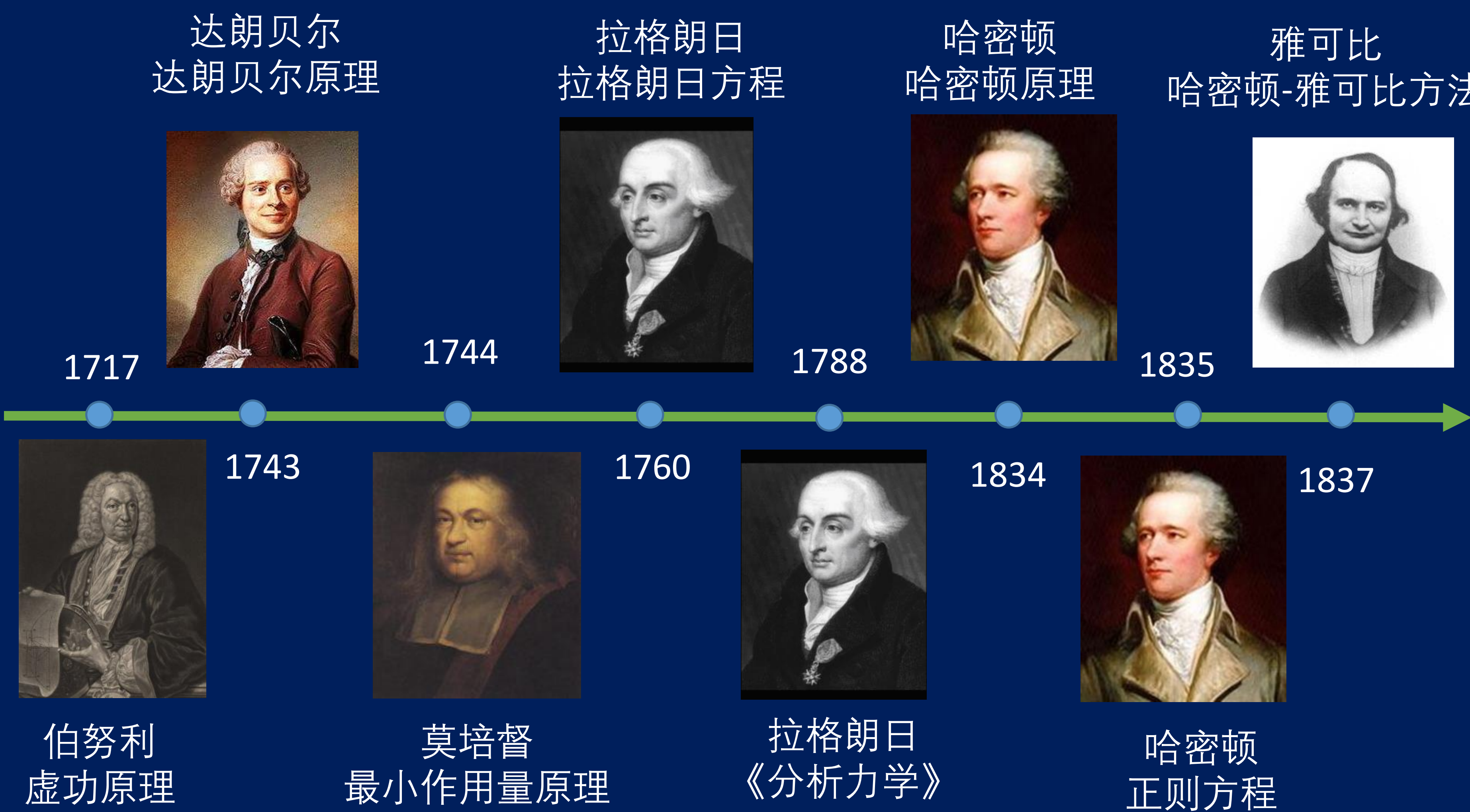
第五章

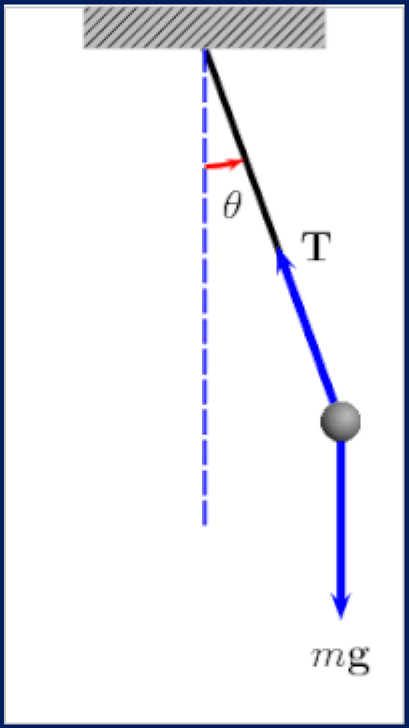
分析力学


1717
伯努利
虚功原理
1743
达朗贝尔
达朗贝尔原理
1744
莫培督
最小作用量原理
1760
拉格朗日
拉格朗日方程
1788
拉格朗日
《分析力学》
1834
哈密顿
哈密顿原理
1835
哈密顿
正则方程
1837
雅可比
哈密顿-雅可比方法

单摆问题的牛顿力学解法

$$F(\vec{r}) = m\ddot{\vec{r}}$$

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases}$$



$$\begin{cases} T_x = m\ddot{x} \\ T_y - mg = m\ddot{y} \end{cases}$$

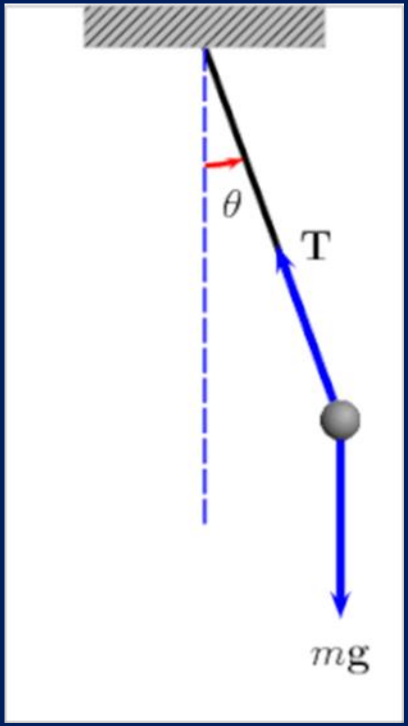
$$x^2 + y^2 = l^2$$

$$\begin{cases} T\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = m\ddot{x} \\ T\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - mg = m\ddot{y} \\ x^2 + y^2 = l^2 \end{cases}$$

单摆问题的分析力学解法

能不能绕开约束力直接求解质点的运动！

体系的自由度为1，可由角坐标θ来描述



$$mg\sin\theta = m\dot{v}_{\perp} = ml\ddot{\theta}$$

$$mg\theta = ml\ddot{\theta}$$

单摆问题的拉格朗日方程

拉格朗日方程 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

拉格朗日函数 $$L = T - V$$

单摆问题

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0$$

1788年，巨著《分析力学》出版。在这部书中没有一幅插图，完全用数学分析的方法来解决所有力学问题，和牛顿的《自然哲学的数学原理》中比比皆是的几何分析形成鲜明的对比。

运动方程:

