

# **MEC8211 - Vérif. et valid. en modélisation numérique**

---

**Projet** - Vérification d'une orthèse optimisée  
topologiquement sollicitée mécaniquement en grande  
déformation

**Etudiants :**

- Cédric Fiorello
- Gauthier Brunel
- François Gleyzon

**Lien vers le GitHub :**

[https://github.com/GauthierBRUNEL/MEC8211\\_projet](https://github.com/GauthierBRUNEL/MEC8211_projet)

# TABLE DES MATIERES

## I. Introduction

## II. Modèle mathématique

## III. Discrétisation

## IV. Vérification de code

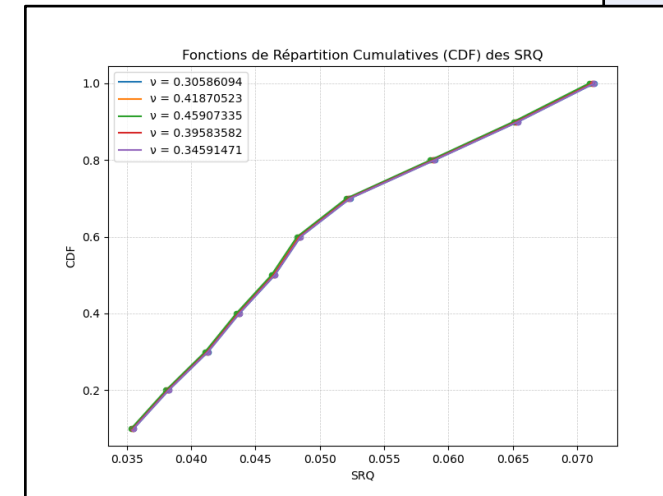
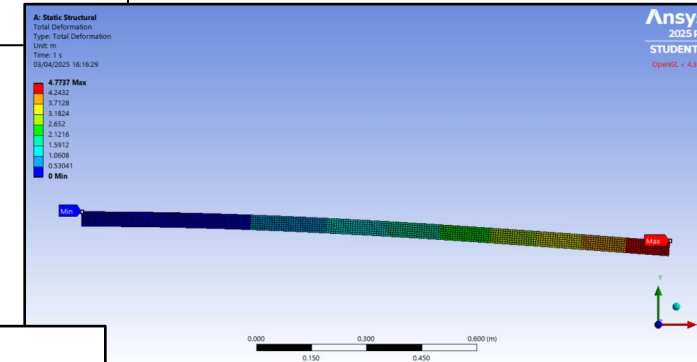
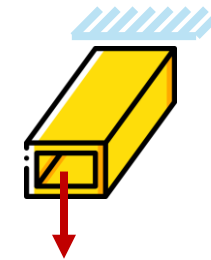
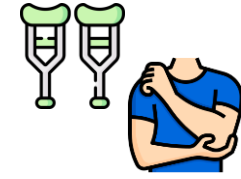
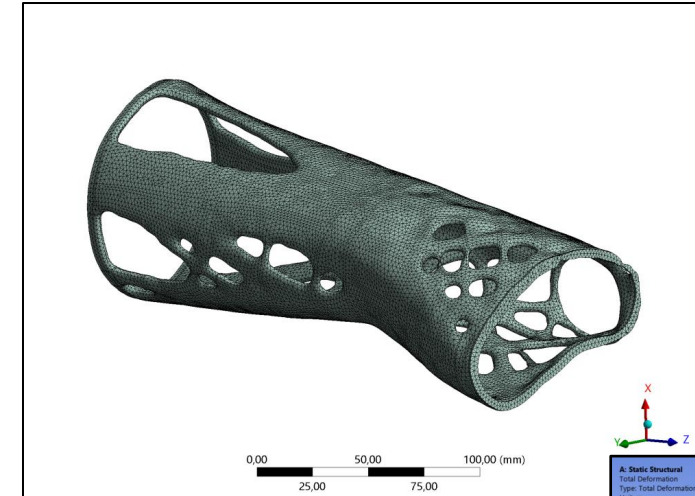
- a. Modèle 3D et réflexion
- b. Modèle 1D

## V. Vérification de solution

## VI. Propagation des incertitudes

- a. Méthode de Monte Carlo
- b. Méthode des moments

## VII. Conclusion



# INTRODUCTION

Dans le cadre d'un précédent projet, une orthèse d'avant-bras fut étudiée dans le but de pouvoir **l'optimiser topologiquement**. L'optimisation topologique a pour but de retirer de la matière de manière intelligente afin de modifier le moins possible les critères imposés (ici le déplacement maximale  $u_{max}$ ).

## ■ Critère mathématique d'optimisation :

Minimiser  $\rho$  (masse) et  $\int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_i : \varepsilon_i d\Omega$  (contraintes) [meilleur compromis] pour  $i \in [F, E, R, U]$  [poids égale]

Sous la contrainte de poids minimal  $\rightarrow \alpha \%$

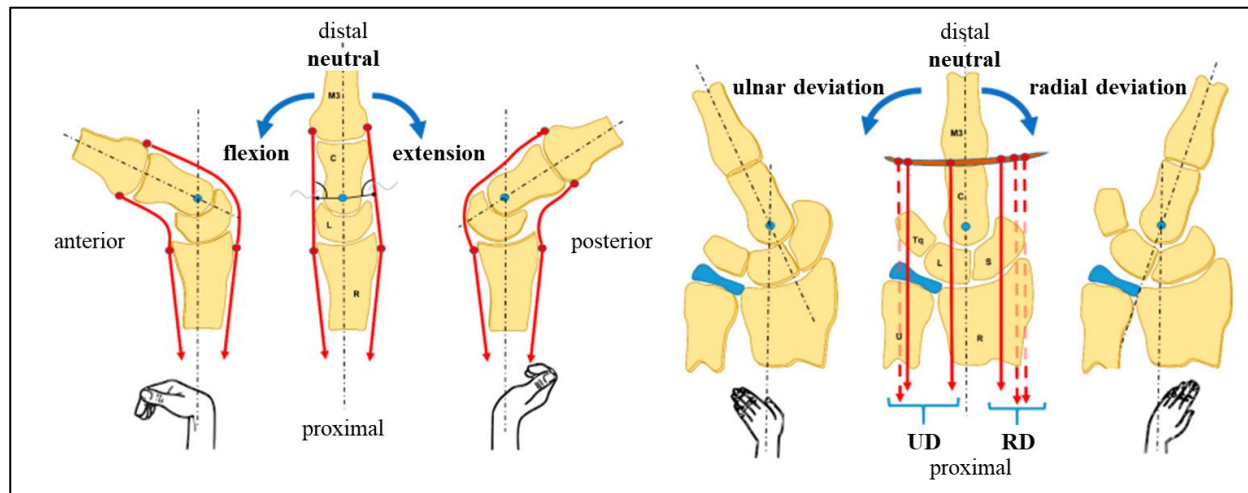


Figure [1] : Différents mouvements du poigné possible

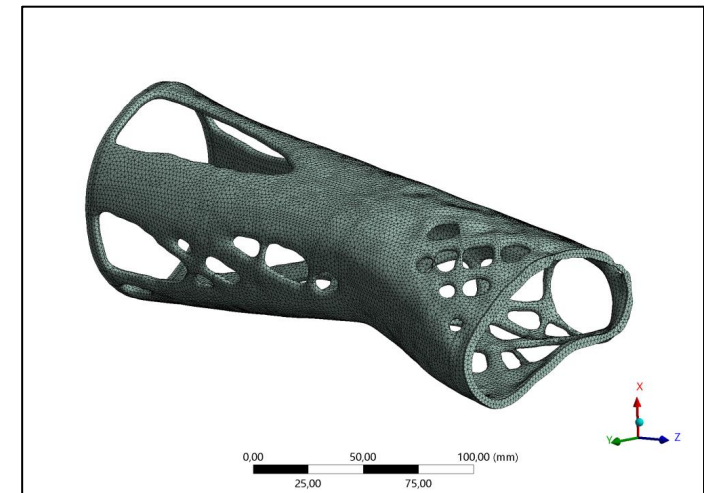


Figure [2] : Résultat d'optimisation  $\alpha = 40\%$

Les résultats de simulations avaient permis d'évaluer l'évolution de  $u_{max}$  en fonction des géométries  $\alpha \%$ . Un compromis entre réduction de masse et performance en déformation avait été trouvé pour la géométrie  $\alpha = 40\%$ .

- En parallèle des simulations, des tests expérimentaux ont été réalisés en laboratoire afin de pouvoir caractériser la résine utilisée pour l'orthèse. Ont été déterminés expérimentalement :  $E, \nu$  (**matériau orthotrope** due à l'impression 3D).

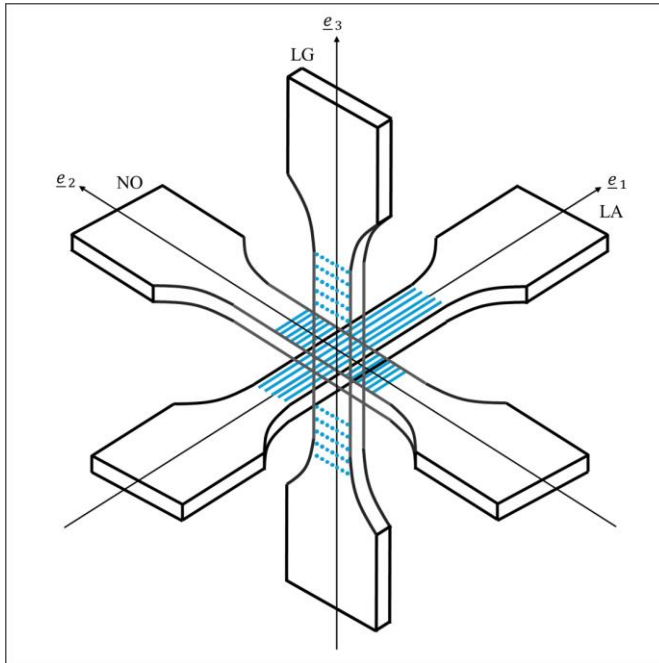


Figure [3] : Directions d'impressions 3D

**Remarque** : La résine utilisée amène à considérer le problème comme un problème à grande déformation ( $MMC \rightarrow G def$ ).



