

泊松括号

如果函数 φ 是正则变量 q_α, p_α 和时间的函数

$$\varphi = \varphi(t; q_1, q_2, \cdots, q_s; p_1, p_2, \cdots, p_s)$$

则它对时间的导数为

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \right) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + [\varphi, H]\end{aligned}$$

其中 $[\varphi, H]$ 叫做泊松括号.

泊松括号

任意两个函数的泊松括号定义为：

$$[\varphi, \psi] = \sum_{\alpha=1}^s \left[\frac{\partial \varphi}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \psi}{\partial q_{\alpha}} \right]$$

如果函数 φ 在运动中保持为常数,则

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + [\varphi, H] = 0$$

特别的，如果 φ 不显含时间，则其为常数的条件为

$$[\varphi, H] = 0$$

泊松括号

因为 p, q 都是相互独立的, 所以

$$\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial p_{\beta}} = \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} = \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial p_{\beta}} = 0$$

这样, 正则方程也可以简化为

$$\dot{p}_{\alpha} = [p_{\alpha}, H], \quad \dot{q}_{\alpha} = [q_{\alpha}, H] \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

量子力学中的泊松括号

在经典力学中, 两个力学量同时具有确定的值并不成为问题. 可是, 在量子力学中这却是个问题. 力学量在量子力学中是用算符或矩阵表示的, 两个算符或矩阵的乘积一般是与这两个算符或矩阵的先后次序有关的. 两个力学量 X 和 Y 是否可以同时具有确定的值就看它们的量子泊松括号

$$\frac{1}{i\hbar} [XY - YX]$$

是否为零.

如果两个力学量的经典泊松括号为零, 则它们的量子松括号也为零, 在量个力学中它们是可以同时确定的. 比如, 任意两个广义坐标可以同时确定, 任意两个广义动量也可以同时确定, 一个广义坐标和对应的广义动量不能同时确定, 一个广义坐标和非对应的广义动量可以同时确定. 又比如, 角动虽的任意两个分量不能同时确定, 但角动量的一个分量和角动量的平方可以同时确定.

运动方程：

经典力学

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

量子力学

$$\dot{\hat{F}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, H]$$

正则量子化

$$F(x, p) \longrightarrow \hat{F}(\hat{x}, \hat{p})$$

$$[x_\alpha, p_\beta] = 0 \longrightarrow [\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}$$

$$\{, \} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [,]$$

泊松括号的性质

(1) $[c, \psi] = 0$, c 是常数

(2) $[\phi, \psi] = -[\psi, \phi]$

(3) 如 $\psi = \sum_{j=1}^n \psi_j$, 则 $[\phi, \psi] = \sum_{j=1}^n [\phi, \psi_j]$

(4) $[-\phi, \psi] = [\phi, -\psi] = -[\phi, \psi]$

(5) $\frac{\partial}{\partial t} [\phi, \psi] = \left[\frac{\partial \phi}{\partial t}, \psi \right] + \left[\phi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]$

(6) $[\theta, [\phi, \psi]] + [\phi, [\psi, \theta]] + [\psi, [\theta, \phi]] = 0$

(7) $[q_\alpha, p_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$

(8) $[\phi, \phi] = 0$

(9) $[\phi, \psi\phi] = \psi [\phi, \phi] + [\phi, \psi] \phi$

泊松定理

泊松定理:

如果函数 φ, ψ 都是相空间中的运动常数, 则它们的组合 $[\varphi, \psi]$ 也是相空间中的运动常数.

可以利用泊松定理来寻找新的守恒量。

正则变换

正则变换是相空间中的“坐标”变换

$$\begin{cases} Q_\alpha = Q_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_s; p_1, p_2, \dots, p_s; t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_s; p_1, p_2, \dots, p_s; t) \end{cases}$$

$$H \longrightarrow H^*$$

新的广义坐标、广义动量和哈密顿量满足：

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H^*}{\partial P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_\alpha}$$

正则变换

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - H^{*} + \frac{dU}{dt}$$

其中U称为正则变换的母函数

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{\alpha} = \frac{\partial U}{\partial q_{\alpha}}, \quad P_{\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial Q_{\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s) \\ H^{*} - H = \frac{\partial U}{\partial t} \end{array} \right.$$

哈密顿雅可比方程

$$H^* - H = \frac{\partial U}{\partial t}$$



$$H^* = H + \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$H + \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$



$$H^* = 0$$

$$H + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad \text{称为哈密顿雅可比方程}$$