牛顿力学部分

归纳总结

质点运动学

位矢 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 从坐标原点指向质点所在位置的有向线段

位矢的大小为质点距原点的距离 $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

运动学方程 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ 即位矢随时间变化的函数

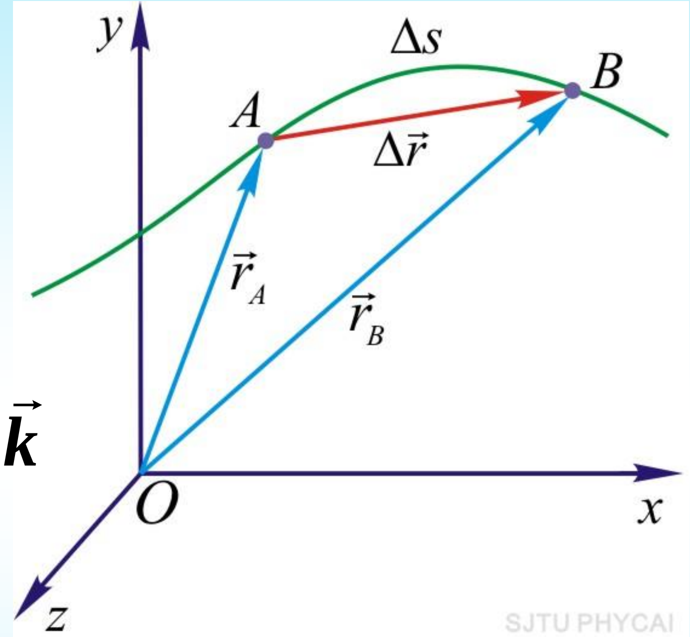
或可写成分量方程 $x = x(t)$；$y = y(t)$；$z = z(t)$

轨迹方程 将运动方程中的时间消去，得到y关于x 的函数，即是质点运动的轨迹方程。

位移

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \overrightarrow{AB}$$

是矢量，为初末位置的<u>位矢做矢量减法</u>



在直角坐标系中：

$$\Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

路程

$$\Delta s = \overset{\frown}{AB}$$

标量，只有大小，等于沿轨迹运动的某段曲线的长度。

平均速度 $\bar{\vec{v}}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ 是矢量，分子上是位移，初末位置的<u>**位矢做矢量减法**</u>，平均速度的方向与位移的方向相同

平均速率 $v=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 标量，平均速度的大小并不等于平均速率。

瞬时速度 $\vec{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\ ,\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\ ,\quad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$v=|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

瞬时速率 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 瞬时速度的大小等于瞬时速率

平均加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

瞬时加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

对于速度或加速度随时间变化的情况，求解第二类问题要**做积分**，不要随便套用高中的匀速或匀加速公式

$$\cancel{v = \frac{r}{t}},\quad \cancel{a = \frac{v}{t}},\quad \cancel{r = vt},\quad \cancel{\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}}$$

会求解运动学的两类问题

（1）已知质点的运动方程，求质点在任意时刻的位置、速度和加速度。

解决这类问题需要用微分法

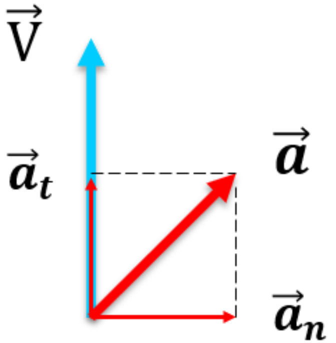
（2）已知质点运动的加速度或速度及初始条件，求质点的运动方程。

解决这类问题需要用积分法

积分常数由初始条件确定，初始条件指，零时刻的位置和速度

瞬时加速度平行分量与垂直分量

加速度的自然坐标系分解



$\vec{a}_t \Rightarrow$ 改变速度的大小

$\vec{a}_n \Rightarrow$ 改变速度的方向

圆周运动

$$\vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_t$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$

一般曲线运动

$$\vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_t$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