Par manque de temps et de rigueur, les incertitudes sur les expérimentations n'avaient pas été prises en compte. Avec le recul que MEC8211 a apporté, il semble donc nécessaire d'évaluer l'impact qu'ont ces incertitudes sur la déformation maximale  $u_{max} = SRQ$  (**variable d'intérêt**).

Afin de rester cohérent avec le précédent travail, les simulations numériques de ce projet seront réalisées à l'aide **d'Ansys Mechanical** version étudiante (i.e., limité en nombre de nœuds).

On se place dans le cadre de la mécanique des milieux continus (**MMC**)

<ul style="list-style-type: none"> <li>Conservation de la masse</li> <li>Conservation de la quantité de mouvement</li> </ul>	$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \left( \frac{d}{dt} \underline{\xi} \right) \\ \rho \frac{d^2}{dt^2} \underline{\xi} = \underline{\operatorname{div}} (\underline{\sigma}) + \underline{f} \end{aligned} \right\}$	<p>4 équations et 10 inconnues (<math>\underline{\sigma}</math> est symétrique)          → 6 équations à tirer de la <b>loi de comportement</b> du matériau</p>
--	---	---

En se plaçant à l'**équilibre statique** (*Static Structural*) :

<ul style="list-style-type: none"> <li>Conservation de la masse</li> <li>Conservation de la quantité de mouvement</li> </ul>	$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \left( \frac{d}{dt} \underline{\xi} \right) \\ 0 = \underline{\operatorname{div}} (\underline{\sigma}) + \underline{f} \end{aligned} \right\}$
--	---



Cela revient donc à résoudre un système matriciel de la forme :

$$\underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{F}$$



$$\underline{\sigma} = f(\underline{\varepsilon})$$

Dans notre cas, une loi de comportement pour **matériau orthotrope**.

$$E_x, E_y, E_z, \nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}, G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}$$

**Remarque** : Le problème n'est pas linéaire (**grande déformation**), cela signifie donc que  $\underline{\underline{K}}$  n'est pas symétrique et constant. En effet, dans notre cas,  $\underline{\underline{K}}$  va être dépendant du déplacement  $\underline{u}$  tel que :  $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}[\underline{u}]$  (i.e., fonction de  $\underline{u}$ ). Cela rend la résolution plus longue et plus couteuse.



**Hypothèse** : Pour la suite du devoir, afin de simplifier la méthode de Monte-Carlo via le nombre de données d'entrée, nous supposons le matériau comme étant **élastique** (et non orthotrope), définis par  $E$  et  $\nu$ .

Concernant le maillage, on choisit ici de prendre des éléments d'ordre 2 – **SOLID186** (nécessaire pour calculer avec précision déplacements **et** contraintes). Nous avons forcé l'imposition de l'ordre 2 afin de forcer de la même manière, l'ordre de convergence formelle.

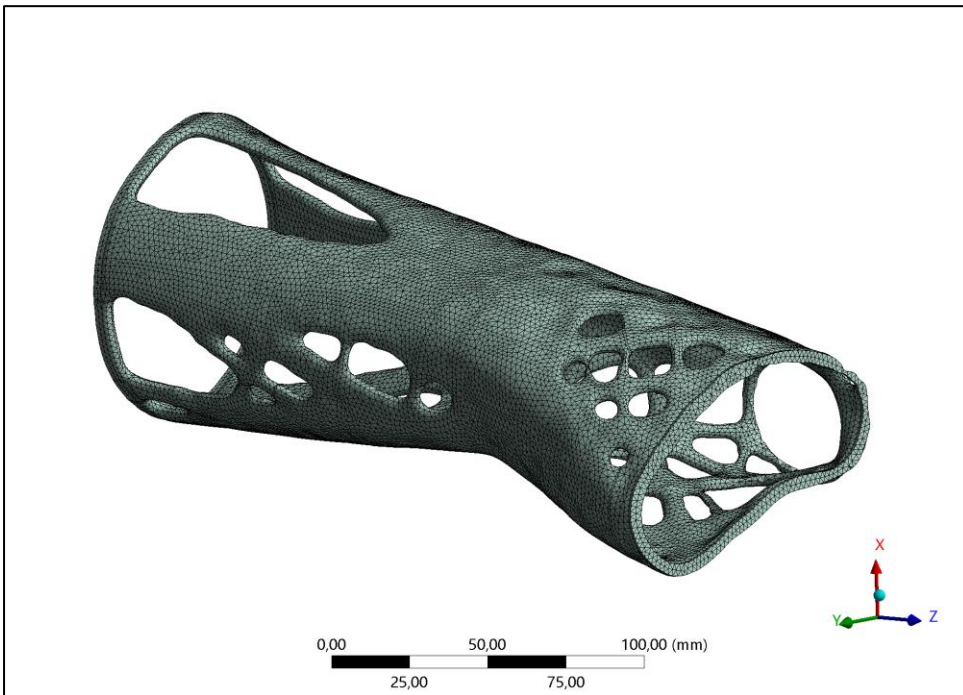


Figure [4] : Résultat d'optimisation  $\alpha = 40\%$

**SOLID186** : Element 3D quadratique en déplacement utilisé dans Ansys pour le calcul de structure mécanique (utilisé pour de la simple plasticité mais également pour les **grandes déformations**, comme dans notre cas).

**Remarque** : les choix des paramètres pour le maillage seront explicités dans la vérification de solution.

## Points forts

- Meilleure précision dans la représentation et le calcul des gradients de déformation et des contraintes
- Réduction des erreurs de discrétisation ( $\varepsilon_h$ ) par rapport aux éléments d'ordre 1
- Adapté à notre géométrie complexe d'orthèse

**Ansys**

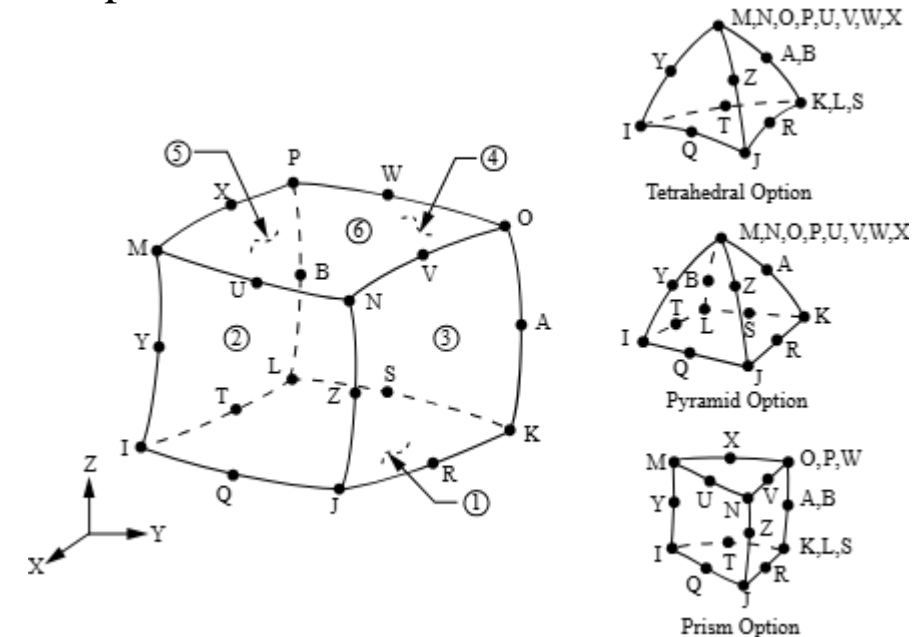
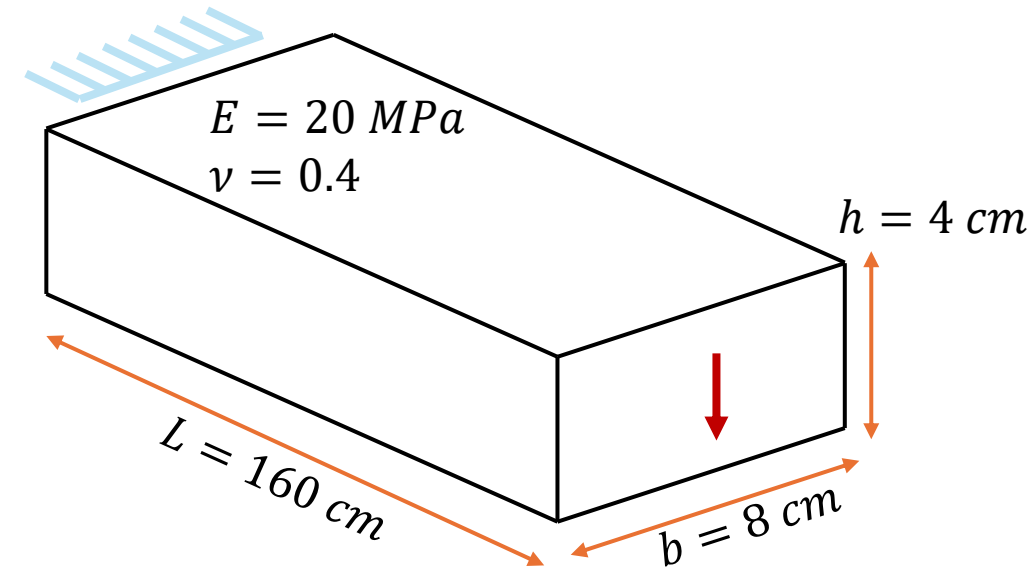


