刚体定点转动的角动量

刚体以ω作定点转动, 其中小体元P_i对定点的位矢是r_i, 则质点对定点的动量矩为 $\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

整个刚体对定点的动量矩为

$$J = \sum_i \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right) = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\right)$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{\omega} r^2 - \vec{r}_i \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i\right)\right)$$

角动量一般不与刚体角速度共线

$$\vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{A} \cdot \vec{B}) - |\vec{A}|^2 \vec{B}$$

在直角坐标系下

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i k$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

所以

$$J_x = \sum_i m_i \left[\omega_x \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right) - x_i \left(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i \right) \right]$$

$$= \omega_x \sum_i m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i$$

$$J_y = -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i \left(z_i^2 + x_i^2 \right) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i$$

$$J_z = -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right)$$

引入符号

$$I_{xx}=\sum_i m_i\left(y_i^2+z_i^2\right)$$

$$I_{yy}=\sum_i m_i\left(z_i^2+x_i^2\right)$$

$$I_{zz}=\sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)$$

刚体对各个坐标轴的转动惯量

$$I_{xy}=I_{yx}=\sum_i m_i y_i x_i$$

$$I_{xz}=I_{zx}=\sum_i m_i z_i x_i$$

$$I_{yz}=I_{zy}=\sum_i m_i z_i y_i$$

惯量积

则刚体动量矩表达式简化为

$$J_x=I_{xx}\omega_x-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\omega_z$$

$$J_y=-I_{yx}\omega_x+I_{yy}\omega_y-I_{yz}\omega_z$$

$$J_z=-I_{zx}\omega_x-I_{zy}\omega_y+I_{zz}\omega_z$$

惯性张量

三个轴转动惯量和六个惯量积作为统一的一个物理量,代表刚体转动的惯性的量度，可以写为矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

叫做<u>惯量张量</u>, 元素叫惯量张量的组元或惯量系数.

利用矩阵乘法,得

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

惯性张量是质量分布的函数，所以如果选用固定座标系，刚体转动时，转动矩阵的矩阵元就会随之而变，所以通常选取固着在刚体上的刚体坐标系，这样，转动矩阵的矩阵元都是常数。

$$I_{xx} = \sum_i m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right)$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i\left(z_i^2 + x_i^2\right)$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

刚体对各个坐标轴的转动惯量

$$I_{xy} = I_{yx} = \sum_i m_i y_i x_i$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \sum_i m_i z_i x_i$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \sum_i m_i z_i y_i$$

惯量积

2. 实对称矩阵的相似对角化

根据以上讨论可得

定理 4.3.1 设 A 为实对称矩阵，则 A 一定与对角矩阵相似.

进一步，我们还有

定理 4.3.2 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则必有正交矩阵 Q，使

$$Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ$$

为对角矩阵.

惯性张量的简化

惯性主轴和主转动惯量

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

可以证明，总可以找到朝向某个特定方向的坐标系，使得三个惯量积为零，惯性张量化为对角矩阵。此时，坐标系的三个坐标轴称为惯性主轴，而相对惯性主轴的转动惯量，即惯性张量的三个对角元，叫做主转动惯量

角动量和角速度同向的情况：
三个主转动惯量相等， ***或者****，角速度方向沿惯性主轴*

惯性张量的简化

寻找惯性主轴的方法：

- 对于有对称性的刚体，惯性主轴通常沿对称轴
- 对于没有对称性的刚体，需要用到矩阵对角化或者惯性椭球方法求解惯性主轴的方向

$$r(A-\lambda_i E)=n-r_i,\qquad i=1,2,\cdots,m.$$

证 $(A-\lambda_i E)X=0$ 的基础解系含有 r_i 个向量的充要条件为 $r(A-\lambda_i E)=n-r_i$；即 r_i 重特征值 λ_i 有 r_i 个线性无关的特征向量的充要条件为 $r(A-\lambda_i E)=n-r_i$，其中 λ_i 为 A 的 r_i 重特征值，$i=1,2,\cdots,m$.

2. 矩阵相似对角化的方法

判断一个 n 阶矩阵能否相似对角化以及如何相似对角化的一般步骤为：

(1) 求出 A 的所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互异，则 A 一定与对角矩阵相似. 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中互异的为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，每个 λ_i 的重数为 r_i，当 $r(A-\lambda_i E)=n-r_i$，$i=1,2,\cdots,m$ 时，A 一定与对角矩阵相似；否则，A 不与对角矩阵相似.