其中V是速率随时间变化的函数，即：

$$v = v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}$$

先求出这一标量函数的形式，再求导，再在某一时刻取值，即可求出某时刻切向加速度的大小

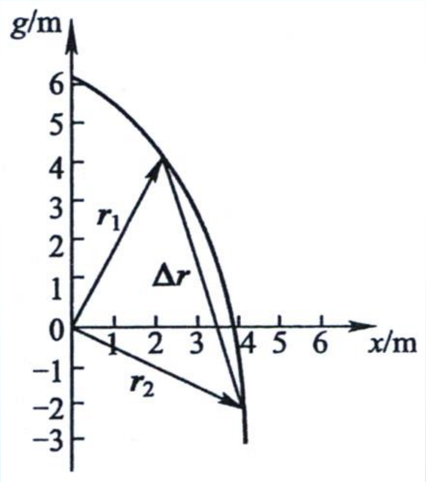
例题1-1

已知质点的运动方程，$\vec{r} = 2t\vec{i} + (6 - 2t^2)\vec{j}$

（1）求质点的轨迹，并作图表示；

（2）求$t_1 = 1\text{s}, t_2 = 2\text{s}$ 之间的平均速度；

（3）求$t_1 = 1\text{s}, t_2 = 2\text{s}$ 两时刻的速度和加速度；



质点动力学

牛顿定律

1、牛顿三定律：　惯性、力、作用力、反作用力

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\begin{cases} F_x = \sum_i F_{ix} = m\dfrac{dv_x}{dt} = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ F_\tau = \sum_i F_{i\tau} = ma_\tau = m\dfrac{dv}{dt} \\ F_n = \sum_i F_{in} = ma_n = m\dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

2、牛顿定律的瞬时性、矢量性

3、牛顿定律适用范围：宏观、低速

5、力的叠加原理

6、常见力　基本力　非惯性系　惯性力

建立运动微分方程

1. 自由质点

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\vec{F}(\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt},t)$$

解微分方程:

万有引力、弹性力、电磁场对电荷的作用力、摩擦力、介质阻力等.

例题1-2

已知质点做匀加速直线运动，加速度

（1）a =常量；　（2）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k_1 t}$　；（3）$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{k_2 v}$

求质点在任意时刻的速度和运动学方程（开始时$x=x_0$，$v=v_0$，k_1,k_2,k_3为正值常量）。

4、设(x，y)平面内分布有一力场，函数形式为:

$$\vec{F}=\left(x^2y,x+y\right)$$

有一质点从原点出发，按两种方式运动：(1)沿着y=2x这条直线运动到(2,4)点处；(2)先沿着x轴运动到(2,0)点，再从(2,0)出发，沿平行于y轴的方向运动到(2,4)点处。求这两种运动方式下力F做的功分别等于多少，这是保守力吗?

单个质点

牛顿运动定律的积分形式

只适用于惯性系

动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

动能定理 $\int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$

变力要做积分！

冲量是矢量，功是标量

在直角坐标系：

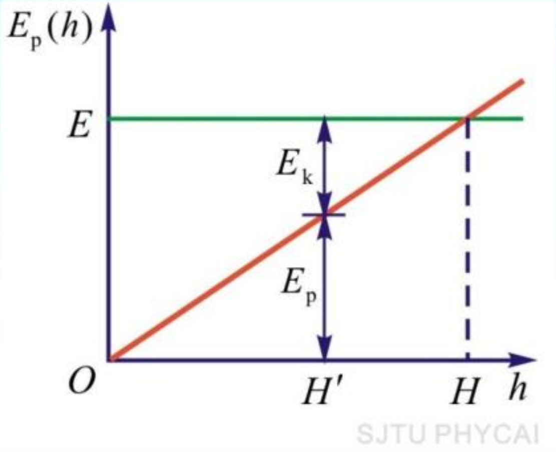
$$I_x = \int_{t_0}^{t} F_x \mathrm{d}t = mv_x - mv_{x0}$$

$$I_y = \int_{t_0}^{t} F_y \mathrm{d}t = mv_y - mv_{y0}$$

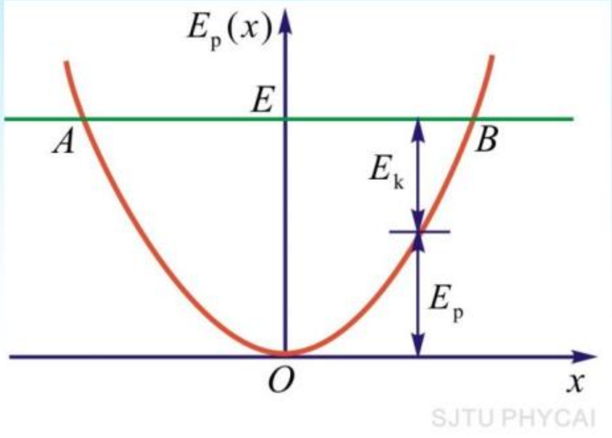
$$I_z = \int_{t_0}^{t} F_z \mathrm{d}t = mv_z - mv_{z0}$$

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}r} = \int_a^b (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z)$$