Figure [5] : Element SOLID186 Ansys



# VERIFICATION DE CODE

Afin de pouvoir vérifier le code d'Ansys – même si nous pouvons lui faire confiance, nous allons comparer des résultats de simulations avec des résultats théoriques. Pour cela, nous allons étudier le cas simple – et proche de notre système d'étude, de la poutre en flexion suite à l'application d'une force  $F$ . On prend une géométrie simplifiée de notre problème (avec des dimensions approximées) :



**Figure [6] :** Géométrie de vérification de code

Soit  $I$  le moment quadratique, qui pour une section rectangulaire est calculé à l'aide de la formule suivante :

$$I = \frac{bh^3}{12} = 4.2667 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

On applique une force  $F = -30\text{ N}$ , on encastre l'autre section de la poutre et on définit un matériau proche de la résine qui sera utilisé pour la vérification de solution. Pour ce problème, nous avons une solution analytique bien connue du calcul structural tel que la flèche maximale est donnée par :

$$y_{max} = \frac{FL^3}{3EI} = 4.799625\text{ m}$$

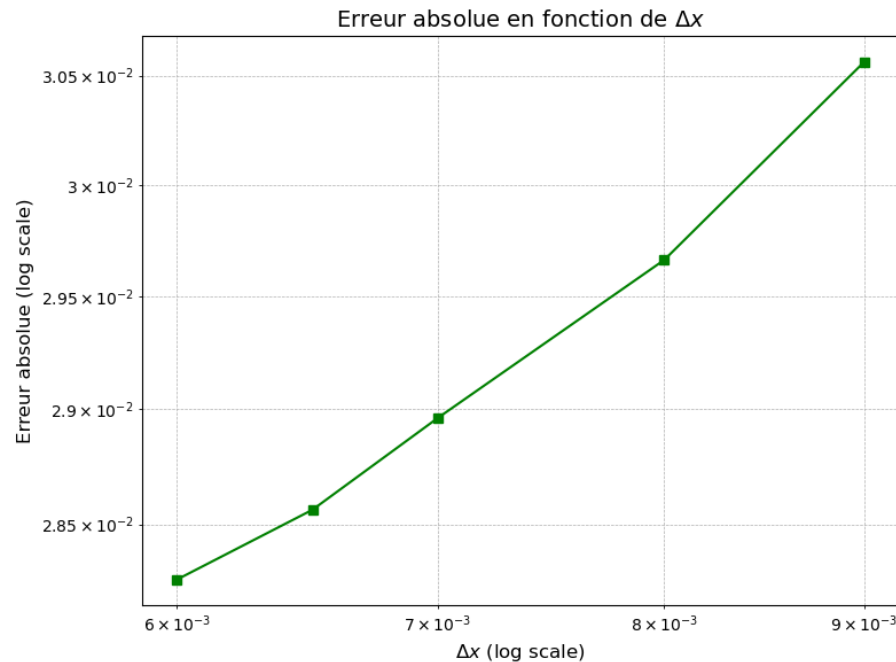
Plus généralement, pour  $x \in [0; L]$ , nous avons la flèche  $y(x)$  tel que :

$$y(x) = \frac{Fx^2}{6EI} [3L - x]$$

Nous allons donc comparer la solution obtenue avec Ansys afin de calculer l'erreur de discrétisation  $\varepsilon_h$  pour plusieurs maillages.

**Remarque :** Seul  $L$  n'est pas de la taille de l'orthèse étant donné que pour la théorie des poutres, il faut que  $L$  soit de dimension beaucoup plus grande que les deux autres (environ un facteur 20).

Après plusieurs simulations, nous pouvons tracer l'erreur de discrétisation en fonction de  $\Delta x$  de la manière suivante :



Ces 5 simulations (limitées par la licence étudiante), nous confirme l'appartenance à la zone de convergence asymptotique. Nous imposons des **éléments d'ordre 1** pour le maillage.

Pour trouver l'ordre de convergence, nous utilisons la formule du cours suivante (en prenant les deux derniers points) :

$$\hat{p} = \frac{\ln(\varepsilon_{h_1}) - \ln(\varepsilon_{h_2})}{\ln(h_1) - \ln(h_2)} = 0.159$$

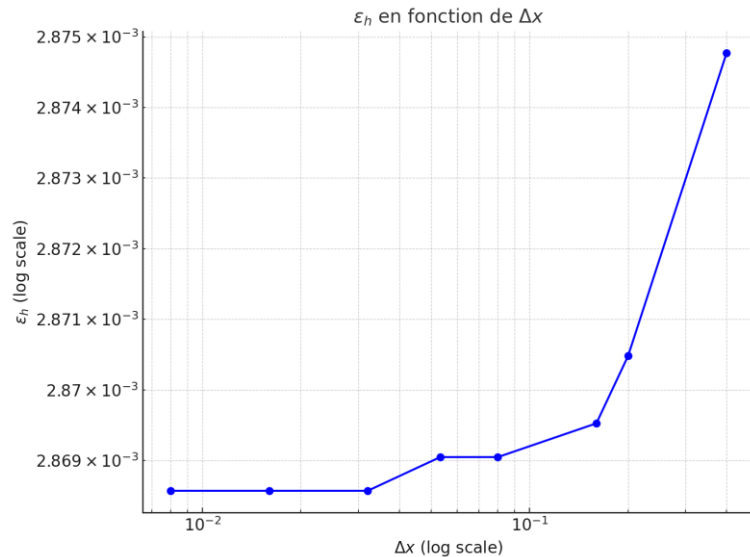
On remarque bien qu'il y a un problème de convergence et que nous ne trouvons pas l'ordre de convergence théorique attendu qui est  $p_f = k + 1$  où  $k$  est l'ordre des éléments utilisés.

**Réflexion :** Comme le souligne (Zouari, G. (2012)). , il n'est en réalité pas possible de valider le code en comparant un résultat de simulation 3D avec une théorie 1D. Il s'agit en réalité de deux modèles physiques différents.

→ Afin de contrer ce problème, nous allons faire le calcul dans Ansys en 1D pour le comparer à la théorie 1D.



On recrée donc une géométrie 1D à l'aide de l'élément BEAM dans Ansys (en fournissant une « Cross Sectional Area »). Nous réalisons plusieurs simulations pour plusieurs nombres d'éléments (ou de segments de discrétisation) allant de 2 à 100 et nous trouvons le graphique suivant :



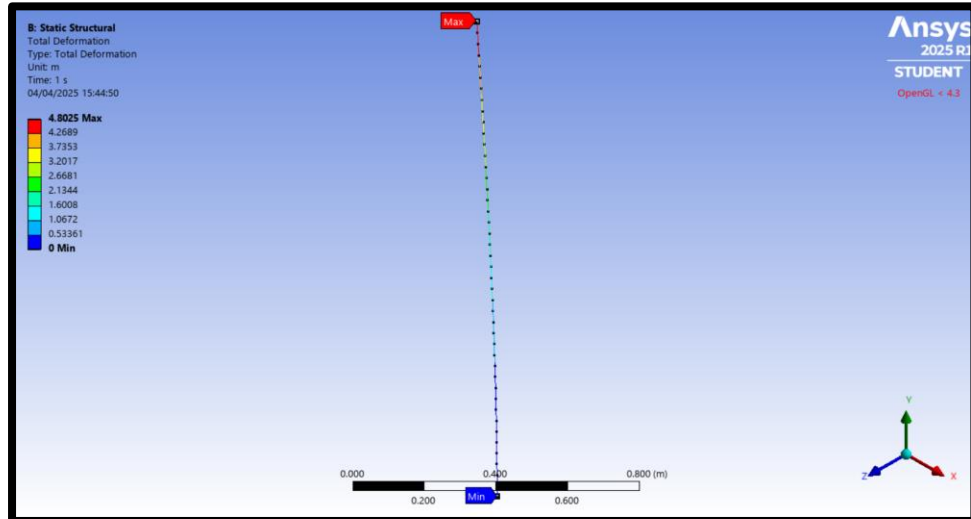
Malheureusement les résultats ne sont pas meilleurs. En prenant que les points nous semblent dans la zone de convergence asymptotique, nous obtenons un ordre de convergence observée de :  $\hat{p} = 0.0003$

On obtient un tel ordre de convergence car les résultats obtenus avec cette simulation sont tous extrêmement proches d'une même valeur amenant à une erreur absolue d'environ 0.2 % pour tous les points.

