Трансляция презентации (во время очных лекций).

При просмотре презентации в PDF для отображения анимаций на слайдах необходимо использовать Acrobat Reader, KDE Okular, PDF-XChange или Foxit Reader.

Компьютерная графика
Лекция 4
Преобразования точек в пространстве

Гаврилов Андрей Геннадьевич

Кафедра Информационных технологий и вычислительных систем
МГТУ «СТАНКИН»

2 апреля 2024 г.

План лекции

Раздел 1

Матрица преобразований

Матрица преобразований

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & k \\ d & e & f & l \\ g & h & i & m \\ \hline o & p & q & r \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \hline \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{array}\right)$$

$\mathbf{M}_{11}$ — линейное преобразование [1]
$\mathbf{M}_{12}$ — перемещение
$\mathbf{M}_{21}$ — перспективное преобразование
$\mathbf{M}_{22}$ — общее масштабирование

[1] Линейное преобразование — это преобразование, переводящее линейную комбинацию векторов в ту же самую линейную комбинацию преобразованных векторов.

Матрица преобразований

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & k \\ d & e & f & l \\ g & h & i & m \\ \hline o & p & q & r \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \hline \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{array}\right)$$

$\mathbf{M}_{11}$ — линейное преобразование [1]
$\mathbf{M}_{12}$ — перемещение
$\mathbf{M}_{21}$ — перспективное преобразование
$\mathbf{M}_{22}$ — общее масштабирование

$$\begin{pmatrix} a & b & c & k \\ d & e & f & l \\ g & h & i & m \\ o & p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} awx + bwy + cwz + kw \\ dwx + ewy + fwz + lw \\ gwx + hwy + lwz + mw \\ owx + pwy + qwz + rw \end{pmatrix} \Rightarrow$$

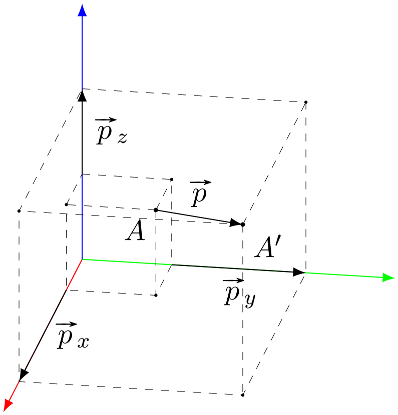
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (ax + by + cz + k)/(ox + py + qz + r) \\ (dx + ey + fz + l)/(ox + py + qz + r) \\ (gx + hy + lz + m)/(ox + py + qz + r) \\ 1 \end{pmatrix}$$

[1] Линейное преобразование — это преобразование, переводящее линейную комбинацию векторов в ту же самую линейную комбинацию преобразованных векторов.

Раздел 2

Аффинные преобразования

Перенос



Матрица переноса

$$\mathbf{T}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\vec{p})\mathbf{A} = \mathbf{A}'$$

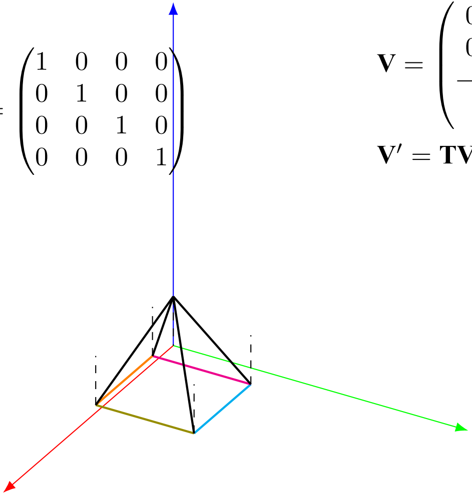
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + p_x \\ y + p_y \\ z + p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Перенос объекта

