1)/(m+1),
   I*(z^(m-1)/(m-1)+z^(m+1)/(m+1)), 2*z^m/m}
```

nalazimo Borovu minimalnu površ u polarnim koordinatama

```
PowerExpand[Simplify[ComplexExpand[
analytictominimal[bourmincurve[m]][t][
r*Cos[theta],r*Sin[theta]],TargetFunctions->{Re,Im}]]]/.
{ArcTan[r^2,0]->0,ArcTan[r*Cos[theta],r*Sin[theta]]->theta}]
```

Sada ćemo implementirati dobijenu parametrizaciju Borove minimalna površi u polarnim koordinatama

```
bourpolar[m_][t_][r_,theta_] :=
  {r^(m-1)*Cos[t-(m-1)*theta]/(m-1)-
   r^(m+1)*Cos[t-(m+1)*theta]/(m+1),
   r^(m-1)*Sin[t-(m-1)*theta]/(m-1)+
   r^(m+1)*Sin[t-(m+1)*theta]/(m+1),
   2*r^m*Cos[t-m*theta]/m}
```



Slika 3.5.1: Borova minimalna površ stepena 3

²Edmond Bour (1832-1866), francuski matematičar.

3.6 Vajerštrasova reprezentacija

Definicija 3.6.1. *Neka je D oblast kompleksne ravni \mathbb{C} , funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ je meromorfna u oblasti D ako je analitička u oblasti D sa izuzetkom nekog skupa tačaka koje su polovi funkcije f .*

Meromorfna funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ osim polova nema drugih singulariteta.

Definicija 3.6.2. *Neka su $f(z)$ i $g(z)$ meromorfne funkcije definisane u oblasti D kompleksne ravni \mathbb{C} . Fiksirajmo $z_0 \in D$ i definišimo*

$$\begin{cases} x_1(z) = \Re \left(\int_{z_0}^z \frac{f(w)}{2} (1 - g(w)^2) dw \right), \\ x_2(z) = \Re \left(\int_{z_0}^z \frac{if(w)}{2} (1 + g(w)^2) dw \right), \\ x_3(z) = \Re \left(\int_{z_0}^z f(w)g(w) dw \right), \end{cases}$$

$$i \quad \begin{cases} y_1(z) = \Im \left(\int_{z_0}^z \frac{f(w)}{2} (1 - g(w)^2) dw \right), \\ y_2(z) = \Im \left(\int_{z_0}^z \frac{if(w)}{2} (1 + g(w)^2) dw \right), \\ y_3(z) = \Im \left(\int_{z_0}^z f(w)g(w) dw \right). \end{cases}$$

gde je $z = u + iv$. Stavimo

$$x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

i

$$y(u, v) = (y_1(u, v), y_2(u, v), y_3(u, v)).$$

Površ x nazivamo Vajerštrasovom, a y konjugovanom Vajerštrasovom površi određenom meromornim funkcijama f i g .

Teorema 3.6.1. *Za bilo koju analitičku funkciju f i meromorfnu funkciju g , Vajerštrasova površ x i konjugovana Vajerštrasova površ y su minimalne izotermalne površi. Metrika na ovim površima je data sa*

$$ds^2 = \frac{1}{4} |f(z)|^2 (1 + |g(z)|^2)^2 |dz|^2,$$

specijalno x i y su izometrične, x i y su regularne osim u tačkama u kojima f vredi nula ili ima singularitet.

Posledica 3.6.1. *Neka su f i g meromorfne funkcije definisane u oblasti D kompleksne ravni \mathbb{C} i neka su x , y redom Vajerštrasova, konjugovana Vajerštrasova površ određena funkcijama f i g . Tada je*

$$z \rightarrow (x + iy)(z)$$

minimalna kriva.

Da važi i obrat ove posledice pokazuje nam sledeća lema.

Lema 3.6.1. *Neka je $\Psi : D \rightarrow \mathbb{C}^3$ minimalna kriva i $\Psi' = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Pretpostavimo da $\phi_1 - i\phi_2$ nije identički jednaka nuli. Definišimo*

$$f := \phi_1 - i\phi_2 \quad \text{ i } \quad g := \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}. \quad (3.6.16)$$

Tada f i g dovode do Vajerštrasove reprezentacije od Ψ , odnosno važi

$$\Psi' = \left(\frac{f}{2}(1 - g^2), \frac{if}{2}(1 + g^2), fg \right).$$

Dokaz. Iz (3.6.16) imamo da je

$$\phi_1 = \frac{f}{2}(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{if}{2}(1 + g^2) \quad \text{ i } \quad \phi_3 = fg.$$

□

Teorema 3.6.2. *Neka su date meromorfne funkcije f i g , pridružena familija Vajerštrasove površi određene funkcijama f i g je data sa*

$$t \rightarrow z[t] = (z_1[t], z_2[t], z_3[t]),$$

gde je

$$\begin{cases} z_1[t] = \Re(e^{-it} \int_{z_0}^z \frac{f(w)}{2}(1 - g(w)^2)dw), \\ z_2[t] = \Re(e^{-it} \int_{z_0}^z \frac{if(w)}{2}(1 + g(w)^2)dw), \\ z_3[t] = \Re(e^{-it} \int_{z_0}^z f(w)g(w)dw). \end{cases}$$

Tako da je za svako t površ $z[t]$ Vajerštrasova površ određena meromorfnim funkcijama $e^{-it}f$ i g .

Teorema 3.6.3. *Gausova krivina Vajerštrasove površi određene meromorfnim funkcijama f i g je data sa*

$$K = \frac{-16|g'|^2}{|f|^2(1 + |g|^2)^4}.$$

Štaviše, ista formula za Gausovu krivinu važi i za svaki član pridružene familije Vajerštrasove površi određene meromorfnim funkcijama f i g .

Posledica 3.6.2. *Gausova krivina Vajerštrasove površi određene funkcijama f i g se anulira u onim tačkama u kojima je g' jednaka nuli. Stoga, ako g' nije identički jednaka nuli, onda su nule Gausove krivine izolovane.*

Sledeća teorema nam daje formulu za jediničnu normalu, a samim tim i za Gausovo preslikavanje Vajerštrasove površi.

Teorema 3.6.4. *Neka je U jedinična normala Vajerštrasove površi koja je određena meromorfnim funkcijama f i g , a $st : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ stereografska projekcija. Tada je $st \circ U$ kao funkcija kompleksne promenljive upravo jednaka funkciji g i važi*

$$U(z) = \left(\frac{2\Re(g(z))}{|g(z)|^2 + 1}, \frac{2\Im(g(z))}{|g(z)|^2 + 1}, \frac{|g(z)|^2 - 1}{|g(z)|^2 + 1} \right).$$

Kako sve površi pridružene familije imaju isto Gausovo preslikavanje, to je formula za jediničnu normalu ista za sve članove pridružene familije Vajerštrasove površi određene meromorfnim funkcijama f i g , i data je prethodnom teoremom.

Pretpostavimo da su nam date meromorfne funkcije f i g . U programskom paketu *Mathematica* možemo generisati Vajerštrasovu površ određenu datim meromorfnim funkcijama f i g , kao i odgovarajuću pridruženu familiju. Zbog jednostavnosti uzećemo da je u Vajerštrasovoj reprezentaciji uvek $z_0 = 0$. Najpre ćemo definisati operator `wei` koji na osnovu datih meromorfni funkcija f i g generiše minimalnu krivu iz Posledice 3.6.1.

