Трансляция презентации (во время очных лекций).

При просмотре презентации в PDF для отображения анимаций на слайдах необходимо использовать Acrobat Reader, KDE Okular, PDF-XChange или Foxit Reader.

Компьютерная графика

Лекция 3
Преобразования точек на плоскости

Гаврилов Андрей Геннадьевич

Кафедра Информационных технологий и вычислительных систем
МГТУ «СТАНКИН»

2 апреля 2024 г.

План лекции

Раздел 1

Матрицы

Матрицы и операции над ними

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ — матрица размером $m \times n$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ — единичная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$ — матрица-строка

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ — матрица-столбец

Транспонирование матрицы

Если $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$, то $a_{ij} = b_{ji}$

$$\mathbf{M}^{TT} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

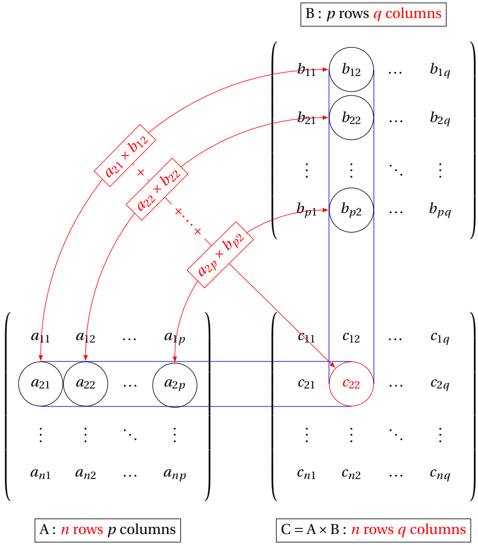
$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

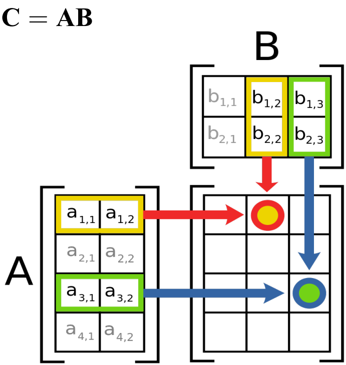
Сложение матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + bm2 & \cdots & a_{mn} + bmn \end{pmatrix}$$

Умножение матриц





Обратная матрица

$$k \cdot \frac{1}{k} = 1 \qquad \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{E}$$

$\mathbf{M}^{-1}$ — обратная матрица

$$\left[\mathbf{A}^{-1}\right]^{-1} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$$

$$\left[\mathbf{A}^{T}\right]^{-1} = \left[\mathbf{A}^{-1}\right]^{T}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы

$\det(\mathbf{A}), \quad |\mathbf{A}|, \quad \Delta(\mathbf{A})$

Для матрицы 2x2:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Для матрицы 3x3:

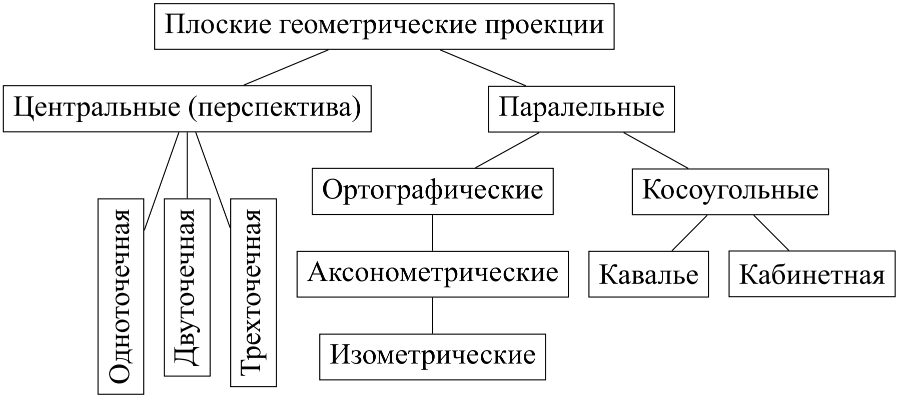
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

