

Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix durch „Methode der vergrößerten Matrix“

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I}' = \text{I} \\ \text{II}' = \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III}' = \text{III} - 2\text{I} \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I}'' = \text{I}' \\ \text{II}'' = (-\frac{2}{5}) \text{II}' \\ \text{III}'' = \text{III}' - \frac{4}{5} \text{II}' \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I}''' = \text{I}'' \\ \text{II}''' = \text{II}'' \\ \text{III}''' = -\frac{9}{5} \text{III}'' \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I}^{IV} = \text{I}''' + \text{III}''' \\ \text{II}^{IV} = \text{II}''' + \frac{1}{5} \text{III}''' \\ \text{III}^{IV} = \text{III}''' \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}$$

Aufgabe 1 (Fortsetzung)

$$I^v = I^{iv} - 3 \underline{III}^{iv}$$

$$II^v = II^{iv}$$

$$III^v = III^{iv}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

$$A^{-1}$$

Prüfe gefundenes A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Aufgabe 2

$$|A| = \underline{\underline{-15}}$$

$$|B| = 1 \cdot 4 - 4 \cdot 9 = \underline{\underline{-32}}$$

$$|C| = -|B| = \underline{\underline{32}} \quad (\text{Vertauschung zweier Spalten})$$

$$|D| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \quad (\text{Entwicklung nach letzter Spalte})$$
$$= 2 - 15 + 40 - 28$$

$$\underline{\underline{|D| = -1}}$$

$$|E| = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-12 + 12) - 3(-9 + 10) + 4(18 - 20)$$

$$\underline{\underline{|E| = -11}}$$

$$\underline{\underline{|F| = 0}}, \text{ weil eine Spalte nur aus Nullen besteht.}$$

$$|G| = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\underline{\underline{|G| = 30}}$$

$$\underline{\underline{|H| = 0}} \quad \text{Addiert man das Zweifache der 3. Zeile zur 5. Zeile, so erh\u00e4lt man eine Zeile aus Nullen} \Rightarrow \underline{\underline{|H| = 0}}$$

$$|I| = 5 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-140}}$$

Aufgabe 3

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

tausche
1. und 2.
Spalte

$$= - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

tausche
2. und 4.
Zeile

$$= + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

-2x2. Zeile zur
3. und 4.

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

Klammere jeweils

eine 3 aus 1. und
4. Zeile aus

$$= 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

4. Zeile - 3. Zeile

$$= 9 \begin{vmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Klammere 3 aus
4. Zeile aus

$$= 27 \begin{vmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

addiere 4. Zeile
mit geeignetem
Faktor zu 1-3.

$$= 27 \begin{vmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Zeile plus $(-\frac{1}{3})$ 2. Zeile plus $(-\frac{1}{3})$ 3. Zeile

$$= 27 |E|$$

$$\Rightarrow |A| = 27 |E|$$

$|E| = 1 \Rightarrow d = 27$ ist die Determinante von A.

Aufgabe 4

$$\text{Es gilt: } |AB| = |A||B|$$

$$AA^{-1} = E \quad \text{für reguläre Matrix } A$$

$$\Rightarrow |E| = |A||A^{-1}|$$

$$|E| = 1$$

$$\Rightarrow |A| = \frac{1}{|A^{-1}|} \quad \checkmark$$