```
wei[f_,g_][z_]:=Module[{zz,tmp},
  tmp=Integrate[{(1-g[zz]^2)*f[zz]/2,
    I*(1+g[zz]^2)*f[zz]/2,f[zz]*g[zz]},zz];
  Simplify[tmp/.zz->z]]
```

Da bismo dobili parametrizaciju Vajerštrasove površi, kao i njene pridružene familije koristićemo operator `analytictominimal` koji smo ranije već definisali. Pokažimo sada kako sve to izgleda na konkretnim primerima.

Primer 3.6.1. *Katenoid se može dobiti kao Vajerštrasova površ određena meromorfnim funkcijama $f(z) = -e^{-z}$ i $g(z) = -e^z$. Nađimo sada minimalnu krivu iz Posledice 3.6.1 određenu meromorfnim funkcijama f i g koristeći pri tome skraćeno označavanje funkcija u paketu *Mathematica* komandom*

```
wei[(-E^(-#))&,(-E^#)&][z]
```

dobijamo parametrizaciju minimalne krive

$$\psi(z) = \left(\frac{1}{2}(e^{-z} + e^z), -\frac{1}{2}i(-e^{-z} + e^z), z \right).$$

Da bismo dobili pridruženu familiju koristimo

`analytictominimal[wei[(-E^(-#))&,(-E^#)&]][t][u,v]`

dobijamo parametrizaciju

$$z[t] = \left(\frac{1}{2}e^{-u} \cos t \cos v + \frac{1}{2}e^u \cos t \cos v - \frac{1}{2}e^{-u} \sin t \sin v + \frac{1}{2}e^u \sin t \sin v, \right. \\ \left. \frac{1}{2}e^{-u} \cos v \sin t - \frac{1}{2}e^u \cos v \sin t + \frac{1}{2}e^{-u} \cos t \sin v + \frac{1}{2}e^u \cos t \sin v, u \cos t + v \sin t \right)$$

Vajerštrasovu površ dobijamo izborom parametra $t = 0$, na sledeći način

`analytictominimal[wei[(-E^(-#))&,(-E^#)&]][0][u,v]`

kao rezultat dobijamo

$$\left(\frac{1}{2}e^{-u} \cos v + \frac{1}{2}e^u \cos v, \frac{1}{2}e^{-u} \sin v + \frac{1}{2}e^u \sin v, u \right),$$

to je Katenoid. Konjugovanu Vajerštrasovu površ dobijamo za izbor parametra $t = \pi/2$ i kao rezultat dobijamo sledeću parametrizaciju

$$\left(-\frac{1}{2}e^{-u} \sin v + \frac{1}{2}e^u \sin v, \frac{1}{2}e^{-u} \cos v - \frac{1}{2}e^u \cos v, v \right),$$

znamo da je helikoid konjugovana površ katenoidu, ali ova parametrizacija se ne poklapa ni sa parametrizacijom kružnog helikoida, ni sa parametrizacijom eliptičkog helikoida koje smo do sada navodili, bez brige, nismo pogrešili jer se ova parametrizacija dobija pomoću nama već poznate parametrizacije kružnog helikoida

`chelicoid[a_,c_][u_,v_] := {a*v*Cos[u], a*v*Sin[u], c*u}`

na sledeći način

`chelicoid[1,1][v+Pi/2,-Sinh[u]]-{0,0,Pi/2}`

Lema 3.6.2. *Vajerštrasova površ određena funkcijama*

$$f(z) = \left(1 - \frac{1}{z^4}\right) \text{ i } g(z) = z$$

je reparametrizacija površi $(u, v) \rightarrow (1/2)\text{henneberg}(u, -v)$.

Dokaz. Dokažimo lemu koristeći programski paket *Mathematica*. Izvršimo kompoziciju Vajerštrasove površi određene meromorfnim funkcijama f i g sa funkcijom $z \rightarrow e^z$ sledećom *Mathematica* komandom

```
analytictominimal[Composition[wei[(1-1/#^4)&,&#&],Exp]][0][u,v]//
Simplify
```

Kao rezultat komande, pri čemu smo prethodno u programu definisali parametrizaciju `henneberg`

```
Simplify[
analytictominimal[Composition[wei[(1-1/#^4)&,&#&],Exp]][0][u,v]
-henneberg[u,-v]/2]
```

dobijamo

$\{0, 0, 0\}$

čime je lema dokazana. □

3.7 Ričmondova minimalna površ

Izaberimo u Vajerštrasovoj reprezentaciji funkcije

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \text{ i } g(z) = z^{n+1},$$

minimalna površ koja se dobija za $n = 1$ naziva se Ričmondova³ minimalna površ. Kao rezultat *Mathematica* komande

```
wei[1/#^2&,&#^(n+1)&][z]//FullSimplify
```

dobijamo parametrizaciju minimalne krive određene meromorfnim funkcijama f i g , to je sledeća parametrizacija

$$richmondmincurve[n](z) = \left(-\frac{1}{2z} - \frac{z^{2n+1}}{4n+2}, -\frac{i}{2z} + \frac{iz^{2n+1}}{4n+2}, \frac{z^n}{n} \right),$$

izvršimo njenu implementaciju

```
richmondmincurve[n_][z_] := {-1/(2z)-z^(2n+1)/(4n+2),
-I/(2z)+I z^(2n+1)/(4n+2),z^n/n}
```

Kao što smo i do sada radili korišćenjem funkcije `analytictominimal` možemo dobiti pridruženu familiju, ali ovde ćemo pokazati kako da dobijemo parametrizaciju pridružene familije u polarnim koordinatama. Koristimo

³Herbert William Richmond (1863-1949), engleski matematičar.

