线性代数知识点总结

1 行列式

（一）行列式概念和性质

1、逆序数： 所有的逆序的总数

2、行列式定义： 不同行不同列元素乘积代数和

3、行列式性质：（用于化简行列式）

（1）行列互换（转置），行列式的值不变

（2）两行（列）互换，行列式变号

（3）提公因式：行列式的某一行（列）的所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式

（4）拆列分配：行列式中如果某一行（列）的元素都是两组数之和，那么这个行列式就等于两个行列式之和。

（5）一行（列）乘 k 加到另一行（列），行列式的值不变。

（6）两行成比例，行列式的值为 0。

（二）重要行列式

4、上（下）三角（主对角线）行列式的值 等于主对角线元素的乘积

5、副对角线行列式的值 等于副对角线元素的乘积乘 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

6、Laplace展开式：（A 是 m 阶矩阵， B 是 n 阶矩阵），则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$$

7、n 阶（n≥2）范德蒙德行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$ 数学归纳法证明

★8、对角线的元素为 a，其余元素为 b 的行列式的值：

$$\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

（三）按行（列）展开

9、按行展开定理：

（1）任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和等于行列式的值

（2）行列式中某一行（列）各个元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于 0

（四）行列式公式

10、行列式七大公式：

（1）$|kA|=k^n|A|$

（2）$|AB|=|A|\cdot|B|$

（3）$|A^T|=|A|$

（4）$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

（5）$|A^*|=|A|^{n-1}$

（6）若 A 的特征值 λ_1 λ_2 ,, λ_n，则 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

（7）若 A 与 B 相似，则 $|A|=|B|$

（五）克莱姆法则

11、克莱姆法则：

（1）非齐次线性方程组的系数行列式不为 0，那么方程为唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

（2）如果非齐次线性方程组无解或有两个不同解，则它的系数行列式必为 0

（3）若齐次线性方程组的系数行列式不为 0，则齐次线性方程组只有 0 解；如果方程组有非零解，那么必有 D=0。

2 矩阵

（一）矩阵的运算

1、矩阵乘法注意事项：

（1）矩阵乘法要求前列后行一致；

（2）矩阵乘法不满足交换律；（因式分解的公式对矩阵不适用，但若 $B=E,O,A^{-1},A^*,f(A)$时，可以用交换律）

（3）AB=O不能推出 A=O 或 B=O。

2、转置的性质（ 5 条）

（1）$(A+B)^T=A^T+B^T$

（2）$(kA)^T=kA^T$

（3）$(AB)^T=B^TA^T$

（4）$|A|^T=|A|$

（5）$(A^T)^T=A$

（二）矩阵的逆

3、逆的定义：

AB=E或 BA=E成立，称 A 可逆， B 是 A 的逆矩阵，记为 $B=A^{-1}$

注：A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$

4、逆的性质：（5条）

（1）$(kA)^{-1}=1/k \cdot A^{-1}$ $(k\neq 0)$

（2）$(AB)^{-1}=B^{-1} \cdot A^{-1}$

（3）$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

（4）$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

（5）$(A^{-1})^{-1}=A$

5、逆的求法：

（1）A 为抽象矩阵：由定义或性质求解

（2）A 为数字矩阵：（A|E）→初等行变换 →（E|A^{-1}）

（三）矩阵的初等变换

6、初等行（列）变换定义：

（1）两行（列）互换；

（2）一行（列）乘非零常数 c

（3）一行（列）乘 k 加到另一行（列）

7、初等矩阵：单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵。

8、初等变换与初等矩阵的性质：

（1）初等行（列）变换相当于左（右）乘相应的初等矩阵

（2）初等矩阵均为可逆矩阵，且 $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$（i，j 两行互换）；

