测试题解答 12.6

证 令$|A|=k$，按照$k=0,1,\cdots,n$将有序对$\langle A,B\rangle$进行分类. 对于给定的k，先选A，方法数是$C(n,k)$；每个B都含有A的元素，不同的B取决于剩下的$n-k$个元素的选择. 每个元素都有“加入”或“不加入”2种选法，因此有2^{n-k}个不同的B集合. 由乘法法则，这样的$\langle A,B\rangle$有$C(n,k)2^{n-k}$个，再使用加法法则和二项式定理，从而得到

$$N=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)2^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)1^{k}2^{n-k}=(1+2)^{n}=3^{n}$$

本题存在更简单的 计数方法——分类处理. 直接考虑对$\langle A,B\rangle$的选择. S中的每个元素可以有3种选法：同时加入A和B，不加入A但加入B，A和B都不加入；只有“加入A但不加入B”的选法与题目条件不符. 因此，n个元素总共3^n种选法.

测试题解答 12.7

先选出k个数，$k=2,3,\ldots,n$，方法数是$C(n,k)$. 下面考虑对选定的k个数分两组的问题. 由于第一组的最小数大于第二组的最大数，每种分组对应于确定两组划分的边界，有$k-1$种划法. 于是得到

$$\begin{aligned}N&=\textstyle\sum_{k=2}^{n}(k-1)C(n,k)\\&=\textstyle\sum_{k=2}^{n}kC(n,k)-\sum_{k=2}^{n}C(n,k)\\&=n2^{n-1}-C(n,1)-(2^{n}-n-1)\\&=n2^{n-1}-n-2^{n}+n+1=(n-2)2^{n-1}+1\end{aligned}$$

测试题解答 12.8

证 (1)

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-2}{m-2}+\ldots+\binom{n-m+1}{1}+\binom{n-m}{0}$$

$$=\left[\binom{n+1}{m}-\binom{n}{m-1}\right]+\left[\binom{n}{m-1}-\binom{n-1}{m-2}\right]+\ldots+\left[\binom{n-m+2}{1}-\binom{n-m+1}{0}\right]+1$$

$$=\binom{n+1}{m}-\binom{n-m+1}{0}+1=\binom{n+1}{m}$$

(2) 根据教材中例 12.7(1)与公式 12.4 有

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

将上述两式相加得 $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2)$

(3) 使用二项式定理.

$$\begin{aligned}
&(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \\
&\Rightarrow \int_0^x (1+x)^n\,dx = \sum_{k=0}^{n}\int_0^x \binom{n}{k}x^k\,dx \\
&\Rightarrow \frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}
\end{aligned}$$

在上式中令 $x=-1$ 得

$$\frac{-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}$$

从而得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} - \binom{n}{0}(-1) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

(4) 令 $A=\{1,2,\cdots,m\}$为红数集合，$B=\{1,2,\cdots,m\}$为兰数集合．从 $A\cup B$ 中选出 n 个数的集合 C，使得同一个数不能出现 2 次，即不能同时含有红、兰 2 个相同的数.

一种方法是分类处理．从 A 中选 k 个，从 B 中去掉这 k 个数，然后再选 $n-k$ 个，对 k 求和得到 $N = \sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}$．另外一种方法是分步处理．先确定 n 个数，有 $\binom{m}{n}$ 种方法，再对选出的 n 个数确定颜色有 2^n 种方法，由乘法法则有 $N = 2^n\binom{m}{n}$.

对于某些问题可能存在多种证明方法，一般可以根据情况从下述方法中选择.

- 已知恒等式代入并化简；
- 使用二项式定理比较相同项的系数，或者进行级数的求导或者积分；

● 数学归纳法；

● 构造组合计数问题（比如选取问题、非降路径问题等），使得等式两边都等于这个问题的计数结果.

测试题解答 12.9

(1) 根据 Pascal 公式逐步归并相邻的两项可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m}\binom{n-m+k}{k}=\binom{n-m+0}{0}+\binom{n-m+1}{1}+\ldots+\binom{n}{m}\\
&=\left[\binom{n-m+1}{0}+\binom{n-m+1}{1}\right]+\binom{n+m+2}{2}+\ldots+\binom{n}{m}\\
&=\left[\binom{n-m+2}{1}+\binom{n-m+2}{2}\right]+\binom{n-m+3}{3}+\ldots+\binom{n}{m}\\
&=\ldots=\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m}
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n-k}{n}\\
&=\sum_{k=0}^{2n}\binom{k}{n}=\binom{2n+1}{n+1}=\binom{2n+1}{n}
\end{aligned}$$

求和或化简公式常用的方法一般有下述几种：

● 利用 Pascal 公式不断归并相关的项；

● 级数求和；

● 观察和的计算结果，然后使用归纳法证明；

● 利用已知的恒等式代入.

为了使得计算简单，注意要不断对所得到的公式进行化简.