刚体的平面平行运动

本节导读

- 刚体平面平行运动学
  - 刚体坐标系
  - 转动瞬心
  - 空间极迹和本体极迹
- 刚体平面平行运动的动力学方程
- 刚体平面平行运动的动能

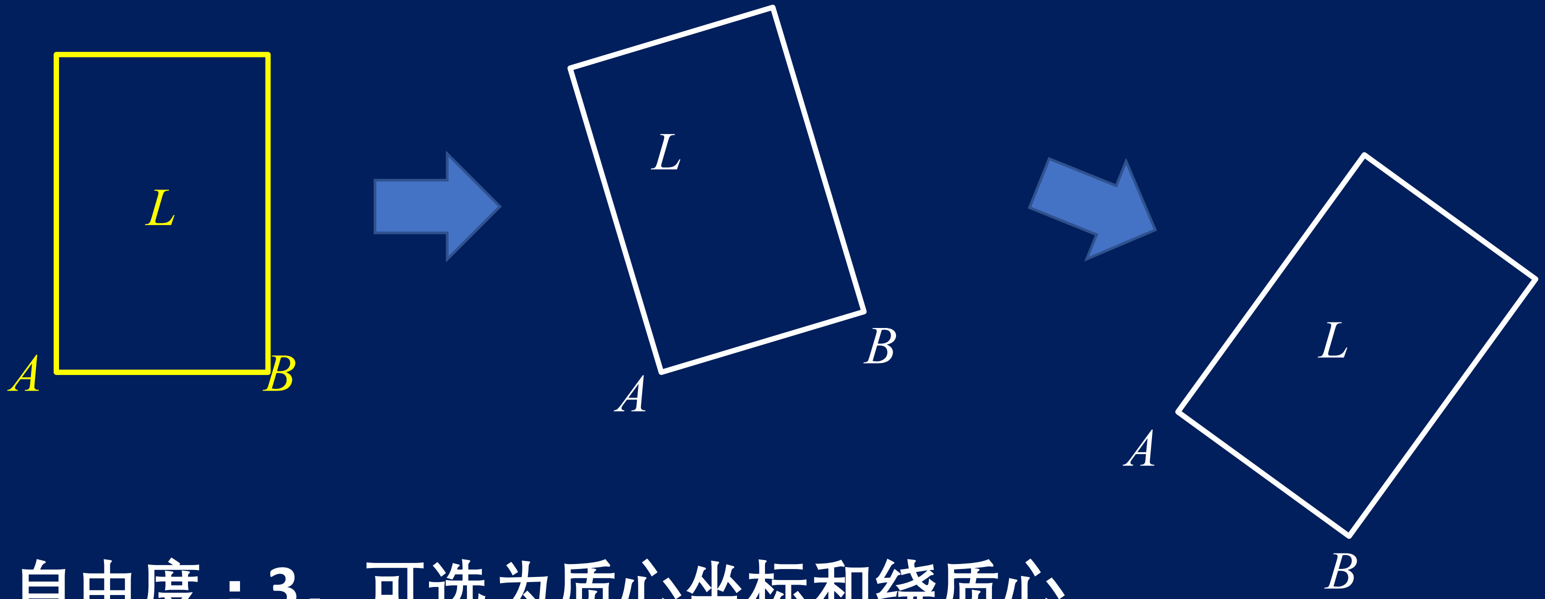
刚体运动的分类

	自由度	描述
刚体平动	3	内部任一点的坐标
刚体定轴转动	1	角坐标
刚体平面平行转动	?	?
刚体定点转动	?	?

自由度：任意时刻完全确定刚体的位形所需要的独立坐标的个数

1.平面平行运动运动学

刚体平面平行运动时，任一点都始终在平行于某一固定平面 的平面内运动. 只需研究刚体中任一和固定平面平行的截面(薄片)的运动，空间问题简化为平面问题.