E_i^{-1}（c）=E_i（1/c）（第 i 行（列）乘 c）

E_{ij}^{-1}（k）=E_{ij}（-k）（第 i 行乘 k 加到 j）

★（四）矩阵的秩

9、秩的定义：非零子式的最高阶数

注：（1）r（A）=0 意味着所有元素为 0，即 A=O

（2）r（$A_{n\times n}$）=n（满秩）←→|A| ≠0←→A 可逆；

r（A）＜n←→|A|=0 ←→A 不可逆；

（3）r（A）=r（r=1、2、，、 n-1）←→r 阶子式非零且所有 r+1 子式均为 0。

10、秩的性质：（7 条）

（1）A 为 m×n 阶矩阵，则 r（A）≤min（m,n）

（2）r（A±B）≤r（A）±（B）

（3）r（AB）≤min{r（A），r（B）}

（4）r（kA）=r（A）（k≠0）

（5）r（A）=r（AC）（C 是一个可逆矩阵）

（6）r（A）=r（A^T）=r（A^TA）=r（AA^T）

（7）设 A 是 m×n 阶矩阵， B 是 n×s 矩阵， AB=O，则 r（A）+r（B）≤n

11、秩的求法：

（1）A 为抽象矩阵：由定义或性质求解；

（2）A 为数字矩阵：A→初等行变换 →阶梯型（每行第一个非零元素下面的元素均为 0），则 r（A）=非零行的行数

（五）伴随矩阵

12、伴随矩阵的性质：（8 条）

（1）$AA^*=A^*A=|A|E$ →★ $A^*=|A|A^{-1}$

（2）$(kA)^*=k^{n-1}A^*$

（3）$(AB)^*=B^*A^*$

（4）$|A^*|=|A|^{n-1}$

（5）$(A^T)^*=(A^*)^T$

（6）$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=A|A|^{-1}$

（7）$(A^*)^*=|A|^{n-2}\cdot A$

★（8）r（A*）=n（r（A）=n）；

r（A*）=1　（r（A）=n-1）；

r（A*）=0　（r（A）＜n-1）

（六）分块矩阵

13、分块矩阵的乘法：要求前列后行分法相同。

14、分块矩阵求逆：

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

3 向量

（一）向量的概念及运算

1、向量的内积：$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$

2、长度定义：$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{\alpha^T\alpha}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

3、正交定义：$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+,\ +a_nb_n=0$

4、正交矩阵的定义：A 为 n 阶矩阵，$AA^T=E\longleftrightarrow A^{-1}=A^T\longleftrightarrow A^TA=E\rightarrow|A|=\pm1$

（二）线性组合和线性表示

5、线性表示的充要条件：

非零列向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示

(1)$\longleftrightarrow$非齐次线性方程组（$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$）$(x_1, x_2, \cdots, x_s)^T=\beta$ 有解。

★(2)$\longleftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)=r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta)$（系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，用于大题第一步的检验）

6、线性表示的充分条件：（了解即可）

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示。

7、线性表示的求法：（大题第二步）

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，β 可由其线性表示。

$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s | \beta)$ →初等行变换 →（行最简形 | 系数）

行最简形：每行第一个非 0 的数为 1，其余元素均为 0

（三）线性相关和线性无关

8、线性相关注意事项：

（1）α 线性相关 $\longleftrightarrow \alpha=0$

（2）α_1, α_2 线性相关 $\longleftrightarrow \alpha_1, \alpha_2$ 成比例

9、线性相关的充要条件：

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关

（1）$\longleftrightarrow$有个向量可由其余向量线性表示；

（2）$\longleftrightarrow$齐次方程（$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$）$(x_1, x_2, \cdots, x_s)^T=0$ 有非零解；

★（3）$\longleftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) < s$ 即秩小于个数

特别地，n 个 n 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关

（1）$\longleftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) < n$

（2）$\longleftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n|=0$

（3）$\longleftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 不可逆

10、线性相关的充分条件：

（1）向量组含有零向量或成比例的向量必相关

（2）部分相关，则整体相关

（3）高维相关，则低维相关

（4）以少表多，多必相关

★推论：n+1 个 n 维向量一定线性相关

11、线性无关的充要条件

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关

（1）$\longleftrightarrow$ 任意向量均不能由其余向量线性表示；

（2）$\longleftrightarrow$ 齐次方程（$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$）$(x_1, x_2, \ldots, x_s)^T=0$ 只有零解

