测试题解答 8.10

(1) card$S$=n，card$P(S)$=2^n；

(2) card$\mathbf{N}$=$\aleph_0$，card$\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}$=$\aleph_0$，cardP(N)= $\aleph$

(3) card$\mathbf{R}$=$\aleph$，card$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$=$\aleph$

(4) card$X$=$\aleph$

(5) card$T$=$\aleph_0$

(6) card$S$=36^6

测试题解答 8.11

(1) 令 f：$A\to B$, $f(x)=x$, 则 f 为单射函数，从而有 $A\preccurlyeq\cdot B$. 不一定得到 $A\prec\cdot B$. 对于无穷集 B 来说，可能与其真子集 A 等势. 例如 $\mathbf{Q}\approx\mathbf{N}$.

(2) 因为 $A\subseteq B$, 存在单射函数 f：$A\to B$, $f(x)=x$，因此 $A\preccurlyeq\cdot B$. 同理存在单射函数 g：$B\to C$. 又 $A\approx C$，故存在双射函数 h：$C\to A$, 因此 $g\circ h$：$B\to A$ 为单射，从而得到 $B\preccurlyeq\cdot A$. 综合上述有 $A\approx B$，根据等势的传递性有 $A\approx B\approx C$，因此 card$A$=card$B$=card$C$.

(3) card$(A-B)$不是可数的. 用反证法证明如下：

如果 card$(A-B)$是可数的，而 B 也是可数的，那么它们的并集也是可数的，从而得到 card$A$ = card$((A-B)\cup B)\le\aleph_0$, 从而 A 也是可数集，这与已知 card$A$=$\aleph$ 矛盾.

测试题解答 8.12

card$(A\times B)$=$\aleph_0$. 设 $A=\{0,1,\ldots\}$, $B=\{1,2,\ldots,n\}$，令

$$f : A\times B\to A$$

$$f(<i, j>) = n\,i + j-1,\ \forall i\in A, j\in B,$$

则可以证明 f 是 $A\times B$ 到 A 的双射.

假设存在$<i,j>,<k,t>$使得 $f(<i,j>)=f(<k,t>)$，即 $ni+j-1=nk+t-1$. 假设 $i\ne k$，不妨设 $i>k$，那么有 $n(i-k)=t-j$. 而 $n(i-k)\ge n$，与 $t-j<n$ 矛盾，从而证明了 $i=k$. 由 $i=k$ 不难得到 $j=t$. 这就证明了 f 的单射性.

$\forall y\in A$，令 y 除以 n 的商为 i，余数为 r，即 $y=ni+r$，其中 $i\in A$，

$r \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. 那么有

$f(<i, r+1>) = ni + r+1-1=ni+r=y$，

从而证明了 f 的满射性.