目　　录

第 1 章　群论基础

§1.1　基本概念

§1.1.1　群的定义

定义 1 (群)　设G是一些元素的集合, $G = \{g, h, \cdots\}$. 在G中已经定义了二元运算$\cdot$, 如果G对这种运算满足一下四个条件,

- 封闭: $\forall f, g \in G, f \cdot g \in G$;
- 结合率: $\forall f, g, h \in G, (f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$;
- 存在唯一的单位元素: $\exists e \in G, \forall f \in G, ef = fe = f$;
- 有逆: $\forall f \in G, \exists$唯一的$f^{-1} \in G, f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = e$,

则称代数结构$(G, \cdot)$是一个群, 二元运算 “$\cdot$” 称为群的乘法.

二元运算是一种映射,

$$\varphi : G \times G \mapsto G,$$
$$\varphi(f, g) = h \quad \Longleftrightarrow \quad f \cdot g = h.$$

在不引起歧义的情况下, 我们会省略乘法符号.

群G的元素个数称为群的**阶**, 记为$|G|$. 根据群的元素个数, 可以将群分为**有限群**(元素的数目有限)和**无限群**(元素的数目无限). 在无限群中, **连续群**可以用一个或多个实参数来标记群的元素.

另一种对群的分类方式, 是按照群的乘法是否可以交换位置.

定义 2 (Abel群)　G是群, 并且满足

$$\forall a, b \in G, ab = ba, \tag{1.1.1}$$

则称群G是Abel群. Abel群的乘法一般又称为加法.

例 1　实数的集合按数值加法运算($\mathbf{R}$, +)构成Abel群.

例 2　非零实数的数值乘法($\mathbf{R}\backslash\{0\}$, *)构成Abel群.

例 3　n-维非奇异复矩阵按矩阵乘法构成非Abel群GL(n, $\mathbf{C}$).

§1.1.2　群的乘法

有限群的乘法规则可以用**乘法表**来表示.

一元群$\{e\}$的乘法规则为$ee = e$.

对于二元群$G = \{e, a\}$, 有$ee = e, ea = a, ae = a$. $a^2 \overset{\text{def}}{=} aa$有两种可能,

- $a^2 = e$; ✔
- $a^2 = a$, 两边同时乘以a^{-1}, 得$a = e$. ✘

于是可得乘法表 1.1.

三元群$G = \{e, a, b\}$的乘法规则同样可以用定义群的四个条件确定. 其中a^2有三种可能,

- $a^2 = e$, 则

	e	a
e	e	a
a	a	e

表 1.1: 二元群的乘法表

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

表 1.2: 三元群的乘法表

  - $ab = e \rightsquigarrow b = a^{-1} = a$, ✘;
  - $ab = a \rightsquigarrow b = e$, ✘;
  - $ab = b \rightsquigarrow a = e$, ✘.
- $a^2 = a \rightsquigarrow a = e$, ✘.
- $a^2 = b, ab = e, ba = e, b^2 = a$. ✔

所以三元群只有一种, 其乘法表列于表 1.2 中.

很明显, 以这种方式来确定乘法表非常不方便. 后面讲述的一系列定理将帮助我们有效地研究群的性质.

从刚才的乘法表中可以看出, 群的各个元素在每一行都出现了一次, 在每一列中也出现了一次. 这是一个普遍性质,

定理 1 (重排定理) *群G的乘法表的每一行(或列)都含有所有元素, 只是排列顺序改变了:*

$$a \in G, \rightsquigarrow aG = G, Ga = G. \tag{1.1.2}$$

证明 G封闭 $\iff \forall g \in G, ag \in G \iff aG \subseteq G$. 同样可得$a^{-1} \in G, a^{-1}G \subseteq G, G \subseteq aG$. 故$aG = G$. ∎

重排定理 1.1.2对所有的群都成立, 包括无限群.

连续群的乘法无法列表, 例如

$$U(1) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ g(\theta) | g(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi] \right\} \tag{1.1.3}$$

其乘法规则为

$$g(\theta_3) = g(\theta_1) g(\theta_2), \tag{1.1.4}$$

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 \tag{1.1.5}$$

其中

$$\varphi(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 + \theta_2 \tag{1.1.6}$$

称为连续群的**结合函数**, 对应有限群的乘法表.

§1.1.3 群的生成元

先来看一种特殊的有限群.

定义 3 (循环群)

$$C_n \stackrel{\text{def}}{=} \{e, g, g^2, \cdots, g^{n-1} | g^n = 1\}. \tag{1.1.7}$$

其中g^k表示k个g相乘. 循环群的所有元素都可以由g自乘得到, 所以我们把它称为循环群的**生成元**, 并记成

$$C_n = \langle g | g^n = e \rangle. \tag{1.1.8}$$

一般的群可能有多个生成元, 这些生成元的集合称为群的**生成元组**. 例如

$$G = \langle p, q | p^3 = e, q^2 = e, (qp)^2 = e \rangle \tag{1.1.9}$$

有2个生成元, 生成元的乘法满足如下的"对易关系",

$$(qp)^2 = q(pq)p = e \rightsquigarrow pq = q^{-1}p^{-1} = qp^2, \tag{1.1.10}$$

于是, 生成元的任意乘积可以写成标准的形式$q^m p^n$, 从而$|G| = 6$. 群的乘法见表 1.3.

	e	p	p^2	q	qp	qp^2
e	e	p	p^2	q	qp	qp^2
p	p	p^2	e	qp^2	q	qp
p^2	p^2	e	p	qp	qp^2	q
q	q	qp	qp^2	e	p	p^2
qp	qp	qp^2	q	p^2	e	p
qp^2	qp^2	q	qp	p	p^2	e

表 1.3: $\langle p, q \rangle$群的乘法表

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

表 1.4: D_3 群的乘法表

对有限群, 必有

$$\forall g \in G, \exists n, m \in \mathbf{N}, n > m, g^n = g^m. \tag{1.1.11}$$

记$k \overset{\text{def}}{=} n - m \in \mathbf{N}$, 那么

$$g^k = e, \tag{1.1.12}$$

称使上式满足的最小自然数k为元素g的**阶**.

有限群的生成元的数目是有限的, 其中最小的数目称为有限群的**秩**.

§1.1.4　更多例子

例 4 (正三角形的对称群)　$D_3 = \{e, a, b, c, d, f\}$, 如图 1.1 所示, 乘法规则列于表 1.4 中.

例 5 (四元群)　除了循环群C_4外, 还有一个四元群–反演群(Klein群)V_4, 其乘法规则如表 1.5 所示. 其中P表示空间反射, T表示时间反演, $PT = TP$. V_4是Lorentz群的分立子群.

	$\mathbf{1}$	P	T	PT
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	P	T	PT
P	P	$\mathbf{1}$	PT	T
T	T	PT	$\mathbf{1}$	P
PT	PT	T	P	$\mathbf{1}$

表 1.5: 反演群的乘法表

例 6 (二维Euclid群)　二维空间的转动及平移变换

$$g(\theta, a, b)\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{1.1.13}$$

e　不动,
a　绕1轴转180°,
b　绕2轴转180°,
c　绕3轴转180°,
d　绕z轴逆时针转120°,
f　绕z轴逆时针转240°.