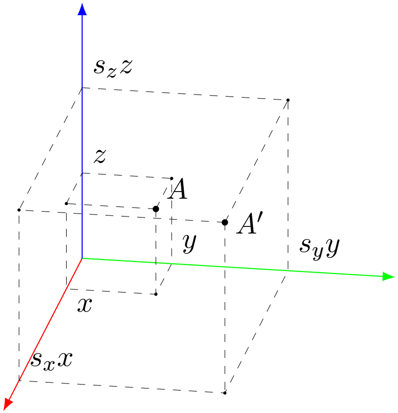
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}' = \mathbf{TV}$$



Масштабирование



Матрица масштабирования

$$\mathbf{S}(\vec{s}) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}(\vec{s})\mathbf{A} = \mathbf{A}'$$

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \\ s_z z \\ 1 \end{pmatrix}$$

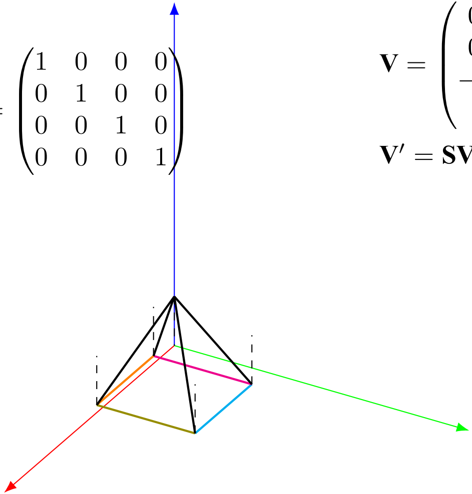
Если $s_x = s_y = s_z$ масштабирование равномерное.

Масштабирование объекта

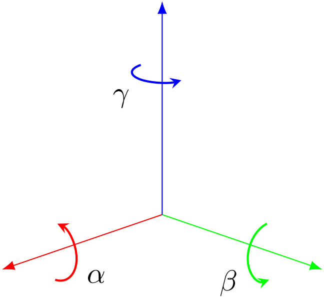
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}' = \mathbf{SV}$$