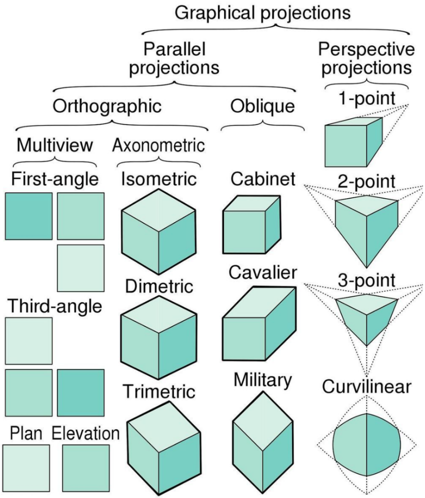
Раздел 2

Проекции и их виды

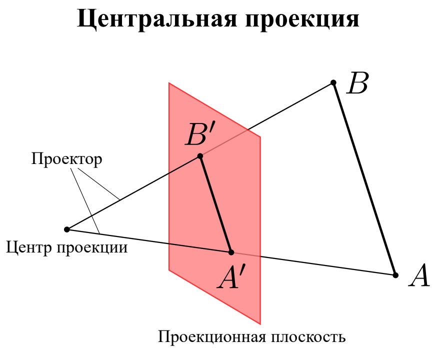
Виды проекций

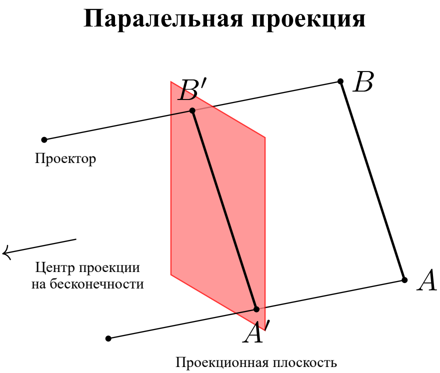


Виды проекций



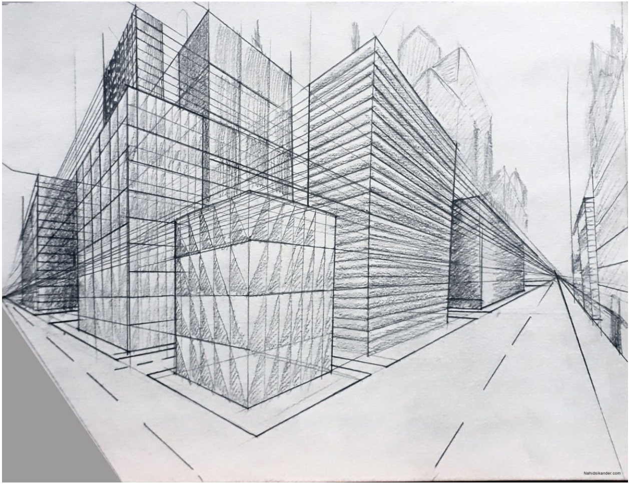
Два основных вида проекций



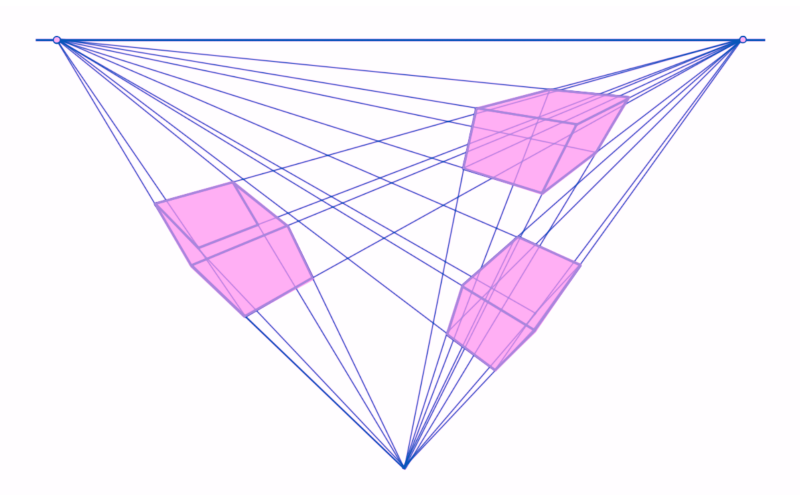


Перспектива

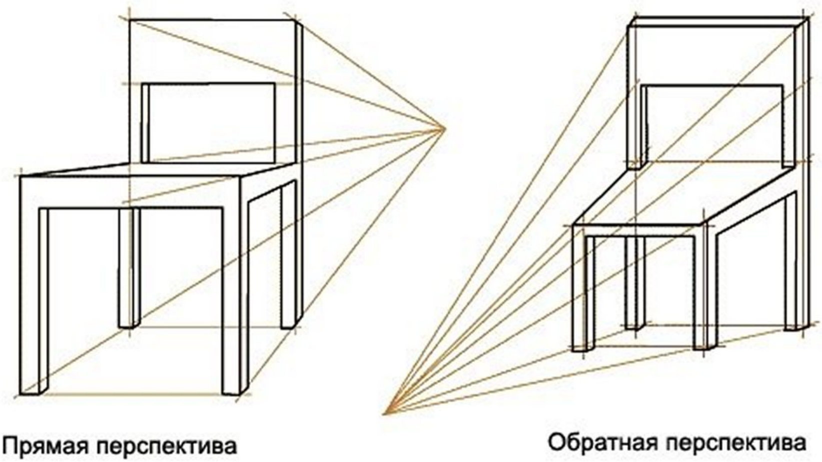
Двухточечная перспектива



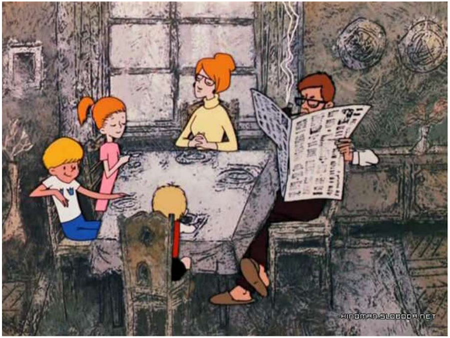
Трёхточечная перспектива



Обратная перспектива

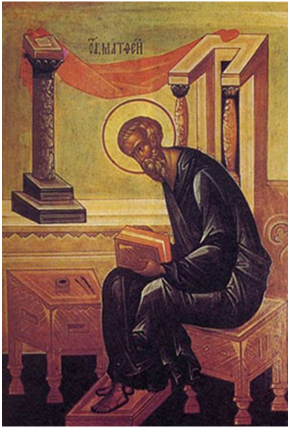


Обратная перспектива

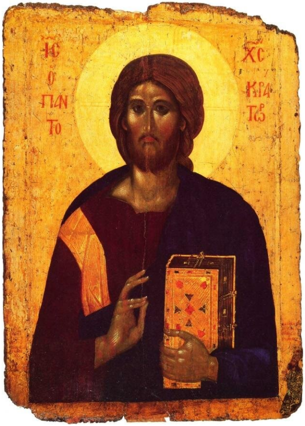


В советской мультипликации

Обратная перспектива

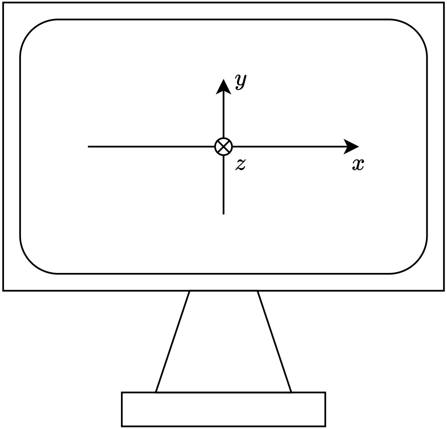


Апостол и евангелист Матфей

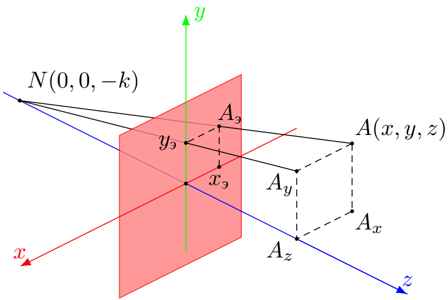


Спас Вседержитель (1363 г.)

