

测试题解答 8.3

- (1) 单射, 不是满射, 因为 $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}^+$.
- (2) 不是单射, 也不是满射, 因为 $f(1)=f(1/2)$, $f(\mathbf{R})=\mathbf{Z}$.
- (3) 不是单射, 也不是满射, 因为 $f(1)=f(1/2)=0$, $2\notin \text{ran}f$.
- (4) 既单射, 也满射, 是双射的.
- (5) 不是单射, 也不是满射. 因为 $f(2)=f(1/2)=4/5$, $f(\mathbf{R})=[-1,1]$.
- (6) 不是单射, 是满射, 因为 $f(0)=0$, $f(1)=0$.
- (7) 不是单射, 是满射, 因为 $f(1)=f(-1)=0$.
- (8) 是单射, 不是满射, $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}-(0,1]$.
- (9) 不是单射, 也不是满射, 因为 $f(\mathbf{R})=[-1,1]$, $f(0)=f(2\pi)=0$.

对于实数集合上的函数, 通常可以通过求导找到极值点. 而有的极小值 (或极大值) 恰好是函数的最小值 (或最大值), 这样就可以求出函数的值域, 从而判断函数是否为满射的. 此外, 如果函数存在极值, 那么可以断定函数不是单射的. 因为在极值点两侧可以找到不相等的 x_1 和 x_2 满足 $f(x_1)=f(x_2)$.

证明函数不具有某种性质的一般方法就是给出反例. 为证明函数不是单射的, 需要找到 $x_1\neq x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$. (有时可能不容易找到具体的 x_1 和 x_2 , 但是可以证明这样的 x_1 和 x_2 是存在的). 证明函数不是满射的一般方法就是找到 $y\in B-\text{ran}f$.

测试题解答 8.4

- (1) 有 4^5 个函数 $f: X\rightarrow Y$, 没有双射函数.
- (2) 有 n^n 个函数 $f: X\rightarrow Y$, 有 $n!$ 个双射函数.

测试题解答 8.5

- (1) f 是 \mathbf{R} 上的函数. 但它不是单射的, 因为 $f(2)=f(1)=1$. 也不是满射的, 因为 $\text{ran}f=\{1,-1\}$.
- (2) g 不是从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的函数, 因为 $\text{dom}g=\mathbf{R}^+\neq\mathbf{R}$.
- (3) h 不是从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的函数, 因为 $-2\notin \text{dom}h$.
- (4) t 是从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的双射函数.

(5) s 是从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的函数，但不是单射的，也不是满射的，因为该函数的最小值是 $-1/4$ ，所以 $\text{ran}f$ 是区间 $[-1/4, +\infty]$ ，不是整个实数集，且 $f(0)=f(1)=0$.

(6) v 不是从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的函数，因为 $0 \notin \text{dom}v$.