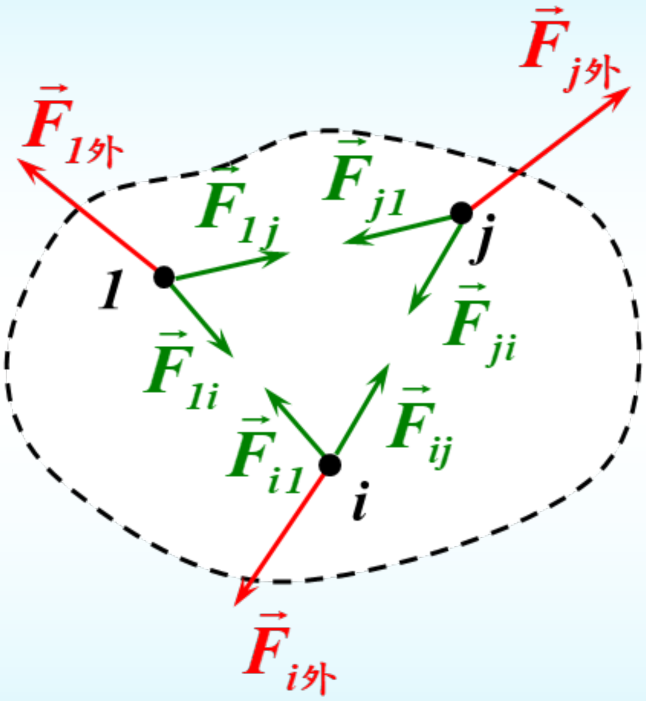
质点系力学

*

质点系

质点系诸内力的总和等于零



*

三个定理

质点系的动量定理：合外力的冲量等于体系总动量的变化量

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\sum\vec{F}dt=\sum\vec{p}_2-\sum\vec{p}_1=\sum m\vec{v}_2-\sum m\vec{v}_1$$

质点系的动能定理：所有力(包括内力和外力)对质点做功的代数和等于体系总的动能增量

$$W_{外}+W_{内}=E_{k2}-E_{k1}=\sum\frac{1}{2}mv_2^2-\sum\frac{1}{2}mv_1^2$$

质点系的角动量定理：合外力矩等于质点系角动量的瞬时变化率

$$\vec{M}\cdot dt=d\vec{L}=d(\vec{r}\times m\vec{v})$$

三个守恒定律

动量守恒定律： 如果系统所受的合外力为零，则系统的总动量保持不变

角动量守恒定律： 如果系统所受的合外力矩为零，则系统的总角动量保持不变

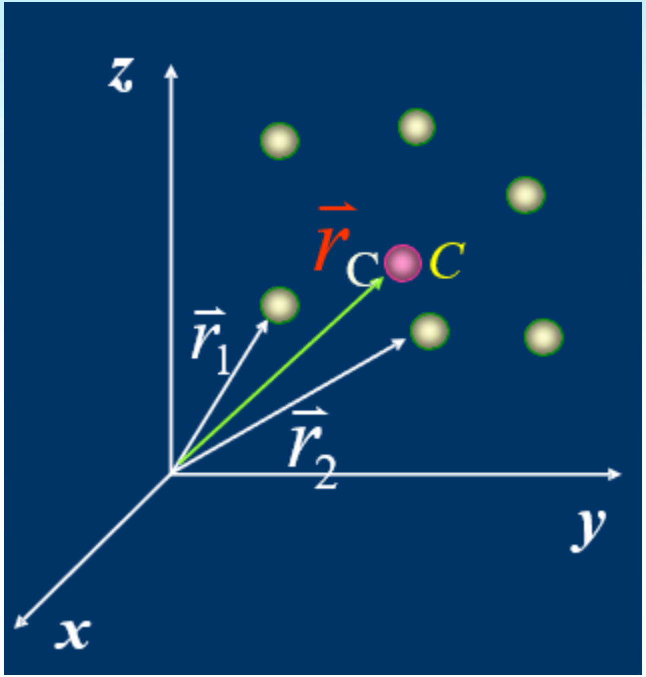
机械能守恒定律： 如果系统内非保守内力与外力做的功都为零，或非保守内力与外力做的总功为零，即只有保守力做功，则系统机械能的总值保持不变。

