测试题解答 8.8

答案不唯一.

(1) f：$A\to B$, $f(T)=\chi_T$，其中 $T\subseteq\{a,b,c,d\}$，χ_T是 T 的特征函数，即：

$$\chi_T(x)=\begin{cases}1 & x\in T\\ 0 & x\in X-T\end{cases}$$

对任何集合 X，都存在双射函数 f：$P(X)\to\{0,1\}^X$，其中$\forall T\subseteq X$ 有 $f(T)=\chi_T$.

(2) 如图 8.1 所示，在 x 轴上画出 A 代表的区间，在 y 轴旁边画出 B 代表的区间. 直线 $y=-x+3$ 经过两点 $(-1,4)$和$(1,2)$，恰好构造了从 A 到 B 的双射函数. 因此得到

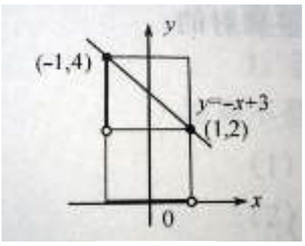

图 8.1

$$f：A\to B,\quad f(x)=-x+3$$

这种双射函数不是唯一的. 一般说来，只要 A 和 B 代表的区间是同类型的，即都是闭区间、开区间、或者都是半开半闭的区间，都可以利用过两点的直线方程构造双射函数.

(3) f：$A\to B$，$f(x)=\begin{cases}x-1 & x>0\\ |x| & x\le 0\end{cases}$

(4) f：$A\to B$，$f(x)=e^x$

(5) f：$A\to B$, $f(x)=\log_2 x+3$

容易看出 B 与自然数集合只不过相差几个元素, 先构造 A 到自然数集合的双射，然后再将对应关系进行适当的移位. 为构造集合 A 到自然数集合的对应，只需将 A 中的元素排列出一个顺序，并指定一个首元素. 然后从首元素开始对 A 中的元素进行“计数”，第一个元素对应于 0，第二个元素对应于 1,…, 第 n+1 元素对应于 n，…, 这就建立了 A 与自然数集合之间的双射. 令

$$g：A\to\mathbf{N},\ g(x)=\log_2 x$$

$$f：A\to B,\ f(x)=\log_2 x+3$$

则 f 为所求.

测试题解答 8.9

证 由于 $B\approx C$, 存在双射 f：$B\rightarrow C$, 令 g：$A\cup B\rightarrow A\cup C$,

$$g(x)=\begin{cases} x & x\in A \\ f(x) & x\in B \end{cases}$$

因为 $A\cap B=\varnothing$, 所以 g 是函数. 假若 $g(x_1)=g(x_2)$，若 $g(x_1)\in C$，则由于 $A\cap C=\varnothing$，$g(x_1)\notin A$, $f(x_1)=g(x_1)=g(x_2)=f(x_2)$，由于 f 的单射性，$x_1=x_2$. 如果 $g(x_1)\in A$，则由于 $A\cap C=\varnothing$，则 $x_1=g(x_1)=g(x_2)=x_2$，因此得到 $x_1=x_2$. 从而证明 g 的单射性.

对于任意 $y\in A\cup C$, 则 $y\in A$ 或 $y\in C$. 若 $y\in A$, 则 $y\in A\cup B$, 且 $g(y)=y$. 若 $y\in C$, 则存在 $f^{-1}(y)=x$, $x\in B$. 则 $x\in A\cup B$, 且 $g(x)=g(f^{-1}(y))=f(f^{-1}(y))=y$. 从而证明了 g 的满射性.

综合上述，根据等势定义有 $A\cup B\approx A\cup C$.