Повороты



Матрица поворота вокруг OX

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

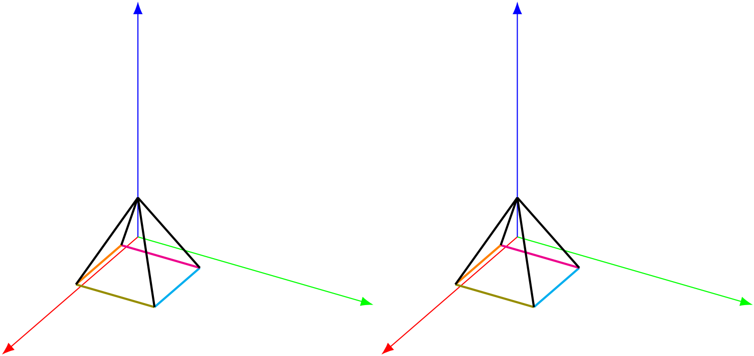
Матрица поворота вокруг OY

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

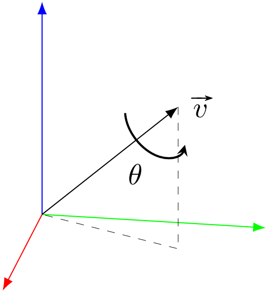
Матрица поворота вокруг OZ

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Комбинация поворотов



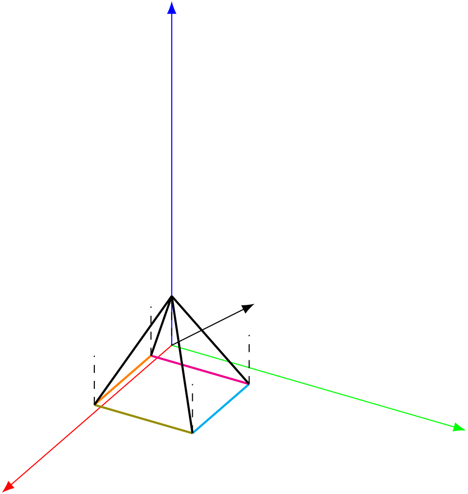
Поворот вокруг произвольной оси



Матрица поворота вокруг произвольной оси $\vec{v}$, $|\vec{v}| = 1$

$$\mathbf{R}(\vec{v}, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)x^2 & (1-\cos\theta)xy - (\sin\theta)z & (1-\cos\theta)xz + (\sin\theta)y & 0 \\ (1-\cos\theta)yx + (\sin\theta)z & \cos\theta + (1-\cos\theta)y^2 & (1-\cos\theta)yz - (\sin\theta)x & 0 \\ (1-\cos\theta)zx - (\sin\theta)y & (1-\cos\theta)zy + (\sin\theta)x & \cos\theta + (1-\cos\theta)z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поворот объекта вокруг произвольной оси



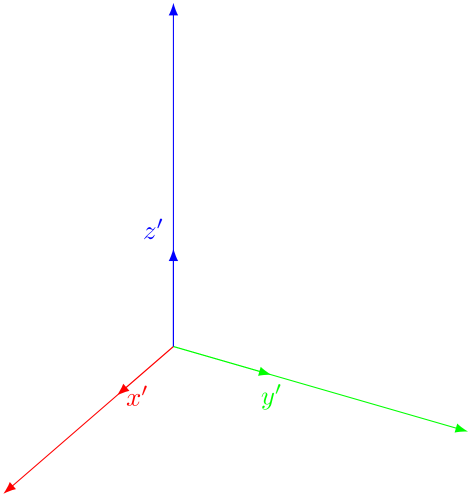
$$\vec{v}(2,2,2)$$

$$\mathbf{V}' = \mathbf{R}\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \theta\right)\mathbf{V}$$

Раздел 3

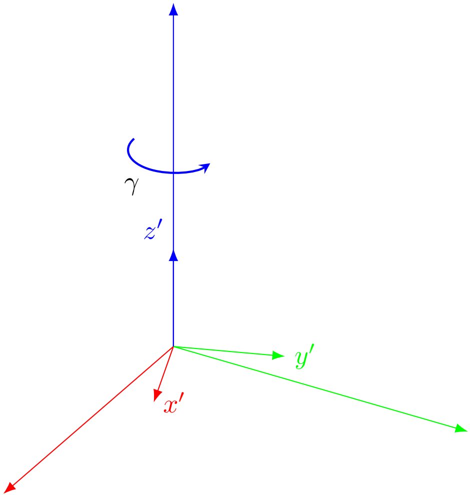
Преобразования систем координат

Преобразования систем координат



Пусть есть две совпадающие системы координат (СК) — xyz (мировая) и $x'y'z'$ (локальная).

Преобразования систем координат

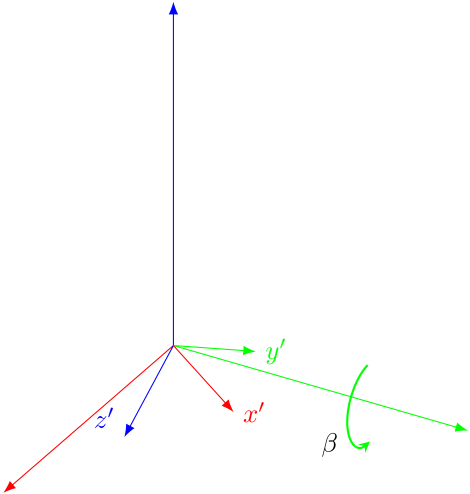


Пусть есть две совпадающие системы координат (СК) — xyz (мировая) и $x'y'z'$ (локальная).

Преобразуем СК $x'y'z'$:

1. Повернём на угол γ вокруг оси z мировой СК.