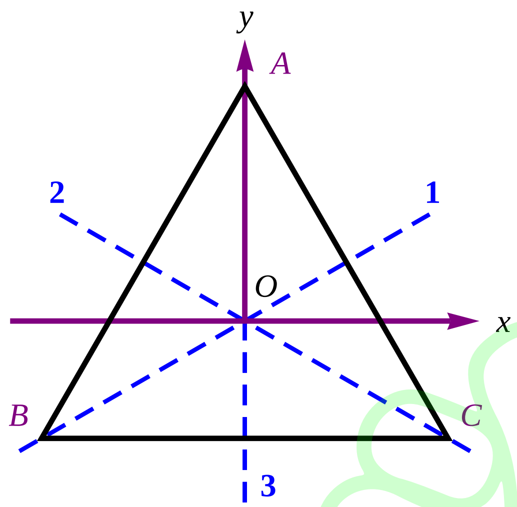

图 1.1: 正三角形的对称群

例 7 (仿射群)　群元素$g(\alpha,\beta)$对实数的作用定义为

$$x' \stackrel{\text{def}}{=} g(\alpha,\beta)x \equiv \alpha x+\beta, \tag{1.1.14}$$

这是一个2参数的非Abel群.

例 8 (SL(2,C))　$\{A_{2\times 2}|A_{jk}\in \mathbf{C}, \det A=1\}$. 在矩阵乘法下构成群.

§1.1.5　半群, 环和域*

定义 4 (半群)　如果一个集合S上定义了二元运算“$\cdot$”, 且二元运算满足封闭性和结合率, 则称代数结构$(S,\cdot)$为**半群**.

定义 5 (环)　在集合R上定义两个二元运算加法“$+$”和乘法“$\cdot$”,并且满足

- $(R,+)$是Abel群(其单位元记为0);
- $(R,\cdot)$是半群;
- 满足分配率,

$$\forall a,b,c\in R, a(b+c)=ab+ac, (b+c)a=ba+ca, \tag{1.1.15}$$

则称代数结构$(R,+,\cdot)$为环. 如果环的乘法满足交换率则称为**交换环**; 如果环的乘法有单位元素则称为**含幺环**.

例 9 (多项式环)　自变量x的实系数多项式在加法和乘法构成含幺交换环.

定义 6 (体和域)　如果含幺环的非零元素都有逆, 则称为体.
如果含幺交换环的非零元素都有逆,则称为域.

例 10 (四元数体)　实四元数$a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$构成体.

例 11　有理数域$\mathbf{Q}$, 实数域$\mathbf{R}$和复数域$\mathbf{C}$.

§1.2　群的分析

研究群的方法和高等数学中的方法不同. 一个基本的方法是把群“切开”来研究.

§1.2.1 集合的分拆

群是集合, 所以我们回顾一下在集合论中怎样把集合分开.

定义 7 (关系) 集合$A\times A$的一个子集又称为集合A上的关系.

设在集合A上定义了关系R, 则

$$a,b\in A\text{有}R\text{ 关系} \iff (a,b)\in R \iff a\sim b. \tag{1.2.1}$$

定义 8 (等价关系) 集合A上满足以下三个条件的关系称为等价关系:

$$\forall a\in A, a\sim a;\quad (\text{自反}) \tag{1.2.2}$$
$$a\sim b\Rightarrow b\sim a;\quad (\text{对称}) \tag{1.2.3}$$
$$a\sim b, b\sim c\Rightarrow a\sim c.\quad (\text{传递}) \tag{1.2.4}$$

例 12 在人际关系中, “认识”、“朋友” 不是等价关系; “同学”、“同民族” 是等价关系。

定义 9 (等价类) 集合A上定义了等价关系 “$\sim$”, 设$a\in A$, 称

$$\left\{b|b\in A, b\sim a\right\} \tag{1.2.5}$$

为(元素a的)**等价类**. 元素a又称为这个等价类的**代表元**. 集合A的所有等价类各取一个代表元, 构成的集合称为**代表元系**.

定义 10 (集合的分拆) 设集合A的子集$X_1, X_2, \cdots, X_n$满足

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = A, \tag{1.2.6}$$
$$X_i\cap X_j = \emptyset,\quad \text{for all}\quad i,j=1,2,\cdots,n, \tag{1.2.7}$$

则称这些子集构成集合A的一个分拆.

命题 1 集合的所有等价类构成一个分拆.

§1.2.2 共轭类

要把群进行分拆, 必须先定义一个等价关系.

定义 11 (共轭) 群G中的两个元素$a,b\in G$满足

$$\exists h\in G, f = hgh^{-1} \tag{1.2.8}$$

, 则称它们共轭, 记成$a\sim b$.

这个定义和线性代数中矩阵的相似变换类似.

命题 2 (共轭类) 设G是群, 则
(1) 共轭关系是等价关系.
(2) 单位元自成一个共轭类.
(3) Abel群的各个元素自成一类.
(4) 一个共轭类K中含有哪些元素,由其中的一个元素$a\in K$完全决定,

$$K = \{gag^{-1}|g\in G\}. \tag{1.2.9}$$

(5) 同一个共轭类中的元素, 它们的阶相同.

设G是群, $a \in G, A \subseteq G, B \subseteq G$, 引进一些记号

$$aA \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ax|x \in A\right\}, \tag{1.2.10}$$

$$Aa \stackrel{\text{def}}{=} \left\{xa|x \in A\right\}, \tag{1.2.11}$$

$$A^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x^{-1}|x \in A\right\}, \tag{1.2.12}$$

$$AB \stackrel{\text{def}}{=} \left\{xy|x \in A, y \in B\right\}. \tag{1.2.13}$$

命题 3 两个共轭类K_i和K_j的乘积K_iK_j含有完整的共轭类.

例 13 (D_3群的共轭类) 首先,单位元自成一类,

$$K_1 = \{e\} \tag{1.2.14}$$

. 现在把元素a放入第二个共轭类中,

$$K_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{gag^{-1}|g \in D_3\right\} = \left\{a, b, c\right\}. \tag{1.2.15}$$

最后一个共轭类是

$$K_3 = \left\{d, f\right\}. \tag{1.2.16}$$

读者可对照D_3群的乘法表 1.4自行计算K_iK_j, 验证推论 3.

§1.2.3 子群和陪集

下面来看“切开”群的另外一种方法.

定义 12 (子群) 设$(G, \cdot)$是群, $A \subseteq G$, 如果$(A, \cdot)$是群,则称A是G的**子群**, 记为$A \leq G$. 如果同时有$A \neq G$, 则称A是G的**真子群**, 记为$A < G$. 群G的子群e和G称为平凡子群.

例 14 $\{e, d, f\} < D_3$.

例 15 $SL(n, \mathbf{C}) < GL(n, \mathbf{C})$.

定义 13 (陪集) 设$H < G, g \in G$, 则称$gH \stackrel{\text{def}}{=} \{gh|h \in H\}$为左陪集, $Hg \stackrel{\text{def}}{=} \{hg|h \in H\}$为右陪集.

下面一般使用左陪集, 当然右陪集可以给出类似的结论.

命题 4 设$H < G$, 则有
(1) 除了H这个陪集外, 其他陪集不含有子群H中的元素;
(2) 其他陪集都不是G的子群;
(3) 每个陪集中的元素个数都是$|H|$;
(4) 如果两个左陪集含有公共的元素, 则这两个左陪集相等.

