刚体的定点转动

本节导读

- 转动瞬轴、本体极面、空间极面
- 欧拉角、欧拉运动学方程
- 标量、矢量、张量的定义
- 惯性张量和惯性主轴
- 欧拉动力学方程

定轴转动

$\theta(t) = ?$ ⟵ $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$ $\xleftarrow{L = I\omega}$ $M = \dot{L}$

最终目标

定点转动

$\omega(t)$与$\vec{L}$

的关系？

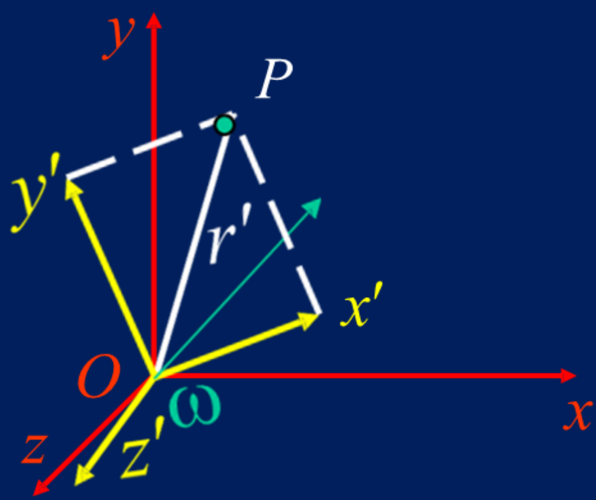
$\{q_i(t)\}$ ⟵ $\{\dot{q}_i(t)\}$与$\omega(t)$的关系？ ⟵ $M = \dot{L}$