能量守恒定律： 一个孤立系统，不受外力，历经任何变化过程，该系统的所有能量的总和是不变的，能量只能从一种形式变化为另一种形式，或从一个物体传给另一个物体。

质心的定义

质心（质量中心）：

$$\vec{r}_C = \sum_i m_i \vec{r}_i / M \qquad \vec{r}_C = \int \vec{r}\, dm / M$$



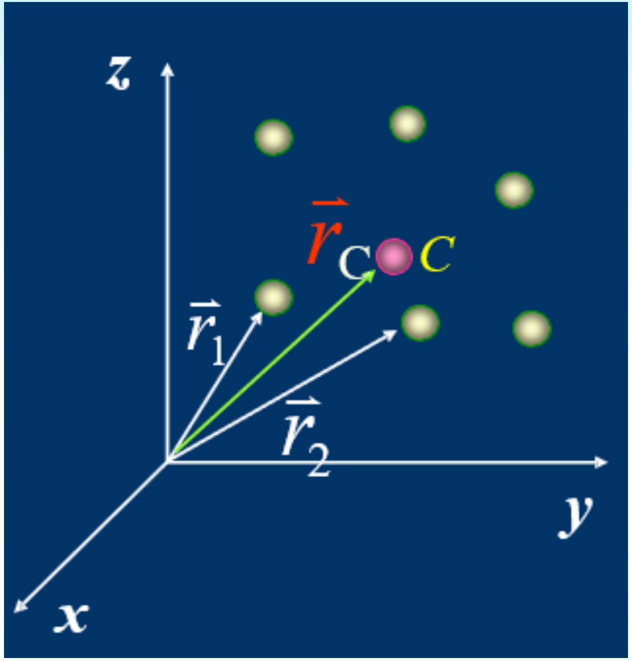
质心的速度 $$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

质心的加速度 $$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}$$

质心运动定理

质心运动定理 $m\dfrac{d^2\boldsymbol{r}_c}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{ex}$

对质心的角动量定理 $\dfrac{d\boldsymbol{J}'}{dt}=\boldsymbol{M}'$



对质心的动能定理

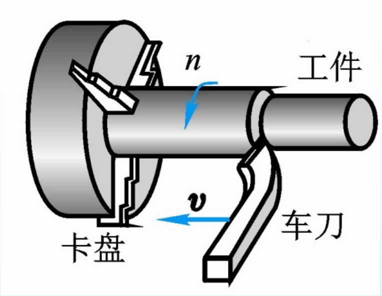
$$d\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}'}_i^2\right)=\sum_i \boldsymbol{F}_i^{ex}\cdot d\boldsymbol{r}'_i+\sum_i \boldsymbol{F}_i^{in}\cdot d\boldsymbol{r}'_i$$