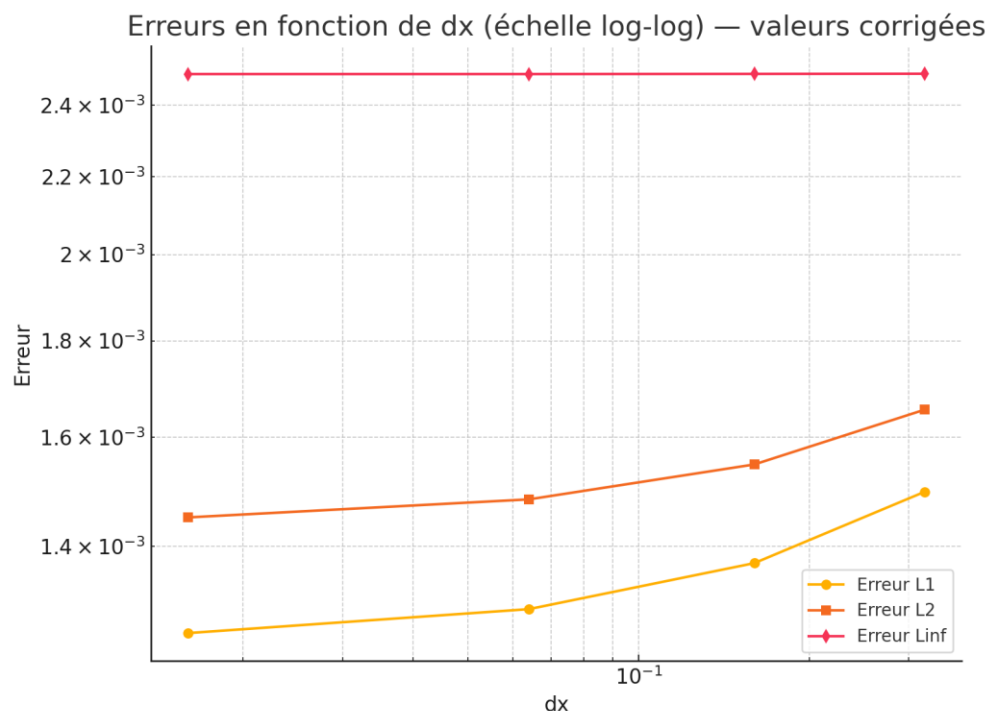
## Questionnements

Un tel résultat est assez déconcertant car il amène à bon nombre de questionnements :

- Serait-ce une erreur de manipulation de notre part ? (les calculs ont tous été réalisés plusieurs fois afin de vérifier).
- Pourquoi Ansys donne une solution quasi-constante et « éloigné » de la théorie (une erreur de 0.2 % nous semblant très grande pour un cas d'application aussi simple) ?



Dans un dernier espoir, nous avons décidé de prendre l'ensemble des déplacements pour chaque nœud (1D) comme SRQ tel que nous transformons l'erreur de discrétisation  $\varepsilon_h$  en vecteur et de ce fait nous pouvons utiliser les normes  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_\infty$  afin de calculer l'ordre de convergence. Nous avons obtenu :



Ce que nous a permis cette étude est de montrer que dans le cas de notre étude, prendre  $u_{max}$  comme SRQ revient à calculer  $L_\infty$  car  $L_\infty = \max(u_{th} - u_{sim})$  est exactement ce que nous avons jusqu'à présent.

Or nous avons vu en cours que  $L_\infty$  est la norme la plus exigeante donc avec un peu d'espoir, les autres normes sont plus adéquates et amèneront vers l'ordre de convergence attendu.

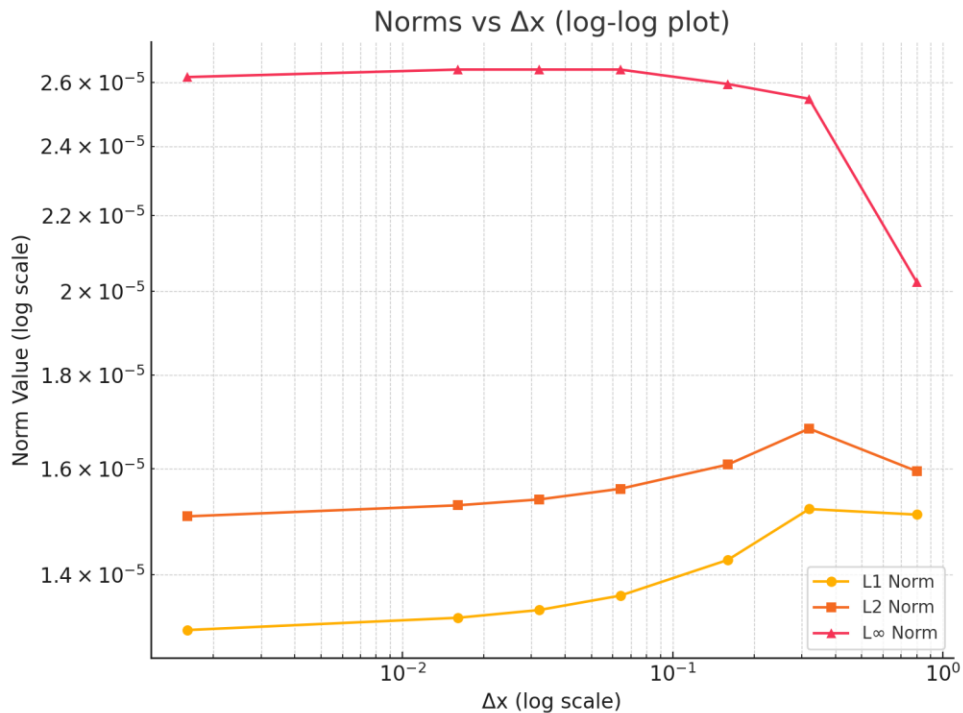
Mais nous étions dupes, et nous avons trouvé pour  $L_1$  et  $L_2$  les ordres de convergence de **0.055** et **0.042** respectivement ce qui est « mieux » mais toujours très loin de ce que nous attendons.

Donc, en dernier recours, on a contacté Ansys ... Et une réponse fut apporté au problème. En effet, pour les éléments BEAM, Ansys n'utilise pas la théorie d'**Euler-Bernoulli** mais celle de **Timoshenko** qui prend en compte les effets de cisaillement dans le calcul. L'équation analytique n'est donc plus la même et nous devons considérer l'équation suivante :

$$y(x) = \frac{Px}{\kappa AG} - \frac{P(L-x)}{2EI} \left( L^2 - \frac{(L-x)^2}{3} \right) + \frac{PL^3}{3EI} \text{ où } \kappa = \frac{5}{6} \text{ pour une section } A \text{ rectangulaire, en prenant } G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 7142857.143 \text{ Pa}$$

Finalement, avec l'expression de  $y(x)$  selon la théorie de **Timoshenko**, nous pouvons calculer la flèche maximale tel que :

$$y_{max} = \frac{PL}{\kappa AG} + \frac{PL^3}{3EI} = y_{max Euler} + 0.00252 = 4.80252 \text{ m}$$



Avec ces nouveaux résultats, nous pouvons voir que nous obtenons cette fois-ci une erreur très faible. Cela témoigne bien du fait que le nouveau modèle théorique est bien celui que semble utiliser Ansys. Cela répond donc à l'une de nos questions.

**CEPENDANT** ... si on calcul l'ordre de convergence à nouveau, nous nous rendons compte que le problème est toujours présent et que nous n'obtenons pas les bonnes valeurs. En effet, nous trouvons (pour les derniers points) :

$$\hat{p}_{L_1} = 0.0067, \hat{p}_{L_2} = 0.0060, \hat{p}_{\infty} = 0.0041$$

Le fait de prendre d'autres couples de points pour le calcul n'amène pas à meilleurs résultats.

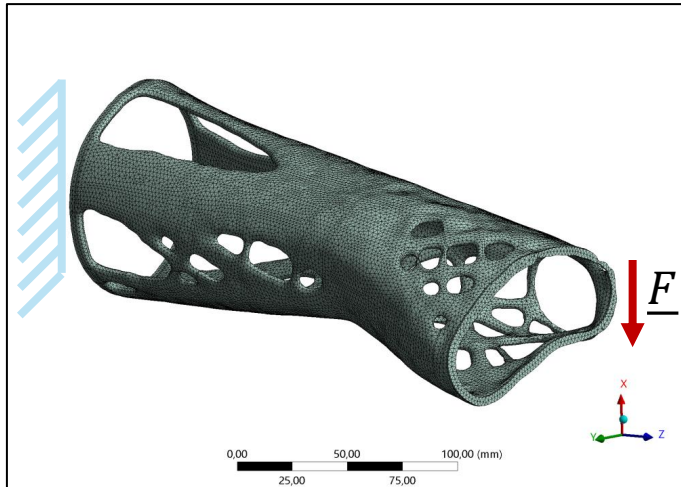
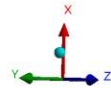
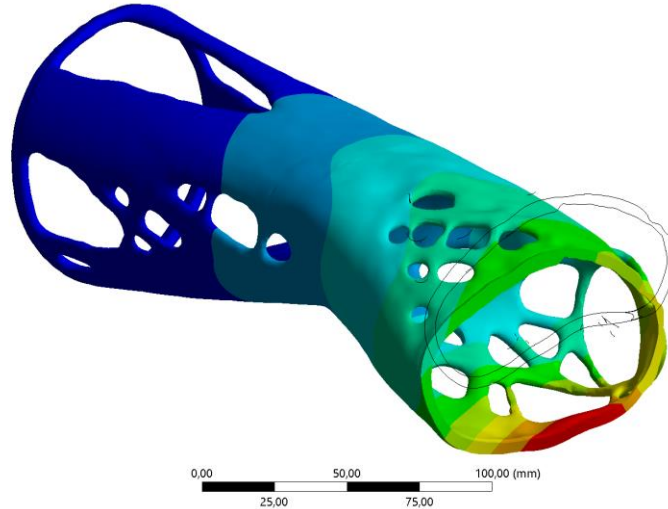
# VERIFICATION DE SOLUTION

La **vérification de solution** a pour but d'estimer les différentes sources d'erreurs et de quantifier les incertitudes.

Pour notre étude, on rappelle que  $u_{max} = SRQ$ . On se limite au mouvement de **flexion** avec une force de 30 N dirigée vers le bas.

G: Static Structural  
Total Deformation  
Type: Total Deformation  
Unit: mm  
Time: 1 s  
05/06/2024 00:58

36,238 Max  
32,212  
28,185  
24,159  
20,132  
16,106  
12,079  
8,0529  
4,0264  
0 Min



## 1. Choix du maillage

Pour le maillage, nous avons choisis de prendre les fonctions suivantes :



Impose des **éléments d'ordre 2** avec un type d'élément automatique.