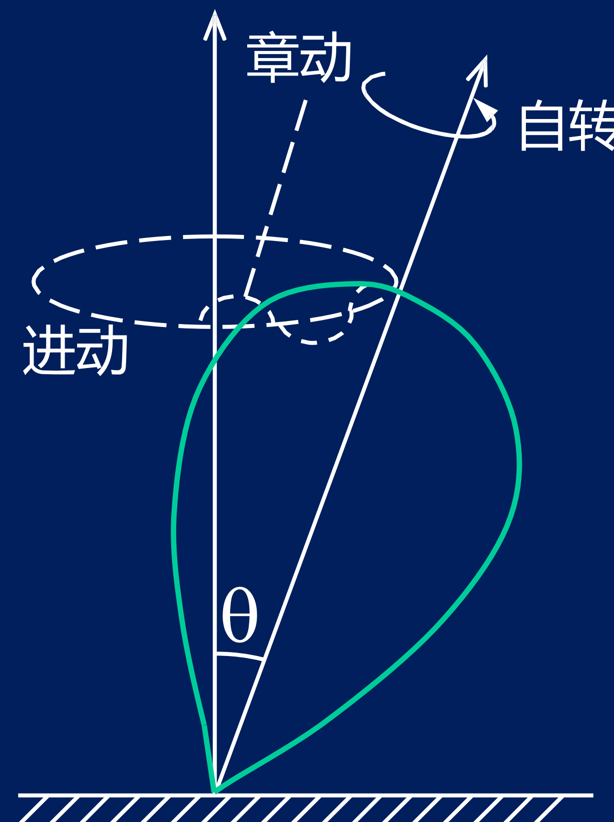
最终目标

$\{q_i\}$有哪些？

刚体的定点转动

刚体定点转动：刚体绕一固定点的运动。绕固定点转动的刚体只有一点不动，而其余各点则分别在以该固定点为中心的同心球面上运动。

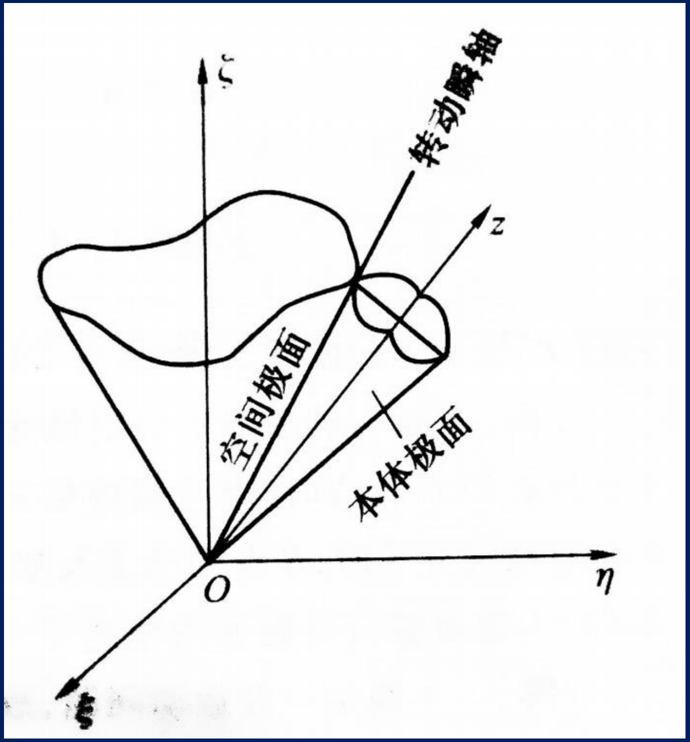




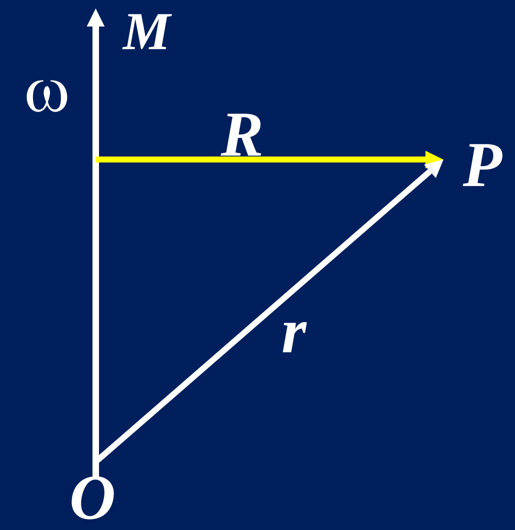
可以用三个角度坐标描述，自由度为3

转动瞬轴、本体极面、空间极面

定点转动时，任意时刻总能在刚体坐标系内找到一个转轴，其上速度为零，称为**转动瞬轴**。角速度矢量ω在空间的取向沿转动瞬轴，会随时间变化。它在空间描绘一个以O为顶点的锥面叫**空间极面**，在刚体坐标系内所描绘的锥面则叫**本体极面**。



设在某一瞬时, 刚体的角速度是ω, 取向沿着该时刻的转动瞬轴*OM*, 如图所示. 在此瞬时，刚体内任一点*P*的线速度



$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

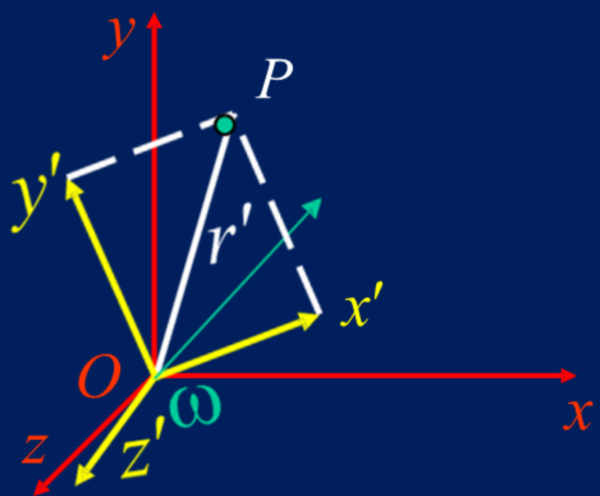
刚体绕固定点*O*转动时，则体内任一点*P* 的线加速度为

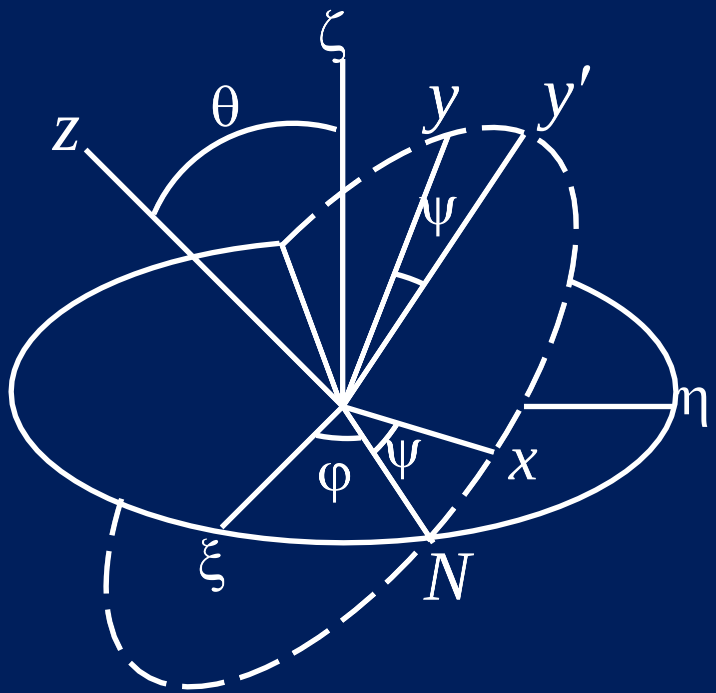
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\underline{\vec{\omega}\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\right)-\omega^{2}\vec{r}}$$