经典力学

$$\dot{F} = \{F\,,H\}$$

量子力学

$$\dot{\hat{F}} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}\,,H]$$

正则量子化

$$F(x,p) \longrightarrow \hat{F}(\hat{x},\hat{p})$$

$$[x,p] = 0 \longrightarrow [x,p] = i\hbar$$

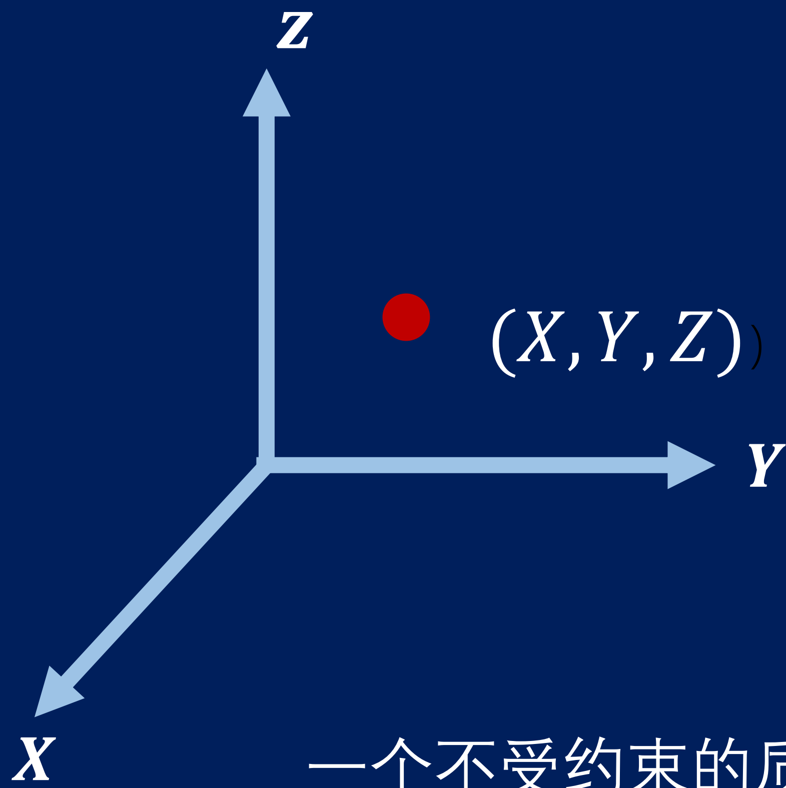
$$\{\,,\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\,,]$$