定理 2 (陪集定理) 左(右)陪集是群的一个分析.

定义 14 子群H在群G中的**指数**, 定义为群G关于子群H的左陪集的个数,记为$[G:H]$. 从每个左陪集中任选一个元素,构成的集合为左陪集**代表元系**.

命题 5 (群元的分解) 设$H \leq G$, $[G:H] = k$, $L = \{l_1, l_2, \cdots, l_k\}$是左陪集代表元系, $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$是右陪集代表元系, 则 $\forall g \in G, \exists$ 唯一 $l_g \in L, r_g \in R$, $h_g^{(L)}, h_g^{(R)} \in H$, 使得

$$g = l_g h_g^{(L)} = h_g^{(R)} r_g. \tag{1.2.17}$$

§1.2.4 Lagrange定理

由陪集定理可以看出

定理 3 (Lagrange定理)

$$|G| = [G:H]\cdot|H|. \tag{1.2.18}$$

例 16 6元群没有4, 5阶子群.

命题 6
(1) 素数阶群没有非平凡子群.
(2) 元素的阶必为群阶因子.
(3) 共轭类中元素的数目是群阶因子.

证明 前两个结论很显然,这里我们只证明最后一个推论. 设共轭类K中含有元素a, 那么由推论 2 式 (1.2.9),

$$K = \{gag^{-1}|g \in G\}. \tag{1.2.19}$$

两个不同的群元素$g,h \in G, g \neq h$可能会给出同样的共轭元素,

$$gag^{-1} = hah^{-1} \iff \left(g^{-1}h\right)a\left(g^{-1}h\right)^{-1} = a \tag{1.2.20}$$

所以我们引进元素a的**中心化子**

$$C_G(a) \overset{\text{def}}{=} \left\{g|gag^{-1} = a, g \in G\right\} < G, \tag{1.2.21}$$

g,h给出同一个共轭元素等价于

$$\left(g^{-1}h\right) \in C_G(a), \iff gC_G(a) = hC_G(a), \tag{1.2.22}$$

即K中的共轭元素与左陪集一一对应, 数目为$[G:C_G(a)]$. ∎

定义 15 G是群, $M \subseteq G$,
正规化子 $N_G(M) \overset{\text{def}}{=} \left\{g|gMg^{-1} = M, g \in G\right\}$,
中心化子 $C_G(M) \overset{\text{def}}{=} \left\{g|g \in G, \&\forall a \in M, gag^{-1} = a\right\}$,
群的中心 $C(G) \overset{\text{def}}{=} C_G(G)$.

这些都是子群.

§1.2.5 不变子群和商群

定义 16 (不变子群) 设G是群, 且

$$N \leq G, \forall g \in G, gNg^{-1} = N, \tag{1.2.23}$$

则称N为群G的不变子群(或正规子群),记成$N \lhd G$. $\{e\}$和G称为**平凡不变子群**. 不含非平凡不变子群的群称为**单群**, 不含非平凡Abel不变子群的群称为**半单群**.

命题 7
(1) 不变子群 $\iff$ 含有完整共轭类的子群.
(2) 不变子群的每一个左陪集同时也是右陪集.
(3) 指数为2的子群是不变子群.

证明 只证最后一个推论. 设$H < G, [G:H] = 2$, 那么$G = H \cup aH = H \cup Ha$. 于是$\forall g \in G$, $\exists h \in H$, $g = ah$, $gH = ahH = aH = aHh = Hah = Hg$. ∎

例 17 $\{e,d,f\}$是D_3的不变子群.

例 18 $SO(3)$群是$O(3)$群的不变子群.

定义 17 (商群) 设$N \lhd G, \forall a \in G$,

$$\bar{a} \stackrel{\text{def}}{=} aN, G/N \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{a}|a \in G\}, \tag{1.2.24}$$

在陪集的集合G/N上定义乘法

$$\bar{a} \circ \bar{b} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{a \cdot b}, \tag{1.2.25}$$

则$(G/N, \circ)$构成群, 称为群G对不变子群N的商群.

商群的乘法是从群的乘法中自然继承的,

$$\bar{a}\bar{b} = aNbN = abNN = abN = \overline{ab} \rightsquigarrow \bar{a} \circ \bar{b} \equiv \bar{a}\bar{b} \tag{1.2.26}$$

§1.2.6 双陪集*

§1.3 群的分类

和几何中图形的全等、相似类似, 为了对群进行分类, 引进群的同构、同态的概念.

§1.3.1 同态和同构

定义 18 (同态和同态) $(G,\cdot)$和$(H,\circ)$是两个群, 映射$f: G \mapsto H$保持群的乘法结构,

$$f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b), \tag{1.3.1}$$

则称映射f为群G到群H的同态(映射). 进一步地, 如果同态映射f还是单射、满射或双射时, 称为单同态、满同态和同构. 两个群同构记成$G \cong H$或者$G \xrightarrow{\sim} H$.

命题 8 同态的复合仍然是同态.

定义 19 (自同态) 一个群到自身的同态称为自同态. 类似地还有单自同态、满自同态和自同构的概念.

例 19 $D_3 \cong \langle p,q|p^3 = e, q^2 = e, (qp)^2 = e\rangle$. 参看第 3 页的表 1.3 和 1.4, 可见只要作替换

$$p \leftrightarrow d, p^2 \leftrightarrow f, q \leftrightarrow a, qp \leftrightarrow b, qp^2 \leftrightarrow c, e \leftrightarrow e, \tag{1.3.2}$$

则两个乘法表完全相同, 两个群同构.

例 20 D_3群的一个自同构为

$$a \leftrightarrow b, d \leftrightarrow f, c \leftrightarrow c, e \leftrightarrow e. \tag{1.3.3}$$

例 21 D_3群到子群$\{e,a\} \cong C_2$的一个同态映射可以定义为

$$\varphi(e) = \varphi(d) = \varphi(f) = e, \tag{1.3.4}$$
$$\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c) = a. \tag{1.3.5}$$

例 22 $O(3)$群到Z_2的一个同态为

$$f: O(3) \mapsto \{-1, 1\}, \tag{1.3.6}$$
$$f(R) = \det R. \tag{1.3.7}$$

§1.3.2 同态基本定理

定理 4 (同态基本定理) $f: G \mapsto H$是群同态，则

(1) $f(G) \leq H$;

(2) $\ker f \lhd G$;

(3) $G/\ker f \cong f(G)$.

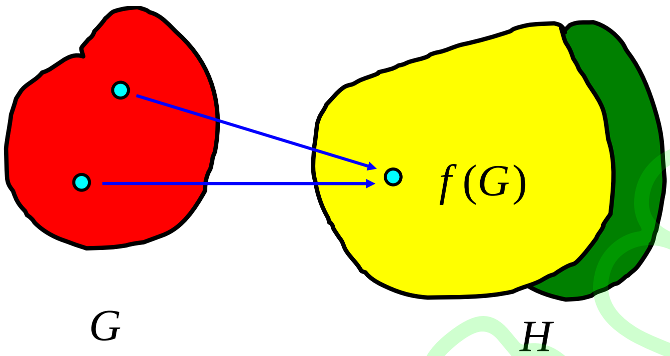

图 1.2: 同态映射

证明 两个群之间的同态映射如图 1.2 所示，下面对结论逐个予以证明.