Координатная система экрана



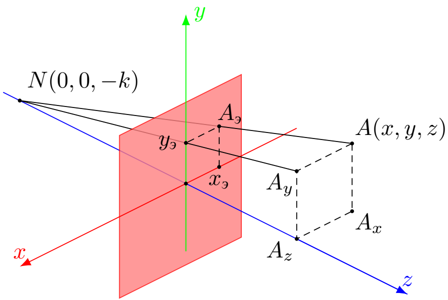
Проекция точки на экран (1)



$$A(x, y, z) \to A_э(x_э, y_э)$$

1. $\triangle A_y A_z N \sim \triangle A_{эy} O N$

Проекция точки на экран (1)

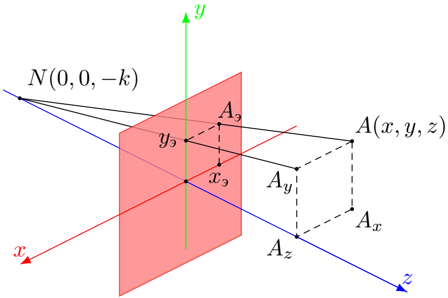


$$A(x, y, z) \to A_э(x_э, y_э)$$

1. $\triangle A_y A_z N \sim \triangle A_{эy} O N$

2. $\dfrac{y}{z+k} = \dfrac{y_э}{k}, \ \dfrac{x}{z+k} = \dfrac{x_э}{k}$

Проекция точки на экран (1)



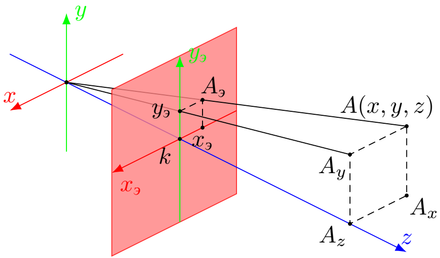
$$A(x,y,z) \to A_э(x_э, y_э)$$

1. $\triangle A_y A_z N \sim \triangle A_{эy} O N$

2. $\dfrac{y}{z+k} = \dfrac{y_э}{k}, \quad \dfrac{x}{z+k} = \dfrac{x_э}{k}$

3. $\boxed{y_э = \dfrac{ky}{z+k}, \quad x_э = \dfrac{kx}{z+k}}$

Проекция точки на экран (2)