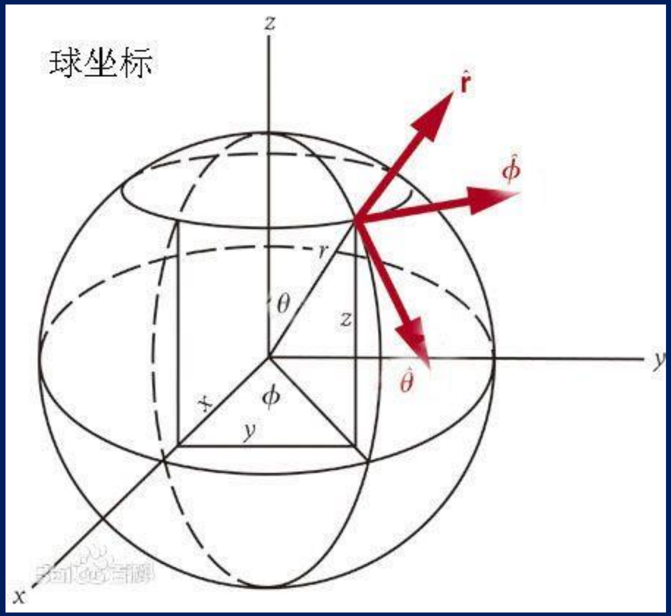
约束与广义坐标

本节导读

- 约束的概念
- 约束方程和约束的分类
- 自由度和广义坐标

约束的概念和分类



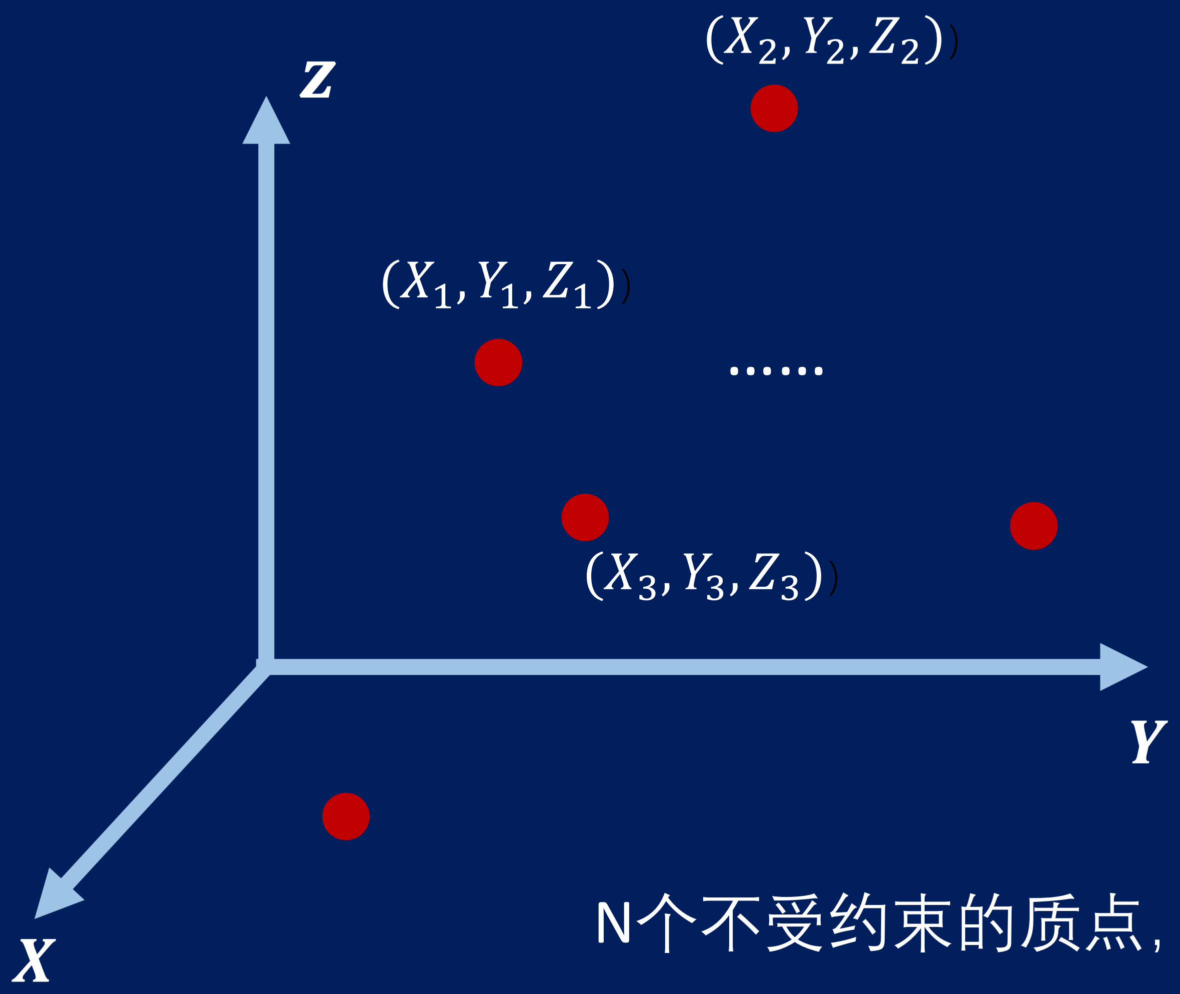


(r, θ, ϕ)

