

# 《高等数学》(上)期末复习要点

## 一、 极限及其求法：

1、 四则运算法则与复合运算法则（换元法）；

2、 初等函数的连续性（代入法）： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ；

3、 两个重要极限：

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{【特征：} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1 \text{】}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \text{ (或 } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e, \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e) ; \text{【特征：} \lim_{\square \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{\square})^{\square} = e \text{】}$$

4、 存在准则：1) 夹逼准则，2) 单调有界准则；

5、 **洛必达法则**：未定式 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ （其它类型未定式： $0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty, 0^0$ 必须转化）；

6、 等价无穷小量替换：只适用于乘除，加减不适用。（当 $x \rightarrow 0$ 时， $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ，

$\sin x (\tan x, \arctan x, \arcsin x, e^x - 1, \ln(1 + x)) \sim x, (1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ （ $\alpha$ 为常数）等等）

7、 无穷小的性质：有界量与无穷小的乘积、有限个无穷小的和与乘积均为无穷小等

8、 泰勒公式(麦克劳林公式)；

9、 微分中值定理；

10、 定积分或导数定义\*：

1)\*【定积分定义】、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(a + \frac{b-a}{n}i) \cdot \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$ ；

2)【导数定义】设 $f(x)$ 在点 $a$ 处可导，则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \text{ 或 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

## 二、 函数的连续性

1、 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ；

2、 间断点：1) 第一类间断点：可去，跳跃；2) 第二类间断点：无穷，振荡等。

3、 连续函数的运算性质：连续函数的加减乘除仍为连续函数；连续函数的复合函数仍为连续函数

4、 初等函数的连续性：一切初等函数在其定义区间内处处连续

5、 闭区间上连续函数的性质：1) 有界性；2) 最大值最小值定理；3) 零点定理【**闭上连续两端异号零点在开内**】；4) 介值定理及其推论



### 三、导数与微分

1、定义：

$$1) f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$2) f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$3) f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$4) f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = A \Leftrightarrow f'(x_0) = A$$

分段函数在分段点处的可导性的判定，或其它必须按定义求导数时

2、求导法则：【必须牢记 18 个基本导数公式】

1) 显函数  $y = f(x)$ ：

I、四则运算法则： $[u(x) \pm v(x)]'$ ,  $[u(x) \cdot v(x)]'$ ,  $[\frac{u(x)}{v(x)}]'$ ,  $[ku(x)]'$ ；

II、复合函数的求导法则：设  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$  都可导，则  $y = f[g(x)]$  的导数为

$$\frac{d}{dx}\{f[g(x)]\} = f'(u)|_{u=g(x)} \cdot g'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x), \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

III、反函数的求导法则： $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

IV、对数求导法则（特别适用于幂指函数）： $y = f(x)$ ,  $\ln|y| = \ln|f(x)| = \dots$ （化

简）， $\Rightarrow \frac{y'}{y} = \dots$

2) 参数方程： $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \dots \triangleq g(t)$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dg(t)}{dx} = \frac{dg(t)}{dt} / \frac{dx}{dt} = \dots$ ,

其它阶同理可求。

3) 隐函数： $F(x, y) = 0$ （方程两边对  $x$  求导，注意  $y$  为  $x$  的函数） $\Rightarrow F'_x \cdot 1 + F'_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

3、高阶导数： $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ ,  $\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$ ,  $\frac{d^4y}{dx^4} = f^{(4)}(x)$ ,  $\dots$ ,  $\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$  等

4、微分  $dy = f'(x)dx$

5、关系：可微与可导等价；可导必连续，反之未必。



## 四、 导数的应用

1、 曲线的切线与法线方程： $y - y_0 = k(x - x_0)$ ,  $k_{\text{切}} = f'(x_0)$ ,  $k_{\text{法}} = -1/f'(x_0)$ ；