（3）$\longleftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)=s$

特别地，n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关

$\longleftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=n \longleftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n| \neq 0 \longleftrightarrow$ 矩阵可逆

12、线性无关的充分条件：

（1）整体无关，部分无关

（2）低维无关，高维无关

（3）正交的非零向量组线性无关

（4）不同特征值的特征向量无关

13、线性相关、线性无关判定

（1）定义法

★（2）秩：若小于阶数，线性相关；若等于阶数，线性无关

【专业知识补充】

（1）在矩阵左边乘列满秩矩阵（秩 =列数），矩阵的秩不变；在矩阵右边乘行满秩矩阵，矩阵的秩不变。

（2）若 n 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以由其线性表示，即 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C$，则 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=r(C)$，从而线性无关。

$\longleftrightarrow r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=3 \longleftrightarrow r(C)=3 \longleftrightarrow |C| \neq 0$

（四）极大线性无关组与向量组的秩

14、极大线性无关组不唯一

15、向量组的秩 :极大无关组中向量的个数成为向量组的秩

对比：矩阵的秩 :非零子式的最高阶数

★注:向量组 α_1，α_2，，，　α_s的秩与矩阵 A=（α_1，α_2，，，　α_s）的秩相等

★16、极大线性无关组的求法

（1） α_1，α_2，，，　α_s为抽象的：定义法

（2） α_1，α_2，，，　α_s为数字的：

（α_1，α_2，，，　α_s）→初等行变换 →阶梯型矩阵

则每行第一个非零的数对应的列向量构成极大无关组

（五）向量空间

17、基（就是极大线性无关组）变换公式：

若 α_1，α_2，，，　α_n与 β_1，β_2，，，　β_n是 n 维向量空间 V 的两组基，则基变换公式为（β_1，β_2，，，　β_n）=（α_1，α_2，，，　α_n）$C_{n\times n}$

其中，C 是从基 α_1，α_2，，，　α_n到 β_1，β_2，，，　β_n的过渡矩阵。

C=（α_1，α_2，，，　α_n）$^{-1}$（β_1，β_2，，，　β_n）

18、坐标变换公式：

向量 γ 在基 α_1，α_2，，，　α_n与基 β_1，β_2，，，　β_n的坐标分别为 x=（x_1，x_2，，，　x_n）^{T}，y=（y_1，y_2，，，　y_n）^{T}，，即 $\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+$，，$+x_n\alpha_n=y_1\beta_1+y_2\beta_2+$，，$+y_n\beta_n$，则坐标变换公式为 x=Cy 或 $y=C^{-1}x$。其中，C 是从基 α_1，α_2，，，　α_n到 β_1，β_2，，，　β_n的过渡矩阵。C=（α_1，α_2，，，　α_n）$^{-1}$（β_1，β_2，，，　β_n）

（六）**Schmidt**正交化

19、Schmidt 正交化

设 α_1，α_2，α_3线性无关

（1）正交化

令 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

（2）单位化

$$\gamma_i=\frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$$

4 线性方程组

（一）方程组的表达形与解向量

1、解的形式：

(1)一般形式

(2)矩阵形式： Ax=b；

(3)向量形式： A=（α_1， α_2， , ， α_n）

2、解的定义：

若 η =（c_1，c_2， , ， c_n）^{T}满足方程组 Ax=b，即 Aη =b，称η 是 Ax=b 的一个解（向量）

（二）解的判定与性质

3、齐次方程组：

（1）只有零解 ←→r（A）=n（n 为 A 的列数或是未知数 x 的个数）

（2）有非零解 ←→r（A）＜n

4、非齐次方程组：

（1）无解←→r（A）＜r（A|b）←→r（A）=r（A）-1

（2）唯一解 ←→r（A）=r（A|b）=n

（3）无穷多解 ←→r（A）=r（A|b）＜n

5、解的性质：

（1）若 ξ_1， ξ_2是 Ax=0 的解，则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$是 Ax=0 的解

