Département de génie mécanique
Polytechnique Montréal

Turbulence

Projet — Méthodes d'identification de tourbillons et modélisation d'une couche limite turbulente

Directives : *Le projet est à rendre* ***au plus tard*** *le vendredi 25 avril.*

Partie n° 1 — Méthodes d'identification de tourbillons

Cette partie va vous permettre de programmer quelques techniques couramment utilisées pour identifier des structures tourbillonnaires dans les écoulements turbulents. Ces méthodes seront appliquées à des données expérimentales obtenues à l'aide d'un système de vélocimétrie par image de particules (PIV) sur un banc de mesure du LADyF permettant de générer un jet confiné dans un tube. Les mesures se composent des 2 composantes de vitesse obtenues dans un plan contenant l'axe du jet. L'axe x correspond à la direction principale de l'écoulement qui s'effectue de la gauche vers la droite et l'axe y à un rayon quelconque du jet.

Les données, disponibles sur Moodle, sont réparties dans deux archives au format `.zip`. La première, `champs.zip`, contient 20 champs de vitesse dont les acquisitions ont été obtenues à $\Delta t = 2.5$ ms d'intervalle. Pour comprendre la structure d'un fichier, ouvrez-en un. Chacun comprend 4 colonnes de données numériques, les deux premières correspondant aux coordonnées x et y en mm et les deux suivantes aux composantes de vitesse u (suivant x) et v (suivant y) en m/s du vecteur vitesse $\mathbf{u}$. Le maillage est formé de 71 valeurs sur l'axe x, espacées de Δx et identifiées par l'indice i, et 39 valeurs sur l'axe y, espacées de Δy et identifiées par l'indice j.

La seconde archive, `signaux.zip`, est composée de 71 fichiers. Chacun d'entre eux comprend $N = 1632$ valeurs temporelles consécutives de vitesse, les composantes u et v, toujours espacées de $\Delta t = 2.5$ ms, extraites en un point d'abscisse x_i et d'ordonnée y_j, les indices i et j étant indiqués dans le nom du fichier et correspondent à ceux des champs de vitesse de la première archive. On pourra alors s'apercevoir que l'archive contient des données de tous les points se trouvant sur une droite d'ordonnée $y =$ cste ($j = 26$), les coordonnées x et y de chacun des points étant indiquées dans le fichier correspondant.

Afin d'avoir une première idée de l'organisation de l'écoulement, vous pouvez commencer par visualiser l'évolution temporelle des 20 champs de vitesse. En traçant les isocontours de la composante u, on pourra remarquer qu'à l'origine du jet, l'écoulement est stationnaire, mais qu'au fur et à mesure que l'on se déplace en aval, des perturbations de vitesse apparaissent et s'amplifient dans l'espace et le temps. Notre objectif va être de détecter les structures tourbillonnaires qui naissent dans l'écoulement.

Pour commencer, nous allons analyser l'effet qu'a un changement de repère sur les champs de vitesse. Plus précisément, le mouvement de rotation des structures tourbillonnaires peut être mis en évidence en visualisant les données dans un repère se déplaçant à la vitesse de convection des structures. Il faut donc dans un premier temps estimer cette vitesse de convection, que l'on notera U_c, en utilisant les corrélations spatio-temporelles des fluctuations de vitesse. Le travail demandé est le suivant :