(2) 当 A 与对角矩阵相似时，求出 A 的 n 个线性无关的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，并令

$$P=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \cdots\ \ \xi_n),$$

则有

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

显然可逆矩阵 P 的取法是不惟一的，因而 A 的相似对角矩阵 Λ 也不惟一；但若不计 Λ 中主对角线上元素的顺序，则对角矩阵 Λ 是被 A 惟一确定的.

例 4.2.1 判断矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&-1\\1&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

能否与对角矩阵相似？并在相似时，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵.

解 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\1&3-\lambda&-1\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$；因特征值互异，故 A 能与对角矩阵相似.

对 $\lambda_1=1$，求得特征向量 $\xi_1=(0,1,2)^T$；对 $\lambda_2=2$，求得特征向量 $\xi_2=(1,0,1)^T$；对 $\lambda_3=3$，求得特征向量 $\xi_3=(0,1,0)^T$. 令

$$P=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}.$$

由

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&0\\-4&1&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

得 B 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$，即 2 为 3 阶方阵 B 的 2 重特征值. 因为

$$B-2E=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $r(B-2E)=1=3-2$，由定理 4.2.2 知 B 能与对角矩阵相似.

对 $\lambda_1=-1$，求得特征向量 $\xi_1=(1,0,1)^T$；对 $\lambda_2=\lambda_3=2$，求得线性无关的特征向量 $\xi_2=(1,4,0)^T,\xi_3=(0,-1,1)^T$. 令

$$P=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&4&-1\\1&0&1\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}.$$

由

$$|C-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\0&2-\lambda&1\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda),$$

得 C 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$，即 1 为 3 阶方阵 C 的 2 重特征值. 因为

$$C-E=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

定轴转动

$\theta(t) = ?$

最终目标

$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$

$L = I\omega$

$M = \dot{L}$

定点转动

$\{q_i(t)\}$

最终目标

$\{q_i\}$有哪些?

欧拉角

$\{\dot{q}_i(t)\}$与$\omega(t)$的关系?

欧拉运动学方程

$\omega(t)$与$\vec{L}$的关系?

惯性张量

$M = \dot{L}$

欧拉动力学方程

$$\left.\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_x-(I_2-I_3)\omega_y\omega_z&=M_x\\
I_2\dot{\omega}_y-(I_3-I_1)\omega_z\omega_x&=M_y\\
I_3\dot{\omega}_z-(I_1-I_2)\omega_x\omega_y&=M_z
\end{aligned}\right\}$$

——欧拉动力学方程

定轴转动

$\theta(t) = ?$

最终目标

$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$

$L = I\omega$

$M = \dot{L}$

定点转动

$\{q_i(t)\}$

最终目标

$\{q_i\}$有哪些?

欧拉角

$\{\dot{q}_i(t)\}$与$\omega(t)$的关系?

欧拉运动学方程

$\omega(t)$与$\vec{L}$的关系?

惯性张量

$M = \dot{L}$

欧拉动力学方程

重刚体绕固定点转动的解

可以一个刚体，除约束反力外，如果只在重力作用下做定点转动，我们把这种刚体叫做重刚体。

1. **欧拉-潘索情况：** 刚体因惯性而运动，这时外力的合力通过固定点O，在重刚体的特殊情况下，固定点O和刚体重心G相重合.
2. **拉格朗日-泊松情况：** 对固定点O所作的惯量椭球是一旋转椭球，亦即$I_1=I_2$，至于刚体的重心则位于动力对称轴上但不与固定点重合.
3. **C.B.柯凡律夫斯卡雅情况：** 在这一情况下，$I_1=I_2=2I_3$，而重心则在惯量椭球的赤道平面上．这也是一种
.

欧拉-潘索情况： 刚体因惯性而运动，这时外力的合力通过固定点*O*，在重刚体的特殊情况下，固定点*O*和刚体重心*G*相重合.