Impose la taille des éléments aux globales de la géométrie → **Paramètre fluctuant** entre les différents raffinements.

Impose un raffinement de maillage sur les faces qui reçoivent les **conditions aux limites** de Dirichlet.

Il y a 2 conditions aux limites : une force appliquée à une surface et une condition de support fixe bloquant les degrés de liberté.

## 2. Résultats

Une fois les différentes simulations réalisées avec un maillage de plus en plus fin (i.e., jusqu'à la limite de la licence), nous obtenons le graphique post-traité à l'aide de Python suivant :

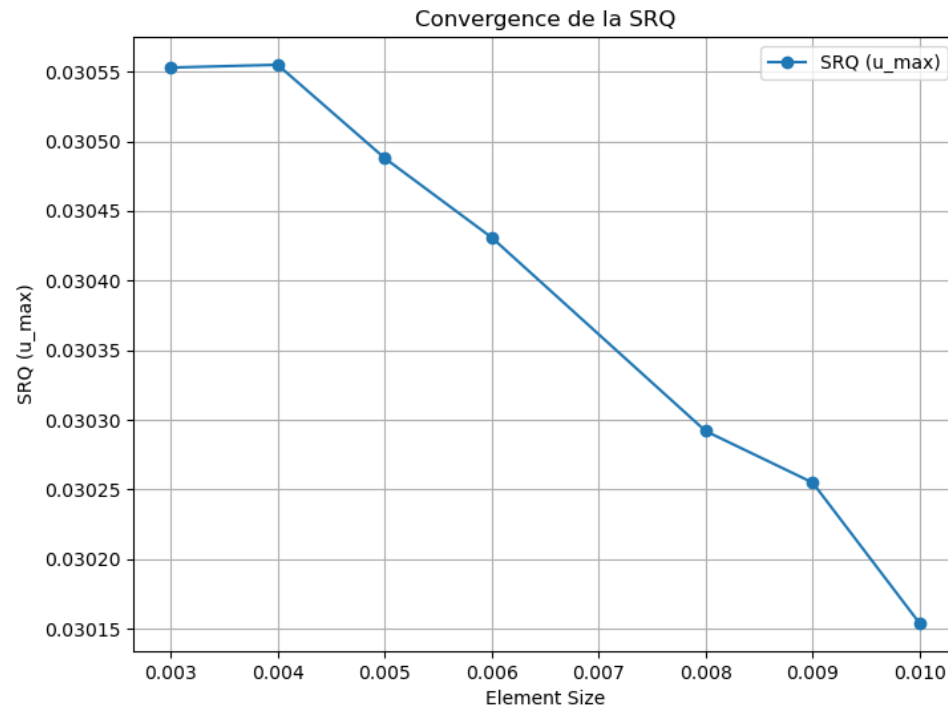


Figure [] : Code python « *cv\_asymptotique.py* »

En ne prenant que les résultats donc que les résultats supposément sur la convergence asymptotique, nous pouvons calculer **l'ordre de convergence observé**,  $\hat{p}$ . Etant donné que les coefficients de raffinements ne sont pas égaux, nous allons utiliser la formule itérative proposé dans le cours de MEC8211.

On remarque qu'à mesure que l'on raffine le maillage (i.e. éléments de tailles plus petites), on a une augmentation de la *SRQ*. Cette dernière se stabilise cependant après la taille des éléments soient de  $4e - 3 m$ . Il semblerait donc que nous ayons atteint un « plateau ».

Malheureusement limité par la licence, nous n'avons aucune certitude quant à la continuité de ce plateau pour des maillages encore plus fins, seul des hypothèses peuvent donc être émises.

Des hypothèses sur la raison de ce plateau sont données dans quelques slides.

On a :

$$\hat{p}^{k+1} = \frac{\ln \left[ \left( r_{12}^{\hat{p}^k} - 1 \right) \frac{f_3 - f_2}{f_2 - f_1} + r_{12}^{\hat{p}^k} \right]}{\ln(r_{12} r_{23})}$$

Cette formule est utilisée pour plusieurs couples de résultats  $f_i$  afin d'être sûr du résultat donné. En moyenne, après 100 itérations, nous obtenons un ordre de convergence observé de  $\hat{p} = 2.50385$ . Dans une mesure de vérification supplémentaire, nous avons pris 2 autres nœuds du maillage pour nous assurer que ces derniers avaient le même ordre de convergence (i.e., éviter un ordre de convergence fausse localisé) et nous obtenons le même ordre de convergence.

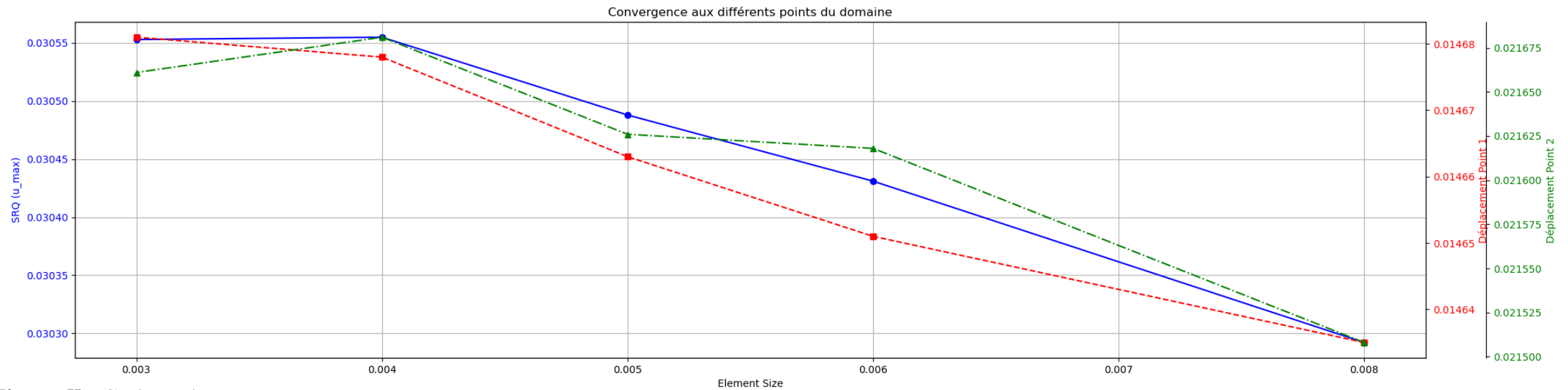


Figure [] : Code python « *cv\_asymptotique.py* »

On remarque que  $\hat{p}$  est plus faible que l'ordre de convergence théorique attendu de 3.





## 3. Interprétation des résultats

*D'où vient le plateau sur la SRQ ?*

- L'atteinte d'un plateau sur le graphe de la SRQ en fonction de la taille de maille indique que la solution ne varie plus significativement malgré un raffinement accru du maillage, ce qui suggère une convergence numérique et une stabilité de la solution obtenue.
- Version étudiante d'Ansys : restriction sur le nombre de nœuds, impossible de confirmer l'étendue du plateau.

*Pourquoi l'ordre de convergence observé n'est pas égal à l'ordre de convergence formel ?*

La convergence du modèle est dégradée.

- Si les conditions aux limites sont mal capturées par le maillage, elles peuvent induire des erreurs locales qui ralentissent la convergence.
  - Si la zone où  $u_{max}$  se produit est mal maillée, elle peut dominer l'erreur globale.
  - Si les contraintes appliquées sont trop localisées (ex : un point de contact), la convergence peut être plus lente qu'attendu. Dans notre cas, les conditions aux limites sont appliquées sur les extrémités de l'orthèse. Les appliquer de manière plus réaliste avec surface d'application plus grande aurait pu aider à conserver la convergence du modèle à 3.

Nous sommes donc dans le cas où :

$$\left| \frac{\hat{p} - p_f}{p_f} \right| = 16.67 \% > 10 \%$$

Nous appliquons donc le GCI afin de quantifier l'incertitude que nous avons sur le déplacement maximal. Ainsi, avec  $F_s = 3$  et  $p = \hat{p} = 2.50385$ , pour le déplacement avec les éléments de taille  $4e - 3m$  ( $f_h$ ), nous avons :