（2）若 ξ 是 Ax=0 的解， η 是 Ax=b 的解，则 $\xi+\eta$ 是 Ax=b 的解

（3）若 η_1， η_2是 Ax=b 的解，则 $\eta_1-\eta_2$是 Ax=0 的解

【推广】

（1）设 η_1，η_2，,，η_s是 Ax=b 的解，则 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+$，$+k_s\eta_s$为

$$\begin{cases} Ax=b\text{的解（当}\ \Sigma k_i=1\text{）} \\ Ax=0\text{的解（当}\ \Sigma k_i=0\text{）} \end{cases}$$

（2）设 η_1，η_2，,，η_s是 Ax=b 的 s 个线性无关的解，则 $\eta_2-\eta_1$，$\eta_3-\eta_1$，,，$\eta_s-\eta_1$为 Ax=0 的 s-1 个线性无关的解。

变式：① $\eta_1-\eta_2$，$\eta_3-\eta_2$，,，$\eta_s-\eta_2$

② $\eta_2-\eta_1$，$\eta_3-\eta_2$，,，$\eta_s-\eta_{s-1}$

（三）基础解系

6、基础解系定义：

（1）ξ_1，ξ_2，,，ξ_s是 Ax=0 的解

（2）ξ_1，ξ_2，,，ξ_s线性相关

（3）Ax=0 的所有解均可由其线性表示

→基础解系即所有解的极大无关组

注：基础解系不唯一。

任意 n-r（A）个线性无关的解均可作为基础解系。

★7、重要结论：（证明也很重要）

设 A 施 m×n 阶矩阵，B 是 n×s 阶矩阵，AB=O

（1）B 的列向量均为方程 Ax=0 的解

（2）r（A）+r（B）≤n（第 2 章，秩）

8、总结：基础解系的求法

（1）A 为抽象的：由定义或性质凑 n-r（A）个线性无关的解

（2）A 为数字的：A→初等行变换 →阶梯型

自由未知量分别取 1,0,0；0,1,0；0,0,1；代入解得非自由未知量得到基础解系

（四）解的结构（通解）

9、齐次线性方程组的通解（所有解）

设 r（A）=r，ξ_1，ξ_2，,，ξ_{n-r}为 Ax=0 的基础解系，

则 Ax=0 的通解为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+$，$+k_{n-r}\eta_{n-r}$（其中 k_1，k_2，,，k_{n-r}为任意常数）

10、非齐次线性方程组的通解

设 r（A）=r，ξ_1，ξ_2，，，ξ_{n-r}为 Ax=0 的基础解系，η 为 Ax=b 的特解，

则 Ax=b 的通解为 $\eta+k_1\eta_1+k_2\eta_2+,\ +k_{n-r}\eta_{n-r}$（其中 k_1，k_2，，，k_{n-r}为任意常数）

（五）公共解与同解

11、公共解定义：

如果 α 既是方程组 Ax=0 的解，又是方程组 Bx=0 的解，则称 α 为其公共解

12、非零公共解的充要条件：

方程组 Ax=0 与 Bx=0 有非零公共解

$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x=0$ 有非零解 $\longleftrightarrow r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}<n$

13、重要结论（需要掌握证明）

（1）设 A 是 m×n 阶矩阵，则齐次方程 ATAx=0与 Ax=0 同解，r（ATA）=r（A）

（2）设 A 是 m×n 阶矩阵，r（A）=n，B 是 n×s 阶矩阵，则齐次方程 ABx=0与 Bx=0同解，r（AB）=r（B）

5 特征值与特征向量

（一）矩阵的特征值与特征向量

1、特征值、特征向量的定义：

设 A 为 n 阶矩阵，如果存在数 λ 及非零列向量 α，使得 Aα=λα，称 α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量。