```
PowerExpand[Simplify[ComplexExpand[
analytictominimal[richmondmincurve[n]][t][r*Cos[theta],r*Sin[theta]],
TargetFunctions->{Re,Im}]]]/.
{ArcTan[r^2,0]->0,ArcTan[r*Cos[theta],r*Sin[theta]]->theta}]
```

dobićemo sledeću parametrizaciju

$$\text{richmondpolar}[n][t](r, \theta) = \left(\frac{-\cos(t + \theta)}{2r} - \frac{r^{2n+1} \cos(t - (2n + 1)\theta)}{4n + 2}, \right. \\ \left. \frac{-\sin(t + \theta)}{2r} + \frac{r^{2n+1} \sin(t - (2n + 1)\theta)}{4n + 2}, \frac{r^n \cos(t - n\theta)}{n} \right),$$

izvršimo njenu implementaciju

```
richmondpolar[n_][t_][r_,theta_] :=
{-Cos[t+theta]/(2r)-r^(2n+1)*Cos[t-(2n+1)*theta]/(4n+2),
-Sin[t+theta]/(2r)+r^(2n+1)*Sin[t-(2n+1)*theta]/(4n+2),
r^n*Cos[t-n*theta]/n}
```

Izračunajmo Gausovu krivinu površi $\text{richmondpolar}[n][t](r, \theta)$ koristeći

```
gaussiancurvature[richmondpolar[n][t]][r,theta]
```

Gausova krivina je data sa

$$K = -\frac{16(1+n)^2 r^{4+2n}}{(1+r^{2+2n})^4},$$

dakle Gausova krivina je funkcija parametra r i svoj maksimum, vrednost 0, dostiže za $r = 0$. Koristeći programski paket *Mathematica* potražimo minimum ove funkcije za slučaj $n = 1$. Da nađemo kritične tačke Gausove krivine koristićemo funkciju `Solve` koja kada se primeni sa `Solve[izraz1==izraz2,x]` izračunava vrednost x koja zadovoljava jednačinu $\text{izraz1} = \text{izraz2}$.

```
Solve[D[gaussiancurvature[richmondpolar[1][t]][r,theta],r]==0,r]
```

Dobijamo kritične tačke Gausove krivine

$$0, -\left(\frac{3}{5}\right)^{1/4}, -i\left(\frac{3}{5}\right)^{1/4}, i\left(\frac{3}{5}\right)^{1/4}, \left(\frac{3}{5}\right)^{1/4}$$

Pošto znamo da je r pozitivan realan broj, zaključujemo da je $r = \left(\frac{3}{5}\right)^{1/4}$ kritična tačka Gausove krivine. Nađimo vrednost Gausove krivine u ovoj tački

```
gaussiancurvature[richmondpolar[1][t]][(3/5)^(1/4),theta]//
Simplify
```

dobijamo da je minimalna vrednost Gausove krivine

$$-\frac{75\sqrt{15}}{64}.$$

Iskoristimo sada *Mathematica* funkciju Hue da obojimo površ

$$(r, \theta) \rightarrow \text{richmondpolar}[1][0](r, \theta)$$

u zavisnosti od njene Gausove krivine. Pošto argument funkcije Hue mora biti iz intervala $[0, 1]$, vršimo normalizaciju funkcije

$$(r, \theta) \rightarrow \text{gaussiancurvature}[\text{richmondpolar}[1][0]][r, \theta]$$

tako da dobijemo funkciju sa vrednostima iz $[0, 1]$. Možemo posmatrati funkciju

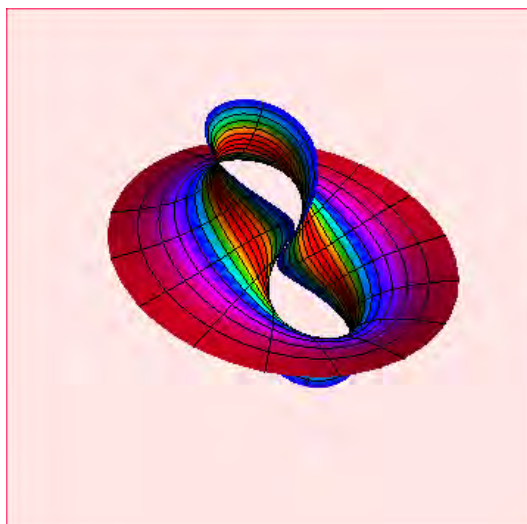
$$(r, \theta) \rightarrow \frac{\text{gaussiancurvature}[\text{richmondpolar}[1][0]][r, \theta] + \frac{75\sqrt{15}}{64}}{\frac{75\sqrt{15}}{64}}.$$

Za iscertavanje površi

$$(r, \theta) \rightarrow \text{richmondpolar}[1][0](r, \theta)$$

obojenu u zavisnosti od vrednosti njene Gausove krivine možemo koristiti

```
ParametricPlot3D[Append[richmondpolar[1][0][r,theta],
  Hue[(gaussiancurvature[richmondpolar[1][0]][r,theta]+
    75*15^(1/2)/64)/(75*15^(1/2)/64)]]//Evaluate,
{r,0.3,1.3},{theta, 0,2Pi},
PlotPoints->{20,40},Boxed->False,Lighting->False,Axes->None]
```



3.8 Trinoid

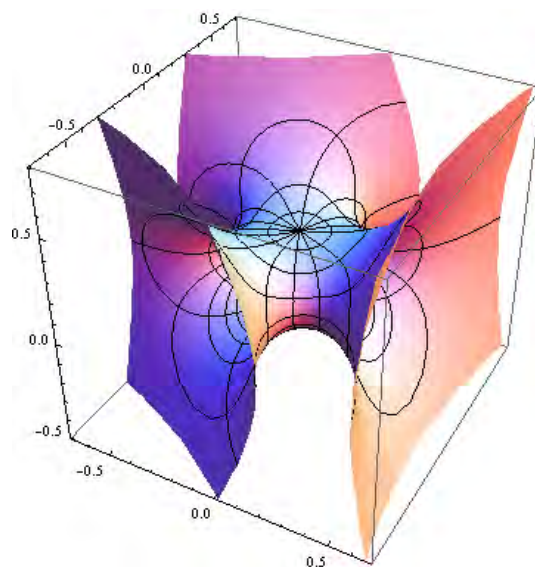
Trinoid se može dobiti kao Vajerštrasova površ određena meromorfnim funkcijama $f(z) = \frac{1}{(z^3-1)^2}$ i $g(z) = z^2$.

Trinoid u polarnim koordinatama možemo parametrizovati u paketu *Mathematica* na sledeći način