(1) $f(G) \leq H$:

封闭性: $\forall h_1, h_2 \in f(G), \exists g_1, g_2 \in G, f(g_1) = h_1, f(g_2) = h_2, \rightsquigarrow h_1 \circ h_2 = f(g_1) \circ f(g_2) = f(g_1 \cdot g_2) \in f(G)$.

结合率: H是群, $f(G)$继承的乘法满足结合率。

含 幺: $f(1_G) = f(1_G \cdot 1_G) = f(1_G) \circ f(1_G) \rightsquigarrow f(1_G) = 1_H$.

有 逆: $f(g^{-1}) \circ f(g) = f(g^{-1}g) = f(1_G) = 1_H$, $f(g) \circ f(g^{-1}) = f(gg^{-1}) = f(1_G) = 1_H$, $\therefore f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \in G$. $\forall h \in f(G), \exists g \in G, f(g) = h$, 于是$h^{-1} = f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \in f(G)$.

(2) $\ker f \lhd G$:

容易验证$\ker f$是群. 进一步有$\ker f$是不变子群,

$$\left.\begin{array}{lll} f(g(\ker f)g^{-1}) = 1_H & \Longleftrightarrow & g(\ker f)g^{-1} \subseteq \ker f \\ f(g^{-1}(\ker f)g) = 1_H & \Longleftrightarrow & g^{-1}(\ker f)g \subseteq \ker f \Longleftrightarrow \ker f \subseteq g(\ker f)g^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow g(\ker f)g^{-1} = \ker f.$$

(3) $G/\ker f \cong f(G)$:

构造映射

$$\pi: G/\ker f \mapsto f(G), \tag{1.3.8}$$

$$\pi(\bar{a}) \stackrel{\text{def}}{=} f(a). \tag{1.3.9}$$

可得

$$\bar{a} = \bar{b} \Longleftrightarrow a^{-1}b \in \ker f \Longleftrightarrow f(a^{-1}b) = 1_H \Longleftrightarrow f(a) = f(b) \Longleftrightarrow \pi(\bar{a}) = \pi(\bar{b}), \tag{1.3.10}$$

这个映射是well defined(取同一个陪集的不同代表元时，给出一致的定义), 并且是一个单射.

代表元a可以取遍G, 所以π是到$f(G)$的满射. 再考虑到

$$\pi(\bar{a}) \circ \pi(\bar{b}) = f(a) \circ f(b) = f(a \cdot b) = \pi(\bar{a} \cdot \bar{b}), \tag{1.3.11}$$

映射保持乘法结构. 总之这是一个同构映射. ∎

例 23 第 8 页例 21 的同态核是$\{e, d, f\}$, 例 22 的同态核是$SO(3)$, 它们都是不变子群.

§1.3.3 其它的同态定理*

这里只介绍两个.

定理 5 $N\lhd G$, 则G/N的全体子群, 与G和N的中间群$\{M|N\leq M\leq G\}$一一对应.

证明 定义商群的自然同态$\pi: G\mapsto G/N, \pi(g)\overset{\text{def}}{=}\bar{g}=gN$. 显然$\pi$是满射, $\ker\pi=N$.
记全体中间群为$\mathcal{M}\overset{\text{def}}{=}\{M|N\leq M\leq G\}$, G/N的全体子群为$\overline{\mathcal{M}}$.
$\forall M\in\mathcal{M}, N\leq M\leq G, N\lhd G\rightsquigarrow N\lhd M$. 作映射

$$f:\mathcal{M}\mapsto\overline{\mathcal{M}}, \tag{1.3.12}$$

$$f(M)\overset{\text{def}}{=}\pi(M)\equiv M/N. \tag{1.3.13}$$

f是单射: $M_1\neq M_2 \iff \exists g\in M_1\cup M_2, g\notin M_1\cap M_2 \iff \exists\bar{g}\in\bar{M}_1\cup\bar{M}_2, \bar{g}\notin\bar{M}_1\cap\bar{M}_2 \iff \bar{M}_1\neq\bar{M}_2$.

下面验证f是满射. $\forall\bar{M}\in\overline{\mathcal{M}}$, 取$M\overset{\text{def}}{=}\bigcup_{gN\in\bar{M}}gN$, 则有

(1) 封闭性: $\forall g_1,g_2\in M, \exists\bar{a}_1,\bar{a}_2\in\bar{M}$, 使得$g_1\in\bar{a}_1, g_2\in\bar{a}_2$,

$$g_1g_2\in\bar{a}_1\bar{a}_2\in\bar{M}\rightsquigarrow g_1g_2\in M. \tag{1.3.14}$$

(2) 结合率: 继承自群G.

(3) 含幺: 单位元$1_G\in N$, 而$N\in\bar{M}\rightsquigarrow N\subseteq M$, 所以$1_G\in M$.

(4) 有逆: $\forall g\in M, \exists\bar{a}\in\bar{M}, g\in\bar{a}$, 或者说$\exists h\in N, g=ah$. 于是$g^{-1}=h^{-1}a^{-1}\in\overline{a^{-1}}\in\bar{M}, \rightsquigarrow g^{-1}\in M$.

M是群, 从而f是满射.

总之, f是一一映射. ∎

命题 9 商群的不变子群, 与中间群中的不变子群一一对应.

证明 设$N\lhd M\lhd G$, 由定理 5,$f(M)=\bar{M}\leq G/N$是一一映射. 又$\forall\bar{a}\in G/N, \bar{a}\bar{M}\bar{a}^{-1}=\overline{aMa^{-1}}$, 于是

$$aMa^{-1}=M \iff \overline{aMa^{-1}}=\bar{M}. \tag{1.3.15}$$

不变子群一一对应. ∎

定理 6 $N\lhd G, M\lhd G, N\leq M$, 则$G/M\cong\frac{G/N}{M/N}$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & G/M \\
& G/N \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

图 1.3: 商群的自然同态

证明 $N\lhd G, N\leq G, \rightsquigarrow N\lhd M$. 由命题 9,

$$M/N\lhd G/N. \tag{1.3.16}$$

现在构造映射

$$\varphi : G/N \mapsto G/M, \tag{1.3.17}$$

$$\varphi(gN) = gM. \tag{1.3.18}$$

这个映射是well defined: $gN = g'N \iff g^{-1}g' \in N \subseteq M \iff gM = g'M$.

显然f是满同态. 另外$\forall g \in G$, $gN \in \ker f \iff gM = M \iff g \in M \iff gN \in M/N$, $\rightsquigarrow \ker f = M/N$, 于是由同态基本定理, 此定理成立. ∎

§1.4 群在集合上的作用

在实用中群都是从具体模型中抽象而来, 每个群元素都有其作用对象. 这些作用对象可能是晶格、波函数、场, 也可能是矢量、张量、图形等. 这些作用对象可以抽象为集合. 群在集合上的作用体现为对集合中元素的置换.

§1.4.1 置换群

定义 20 集合Σ到自身的每个一一对应叫做集合Σ上的一个**置换**.

