Трансляция презентации (во время очных лекций).

При просмотре презентации в PDF для отображения анимаций на слайдах необходимо использовать Acrobat Reader, KDE Okular, PDF-XChange или Foxit Reader.

Компьютерная графика
Лекция 2
Математические основы компьютерной графики

Гаврилов Андрей Геннадьевич

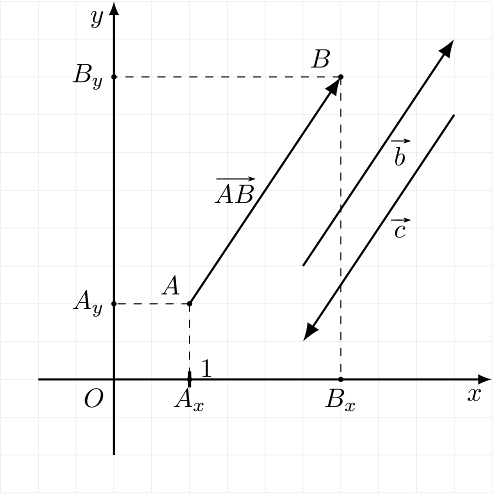
Кафедра Информационных технологий и вычислительных систем
МГТУ «СТАНКИН»

23 апреля 2024 г.

Раздел 1

Вектор

Вектор



$\overrightarrow{AB}$ — вектор.

$\vec{a} \equiv \overrightarrow{AB}$

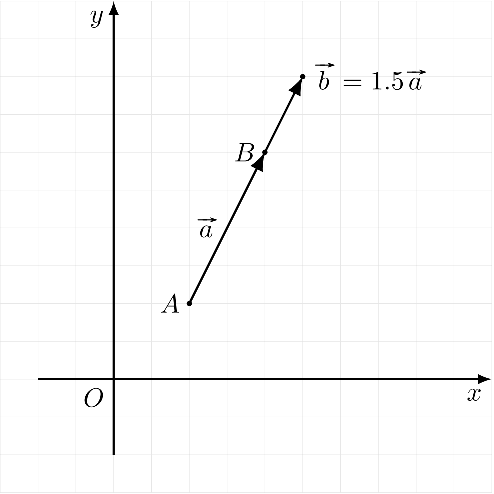
$\vec{a} = (a_x, a_y)$

$a_x = B_x - A_x,\ a_y = B_y - A_y$

$\vec{a} = (2, 3)$

$\vec{a} = \vec{b},\ \vec{c} = -\vec{a}$

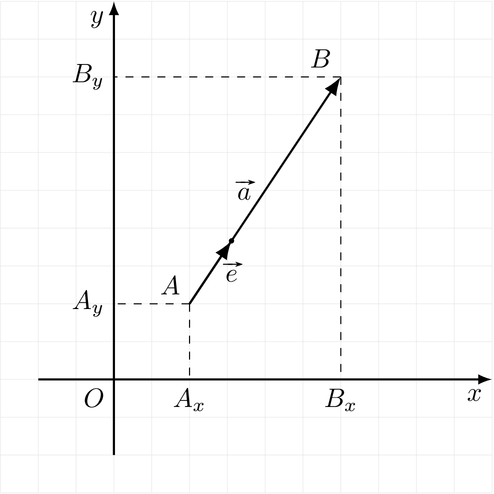
Произведение вектора на скаляр



Если $\vec{b} = k\vec{a}$,

то $\vec{b} = (ka_x, ka_y)$.

Произведение вектора на скаляр



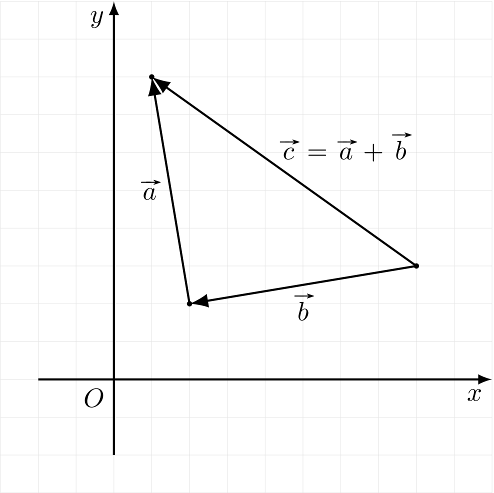
$$d = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Пусть $|\vec{e}| = 1$ и $\vec{e} \uparrow\uparrow \vec{a}$.
Тогда:
$$\vec{a} = d\vec{e}$$

Выделение «векторного» компонента (нормализация):

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

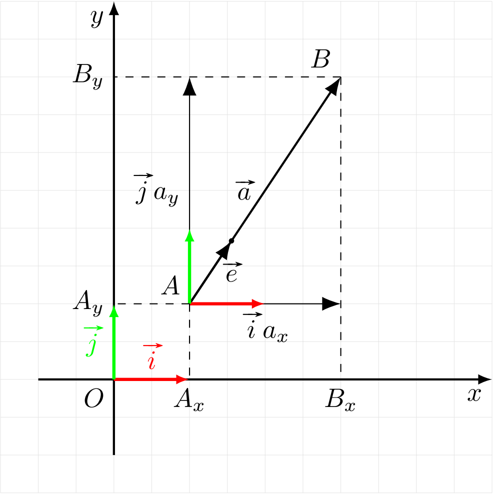
Сумма векторов



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$c_x = a_x + b_x$$
$$c_y = a_y + b_y$$

