测试题解答 12.4

(1) $\sum_{i=0}^{7}\binom{i+3-1}{i}=120$.

(2) n 元集上可定义的函数个数为 n^n，其中双射函数个数为 $n!$，单调上升函数个数为 $C(2n-1,n)$. 若 $n=4$，则有 $4^4=256$，$4!=24$, $C(7,4)=35$.

(3) 使用一一对应的方法. 设选出的 n 个不相邻的数为 $i_1, i_2,\cdots,i_n$，其中 $i_1<i_2<\cdots<i_n$，且 $i_j+1\neq i_{j+1}$, $j=1, 2,\cdots, n-1$. 令 $k_j=i_j-j+1$, $j=1,2,\cdots,n$. 显然，$i_1,i_2,\cdots,i_n$ 与 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 之间是一一对应的. 例如选出的不相邻的数 i_1,i_2,i_3,i_4 是 2,5,7,10，那么对应的数 k_1,k_2,k_3,k_4 是：2,4,5,7. 给定一组 $i_1, i_2,\cdots,i_n$，就得到对应的一组 $k_1,k_2,\cdots,k_n$；反之，给定一组 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，也可以得到一组对应的 $i_1, i_2,\cdots,i_n$. 因为 $i_n\leqslant m$，即 $k_n\leqslant m-n+1$. $\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$恰好是$\{1,2,\cdots,m-n+1\}$的一个 n 组合，因此所求选法数是 $C(m-n+1,n)$.

测试题解答 12.5

证 设 $n^2=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_t^{\alpha_t}$，其中$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ 是偶数. 设 m 是 n^2 的正因子，那么 m 具有下述形式：$m=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\ldots p_t^{s_t}$，其中 $s_i\in\{0,1,\cdots, \alpha_i\}$. s_i 有α_i+1 种选择，根据乘法法则，正因子数 $N=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_t+1)$. 由于每个$\alpha_i$ 都是偶数，因此 N 为奇数.