Преобразования систем координат

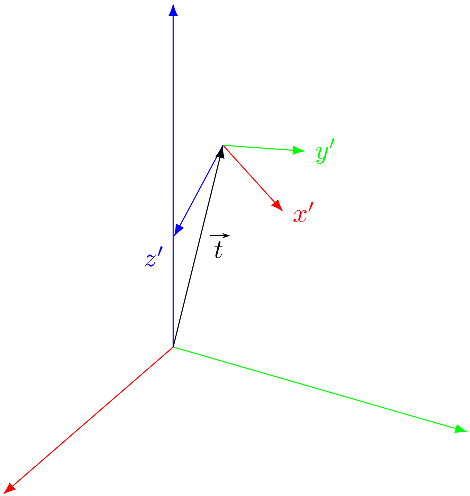


Пусть есть две совпадающие системы координат (СК) — xyz (мировая) и $x'y'z'$ (локальная).

Преобразуем СК $x'y'z'$:

1. Повернём на угол γ вокруг оси z мировой СК.
2. Повернём на угол β вокруг оси y мировой СК.

Преобразования систем координат

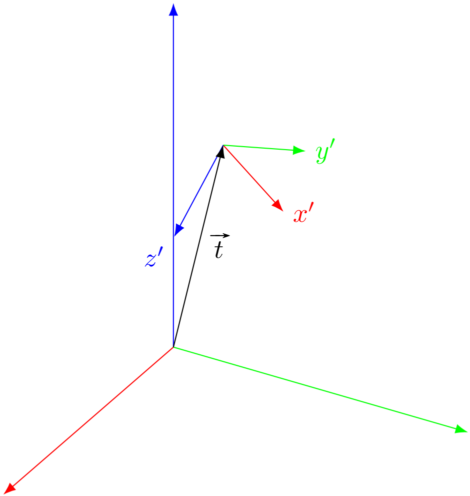


Пусть есть две совпадающие системы координат (СК) — xyz (мировая) и $x'y'z'$ (локальная).

Преобразуем СК $x'y'z'$:

1. Повернём на угол γ вокруг оси z мировой СК.
2. Повернём на угол β вокруг оси y мировой СК.
3. Перенесём на вектор $\vec{t}$ относительно начала мировой СК.

Преобразования систем координат

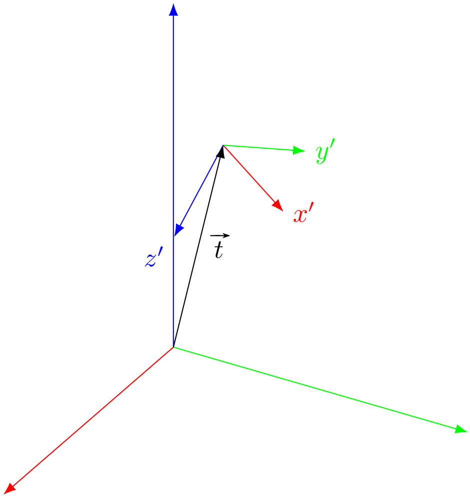


Пусть есть две совпадающие системы координат (СК) — xyz (мировая) и $x'y'z'$ (локальная).

Преобразуем СК $x'y'z'$:

1. Повернём на угол γ вокруг оси z мировой СК.
2. Повернём на угол β вокруг оси y мировой СК.
3. Перенесём на вектор $\vec{t}$ относительно начала мировой СК.

Преобразования систем координат



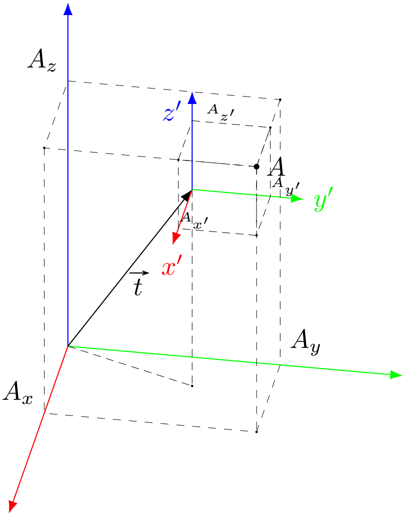
Пусть есть две совпадающие системы координат (СК) — xyz (мировая) и $x'y'z'$ (локальная).