```
trinoid[r_,theta_]:=
  PowerExpand[
    Simplify[
      ComplexExpand[
        analytictominimal[wei[1/((#^3-1)^2&,#^2&)] [0] [
          r*Cos[theta],r*Sin[theta]],TargetFunctions->{Re,Im}]]/.
        {ArcTan[r^2,0]->0,ArcTan[r*Cos[theta],r*Sin[theta]]->theta}]
```

Za iscrtavanje možemo koristiti

```
ParametricPlot3D[
  Evaluate[trinoid[r,theta]],{r,0,4},
  {theta,0,2Pi},PlotPoints->{100,100},
  RegionFunction->(#1^2+#2^2+#3^2<6&)]
```



Funkcijom `RegionFunction` određujemo oblast u kojoj ćemo prikazati površ.

4. Bjorlingova formula

Bjorling je 1844. godine postavio pitanje: *da li je moguće naći minimalnu površ koja sadrži datu traku?* Ovo pitanje predstavlja Bjorlingov problem, Švarc¹ je elegantno rešio ovaj problem.

Postavimo sada problem precizno.

Definicija 4.0.1. *Neka su $\alpha, \gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ krive koje zadovoljavaju*

$$\|\gamma\| = 1 \quad i \quad \gamma \cdot \alpha' = 0. \quad (4.0.1)$$

Pretpostavimo da krive α i γ imaju holomorfne ekstenzije koje ćemo bez opasnosti od zabune označiti isto

$$\alpha, \gamma : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{C}^3$$

takve da (4.0.1) važi za svako $z \in (a, b) \times (c, d)$. Fiksirajmo $z_0 \in (a, b) \times (c, d)$, Bjorlingova kriva određena sa α i γ je data sa

$$bj[\alpha, \gamma](z) = \alpha(z) - i \int_{z_0}^z \gamma(z) \times \alpha'(z) dz.$$

U teoremi koja sledi ćemo se uveriti da je Bjorlingova kriva $bj[\alpha, \gamma]$ ustvari minimalna kriva i videti u kakvoj je vezi sa krivama α i γ .

Teorema 4.0.1. *Neka krive $\alpha, \gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadovoljavaju (4.0.1). Pretpostavimo da α i γ imaju holomorfne ekstenzije $\alpha, \gamma : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{C}^3$ takve da (4.0.1) važi za svako $z \in (a, b) \times (c, d)$. Tada važi:*

1. *Bjorlingova kriva $z \rightarrow bj[\alpha, \gamma](z)$ je minimalna kriva;*
2. *za realno u , preslikavanje $u \rightarrow (\Re(bj[\alpha, \gamma](u)) - \alpha(u))$ je konstantno;*
3. *za realno u , $U(u, 0) = \gamma(u)$, gde je U jedinična normala površi*

$$(u, v) \mapsto \Re(bj[\alpha, \gamma](u + iv)).$$

¹Herman Amandus Schwarz (1843-1921), nemački matematičar.

Dokaz. 1. Stavimo $\Psi := bj[\alpha, \gamma]$, tada je $\Psi' = \alpha' - i\gamma \times \alpha'$. Koristeći osobinu da za $a, b \in \mathbb{C}^3$ važi $\|a \times \bar{b}\| = \|a\|^2\|b\|^2 - |a \cdot \bar{b}|^2$ i (4.0.1) imamo da je

$$\begin{aligned}\Psi' \cdot \Psi' &= (\alpha' - i\gamma \times \alpha') \cdot (\alpha' - i\gamma \times \alpha') \\ &= \alpha' \cdot \alpha' - (\gamma \times \alpha') \cdot (\gamma \times \alpha') - 2i\alpha' \cdot (\gamma \times \alpha') \\ &= \alpha' \cdot \alpha' - \|\gamma \times \alpha'\|^2 = \\ &= \|\alpha'\|^2 - \|\gamma\|^2\|\alpha'\|^2 + |\gamma \cdot \alpha'|^2 \\ &= \|\alpha'\|^2 - \|\alpha'\|^2 = 0.\end{aligned}$$

Kako je ovako definisana funkcija Ψ još i analitička funkcija, to je Ψ minimalna kriva.

2. Sledi iz činjenice da su $\alpha(u)$ i $\gamma(u)$ realne vrednosti za realno u .
3. Primetimo da je

$$\Psi'(u) = \alpha'(u) - i\gamma(u) \times \alpha'(u) \quad \text{ i } \quad \overline{\Psi'(u)} = \alpha'(u) + i\gamma(u) \times \alpha'(u)$$

za realno u . Stoga, na osnovu (4.0.1) i na osnovu osobine da za $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ važi

$$(a \times b) \times (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

imamo da je $\Psi'(u) \cdot \overline{\Psi'(u)} = \alpha'(u) \cdot \alpha'(u) + (\gamma(u) \times \alpha'(u)) \cdot (\gamma(u) \times \alpha'(u)) = 2\alpha'(u) \cdot \alpha'(u)$, sada na osnovu osobine da za $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ važi

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

imamo da je

$$\Psi'(u) \times \overline{\Psi'(u)} = 2i\alpha'(u) \times (\gamma(u) \times \alpha'(u)) = 2i(\alpha'(u) \cdot \alpha'(u))\gamma(u)$$

Koristeći (3.2.11) nalazimo da je $U(u, 0) = \frac{\Psi'(u) \times \overline{\Psi'(u)}}{i\|\Psi'(u)\|^2} = \gamma(u)$. □

4.1 Konstrukcija minimalnih površi

U ovom poglavlju razmatramo specijalan slučaj Bjorlingove formule pomoću koje ćemo na osnovu date ravne krive γ konstruisati minimalnu površ koja krivu γ sadrži kao geodezijsku liniju.

Definicija 4.1.1. *Neka je S regularna površ. Nekonstantna parametrizovana kriva $\gamma : I \rightarrow S$ je geodezijska linija na površi S ako je polje njenih tangentnih vektora $\gamma'(t), t \in I$ paralelno duž γ .*

Geodezijska linija na površi je najkraća kriva među svim deo po deo diferencijabilnim krivama koje spajaju dve dovoljno bliske tačke na toj površi. Naziv geodezijska je uveo Liuvil² 1844. godine.

Važna osobina geodezijskih linija je da se one očuvavaju pod dejstvom izometrije i lokalne izometrije.

U nekim knjigama se prvo definiše geodezijska krivina, pa se geodezijska linija definiše kao linija na površi u čijoj je svakoj tački geodezijska krivina jednaka nuli, kada na ovaj način definišemo geodezijsku liniju onda važi sledeća teorema.

Teorema 4.1.1. *Kriva $C : x = x[u(s), v(s)]$ na površi $x = x(u, v)$ je geodezijska linija akko je prava ili je u svakoj tački krive C glavna normala krive kolinearna sa normalom površi.*

Definicija 4.1.2. *Kompleksna struktura prostora \mathbb{R}^2 je linearno preslikavanje $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definisano sa*

$$J(p_1, p_2) = (-p_2, p_1) \text{ za } \forall (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Geometrijski J predstavlja rotaciju za ugao $\frac{\pi}{2}$ u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu.

Teorema 4.0.1 nam omogućava da konstruišemo mnoge minimalne površi.

Na primer, neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna ravna kriva koja ima holomorfnu ekstenziju $\alpha : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{C}^2$, stavimo $\gamma := \frac{J\alpha'}{\|\alpha'\|}$, gde je J kompleksna struktura, tada je

$$\gamma \times \alpha' = -\|\alpha'\|E_3,$$

gde je E_3 vektorsko polje jediničnih normala na ravan \mathbb{R}^2 . Tako da je

$$bj[\alpha, \gamma](z) = \alpha(z) + i \left(\int_{z_0}^z \sqrt{\alpha'(z) \cdot \alpha'(z)} dz E_3 \right).$$

Definicija 4.1.3. *Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ravna kriva, pretpostavimo da α ima holomorfnu ekstenziju $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{C}^2$. Definišemo*

$$geomincurve[\alpha](z) := (\alpha_1(z), \alpha_2(z), i \int_{z_0}^z \sqrt{(\alpha'_1(z))^2 + (\alpha'_2(z))^2} dz).$$

Teorema 4.1.2. *Neka je β prirodno parametrizovana kriva koja leži u preseku regularne površi $S \subset \mathbb{R}^3$ i ravni Π . Pretpostavimo da površ S seče ravan Π ortogonalno duž krive β . Tada je β geodezijska linija na površi S .*

²Joseph Liouville (1809-1882), francuski matematičar.

Dokaz. Označimo sa U jediničnu normalu površi S . Vektori β , β' i $U \circ \beta$ leže u ravni Π , $U \circ \beta$ je ortogonalan na β' , a pošto je kriva β parametrizovana prirodnim parametrom to je i β'' ortogonalan na β' , znači da su vektori β'' i $U \circ \beta$ kolinearni, pa je na osnovu Teoreme 4.1.1 kriva β geodezijska linija. \square

Teorema 4.1.3. *Neka je $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ prirodno parametrizovana ravna kriva koja ima holomorfnu ekstenziju $\beta : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{C}^2$, gde je $c < 0 < d$. Tada je $\Re(\text{geomincurve}[\beta]) : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ minimalna površ koja sadrži β kao geodezijsku liniju.*

Posledica 4.1.1. *Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna ravna kriva koja ima holomorfnu ekstenziju $\alpha : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{C}^2$. Tada je*

$$\Re(\text{geomincurve}[\alpha]) : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

minimalna kriva koja sadrži krivu α za geodezijsku liniju, ali tek nakon njene reparametrizacije.

Definisaćemo `geomincurve` u programskom paketu *Mathematica*, najpre ćemo definisati funkciju koja za datu parametrizovanu krivu

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

daje veličinu $\sqrt{\sum_{k=1}^3 (\alpha'_k(t))^2}$, to će biti funkcija `arclegthprime` definisana kao što sledi