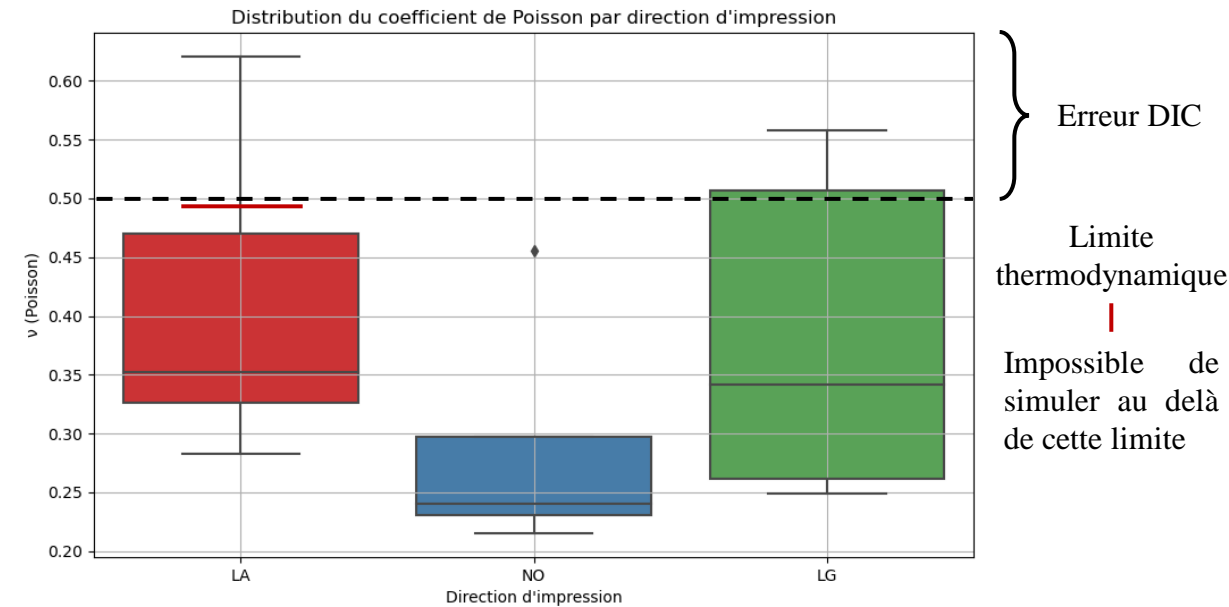
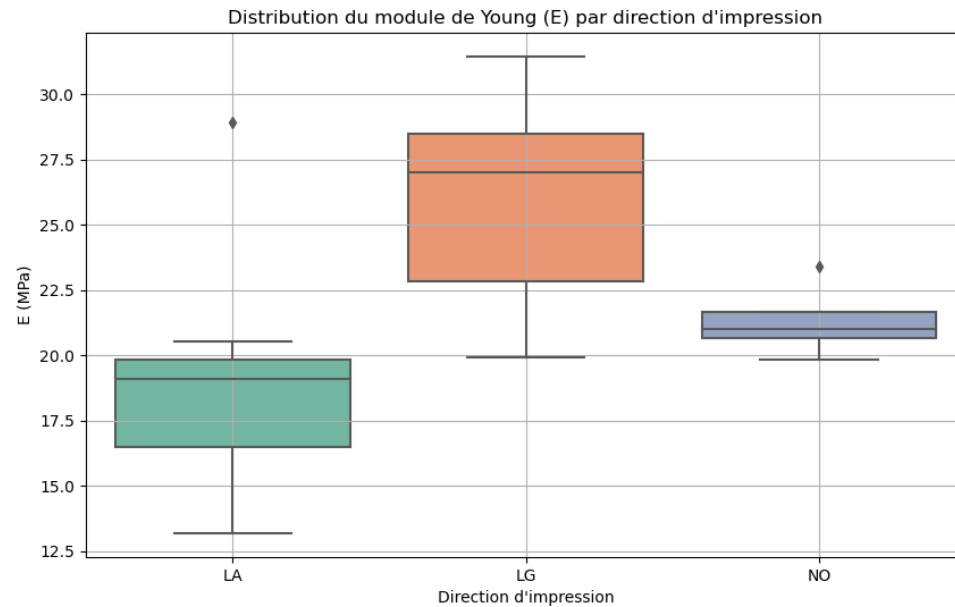
$$f_{num} = 0.030555 \pm 2.6852 \times 10^{-8} m \Rightarrow \boxed{f_{num} = 30.555 \pm 2.6852 \times 10^{-5} mm}$$

## 4. Conclusion sur la vérification de solution

Pour conclure, nous pouvons dire que l'incertitude numérique est relativement faible comparé aux valeurs de SRQ. En effet, nous trouvons que :

$$u_{num} = \frac{GCI}{2} = 1.3428 \times 10^{-5} mm$$

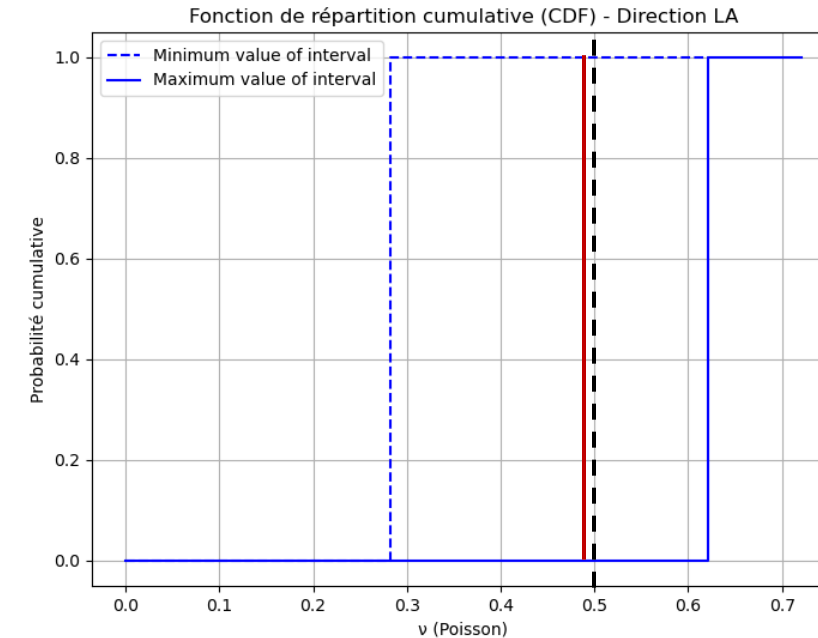
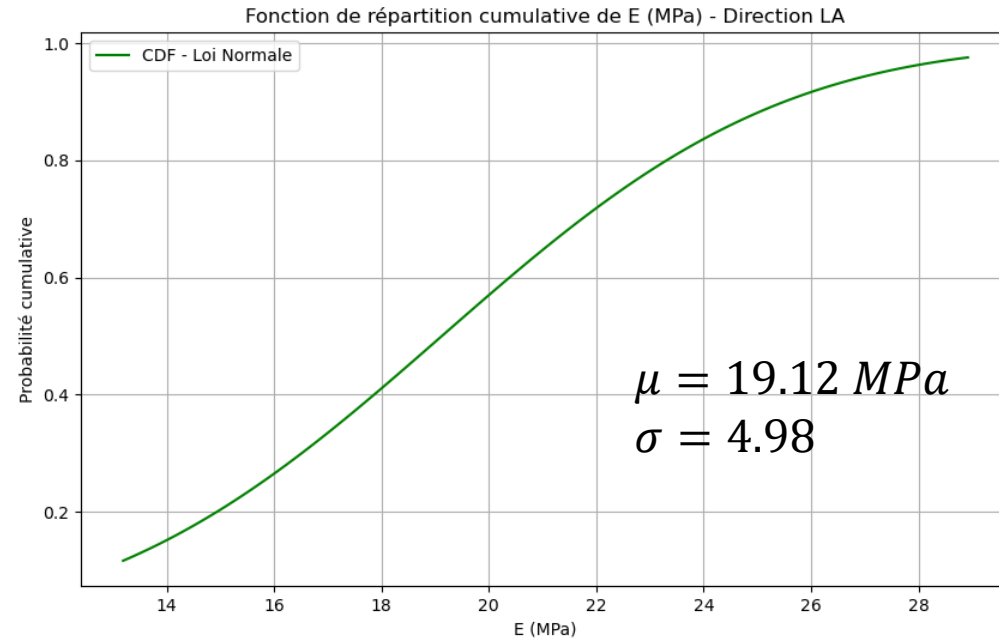
Nous considérons 2 données d'entrées :  $E$  et  $\nu$ . Ces deux données ont été caractérisé via des expériences et les lois de probabilités suivantes peuvent être tirées :



Selon l'hypothèse de non orthotropie que nous avons posés, nous prenons  $E = E_{LA}$  et  $\nu = \nu_{LA}$  tel que à la lumière de ces deux histogrammes ainsi que des expériences réalisées, nous supposons le module de Young comme une variables aléatoire (i.e., définis par une loi de probabilité) et le coefficient de cisaillement comme une variable épistémique (i.e., définis par un intervalle de valeur étant donné que le traçage **DIC** (Digital Image Correlation) était peu fructueux lors du précédent projet).

**Remarque** : Pour  $E$  nous nous assurons de sa définition par une loi de probabilité à l'aide du test de Shapiro-Wilk et de Kolmogorov-Smirnov. Pour  $\nu$  nous imposons une condition d'infériorité à 0.5 ( $< 0.48 = \max$ ) (i.e., matériau incompressible).

Ainsi, nous pouvons donc tracer les graphiques suivants (PDF – *Probability Density Function*) :



