测试题解答 14.7

判断半群要验证运算的封闭性和结合律；除了上述条件，对于独异点还要验证存在单位元，而对于群，则要进一步验证每个元素是否存在逆元.

(1) 加法可结合，单位元是 0，$n\sqrt{2}$ 的逆元是$-n\sqrt{2}$，构成半群、独异点和群.

(2) 乘法可结合，单位元是 1，构成半群与独异点但不构成群，因为 0 没有逆元.

(3) <**R**,∘>不构成半群、独异点和群，因为没有结合律，例如

$$(1\circ1)\circ0=2(1+1)\circ0=4\circ0=2(4+0)=8$$

$$1\circ(1\circ0)=1\circ2(1+0)=1\circ2=2(1+2)=6$$

(4) ∗运算可结合，单位元为<0,0>，<*a*,*b*>的逆元为<–*a*,–*b*>，构成半群、独异点和群.

(5) 运算不封闭，不构成代数系统，因为可逆矩阵相加不一定得到可逆矩阵，例如：

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

(6) 矩阵乘法运算封闭. 因为

$$\begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}c & d\\-d & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ac-bd & ad+bc\\-(ad+bc) & ac-bd\end{bmatrix}$$

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\neq0$$

满足结合律，单位元是$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix}$的逆元是$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix}a & -b\\b & a\end{bmatrix}$，构成半群、独异点和群.