Lecture 3: Qulitative Predictors & Interaction Terms

3.1 레벨 수가 2인 범주형 설명변수

In [2]:
```
credit.head()
```

Out[2]:

	Income	Limit	Rating	Cards	Age	Education	Gender	Student	Married	Ethnicity	Balance
1	14.891	3606	283	2	34	11	Male	No	Yes	Caucasian	333
2	106.025	6645	483	3	82	15	Female	Yes	Yes	Asian	903
3	104.593	7075	514	4	71	11	Male	No	No	Asian	580
4	148.924	9504	681	3	36	11	Female	No	No	Asian	964
5	55.882	4897	357	2	68	16	Male	No	Yes	Caucasian	331

수치형 변수에 대한 추론
- 2개 집단 비교 (두 집단 독립o) → 독립표본검정
- 2개 집단 비교 (두 집단 독립x) → paired t 검정
- 3개 이상의 집단 분산 비교 → ANOVA 검정

범주형 변수에 대한 추론 : χ^2 - test (정규분포에서 test)

- 두 개의 가능한 값을 가지는 indicator variable (dummy variable)을 생성

$$d_i = \begin{cases} 1 & i\text{번째 사람이 학생인 경우} \\ 0 & i\text{번째 사람이 학생이 아닌 경우} \end{cases}$$

- 이 변수를 설명변수로 한 회귀식

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 d_i + \epsilon_i$$

$$y_i = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 + \epsilon_i & i\text{번째 사람이 학생인 경우 } (d_i = 1) \\ \beta_0 + \epsilon_i & i\text{번째 사람이 학생이 아닌 경우 } (d_i = 0) \end{cases}$$

- β_0: 학생이 아닌 사람의 평균 신용카드 대금 ⇒ 기준
- $\beta_0 + \beta_1$: 학생의 평균 신용카드 대금
- β_1: 학생과 학생이 아닌 사람의 평균 신용카드 대금의 차이 ⇒ 학생이 아닌 사람에 비해 학생이 평균적으로 얼마나 큰가?

독립표본 t검정 :

$H_0: \beta_1 = 0 \ (M_1 - M_2 = 0)$ ⇒ 차이가 없다. (두 집단의 평균의 차이 X)

$H_1: \beta_1 \neq 0 \ (M_1 - M_2 \neq 0)$ ⇒ 차이가 있다.

- 이 때 기준이 되는 **reference level** 은 무엇인가?
    - 기준: Student = No인 그룹
    - 기준이 되는 level의 평균 balance: β_0
    - 기준이 되는 level에 비해 다른 level의 평균 balance가 얼만큼 큰가?: β_1

학생이 아닌 그룹에 비해 학생인 그룹의 평균이 얼마나 클까?

In [3]:
```
model = smf.ols('Balance ~ Student', data = credit)
model_fit = model.fit()
model_fit.summary().tables[1]
```

Out[3]:

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	480.3694	23.434	20.499	0.000	434.300	526.439
Student[T.Yes]	396.4556	74.104	5.350	0.000	250.771	542.140

$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon_i$

$[y] = X\beta + \varepsilon$

$= \begin{bmatrix} \vdots & \\ x_{11} & \\ x_{12} & \\ \vdots & \\ x_{1n} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \varepsilon$

↳ design matrix

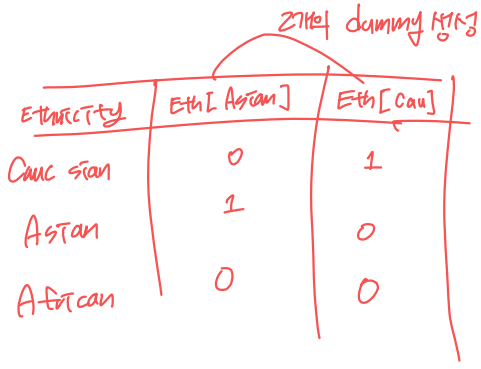
- 이 때의 design matrix는?

