测试题解答 14.1

(1),(2),(4)构成代数系统，(3)不构成代数系统. 因为 $1\circ(-4)=4$，$4\notin X$.

测试题解答 14.2

(1) 满足交换律，不满足结合律，没有单位元和零元.

(2) 满足交换律和结合律，单位元为 0，零元是-1.

(3) 满足交换律和结合律，没有单位元，零元是 1.

(4) 不满足交换律，不满足结合律，没有单位元，也没有零元.

测试题解答 14.3

(1) 运算满足交换律和结合律，单位元是$\varnothing$，零元是$\{a,b\}$.

(2) 当 $S=\{a\}$时 $S^S=\{I_S\}$，运算满足交换律与结合律，I_S既是单位元也是零元. 当 S 不是单元集时，运算没有交换律，满足结合律，单位元为 I_S，没有零元.

(3) 当 $S=\{a\}$时，运算满足交换律和结合律，$\{<a,a>\}$既是单位元也是零元. 当 S 不是单元集时，运算只满足结合律. 单位元是单位矩阵，零元是全零矩阵.

(4) 运算满足交换律和结合律. 当 $n=1$ 时单位元为 1，$n>1$ 时没有单位元. 零元是 0.

本题需要考虑集合元素或参数的取值范围. 例如当(2)和(3)中的集合 S 为单元集时，$\circ$运算的性质与非单元集是不一样的. 类似的，当(4)中的 $n=1$ 为时$\circ$运算存在单位元，$n>1$ 时没有单位元.

测试题解答 14.4

$*$运算满足交换、结合、幂等律，不满足消去律. 单位元是 b；零元是 a；a,b,c 都是幂等元；可逆元只有 b, $b^{-1}=b$.

$\circ$ 运算满足结合律, 幂等律，不满足交换律和消去律. 没有单位元和零元，也没有可逆元素，a, b, c 都是幂等元.

$\bullet$ 运算不满足交换律、结合律、幂等律和消去律；没有单位元、零元、

可逆元素；只有 a 是幂等元.

通过运算表可以判别运算性质，也可以求运算的特异元素. 具体方法是：

- 如果运算表元素关于主对角线成对称分布，那么运算是可交换的，如上面的$*$运算.
- 如果主对角线元素的排列顺序与表头元素的排列顺序（上面例子中的 a,b,c）一样，那么运算是幂等的，如上面$*$和$\circ$运算.
- 如果运算表中某行或某列（除零元所在的行和列）有两个相同的元素，那么运算不满足消去律. 例如上述的$*$运算，不考虑零元 a 所在的行与列，在 c 所在的行与列中 c 都出现 2 次，即 $b*c=c*c$ 或者 $c*b=c*c$, 但没有 $b=c$. 因此，破坏了消去律.
- 如果一个元素所在的行和列的元素排列顺序都与表头元素排列顺序（上面例子中的 a,b,c）一致，那么这个元素是单位元. 如$*$运算表中的 b.
- 如果一个元素的行和列的元素都是这个元素自身，那么这个元素是零元.如$*$运算表中的 a，其所在的行和列元素全是 a，因此它是零元.
- 如果元素 x 在主对角线排列位置与表头位置一致，那么 x 是幂等元. 如$*$运算表中的 a. a 在表头和主对角线都是排在第一位. 类似的，b 与 c 也满足要求.
- 为判断结合律是否成立应该对 A 中所有元素 x, y, z 验证$(xy)z = x(yz)$是否为真. 如果 A 中有 n 个元素，必须验证 n^3 个等式. 注意到以下事实：如果 x, y, z 中存在单位元或者零元，那么等式一定成立. 因此验证只需对 A 中的非单位元和非零元进行. 例如对于$*$运算只需验证 $(c*c)*c = c*(c*c)$ 是否成立，显然这是成立的，因此满足结合律. 对于$\circ$运算，既没有单位元，也没有零元，这种简化验证的方法就不起作用了. 但是观察到$\circ$运算具有下述特征：每个元素都是左零元，即满足 $x\circ y=x$. 因此，无论是$(x\circ y)\circ z$ 还是 $x\circ(y\circ z)$都等于最左边的元素 x, 从而证明了结合律. 对于$\bullet$ 运算，上述方法都没有用. 观察运算表只有 $a\bullet b=b$，其他都是 a. 有可能在涉及到 $a\bullet b$ 的运算中破坏结合律. 由于$(b\bullet b)\bullet b =$

$a \bullet b = b \neq a = b \bullet a = b \bullet (b \bullet b)$, 因此$\bullet$ 运算不满足结合律.

测试题解答 14.5

(1) $f^{-1}=f$

(3) 单位元为<1,0>，当 $a \neq 0$ 时，$\langle a,b \rangle$的逆元是$\langle 1/a,-b \rangle$.

测试题解答 14.6

证 $\forall a,b,c \in A$，

$$a \circ b = a \circ c \Rightarrow a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c)$$

$$\Rightarrow (a^{-1} \circ a) \circ b = (a^{-1} \circ a) \circ c \Rightarrow e \circ b = e \circ c \Rightarrow b=c$$