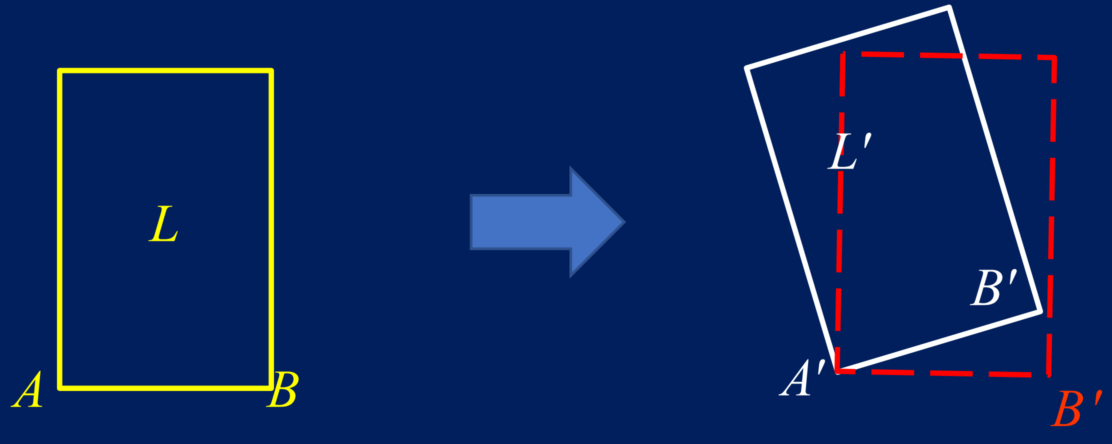
自由度：3，可选为质心坐标和绕质心旋转的角度

1.平面平行运动运动学

刚体平面平行运动的分解：

(i) 纯平动薄片上任何一点的位移都是 $\overline{AA'}$

(ii) 纯转动薄片绕A'点转动一个角度, $\angle B''A'B'$

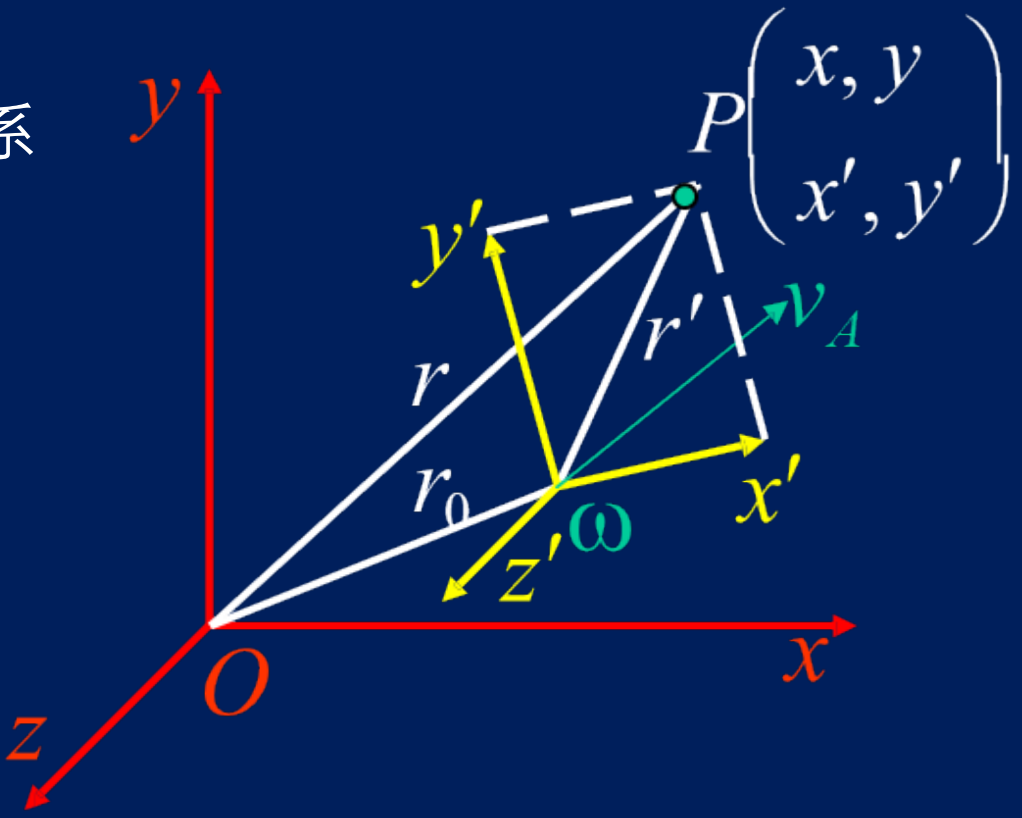


A点常叫基点

1.平面平行运动运动学

刚体坐标系

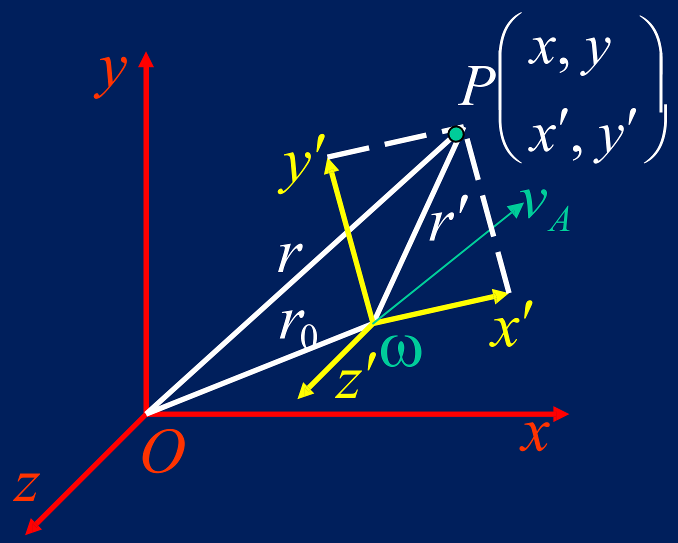
随刚体一起运动的坐标系



1.平面平行运动运动学

- 任一点的位置

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$



- 任一点的速度

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

角速度不随参考点的选择而改变

- 任一点的加速度

$$\vec{a} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) - (\vec{r} - \vec{r}_0)\omega^2$$