Преобразуем СК $x'y'z'$:

1. Повернём на угол γ вокруг оси z мировой СК.
2. Повернём на угол β вокруг оси y мировой СК.
3. Перенесём на вектор $\vec{t}$ относительно начала мировой СК.

Запишем эти преобразования в матричной форме:
$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\vec{t})\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma)$

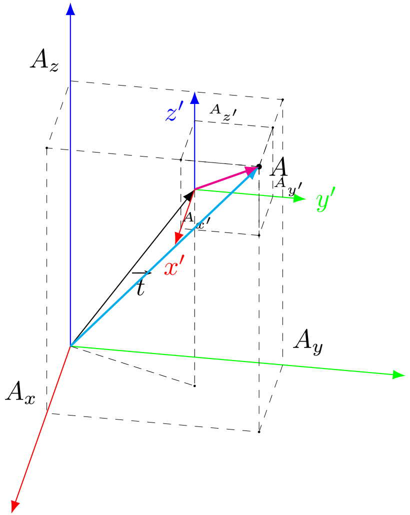
Переход между системами координат (простой случай)



Рассмотрим 2 СК: мировую xyz и локальную $x'y'z'$, перемещённую на вектор $\vec{t}$, относительно мировой.

Рассмотрим точку A в этих СК: как A^{xyz} и $A^{x'y'z'}$.

Переход между системами координат (простой случай)



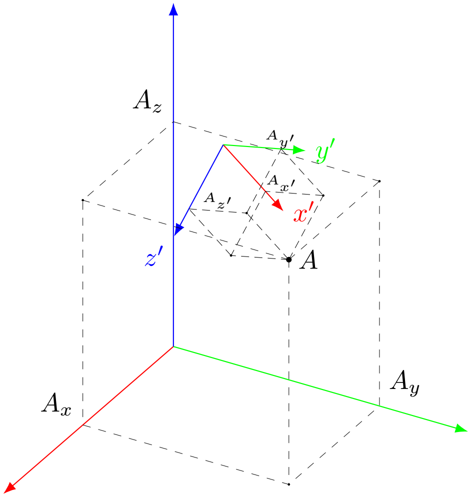
Рассмотрим 2 СК: мировую xyz и локальную $x'y'z'$, перемещённую на вектор $\vec{t}$, относительно мировой.

Рассмотрим точку A в этих СК: как A^{xyz} и $A^{x'y'z'}$.

$$x'y'z' \to xyz : \quad \vec{A}^{xyz} = \vec{A}^{x'y'z'} + \vec{t}$$

$$xyz \to x'y'z' : \quad \vec{A}^{x'y'z'} = \vec{A}^{xyz} - \vec{t}$$

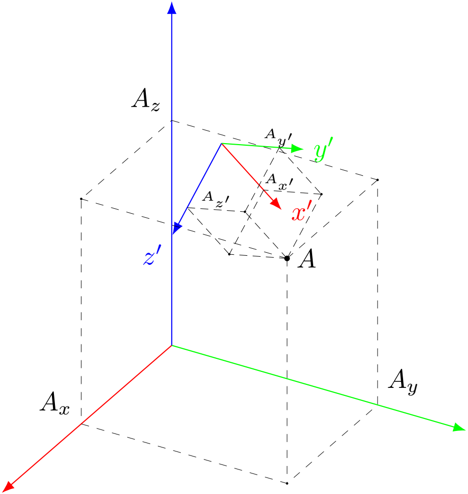
Переход между системами координат (общий случай)



Рассмотрим 2 СК: мировую xyz и локальную $x'y'z'$, преобразованную относительно мировой матрицей $\mathbf{M}$.

Рассмотрим точку A в этих СК: как A^{xyz} и $A^{x'y'z'}$.

Переход между системами координат (общий случай)



Рассмотрим 2 СК: мировую xyz и локальную $x'y'z'$, преобразованную относительно мировой матрицей $\mathbf{M}$.