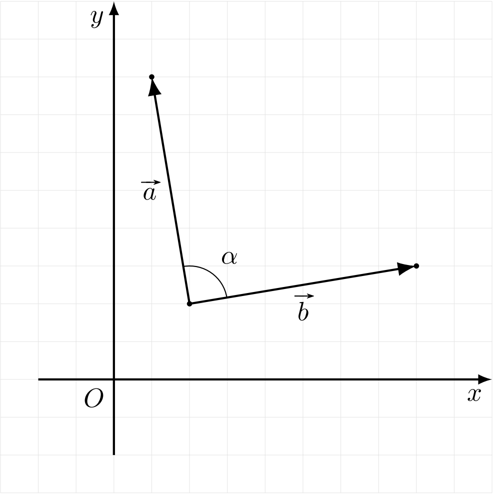
«Разборка и сборка» векторов



Орты:
$\vec{i} = (1, 0)$ и $\vec{j} = (0, 1)$

$$\vec{a} = \vec{i}\,a_x + \vec{j}\,a_y$$

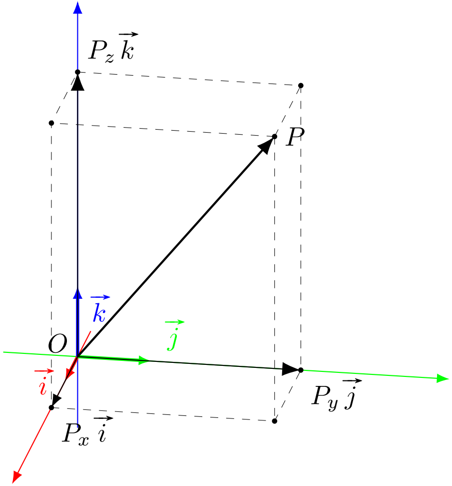
Скалярное произведение векторов



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Радиус-вектор



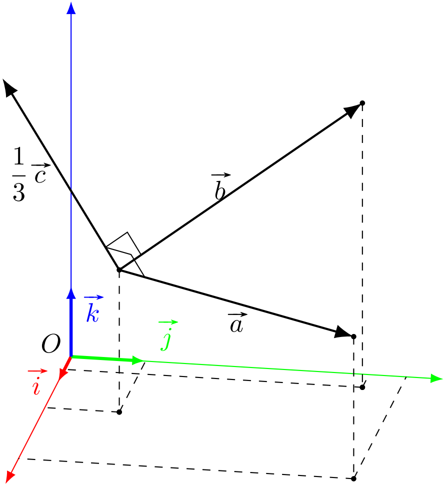
$$P(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{p} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Орты:

$\vec{i} = (1, 0, 0)$
$\vec{j} = (0, 1, 0)$
$\vec{k} = (0, 0, 1)$

$\vec{p}$ – радиус-вектор

Векторное произведение векторов



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

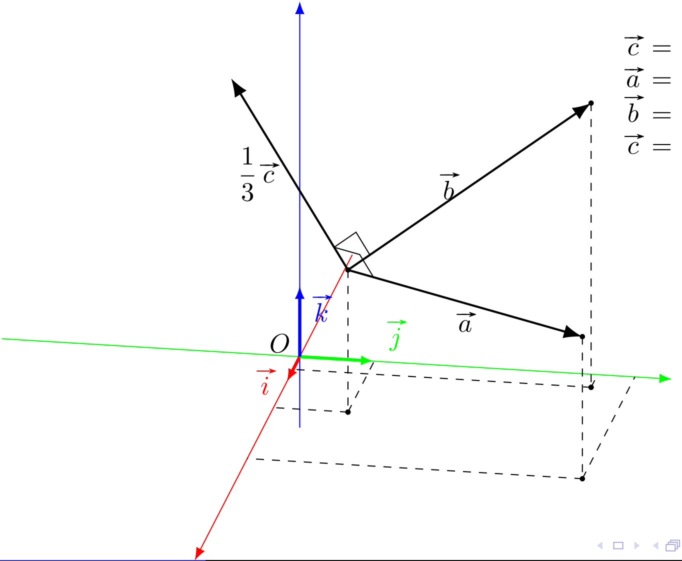
$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)}$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

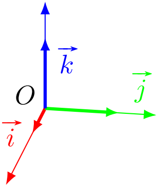
$$\vec{c} = \begin{aligned} &\vec{i}\,(a_y b_z - a_z b_y) - \\ &-\vec{j}\,(a_x b_z - a_z b_x) + \\ &+\vec{k}\,(a_x b_y - a_y b_x) \end{aligned}$$

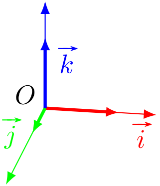
Векторное произведение в движении



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$
$$\vec{a} = (2, 3.5, 0)$$
$$\vec{b} = (-1.5, 3, 2)$$
$$\vec{c} = (7, -4, 11.25)$$

