测试题解答 8.6

(1) $f\circ g(x)=\lfloor x+2/3\rfloor$, f^{-1}：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f^{-1}(x)=x-1$, g 不存在反函数.

(2) $f\circ g(x)=\sqrt{x^2+y^2}+1$, f^{-1}：$\mathbf{C}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，$f^{-1}(x+y\mathrm{i})=\langle x,y\rangle$，$g$ 不存在反函数.

(3) $f\circ g(x)=x^2-x$, f, g 都不存在反函数.

(4) $f\circ g(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\ge 3 \\ 0 & x<3 \end{cases}$. g^{-1}：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$g^{-1}(x)=x-2$，f 不存在反函数.

测试题解答 8.7

证 (1) 任取 y，

$y\in f(A\cap f^{-1}(B_1))\Leftrightarrow \exists x(x\in A\cap f^{-1}(B_1)\wedge xfy)$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge x\in f^{-1}(B_1)\wedge xfy)\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge f(x)\in B_1\wedge xfy)$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge y\in B_1\wedge xfy)\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge xfy)\wedge y\in B_1$

$\Leftrightarrow y\in f(A)\wedge y\in B_1\Leftrightarrow y\in f(A)\cap B_1$

(2) 利用已知条件、函数复合运算的定理以及结合律得

$$g=I_B\circ g=(h\circ f)\circ g=h\circ(f\circ g)=h\circ I_A=h$$

关于涉及函数的等式的证明，经常采用集合等式的证明方法, 正如第 1 题的证明所显示的. 与一般集合等式证明的区别在于这里要用到函数的定义、运算性质等相关概念.

(3) 假设 $f(x_1)=f(x_2)$，由 $f\circ g=I_A$ 有 $g(f(x))=x$. 从而有

$$x_1=g(f(x_1))=g(f(x_2))=x_2$$

这就证明了 f 是单射的.

任取 $x\in A$，由于 f 是从 A 到 B 的函数，存在 $y\in B$ 使得 $f(x)=y$. 由 $f\circ g=I_A$ 有

$$g(f(x))=x\Rightarrow g(y)=x$$

因此 g 是满射的.

证明函数 f：$A\to B$ 是满射的基本方法是：任取 $y\in B$，找到 $x\in A$（x 与 y 相关，可能是一个关于 y 的表达式）或者证明存在 $x\in A$，使得 $f(x)=y$.

证明函数 f：$A\to B$ 是单射的基本方法是：假设 A 中存在 x_1 和 x_2 使得 $f(x_1)=f(x_2)$，利用已知条件或者相关的定理最终证明 $x_1=x_2$.

(4) 任取 $y\in A$，必有 $x\in A$ 使得$\langle x,y\rangle\in f$, 由题设有$\langle x,y\rangle\in f\circ f$, 因此存在 $z\in A$

使得$<x,z>\in f$且$<z,y>\in f$. 由于$f(x)$是唯一的，因此$y=z$，从而$<y,y>\in f$. 由于y的任意性，知$I_A\subseteq f$.

任取$<x,y>\in f$，根据题设存在$z\in A$使得$<x,z>\in f$且$<z,y>\in f$. 由于$I_A\subseteq f$，有$<x,x>\in f$, $<z,z>\in f$, 因此$x=z$, $z=y$, 从而得到$x=y$. 这就证明了$f\subseteq I_A$. 综合上述命题得证.