测试题解答 14.9

先验证封闭性. $\forall a,b\in\mathbf{Z}$ 有 $a*b$, $a\circ b\in\mathbf{Z}$, 下面验证结合律. 任取 $a,b,c\in\mathbf{Z}$

$$(a*b)*c = (a+b-1)*c = (a+b-1)+c-1 = a+b+c-2$$

$$a*(b*c) = a*(b+c-1) = a+(b+c-1)-1 = a+b+c-2$$

$$(a\circ b)\circ c =(a+b-ab)\circ c = (a+b-ab)+c-(a+b-ab)c$$

$$= a+b+c-(ab+ac+bc)+abc$$

$$a\circ(b\circ c) =a\circ(b+c-bc) = a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)$$

$$= a+b+c-(ab+ac+bc)+abc$$

1 为$*$运算的单位元. $2-a$ 为 a 关于$*$运算的逆元. $*$运算满足交换律, 所以 $\mathbf{Z}$ 关于$*$运算构成交换群, 关于$\circ$运算构成半群. 最后证明$\circ$关于$*$运算满足分配律.

$$a\circ(b*c) = a\circ(b+c-1) = a+(b+c-1)-a(b+c-1) = 2a+b+c-ab-ac-1$$

$$(a\circ b)*(a\circ c) = (a+b-ab)+(a+c-ac)-1$$

$$= a+b+a+c-ab-ac-1=2a+b+c-ab-ac-1$$

综合上述，$<\mathbf{Z}, *,\circ>$构成环.

测试题解答 14.10

(1) $(a+b)^2(b-a) = (a^2+ab+ba+b^2)(b-a) = a^2b+ab^2+bab+b^3-a^3-aba-ba^2-b^2a$

(2) 由第一个方程得到 $y=x-5$, 代入第二个方程得到 $3x=1$. 从而得到 $x=5$, $y=0$.

测试题解答 14.11

$R_1=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbf{R}\right\}$，其中 $\mathbf{R}$ 为实数集, 关于矩阵加法与乘法构成环. 它没有单位元，但是子环$S=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbf{R}\right\}$含有单位元$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

$R_2=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \mid a,b,c,d\in\mathbf{R}\right\}$关于矩阵加法与乘法构成环，单位元为单位矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$,它的子环$S=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \mid a\in\mathbf{R}\right\}$含有单位元$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$.