一个不受约束的质点，任一时刻需要三个坐标确定其位置，自由度为3

自由度：任意时刻完全确定系统的状态所需要的独立坐标的个数

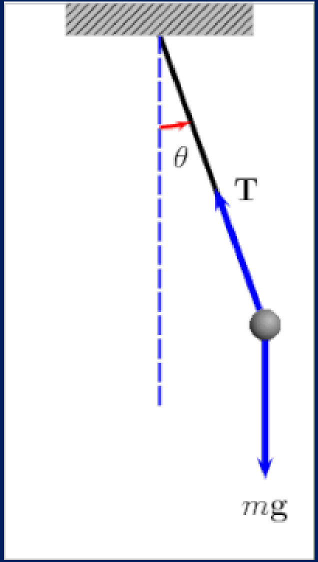
约束的概念和分类



N个不受约束的质点，自由度为3N

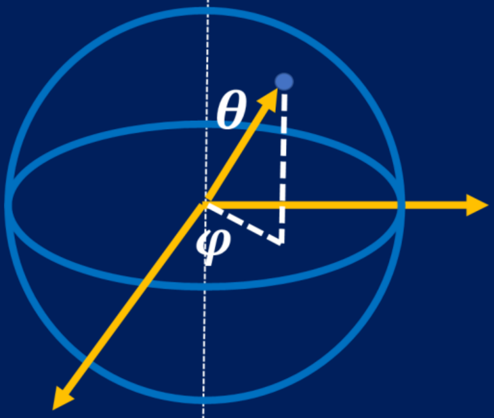
约束的概念和分类

约束与约束方程

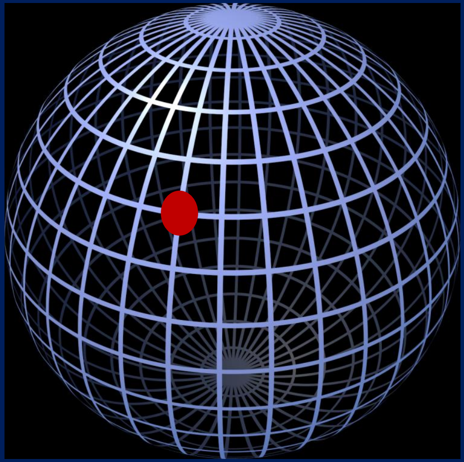


竖直平面内运动的单摆 θ

限制在球面上运动的质点



(θ, ϕ)



(经度, 纬度)

在一个力学体系中，常存在着一些限制各质点自由运动的条件，我们把这些条件叫做约束，体系的自由度也随之降低。
约束的数学表现即为约束方程。

约束的概念和分类

约束力

根据牛顿定律，一切影响质点机械运动的因素都归结为力.因此约束作用也可以归结为力.约束力的大小随力学系统违背约束的趋势的不同而自动调节，使约束条件总是得以满足.因此出现在运动方程中的约束力不可能预先给定,它只能由运动方程并结合约束方程解出来.

有些地方把约束力称为约束反力，因为这种力是跟违背约束的运动趋势对抗的反作用力

约束的概念和分类

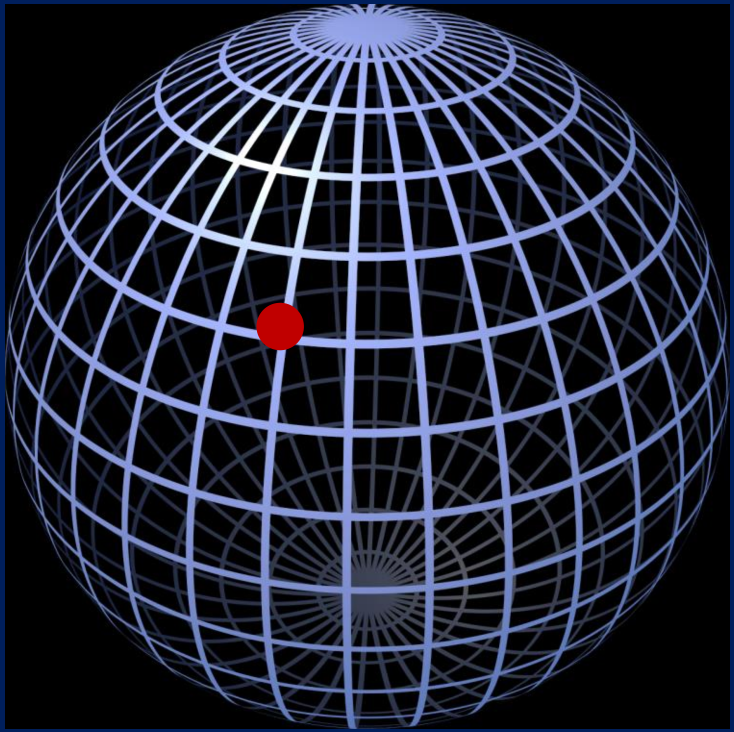
$$f\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\cdots,\vec{r}_n;\dot{\vec{r}}_1,\dot{\vec{r}}_2,\dot{\vec{r}}_3,\cdots,\dot{\vec{r}}_n,t\right)=0$$

