测试题解答 13.8

设$\{a_n\}$的生成函数是 $A(x)$，则

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)x^n$$
$$=\frac{1}{6}x^3\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-3}=\frac{1}{6}x^3B(x)$$

为计算 $B(x)$，需要做下面的积分：

$$\int_0^x B(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\int_0^x(n-2)x^{n-3}dx=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=C(x)$$
$$\int_0^x C(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}n\int_0^x(n-1)x^{n-2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=D(x)$$
$$\int_0^x D(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

然后依次求导得到

$$D(x)=(\frac{1}{(1-x)})'=\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$C(x)=D(x)'=\frac{2}{(1-x)^3}$$
$$B(x)=C(x)'=\frac{6}{(1-x)^4}$$

最后得到

$$A(x)=\frac{1}{6}x^3B(x)=\frac{x^3}{(1-x)^4}$$

测试题解答 13.9

令 $$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{Ax+B}{(1-x)^2}+\frac{C}{1+x}$$

其中 A,B,C 为待定系数，且满足如下方程组：

$$\begin{cases}B+C=1\\A+C=0\\A+B-2C=0\end{cases}$$

解得 $A=-1/4$, $B=3/4$, $C=1/4$，从而得到

$$G(x) = -\frac{1}{4}x\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x}$$

将上述基本生成函数展开得到

$$a_n = \frac{1}{4}[1+(-1)^n] + \frac{1}{2}(n+1) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n\text{为奇数} \\ \frac{n+2}{2}, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

测试题解答 13.10

设 $x_1,x_2,\cdots,x_4$ 分别表示 4 个孩子得到的玩具数目，因此得到如下不定方程：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ 1 \le x_i \le 3, x_i \in \mathrm{N}, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

对应的生成函数是

$$G(y)=(y+y^2+y^3)^4=y^4(1+y+y^2)^4$$

$$(1+y+y^2)^4=1+4y+10y^2+16y^3+19y^4+16y^5+10y^6+4y^7+y^8$$

上述 $G(y)$展开式中 y^9 的系数就是$(1+y+y^2)^4$ 的展开式中 y^5 的系数. 于是不同的分法数是 16.