转动加速度　向轴加速度

欧拉角

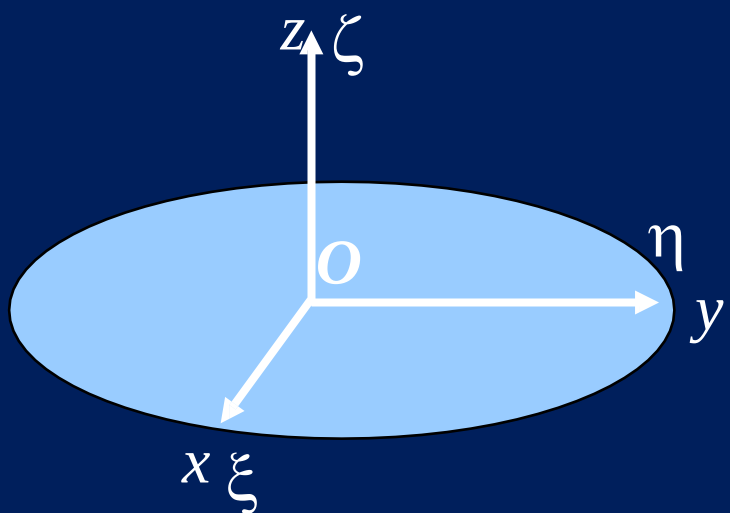




刚体定点转动时,选定点为坐标系原点,用三个独立角度来确定转动轴在空间的取向和刚体绕这轴所转过的角度.这三个能够独立变化的角度叫做欧拉角.

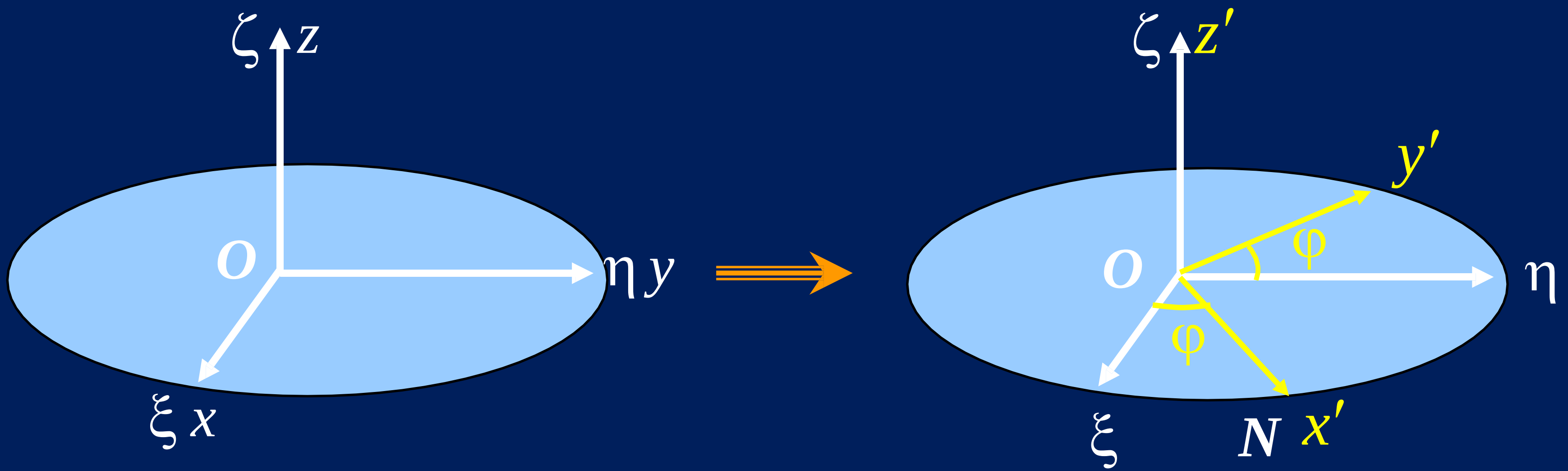
欧拉角

(1) 取两组右手正交坐标系, 它们的原点都在定点***O***上.