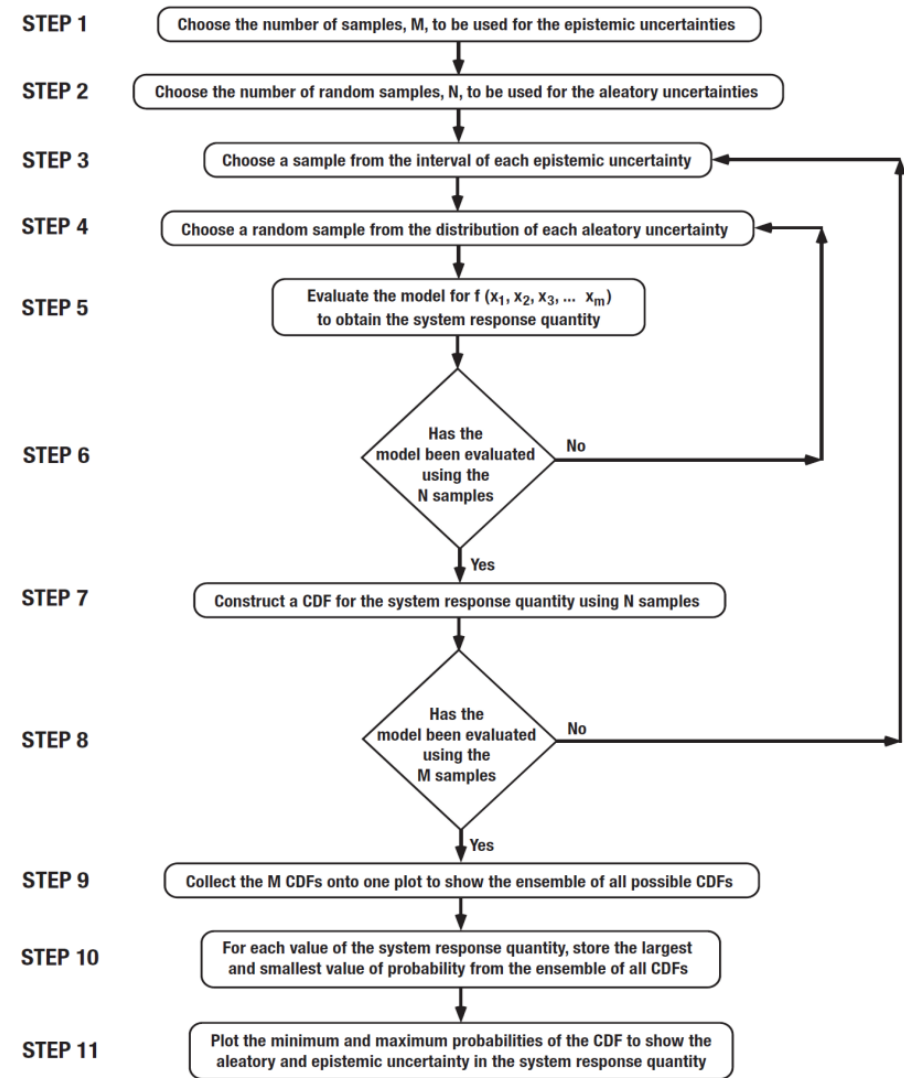
Limite  
thermodynamique  
|  
Impossible de  
simuler au delà  
de cette limite

A partir de ces deux graphiques, nous pouvons générer un fichier de couples de données d'entrées que nous utiliserons dans nos simulations sur Ansys. La dernière boucle du script permet de générer ce fichier '*Couples\_LHS\_LA.csv*' pour un nombre de couple données.

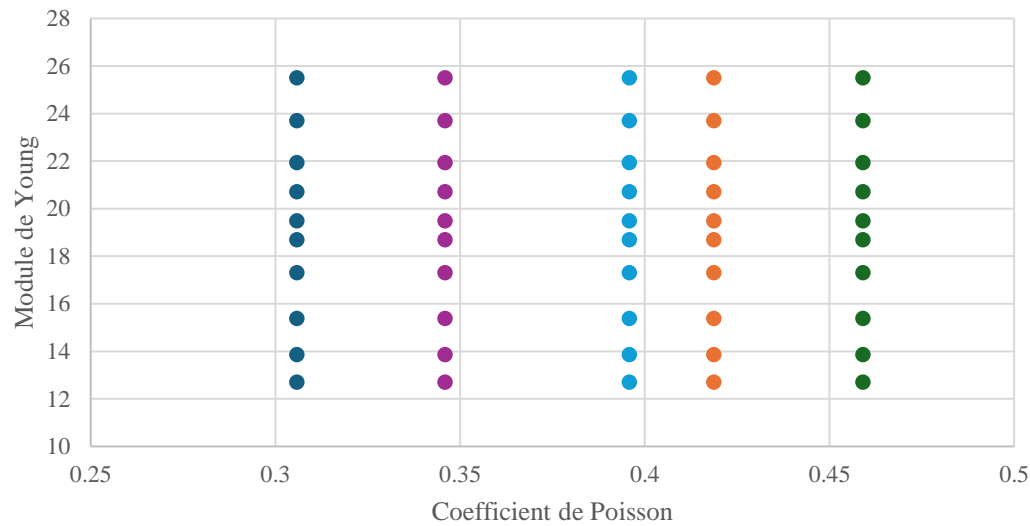
La procédure pour la méthode de Monte Carlo avec une variable aléatoire et une variable épistémique est celle proposée dans le cours – tirée de Oberkampf & Roy. Cette méthode est la suivante :

# PROPAGATION DES INCERTITUDES

On choisit  $M = 5$  valeurs pour  $\nu$  de telle manière que chacune de ces valeurs, on réalise  $N = 10$  simulations pour les  $N$  valeurs de  $E$  que nous avons obtenues à l'aide de la méthode LHS. Cela fait donc un total de  $M \times N$  simulations.



On peut représenter l'espace des couples simulés qui se situe bien dans les valeurs limites imposées par les graphiques précédents :



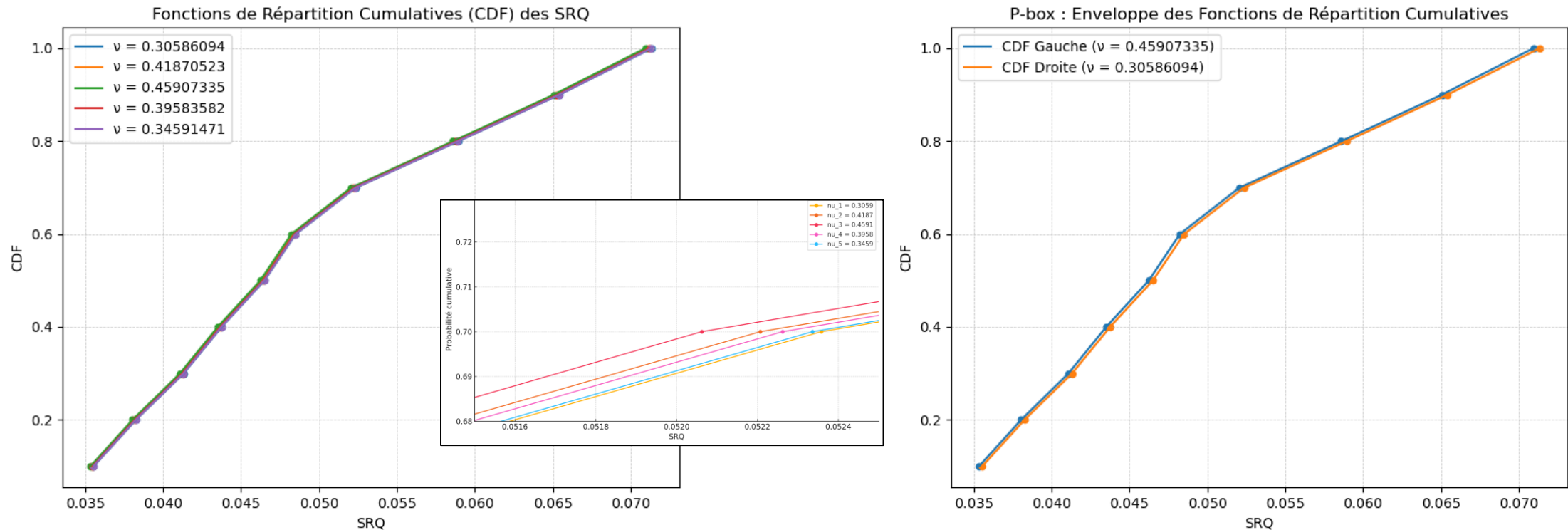
Une fois toutes ces simulations réalisées, nous pouvons réaliser STEP 9, càd représenter les CDF de chaque famille de simulations afin de trouver le min et max générant donc une p-box.

**Remarque :** Nous n'avons pas réussi à automatiser cette section du devoir (tests avec langage Python et APDL).

Figure 13.17 Flow chart for MCS with both aleatory and epistemic uncertainties and no correlated input quantities.

# PROPAGATION DES INCERTITUDES

Finalement, en suivant la méthode, nous obtenons les courbes CDFs suivantes. En ne gardant que le min et le max, nous pouvons démontrer l'existence de la **p-box** tel que :



Nous pouvons voir que malgré les écarts importants que nous avons sur le coefficient de Poisson, ces derniers influencent relativement « peu » les CDFs, étant donné que la p-box est très fine. Nous pouvons maintenant interpréter les résultats à l'aide de ces graphiques. Enfin nous déterminerons  $u_{input}$ .



# PROPAGATION DES INCERTITUDES

Nous pouvons commencer par calculer les valeurs de SRQ pour les CFDs min et max à 50 % et à 50 %  $\pm 47.7$  % afin de trouver une incertitude pour  $k = 2$ . Nous trouvons que :

**CDF la plus à gauche ( $v = 0.45907335$ ) :**

SRQ à 2% = 0.035338

SRQ à 50% = 0.046234

SRQ à 97% = 0.069574

**CDF la plus à droite ( $v = 0.30586094$ ) :**

SRQ à 2% = 0.035539

SRQ à 50% = 0.046496

SRQ à 97% = 0.069969

- Nous pouvons dire que la moyenne de la SRQ se situe dans une fourchette de SRQ de  $[0.046234 ; 0.046496]$  m.
- La CDF min donne un  $u_{input} = 0.030018$  m et la CDF max donne un  $u_{input} = 0.030190$  m. En prenant la moyenne quadratique :

