测试题解答 6.5

(1) $((A\cup B)\cap B)-(A\cup B)=B-(A\cup B)=\varnothing$

(2) $(A\cup(B-A))-B=(A\cup B)-B=A-B$

(3) $B-(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)=(B\cap(\sim A\cup\sim C))\cup(A\cap B\cap C)=B\cap((\sim A\cup\sim C)\cup(A\cap C))$

$= B\cap((\sim A\cup\sim C\cup A)\cap(\sim A\cup\sim C\cup C)) = B\cap E = B$

测试题解答 6.6

(1) $(A\cup B\cup C)-(A\cup B)=C$ 不是恒等式，反例如下：$A=\{1\}$，$B=C=\{2\}$.

$A-(B-C)=(A-B)-(A-C)$ 不是恒等式，反例如下：$A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=\varnothing$.

(2) 充要条件是 $A-B=A-C$. 因为 $X\oplus Y=\varnothing$的充要条件是 $X=Y$，因此有

$$(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing \Leftrightarrow A-B=A-C$$

测试题解答 6.7

证 $B=B\cap(B\cup A)=B\cap(A\cup B)=B\cap(A\cup C)$ （已知 $A\cup B=A\cup C$）

$=(B\cap A)\cup(B\cap C)=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ （已知 $A\cap B=A\cap C$）

$=(A\cup B)\cap C=(A\cup C)\cap C=C$

上面用的是恒等变形的方法. 还有另外两种常用的方法，以本题为例说明如下.

方法一. 反证法. 假设 $B\neq C$，则存在 x ($x\in B$ 且 $x\notin C$)，或存在 x ($x\in C$ 且 $x\notin B$). 不妨设为前者. 若 x 属于 A，则 x 属于 $A\cap B$ 但是 x 不属于 $A\cap C$，与已知矛盾；若 x 不属于 A，则 x 属于 $A\cup B$ 但 x 不属于 $A\cup C$，也与已知矛盾.

方法二. 利用已知等式通过并、交、相对补、对称差等运算得到新的等式，对这些新的等式进一步做恒等变换. 例如，由已知等式可得

$$(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup C)-(A\cap C),$$

即 $A\oplus B=A\oplus C$. 从而有

$$A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)\Rightarrow(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C.$$

由于 $A\oplus A=\varnothing$, 化简上式得 $B=C$.

测试题解答 6.8

证 必要性. 假设 $A\cap B\neq\varnothing$, 必有 x 属于 $A\cap B$, 则 x 属于 A 同时属于 B，即 x 属于 A 但是 x 不属于 $A-B$. 与 $A-B=A$ 矛盾.

充分性. 显然 $A-B\subseteq A$. 下面证明 $A\subseteq A-B$. 任取 x，

$$x\in A\Rightarrow x\in A\cap E\Rightarrow x\in A\cap(B\cup\sim B)$$

$$\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap\sim B)\Rightarrow x\in A\cap B\vee x\in A\cap\sim B$$

$$\Rightarrow x\in A\cap B\vee x\in A-B\Rightarrow x\in A-B$$

（因为 $A\cap B=\varnothing$，$x\in A\cap B$ 是假命题）

综合上述命题得证.

总结一下基本的证明方法.

(1) 证明集合 $P\subseteq Q$ 的基本方法

方法一. 命题演算法. 具体书写规范是

任取 x, 然后完成下述推理过程：

$$x\in P\Rightarrow\ldots\Rightarrow x\in Q$$

在推理过程中可以使用定理、定义、已知条件以及逻辑推理规则. 本题的充分性证明就使用了这种方法.

方法二. 利用包含的传递性。具体说来就是寻找中间集合 R，满足 $P\subseteq R$, $R\subseteq Q$, 利用传递性得 $P\subseteq Q$. 例如证明 $A-C\subseteq A\cup B$. 这里取 A 作为中间集合，根据定义有 $A-C\subseteq A$, $A\subseteq A\cup B$，因而有 $A-C\subseteq A\cup B$.

方法三. 反证法. 在本题关于必要性的证明中就使用了这种方法.

(2) 证明 $P=Q$ 的基本方法

方法一. 命题演算法，相当于证明两个方向的包含，具体书写规范是

任取 x，然后证明

$$x\in P\Rightarrow\ldots\Rightarrow x\in Q$$

$$x\in Q\Rightarrow\ldots\Rightarrow x\in P$$

当以上两个方向的推理互为逆过程时可以将这两个过程合写成一个过程，即

$$x\in P\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x\in Q$$

在这种情况下，必须保证推理的每一步都是可逆的，即左边推出右边，同

时右边也可以推出左边.

方法二. 恒等变形法.

方法三. 反证法.

方法四. 利用已知等式通过运算得到新的等式，关于这种方法见第 7 题的解答与分析.