```
arclengthprime[alpha_][t_]:=
  Sqrt[Simplify[D[alpha[tt],tt].D[alpha[tt],tt]]]/.tt->t
```

zatim definišemo funkciju `arclength` dužine luka krive α kao integral funkcije `arclegthprime` na sledeći način

```
arclength[alpha_][t_]:=
  Integrate[arclengthprime[alpha][tt],tt]/.tt->t
```

Sada možemo definisati funkciju `geomincurve` na sledeći način

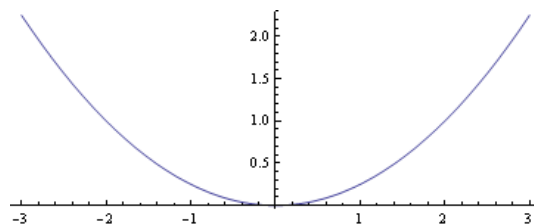
```
geomincurve[alpha_][z_]:=Append[alpha[z],
  I*Simplify[PowerExpand[arclength[alpha][z]]]]
```

Prvo koristimo funkciju `geomincurve` koja nam na osnovu date ravne krive daje odgovarajuću minimalnu krivu na koju zatim primenjujemo funkciju `analytictominimal` koja će nam kao rezultat dati minimalnu površ koja sadrži datu krivu kao geodezijsku liniju.

4.1.1 Minimalna površ koja sadrži parabolu kao geodezijsku liniju

Nađimo minimalnu površ koja za geodezijsku liniju ima parabolu

$$x^2 = 4ay,$$



Definišimo parametrizaciju parabole u programskom paketu *Mathematica*

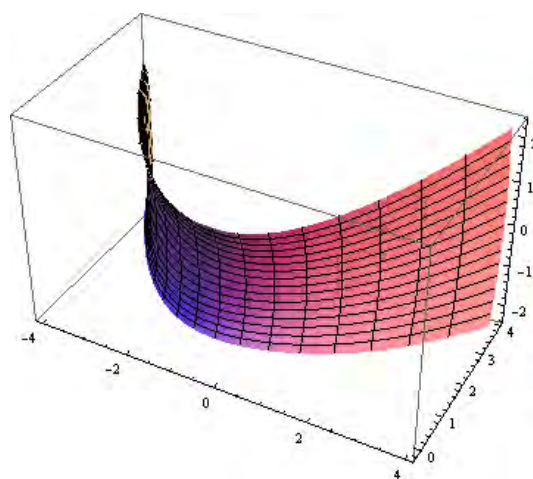
```
parabola[a_] [t_] := {2*a*t, a*t^2}
```

Parametrizaciju odgovarajuće minimalne krive dobijamo komandom