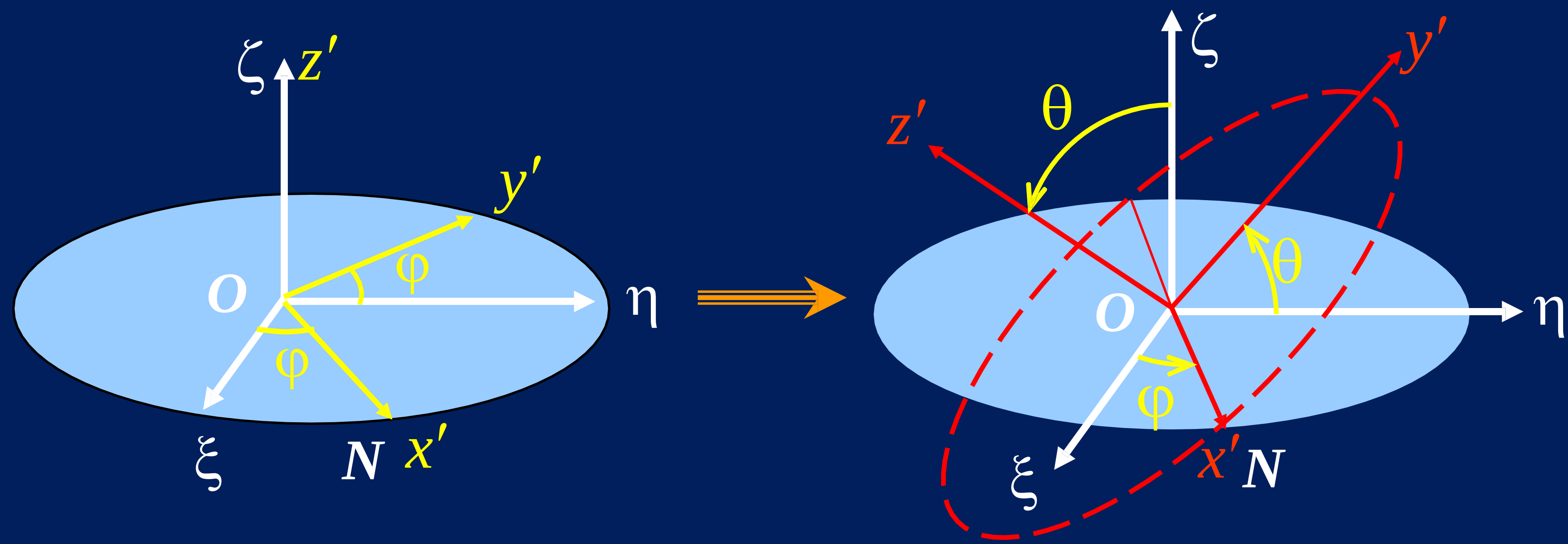
(2) 坐标系$\boldsymbol{O}$-ξηζ 固定不动, 坐标系$\boldsymbol{O\text{-}xyz}$ 固定在刚体上随之一起转动.

假定O-$\xi\eta\zeta$ 系和O-xyz系开始重合, 令O-xyz绕ζ 轴逆时针转动φ , 于是x轴和ξ 轴分开， y 轴和η轴分开, 而且Ox轴转到Ox'(即ON);