2、 微分中值定理：首先必须验证定理的条件是否满足，然后根据定理下结论！

1) Rolle 定理： $f'(\xi) = 0 (a < \xi < b)$ ；

2) Lagrange 中值定理： $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) (a < \xi < b)$ ；估计函数值之差

3) Cauchy 中值定理： $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} (a < \xi < b)$ ；

4) Taylor 中值定理： $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$

3、 洛必达法则： $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ，其它型未定式必须转化

4、 泰勒公式：熟悉 5 个常见带 Peano 型余项的 Maclaurin 公式

5、 函数的单调性【一阶导符号判定】、极值、最值及其函数图形的凹凸性【二阶导符号判定】、拐点和渐近线

6、 不等式的证明：1) 单调性；2) 中值定理；3) 凹凸性；4) 最值

7、 方程根的存在性及唯一性：1) 零点定理；2) Rolle 定理；3) 单调性；4) 极值最值等等

8、 恒等式的证明：若在区间 I 上  $f'(x) \equiv 0$ ，则在区间 I 上  $f(x) \equiv C$

## 五、 积分：不定积分，定积分，反常积分【必须牢记 24 个基本积分公式以及 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ 】

1、 基本性质：线性，对积分区间的可加性，保号性（特别课后 Ex.7：用连续性与不恒等于去等号），

定积分中值定理【 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a) (a < \xi < b)$ 】，定积分的奇偶对称性、周期性.

2、  $\int f(x) dx = F(x) + C$  与 Newton-Leibniz 公式： $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$ , ( $F'(x) = f(x)$ )

3、 换元法：1) 第一类（凑微分法）；2) 第二类：三角代换，倒代换等

4、 分部积分法：1) 三指动，幕不动；2) 幕动，反对不动；3) 凑同类所求便再现.

5、 积分上限函数的导数： $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ ,  $\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) dt = f[g(x)] \cdot g'(x)$ ,

其中  $f(x)$  连续， $g(x)$  可导， $a$  为常数，积分中的表达式  $f(t)$  必须与  $x$  无关

6、 有理函数的积分【假分式用除法化为多项式加真分式，真分式因式分解化为部分分式】以及可化为有理

函数的积分【①三角函数有理式的积分：万能代换  $t = \tan(\frac{x}{2})$  ( $-\pi < x < \pi$ )；②简单根式：线性函

数或分式函数的根式讨厌要换之，开方不同最小公倍数】

7、 反常积分：无极限的反常积分或瑕积分，广义 Newton-Leibniz 公式，特别注意瑕点在积分区间内部的瑕积分



## 六、定积分的应用【有公式代就代公式，否则用元素法】

### 1、平面图形的面积：

#### 1) 直角坐标 $x, y$ ：

a、曲边梯形  $D_1 = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ ： $A = \int_a^b f(x)dx$ ；

b、上、下型  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ ：

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx；$$

c、左、右型  $D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq f(y)\}$ ：

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy；$$

d、设曲边梯形  $D_1$  的曲边由参数方程： $x = x(t), y = y(t)$  给出，则

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt \quad \text{【先代公式后换元】}$$

#### 2) 极坐标 $\rho, \theta$ （极坐标变换 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ ）：

设曲边扇形  $D = \{(\rho, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\theta)\}$ ，则  $A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} \rho^2(\theta) d\theta$

### 2、体积：

#### CaseA、旋转体的体积：

##### 1) X-型或上下型 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ ：

I、绕 x 轴  $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ ；II、绕 y 轴  $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)dx (a \geq 0)$

##### 2) Y-型或左右型 $D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, 0 \leq x \leq g(y)\}$ ：

I、绕 y 轴  $V_y = \pi \int_c^d g^2(y)dy$ ；II、绕 x 轴  $V_x = 2\pi \int_c^d yg(y)dy (c \geq 0)$

#### CaseB、平行截面面积为已知的立体 $\Omega = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, (y, z) \in D_x\}$ ，

若  $\text{Area}D_x = A(x)$ ，则  $V = \int_a^b A(x)dx$

### 3、弧长：由不同方程，代不同公式

1)  $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$ ， $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt (\alpha < \beta)$ ；

