

测试题解答 5.3

(2)、(4)是, (1)、(3)不是.

根据量词辖域收缩与扩张等值式,

$$\begin{aligned}& \forall xF(x) \wedge \forall yG(y) \\& \Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge \forall yG(y)) \\& \Leftrightarrow \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y))\end{aligned}$$

还可以利用 \forall 对 \wedge 的分配等值式, 演算如下

$$\begin{aligned}& \forall xF(x) \wedge \forall yG(y) \\& \Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x) \quad (\text{换名规则}) \\& \Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge G(x)) \quad (\text{量词分配等值式})\end{aligned}$$

测试题解答 5.4

(4)是, 其余 3 个都不是.

注意存在量词 \exists 对 \wedge 不适合分配律, 只能使用量词辖域收缩与扩张等值式.

$$\begin{aligned}& \exists xF(x) \wedge \exists yG(y) \\& \Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \exists yG(y)) \\& \Leftrightarrow \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y))\end{aligned}$$

测试题解答 5.5

$$\begin{aligned}(1) & \neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \\& \Leftrightarrow \exists x \neg(F(x) \rightarrow G(x)) \quad (\text{量词否定等值式}) \\& \Leftrightarrow \exists x \neg(\neg F(x) \vee G(x)) \\& \Leftrightarrow \exists x (F(x) \wedge \neg G(x))\end{aligned}$$

在以上演算中后 3 个公式都是原公式的前束范式. 公式的前束范式不是惟一的.

(2) 在这个公式中 3 个指导变元相同, 必须使用换名规则.

$$\begin{aligned}& \exists xF(x) \rightarrow (\exists xG(x) \rightarrow \exists xH(x)) \\& \Leftrightarrow \exists xF(x) \rightarrow (\exists yG(y) \rightarrow \exists zH(z)) \\& \Leftrightarrow \forall x(F(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow \exists zH(z))) \\& \Leftrightarrow \forall x \forall y(F(x) \rightarrow (G(y) \rightarrow \exists zH(z)))\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \rightarrow \exists z (G(y) \rightarrow H(z)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y \exists z (F(x) \rightarrow (G(y) \rightarrow H(z)))$$

(3) 公式中 x, y 既有约束出现、又有自由出现, 因此需要使用换名规则.

$$\exists y F(x, y) \wedge \forall x G(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \exists v F(x, v) \wedge \forall u G(u, y, z) \quad (\text{换名规则})$$

$$\Leftrightarrow \exists v (F(x, v) \wedge \forall u G(u, y, z))$$

$$\Leftrightarrow \exists v \forall u (F(x, v) \wedge G(u, y, z))$$

换名后又可以

$$\Leftrightarrow \forall u (\exists v F(x, v) \wedge G(u, y, z))$$

$$\Leftrightarrow \forall u \exists v (F(x, v) \wedge G(u, y, z))$$

注意 $\forall u (\exists v F(x, v) \wedge G(u, y, z))$ 不是前束范式.