

# 해석개론 이야기

포만한 수학하는원태인

January 8, 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Completeness of <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>2</b>
1.1	Field . . . . .	2
1.2	Order . . . . .	4
1.3	Complete Ordered Field . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Sequence</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Euclidean Space</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Open Set and Closed Set</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Completeness of Euclidean Spaces</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Series</b>	<b>8</b>
<b>7</b>	<b>Compactness</b>	<b>8</b>
<b>8</b>	<b>Connectedness</b>	<b>8</b>
<b>9</b>	<b>Continuity</b>	<b>8</b>

원래 다른 사이트에서 올리던 글을, 사정이 생겨 여기서 계속 이어 올리게 되었습니다.

1년 동안 공부한 해석개론의 내용을 [1]과 [2]의 내용을 중심으로 복습하는 김에, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 연습도 좀 하고, (정말 낮은 확률로) 여기에 관심 있는 독자가 존재한다면 재미있는 내용을 전달하기 위해서 쓰는 글입니다. 저도 일개 학부생이니 오류나 오타가 있을 수 있으며, 같은 대상을 지칭하는 영어와 한국어 용어도 혼용하고 있고, 한번에 쓰는 글이 아니므로 서술 방식과 문체도 글 내부에서 상당히 다를 수 있습니다.

## 1 Completeness of $\mathbb{R}$

해석개론의 출발점은 실수 집합  $\mathbb{R}$ 의 성질을 규명하는 것입니다. 이를 위해서 몇 가지 정의가 필요합니다.

### 1.1 Field

**Definition 1.1.** 집합  $F$ 에 이항 연산  $+$ 와  $\cdot$ 이 정의되어<sup>1</sup> 있을 때, 다음 (F1)-(F9)를 만족하면  $(F, +, \cdot)$  또는 간단하게  $F$ 를 **field(체)**라고 한다.  $+$ 와  $\cdot$ 을 각각 덧셈, 곱셈이라고 한다.

$$(F1) \quad x + (y + z) = (x + y) + z \text{ for } x, y, z \in F.$$

$$(F2) \quad 0 \in F \text{가 존재하여 } [x + 0 = 0 + x = x \text{ for } x \in F].$$

$$(F3) \quad x \in F \text{에 대하여 } -x \in F \text{가 존재하여 } x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

$$(F4) \quad x + y = y + x \text{ for } x, y \in F.$$

$$(F5) \quad x(yz) = (xy)z \text{ for } x, y, z \in F.$$

$$(F6) \quad 1 \in F \setminus \{0\} \text{이 존재하여 } [x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \text{ for } x \in F].$$

$$(F7) \quad x \in F \setminus \{0\} \text{에 대하여 } x^{-1} \in F \text{가 존재하여 } xx^{-1} = x^{-1}x = 1.$$

$$(F8) \quad xy = yx \text{ for } x, y \in F.$$

$$(F9) \quad x(y + z) = xy + xz, (x + y)z = xz + yz \text{ for } x, y, z \in F.$$

---

<sup>1</sup>집합  $X$ 에 이항 연산  $*$ 이 정의되었다는 것은 함수  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$ 가 잘 정의되었다는 뜻. 다시 말해서, 임의의  $x, y \in X$ 에 대해  $*(x, y) = x * y$ 가  $X$  안의 유일한 원소로 결정된다는 뜻이다.

다음이 성립하는 것을 관찰할 수 있습니다.

**Proposition 1.2.** Field  $F$ 에 대하여 다음이 성립한다( $x, y, z \in F$ ).

- (a)  $x + y = x + z$ 이면  $y = z$ . ( $x, y, z \in F$ )
- (b)  $y \in F$ 가  $[x + y = y + x = x \text{ for } x \in F]$ 를 만족하면  $y = 0$ .<sup>2</sup>
- (c)  $x + y = y + x = 0$ 이면  $y = -x$ . ( $x, y \in F$ )
- (d) For  $x \in F$ ,  $-(-x) = x$ .

*Proof.*

- (a):  $y = 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y) = -x + (x + z) = (-x + x) + z = 0 + z = z$ .
- (b):  $x + y = x = x + 0$ 이므로, (a)에 의해  $y = 0$ .
- (c):  $x + y = 0 = x + (-x)$ 이므로, (a)에 의해  $y = -x$ .
- (d):  $-x + x = x + (-x) = 0$ 이므로, (c)에 의해  $x = -(-x)$ . □

**Proposition 1.3.** Field  $F$ 에 대하여 다음이 성립한다( $x, y, z \in F$ ).

- (a)  $xy = xz$ 이면  $y = z$ . ( $x, y, z \in F, x \neq 0$ )
- (b)  $y \in F$ 가  $[xy = yx = x \text{ for } x \in F]$ 를 만족하면  $y = 1$ .<sup>3</sup>
- (c)  $xy = yx = 1$ 이면  $y = x^{-1}$ . ( $x, y \in F, x \neq 0$ )
- (d) For  $x \in F \setminus \{0\}$ ,  $(x^{-1})^{-1} = x$ .