Векторное произведение орт



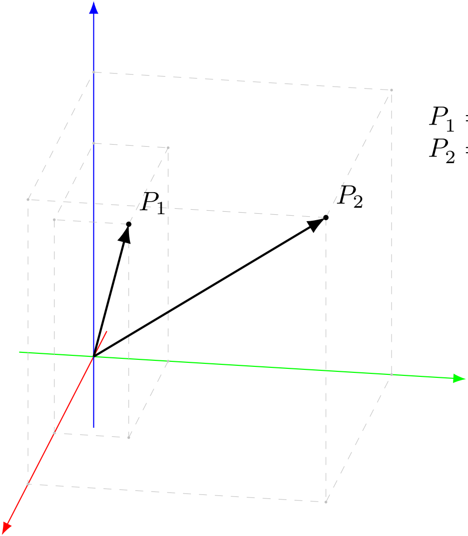


- Для правой системы координат:
$$\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$$
$$\vec{i} = \vec{j} \times \vec{k}$$
$$\vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}$$
- Для левой системы координат:
$$\vec{k} = \vec{j} \times \vec{i}$$
$$\vec{j} = \vec{i} \times \vec{k}$$
$$\vec{i} = \vec{k} \times \vec{j}$$

Раздел 2

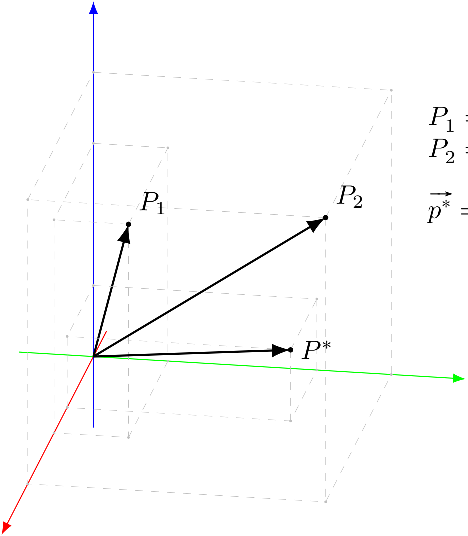
Элементы аналитической геометрии

Прямая



$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1}$$
$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_2}$$

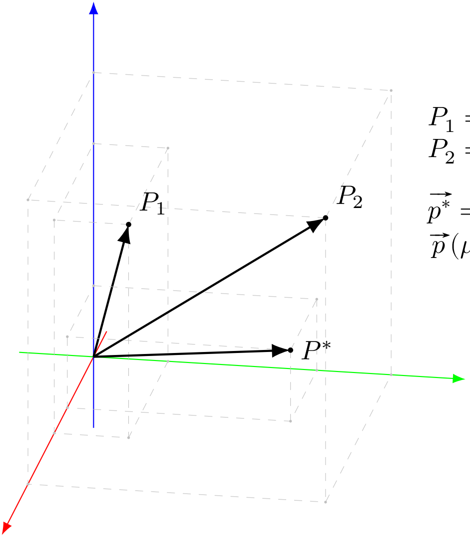
Прямая



$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1}$$
$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_2}$$

$$\overrightarrow{p^*} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$$

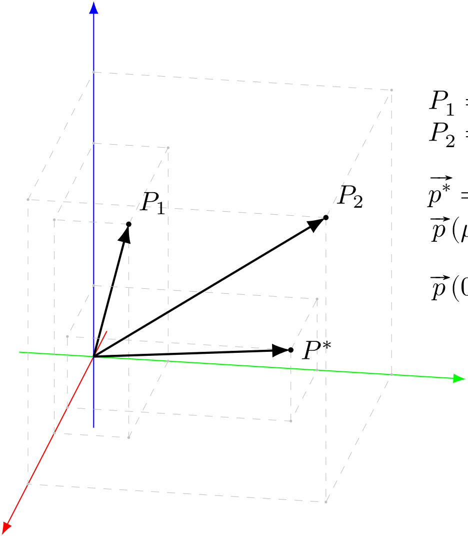
Прямая



$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1}$$
$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_2}$$

$$\overrightarrow{p^*} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$$
$$\overrightarrow{p}(\mu) = \overrightarrow{p_1} + \mu\overrightarrow{p^*}$$

Прямая

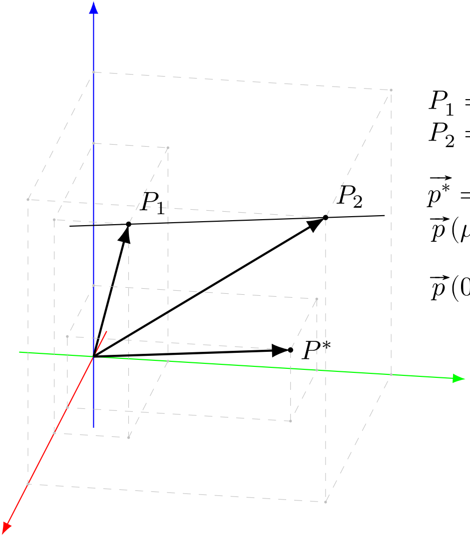


$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1}$$
$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_2}$$

$$\overrightarrow{p^*} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$$
$$\overrightarrow{p}(\mu) = \overrightarrow{p_1} + \mu\overrightarrow{p^*}$$

$$\overrightarrow{p}(0) = ?, \overrightarrow{p}(1) = ?, \overrightarrow{p}(0.5) = ?$$