```
geomincurve[parabola[1]] [z]
```

Parametrizaciju odgovarajuće minimalne površi dobijamo komandom

```
analytictominimal[geomincurve[parabola[1]]] [0] [u,v] //  
FullSimplify
```



Slika 4.1.1: Minimalna površ koja sadrži parabolu kao geodezijsku liniju

Hipocikloida

Hipocikloida je kriva koju opisuje fiksirana tačka kružnice poluprečnika b koja se kotrlja unutar kružnice poluprečnika a , gde je $a > b$. Parametarska jednačina hipocikloide je

$$\varphi[a, b](t) = \left((a - b) \cos t + b \cos \left(\frac{(a - b)}{b} t \right), (a - b) \sin t - b \sin \left(\frac{(a - b)}{b} t \right) \right).$$

Specijalan slučaj hipocikloide kada je $b = \frac{a}{4}$ je astroida, a za $b = \frac{a}{3}$ imamo deltoidu.

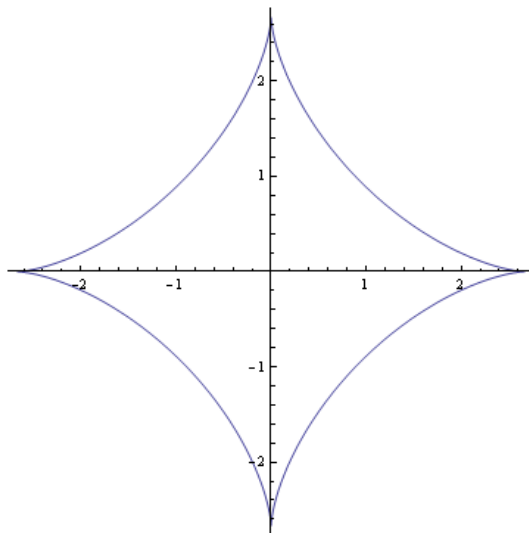
4.1.2 Minimalna površ koja sadrži astroidu kao geodezijsku liniju

Nađimo minimalnu površ koja ima astroidu

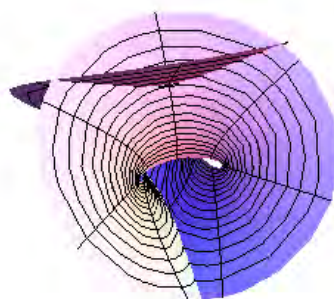
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{8}{3} \right)^{\frac{2}{3}}$$

za geodezijsku liniju.

```
astroid[a_][t_] := {a*Cos[t]^3, a*Sin[t]^3}
ParametricPlot[Evaluate[astroid[8/3][t]], {t, 0, 2Pi}]
```



