

### 测试题解答 7.10

证 设  $R$  是  $A$  上的等价关系. 任取  $x$ ,  
 $x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$  (因为  $R$  在  $A$  上自反)  
 $\Rightarrow \exists x (\langle x, x \rangle \in R \wedge \langle x, x \rangle \in R) \Rightarrow \langle x, x \rangle \in S$   
因此  $S$  在  $A$  上自反.

任取  $\langle x, y \rangle$ ,  
 $\langle x, y \rangle \in S$   
 $\Rightarrow \exists c (\langle x, c \rangle \in R \wedge \langle c, y \rangle \in R)$   
 $\Rightarrow \exists c (\langle c, x \rangle \in R \wedge \langle y, c \rangle \in R)$  (因为  $R$  在  $A$  上对称)  
 $\Rightarrow \langle y, x \rangle \in S$ ,  
因此  $S$  是对称的.

任取  $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$ ,  
 $\langle x, y \rangle \in S \wedge \langle y, z \rangle \in S$   
 $\Rightarrow \exists c (\langle x, c \rangle \in R \wedge \langle c, y \rangle \in R) \wedge \exists d (\langle y, d \rangle \in R \wedge \langle d, z \rangle \in R)$   
 $\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$  (因为  $R$  在  $A$  上传递)  
 $\Rightarrow \exists y (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R)$   
 $\Rightarrow \langle x, z \rangle \in S$   
从而证明了  $S$  是传递的.

根据自反、对称、反对称、传递性的定义, 证明的过程可以总结如下.

证自反. 任取  $x$ ,

$x \in A \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$

前提	推理过程	结论
----	------	----

证对称. 任取  $\langle x, y \rangle$ ,

$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$

前提	推理过程	结论
----	------	----

证反对称. 任取 $\langle x, y \rangle$ ,

$$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow \dots \Rightarrow x = y$$

前提

推理过程

结论

证传递. 任取 $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$$

前提

推理过程

结论