考虑 $I_1=I_2$ 的情况。（例：地球可以看作满足这一条件的扁平球体）

欧拉动力学方程

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_x-(I_1-I_3)\omega_y\omega_z=0 & (1) \\ I_1\dot{\omega}_y-(I_3-I_1)\omega_z\omega_x=0 & (2) \\ I_3\dot{\omega}_z=0 & (3) \end{cases}$$

将(3)积分, 得 $$\omega_z = \Omega = 常数 \tag{4}$$

将(4)带入(1), (2) 得

$$\dot{\omega}_x = -\left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right)\omega_y \Omega = -n\omega_y \tag{5}$$

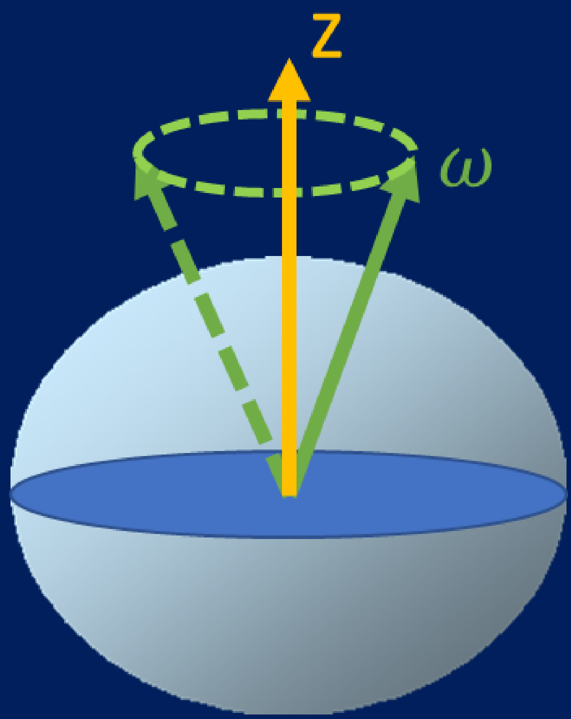
$$\dot{\omega}_y = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right)\omega_x \Omega = n\omega_x \tag{6}$$

上式的通解为

$$\omega_x = \omega_0 \cos(nt + \varepsilon) \tag{7}$$

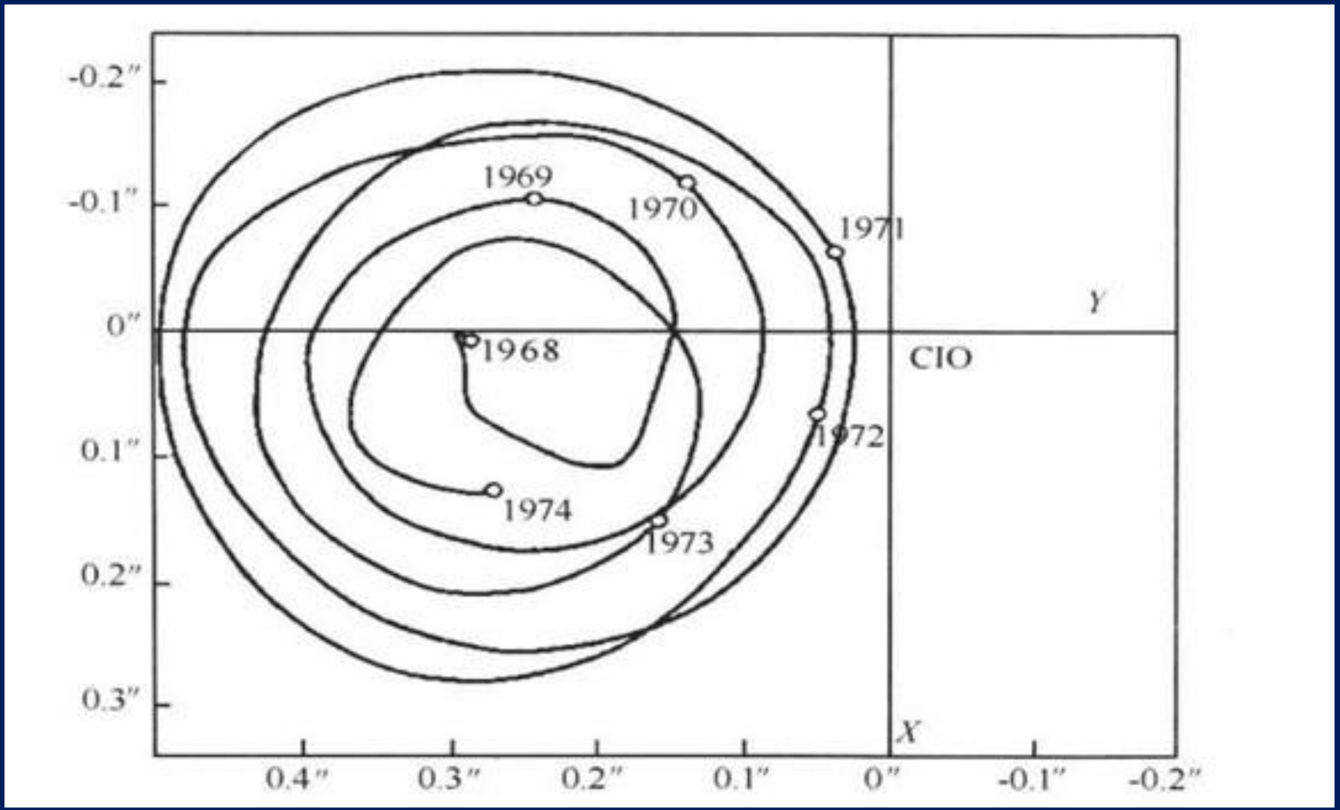
$$\omega_y = \omega_0 \sin(nt + \varepsilon) \tag{8}$$