Рассмотрим точку A в этих СК: как A^{xyz} и $A^{x'y'z'}$.

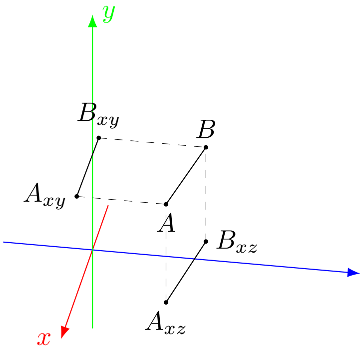
$$x'y'z' \to xyz : \quad \mathbf{A}^{xyz} = \mathbf{M}\mathbf{A}^{x'y'z'}$$

$$xyz \to x'y'z' : \quad \mathbf{A}^{x'y'z'} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{xyz}$$

Раздел 4

Проекционные преобразования

Ортогональная проекция

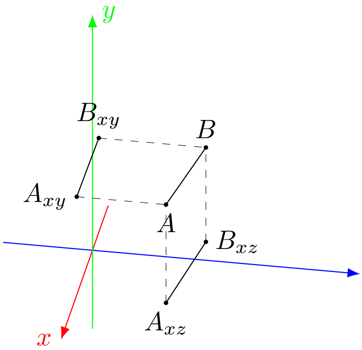


Матрицы ортогональной проекции

$$\mathbf{P}_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_{xz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{yz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ортогональная проекция



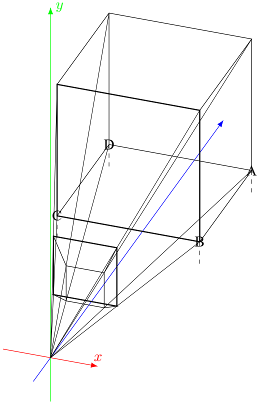
Матрицы ортогональной проекции

$$\mathbf{P}_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_{xz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{yz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} wx \\ xy \\ wz \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ 0 \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Проецирование куба

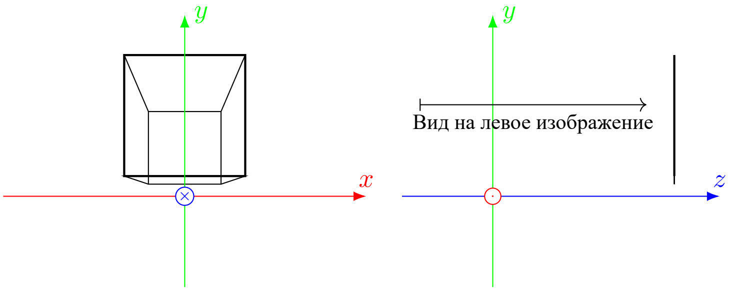


$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для всех точек куба:
$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}'$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ wz \end{pmatrix} = \Rightarrow \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Перспективная проекция



Матрица перспективного преобразования

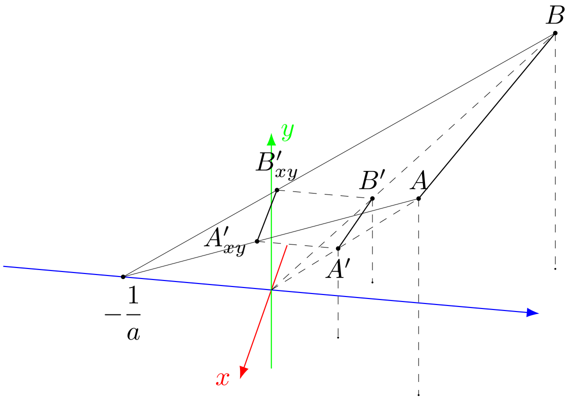
Матрица перспективного преобразования (одна из множества)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

