

《概率论与数理统计》期中考试

一、从一批产品中依次取 4 次，每次 1 件，记事件 $A_k = \{\text{第 } k \text{ 次取得正品}\}$ ，用它们表示下述事件：

- (1) 4 件中没有 1 件是次品
- (2) 4 件中恰有 1 件是次品
- (3) 4 件中至少有 1 件是次品
- (4) 4 件中至多有 3 件是次品
- (5) 4 件中都是次品

二、在 10 件产品中有 6 件一等品，4 件二等品，从中任取 3 件，求下述事件概率：

- (6) 所取 3 件中有 1 件一等品
- (7) 所取的 3 件全是一等品
- (8) 所取的 3 件全是二等品
- (9) 所取的 3 件全是一等品或二等品
- (10) 所取的 3 件中既有一等品又有二等品

二、假设有两箱同种零件，第一箱内装 50 件，其中 10 件是一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品，现从两箱中随意地挑出一箱，然后从该箱中随机地取出两个零件（取出的零件均不放回），求：

- (1) 先取出的零件是一等品的概率

- (2) 在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的概率

三、设随机变量 $X \sim E(\frac{1}{2})$, 令随机变量 $Y = e^{-2X}$, 证明 $Y \sim U(0,1)$.

四、设测量误差 $X \sim N(0, 10^2)$, 现进行 50 次独立测量, 求误差绝对值超过 19.6 的次数不小于 3 的概率。

附表 2 标准正态分布表

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

附表一 泊松分布函数表 $\left(F(k) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}\right)$

[illegible]

五、设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} Ae^{-x}, & 0 < y < x < +\infty \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

求:

- (1) 常数 A ;
- (2) (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$;
- (3) X 和 Y 是否相互独立? 为什么?
- (4) 条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$;
- (5) 概率 $P\{X + Y < 1\}, P\{X < 2|Y = 1\}$;
- (6) 概率 $P\{\min\{X, Y\} < 1\}, P\{\max\{X, Y\} \geq 1\}$;
- (7) (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$;
- (8) $Z = X + Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

六、设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为：

Y \ X	-1	0	1
-1	0.2	0	0.2
0	0.1	a	0.2
1	0	0.1	b

其中 a, b 为常数，且 $P\{X \leq 0 | Y \leq 0\} = 0.5$ ，记随机变量 $Z = X + Y$ ，求：

- (1) a, b 的值；
- (2) X 和 Y 的边缘分布律
- (3) X 和 Y 是否相互独立？为什么？
- (4) Z 的分布律
- (5) $P\{Y = Z\}$
- (6) X 、 Y 分别的期望和方差
- (7) X 和 Y 的协方差

七、为确保设备正常运转，需要配备适当数量的维修工人，现有同类型设备 300 台，各台工作相互独立，每台发生故障的概率都是 0.01.在正常情况下，一台设备出故障时一人即能处理，问至少应配备几名维修工人，才能以 99%的把握保证设备出故障时维修工人能及时处理故障？

附表一 泊松分布函数表 $\left(F(k) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}\right)$

[illegible]

随堂小测：设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

- (1) 判别 X 与 Y 是否相互独立，是否不相关；
- (2) 求 $D(X + Y)$.