2、特征多项式、特征方程的定义：

|λE-A|称为矩阵 A 的特征多项式（λ 的 n 次多项式）。

|λE-A |=0 称为矩阵 A 的特征方程（λ 的 n 次方程）。

注:特征方程可以写为 |A-λE|=0

3、重要结论：

（1）若 α 为齐次方程 Ax=0的非零解，则 Aα=0·α，即 α 为矩阵 A 特征值 λ=0 的特征向量

（2）A 的各行元素和为 k，则 $(1,\ 1,\ ,\ ,\ 1)^T$ 为特征值为 k 的特征向量。

（3）上（下）三角或主对角的矩阵的特征值为主对角线各元素。

△4、总结：特征值与特征向量的求法

（1）A 为抽象的：由定义或性质凑

（2）A 为数字的：由特征方程法求解

5、特征方程法：

（1）解特征方程 $|\lambda E-A|=0$，得矩阵 A 的 n 个特征值 λ_1，λ_2，，，λ_n

注：n 次方程必须有 n 个根(可有多重根，写作 $\lambda_1=\lambda_2=$，$=\lambda_s=$实数，不能省略)

（2）解齐次方程（λ_iE-A）=0，得属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量，即其基础解系（共 $n-r(\lambda_iE-A)$ 个解）

6、性质：

（1）不同特征值的特征向量线性无关

（2）k 重特征值最多 k 个线性无关的特征向量

$$1\le n-r(\lambda_iE-A)\le k_i$$

（3）设 A 的特征值为 λ_1，λ_2，，，λ_n，则 $|A|=\Pi\lambda_i$，$\Sigma\lambda_i=\Sigma a_{ii}$

（4）当 r（A）=1，即 $A=\alpha\beta^T$，其中 α，β 均为 n 维非零列向量，则 A 的特征值为 $\lambda_1=\Sigma a_{ii}=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$，$\lambda_2=$，$=\lambda_n=0$

（5）设 α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量，则

A	f（A）	A^T	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$（相似）
λ	$f(\lambda)$	λ	λ^{-1}	$\lvert A\rvert\lambda^{-1}$	λ
α	α	/	α	α	$P^{-1}\alpha$

（二）相似矩阵

7、相似矩阵的定义：

设 A、B 均为 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P 使得 $B=P^{-1}AP$，称 A 与 B 相似，记作 A~B

8、相似矩阵的性质

（1）若 A 与 B 相似，则 f（A）与 f（B）相似

（2）若 A 与 B 相似，B 与 C 相似，则 A 与 C 相似

（3）相似矩阵有相同的行列式、秩、特征多项式、特征方程、特征值、迹（即主对角线元素之和）

【推广】

（4）若 A 与 B 相似，则 AB 与 BA 相似，A^T 与 B^T 相似，A^{-1} 与 B^{-1} 相似，A* 与 B* 也相似

（三）矩阵的相似对角化

9、相似对角化定义：

如果 A 与对角矩阵相似，即存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$，称 A 可相似对角化。

注：$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$（$\alpha_i\neq0$，由于 P 可逆），故 P 的每一列均为矩阵 A 的特征值 λ_i 的特征向量

10、相似对角化的充要条件

（1）A 有 n 个线性无关的特征向量

（2）A 的 k 重特征值有 k 个线性无关的特征向量

11、相似对角化的充分条件：

（1）A 有 n 个不同的特征值（不同特征值的特征向量线性无关）

（2）A 为实对称矩阵

12、重要结论：

（1）若 A 可相似对角化，则 r（A）为非零特征值的个数，n-r（A）为零特征值的个数

（2）若 A 不可相似对角化，r（A）不一定为非零特征值的个数

（四）实对称矩阵

13、性质

（1）特征值全为实数

（2）不同特征值的特征向量正交

（3）A 可相似对角化，即存在可逆矩阵 P 使得 P-1AP=Λ

（4）A 可正交相似对角化，即存在正交矩阵 Q，使得 Q-1AQ=QTAQ=Λ

6 二次型

（一）二次型及其标准形

1、二次型：

（1）一般形式

（2）矩阵形式（常用）

2、标准形：

如果二次型只含平方项，即 $f(x_1, x_2, ,, x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+, +d_nx_n^2$