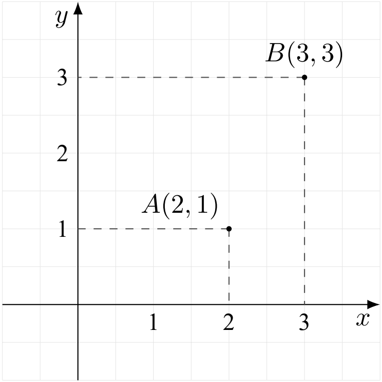
$$A(x, y, z) \to A_э(x_э, y_э)$$

$$\boxed{y_э = \frac{ky}{z},\ x_э = \frac{kx}{z}}$$

Раздел 3

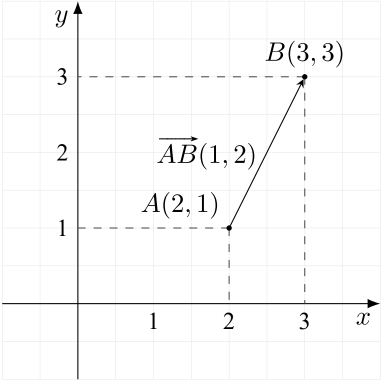
Двумерные преобразования

Перенос точки



$A \to B$

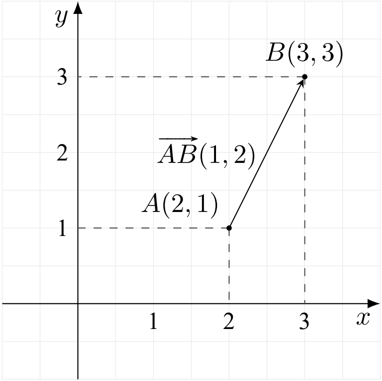
Перенос точки



$$A \to B$$

$$\vec{B} = \vec{A} + \overrightarrow{AB}$$

Перенос точки



$A \to B$

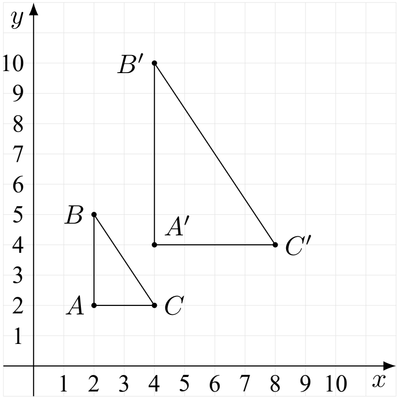
$\vec{B} = \vec{A} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} \equiv \vec{R}$ — вектор переноса

Перенос точки A на вектор $\vec{R}$

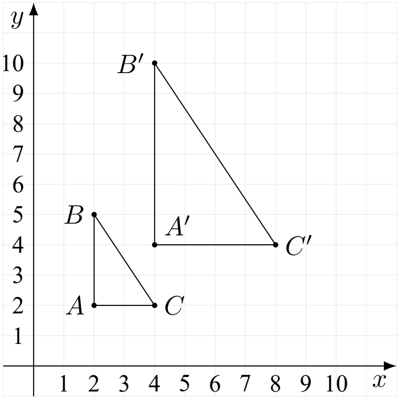
$$\vec{B} = \vec{A} + \vec{R} = \\ = (A_x + R_x,\ A_y + R_y,\ A_z + R_z)$$

Равномерное масштабирование



$$\triangle ABC \to \triangle A'B'C'$$

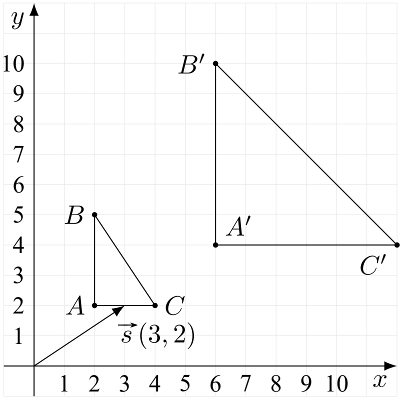
Равномерное масштабирование



$$\triangle ABC \to \triangle A'B'C'$$

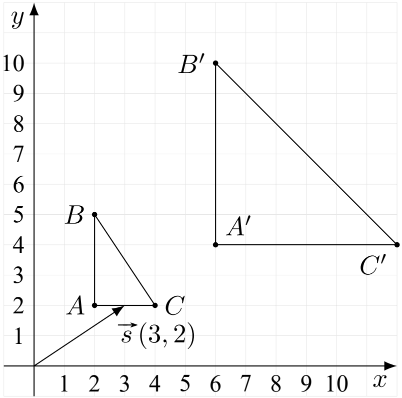
$$\overrightarrow{A'} = k \cdot \vec{A},\ \overrightarrow{B'} = k \cdot \vec{B},\ \overrightarrow{C'} = k \cdot \vec{C}.$$

Неравномерное масштабирование



$$\triangle ABC \to \triangle A'B'C'$$
$$\triangle ABC \nsim \triangle A'B'C'$$

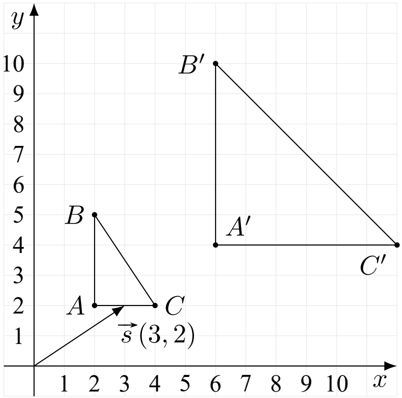
Неравномерное масштабирование



$$\triangle ABC \to \triangle A'B'C'$$
$$\triangle ABC \nsim \triangle A'B'C'$$

$$A \to A' : A' = (A_x s_x, A_y s_y)$$

Неравномерное масштабирование



$$\triangle ABC \to \triangle A'B'C'$$
$$\triangle ABC \nsim \triangle A'B'C'$$

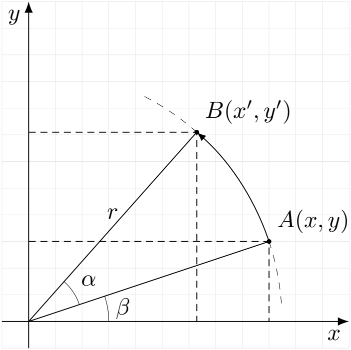
$$A \to A' : A' = (A_x s_x, A_y s_y)$$

Масштабирование точки (x, y) по вектору $\vec{s}$

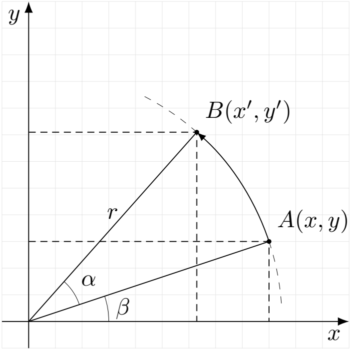
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Поворот точки