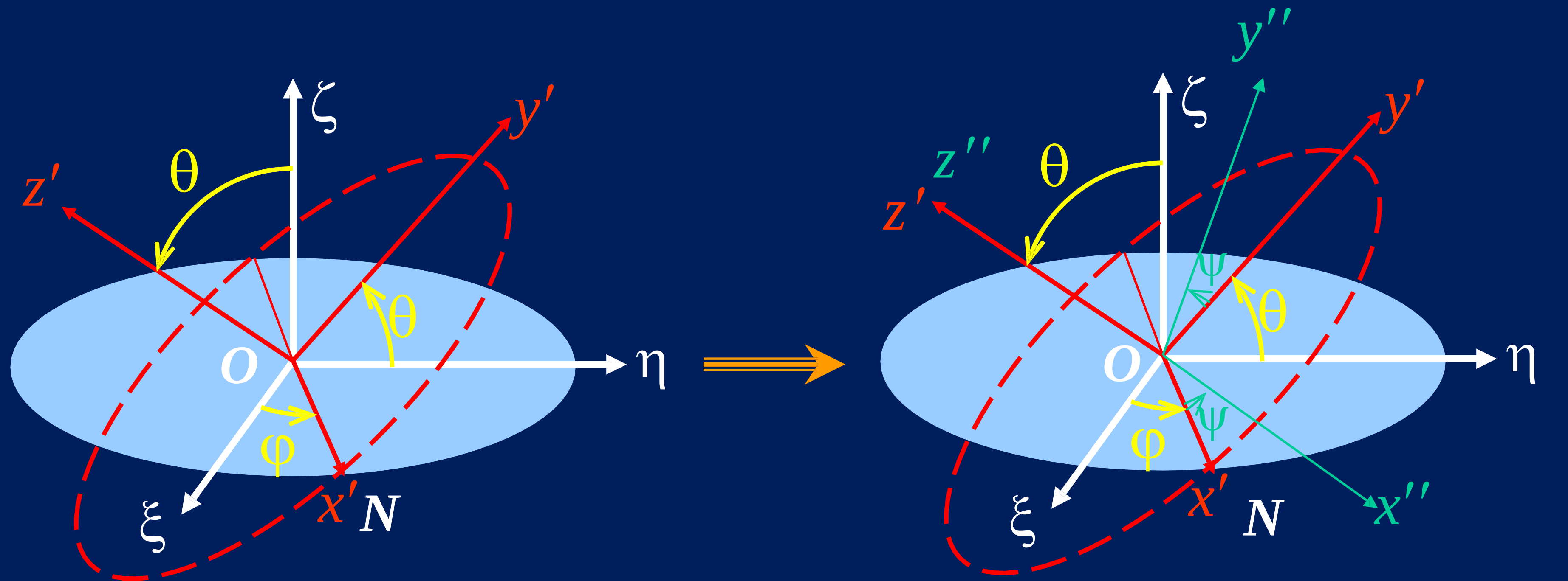
进动角 φ

然后令活动系绕ON转动θ，于是z轴和ζ轴分开，活动系三个轴变到 x'，y' 和 z'， z'和ζ 轴夹角是θ， $x'Oy'$平面和$\xi O\eta$平面夹角是θ .

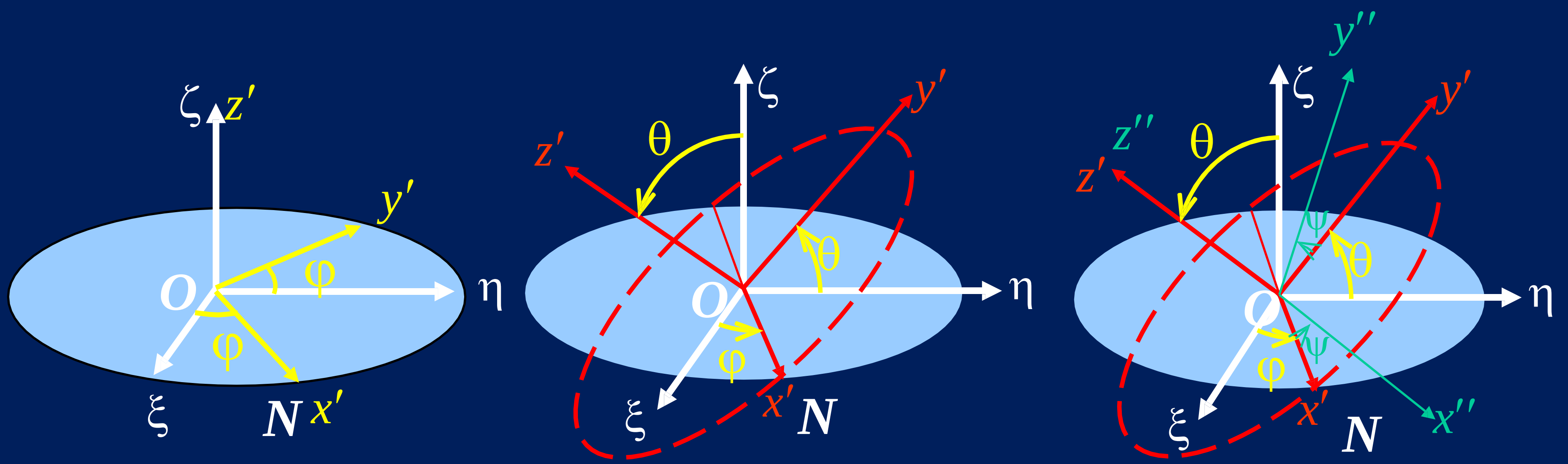


章动角 θ

最后，令活动系绕z轴转动ψ，这时Ox'和Ox''夹角是ψ，Oy'和Oy''夹角也是ψ，这时，活动系为$Ox''y''z''$.