*A*点加速度　相对切向加速度　相对向心加速度

$$\vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{A} \cdot \vec{B}) - |\vec{A}|^2 \vec{B}$$

1.平面平行运动运动学

转动瞬心

任一时刻薄片上恒有一点速度为零, 叫做转动瞬心(**C**), 转动瞬心相对于固定坐标系的坐标为：

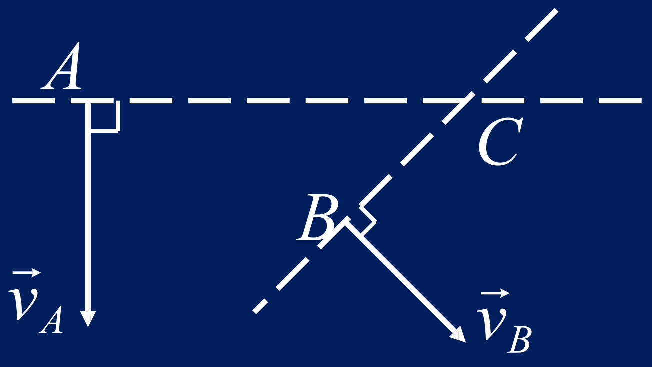
$$x_C = x_0 - \frac{v_{Ay}}{\omega}, y_C = y_0 + \frac{v_{Ax}}{\omega}$$

如果$\omega = 0$, 则无转动瞬心, 或者说, 转动瞬心在无穷远处.

1.平面平行运动运动学

只要转动瞬心C已知,就知道薄片在此时的运动.因为如果取C为基点，则因它此时的速度为零,薄片将仅绕C转动而任意一点P 的速度大小为 $\overline{CP}\cdot\omega$

过A及B作两直线分别垂直于 $\vec{v}_A$ 及$\vec{v}_B$,此两直线的交点即为转动瞬心.