我们可以将n个客体编号为1, 2, ..., n. 如果n阶置换s将$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列$|a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$映为另一个排列$|b_1,b_2,\cdots,b_n\rangle$, 则记为

$$s = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}. \tag{1.4.1}$$

按定义, 列的排列不起作用, 所以可以将第一行按顺序排列, 例如

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{1.4.2}$$

所有的n元置换为

$$S_n \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \middle| (a_1,a_2,\cdots,a_n)\text{是}(1,2,\cdots,n)\text{的一个排列.} \right\}, \tag{1.4.3}$$

总计有$|S_n| = n!$个不同的置换.

要构成群, 必须在集合S_n上定义乘法. 我们把两个置换r,s的**乘积**rs定义为先进行置换s, 再进行置换r.

例 24 取S_4中的两个元素

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tag{1.4.4}$$

$rs\,|1234\rangle = r\,|2413\rangle = |1432\rangle$, $sr\,|1234\rangle = s\,|3124\rangle = |1243\rangle$, 所以

$$rs = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad sr = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1.4.5}$$

可见乘法不满足交换率.

下面验证S_n在上述乘法规则下构成群.

- 封闭性: 显然.

- 结合率: 设$r, s, t \in S_n$,

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}, \tag{1.4.6}$$

则

$$r(st) = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ b_{c_1} & b_{c_2} & \cdots & b_{c_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_{b_{c_1}} & a_{b_{c_2}} & \cdots & a_{b_{c_n}} \end{pmatrix}, \tag{1.4.7}$$

$$(rs)t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_{b_1} & a_{b_2} & \cdots & a_{b_n} \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_{b_{c_1}} & a_{b_{c_2}} & \cdots & a_{b_{c_n}} \end{pmatrix}, \tag{1.4.8}$$

$$r(st) = (rs)t. \tag{1.4.9}$$

- 含　幺: 单位元为恒等置换

$$s_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}. \tag{1.4.10}$$

- 有　逆: 置换

$$s = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \tag{1.4.11}$$

的逆元素为

$$s = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}. \tag{1.4.12}$$

于是S_n在这个乘法定义下构成群, 称为**n元置换群**.

命题 10　设置换

$$r = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}, \tag{1.4.13}$$

则与置换s的乘积为

$$sr = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ sb_1 & sb_2 & \cdots & sb_n \end{pmatrix}, \tag{1.4.14}$$

$$rs = \begin{pmatrix} s^{-1}a_1 & s^{-1}a_2 & \cdots & s^{-1}a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}. \tag{1.4.15}$$

证明　第一个等式由定义显然成立. 再利用

$$\begin{aligned} rs &= (s^{-1}r^{-1})^{-1} \\ &= \left(s^{-1}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ s^{-1}a_1 & s^{-1}a_2 & \cdots & s^{-1}a_n \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} s^{-1}a_1 & s^{-1}a_2 & \cdots & s^{-1}a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

第二个等式成立. ∎

注1 (置换的其它定义方式)　这里我们采用的置换定义为交换数字(定义方式I). 文献中还有其它的定义方式, 比如可以约定

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

表示原来在a_i位置上的客体, 在置换后排在第b_i位置(定义方式II); 或者表示原来在b_i位置上的客体, 在置换后排在第a_i位置(定义方式III).

例 25 设

$$r=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&2&4\end{pmatrix},\quad s=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&4&3&2\end{pmatrix},\tag{1.4.17}$$

在三种定义下分别计算rs:

1. 交换数字

$$rs\,|12345\rangle=r\,|51432\rangle=|43251\rangle,\tag{1.4.18}$$

$$rs=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&5&1\end{pmatrix}.\tag{1.4.19}$$

2. 交换位置a

$$rs\,|12345\rangle=r\,|25431\rangle=|53214\rangle,\tag{1.4.20}$$

$$rs=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&5&1\end{pmatrix}.\tag{1.4.21}$$

3. 交换位置b

$$rs\,|12345\rangle=r\,|51432\rangle=|45213\rangle,\tag{1.4.22}$$

$$rs=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&2&1&3\end{pmatrix}.\tag{1.4.23}$$

一般地, 容易证明前两种定义方式得到的乘法表永远相同,

$$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\a_{b_1}&a_{b_2}&\cdots&a_{b_n}\end{pmatrix}.\tag{1.4.24}$$

两种定义等价.

§1.4.2 置换可表示为轮换的乘积

定义 21 **轮换**是一种特殊的置换,

$$(a_1,a_2,\cdots,a_k)\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots * a_{k-1}&a_k\\a_2&a_3&\cdots&a_k&a_1\end{pmatrix}.\tag{1.4.25}$$

没有公共数字的两个轮换称为**互相独立的轮换**. 由两个数字组成的的轮换称为**对换**.

命题 11
(1) 独立的轮换互相对易.
(2) 任意置换都可表示为若干轮换的乘积, 并且这些轮换相互独立.
(3) 轮换可以表示为对换的乘积.
(4) 轮换可以表示成相邻数字对换的乘积.

证明 最后两个性质的证明可以利用恒等式

$$(a_1,a_2,\cdots,a_m)\equiv(a_1,a_m)\cdots(a_1,a_3)(a_1,a_2),\tag{1.4.26}$$

$$(a,a+k)\equiv(a+1,a+k)(a,a+1)(a+1,a+k).\tag{1.4.27}$$

详细的论证略. ∎

定义 22 (置换宇称) 置换

$$s=\begin{pmatrix}1&2&\cdot&n\\s_1&s_2&\cdots&s_n\end{pmatrix}\tag{1.4.28}$$

的宇称定义为

$$\delta(s)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}+1,&(s_1,s_2,\cdots,s_n)\text{ 是奇排列};\\-1,&(s_1,s_2,\cdots,s_n)\text{ 是偶排列}.\end{cases}\tag{1.4.29}$$

命题 12
(1) 长度为偶数的轮换是奇置换, 长度为奇数的轮换是偶置换.
(2) 置换之积的宇称, 等于各置换的宇称之积.
(3) 宇称函数$\delta: S_n \mapsto \{1,-1\}$是同态映射, 同态核为交错群$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{S_n$ 中的偶置换$\}$.

当$n \geq 3$时, $\mathrm{rank}S_n = 2$, 生成元为$\{(1,2,\cdots,n),(1,2)\}$. 其它相邻数字的对换可表示为

$$\begin{aligned}(a,a+1) &= (1,2,\cdots,n)(a-1,a)(1,2,\cdots,n)^{-1} = \cdots \\ &= (1,2,\cdots,n)^{a-1}(1,2)(1,2,\cdots,n)^{-(a-1)}.\end{aligned} \tag{1.4.30}$$

§1.4.3　置换群的共轭类

定义 23 (轮换结构)　由于任何置换都可以表示成独立轮换的乘积, 可以把置换的轮换结构定义为

$$(\nu) = (1^{\nu_1}2^{\nu_2}\cdots n^{\nu_n}), \tag{1.4.31}$$

表示这个置换是ν_1个1阶轮换, ν_2个2阶轮换, ..., ν_n个n阶轮换的乘积. 其中ν_1, ν_2, ..., ν_n为非负整数, 且

$$1\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\nu_n = n. \tag{1.4.32}$$

命题 13　置换群S_n中两个元素共轭, 等价于这两个元素具有相同的轮换结构.

