

知识点：二项式定理

测试题 12.6 设 S 是 n 元集, N 表示满足 $A \subseteq B \subseteq S$ 的有序对 $\langle A, B \rangle$ 的个数, 用二项式定理证明 $N=3^n$.

测试题 12.7 给定 n 个整数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. 要求从中选出两组数, 使得每组至少含 1 个数, 并且第一组的最小数大于第二组的最大数, 问有多少种选法?

测试题 12.8 证明.

$$(1) \sum_{k=0}^m \binom{n-k}{n-m} = \binom{n+1}{m}$$

$$(2) \sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n}{k} = 2^{n-1} (n+2)$$

$$(3) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n}{n+1}$$

$$(4) \binom{m}{0} \binom{m}{n} + \binom{m}{1} \binom{m-1}{n-1} + \dots + \binom{m}{n} \binom{m-n}{0} = 2^n \binom{m}{n}.$$

测试题 12.9 求和.

$$(1) \sum_{k=0}^m \binom{n-m+k}{k}$$

$$(2) \sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{n-k}$$