*Proof.* Proposition 1.2의 증명과 거의 같다. □

**Proposition 1.4.** Field  $F$ 에 대하여 다음이 성립한다( $x, y \in F$ ).

- (a)  $0x = 0$ .
- (b)  $xy = 0$ 이면  $x = 0$  or  $y = 0$ .
- (c)  $(-1)x = -x$ .

---

<sup>2</sup>사실 이것이 없으면 (F3)은 non-sense.

<sup>3</sup>사실 이것이 없으면 (F7)은 non-sense.

(d)  $(-x)y = x(-y) = -(xy)$ 이고  $(-x)(-y) = xy$ .

*Proof.*

(a):  $0x + 0 = 0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$ 이므로 Proposition 1.2 (a)에 의해.

(b):  $xy = 0$ 이면서  $x \neq 0, y \neq 0$ 이면  $x^{-1}, y^{-1}$ 이 존재하므로

$$0 = 0(y^{-1}x^{-1}) = (xy)(y^{-1}x^{-1}) = xx^{-1} = 1$$

이므로 모순.

(c):  $x + (-x) = 0 = 0x = (1 + (-1))x = 1x + (-1)x = x + (-1)x$ 이므로 Proposition 1.2 (a)에 의해.

(d): (c)에 의해 당연. □

**Example.**  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  등은 모두 field입니다. 주로  $\mathbb{R}$ 을 다룰 것입니다.

## 1.2 Order

어떤 수가 다른 수보다 ‘크다’고 하는 것은 어떤 의미일까요? 순서의 개념을 일반화합니다.

**Definition 1.5.** 집합  $S$ 에 주어진 관계(relation)  $>$ 가 다음 조건을 만족하면  $>$ 를 **strict partial order**라고 한다.

(a)  $x > x$ 인  $x \in S$ 는 존재하지 않는다.

(b)  $x > y$ 이고  $y > z$ 이면  $x > y > z$ . ( $x, y, z \in S$ )

Strict partial order  $>$ 가 다음 조건까지 만족하면  $>$ 를 **strict total order**라고 한다.

(c)  $x, y \in S$ 에 대해  $x > y, x = y, y > x$  중 오직 하나만 참.

**Example.**  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$  등에 주어진 일상적인 의미의  $>$ 가 strict total order임은 쉽게 확인할 수 있습니다.

**Remark.** 편의를 위해  $<, \geq, \leq$ 의 기호도 우리가 생각하는 의미 그대로 사용하기로 합니다.

**Definition 1.6.** Strict total order  $>$ 가 주어진 field  $F$ 가 다음 조건을 만족할 때  $F$ 를 **ordered field(순서체)**라고 한다.

(a)  $x < y$ 이면  $x + z < y + z$ . ( $x, y, z \in F$ )

(b)  $x > 0, y > 0$ 이면  $xy > 0$ . ( $x, y \in F$ )

**Example.**  $\mathbb{R}$ 이나  $\mathbb{Q}$ 에 일상적인 의미의  $>$ 를 주면 ordered field가 됩니다.

**Definition 1.7.** Ordered field  $F$ 의 부분집합  $S \subseteq F$ 가 **bounded above**(위로 유계)라는 것은  $\beta \in F$ 가 존재하여  $[x \leq \beta \text{ for all } x \in S]$ 라는 것이다. 이때  $\beta$ 를 **upper bound**(상계) of  $S$ 라고 한다. 부등호 방향을 반대로 하여 **bounded below**(하계)와 **lower bound**(하계)도 정의한다.  $S$ 가 bounded above and bounded below이면  $S$ 는 **bounded**(유계)라고 한다.

**Definition 1.8.** Ordered field  $F$ 의 bounded above subset  $S$ 에 대하여  $\alpha \in F$ 가 다음 조건을 만족할 때  $\alpha$ 를 **least upper bound=supremum**(최소상계=상한) of  $S$ 라고 하고,  $\alpha = \sup S$ 로 쓴다.

(a)  $\alpha$  is an upper bound of  $S$ .

(b) If  $\gamma \in F$  is an upper bound of  $S$ , then  $\alpha \leq \gamma$ .

### 1.3 Complete Ordered Field

Ordered field  $F$ 의 bounded above subset  $S \subseteq F$ 의 supremum은 항상 존재할까요? 이 질문에 긍정적인 답을 하게 할 수 있게 하는  $F$ 가 우리의 관심사입니다.

**Definition 1.9.** 다음 두 성질을 만족하는 ordered field  $F$ 는 **least-upper-bound property** 또는 **completeness axiom**(완비성공리)을 만족시킨다고 하며  $F$ 를 **complete ordered field**(완비순서체)라고 한다.

(a) Nonempty bounded above subset  $S \subseteq F$  has a supremum in  $F$ .

(b) Nonempty bounded below subset  $S \subseteq F$  has a infimum in  $F$ .

사실 (a)와 (b)는 동치입니다.

