测试题解答 14.17

(1) 不是同态，因为 $f(1\cdot 2)=3$, $f(1)\cdot f(2)=6$.

(2) 是同态，不是单同态，也不是满同态与同构，同态像 $f(V_1)=\mathbf{R}^+\cup\{0\}$.

(3) 是同态，不是单同态，也不是满同态与同购，同态像 $f(V_1)=\{0\}$.

(4) 不是同态，因为 $f(1\cdot 2)=2$, $f(1)\cdot f(2)=4$.

测试题解答 14.18

证 (1) 恒等函数 I_A 是从 A 到 A 的双射函数，且 $\forall x_1,x_2\in V_1$ 有

$$I_A(x_1\circ x_2)=x_1\circ x_2=I_A(x_1)\circ I_A(x_2)$$

因此 $V_1\cong V_1$.

(2) 若 $V_1\cong V_2$，则存在同构映射 f：$V_1\to V_2$，那么 f^{-1}：$V_2\to V_1$ 为双射. 下面证明 f^{-1} 为同态. $\forall y_1, y_2\in V_2$，存在 $x_1, x_2\in V_1$ 使得 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$.

$$\begin{aligned}
&x=f^{-1}(y_1*y_2)\\
\Rightarrow\ & f(x)=f(f^{-1}(y_1*y_2))=y_1*y_2=f(x_1)*f(x_2)=f(x_1\circ x_2)\\
\Rightarrow\ & x=x_1\circ x_2=f^{-1}(y_1)\circ f^{-1}(y_2)
\end{aligned}$$

于是 $f^{-1}(y_1*y_2)=f^{-1}(y_1)\circ f^{-1}(y_2)$，从而有 $V_2\cong V_1$.

(3) 由已知存在同构映射 f：$V_1\to V_2$, g：$V_2\to V_3$, 易见 $f\circ g$ 是 V_1 到 V_3 的双射. 下面证明它也是同态映射. 任取 $x_1, x_2\in V_1$，则有

$$\begin{aligned}
&f\circ g(x_1\circ x_2)=g(f(x_1\circ x_2))=g(f(x_1)*f(x_2))\\
&=g(f(x_1))\bullet g(f(x_2))=f\circ g(x_1)\bullet f\circ g(x_2)
\end{aligned}$$

从而得到 $V_1\cong V_3$.

测试题解答 14.19

证 假设 f 是 V_1 到 V_2 的同构，那么有 $f(1)=0$，于是有

$$f(-1)+f(-1)=f((-1)(-1))=f(1)=0$$

从而得 $f(-1)=0$，这与 f 的单射性矛盾.

测试题解答 14.20

(1) 是同态，当 $G\neq\{e\}$时不是单同态也不是满同态，当 $G=\{e\}$时既是单同态

也是满同态. kerφ=G.

(2) $\varphi(\mathbf{Z})=2\mathbf{Z}\subset\mathbf{Z}$. 是同态，是单同态. 不是满同态，ker$\varphi=\{0\}$.

(3) 是同态，是单同态，也是满同态，ker$\varphi=\{0\}$.

(4) $\varphi(1)=\varphi(4)=\varphi(7)=\varphi(10)=\varphi(13)=1$，$\varphi(2)=\varphi(5)=\varphi(8)=\varphi(11)=\varphi(14)=2$，

$\varphi(0)=\varphi(3)=\varphi(6)=\varphi(9)=\varphi(12)=0$.

是同态，不是单同态，是满同态，ker$\varphi=\{0,3,6,9,12\}$.

测试题解答 14.21

(1) card$|\Sigma^*|=\aleph_0$.

(2) 不满足交换律和幂等律，满足结合律，单位元是空串λ，没有零元.

(3) $\forall\omega_1,\omega_2\in\Sigma^*$，$\omega_1=a_1a_2\cdots a_m$，$\omega_2=b_1b_2\cdots b_n$

$$f(\omega_1\circ\omega_2)=f(a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n)=m+n=f(\omega_1)+f(\omega_2)$$

因此 f 是同态. 下面证明 f 的满射性. 由于Σ非空，至少存在一个字符属于Σ，比如说 a. 对于任意自然数 k，令 k 个 a 构成的串为 x，那么 $f(x)=k$，因此 ran$f$=$\mathbf{N}$.