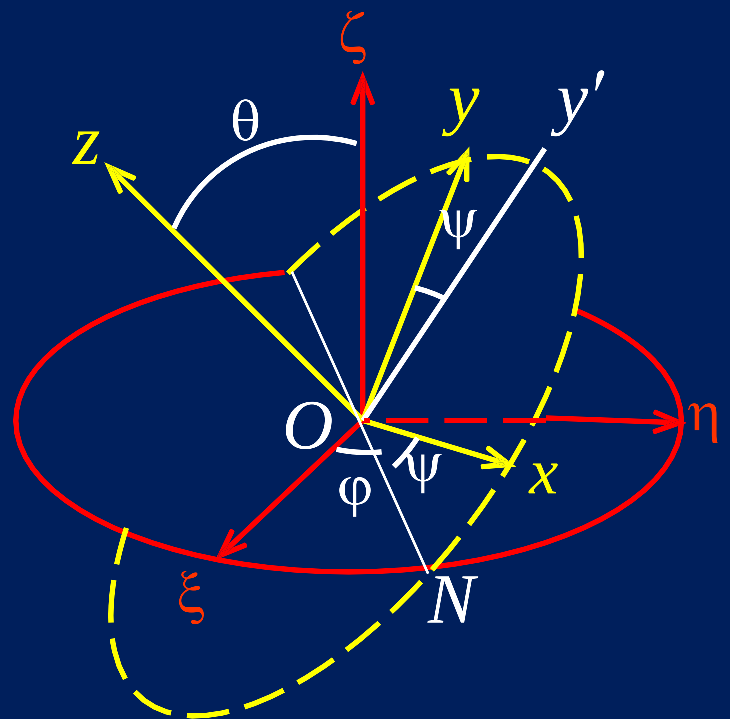


自转角 ψ



欧拉角的变化范围:

$$0 \le \varphi \le 2\pi \qquad 0 \le \psi \le 2\pi \qquad 0 \le \theta \le \pi$$



$\xi O\eta$ 平面和xOy 平面的交线ON 称节线. ON和$O\xi$间的夹角φ是一个欧拉角(进动角). ON和Ox间的夹角ψ是另一个欧拉角(自转角). $O\zeta$和Oz间的夹角θ是第三个欧拉角(章动角).

由图知: z轴垂直ON, 故z 轴位置与N 有关, 因此z 轴位置要用θ 与φ 两个角来确定. ψ为系统绕z轴转动的角.

定轴转动

$\theta(t)=?$ $\leftarrow$ $\dot{\theta}(t)=\omega(t)$ $\leftarrow$ $L=I\omega$ $\leftarrow$ $M=\dot{L}$

最终目标

定点转动

$\{q_i(t)\}$ $\leftarrow$ $\{\dot{q}_i(t)\}$与$\omega(t)$的关系? $\leftarrow$ $\omega(t)$与$\vec{L}$的关系? $\leftarrow$ $M=\dot{L}$

最终目标

$\{q_i\}$有哪些?

欧拉角

欧拉运动学方程

$$
\begin{cases}
\omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\,\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\
\omega_y = \dot{\varphi}\sin\theta\,\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\
\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}
\end{cases}
$$

ω_x ω_y ω_y 是角速度在刚体坐标系下的分量

定轴转动

$\theta(t)=?$ ⟸ $\dot{\theta}(t)=\omega(t)$ ⟸ $L=I\omega$ ⟸ $M=\dot{L}$

最终目标

定点转动

$\{q_i(t)\}$ ⟸ $\{\dot{q}_i(t)\}$与$\omega(t)$的关系? ⟸ $\omega(t)$与$\vec{L}$的关系? ⟸ $M=\dot{L}$

最终目标

⇓

$\{q_i\}$有哪些?

欧拉运动学方程

欧拉角