证明　设S_n群的一个元素为

$$s = (a_1,a_2,\cdots,a_k)(b_1,b_2,\cdots,b_l)\cdots \tag{1.4.33}$$

如果有一个共轭元素$st = gsg^{-1}$,则

$$t = (ga_1,ga_2,\cdots,ga_k)(gb_1,gb_2,\cdots,gb_l)\cdots \tag{1.4.34}$$

具有和s相同的轮换结构.

反之如果

$$t = (a_1',a_2',\cdots,a_k')(b_1',b_2',\cdots,b_l')\cdots \tag{1.4.35}$$

取

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & b_1 & b_2 & \cdots & b_l & \cdots \\ a_1' & a_2' & \cdots & a_k' & b_1' & b_2' & \cdots & b_l' & \cdots \end{pmatrix}, \tag{1.4.36}$$

则有$t = gsg^{-1}$. ∎

命题 14　轮换结构(ν)所对应的共轭类中含有的元素数目为

$$\frac{n!}{1^{\nu_1}\nu_1!2^{\nu_2}\nu_2!\cdots n^{\nu_n}\nu_n!}. \tag{1.4.37}$$

§1.4.4　置换表示

一般来说, 群都有具体的作用对象. 如转动群作用在三维空间的矢量上, 点群的对称操作作用在晶体点阵或化学分子上, 规范变换的作用对象是场, 等等. 这些群中的元素都可以看成是作用空间Σ上的置换.

定理 7 (Cayley)　任何一个群G都同构于置换群$S(G)$的一个子群.

证明 $(G,\cdot)$是群，集合$G=\{g_1,g_2,\cdot,g_n\}$的置换群为$S(G)$，其中的置换形式为

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1' & g_2' & \cdots & g_n' \end{pmatrix}. \tag{1.4.38}$$

定义映射

$$f: G \mapsto S(G), \tag{1.4.39}$$

$$f(h) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ hg_1 & hg_2 & \cdots & hg_n \end{pmatrix}, \tag{1.4.40}$$

$$f(h)g \equiv hg. \tag{1.4.41}$$

那么有

$$f(h_1\cdot h_2)g = h_1h_2g = f(h_1)f(h_2)g, \tag{1.4.42}$$

$$f(h_1\cdot h_2) = f(h_1)f(h_2), \tag{1.4.43}$$

是同态映射. 并且

$$\ker f = \{h|h\in G, \forall g\in G, hg=g\} = \{e\}, \tag{1.4.44}$$

由同态基本定理,

$$G \cong f(G) \leq S(G). \tag{1.4.45}$$

可见置换群可作为有限群的样板群. ∎

定义 24 (置换表示) *群G到置换群$S(\Sigma)$的每一个同态$f: G\mapsto S(\Sigma)$，又称为群G在集合Σ上的一个置换表示. 如果f是单同态，则称f是*忠实表示.

例 26 (D_3群的置换表示) 把正三角形的顶点$\{A,B,C\}$编号为$\{1,2,3\}$，可以D_3群的一个置换表示,

$$e\to(1),\quad a\to(23),\quad b\to(13),\quad c\to(12),\quad d\to(123),\quad f\to(132). \tag{1.4.46}$$

这是一个忠实表示，并且$D_3\cong S_3$.

在这一置换表示下，可以很容易地计算群的乘法，群的共轭类也一目了然.

定义 25 (正则表示)

$$\rho: G\mapsto S(G), \rho(g)h \overset{\text{def}}{=} gh \tag{1.4.47}$$

称为群G的左正则表示.

$$\tau: G\mapsto S(G), \tau(g)h \overset{\text{def}}{=} hg^{-1} \tag{1.4.48}$$

称为群G的右正则表示.

读者可自行验证ρ,τ是同态映射，并且是忠实表示. 左正则表示在证明Cayley定理时已经出现过一次.

一般来说，正则表示的作用空间$\Sigma=G$太大. 而$n=|\Sigma|$越小，$S(\Sigma)=S_n$的子群越容易研究. 为此引进诱导表示和共轭表示.

定义 26 (诱导表示) *设$H\leq G$，取作用空间为左陪集$\Sigma=\{aH|a\in G\}$，并定义*

$$\rho_H: G\mapsto S(\Sigma), \rho_H(g)(aH) \overset{\text{def}}{=} gaH, \tag{1.4.49}$$

得到一个置换表示，称为群G对于子群H的左诱导表示. 取作用空间为右陪集$\Sigma=\{Ha|a\in G\}$，并定义

$$\tau_H: G\mapsto S(\Sigma), \tau_H(g)(Ha) \overset{\text{def}}{=} Hag^{-1}, \tag{1.4.50}$$

得到一个置换表示，称为群G对于子群H的右诱导表示.

命题 15 诱导表示的同态核, 是子群H的所有共轭子群的交集.

证明 对左正则表示,

$$\begin{aligned} g \in \ker\rho_H \iff \forall a \in G, gaH = aH \iff \forall a \in G, a^{-1}gaH = H \\ \iff \forall a \in G, a^{-1}ga \in H \iff \forall a \in G, g \in aHa^{-1}, \end{aligned} \tag{1.4.51}$$

于是

$$\ker\rho_H = \bigcap_{a\in G} aHa^{-1}. \tag{1.4.52}$$

对右诱导表示可得同样的结论, $\ker\tau_H = \bigcap_{a\in G} aHa^{-1}$. ∎

定义 27 (共轭表示) 对于群G的一个子集$A \subseteq G$, 令$\Sigma = \{aAa^{-1|a\in G}\}$, 定义同态映射

$$\pi : G \mapsto S(\Sigma), \pi(g)(aAa^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} (ga)A(ga)^{-1} \tag{1.4.53}$$

得到的置换表示,称为群G对子集A的共轭表示.

命题 16 $\ker\pi = \bigcap_{a\in G} aN_G(A)a^{-1}$.

证明 $g \in \ker\pi \iff \forall a \in G, gaAa^{-1}g^{-1} = aAa^{-1} \iff \forall a \in G, a^{-1}ga \in N_G(A)$. ∎

§1.4.5 轨道

定义 28 设群G的作用空间为Σ. 作用空间中的一个点$a \in \Sigma$中的G-轨道定义为

$$[a] \stackrel{\text{def}}{=} Ga. \tag{1.4.54}$$

例 27 取群G为三维空间中绕z-轴的转动, 作用空间Σ为单位球面, 则G-轨道是球面上的纬线. 转动群SO(3)作用在三维空间$\mathbf{R}^3$上, 轨道为中心位于原点的球面.

定义 29 (固定子群) 保持作用空间中一个点$a \in \Sigma$不动的元素构成子群,

$$G_a \stackrel{\text{def}}{=} \{g|ga = a, g \in G\}, \tag{1.4.55}$$

称为a点的固定子群(迷向子群, 小群). 迷向子群为整个群G的点, 称为不动点.

例 28 转动群作用于球面, 北极点的迷向子群为绕极轴的转动, 同构于$SO(2)$.

例 29 恰当Lorentz群SO(3,1)的作用空间取为四动量空间. 对不同的四动量类型, 其小群不同 [1],

(1) $p^\mu = 0$: SO(3,1);
(2) $p^2 = m2$: SO(3);
(3) $p^2 = 0$: SE(2);
(4) $p^2 = -m^2$: SO(2,1).

这导致光子与质量非零的矢量粒子的行为截然不同, 光子场必须满足规范条件 [2–5].