这样的二次型称为标准形（对角线）

3、二次型化为标准形的方法：

（1）配方法：

通过可逆线性变换 x=Cy（C 可逆），将二次型化为标准形。其中，可逆线性变换及标准形通过先配方再换元得到。

★（2）正交变换法：

通过正交变换 x=Qy，将二次型化为标准形 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+, +\lambda_ny_n^2$

其中，λ_1，λ_2，, , λ_n 是 A 的 n 个特征值，Q 为 A 的正交矩阵

注:正交矩阵 Q 不唯一，γ_i 与 λ_i 对应即可。

（二）惯性定理及规范形

4、定义：

正惯性指数：标准形中正平方项的个数称为正惯性指数，记为 p；

负惯性指数：标准形中负平方项的个数称为负惯性指数，记为 q；

规范形：$f=z_1^2+, z_p^2-z_{p+1}^2-, -z_{p+q}^2$ 称为二次型的规范形。

5、惯性定理：

二次型无论选取怎样的可逆线性变换为标准形，其正负惯性指数不变。

注：（1）由于正负惯性指数不变，所以规范形唯一。

（2）p=正特征值的个数，q=负特征值的个数，p+q=非零特征值的个数 =r（A）

（三）合同矩阵

6、定义：

A、B 均为 n 阶实对称矩阵，若存在可逆矩阵 C，使得 $B=C^TAC$，称 A 与 B 合同

△7、总结：n 阶实对称矩阵 A、B 的关系

（1）A、B 相似（$B=P^{-1}AP$）←→相同的特征值

（2）A、B 合同（$B=C^TAC$）←→相同的正负惯性指数 ←→相同的正负特征值的个数

（3）A、B 等价（$B=PAQ$）←→r（A）=r（B）

注：实对称矩阵相似必合同，合同必等价

（四）正定二次型与正定矩阵

8、正定的定义

二次型 x^TAx，如果任意 $x\neq 0$，恒有 $x^TAx>0$，则称二次型正定，并称实对称矩阵 A 是正定矩阵。

9、n 元二次型 x^TAx 正定充要条件：

（1）A 的正惯性指数为 n

（2）A 与 E 合同，即存在可逆矩阵 C，使得 $A=C^TC$ 或 $C^TAC=E$

（3）A 的特征值均大于 0

（4）A 的顺序主子式均大于 0（k 阶顺序主子式为前 k 行前 k 列的行列式）

10、n 元二次型 x^TAx 正定必要条件：

（1）$a_{ii}>0$

（2）$|A|>0$

11、总结：二次型 x^TAx 正定判定（大题）

（1）A 为数字：顺序主子式均大于 0

（2）A 为抽象：①证 A 为实对称矩阵：$A^T=A$；②再由定义或特征值判定

12、重要结论：

（1）若 A 是正定矩阵，则 kA（k>0），A^k，A^T，A^{-1}，A^*正定

（2）若 A、B 均为正定矩阵，则 A+B 正定

线性代数行列式经典例题

例 1 计算元素为 $a_{ij}=|i-j|$ 的 n 阶行列式．

解方法 1 由题设知，$a_{11}=0$，$a_{12}=1$，$\cdots$，$a_{1n}=n-1$，$\cdots$，故

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&n-1\\1&0&\cdots&n-2\\\vdots&&\ddots&\\n-1&n-2&\cdots&0\end{vmatrix}\overset{r_i-r_{i+1}}{\underset{i=n-1,\cdots,2}{=}}\begin{vmatrix}0&1&\cdots&n-1\\1&-1&\cdots&-1\\\vdots&&\ddots&\\1&1&\cdots&-1\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_j+c_n}{\underset{j=1,\cdots,n-1}{=}}\begin{vmatrix}n-1&n&\cdots&\cdots&n-1\\0&-2&\cdots&\cdots&-1\\\vdots&\ddots&\ddots&&\cdots\\\vdots&&0&-2&\\0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$$

其中第一步用的是从最后一行起，逐行减前一行．第二步用的每列加第 n 列.