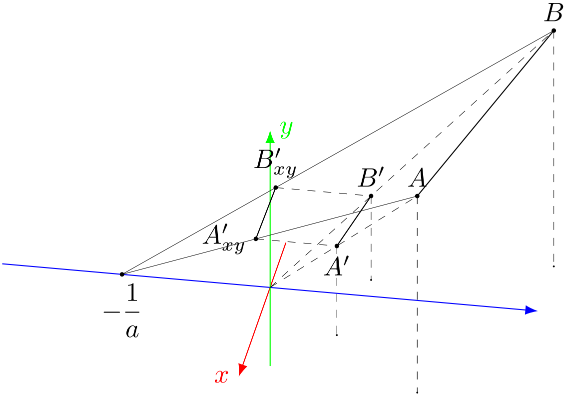
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ wza + w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x/(za+1) \\ y/(za+1) \\ z(za+1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Перспективное преобразование

$$AB \to A'B' \to A'_{xy}B'_{xy}$$



Перспективное преобразование

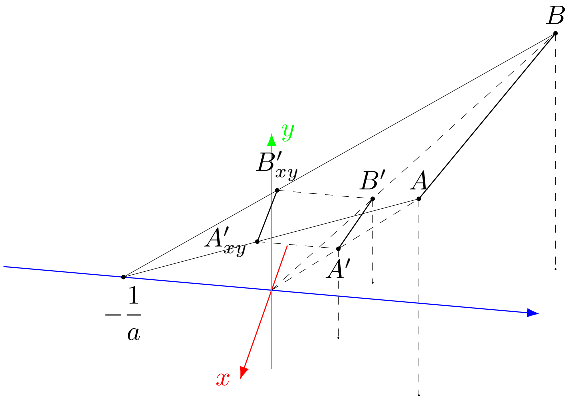


$$AB \rightarrow A'B' \rightarrow A'_{xy}B'_{xy}$$

$$\left(\mathbf{A}'_{xy}\mathbf{B}'_{xy}\right) = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\left(\mathbf{AB}\right)$$ [1]

[1] $(\mathbf{AB}) = \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \end{pmatrix}^T$

Перспективное преобразование



$$AB \to A'B' \to A'_{xy}B'_{xy}$$

$$\left(\mathbf{A}'_{xy}\mathbf{B}'_{xy}\right) = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\left(\mathbf{AB}\right)$$ [1]

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & \mathbf{1} \end{pmatrix} \text{ —}$$

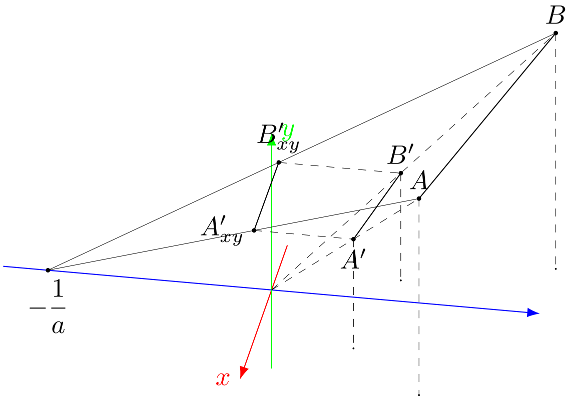
матрица перспективного преобразования.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ —}$$

матрица ортографической проекции на xy.

[1] $(\mathbf{AB}) = \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \end{pmatrix}^T$

Перспективное преобразование



$$AB \to A'B' \to A'_{xy}B'_{xy}$$

$$\left(\mathbf{A}'_{xy}\mathbf{B}'_{xy}\right) = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\left(\mathbf{AB}\right)$$ [1]

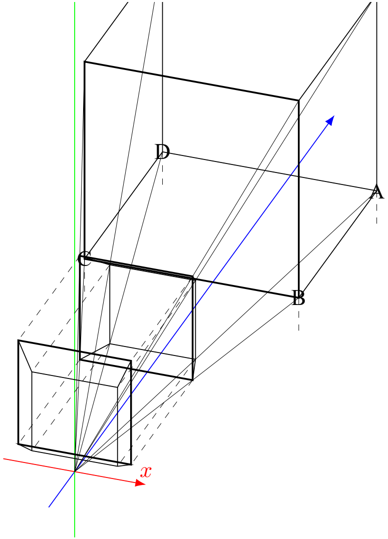
$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$ — матрица перспективного преобразования.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ — матрица ортографической проекции на xy.

