知识点：同态

测试题 14.17 设 V_1=<$\mathbf{C}$,·>,V_2=<$\mathbf{R}$,·>是代数系统，·为普通乘法. 下面哪个函数 f 是 V_1 到 V_2 的同态？如果 f 是同态，指出 f 是否为单同态、满同态和同构，并求出 V_1 在 f 下的同态像；如果不是请说明理由.

(1) f: $\mathbf{C}\to\mathbf{R}$, $f(z)=|z|+1$, $\forall z\in\mathbf{C}$.

(2) f: $\mathbf{C}\to\mathbf{R}$, $f(z)=|z|$, $\forall z\in\mathbf{C}$.

(3) f: $\mathbf{C}\to\mathbf{R}$, $f(z)=0$, $\forall z\in\mathbf{C}$.

(4) f: $\mathbf{C}\to\mathbf{R}$, $f(z)=2$, $\forall z\in\mathbf{C}$.

测试题 14.18 设 V_1=<A,∘>, V_2=<B,∗>和 V_3=<C,●>是代数系统，证明：

(1) $V_1\cong V_1$.

(2) 若 $V_1\cong V_2$，则 $V_2\cong V_1$.

(3) 若 $V_1\cong V_2$，$V_2\cong V_3$，则 $V_1\cong V_3$.

测试题 14.19 设 V_1=<$\mathbf{Q}^*$,·>和 V_2=<$\mathbf{Q}$,+>是代数系统，其中 $\mathbf{Q}$ 是有理数集合，$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}-\{0\}$. ·和+分别代表普通乘法和加法. 证明不存在 V_1 到 V_2 的同构.

测试题 14.20 设 G_1 和 G_2 是群，判断以下映射 φ: $G_1\to G_2$ 是否为同态映射？如果是，说明它是否为单同态和满同态. 定义同态的核 $\ker\varphi=\{x|x\in G_1, \varphi(x)=e\}$，对于同态 φ 求出 $\ker\varphi$.

(1) $G_1=G_2=G$，$\varphi: G\to G$, $\varphi(x)=e$，$\forall x\in G$，其中 e 为 G 的单位元.

(2) $G_1=G_2$=<$\mathbf{Z}$,+>为整数加群，$\varphi: \mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$，$\varphi(n)=2n$, $\forall n\in\mathbf{Z}$.

(3) G_1=<$\mathbf{R}$,+>，G_2=<$\mathbf{R}^+$,·>，$\mathbf{R}$ 为实数集，$\mathbf{R}^+$为正实数集，+和·分别为普通加法和乘法. $\varphi: G_1\to G_2$, $\varphi(x)=\mathrm{e}^x$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4) 设 $\mathbf{Z}_n$ 为模 n 整数加群， $\varphi: \mathbf{Z}_{15}\to\mathbf{Z}_3$, $\varphi(x) = (x) \bmod 3$.

测试题 14.21 设Σ是非空有穷字母表，ω是Σ上的有限个字符构成的序列. 序列中的字符个数称为串的长度，记作$|\omega|$. λ表示空串，$|\lambda|=0$. 对任意的 $k\in\mathbf{N}$，令Σ_k表示Σ上的所有长度为 k 的串的集合，那么$\Sigma^*=\bigcup_{i=0}^{\infty}\Sigma_i$ 表示Σ上的所有串的集合. 在Σ^*定义连接运算$\circ$，$\forall\omega_1,\omega_2\in\Sigma^*$，$\omega_1=a_1a_2\cdots a_m$，$\omega_2=b_1b_2\cdots b_n$，那么$\omega_1\circ\omega_2= a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n$. 回答下面的问题：

(1) 如果$|\Sigma|=n$，card$|\Sigma^*|$等于什么？

(2) Σ^*与连接运算构成代数系统，分析这个系统是否满足交换律、结合律、幂等律，是否具有单位元和零元.

(3) 令 f：$\Sigma^*\to\mathbf{N}$，$f(\omega)=|\omega|$，证明 f 构成$<\Sigma^*,\circ>$到$<\mathbf{N},+>$的满同态映射.