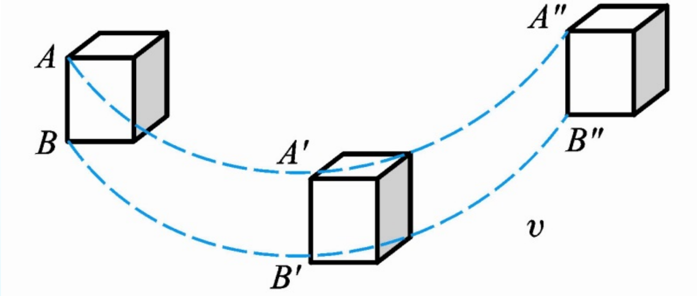
*

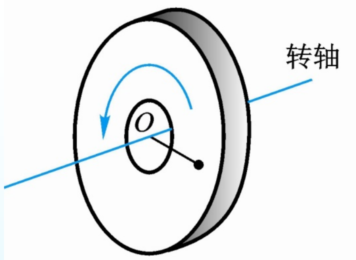
刚体力学

刚体的定义

刚体，考虑物体的质量， 又考虑形状和大小，但忽略其形变的物体模型。

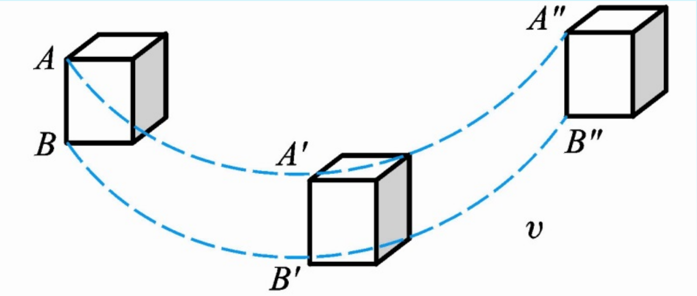






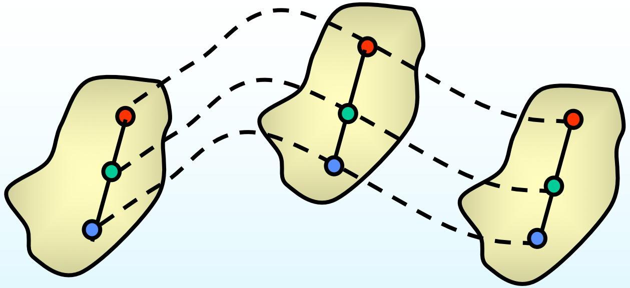
*

刚体的平动



- 当刚体运动时，如果刚体内任何一条给定的直线，在运动中始终保持它的方向不变，这种运动叫平动。

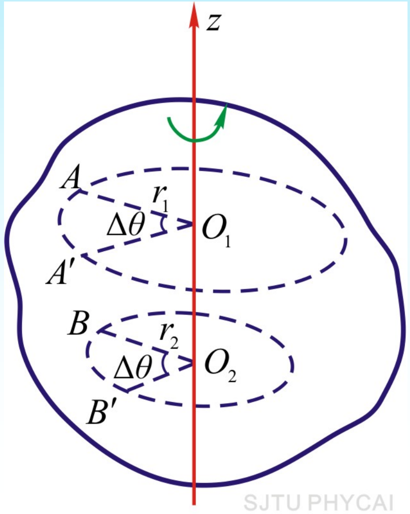
- 平动时，刚体内各质点在任一时刻具有相同的速度和加速度。



- 刚体内任何一个质点的运动，都可代表整个刚体的运动，如质心。

刚体的定轴转动

在同一时间内，各点转过的圆弧长度不同，但在相同时间内转过的角度相同，称为**角位移**，它可以用来描述整个刚体的转动

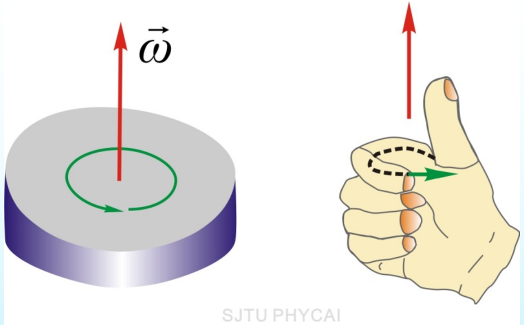


角量：

角位移 $\Delta\theta$

角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

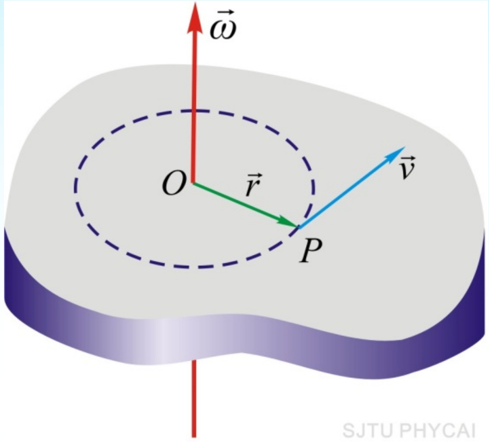
角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$



*

线量与角量的关系：

刚体内某点的速度矢量 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



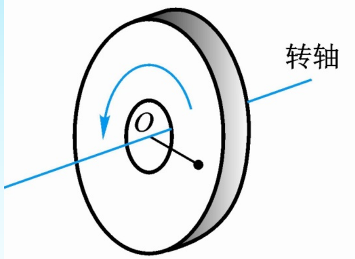
刚体内某点速度的大小 $v = r\omega$

刚体内某点切向加速度的大小

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\alpha$$

*

定轴转动的特点



（1）每一质点均作圆周运动，与轴垂直的圆面为转动平面；

（2）任一质点运动 $\Delta\theta, \vec{\omega}, \vec{\alpha}$ 均相同，但 $\vec{v}, \vec{a}$ 不同；