$$A \to B$$



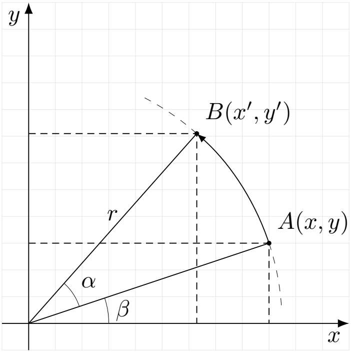
Поворот точки



$$A \to B$$

$$x' = r\cos(\alpha + \beta)$$
$$y' = r\sin(\alpha + \beta)$$

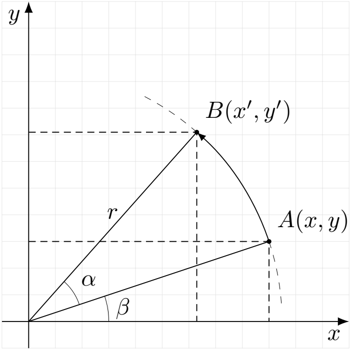
Поворот точки



$$A \to B$$

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha+\beta) &= r(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ y' &= r\sin(\alpha+\beta) &= r(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

Поворот точки



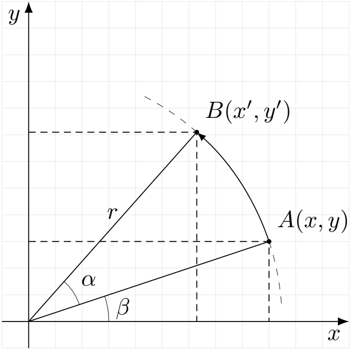
$$A \to B$$

$$x' = r\cos(\alpha+\beta) = r(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$
$$y' = r\sin(\alpha+\beta) = r(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

Т.к. $\cos\beta = \dfrac{x}{r}$ и $\sin\beta = \dfrac{y}{r}$, то

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

Поворот точки



$$A \to B$$

$$x' = r\cos(\alpha+\beta) = r(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$
$$y' = r\sin(\alpha+\beta) = r(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

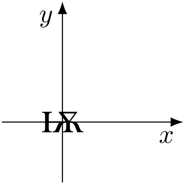
Т.к. $\cos\beta = \dfrac{x}{r}$ и $\sin\beta = \dfrac{y}{r}$, то

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

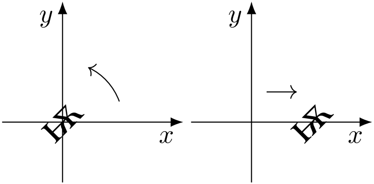
Поворот точки (x, y) на угол α

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

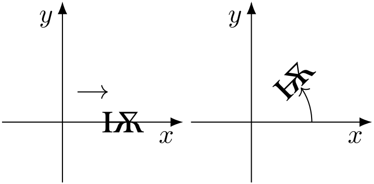
Поворот и перемещение



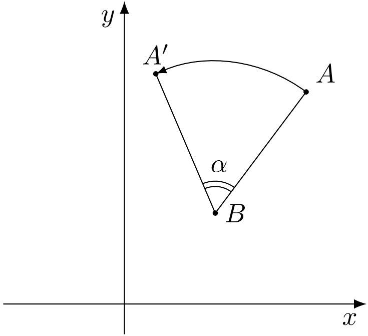
Повернуть — переместить



Переместить — повернуть

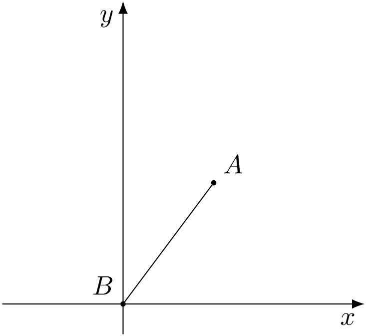


Поворот точки вокруг другой точки



Задача: повернуть точку A вокруг точки B на угол α

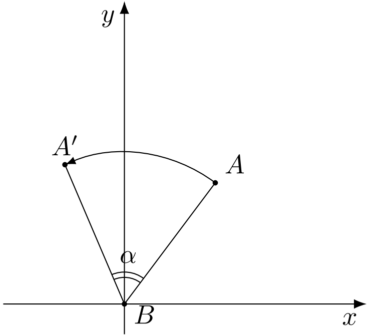
Поворот точки вокруг другой точки



Задача: повернуть точку A вокруг точки B на угол α

1. Переместить точки A и B на вектор $(-\overrightarrow{B})$

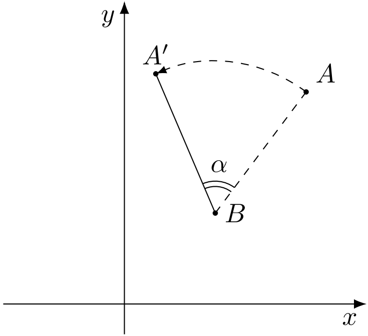
Поворот точки вокруг другой точки



Задача: повернуть точку A вокруг точки B на угол α

1. Переместить точки A и B на вектор $(-\vec{B})$
2. Осуществить поворот точки A на угол α

Поворот точки вокруг другой точки



Задача: повернуть точку A вокруг точки B на угол α

1. Переместить точки A и B на вектор $(-\vec{B})$
2. Осуществить поворот точки A на угол α
3. Выполнить обратный первому шагу перенос.