1. Lire les données de l'archive `signaux.zip` et calculer les coefficients de corrélation temporelle entre le point de référence ($i_0 = 37, j = 26$) et l'ensemble des points se trouvant sur la même ligne, soit ($1 \leq i \leq 71, j = 26$). Le coefficient de corrélation est défini par :
$$\mathcal{R}_{0i}(r,\tau) = \frac{\overline{u'(x_{i_0},t)u'(x_i,t+\tau)}}{\sqrt{\overline{u'^2(x_{i_0},t)}}\sqrt{\overline{u'^2(x_i,t)}}} = \frac{\overline{u'_0(t)u'_i(t+\tau)}}{\sqrt{\overline{u'^2_0(t)}}\sqrt{\overline{u'^2_i(t)}}} \tag{1}$$
où $r = x_i - x_{i_0} = (i - i_0)\Delta x$. Pour $\tau \geq 0$, la moyenne temporelle se calcule par la relation suivante :
$$\overline{u'_0(t)u'_i(t+\tau)} = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} u'_0(t)u'_i(t+\tau)dt \tag{2}$$
qui tient compte du fait que le domaine d'intégration doit varier avec τ puisque les signaux sont de durée finie. Pour $\tau < 0$, on peut également adapter de la même façon le domaine d'intégration, mais le plus souvent on utilise plutôt la relation :
$$\mathcal{R}_{0i}(r,-\tau) = \mathcal{R}_{i0}(r,\tau) \tag{3}$$
car cela présente l'avantage qu'au niveau de la programmation, on peut simultanément calculer, pour un τ donné, $\mathcal{R}_{0i}(\tau)$ et $\mathcal{R}_{i0}(\tau)$. Considérer les délais $\tau_k = k\Delta t$, avec $-K \leq k \leq K$, et choisir K suffisamment grand pour que le pic de corrélation soit détecté (une centaine de valeurs devrait suffire). Pour $\tau > 0$, la moyenne temporelle *discrète* s'écrit :
$$\overline{u'_0(t)u'_i(t+\tau_k)} = \frac{1}{N-k}\sum_{n=0}^{N-k-1} u'_0\big[n\Delta t\big]u'_i\big[(n+k)\Delta t\big] \tag{4}$$
2. Tracer les isocontours des coefficients de corrélation sur un graphique 2D avec r en abscisse et τ en ordonnée et interpréter les résultats. En déduire une valeur approchée de la vitesse de convection U_c.
3. Visualiser le champ de vecteurs ainsi que les lignes de courant du dernier fichier de données (`champs0020.dat`) dans le référentiel de mesure puis dans celui se déplaçant avec les tourbillons. Pour ce dernier, il suffit simplement de retrancher la vitesse de convection, autrement dit de visualiser le champ de vecteurs $(u - U_c; v)$. Que constatez-vous ? Les tourbillons apparaissent-ils plus clairement dans ce référentiel ? Commenter.
4. Calculer la composante de la vorticité $\omega = \omega_z$ dans la direction perpendiculaire au plan de mesure. Décrire succinctement les résultats obtenus. La vorticité coïncide-t-elle avec les résultats de la question précédente ?
5. Nous avons vu en cours plusieurs critères basés sur les invariants du tenseur des gradients de vitesse. Nous allons ici nous intéresser au critère $Q = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[(\nabla\mathbf{u})^2\right]$. Toujours avec le dernier champ mesuré (`champs0020.dat`), donner l'expression de Q en fonction des dérivées spatiales de $\mathbf{u}$ en notation indicielle dans le cas d'un fluide incompressible. Bien que notre écoulement soit 3D, les mesures ne fournissent que 2 composantes de vitesse dans un plan. Nous allons donc utiliser une version 2D du critère Q, que nous allons noter Q_{2D}. Expliciter alors les différents termes de Q_{2D} en fonction des variables accessibles (comme si l'écoulement était 2D plan) et calculer Q_{2D} pour le 20ᵉ champ. Commenter l'allure du champ Q_{2D} par rapport au champ ω.

Partie n° 2 — Modélisation d'une couche limite turbulente

Note : *On adoptera ici les notations du cours.*

Pour une couche limite, sans gradient de pression et d'épaisseur δ, on a en paroi :

$$-\rho\overline{u'v'} + \mu\frac{d\overline{U}}{dy} = \tau_\mathrm{p}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \qquad \text{soit} \qquad -\overline{u'v'}^{+} + \frac{dU^+}{dy^+} \simeq 1 - \frac{y^+}{\delta^+}.$$

En adoptant le modèle de BOUSSINESQ $\overline{u'v'} = -\nu_\mathrm{t} d\overline{U}/dy$, on obtient, pour la zone interne de la couche limite ($y \ll \delta$) :

$$\left(1 + \nu_\mathrm{t}^+\right)\frac{dU^+}{dy^+} = 1 \qquad \text{avec} \qquad \nu_\mathrm{t}^+ = \frac{\nu_\mathrm{t}}{\nu}. \tag{5}$$