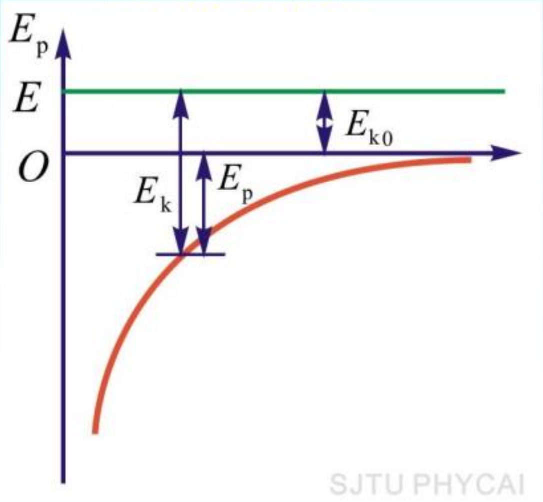
重力



弹力



万有引力



$$\boldsymbol{F}_{保} = -\frac{dE_p}{dx}$$

已知势能曲线，求相应的保守力，求导再取负值

知道势能和势能曲线的意义，会由势能曲线求出相应的保守力，记得常见保守力(重力、弹力、万有引力)的势能函数和势能曲线

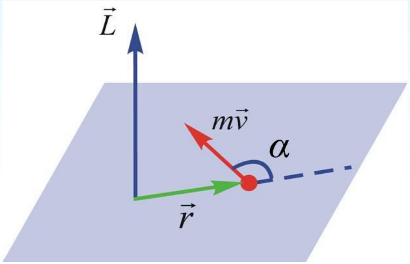
角动量和力矩的定义

质点对参考点O的角动量（angular momentum）：

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})$$

大小：$L=rmv\sin\alpha$

方向：右手螺旋定则确定



知道角动量是矢量，会判断角动量的方向，会用分量表达式计算角动量各个分量的大小

直角坐标分解式：

$$L_x=yp_z-zp_y$$

$$L_y=-(xp_z-zp_x)$$

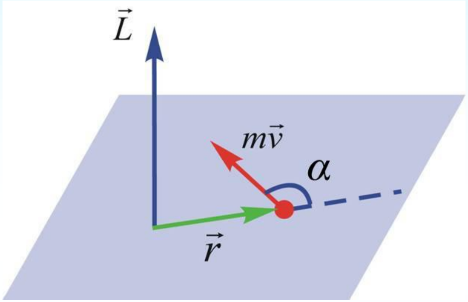
$$L_z=xp_y-yp_x$$

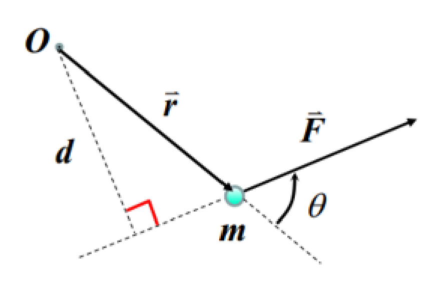
角动量依赖于原点的选取

$$\vec{L}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ p_x & p_y & p_z\end{vmatrix}$$

质点所受合外力矩等于它对同一参考点的角动量的时间变化率---质点的角动量定理

力矩决定角动量随时间的变化率，力矩的方向是角动量增量的方向





$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

- 角动量和力矩必须根据统一参考点来定义
- 角动量定理只在惯性系成立

——参考点没有加速度

若 $\vec{M}=0,$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0,\quad \vec{L}=\vec{L}_0$(常矢量)

角动量守恒定律（law of conservation of angular momentum）：如果作用在质点上的外力对某给定点的力矩为零，则质点对该点的角动量在运动过程中保持不变。

角动量守恒，则角动量大小不随时间变化，角动量方向不随时间变化， 每个分量的大小也不随时间变化

- 合外力为零时，力矩为零，角动量守恒
- 合外力不为零，但是为有心力场时，力矩也是零，角动量守恒

角动量：$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

描述物体转动

矢量：需要确定转动平面，
不能只用一个数字来描述

角动量的瞬时变化率：$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$

质点系的角动量定理：

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_i(\vec{r}_i\times\vec{F}_{i外})\,dt=\Delta\vec{L}$$

动量：$\vec{p}=m\vec{v}$

描述物体平动

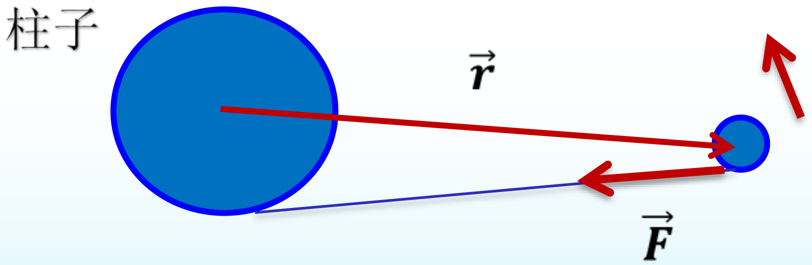
矢量

动量的瞬时变化率：$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}$

质点系的动量定理：

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum\vec{F}_{外}\,\mathrm{d}t=\Delta\vec{P}$$

例题： 如本题图，在光滑水平面上立一个圆柱，在其上缠绕一根细线，线的另一端系一个质点。给质点一个冲击力，使它开始绕柱旋转。在此后的时间里线越绕越短，质点的角动量如何变化？动量守恒吗？动能守恒吗？



角动量不守恒，逐渐减小