定理 8 (轨道公式) $|G| = |G_a||[a]|$.

证明 设G关于G_a的左陪集代表元为$g_1, g_2, \cdots, g_k$,

$$G = g_1G_a \cup g_2G_a \cup \cdots \cup g_kG_a, \tag{1.4.56}$$

$$[a] = Ga = (g_1G_a \cup g_2G_a \cup \cdots \cup g_kG_a)a = \{g_1a, g_2a, \cdots, g_ka\}, \tag{1.4.57}$$

$$g_ia = g_ja \iff g_i^{-1}g_ja = a \iff g_i^{-1}g_j \in G_a \iff g_iG_a = g_jG_a, \tag{1.4.58}$$

左陪集与轨道中的点一一对应, $|[a]| = [G : G_a]$, 利用Lagrange定理, 轨道公式成立. ∎

例 30 (正n边形的对称群D_n) 将多边形的顶点编号为$1,2,\cdots,n$. 它的对称操作包括旋转$\sigma=(1,2,\cdots,n)$和保持顶点1不动的翻转

$$\tau=\begin{cases}(2,n)(3,n-1)\cdots(n/2,n/2+2), & \text{当}n\text{为偶数时};\\ (2,n)(3,n-1)\cdots((n+1)/2,(n+1)/2+1), & \text{当}n\text{为奇数时}.\end{cases} \tag{1.4.59}$$

顶点1的固定子群为

$$G_1=\{(1),\tau\}. \tag{1.4.60}$$

根据轨道公式, $|D_n|=2n$. 而$\{\sigma^i\tau^j|i=1,2,\cdots,n;j=0,1.\}$正好是$2n$个不同元素, 于是

$$D_n=\left\langle\sigma^i\tau^j\,\middle|\,\sigma^n=1,\tau^2=1,\tau\sigma=\sigma^{-1}\tau\right\rangle. \tag{1.4.61}$$

§1.5 群的直积

通过直积、半直积, 可以由较小的群构造大的群, 或者把较大的群分解成较小的群来研究.

§1.5.1 直积

定义 30 (直积群) K和H是群, 在集合$G=K\times H=\{(k,h)|k\in K,h\in H\}$上定义乘法

$$(k_1,h_1)(k_2,h_2)\overset{\text{def}}{=}(k_1k_2,h_1h_2), \tag{1.5.1}$$

则G是群,称作K和H的直积群, 记为$G=K\otimes H$. 两个Abel群的直积又称为**群的直和**, 用 “$\oplus$” 表示.

命题 17 K和H是$K\otimes H$的正规子群:

$$N_K\overset{\text{def}}{=}\{(k,1_H|k\in K\}\cong K,\quad N_H\overset{\text{def}}{=}\{(1_K,h|h\in H\}\cong H, \tag{1.5.2}$$

$$\rightsquigarrow N_K\lhd K\otimes H,\quad N_H\lhd K\otimes H,\quad N_KN_H=K\otimes H. \tag{1.5.3}$$

例 31 (He原子) 有两个电子,

$$H=\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_e}+\frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_e}-\frac{2e^2}{r_1}-\frac{2e^2}{r_2}+\frac{e^2}{r_{12}}, \tag{1.5.4}$$

具有对称性O(3)$\otimes$S$_2$.

例 32 O(3)=SO(3)$\otimes$ {1,-1}.

§1.5.2 半直积

例 33 (刚体的平面平行运动) 包含两维空间的转动和平移. 转动

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \tag{1.5.5}$$

构成两维特殊正交群

$$SO(2)\overset{\text{def}}{=}\left\{R(\theta)\,\middle|\,R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\theta\in[0,2\pi)\right\}, \tag{1.5.6}$$

乘法规则为

$$R(\theta_1)R(\theta_2)=R(\theta_1+\theta_2). \tag{1.5.7}$$

两维平移

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=T(a,b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+a\\y+b\end{pmatrix} \tag{1.5.8}$$

构成平移群$(\mathbf{R}^2,+)$. 这两个群合在一起, 我们得到一个大的对称群$SE(2)=\{g(\theta,a,b)\}$,

$$g(\theta,a,b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \tag{1.5.9}$$

乘法规则为

$$\begin{aligned}&g(\theta_1,a_1,b_1)g(\theta_2,a_2,b_2)\\=&g(\theta_1+\theta_2,a_2\cos\theta_1+b_2\sin\theta_1+a_1,-a_2\sin\theta_1+b_2\cos\theta_1+b_1).\end{aligned} \tag{1.5.10}$$

平移群$(\mathbf{R}^2,+)$是$SE(2)$的不变子群, 但是转动群$SO(2)$不是$SE(2)$的不变子群, 所以$SE(2)\neq(\mathbf{R}^2,+)\otimes SO(2)$. 事实上$SE(2)=(\mathbf{R}^2,+)\otimes_s SO(2)$, 是两个子群的半直积.

定义 31 (自同构群)　群G到自身的同构(同态)映射叫做**自同构**(同态). 以Aut(G)表示群G的全部自同构, 并定义集合Aut(G)上的乘法为函数的复合运算, 则Aut(G)成群, 称为群G的**自同构群**.

例 34 (整数加法群的自同构)　先确定自同态. 设$f:\mathbf{Z}\mapsto\mathbf{Z}$是自同态, 且$f(1)=k\in\mathbf{Z}$, 则

$$f(2)=f(1)+f(1)=2k, \tag{1.5.11}$$
$$f(n)=nk, f(-n)=-nk, f(0)=0, \tag{1.5.12}$$

记这个同态映射为f_k. 于是$\mathbf{Z}$的全部自同态为$\{f_k|k\in\mathbf{Z}\}$(这是一个含幺半群, 不满足有逆条件).

这些同态都是单射. 同构映射还是满射,

$$f_k(\mathbf{Z})=\{kn|n\in\mathbf{Z}\}=\mathbf{Z}\iff k=\pm1. \tag{1.5.13}$$

所以Aut($\mathbf{Z}$)$=\{f_1,f_{-1}\}$.

定义 32 (半直积)　K和H是群,在集合$G=K\times H=\{(k,h)|k\in K,h\in H\}$上定义乘法

$$(k_1,h_1)(k_2,h_2)\overset{\text{def}}{=}(k_1(\hat{h}_1k_2),h_1h_2), \tag{1.5.14}$$

则G是群, 称作K和H的**半直积群**, 记为$G=K\otimes_s H$. 其中

$$f:H\mapsto\mathrm{Aut}(K), \tag{1.5.15}$$
$$f(h)=\hat{h}\in\mathrm{Aut}(K) \tag{1.5.16}$$

是同态映射.

直积可以看成是半直积的特殊情形.

命题 18　K是$K\otimes_s H$的不变子群, 而H不一定是$K\otimes_s H$的不变子群.

例 35　$E(2)=(\mathbf{R}^2,+)\otimes_s O(2)$, $E(3)=(\mathbf{R}^3,+)\otimes_s O(3)$, Poincaré 群$=(\mathbf{R}^4,+)\otimes_s O(3,1)$.

§1.6　有限群的分类定理*

数学家已经找出了所有的有限群, 有限群分类定理的证明写出来需要5000页的篇幅, 不在本课程的讨论范围之内. 下面列出Abel有限群的最终分类定理和部分非Abel有限群分类定理.