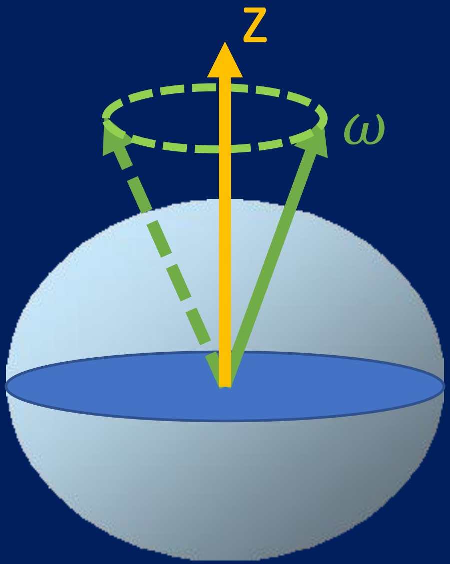
这样知道地球的自转总角速度大小是常量, 为 $\sqrt{\omega_0{}^2+\Omega^2}$



但地球自转角速度的方向则绕着对称轴Oz作匀速转动, 且描绘一圆锥体, Oz为圆锥体轴线, 其周期为

$$\tau=\frac{2\pi}{|n|}=\frac{2\pi}{\Omega}\frac{I_1}{|I_3-I_1|}$$

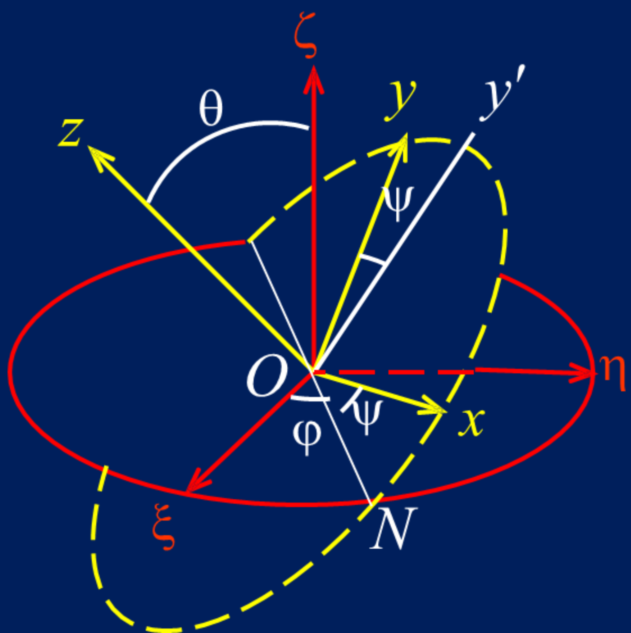

-0.2″
-0.1″
0″
0.1″
0.2″
0.3″
0.4″
0.3″
0.2″
0.1″
0″
-0.1″
-0.2″
1968
1969
1970
1971
1972
1973
1974
Y
X
CIO


z
ω

目前我们知道了角速度,可以用欧拉运动学方程计算欧拉角随时间的变化

因力矩为零，所以在固定坐标系动量矩是常量，取为固定系的ζ轴, 所以J和ζ轴以及进动角速度共线. 所以

$$
\begin{cases}
J_x = J\sin\theta\sin\psi = I_1\omega_x & (9) \\
J_y = J\sin\theta\cos\psi = I_2\omega_y & (10) \\
J_z = J\cos\theta = I_3\omega_z = I_3\Omega & (11)
\end{cases}
$$