---

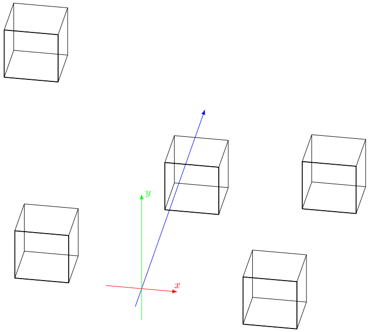
[1] $$(\mathbf{AB}) = \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \end{pmatrix}^T$$

Перспективное преобразование куба



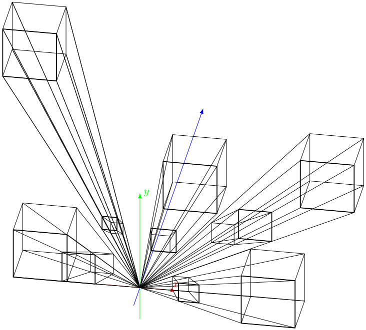
Перспективное преобразование сцены

Исходные объекты



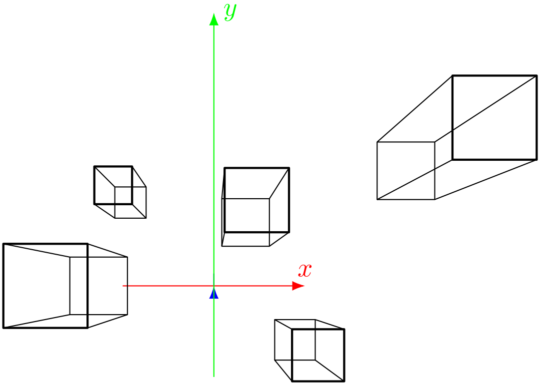
Перспективное преобразование сцены

Исходные объекты + преобразованные

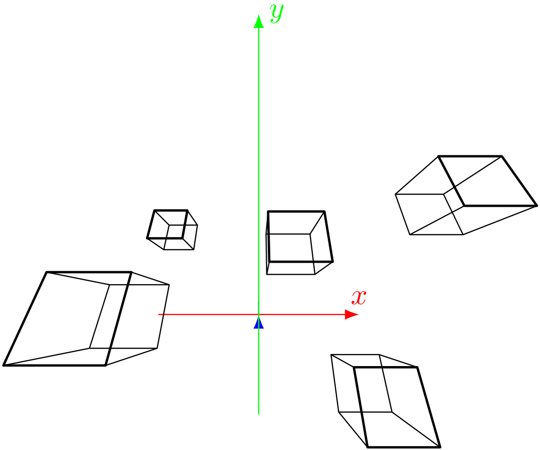


«Вид из камеры»

Параллельная преобразования проекция на xy

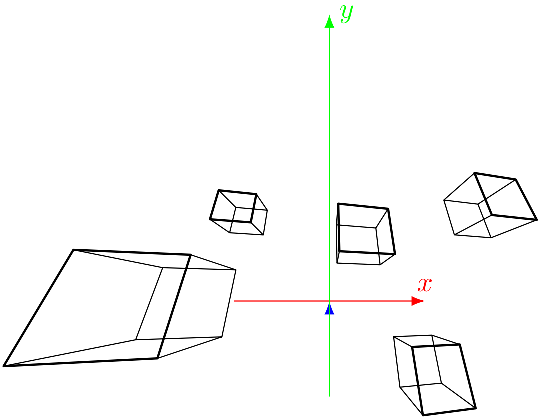


Двухточечная перспектива



$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 1 \end{pmatrix}$$

Трёхточечная перспектива



$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{pmatrix}$$