测试题解答 4.7

(1) 永真式. 该公式是重言式 $p\to(q\to p)$的代换实例.

(2) 矛盾式. 任给一个解释和赋值, 显然,对任意的 x, $F(x)\to F(x)$为真, 故 $\forall x(F(x)\to F(x))$为真. 而对所有的 y, $G(y)\wedge\neg G(y)$为假,故$\exists y(G(y)\wedge\neg G(y))$为假.从而, 在这个解释和赋值下, $\forall x(F(x)\to F(x))\to\exists y(G(y)\wedge\neg G(y))$为假. 由解释和赋值的任意性, 得证这是矛盾式.

(3) 非永真式的可满足式. 取解释 I_1, 个体域只含一个元素 $D=\{a\}$, 公式变成 $F(a,a)\to F(a,a)$, 显然为真, 故公式不是矛盾式. 又取解释 I_2 如下：个体域为自然数集, $F(x,y)$: $x=y$. 在 I_2 下, 公式被解释为$\forall x\exists y(x=y)\to\exists x\forall y(x=y)$, 前件为真, 后件为假, 蕴涵式为假, 故公式不是永真式.

(4) 永真式. 在任何解释下, 如果前件$\exists x\forall yF(x,y)$为真, 即存在 x, 设为 a, 使得$\forall yF(a,y)$为真. 于是, 对任意的 y, $F(a,y)$为真, 亦即$\exists xF(x,y)$为真, 从而后件 $\forall y\exists xF(x,y)$为真. 因此, 蕴涵式为真. 得证公式为永真式.

(5) 非永真式的可满足式. 当 $F(x,y)$满足对称性时, 如 $F(x,y)$: $x=y$, 公式为真. 当 $F(x,y)$不满足对称性时, 如 $F(x,y)$: $x>y$, 公式为假. 不难证明该式既不是永真式也不是矛盾式.

测试题解答 4.8

(1) 非永真式的可满足式. 注意公式中 x 的第一次出现是自由出现. 当个体域只含一个元素 a 时, 该式为 $F(a)\to F(a)$, 为真, 得证公式是可满足的. 又取解释 I 和赋值σ如下: 个体域为实数集, $F(x)$:$x>0$, $\sigma(x)=1$. 在解释 I 和赋值σ下, 公式为$(1>0)\to\forall x(x>0)$, 为假, 得证公式不是永真式.

(2) 非永真式的可满足式. 可类似(1)证明.

(3) 永真式. 在任何解释和赋值下, 如果前件$\forall x(F(x)\to G(x))$真, 即对所有的 x, $F(x)$为真蕴涵 $G(x)$为真. 于是, 当后件$\forall xF(x)\to\forall xG(x)$中的$\forall xF(x)$为真时, 即对每一个 x 都有 $F(x)$为真, 必有对每一个 x 都有 $G(x)$为真, 亦即$\forall xG(x)$为真, 从而后件为真. 故该式为永真式.

(4) 非永真式的可满足式. 当个体域只含一个元素 a 时, 公式被解释为 $(F(a)\to G(a))\to(F(a)\to G(a))$, 这是真命题, 故公式不是矛盾式. 只要解释使得

$\forall xF(x)$和$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$都为假，整个公式就为假，从而公式不是永真式．这样的的解释不难给出．

测试题解答 4.9

证(1) 这个公式是闭式，只需考虑解释．设 I 为任意的解释，对个体域中任意的 x，$F(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x))$为真．于是，该式在任何解释下均为真，故为永真式．

(2)该式是假言推理定律$(p\rightarrow q)\wedge p\Rightarrow q$ 的代换实例，故为永真式．

测试题解答 4.10

证 (1)这是矛盾式$\neg(p\rightarrow q)\wedge q$ 的代换实例，故为矛盾式．

(2)这个公式是闭式，只需考虑解释． 在任何解释下，对任意的 x，式中的蕴涵式，总是前件为真，后件为假，因而蕴涵式为假，所以公式为矛盾式．