Общий вид матрицы преобразования

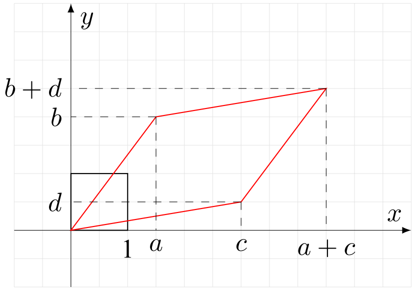
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ dy + bx \end{pmatrix}$$

a — масштабирование по x
c — сдвиг по x в единицах y
d — масштабирование по y
b — сдвиг по y в единицах x

Чего не хватает? Безотносительного сдвига по осям: $\begin{pmatrix} ax + by + p \\ dy + cx + q \end{pmatrix}$

Преобразование единичного квадрата



$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}' = \mathbf{MV} = \begin{pmatrix} 0 & a & c & (a+c) \\ 0 & b & d & (b+a) \end{pmatrix}$$

$$S_{V'} = \det(\mathbf{M}) = ad - bc$$

Раздел 4

Однородные координаты и матричные операции

Однородные координаты

(wx, wy, w) — однородные координаты для записи точки на плоскости.
(wx, wy, wz, w) — однородные координаты для записи точки в пространстве.
w — масштабный множитель.

Однородные координаты

(wx, wy, w) — однородные координаты для записи точки на плоскости.
(wx, wy, wz, w) — однородные координаты для записи точки в пространстве.
w — масштабный множитель.

Для перевода точки в обычные координаты, однородные необходимо разделить на w:
$(wx/w, wy/w, w/w) \to (x, y, 1)$

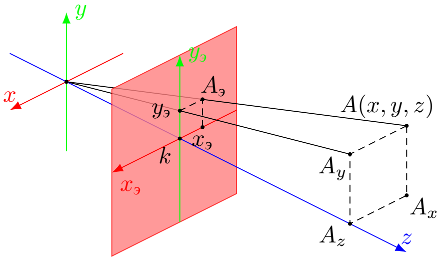
Однородные координаты

(wx, wy, w) — однородные координаты для записи точки на плоскости.
(wx, wy, wz, w) — однородные координаты для записи точки в пространстве.
w — масштабный множитель.

Для перевода точки в обычные координаты, однородные необходимо разделить на w:
$(wx/w, wy/w, w/w) \to (x, y, 1)$

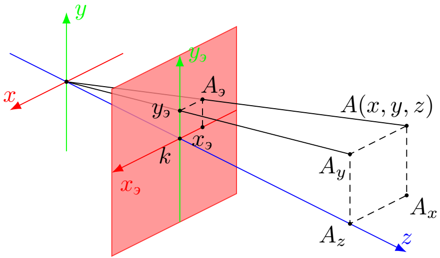
Некоторые точки, неопределенные в трехмерном пространстве, можно определить в однородных: $(0, 0, -\infty) \to (0, 0, 1, 0)$

Проецирование с помощью однородных координат



$$y_э = \frac{ky}{z},\ x_э = \frac{kx}{z}$$

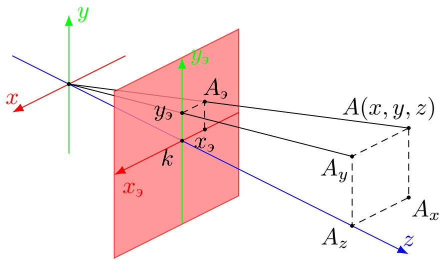
Проецирование с помощью однородных координат



$$y_э = \frac{ky}{z},\ x_э = \frac{kx}{z}$$

Представим, точку в пространстве (x, y, z) в виде однородных координат $(x/z, y/z, 1)$

Проецирование с помощью однородных координат



$y_э = \dfrac{ky}{z}$, $x_э = \dfrac{kx}{z}$

Представим, точку в пространстве (x, y, z) в виде однородных координат $(x/z, y/z, 1)$

Тогда, координаты спроецированной на плоскость точки $(x_э, y_э)$ будут совпадать с ее однородными координатами при $k = 1$:

$y = y_э = \dfrac{y}{z}$ и $x = x_э = \dfrac{x}{z}$

Матрица проецирования

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$ — матрица центральной проекции.

Матрица проецирования

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$ — матрица центральной проекции.

Представим точку $v(x, y, z)$ в однородных координатах с помощью матрицы-столбца: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{pmatrix}$

Матрица проецирования

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$ — матрица центральной проекции.

Представим точку $v(x, y, z)$ в однородных координатах с помощью матрицы-столбца: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{pmatrix}$

$$\mathbf{Pv} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kwx \\ kwy \\ 0 \\ w(z+k) \end{pmatrix}$$

Матрица проецирования

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$ — матрица центральной проекции.

Представим точку $v(x, y, z)$ в однородных координатах с помощью матрицы-столбца: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{pmatrix}$

$$\mathbf{Pv} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kwx \\ kwy \\ 0 \\ w(z+k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx/(z+k) \\ ky/(z+k) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

С слайда 22
$y_э = \frac{ky}{z+k}$
$x_э = \frac{kx}{z+k}$

Матрица перемещения

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перемещения

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перемещения

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Перемещение точки (x, y) на вектор (a, b)

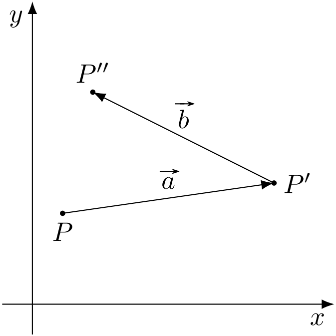
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Перемещение точки A на вектор (a, b)