2)  $C: y = f(x), a \leq x \leq b$ ， $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx (a < b)$ ；

3)  $C: \rho = \rho(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$ ， $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta (\alpha < \beta)$



## 七、微分方程

(一) 一阶微分方程:  $F(x, y, y') = 0$ ,  $y' = f(x, y)$  或  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

1、可分离变量:  $f(x)dx = g(y)dy$ , 积分之可得通解

2、齐次:  $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$ , 令  $u = \frac{y}{x}$ , 可将原方程化为关于  $x, u$  的可分离变量

3、线性:  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ , 通解为  $y = e^{-\int P(x)dx} [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C]$ ; 或利用常数变易

法或利用积分因之法:  $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

4、伯努利:  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n (n \neq 0, 1)$ , 令  $z = y^{1-n}$ , 可将原方程化为关于  $x, z$  的线性.

(二) 可降阶的高阶微分方程:

I、 $y^{(n)} = f(x)$  【右端只含  $x$ 】: 连续积分之;

II、 $y'' = f(x, y')$  【不显含  $y$ 】: 令  $y' = p$ , 则  $y'' = \frac{dp}{dx}$ , 可将原方程化为关于  $x, p$  的一阶.

III、 $y'' = f(y, y')$  【不显含  $x$ 】: 令  $y' = p$ , 则  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ , 可将原方程化为关于  $y, p$  的一阶

(三) 概念与理论

1、概念: 阶, 解 (特解, 通解), 初始条件, 初值问题, 积分曲线

2、线性微分方程的解的结构:

1) 齐次:  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ,

通解:  $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ , 其中  $y_1(x), y_2(x)$  为该方程线性无关的两个解.

2) 非齐次:  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

通解:  $y = Y(x) + y^*(x)$ ,

其中  $Y(x)$  为对应的齐次方程的通解,  $y^*(x)$  为原方程的一个特解.

3) 设  $y_1^*(x), y_2^*(x)$  分别为  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$

与  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$  的特解, 则

$$y^* = y_1^*(x) + y_2^*(x)$$

为  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$  的特解.



## 附录 I——基本求导公式：

- (1)  $(C)' = 0$ ,  $C$  为常数； (2)  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ,  $\alpha$  为常数； (3)  $(e^x)' = e^x$ ； (4)  $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ ；
- (5)  $(a^x)' = a^x \ln a$ ； (6)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ； (常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ )
- (7)  $(\sin x)' = \cos x$ ； (8)  $(\cos x)' = -\sin x$ ； (9)  $(\tan x)' = \sec^2 x$ ； (10)  $(\cot x)' = -\csc^2 x$ ；
- (11)  $(\sec x)' = \sec x \tan x$ ； (12)  $(\csc x)' = -\csc x \cot x$ ； (13)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ；
- (14)  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ； (15)  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ； (16)  $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ ；
- (17)  $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ ； (18)  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ 。

## 附录 II——基本积分公式：

- (1)  $\int k dx = kx + C$ ,  $k$  为常数；
- (2)  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ , 常数  $\alpha \neq -1$ ； (3)  $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$ ；
- (4)  $\int e^x dx = e^x + C$ ； (5)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ , 常数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ；
- (6)  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ； (7)  $\int \cos x dx = \sin x + C$ ；
- (8)  $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ ； (9)  $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$ ；
- (10)  $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ ； (11)  $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$ ；
- (12)  $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$ ； (13)  $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$ ；
- (14)  $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$ ； (15)  $\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$ ；
- (16)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ ； (17)  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ；
- (18)  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$ ； (19)  $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ ；
- (20)  $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$ ；
- (21)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$ ； (22)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$ ；
- (23)  $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$ ； (24)  $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$ 。
- $$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \left( = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \right) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数；} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1的正奇数。} \end{cases}$$