Прямая

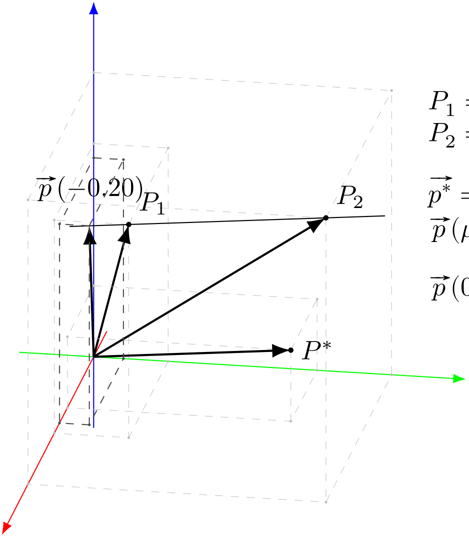


$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1}$$
$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_2}$$

$$\overrightarrow{p^*} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$$
$$\overrightarrow{p}(\mu) = \overrightarrow{p_1} + \mu\overrightarrow{p^*}$$

$$\overrightarrow{p}(0) = ?, \overrightarrow{p}(1) = ?, \overrightarrow{p}(0.5) = ?$$

Прямая

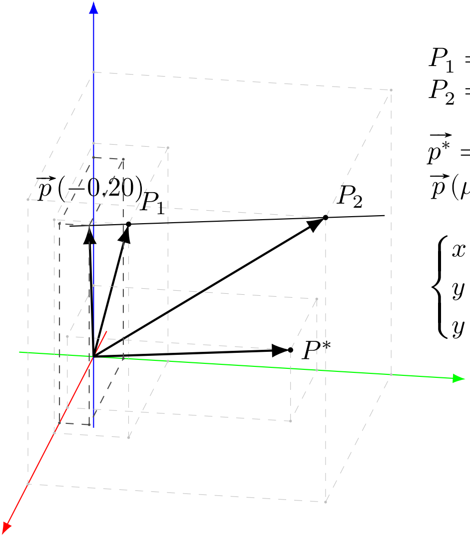


$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1}$$
$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_2}$$

$$\overrightarrow{p^*} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$$
$$\overrightarrow{p}(\mu) = \overrightarrow{p_1} + \mu\overrightarrow{p^*}$$

$$\overrightarrow{p}(0) = ?, \overrightarrow{p}(1) = ?, \overrightarrow{p}(0.5) = ?$$

Прямая

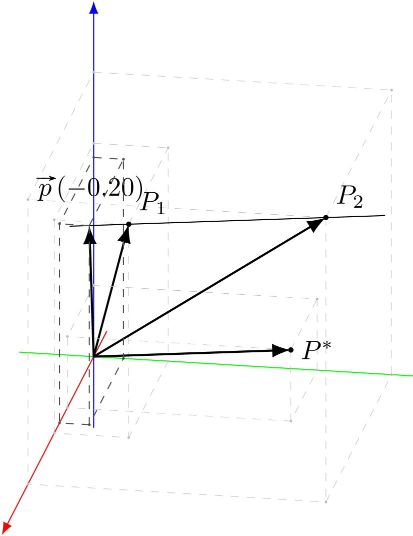


$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1}$$
$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{p_2}$$

$$\overrightarrow{p^*} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$$
$$\overrightarrow{p}(\mu) = \overrightarrow{p_1} + \mu\overrightarrow{p^*}$$

$$\begin{cases} x - x_1 = \mu(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = \mu(y_2 - y_1) \\ y - y_1 = \mu(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Прямая



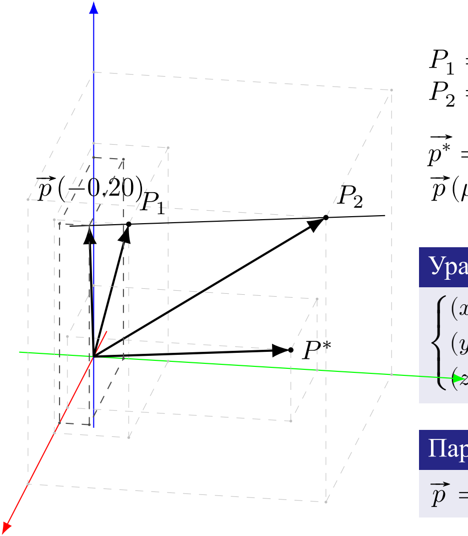
$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \vec{p_1}$$
$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \vec{p_2}$$

$$\vec{p^*} = \vec{p_2} - \vec{p_1}$$
$$\vec{p}(\mu) = \vec{p_1} + \mu\vec{p^*}$$

Уравнение прямой по двум точкам

$$\begin{cases} (x - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1) \\ (y - y_1)(z_2 - z_1) = (y_2 - y_1)(z - z_1) \\ (z - z_1)(x_2 - x_1) = (z_2 - z_1)(x - x_1) \end{cases}$$

Прямая



$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \vec{p_1}$$
$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow \vec{p_2}$$

$$\vec{p^*} = \vec{p_2} - \vec{p_1}$$
$$\vec{p}(\mu) = \vec{p_1} + \mu\vec{p^*}$$