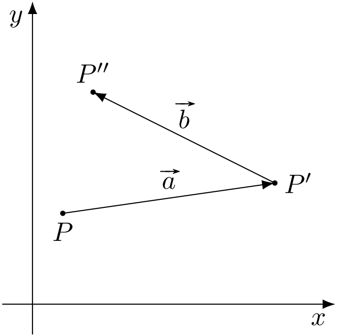
$$\mathbf{A'} = \mathbf{AT}(a, b), \text{ где } \mathbf{T}(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{— матрица перемещения}$$

Последовательность переносов

$$P \xrightarrow{\vec{a}} P' \xrightarrow{\vec{b}} P''$$



Последовательность переносов

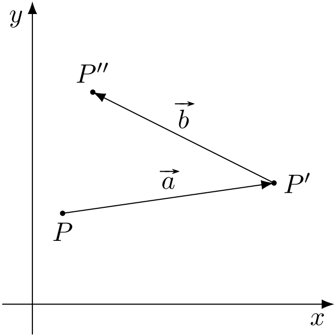


$$P \xrightarrow{\vec{a}} P' \xrightarrow{\vec{b}} P''$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}(\vec{a})\mathbf{P}, \quad \mathbf{P}'' = \mathbf{T}(\vec{b})\mathbf{P}' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}'' = \mathbf{T}(\vec{b})\mathbf{T}(\vec{a})\mathbf{P}$$

Последовательность переносов



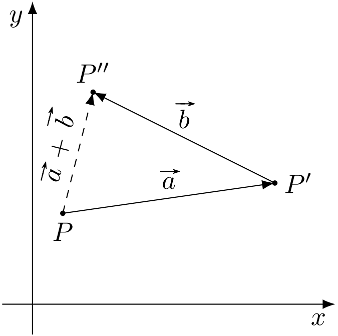
$$P \xrightarrow{\vec{a}} P' \xrightarrow{\vec{b}} P''$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}(\vec{a})\mathbf{P}, \quad \mathbf{P}'' = \mathbf{T}(\vec{b})\mathbf{P}' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}'' = \mathbf{T}(\vec{b})\mathbf{T}(\vec{a})\mathbf{P}$$

$$\mathbf{T}(\vec{b})\mathbf{T}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_x \\ 0 & 1 & b_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Последовательность переносов



$$P \xrightarrow{\vec{a}} P' \xrightarrow{\vec{b}} P''$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}(\vec{a})\mathbf{P}, \quad \mathbf{P}'' = \mathbf{T}(\vec{b})\mathbf{P}' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}'' = \mathbf{T}(\vec{b})\mathbf{T}(\vec{a})\mathbf{P}$$

$$\mathbf{T}(\vec{b})\mathbf{T}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_x \\ 0 & 1 & b_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x + b_x \\ 0 & 1 & a_y + b_x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}(a_x + b_x, a_x + b_y)$$

$$[P \xrightarrow{\vec{a}} P' \xrightarrow{\vec{b}} P''] \equiv [P \xrightarrow{\vec{a}+\vec{b}} P'']$$

Матрица масштабирования

Матрица масштабирования точки A по вектору $\vec{s}$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{S}(s_x, s_y)\mathbf{A}, \text{где } \mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 1 \\ 0 & s_y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 1 \\ 0 & s_y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xs_x \\ ys_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Последовательность масштабов

$$P \xrightarrow{\vec{s}} P' \xrightarrow{\vec{q}} P''$$

[1]Поэлементное произведение $\vec{a} * \vec{b} = \vec{c}(a_x a_y, b_x b_y)$

Последовательность масштабов

$$P \xrightarrow{\vec{s}} P' \xrightarrow{\vec{q}} P''$$

$$\mathbf{S}(\vec{q})\mathbf{S}(\vec{s})\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q_x & 0 & 1 \\ 0 & q_y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 & 1 \\ 0 & s_y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

[1] Поэлементное произведение $\vec{a} * \vec{b} = \vec{c}(a_x a_y, b_x b_y)$

Последовательность масштабов

$$P \xrightarrow{\vec{s}} P' \xrightarrow{\vec{q}} P''$$

$$\mathbf{S}(\vec{q})\mathbf{S}(\vec{s})\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q_x & 0 & 1 \\ 0 & q_y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 & 1 \\ 0 & s_y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} q_x s_x & 0 & 1 \\ 0 & q_y s_y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{S}(\vec{q} * \vec{s})\mathbf{P}$$ [1]

$$[P \xrightarrow{\vec{s}} P' \xrightarrow{\vec{q}} P''] \equiv [P \xrightarrow{\vec{s} * \vec{q}} P'']$$

[1] Поэлементное произведение $\vec{a} * \vec{b} = \vec{c}(a_x a_y, b_x b_y)$

Матрица поворота

Матрица поворота точки A на угол α

$$\mathbf{A}' = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{A}, \text{ где } \mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Последовательность поворотов

$$P \xrightarrow{\alpha} P' \xrightarrow{\beta} P''$$

Последовательность поворотов

$$P \xrightarrow{\alpha} P' \xrightarrow{\beta} P''$$

$$\mathbf{R}(\beta)\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Последовательность поворотов

$$P \xrightarrow{\alpha} P' \xrightarrow{\beta} P''$$

$$\mathbf{R}(\beta)\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Последовательность поворотов

$$P \xrightarrow{\alpha} P' \xrightarrow{\beta} P''$$

$$\mathbf{R}(\beta)\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) & 0 \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\alpha+\beta)\mathbf{A}$$

$$[P \xrightarrow{\alpha} P' \xrightarrow{\beta} P''] \equiv [P \xrightarrow{\alpha+\beta} P'']$$