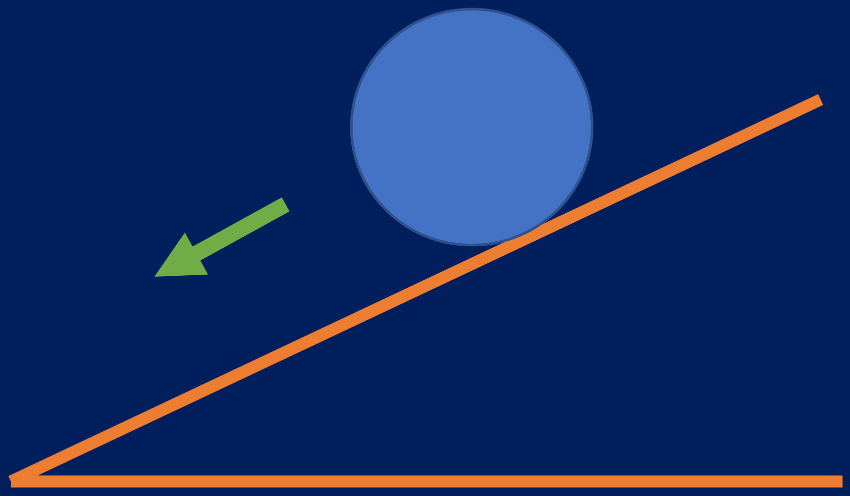


1.平面平行运动运动学

空间极迹和本体极迹

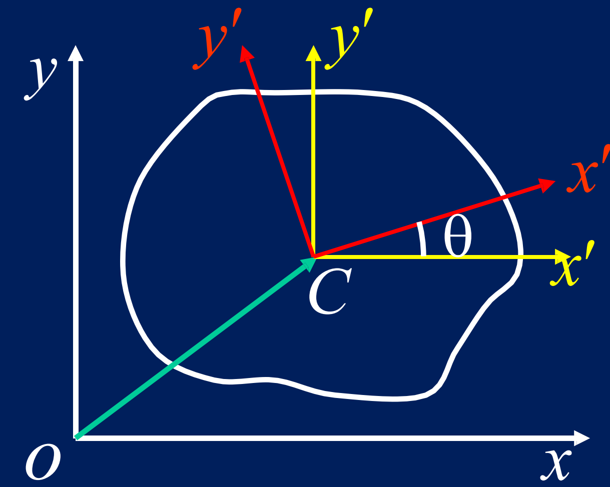
空间极迹：转动瞬心在固定坐标系上所描绘的轨迹

本体极迹：转动瞬心在刚体坐标系上所描绘的轨迹



2.平面平行运动的基本动力学方程

选择质心作为基点,利用质心运动定理和相对于质心的角动量定理写出平面平行运动的动力学方程



(i) 纯平动

$$\Sigma F_i = m a_c \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_C = \Sigma F_x \\ m\ddot{y}_C = \Sigma F_y \end{cases}$$

