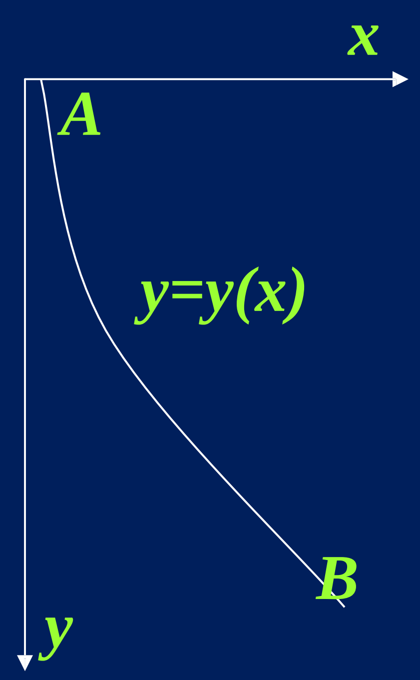
变分法初步

(1) 泛函

质点沿着光滑轨道$y=y(x)$从A自由下滑到B所需时间

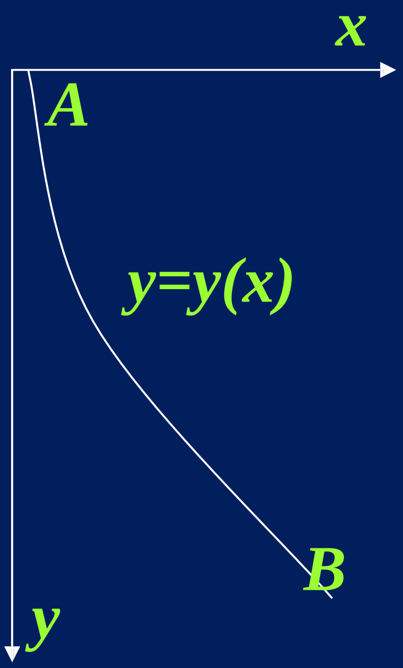
$$J=\int \mathrm{d}t=\int \frac{\mathrm{d}s}{v}=\int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$$



显然轨道不同J也不同. 一般地说,一个变量J, 其值取决于函数$y=y(x)$, 就叫做函数$y(x)$泛函,记做$J[y(x)]$.

(2) 变分

选取光滑轨道$y=y(x)$,使指点从A自由下滑到B所需时间最短, 即求泛函的极值.



先研究较简单的情况. 泛函J只依赖于单个自变量x, 单个函数$y(x)$及其导数 y', 即

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

设想函数关系$y(x)$ 稍有变动, 从y变为$y+\delta y$, 这里δy称为函数$y(x)$的变分. 泛函的值也随之而变, 其增量

$$J[y+\delta y]-J[y]=\int_a^b [F(x,y+\delta y, y'+\delta y')-F(x,y,y')]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]\mathrm{d}x$$

上式右边叫泛函的变分, 记做$\delta J[y]$.

$$\delta J[y]=\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]\mathrm{d}x$$

泛函的极值条件是变分**δ*J*[*y*]=0.**

$$\delta J[y]=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]\mathrm{d}x=0$$

因为 $\displaystyle\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\,\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_a^b-\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x$

所以 $$\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_a^b+\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x=0$$

一般来说, 两端点总是不变的,变分等于零,

即:
$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y \mathrm{d}x = 0$$

可以推出:
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

这就是泛函取极值的条件, 叫做这个变分问题的欧拉方程.

哈密顿原理

注意到拉格朗日方程与欧拉方程的形式完全一样,这就引申: 拉格朗日函数应满足

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, q_2, \cdots, q_s; q_1, q_2, \cdots, q_s)\mathrm{d}t = 0$$

这样,力学系统的动力学就归结为一个变分原理:力学系统从时刻t_1到时刻t_2的一切可能的运动之中, 使哈密顿作用量

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, q_2, \cdots, q_s; q_1, q_2, \cdots, q_s)\mathrm{d}t$$

取极值的运动才是实际发生的运动. 这叫作哈密顿原理.

哈密顿原理

以S个广义坐标和一维的时间为坐标轴，系统任一时刻的位形可由此空间中的一个点来表示。随着时间流逝，系统的位形会发生改变，进而在这一空间中划出一条轨迹曲线，在一切可能的曲线中，使作用量取极值的曲线就代表系统真实的运动。

哈密顿原理可作为整个力学体系的基本公设。甚至可以推广到无限个自由度的体系甚至非力学体系，一般认为，哈密顿原理是比牛顿运动定律更为基本的普遍原理。