```
ParametricPlot3D[Evaluate[
analytictominimal[geomincurve[astroid[8/3]]][0][u, v]], {u, -Pi, Pi},
{v, 0.1, 0.9}, Boxed->False, Axes->False, PlotRange->All]
```

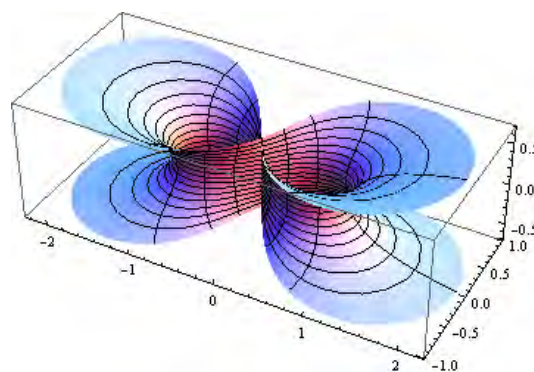
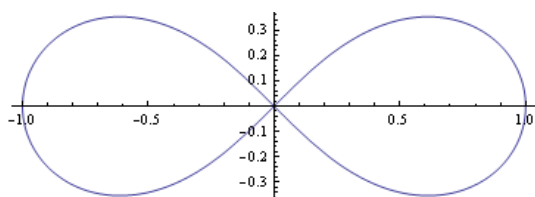


4.1.3 Minimalna površ koja sadrži lemniskatu kao geodezijsku liniju

Bernulijeva³ lemniskata kao i elipsa ima dve žize F_1 i F_2 i predstavlja skup tačaka u ravni za koje je proizvod rastojanja od ovih dveju žiza jednak datoj konstanti, u našem slučaju to će biti $\frac{a^2}{2}$, parametarska jednačina lemniskate je

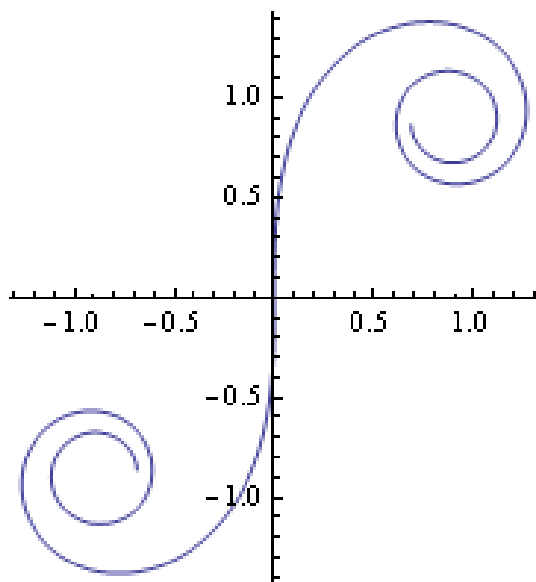
$$t \rightarrow \left(\frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right).$$

Na slici je prikazana lemniskata za koju je $a = 1$ i minimalna površ koja sadrži lemniskatu za geodezijsku liniju.

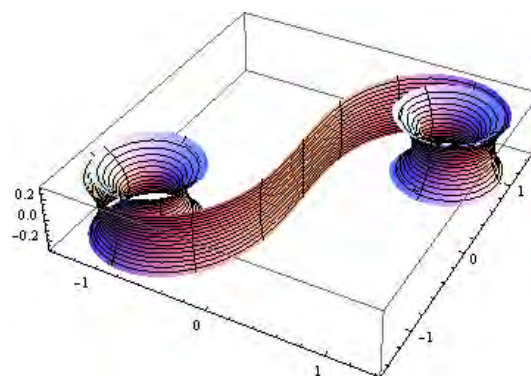


³Jakob Bernoulli (1654-1705), švajcarski matematičar.

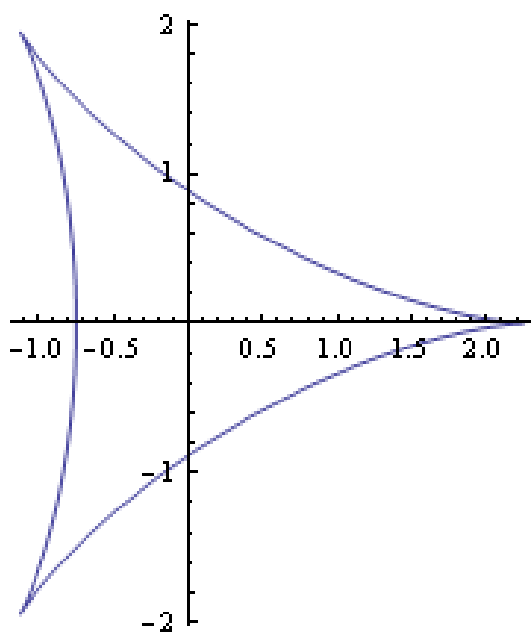
Klotoida je kriva čija je krivina proporcionalna dužini luka, poznata je kao Ojlerova spirala.



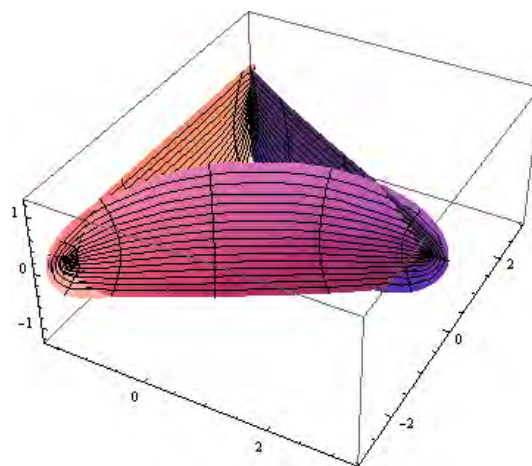
Klotoida



Minimalna površ koja
sadrži klotoidu za geode-
zijsku liniju

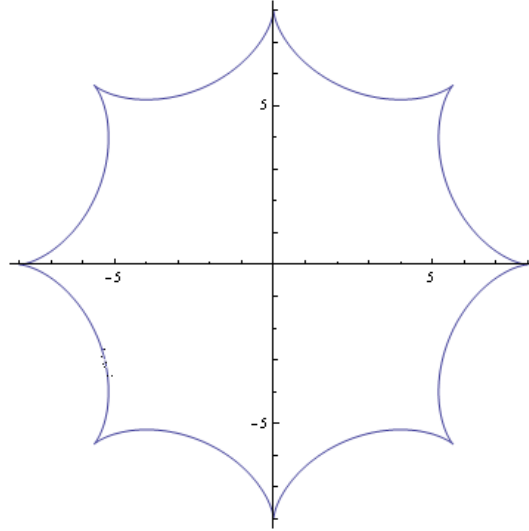


Deltoida



Minimalna površ koja
sadrži deltoidu kao geo-
dezijsku liniju

4.1.4 Minimalna površ koja ima involutu hipocikloide za geodezijsku liniju



Hipocikloida $a = 8$ i $b = 1$

Definicija 4.1.4. *Neka su u \mathbb{R}^3 date krive φ i ψ takve da kriva ψ seče pod pravim uglom tangente krive φ , za krivu ψ kažemo da je involuta ili evolventa krive φ , a za krivu φ da je evoluta za ψ .*

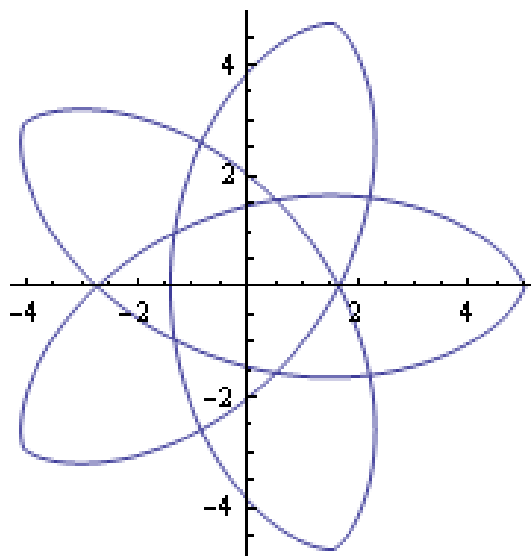
Neka je najpre kriva $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizovana prirodnim parametrom i $c \in (a, b)$, involuta krive φ sa početkom u tački $\varphi(c)$ je parametrizovana kriva

$$\psi[\varphi, c](s) = \varphi(s) + (c - s)\varphi'(s).$$

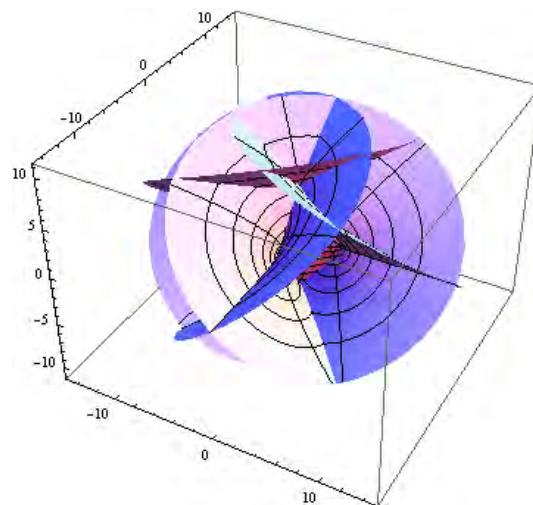
Kada je regularna kriva $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizovana proizvoljnim parametrom i $c \in (a, b)$ proizvoljna tačka, onda je involuta ψ krive φ sa početkom u tački $\varphi(c)$ data sa

$$\psi[\varphi, c](t) = \varphi(t) + (s_\varphi(c) - s_\varphi(t)) \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$

gde je $t \rightarrow s_\varphi(t)$ funkcija dužine luka krive φ .

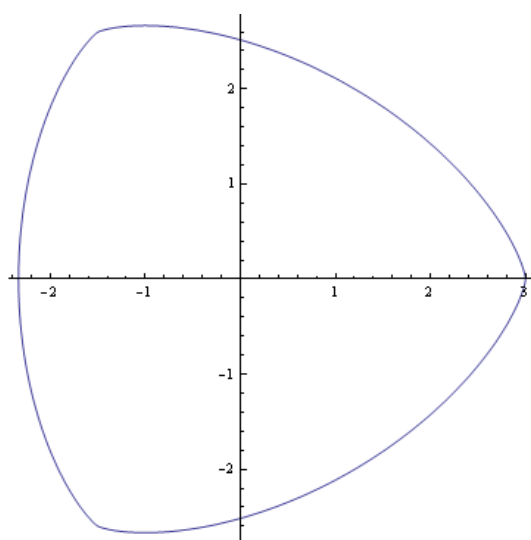


Involuta hipocikloide

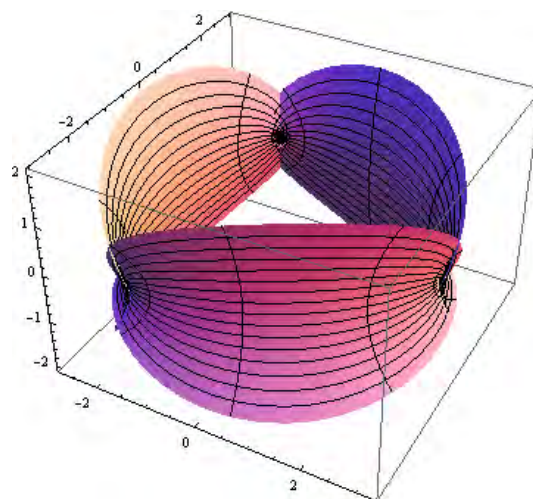
Minimalna površ koja
sadrži involutu hipoci-
kloide kao geodezijsku li-
niju

Involuta deltoide sa početkom u tački $t = 0$ je parametrizovana kriva

$$\psi[a](t) = \left(\left(\frac{a}{3} \right) \left(8 \cos \frac{t}{2} + 2 \cos t - \cos 2t \right), \left(\frac{a}{3} \right) \left(-8 \sin \frac{t}{2} + 2 \sin t + \sin 2t \right) \right).$$



Involuta deltoide

Minimalna površ koja
sadrži involutu deltoide
kao geodezijsku liniju

Zaključak