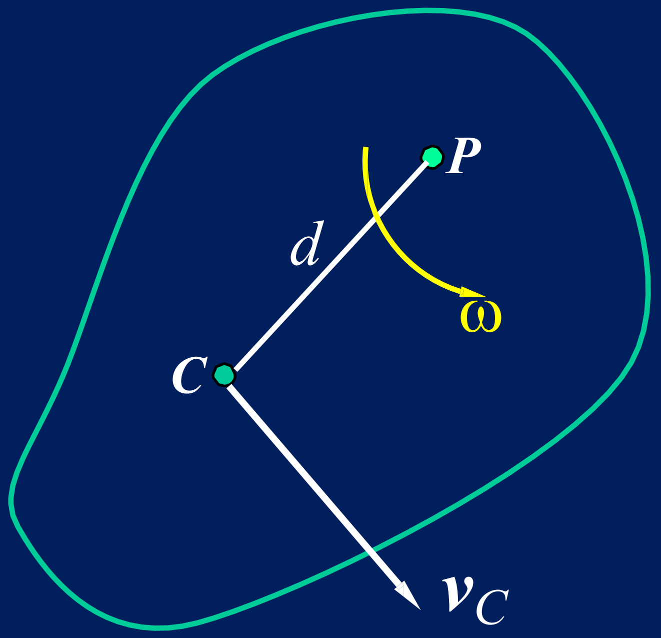
(ii) 纯转动

$$\Sigma M_{iz} = \frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha_z$$

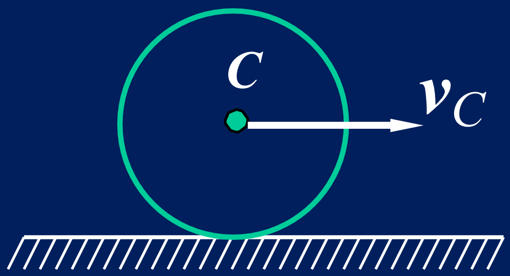
平面运动刚体的动能

$$T=\frac{1}{2}I_P\omega^2,\quad I_P=I_C+md^2$$

$$T=\frac{1}{2}I_P\omega^2=\frac{1}{2}(I_C+md^2)\omega^2 \qquad v_C=d\omega$$



$$\boxed{T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2}$$

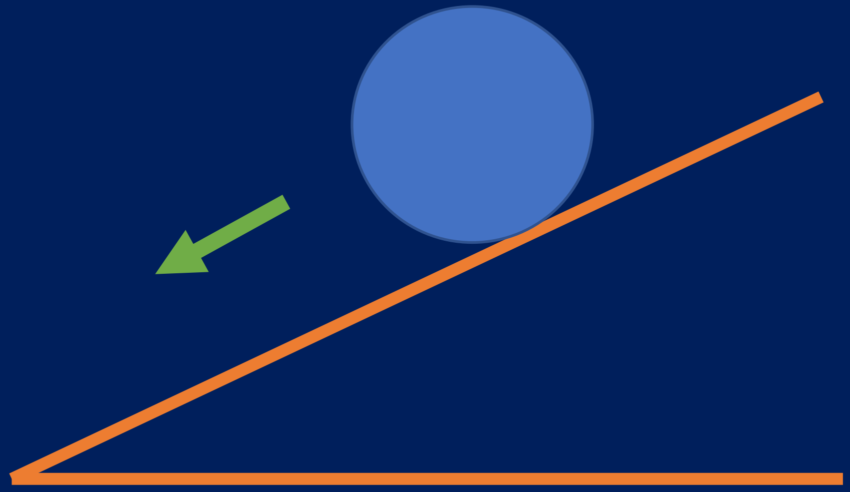


$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2,\qquad T=\frac{3}{4}mv_C^2$$

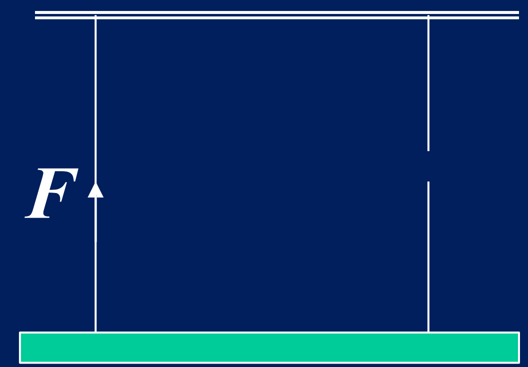
$$I_C=\frac{1}{2}mR^2,\ v_C=R\omega$$

例1

如图所示，固定斜面倾角为θ，质量为m半径为R的均匀圆柱体顺斜面向下作无滑动的滚动，求圆柱质心的加速度以及斜面作用于柱体的摩擦力



例2 如图, 将一根质量为m的长杆用细绳从两端水平地挂起来, 其中一根绳子突然断了,另一根绳内的张力是多少?



解: 设杆子长$2l$, 质心运动定理和过质心轴的角动量定理给出绳断的一刹那的运动方程:

$$mg - F = ma_C$$

$$Fl = I_C\beta \qquad I_C = \tfrac{1}{3}ml^2$$

因在此时悬绳末断的一端加速度为零, 从而有

$$a_C = \beta l \qquad \Rightarrow F = \frac{1}{4}mg$$