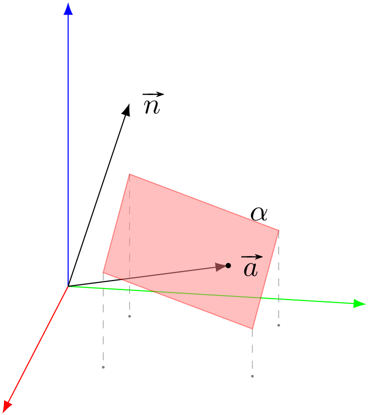
Уравнение прямой по двум точкам

$$\begin{cases} (x - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1) \\ (y - y_1)(z_2 - z_1) = (y_2 - y_1)(z - z_1) \\ (z - z_1)(x_2 - x_1) = (z_2 - z_1)(x - x_1) \end{cases}$$

Параметрическая запись

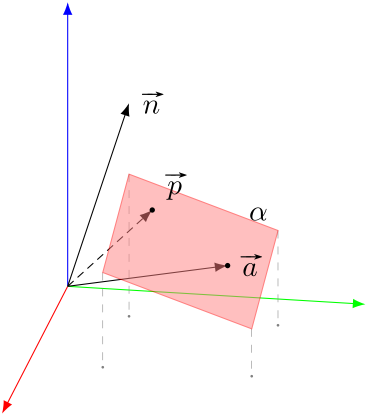
$$\vec{p} = (1 - \mu)\vec{p_1} + \mu\vec{p_2}$$

Уравнение плоскости по точке и нормали



$$A \Leftrightarrow \vec{a}, A \in \alpha, \vec{n} \perp \alpha.$$

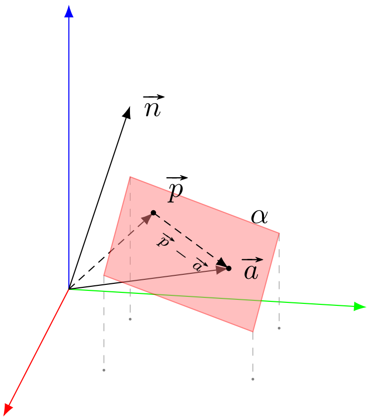
Уравнение плоскости по точке и нормали



$$A \Leftrightarrow \vec{a}, A \in \alpha, \vec{n} \perp \alpha.$$

$$P \Leftrightarrow \vec{p}, P \in \alpha.$$

Уравнение плоскости по точке и нормали

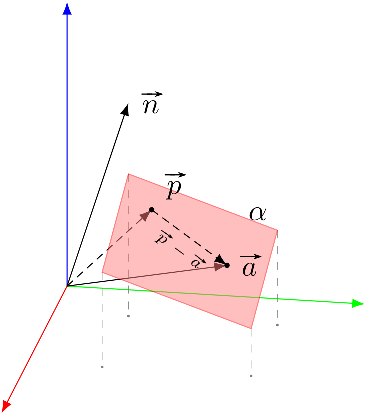


$$A \Leftrightarrow \vec{a}, A \in \alpha, \vec{n} \perp \alpha.$$

$$P \Leftrightarrow \vec{p}, P \in \alpha.$$

$$\forall P \in \alpha : (\vec{p} - \vec{a}) \parallel \alpha$$

Уравнение плоскости по точке и нормали



$$A \Leftrightarrow \vec{a}, A \in \alpha, \vec{n} \perp \alpha.$$

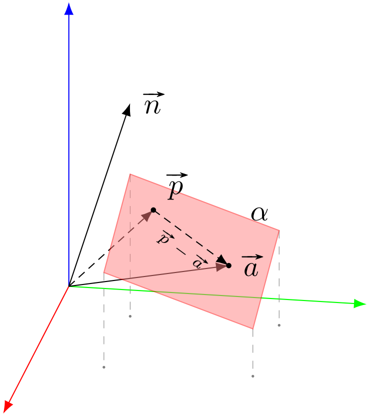
$$P \Leftrightarrow \vec{p}, P \in \alpha.$$

$$\forall P \in \alpha : (\vec{p} - \vec{a}) \parallel \alpha \Leftrightarrow$$

Уравнение плоскости (1)

$$\vec{n}(\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

Уравнение плоскости по точке и нормали



$$A \Leftrightarrow \vec{a}, A \in \alpha, \vec{n} \perp \alpha.$$

$$P \Leftrightarrow \vec{p}, P \in \alpha.$$

$$\forall P \in \alpha : (\vec{p} - \vec{a}) \parallel \alpha \Leftrightarrow$$

Уравнение плоскости (1)

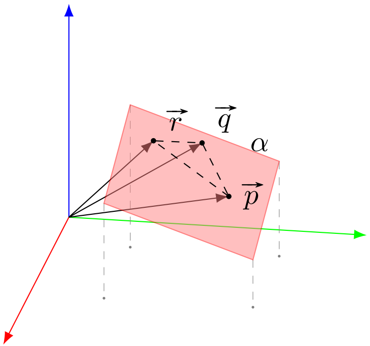
$$\vec{n}(\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

Уравнение плоскости (2)

$$Ax + By + Cz = c$$

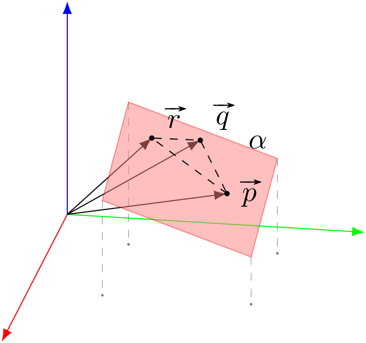
где $P = (x, y, z), \vec{n} = (A, B, C), c = \vec{n}\vec{a}$

Уравнение плоскости по трём точкам



Пусть заданы три вектора $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$, не лежащие на одной прямой и определяющие плоскость α.

