测试题解答 12.1

(1) 将 S 按照除以 3 的余数划分成以下子集：

A={3,6,9,12,15,18}，B={1,4,7,10,13,16,19}，C={2,5,8,11,14,17,20}

从 S 中选 x 与 y，若使得 $x+y$ 是 3 的倍数，有两种选法：x 与 y 都取自 A，x 与 y 分别取自 B 和 C. 因此选法数是

$$C(6,2)+C(7,1)C(7,1)=64$$

(2) 如果字母 b 紧跟在 e 的左边，就可以将 e 和 b 看成一个大字母，因此相当于 5 个字母的排列数，即 5!=120. b 在 e 左边的排列与 b 在 e 右边的排列之间可以构造一一对应，满足题设条件的排列恰好是排列总数的一半，因此结果是 6!/2=360.

(3) 令 $x_2'=x_2-1$, $x_3'=x_3-2$，则原方程解的个数与方程 $x_1+x_2'+x_3'=15-3=12$ 的非负整数解个数相等，即所求结果是：

$$C(12+3-1,12)=C(14,2)=91$$

(4) $\dfrac{10!}{3!\,3!\,2!\,2!}=25200$

测试题解答 12.2

A：24，B：1408，C：84，D：$n(n-1)(n-2)/3$.

求解过程如下.

(1) 1400 的素因子分解式是

$$1400=2^3\cdot 5^2\cdot 7$$

因此，1400 的任何正因子都具有下述形式：$2^i\cdot 5^j\cdot 7^k$，其中 $0\le i\le 3$, $0\le j\le 2$, $0\le k\le 1$. 根据乘法法则，1400 的正因子数是 i, j, k 的选法数

$$N=(1+3)(1+2)(1+1)=24$$

(2) 根据前两个盒子所含球数 k 对放法进行分类，其中 k=0,1,2. 对于给定的 k，再用分步处理的思想计算放球的方法数. 这里的步骤是：

第一步：先从 6 个球中选择放入前两个盒子的 k 个球，有 $C(6,k)$种选法；

第二步：把选好的 k 个球分到 2 个不同的盒子里，每个球有 2 种选择，有 2^k 种分法；

第三步：把剩下的 $6-k$ 个球分到其他的 2 个不同的盒子里有 2^{6-k} 种分法.

根据乘法法则，使得前两个盒子含 k 个球的放法数是 $C(6,k)2^k2^{6-k}$.

最后使用加法法则对 k 求和，就得到所求的方法数是

$$\sum_{k=0}^{2} C(6,k)2^k 2^{6-k} = 2^0 2^6 + 6\times 2^1 2^5 + 15\times 2^2 2^4 = 22\times 2^6 = 1408$$

(3) 方法一. 先放 9 个 B，只有 1 种方法. 然后，在每个 B 之间的 9 个位置中选择 6 个位置放 A, 有 $C(9,6)=84$ 种方法.

方法二. 先放 6 个 AB，只有 1 种方法. 把每个 AB 看作格板，6 个格板构成 7 个空格，在空格中放入剩下的 3 个 B. 这相当于方程

$$x_1+x_2+\ldots+x_7=3$$

的非负整数解的个数，即 $C(3+7-1,3)=C(9,3)=84$.

(4) 相当于 n 中取 3 的环排列数，即 $P(n,3)/3= n(n-1)(n-2)/3$.

上述计数问题的求解往往使用选取问题、方程的非负整数解、非降路径的模型. 应该注意的是：

- 选择适当的组合计数模型.
- 把问题分解，这里需要使用分步处理和分类处理的思想. 例如，第(1)题和第(3)题是分步处理，第(2)题是先分类处理，再分步处理.
- 在分步处理时，要考虑选取的顺序. 不同的次序可能会影响到计算的复杂程度. 比如第(3)题，先放 A 还是先放 B，两种方法都可以用，但是先放 B 的方法计算起来比较简单.

在每一步或每一类的计数时，特别要区分选取是否有序，从而采用合适的组合计数公式（乘法法则、加法法则、排列、组合以及涉及多重集的计数公式）.

测试题解答 12.3

A：60，B：125，C：100，D：112，E：21，F：210，G：60.

求解过程如下：

(1) 从 5 天中有序选取 3 天，不允许重复，其选法数是 $N=P(5,3)=5\times4\times3=60$. 若每门考试都有 5 种独立的选法. 由乘法法则总选法数为 $N=5\times5\times5=125$.

(2) 将$\{1, 2,\cdots, 20\}$划分成两个子集，其中 A 是奇数构成的子集，B 是偶数构成的子集.若两个数之和为奇数，它们只能一个取自 A，而另一个取自 B. 由

乘法法则有 $C(10,1)C(10,1)=100$ 种方法.

若两个数之差小于等于 7，按照其差分别为 1, 2, …, 7 进行分类，对应各类的选法数是 19, 18, …, 13. 由加法法则，总的方法有 19+18+…+13=112 种.

(3) 分以下情况讨论

含 1 个 0：相当于从 6 个位置选择 1 个位置放 0 的方法数，即：C(6,1)=6.

含 2 个 0：含 2 个 0 的序列有 C(6,2)个，其中 0 相邻的序列有 5 个，于是有 C(6,2)–5=10.

含 3 个 0：为保证 0 不相邻，先放好 01010，然后在两个 0 之间、该序列的前面或后面等位置插入 1，有 4 种方法，于是有 C(4,1)=4.

不含 0 的序列数：1.

根据加法法则，N=1+6+10+4=21.

(4) 令 S={2·红球, 2·黄球, 3·白球}，则 S 的全排列数为 7!/(3!2!2!)=210. 若红球相邻，可把红球看成 1 个球，那么{1·红球, 2·黄球, 3·白球}的全排列数为 6!/(1!2!3!)=60.