方法 2 $$D_n=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&n-1\\1&0&\cdots&n-2\\\vdots&&\ddots&\\n-1&n-2&\cdots&0\end{vmatrix}\overset{r_i-r_{i+1}}{\underset{i=1,2,\cdots,n-1}{=}}\begin{vmatrix}-1&1&\cdots&1\\-1&-1&\cdots&1\\\vdots&&\ddots&\\n-1&n-2&\cdots&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_j+c_1}{\underset{j=2,\cdots,n}{=}}\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0\\-1&-2&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\\n-1&2n-3&\cdots&n-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$$

例 2. 设 a，b，c 是互异的实数，证明：

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=0$$

的充要条件是 $a+b+c=0$.

证明：考察范德蒙行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&y\\a^2&b^2&c^2&y^2\\a^3&b^3&c^3&y^3\end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(b-a)(a-y)(b-y)(c-y)$$

$= -(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)y^2 + \Lambda$

行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ 即为 y^2 前的系数．于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$$

所以 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$ 的充要条件是 $a+b+c=0$.

例 3 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & x+a_1 \end{vmatrix}$

解：方法 1 递推法按第 1 列展开，有

$$D_n = xD_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} -1 & & & & \\ x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1} = xD_{n-1} + a_n$$

由于 $D_1 = x + a_1$，$D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$，于是 $D_n = xD_{n-1} + a_n = x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = x^2 D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n = \cdots = x^{n-1}D_1 + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

方法 2 第 2 列的 x 倍，第 3 列的 x^2 倍，$\cdots$，第 n 列的 x^{n-1} 倍分别加到第 1 列上

$$D_n \overset{c_1 + xc_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2 & x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + xa_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+x^2c_3}{=}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x^3 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+xa_{n-1}+x^2a_{n-2} & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots\cdots=\begin{vmatrix} 0 & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ f & & & \ddots & x \end{vmatrix}\overset{按r_n展开}{=}(-1)^{n+1}f\begin{vmatrix} -1 & & & & \\ x & -1 & & & \\ & x & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1}=$$

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

方法 3 利用性质，将行列式化为上三角行列式.

$$D_n\underset{c_n+\frac{1}{x}c_{n-1}}{\overset{\substack{c_2+\frac{1}{x}c_1 \\ c_3+\frac{1}{x}c_2 \\ \cdots}}{=}}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & k_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{按c_n展开}{=}x^{n-1}k_n=x^{n-1}\left(\frac{a_n}{x^{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-2}}+\cdots+\frac{a_2}{x}+a_1+x\right)$$

$$=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n$$

方法 4 $D_n\overset{按r_n展开}{=}(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+$

$$(-1)^{n+2}a_{n-1}\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{2n-1}a_2\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2n}(a_1+x)\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}a_n+(-1)^{n+2}(-1)^{n-2}a_{n-1}x$$

$$+\cdots+(-1)^{2n-1}(-1)a_2x^{n-2}+(-1)^{2n}(a_1+x)x^{n-1}$$

$$=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n$$

例 4. 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \quad (b_1b_2\cdots b_n\neq 0)$$

解 采用升阶（或加边）法．该行列式的各行含有共同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，可在保持原行列式值不变的情况下，增加一行一列，适当选择所增行（或列）的元素，使得下一步化简后出现大量的零元素．

$$D_n \overset{\text{升阶}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \underset{\cdots r_{n+1}-r_1}{\overset{r_2-r_1,\ r_3-r_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$\underset{j=2,\cdots,n+1}{\overset{c_1+\frac{1}{b_{j-1}}c_j}{=}} \begin{vmatrix} 1+\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_1}{b_1} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = b_1b_2\cdots b_n\left(1+\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right)$$

这个题的特殊情形是

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix} = x^{n-1}\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

可作为公式记下来.