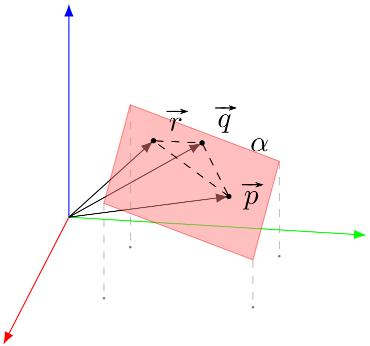
Уравнение плоскости по трём точкам



Пусть заданы три вектора $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$, не лежащие на одной прямой и определяющие плоскость α.

Тогда $(\vec{p} - \vec{q}) \times (\vec{p} - \vec{r}) \perp \alpha$

Уравнение плоскости по трём точкам

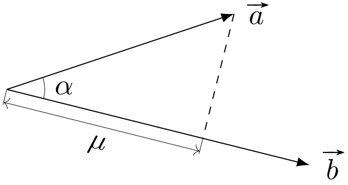


Пусть заданы три вектора $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$, не лежащие на одной прямой и определяющие плоскость α.

Тогда $(\vec{p} - \vec{q}) \times (\vec{p} - \vec{r}) \perp \alpha$

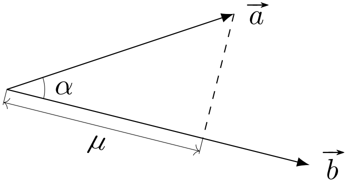
$\forall X \in \alpha :$
$[(\vec{p} - \vec{q}) \times (\vec{p} - \vec{r})] \cdot (\vec{x} - \vec{q}) = 0$

Задача: Найти длину проекции



Дано: $\vec{a}$, $\vec{b}$
Найти: μ.

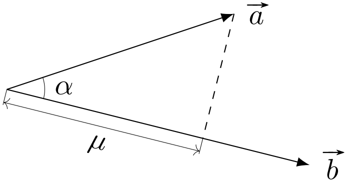
Задача: Найти длину проекции



Дано: $\vec{a}$, $\vec{b}$
Найти: μ.

1. $\mu = |\vec{a}| \cos\alpha$.

Задача: Найти длину проекции

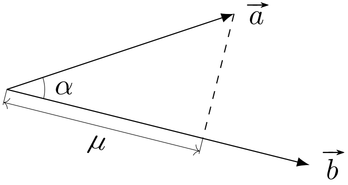


Дано: $\vec{a}, \vec{b}$
Найти: μ.

1. $\mu = |\vec{a}| \cos\alpha$.
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \left|\vec{b}\right|}$$

Задача: Найти длину проекции



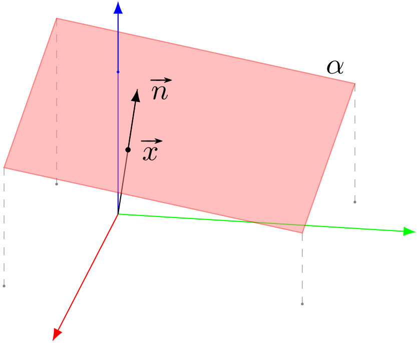
Дано: $\vec{a}$, $\vec{b}$
Найти: μ.

1. $\mu = |\vec{a}| \cos \alpha$.
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \left|\vec{b}\right|}$$

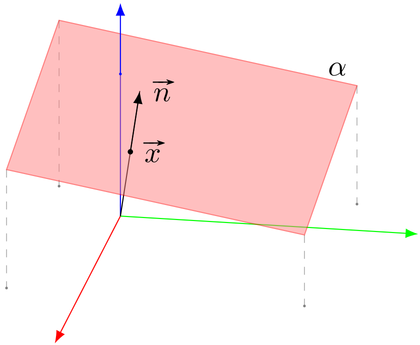
3. $\mu = |\vec{a}| \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \left|\vec{b}\right|} = \vec{a} \dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$

Задача: Расстояние до плоскости



Дано: Плоскость $\vec{n}\,\vec{x} = c$.
Найти: Расстояние от т. O до плоскости.

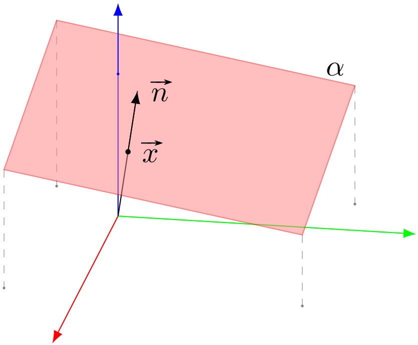
Задача: Расстояние до плоскости



Дано: Плоскость $\vec{n}\vec{x} = c$.
Найти: Расстояние от т. O до плоскости.