**Proposition 1.10.** Definition 1.9의 (a)와 (b)는 동치이다.

*Proof.* (a) $\Rightarrow$ (b)만 보이면 역은 마찬가지로 보일 수 있다. (a)를 가정하고, nonempty bounded above subset  $S \subseteq F$ 와  $S$ 의 모든 lower bound들의 집합  $T$ 를 생각하자.  $S$ 가 bounded below이므로  $T$ 는 공집합이 아니고,  $S$ 의 아무 원소를 가져오면 그 원소는  $T$ 의 upper bound이므로  $T$ 는 nonempty bounded above이다. 가정 (a)에 의해  $T$ 는 supremum  $\alpha \in F$ 를 가진다. 우리의 주장:  $\alpha$ 는  $S$ 의 infimum이다.

임의의  $x \in S$ 에 대해  $x$ 는  $T$ 의 upper bound이므로  $\alpha \leq x$ 이다. 따라서  $x$ 는  $S$ 의 lower bound이다. 한편  $\gamma \in F$ 가  $S$ 의 lower bound라고 하면  $T$ 의 정의에 의해  $\gamma \in T$ 인데,  $\alpha = \sup T$ 이므로  $\gamma \leq \alpha$ 이다. 따라서  $\alpha = \inf S$ 이다.  $\square$

모든 ordered field가 complete인 것은 아닙니다. 대표적으로  $\mathbb{Q}$ 는 complete가 아닌데,  $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ 는 nonempty bounded above subset of  $\mathbb{Q}$ 이지만  $\mathbb{Q}$ 에서 supremum을 가지지 않음을 쉽게 확인할 수 있습니다.

그렇다면 실제로 complete ordered field가 존재하는지가 궁금한데, 그 답은 긍정적입니다.

**Theorem 1.11.** Complete ordered field  $F$ 가 존재하고, 그  $F$ 를 실수체  $\mathbb{R}$ 이라고 부른다.

수학에서 어떤 것의 존재성을 보일 때는 다른 정리의 도움을 받거나, 아니면 실제로 그 대상을 구성(construct)해야 합니다.

우리가 수 체계를 배웠던 과정을 생각해보면, 자연수에서 정수, 유리수까지는 나름 자연스러운 확장이었고, 실수에서 복소수도 자연스러운 확장인데 – 유리수와 실수 사이에 어떤 gap이 있었습니다. 적어도 저한테는 그랬습니다. 제공해서 2가 되는 유리수가 없다는 것으로 유리수체가 어떤 의미로 ‘불완전함’을 설명하곤 하지만, 이는 유리수체에서 실수체로의 확장이라기보다는 유리수체에서 field of algebraic number(algebraic number, 대수적 수: 유리계수 다항식의 근)로의 확장에 가깝습니다. 이제서야 우리는 실수가 어떻게 만들어졌는지 알았습니다. **유리수체  $\mathbb{Q}$ 의 빈틈을 채워 넣어서 completeness axiom을 만족하도록 실수체  $\mathbb{R}$ 을 직접 ‘구성’한 것입니다.** 그래서 실수체가 complete인 것은 증명의 대상이 아닌데, 왜냐하면 그것을 만족하도록 실수체를 만들었기 때문입니다.

$\mathbb{Q}$ 로부터  $\mathbb{R}$ 를 구성하여 정의하는(실수의 구성적 정의) 대표적인 방법에는 두 가지가 있는데, 하나는 Cantor의 방법이고 하나는 Dedekind의 방법입니다. 다른 글에서 이를 다룰 기회가 있을 것입니다.

여기서 드는 한 가지 의문은, 두 가지 방법으로 만든 실수체가 동일한가 하는 것입니다. 좀 더 일반적으로, complete ordered field는 유일한가라는 질문을 던질 수 있는데, 실제로 그렇습니다. 이 증명 역시 다른 글에서 다룰 기회가 있을 것입니다.

**Theorem 1.12.** The complete ordered field is unique up to isomorphism. i.e., for any complete ordered fields  $F_1$  and  $F_2$ , there exists a bijection  $f : F_1 \rightarrow F_2$  satisfying:

$$(a) \quad x < y \implies f(x) < f(y) \quad (x, y \in F_1)$$

$$(b) \quad f(x + y) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y) \quad (x, y \in F_1)$$

따라서  $\mathbb{R}$ 은 유일한 complete ordered field이다.

## 2 Sequence

## 3 Euclidean Space

## 4 Open Set and Closed Set

## 5 Completeness of Euclidean Spaces

## 6 Series

## 7 Compactness

## 8 Connectedness

## 9 Continuity

## References

- [1] 김성기, 김도한, 계승혁. *해석개론*. 서울대학교출판문화원. 2011.
  - [2] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill. 1976.
  - [3] 이인석. *선형대수와 군*. 서울대학교출판문화원. 2015.
  - [4] J. R. Munkres, *Topology*. Prentice Hall. 2000.
- 아래는 이 글의 한 부분에서만 인용한 것.
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/L%27H%C3%B4pital%27s\\_rule](https://en.wikipedia.org/wiki/L%27H%C3%B4pital%27s_rule)