§1.6.1 Abel群的分类

定理 9 每个有限生成Abel群均同构于$\mathbf{Z}^r\oplus\mathbf{Z}_{m_1}\oplus\mathbf{Z}_{m_2}\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}_{m_t}$. 其中$r,t$为非负整数, r称为群的**秩**(rank), $(m_1,m_2,\cdots,m_t)$称为群的**不变因子**.

定理 10 设A为有限Abel群, 且$A\neq\{0\}$, 则

(1) 存在一组不变因子$(m_1,m_2,\cdots,m_t)$, 使得$A\cong\mathbf{Z}_{m_1}\oplus\mathbf{Z}_{m_2}\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}_{m_t}$, 且不变因子由群$A$唯一确定(不计顺序).

(2) $A\cong\mathbf{Z}_{p_1^{s_1}}\oplus\mathbf{Z}_{p_2^{s_2}}\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}_{p_k^{s_k}}$. 其中$(p_1,p_2,\cdots,p_k)$是素数(它们不一定互不相等), $(s_1,s_2,\cdots,s_k)$是正整数, $(p_1^{s_1},p_2^{s_2},\cdots,p_k^{s_k})$称为**初等因子**. 初等因子由群唯一确定.

例 36 1500阶Abel群有6种, 所有可能的初等因子为

$$\begin{aligned}1500&=2^2\times3\times5^3 &(1.6.1)\\&=2^2\times3\times5\times5^2 &(1.6.2)\\&=2^2\times3\times5\times5\times5 &(1.6.3)\\&=2\times2\times3\times5^3 &(1.6.4)\\&=2\times2\times3\times5\times5^2 &(1.6.5)\\&=2\times2\times3\times5\times5\times5. &(1.6.6)\end{aligned}$$

§1.6.2 非Abel群的分类

Lagrange定理说明对$|G|=n$的群, 子群的阶一定是n的因子. 但是反过来, n的任意一个因子m, 群G未必有m阶子群. 希洛夫(Sylow)定理表明, 对n的特殊因子m, G必有m阶子群 [14].

定理 11 (Sylow) 设$p^r\,|\,|G|$, 其中p为素数. 以$N(n)$表示G中n阶子群的个数, 则

$$N(p^r)=1\mod p. \tag{1.6.7}$$

定义 33 设G为p^rn阶群, 其中p为素数, 且$r\geq1$, $p\nmid n$, 则G的每个p^r阶子群均叫做G的Sylow p-子群.

定理 12 (Sylow) 设G为有限群, 则

(1) 对$|G|$的每个素因子p, 均存在G的Sylow p-子群.

(2) G的Sylow p-子群彼此共轭.

(3) G的Sylow p-子群的个数$=1\mod p$.

(4) 设P为G的一个Sylow p-子群, 则G的Sylow p-子群的个数为$[G:N_G(p)]$.

定理 13 设G是$2p$阶非Abel群, 其中p是奇素数, 则$G\cong D_p$.

定理 14 设p和q是素数, $p>q$, $q\nmid(p-1)$, 则pq阶群必然是循环群$\mathbf{Z}_{pq}$.

下面这个看来简单的定理, 证明它要用300多页:

定理 15 奇数阶非Abel群一定不是单群.

确定所有非Abel单群这个问题直到1981年才完全解决. 与Abel群的分类定理相比, 非Abel群的分类定理的证明过程一般来说都是长篇巨幅 [6–13].

§1.6.3 小阶群表

下面给出小阶群的列表.

其中$Q_8\overset{\text{def}}{=}\langle a,b\,|\,a^4=1,b^2=a^2,ba=a^3b\rangle$是四元数群, 如果取$a\to i,b\to j$, 可得群的八个元素为$\{1,i,j,k,-1,-i,-j,-k\}$.

$T\overset{\text{def}}{=}\langle a,b\,|\,a^6=1,b^2=a^3,ba=a^{-1}b\rangle$. 注意这里的$T$是数学文献中的记号, 不是物理学中的正四面体群$T$. 正四面体群同构于$A_4$.

群的阶数	Abel群	非Abel群
1	$\{1\}$	
2	$\mathbf{Z}_2$	
3	$\mathbf{Z}_3$	
4	$\mathbf{Z}_2^2, \mathbf{Z}_4$	
5	$\mathbf{Z}_5$	
6	$\mathbf{Z}_6$	$S_3 \cong D_3$
7	$\mathbf{Z}_7$	
8	$\mathbf{Z}_2^3, \mathbf{Z}_2 \otimes \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_8$	D_4, Q_8
9	$\mathbf{Z}_3^2, \mathbf{Z}_9$	
10	$\mathbf{Z}_{10}$	D_5
11	$\mathbf{Z}_{11}$	
12	$\mathbf{Z}_2^2 \otimes \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_{12}$	D_6, A_4, T
13	$\mathbf{Z}_{13}$	
14	$\mathbf{Z}_{14}$	D_7
15	$\mathbf{Z}_{15}$	

表 1.6: 阶数$\leq$ 15的有限群

参考文献

[1] Eugene P. Wigner. *Group theory: And its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. Expanded and improved ed. Translated from the German by J. J. Griffin. Pure and Applied Physics. Vol. 5. Academic Press, New York, 1959.

[2] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields. Vol. I.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996. Foundations, Corrected reprint of the 1995 original.

[3] Steven Weinberg. Feynman rules for any spin. iii. *Phys. Rev.*, 181:1893–1899, 1969.

[4] Steven Weinberg. Feynman rules for any spin. *Phys. Rev.*, 133:B1318–B1332, 1964.

[5] Steven Weinberg. Feynman rules for any spin. 2. massless particles. *Phys. Rev.*, 134:B882–B896, 1964.

[6] Ronald Solomon. A brief history of the classification of the finite simple groups. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 38(3):315–352 (electronic), 2001.

[7] Daniel Gorenstein. The classification of the finite simple groups, a personal journey: the early years. In *A century of mathematics in America, Part I*, volume 1 of *Hist. Math.*, pages 447–476. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[8] Daniel Gorenstein, Richard Lyons, and Ronald Solomon. *The classification of the finite simple groups*, volume 40 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[9] Daniel Gorenstein, Richard Lyons, and Ronald Solomon. *The classification of the finite simple groups. Number 2. Part I. Chapter G*, volume 40 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. General group theory.

[10] Daniel Gorenstein, Richard Lyons, and Ronald Solomon. *The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A*, volume 40 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. Almost simple K-groups.

[11] Daniel Gorenstein, Richard Lyons, and Ronald Solomon. *The classification of the finite simple groups. Number 4. Part II. Chapters 1–4*, volume 40 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. Uniqueness theorems, With errata: *The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A* [Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998; MR1490581 (98j:20011)].

[12] Daniel Gorenstein, Richard Lyons, and Ronald Solomon. *The classification of the finite simple groups. Number 5. Part III. Chapters 1–6*, volume 40 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. The generic case, stages 1–3a.

[13] Daniel Gorenstein, Richard Lyons, and Ronald Solomon. *The classification of the finite simple groups. Number 6. Part IV*, volume 40 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. The special odd case.

[14] 冯克勤, 李尚志, 查建国. 近世代数引论. 中国科学技术大学出版社, 1988.