1. $x = \vec{p_1} + \mu\vec{p^*}$ — прямая, проходящая через $\vec{p_1}$ в направлении $\vec{p^*}$

Задача: Расстояние до плоскости

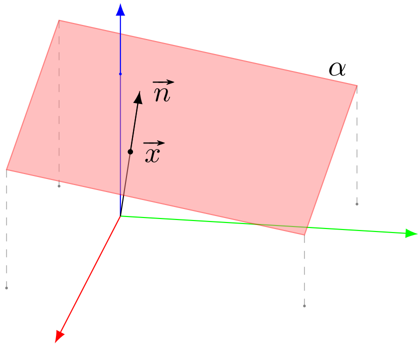


Дано: Плоскость $\vec{n}\vec{x} = c$.
Найти: Расстояние от т. O до плоскости.

1. $x = \vec{p_1} + \mu \vec{p^*}$ — прямая, проходящая через $\vec{p_1}$ в направлении $\vec{p^*}$

2. $\vec{p_1} = 0, \ \vec{p^*} = \vec{n}$

Задача: Расстояние до плоскости



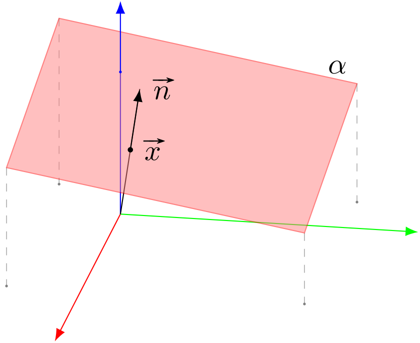
Дано: Плоскость $\vec{n}\vec{x} = c$.
Найти: Расстояние от т. O до плоскости.

1. $x = \vec{p_1} + \mu\vec{p^*}$ — прямая, проходящая через $\vec{p_1}$ в направлении $\vec{p^*}$

2. $\vec{p_1} = 0,\ \vec{p^*} = \vec{n}$

3. $\vec{x} = \mu\vec{n}$,
$\mu\vec{n}^2 = c \Rightarrow \mu = \dfrac{c}{\vec{n}^2}$,

Задача: Расстояние до плоскости



Дано: Плоскость $\vec{n}\vec{x} = c$.
Найти: Расстояние от т. O до плоскости.

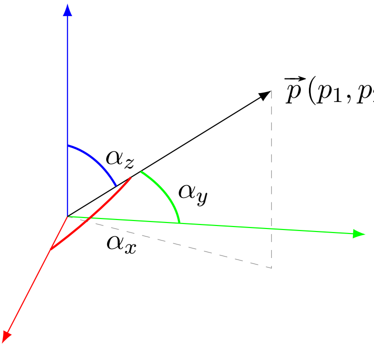
1. $x = \vec{p_1} + \mu\vec{p^*}$ — прямая, проходящая через $\vec{p_1}$ в направлении $\vec{p^*}$

2. $\vec{p_1} = 0, \ \vec{p^*} = \vec{n}$

3. $\vec{x} = \mu\vec{n}$,
$\mu\vec{n}^2 = c \Rightarrow \mu = \dfrac{c}{\vec{n}^2}$,

4. $\vec{x} = \dfrac{c}{\vec{n}^2}\vec{n} \Rightarrow \boxed{|\vec{x}| = \dfrac{c}{|\vec{n}|}}$

Направляющие косинусы



Пусть $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и $(\widehat{\vec{p}, OX}) = \alpha_x$, $(\widehat{\vec{p}, OY}) = \alpha_y$, $(\widehat{\vec{p}, OZ}) = \alpha_z$.

Направляющие косинусы

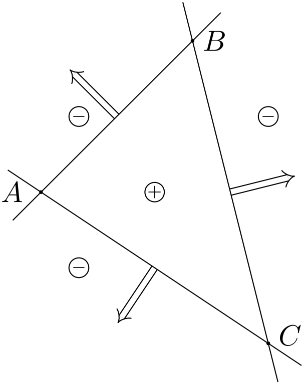
$$\cos\alpha_x = \frac{p_1}{|\vec{p}|}, \ \cos\alpha_y = \frac{p_2}{|\vec{p}|}, \ \cos\alpha_z = \frac{p_3}{|\vec{p}|}$$

$$\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1$$

$$\cos\alpha_x : \cos\alpha_y : \cos\alpha_z = p_1 : p_2 : p_3$$

Если $|\vec{p}| = 1$, то $\cos\alpha_x = p_1$, $\cos\alpha_y = p_2$, $\cos\alpha_z = p_3$.

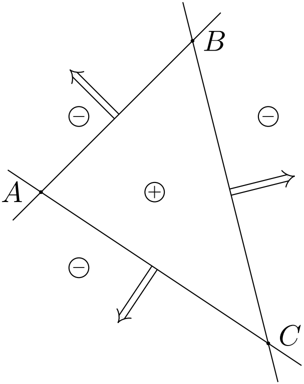
Задача: Находится ли точка внутри треугольника?



Метод 1

$$f(x, y) = Lx + My + N$$ — прямая,
$$\vec{n} = (L, M) \perp f.$$

Задача: Находится ли точка внутри треугольника?

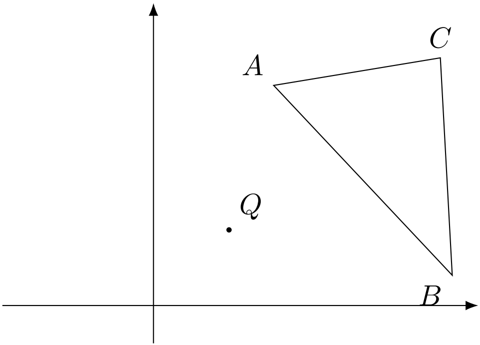


Метод 1

$f(x, y) = Lx + My + N$ — прямая,
$\overrightarrow{n} = (L, M) \perp f.$

Решение: Проверка знака функций прямых $f(x, y)$ для всех сторон треугольника и его вершин.