——**约束方程的一般形式**

根据约束方程的具体形式，可以将约束分类：

- 约束方程中不显含时间t，叫做稳定约束，反之，如果约束是时间t的函数，则约束称为不稳定约束。
- 质点始终不能脱离的约束，叫做不可解约束，如果在某一方向上可以脱离约束，则为可解约束。
- 如果约束方程只是质点坐标的函数，则为几何约束，如果约束方程除了坐标还包含质点的速度，则为运动约束或微分约束。

约束的概念和分类

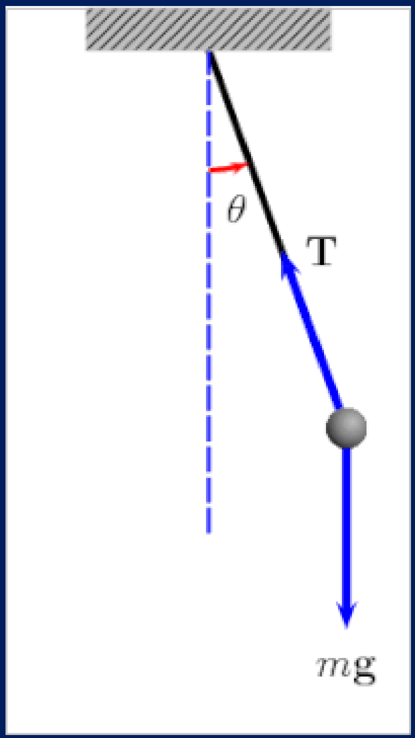


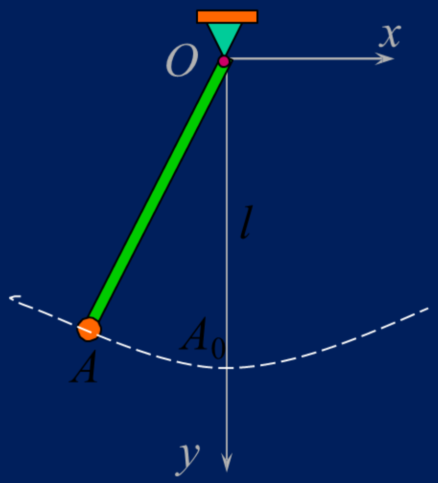
约束方程

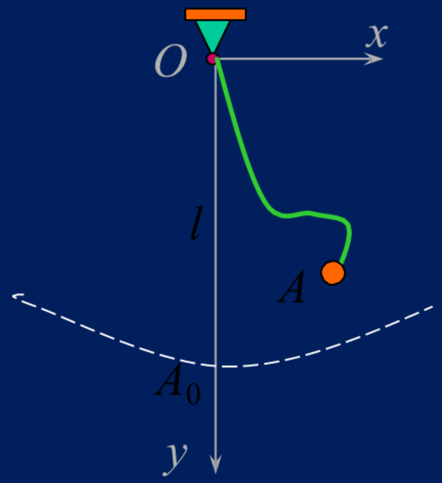
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