（3）用角量来描述，运动描述仅需一个坐标。

刚体定轴转动的运动定律

$$J=\int r^2\mathrm{d}m$$

$$M=J\alpha$$

力矩的效果是会为刚体提供角加速度，角加速度正比于力矩，即方向相同，大小相差一个比例系数J

刚体转动动能：$\frac{1}{2}J\omega^2$

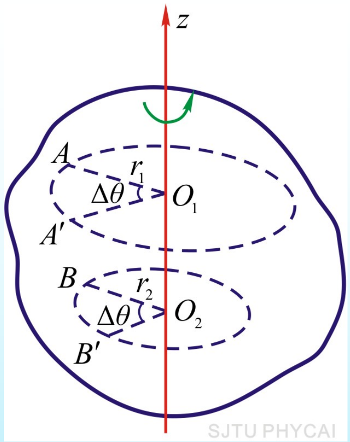
对比：质点动能 $\frac{1}{2}mv^2$

刚体的角动量：$J\omega$

对比：质点的动量 mv

$$M=\frac{dL}{dt}$$

力矩等于角动量的瞬时变化率，力矩指向角动量增量的方向，所以当和原来的角动量同向时，角动量的大小会增加，反向时，角动量的大小会减小



例3-1　求均质细棒(m ， l) 的转动惯量：

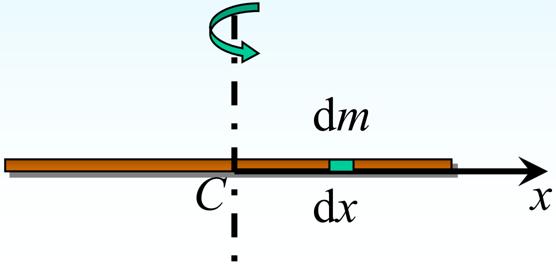
(1) 转轴通过中心C与棒垂直，

(2) 转轴通过棒的一端O与棒垂直。

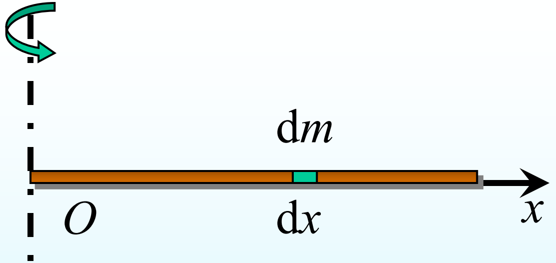
解： (1) $$\mathrm{d}m=\frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

$$J_C=\int x^2\mathrm{d}m$$

$$=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{m}{l}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{12}ml^2$$



(2) $$J=\int_0^l\frac{m}{l}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}ml^2$$



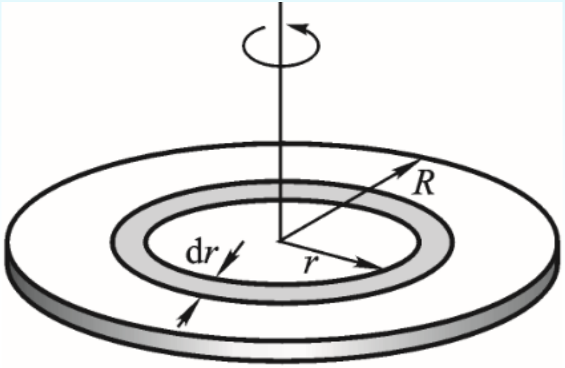
➢ 可见，转动惯量因转轴位置不同而变，故必须指明是关于某轴的转动惯量。

例3-2　求圆盘对于通过中心并与盘面垂直的转轴的转动惯量。圆盘半径 R，质量 m，密度均匀。

解：　圆盘质量面密度

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$

取半径r，宽度dr的圆环



$$J = \int r^2 \mathrm{d}m = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi\sigma R^4}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

定轴转动的动能定理

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J{\omega_2}^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

刚体定轴转动的动能定理：总外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量。

定轴转动角动量定理

$$\int_{t_0}^{t}M_z\,\mathrm{d}t=J\omega-(J\omega)_0$$

刚体定轴转动的角动量定理：刚体角动量的增量等于合外力矩的冲量

刚体转动动能：$\frac{1}{2}J\omega^2$

对比：质点动能 $\frac{1}{2}mv^2$

刚体的角动量：$J\omega$

对比：质点的动量 mv

$$M = J\alpha$$

$$M = \frac{dL}{dt}$$

定轴转动角动量定理

$$\int_{t_0}^{t} M_z \, \mathrm{d}t = J\omega - (J\omega)_0$$

定轴转动动能定理

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} J {\omega_2}^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \, \mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

动能定理

$$\int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2$$