

知识点：二元运算及性质

测试题 14.1 判断下列集合和运算是否构成代数系统.

(1) X 为有理数集 \mathbf{Q} , $x \circ y = (x+y)/2$.

(2) $X=\mathbf{R}$, $x \circ y = |x-y|$.

(3) $X=\{1, -2, 3, 2, -4\}$, $x \circ y = |y|$.

(4) X 为自然数集 \mathbf{N} , $x \circ y = 2^{xy}$.

测试题 14.2 判断下述集合和运算是否满足交换律、结合律、是否存在单位元和零元.

(1) X 为实数集 \mathbf{R} , $x \circ y = (x-y)^2$.

(2) X 为整数集 \mathbf{Z} , $x \circ y = x+y+xy$, $+$ 为普通加法.

(3) X 为正整数集 \mathbf{Z}^+ , $x \circ y = \gcd(x,y)$, 即求 x 与 y 的最大公约数.

(4) $X=\mathbf{R}$, $x \circ y = x^y$.

测试题 14.3 判断代数系统 $\langle X, \circ \rangle$ 是否满足交换律和满足结合律、是否有单位元和零元.

(1) $X=P(\{a,b\})$, \circ 为集合的并运算.

(2) $X=S^S$, S 为任意非空集合, 运算 \circ 为函数合成.

(3) X 是任意非空集合 S 上所有关系矩阵的集合, \circ 为关系矩阵乘法 (相加采用逻辑加).

(4) $X=n\mathbf{Z} = \{nk \mid k \in \mathbf{Z}\}$, n 是任意正整数, \circ 为普通乘法.

(5) $X=P(\{a,b\})$, \circ 为集合的对称差运算.

测试题 14.4 设 $A=\{a,b,c\}$, 运算 $*$, \circ , \cdot 如表 14.1 所示, 说明这些运算是否满足交换律、结合律、幂等律、消去律, 求这些运算的单位元、零元、幂等元和所有可逆元素的逆元.

表 14.1

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	c

\circ	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

\cdot	a	b	c
a	a	b	a
b	a	a	a
c	a	a	a

测试题 14.5

(1) 设 S 是 $\{a,b,c\}$ 上的双射函数的集合, S 关于函数的合成构成代数系统, $f=\{<a,a>, <b,c>, <c,b>\}$, 求 f 的逆元.

(2) 设 \mathbf{Q} 为有理数集, $S=\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}, \forall <a,b>, <x,y>\in S$ 有 $<a,b>* <x,y>=<ax,b+y>$, 求 $*$ 运算的单位元. $\forall <a,b>\in S, a\neq 0$, 求 $<a,b>$ 的逆元.

测试题 14.6 设 $V=<A,o>$ 是代数系统, V 中适合结合律, 存在单位元, 且每个元素都有逆元, 证明 $\forall a,b,c\in A, a\circ b=a\circ c \Rightarrow b=c$.