因J为常量，由(11)式知$\theta=\theta_0$=常量，再考虑(7)、(8)式，可得

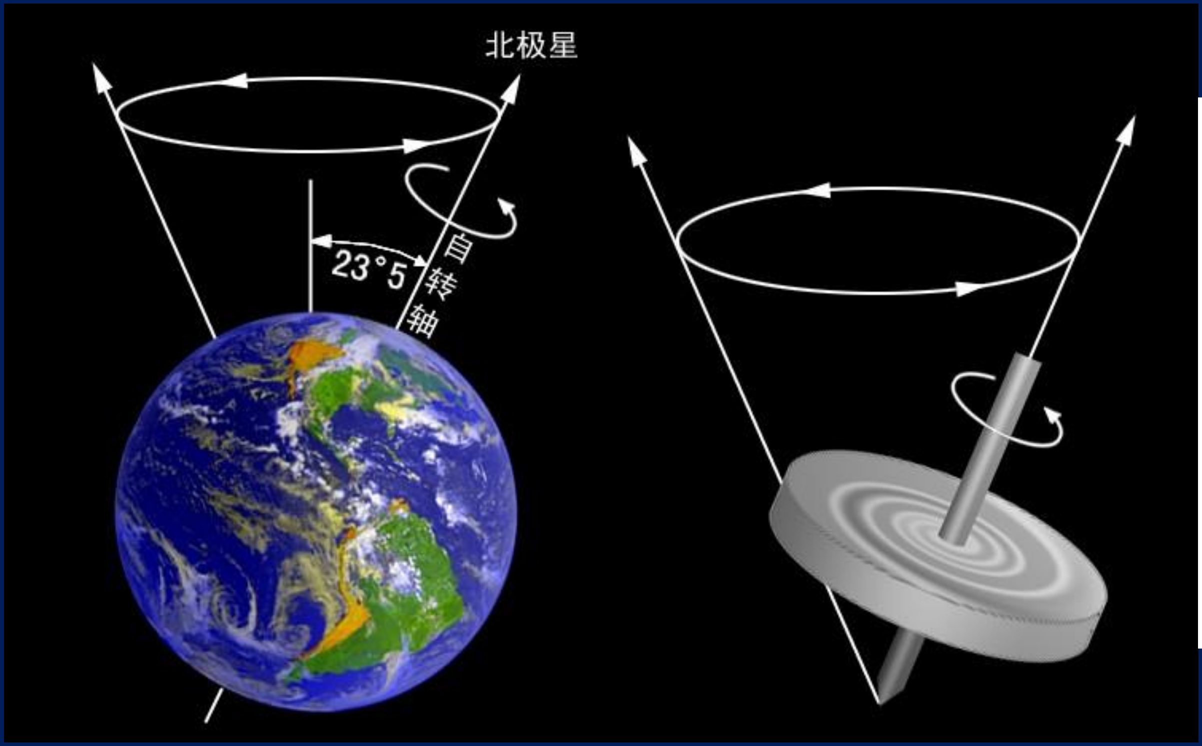
$$J\sin\theta_0=I_1\omega_0,\ \psi=\frac{\pi}{2}-(nt+\varepsilon)$$