例 5. 计算 n 阶“三对角”行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

解方法 1　递推法.

$$D_n \overset{\text{按}c_1\text{展开}}{=} (\alpha+\beta)D_{n-1} - \begin{vmatrix} \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$\overset{\text{按}r_1\text{展开}}{=} (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

即有递推关系式　$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$　$(n \geq 3)$

故 $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$

递推得到 $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3})$

$$= \cdots = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1)$$

而 $D_1 = (\alpha+\beta)$，$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$，代入得 $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n$

$$D_n = \alpha D_{n-1} + \beta^n \quad (2.1)$$

由递推公式得

$$D_n = \alpha D_{n-1} + \beta^n = \alpha(\alpha D_{n-2} + \beta^{n-1}) + \beta^n$$

$$= \alpha^2 D_{n-2} + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n = \cdots$$

$$= \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n = \begin{cases} \dfrac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}, & \text{当 } \alpha \neq \beta \text{ 时} \\ (n+1)\alpha^n, & \text{当 } \alpha = \beta \text{ 时} \end{cases}$$

方法 2　把 D_n 按第 1 列拆成 2 个 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha\beta \end{vmatrix}$$

上式右端第一个行列式等于　αD_{n-1}，而第二个行列式

$$\begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha\beta \end{vmatrix} \overset{c_i - \alpha c_{i-1}}{\underset{i=2,\cdots,n}{=}} \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta \end{vmatrix} = \beta^n$$

于是得递推公式 $D_n = \alpha D_{n-1} + \beta^n$，已与（2.1）式相同.

方法 3　在方法 1 中得递推公式

$$D_n = (\alpha+\beta) D_{n-1} - \alpha\beta\ D_{n-2}$$

又因为当 $\alpha + \beta$ 时　　$D_1 = \alpha + \beta = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)^3 - 2\alpha\beta\ (\alpha+\beta)$$

$$= (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2) = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta}$$

于是猜想 $D_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$，下面用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，等式成立，假设当 $n \le k$ 时成立.

当 $n=k+1$ 是，由递推公式得

$$D_{k+1} = (\alpha+\beta) D_k - \alpha\beta\ D_{k-1}$$

$$= (\alpha+\beta)\frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta} - \alpha\beta \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{k+2} - \beta^{k+2}}{\alpha - \beta}$$

所以对于 $n \in N^+$，等式都成立

例 6. 计算 n 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解这道题有多种解法.

方法 1 化为上三角行列式

$$D_n\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,\cdots,n}{=}}\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & & & a_n\end{vmatrix}\overset{c_1+\frac{a_1}{a_j}c_j}{\underset{j=2,\cdots,n}{=}}\begin{vmatrix}b & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\end{vmatrix}$$

其中 $b=1+a_1+a_1\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}=a_1\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$，于是 $D_n=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$.

方法 2 升阶（或加边）法

$$D_n\overset{\text{升阶}}{=}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,\cdots,n+1}{=}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1+\frac{1}{a_j}c_{j+1}}{\underset{j=1,2,\cdots,n}{=}}\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_j} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

方法 3 递推法. 将 D_n 改写为

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1+0\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1+0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按}c_n\text{拆开}}{=}\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 0\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

由于 $$\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}\overset{r_i-r_n}{\underset{i=1,\cdots,n-1}{=}}\begin{vmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \overset{按c_n展开}{=} a_n D_{n-1}$$

因此 $D_n = a_n D_{n-1} + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$ 为递推公式，而 $D_1 = 1 + a_1$，于是

$$D_n = a_n D_{n-1} + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{D_{n-1}}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right)$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{D_{n-2}}{a_1 a_2 \cdots a_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right) = \cdots\cdots$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{D_1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right)$$