- 稳定约束
- 不可解约束
- 几何约束

约束的概念和分类



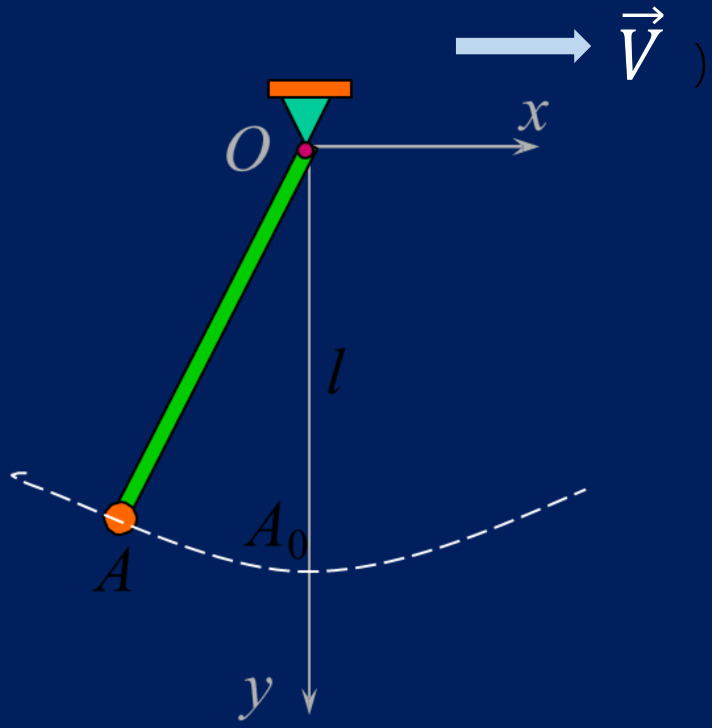




约束方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le R^2 & \text{稳定、可解、几何} \\ z = 0 & \text{稳定、不可解、几何} \end{cases}$$

约束的概念和分类



约束方程

$$\begin{cases} (x - vt)^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

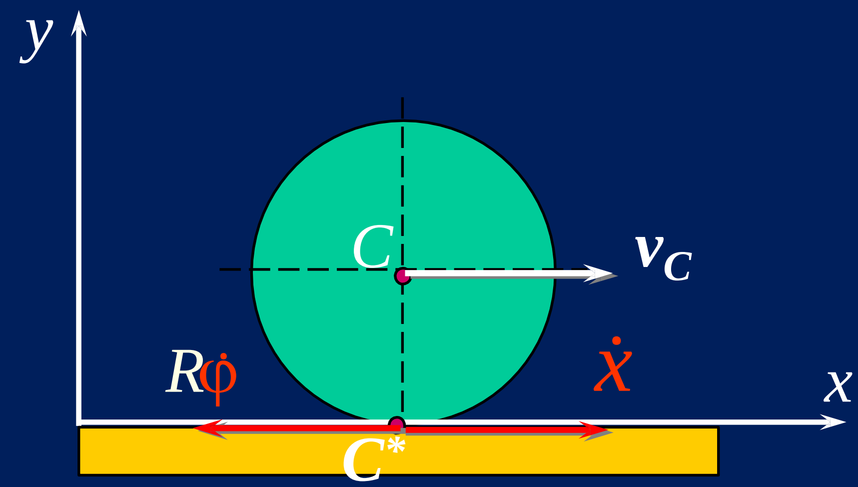
- 不稳定约束
- 不可解约束
- 几何约束

约束的概念和分类

半径为*R*的圆柱在地面上沿着直线作无滑动地滚动.