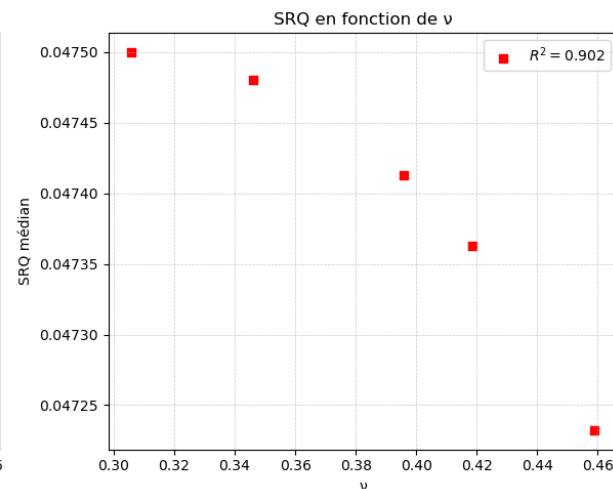
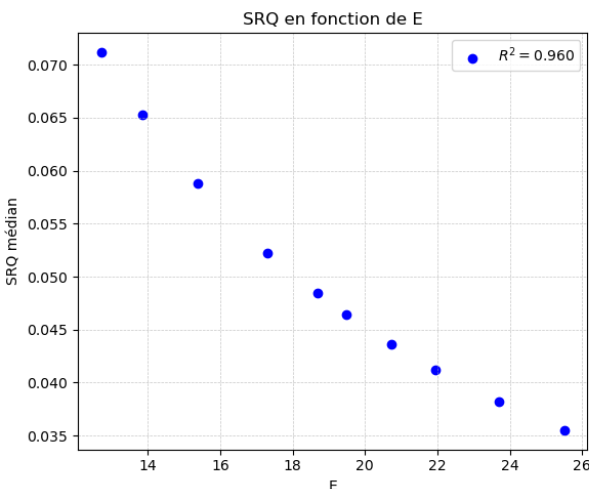
$$u_{input} = \sqrt{u_{input_{max}}^2 + u_{input_{min}}^2} / 2 = 0.03006 \text{ m}$$

Once the simulation has been run for the  $n_{LHS}$  parameter vectors, standard statistical techniques can be used to process the results. Estimates of the expected value (mean) and variance of response  $S$  are given by

$$\bar{S} = \frac{1}{n_{LHS}} \sum_{i=1}^{n_{LHS}} S_i \quad (3-3-1)$$

$$u_{input}^2 = \frac{1}{n_{LHS} - 1} \sum_{i=1}^{n_{LHS}} (S_i - \bar{S})^2 \quad (3-3-2)$$

**Remarque :** On ne peut utiliser ces formules car elle donne une incertitude pour 1 écart type. De plus, elles donnent  $n = 5$  résultats étant donné que nous avons 5 CDFs.



A l'aide des résultats de la méthode de Monte Carlo, nous pouvons aussi conduire une **analyse de sensibilité globale** en représentant la SRQ en fonction des variables d'entrée.

Le coefficient de corrélation  $R^2$  permet de montrer que les deux données d'entrée influencent bien la SRQ, mais principalement le module de Young (qui à le  $R^2$  le plus grand).

Pour finir, nous souhaitons comparer les résultats de la méthode de Monte Carlo avec ceux de la **méthode des moments** afin d'évaluer la précision de la dernière. Pour ce faire, nous allons reprendre l'équation vue en cours, tel que :

$$u_{input}^2 = \left[ \frac{\partial u_{max}}{\partial E} \Big|_{E_{moy}} u_E \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_{max}}{\partial v} \Big|_{v_{moy}} u_v \right]^2$$

Pour estimer les termes  $\frac{\partial u_{max}}{\partial E} \Big|_{E_{moy}}$  et  $\frac{\partial u_{max}}{\partial v} \Big|_{v_{moy}}$ , nous pouvons utiliser la méthode des différences finies tel que :

$$\frac{\partial u_{max}}{\partial E} \Big|_{E_{moy}} \approx \frac{u_{max}(E_+) - u_{max}(E_-)}{E_+ - E_-} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_{max}}{\partial v} \Big|_{v_{moy}} \approx \frac{u_{max}(v_+) - u_{max}(v_-)}{v_+ - v_-}$$

Cela nous amène donc à réaliser un total de 4 simulations (soit 12.5 fois moins de simulations que Monte Carlo). Ces quatre simulations étant faites pour les couples :

$$\left. \begin{aligned} u_{max}(E_+, \mu_v) &= u_{max}(19.46060, 0.45120) = 4.6343e - 002 \, m \\ u_{max}(E_-, \mu_v) &= u_{max}(18.69744, 0.45120) = 4.8234e - 002 \, m \\ u_{max}(\mu_E, v_+) &= u_{max}(19.07902, 0.46022) = 4.7233e - 002 \, m \\ u_{max}(\mu_E, v_-) &= u_{max}(19.07902, 0.44217) = 4.7301e - 002 \, m \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\partial u_{max}}{\partial E} \Big|_{E_{moy}} &\approx -2.4739e - 03 \, SI \\ \frac{\partial u_{max}}{\partial v} \Big|_{v_{moy}} &\approx -3.7673e - 03 \, SI \end{aligned}$$

Cette méthode nous permet d'obtenir  $u_{input} = 0.0123 \, m$

→ En comparaison avec la méthode de Monte Carlo, nous trouvons une incertitude due aux données d'entrées qui est bien plus petite (près de **2,5 fois**), ce qui amènerait à dire que la méthode des moments tend, dans notre cas, à sous estimer cette incertitude (en prenant la méthode de Monte Carlo comme référence, par définition plus précise).

**NB :** Les  $x_+$  et  $x_-$  ont été pris à  $\pm 2\%$  de la valeur moyenne.

# CONCLUSION

Pour conclure, nous avons donc pu **vérifier les solutions** obtenues pour l'étude de cette orthèse optimisée topologiquement mais aussi pu analyser la **propagation des incertitudes** expérimentales dans notre modèle. Nous avons trouvé les résultats suivants :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Méthode de Monte Carlo :} & u_{input} = 3.006 \times 10^{-2} m \\ \text{Méthode des moments :} & u_{input} = 1.230 \times 10^{-2} m \\ \\ u_{num} = 1.3428 \times 10^{-8} m \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Valeurs des incertitudes} \\ \text{déterminées dans ce devoir} \end{array}$$

- Concernant la **vérification de code**, cette étape anecdotique initialement, c'est trouvé être un défi majeur dans ce devoir. Malgré nos nombreuses tentatives, nous n'arrivons toujours pas à expliquer notre non-convergence. Beaucoup de questions sont encore en suspens de notre côté à cet égard. Il est possible qu'une autre source d'erreur (i.e., autre que l'erreur de discrétisation) domine et donc empêche la convergence – mais cela semble quand même étrange, car une telle supposition amènerait à son apparition dès le début, quelque soit le maillage.
- Des résultats expérimentaux  $D$  auraient pu être intéressants afin de pouvoir calculer l'erreur  $E$  et donc valider ou non le modèle. Néanmoins, de tels expériences n'ont été réalisés jusqu'à présent.

Ansys. (2020, octobre). *Lesson 3: Large deformations governing equations* [PDF]. Ansys Innovation Space.

[https://innovationspace.ansys.com/courses/wp-content/uploads/2020/10/Lesson3\\_LargeDeformationsGoverningEquations.pdf](https://innovationspace.ansys.com/courses/wp-content/uploads/2020/10/Lesson3_LargeDeformationsGoverningEquations.pdf)

Labed, N. & Peyraut, F. (n.d.). *TE41 Mécanique des milieux continus* [Cours]. Université de Technologie de Belfort-Montbéliard (UTBM).

Chamoret, D. (n.d.). *MN44 Introduction to multi-physics simulation* [Cours]. Université de Technologie de Belfort-Montbéliard (UTBM).

Trépanier, J-Y. (n.d.). *MEC8211 Vérification et validation en modélisation numérique* [Cours]. Polytechnique Montréal (PM).

Zouari, G. (2012). *Processus de vérification et de validation des analyses mécaniques des roues de turbines hydrauliques avec CODE-ASTER*.

[https://publications.polymtl.ca/993/1/2012\\_GhassenZouari.pdf](https://publications.polymtl.ca/993/1/2012_GhassenZouari.pdf)



Élément	Pondérations min-max (%)	Pondération choisie
Modèle mathématique : Description des équations du modèle, des paramètres, des variables d'entrée/sortie, des conditions limites, etc... <i>Entre 1 et 5 pages PowerPoint</i>	0 ou [5-20]	15 (Description des équations de la MMC et de la méthode de résolution pour les grandes déformations)
Discrétisation : Description de la discrétisation choisie; autres détails de la méthode numérique; ordre de convergence formel, etc... <i>Entre 1 et 5 pages PowerPoint</i>	0 ou [5-20]	10 (Présentation de la géométrie et du maillage avec les options de maillage et le choix des éléments et de leurs ordres)
Qualité logicielle : Approches utilisées pour les tests; assurance qualité logicielle; etc... <i>Entre 1 et 5 pages PowerPoint</i>	0 ou [10-20]	0
Vérification de code : Description du(des) cas choisi(s); solutions exactes et/ou MMS; maillages; résultats; ordre de convergence observé; conclusion sur la vérification de code. <i>Entre 1 et 5 pages PowerPoint</i>	0 ou [15-30]	15 (Vérification avec un cas simple et comparaison avec solution analytique connue, ex. poutre en flexion)
Vérification de solution : Description du(des) cas choisi(s); maillages; résultats; ordre de convergence observé; GCI; conclusion sur la vérification de solution. <i>Entre 1 et 5 pages PowerPoint</i>	0 ou [15-35]	30

Propagation des incertitudes : Caractérisation des incertitudes; propagation des incertitudes et/ou analyses de sensibilité; conclusion sur les incertitudes. <i>Entre 1 et 5 pages PowerPoint</i>	0 ou [15-35]	30 (Méthode de Monte-Carlo avec méthode LHS avec 2 données d'entrées et méthode des moments)
Validation : Description du cas choisi; données expérimentales disponibles; planification des simulations; métrique de validation; résultats de validation; erreur de modélisation. <i>Entre 1 et 5 pages PowerPoint</i>	0 ou [15-35]	0
Prédiction : Description du cas choisi; quantification des erreurs et incertitudes; prédiction. <i>Entre 1 et 5 pages PowerPoint</i>	0 ou [10-20]	0
<b>Total : entre 20-30 pages PowerPoint.</b>		100