Обратные операции

$$A \xrightarrow{\text{Ѣ}} A' \xrightarrow{-\text{Ѣ}} A'' \quad \Rightarrow \quad A = A''$$

Обратные операции

$$A \xrightarrow{\text{Ѣ}} A' \xrightarrow{-\text{Ѣ}} A'' \;\; \Rightarrow \;\; A = A''$$

«Честные» обратные операции

1. Перемещение

$$\mathbf{T}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}(-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_x \\ 0 & 1 & -a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Поворот

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Масштабирование

$$\mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратные операции

$$A \xrightarrow{\text{Ѣ}} A' \xrightarrow{-\text{Ѣ}} A'' \quad \Rightarrow \quad A = A''$$

«Честные» обратные операции

1. Перемещение

$$\mathbf{T}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}(-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_x \\ 0 & 1 & -a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Поворот

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Масштабирование

$$\mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратные операции через обратные матрицы

Если $A = A''$, значит при $\mathbf{XA} = \mathbf{A}$, $\mathbf{X} = \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = \mathbf{MM}^{-1}$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{MA} = \mathbf{A}$$

Обратные операции

$$A \xrightarrow{\text{Ѣ}} A' \xrightarrow{-\text{Ѣ}} A'' \quad \Rightarrow \quad A = A''$$

«Честные» обратные операции

1. Перемещение

$$\mathbf{T}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}(-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_x \\ 0 & 1 & -a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Поворот

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Масштабирование

$$\mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

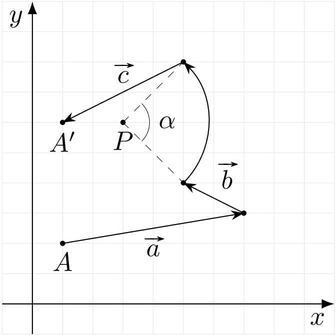
Обратные операции через обратные матрицы

Если $A = A''$, значит при $\mathbf{XA} = \mathbf{A}$, $\mathbf{X} = \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = \mathbf{MM}^{-1}$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{MA} = \mathbf{A}$$

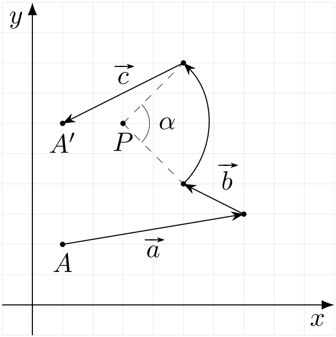
$$\mathbf{T}(-\vec{a}) = \mathbf{T}^{-1}(\vec{a}) \qquad \mathbf{R}(-\alpha) = \mathbf{R}^{-1}(\alpha) \qquad \mathbf{S}\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}\right) = \mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y)$$

Комбинация движений



$$A \to A'$$

Комбинация движений



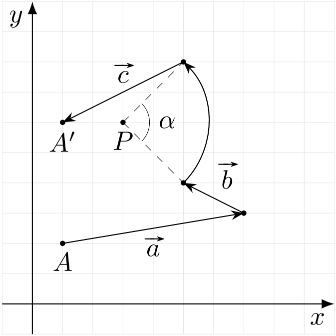
$A \to A'$

Порядок записи

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}(\vec{c})\mathbf{T}(\vec{P})\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{T}(-\vec{P})\mathbf{T}(\vec{b})\mathbf{T}(\vec{a})\mathbf{A}$$

Порядок выполнения

Комбинация движений



$$A \to A'$$

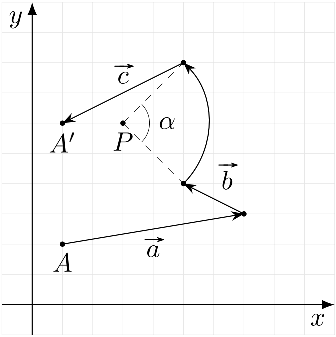
Порядок записи

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}(\vec{c})\mathbf{T}(\vec{P})\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{T}(-\vec{P})\mathbf{T}(\vec{b})\mathbf{T}(\vec{a})\mathbf{A}$$

Порядок выполнения

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\vec{c})\mathbf{T}(\vec{P})\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{T}(-\vec{P})\mathbf{T}(\vec{b})\mathbf{T}(\vec{a})$$
$$\mathbf{A}' = \mathbf{MA}$$

Комбинация движений



$$A \to A'$$

Порядок записи →

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}(\vec{c})\mathbf{T}(\vec{P})\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{T}(-\vec{P})\mathbf{T}(\vec{b})\mathbf{T}(\vec{a})\mathbf{A}$$

← Порядок выполнения

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\vec{c})\mathbf{T}(\vec{P})\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{T}(-\vec{P})\mathbf{T}(\vec{b})\mathbf{T}(\vec{a})$$
$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}\mathbf{A}$$

$$A' \to A: \ \mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}'$$

Общий вид матрицы преобразования

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+p \\ dy+cx+q \\ lx+my+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ax+by+p)/(lx+my+n) \\ (dy+cx+q)/(lx+my+n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

a — масштабирование по x
b — сдвиг по x в единицах y
d — масштабирование по y
c — сдвиг по y в единицах x
p — абсолютный сдвиг по x
q — абсолютный сдвиг по y
l, m — коэф. проецирования
n — коэф. глобального масштабирования