Površni nulte srednje krivine su verovatno najviše izučavane površi u diferencijalnoj geometriji, osobina da su to površi koje za datu granicu imaju minimalnu površinu čini ih pogodnim za primenu u građevini jer će se za izgradnju građevinskih elemenata koji su oblika minimalnih površi utrošiti minimalna količina materijala.

Ovaj rad je prikazao samo jedan mali delić onog što teorija minimalnih površi zaista nudi. Korišćenjem programskog paketa *Mathematica* može se izvršiti ne samo vizualizacija površi nulte srednje krivine već implementacijom matematičkih rezultata iz XIX veka, na primer Vajerštrasove reprezentacije mogu se generisati mnoge minimalne površi jednostavnim zadavanjem meromorfni funkcija f i g kompjuterskom programu, takođe mogu se rešiti neki konkretni problemi kao što je na primer specijalan slučaj Bjorlingovog problema t.j. nalaženje minimalne površi koja za geodezijsku liniju ima unapred zadatu ravnu krivu.

Bilo bi interesantno nastaviti sa konstruisanjem minimalnih površi na osnovu datih ravnih krivih primenom programskog paketa *Mathematica*.

Literatura

- [1] Dimitrijević R., *Analiza realnih funkcija više promenljivih*, Prirodno matematički fakultet u Nišu, Niš 1999.
- [2] Do Carmo M. P. , *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey 1976.
- [3] Gray A., *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, CRC Press LLC, Florida, 1998.
- [4] Kočinac Lj., *Linearna algebra i analitička geometrija*, Prirodno matematički fakultet u Nišu, Niš 1997.
- [5] Кривошاپко С. Н., Иванов В. Х., *Энциклопедия аналитических поверхностей*, ЛИБРОКОМ, Москва, 2009.
- [6] Minčić S., Velimirović Lj., *Diferencijalna geometrija krivih i površi*, Prirodno matematički fakultet u Nišu, Niš 2007.
- [7] Osserman R., *A survey of minimal surfaces*, Dover publications, INC. New York, 1969.
- [8] Velimirović Lj., Radivojević G., Stanković M., Kostić D., *Minimal surfaces for architectural constructions*, Facta universitatis **6** No. 1 (2008) 89-96.
- [9] Velimirović Lj., Zlatanović M., Stanimirović P., *Geometrija krivih i površi uz korišćenje paketa Mathematica*, Prirodno matematički fakultet u Nišu, Niš 2010.
- [10] Wolfram S., *The Mathematica Book, 5th ed.*, Wolfram Media, Champaign, 2003.
- [11] Шабат Б. В. , *Введение в комплексный анализ*, Nauka, Moskva, 1969.
- [12] http://en.wikipedia.org/wiki/Minimal_surface
- [13] http://en.wikipedia.org/wiki/Mean_curvature
- [14] <http://library.wolfram.com/infocenter/Books/3759>

Biografija

Miloš Petrović je rođen 17.12.1989. godine u Kruševcu, Republika Srbija. Osnovnu školu „Jovan Popović“ je završio u Kruševcu kao nosilac Vukove diplome, srednju Mašinsko elektrotehničku školu, smer elektrotehničar računara završio je u Kruševcu.

Prirodno matematički fakultet u Nišu, Odsek za matematiku i informatiku upisao je školske 2008/2009. godine, smer Matematika. Osnovne akademske studije je završio u septembru 2011. godine sa prosečnom ocenom 10, iste godine upisuje diplomatske akademske studije na smeru Matematika Prirodno matematičkog fakulteta u Nišu. Prosečna ocena na diplomskim akademskim studijama je 10.