Suivant un raisonnement inspiré de la théorie cinétique des gaz, PRANDTL a proposé en 1925 de modéliser la viscosité turbulente par

$$\nu_\mathrm{t} = \ell_\mathrm{m}^2\left|\frac{\partial\overline{U}}{\partial y}\right|,$$

où ℓ_m est appelée **longueur de mélange** et caractérise l'échelle de turbulence en un point donné (elle dépend donc en général des coordonnées). On a alors :

$$\overline{u'v'}^{+} = -\ell_\mathrm{m}^{+2}\left|\frac{\partial U^+}{\partial y^+}\right|\frac{\partial U^+}{\partial y^+} \qquad \text{avec} \qquad \ell = \kappa y \quad \text{soit} \quad \ell_\mathrm{m}^+ = \kappa y^+ \tag{6}$$

où $\kappa = 0.41$ est la constante de Kármán.

1. Résoudre numériquement l'équation (5) dans le cas où l'on utilise le modèle (6). Pour intégrer (5), on pourra exprimer analytiquement la dérivée dU^+/dy^+ et utiliser un algorithme de résolution numérique (par exemple Runge–Kutta sur Matlab, ou bien un simple schéma d'Euler en utilisant un pas en espace suffisamment petit) pour calculer le profil de vitesse de $y^+ = 0$ à $y^+ = 500$.
2. En réalité, (5) possède une solution analytique qui est la suivante (je vous promets que vous ne voulez pas savoir comment on obtient cette solution...) :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa}\frac{1 - \sqrt{1 + 4\left(\kappa y^+\right)^2}}{2\kappa y^+} + \frac{1}{\kappa}\ln\left[2\kappa y^+ + \sqrt{1 + 4\left(\kappa y^+\right)^2}\right].$$

   Vous pourrez donc comparer la solution numérique obtenue avec la solution exacte.
3. Estimer alors la constante B de la loi logarithmique en calculant par exemple l'expression :

$$B = U^+ - \frac{1}{\kappa}\ln y^+$$

   à partir de la solution numérique pour $y^+ = 200, 300, 400$ et 500. Commenter le résultat obtenu.

4. Reprendre l'intégration numérique en utilisant le modèle de fonction de paroi proposé par VAN DRIEST (1956) :

$$\ell_{\mathrm{m}}^{+} = \kappa y^{+} \left(1 - \mathrm{e}^{-y^{+}/A_0^{+}}\right) \qquad \text{avec} \qquad A_0^{+} = 26.$$

5. Tracer les deux profils de vitesse obtenus, ainsi que les deux lois asymptotiques dans la sous-couche visqueuse et dans la région logarithmique. Tracer également sur une autre figure les deux lois de longueur de mélange. Comment VAN DRIEST a t-il modifié le modèle initial $\ell_{\mathrm{m}}^{+} = \kappa y^{+}$?
6. Effectuer un développement limité pour $y^{+} \to 0$ des grandeurs ℓ_{m}^{+} et $-\overline{u'v'}^{+}$ pour les deux modèles. Quel est le comportement théorique de la quantité $-\overline{u'v'}^{+}$ lorsque $y^{+} \to 0$? Commenter.
7. Pour les plus courageux d'entre vous, reprendre, avec le modèle de VAN DRIEST, l'intégration de l'équation complète gouvernant le profil de vitesse moyenne dans une couche limite turbulente :

$$\left(1 + \nu_{\mathrm{t}}^{+}\right) \frac{dU^{+}}{dy^{+}} = 1 - \frac{y}{\delta} = 1 - \frac{y^{+}}{\mathcal{R}e_{\tau}},$$

   c'est à dire en y incluant le terme en y/δ pour obtenir la loi logarithmique déficitaire. On utilisera les valeurs numériques suivantes, tirées d'une expérience utilisant de l'eau comme fluide : $\delta = 7.7$ cm, $u_{\tau} = 0.21$ cm/s et $\nu = 10^{-6}$ m²/s. On notera également que l'intervalle pour l'intégration est donné par $0 < y < \delta$.

Bonnes vacances !