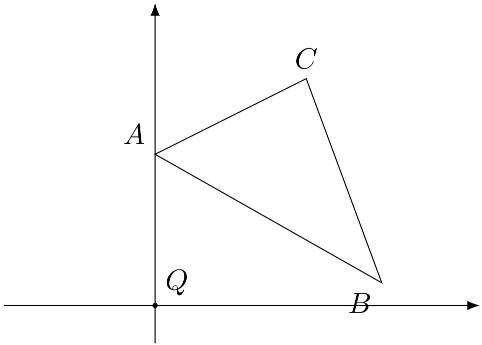
Задача: Находится ли точка внутри треугольника?



Метод 2

1. Преобразуем треугольник так, чтобы Q совпадала с началом координат, а одна из его вершин лежала на оси OY.

Задача: Находится ли точка внутри треугольника?

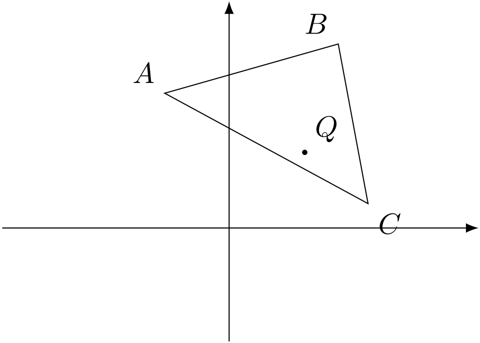


Метод 2

1. Преобразуем треугольник так, чтобы Q совпадала с началом координат, а одна из его вершин лежала на оси OY.

2. Если координаты x других вершин одного знака, то Q лежит вне треугольника, в противном случае — внутри.

Задача: Находится ли точка внутри треугольника?

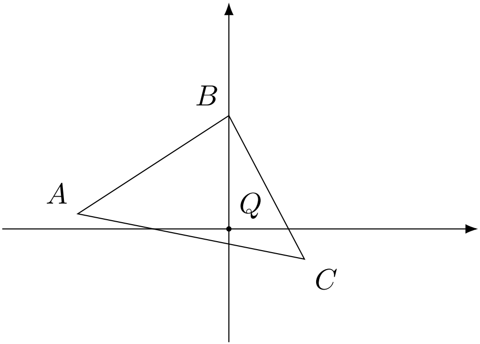


Метод 2

1. Преобразуем треугольник так, чтобы Q совпадала с началом координат, а одна из его вершин лежала на оси OY.

2. Если координаты x других вершин одного знака, то Q лежит вне треугольника, в противном случае — внутри.

Задача: Находится ли точка внутри треугольника?

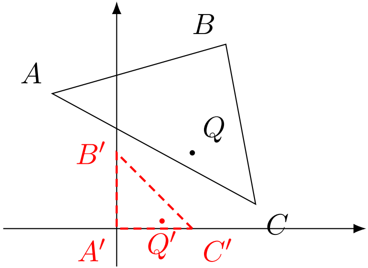


Метод 2

1. Преобразуем треугольник так, чтобы Q совпадала с началом координат, а одна из его вершин лежала на оси OY.

2. Если координаты x других вершин одного знака, то Q лежит вне треугольника, в противном случае — внутри.

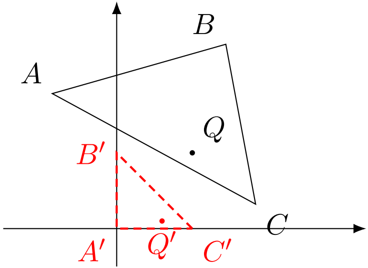
Задача: Находится ли точка внутри треугольника?



Метод 3

1. Найти преобразование
$q : \triangle ABC \xrightarrow{q} \triangle A'B'C'$ и
$A' = (0, 0), B' = (1, 0), C' = (0, 1).$

Задача: Находится ли точка внутри треугольника?

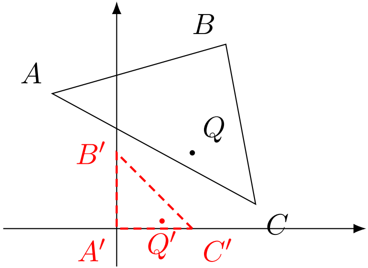


Метод 3

1. Найти преобразование
$q : \triangle ABC \xrightarrow{q} \triangle A'B'C'$ и
$A' = (0,0), B' = (1,0), C' = (0,1)$.

2. Применить это преобразование к Q:
$Q \xrightarrow{q} Q'$.

Задача: Находится ли точка внутри треугольника?



Метод 3

1. Найти преобразование
$q : \triangle ABC \xrightarrow{q} \triangle A'B'C'$ и
$A' = (0,0), B' = (1,0), C' = (0,1)$.

2. Применить это преобразование к Q:
$Q \xrightarrow{q} Q'$.

3. Если $Q'_x + Q'_y < 1$, точка лежит внутри треугольника.