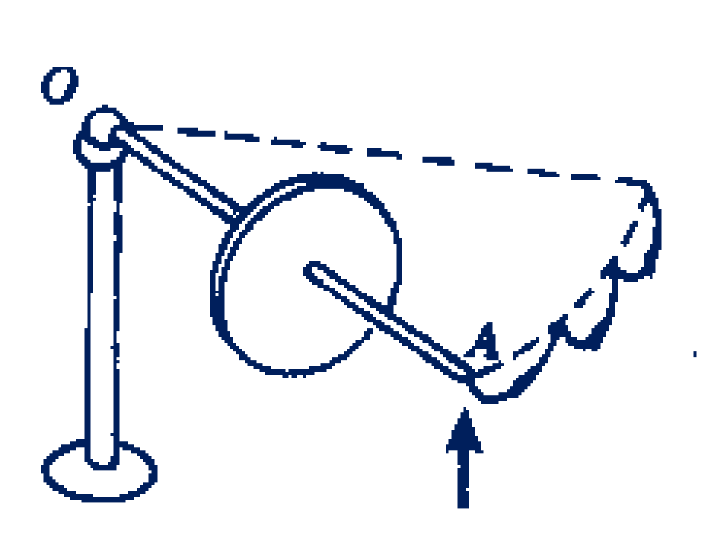
把这些结果带入欧拉运动学方程，得

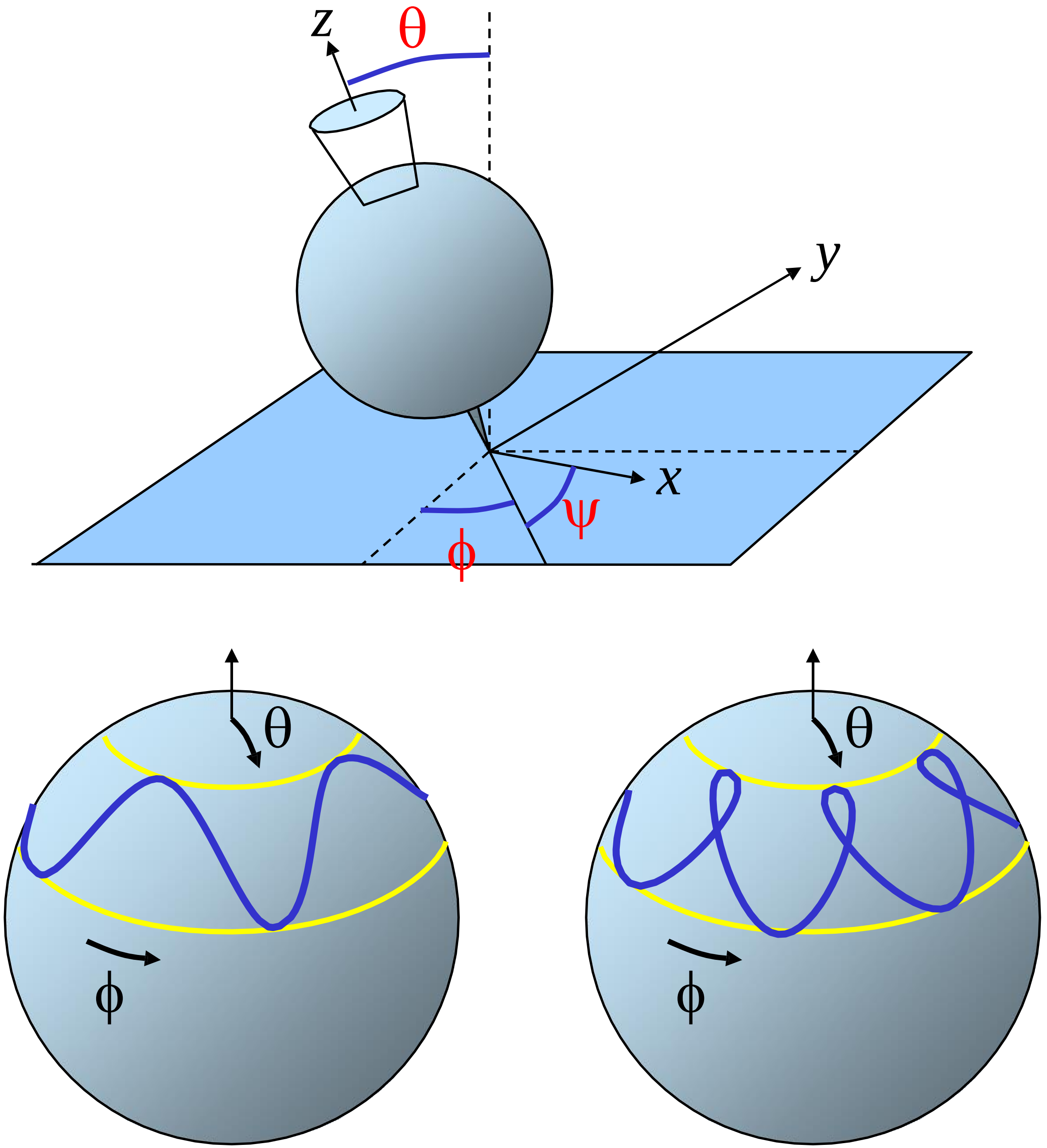
$$\varphi=\sec\theta_0(\Omega+n)t+\varphi_1$$

这样我们知道θ是常量，φ和ψ都是时间的函数. 地球除了绕z轴自转外，还有绕ζ轴的角速度 $\dot{\varphi}$，即z轴不是固定不动的，而是绕ζ轴进动. 此时刚体的瞬时角速度为绕ζ轴$\dot{\varphi}$和绕z轴$\dot{\psi}$的矢量和.

拉格朗日-泊松情况： 对固定点O所作的惯量椭球是一旋转椭球，亦即$I_1=I_2$，至于刚体的重心则位于动力对称轴上但不与固定点重合.







z
θ
y
x
ψ
ϕ
θ
ϕ
θ
ϕ

岁差现象