约束方程

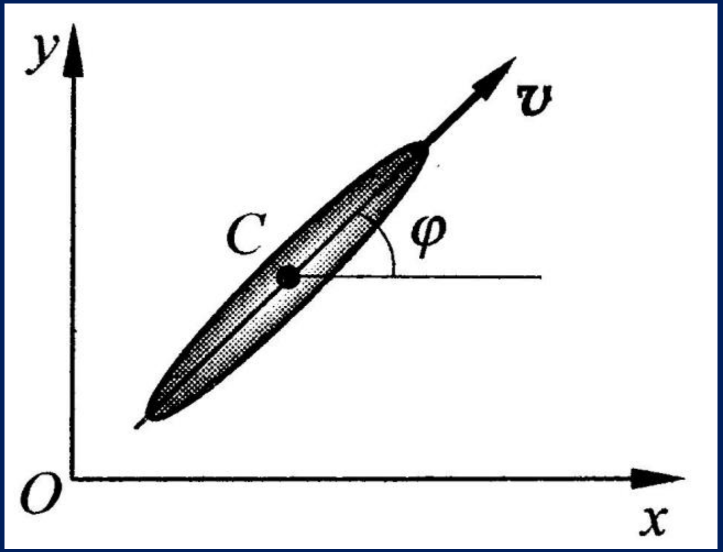
$$\dot{x}_c - R\dot{\varphi} = 0$$



微分约束，或者称为运动约束或速度约束

约束的概念和分类

水平冰面内运动的冰刀



约束方程

$$\frac{\dot{y}_C}{\dot{x}_C} = tan\varphi$$

不能通过积分化为几何约束，属于不可积分的运动约束

约束的概念和分类

运动约束（不可积分）
可解约束
} 不完整约束

运动约束（可积分）
几何约束
} 完整约束

- 只受完整约束的力学体系叫做完整系，否则为不完整系

自由度和广义坐标

N个质点组成的质点系

k个完整约束

→ 自由度为3N-k

- *每有一个完整约束，体系的自由度-1*

广义坐标

一组**互相独立**的且可以**唯一**确定体系状态的变量（完整系情况下，变量个数等于体系的自由度）

体系中任一个质点的位置矢量（直角坐标），都可以写为广义坐标的函数：

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

虚功原理

本节导读

- 虚位移和虚功
- 虚功原理

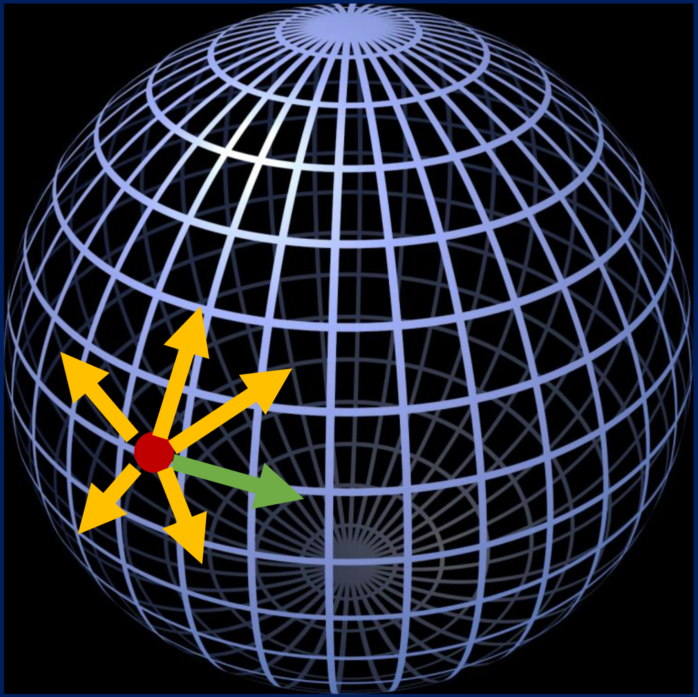
虚位移和虚功

虚位移

质点由于运动实际发生的位移，叫做实位移，用dr表示

任一时刻，质点在约束允许的情况下，有可能发生的位移，叫做虚位移，用δr表示。

- 虚位移只与约束有关，而与质点的实际运动无关
- 由于虚位移考虑的是确定时刻，所以$\delta t = 0$
- 不稳定约束的情况下，实位移不是虚位移中的一个



虚功

力沿虚位移所做的功叫做虚功

虚功原理

虚功原理的基本形式：

在理想约束条件下，如果系统处于平衡状态，则其平衡条件为

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i \right) = 0$$

这称为虚功原理.

虚功原理

虚功原理的广义坐标形式：

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha} \right) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, s)$$

Q_α叫做广义力. 它的数目和力学体系的自由度数相等.

系统平衡的条件为所有的广义力为零

达朗贝尔原理

本节导读

- 达朗贝尔原理

达朗贝尔原理

按照牛顿运动定律, 力学系统的第*i*质点的运动方程是

$$\vec{F}_i + \vec{F}_{ri} = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F}_i + \vec{F}_{ri} - m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_i (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

——达朗贝尔-拉格朗日方程