# 诺特定理

每种守恒定律都和一个连续变换对称性相联系，即每种连续对称性都可以对应一个守恒量。

艾米·诺特

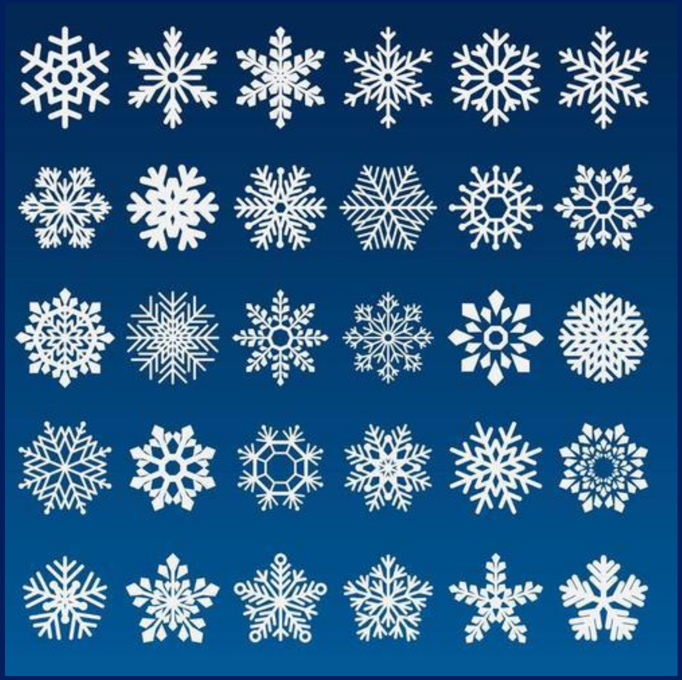
## 对称变换与守恒律

空间平移对称性 ⟶ 动量守恒

空间旋转对称性 ⟶ 角动量守恒

时间平移对称性 ⟶ 能量守恒

# 对称性



# 对称性

对称性即不变性，如果系统在某种操作下不改变某一性质，则说系统具有一种对称性。

空间平移、空间旋转、时间平移对称性分别指，系统整体进行空间平移、旋转、或时间平移的操作后，物理规律不改变，相同的实验总能得到相同的结果。

根据哈密顿原理，进行相应的时空变换后，若作用量不变，则物理规律不会改变。

# 空间平移/旋转对称性

若要求拉格朗日量在$q_\alpha \to q_\alpha + \varepsilon_\alpha$下不变，即：

$$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = L(q_\alpha + \varepsilon_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

则：$\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0,$　　根据拉格朗日方程可得：

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = 0,$ 即相应的广义动量为守恒量，不随时间改变

$q_\alpha$直角坐标时，守恒量为相应方向的动量， $q_\alpha$为角坐标时，守恒量则为相应的角动量。$q_\alpha$称为循环坐标或可遗坐标。

# 时间平移对称性

若要求拉格朗日量在$t \to t + \Delta t$下不变，即：

$$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t + \Delta t)$$

则：$\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0,$ 又：

$$\frac{dL(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t}$$

# 时间平移对称性

$$\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{dL}{dt}-\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}\dot{q}_{\alpha}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\ddot{q}_{\alpha}\right)$$

$$=\frac{dL}{dt}-\sum_{\alpha}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\right)\dot{q}_{\alpha}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\ddot{q}_{\alpha}\right)=\frac{d}{dt}\left(L-\sum_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\dot{q}_{\alpha}\right)$$

$\sum_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\dot{q}_{\alpha}-L$ 为常数

$\sum_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\dot{q}_{\alpha}-L\equiv H$ 为体系的<u>哈密顿量</u>

# 哈密顿量

由欧拉齐次函数定理, 若T为$\dot{q}$ 的n次齐次函数，则:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q} = nT$$

当体系的动能函数为广义速度的二次齐次函数时，$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q} = 2T$

$$H \equiv \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\dot{q}_{\alpha} - L = \sum_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\dot{q}_{\alpha} - (T - V)$$

$$= 2T - T + V = T + V$$ 为体系的总机械能

# 哈密顿量

更一般的情况下， $T=\frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}})^2$

$$\dot{\vec{r}}=\sum_{\alpha}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$$

$$(\dot{\vec{r}})^2=(\sum_{\alpha}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial\vec{r}}{\partial t})\cdot(\sum_{\beta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial\vec{r}}{\partial t})$$

$$=\underbrace{\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta}_{T_2}+\underbrace{2\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\cdot\sum_{\alpha}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha}_{T_1}+\underbrace{(\frac{\partial\vec{r}}{\partial t})^2}_{T_0}$$

$H=T_2-T_0+V$ 并不是体系的总机械能

但当体系具有时间平移不变性时，仍为体系的守恒量，称为<u>广义能量</u>