In [4]:
```
model.data.orig_exog
```

Out[4]:

	Intercept	Student[T.Yes]
1	1.0	0.0
2	1.0	1.0
3	1.0	0.0
4	1.0	0.0
5	1.0	0.0
...	...	...
396	1.0	0.0
397	1.0	0.0
398	1.0	0.0
399	1.0	0.0
400	1.0	0.0

400 rows × 2 columns



* One-hot encoding → 범주 3개면 3개의 dummy

회귀분석 기본 ⇒ 범주 3개면 2개의 dummy만 생김.

1) β_0 있어서 범주 개수보다 1개 적은 dummy variable 생성

ex) 3개의 범주 → 2개의 dummy 필요
2개의 범주 → 1개의 dummy 필요

⇒ 만약 범주 수만큼 dummy variable 만들면 완벽한 선형관계 가지게 됨.

↳ $(X'X)^{-1}$의 inverse 존재X ⇒ 다중공선성 발생

- $H_0 : \beta_1 = 0$
  - "학생과 학생이 아닌 사람의 평균 신용카드 대금의 차이가 없다"라는 귀무가설
  - p-value<0.05 이므로 두 집단 간의 유의한 통계적인 차이가 있다고 결론

3.2 레벨 수가 3 이상인 범주형 설명변수

- Ethnicity: 백인, 흑인, 아시아인 (레벨이 3개)
- 2개의 dummy variable 생성

2개 집단의 평균 일치?
⇒ 독립표본 t검정
3개 집단의 평균 일치?
⇒ ANOVA 검정

$$d_{1i} = \begin{cases} 1 & i\text{번째 사람이 아시아인 경우} \\ 0 & i\text{번째 사람이 아시아인이 아닌 경우} \end{cases}$$

$$d_{2i} = \begin{cases} 1 & i\text{번째 사람이 백인인 경우} \\ 0 & i\text{번째 사람이 백인이 아닌 경우} \end{cases}$$

- 이 경우 reference level은 무엇인가?
- 이 변수를 설명변수로 한 각 그룹의 회귀식

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 d_{1i} + \beta_2 d_{2i} + \epsilon_i$$

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$ → H_0이 사실이면 세 집단의 평균이 같다.
동일
분산분석 (ANOVA)
$H_0: M_1 = M_2 = M_3$
H_1: 적어도 하나의 M_i가 나머지와 다르다.
⇒ F검정으로 확인 가능

흰피에 비해서 아시아인이 얼마나 더 큰가?

$$y_i = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 + \epsilon_i & i\text{번째 사람이 아시아인인 경우} \\ \beta_0 + \beta_2 + \epsilon_i & i\text{번째 사람이 백인인 경우} \\ \beta_0 + \epsilon_i & i\text{번째 사람이 흑인인 경우} \end{cases}$$

↳ reference level

⇒ 이런 문제는 선형회귀에서만 발생!
(다른 비선형 ML모델은 문제X)

In [5]:
```
model2 = smf.ols('Balance ~ Ethnicity ', data = credit)
model2_fit = model2.fit()
model2_fit.summary().tables[1]
```

흑인에 비해 Asian은 18만큼 작음.

Out[5]:

		coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
흑인	Intercept	531.0000	46.319	11.464	0.000	439.939	622.061
	Ethnicity[T.Asian]	-18.6863	65.021	-0.287	0.774	-146.515	109.142
	Ethnicity[T.Caucasian]	-12.5025	56.681	-0.221	0.826	-123.935	98.930

⇒ 제일 작은건 아시아인

↳ 흑인에 비해 Caucasian은 12만큼 작음

In [6]:
```
model2.data.orig_exog.head()
```

유의X 큰두 변수 간 차이X

Out[6]:

	Intercept	Ethnicity[T.Asian]	Ethnicity[T.Caucasian]
1	1.0	0.0	1.0
2	1.0	1.0	0.0
3	1.0	1.0	0.0
4	1.0	1.0	0.0
5	1.0	0.0	1.0

↳

기준이 되는 레벨(reference level)을 바꾸고 싶다면?

In [7]:
```
model3 = smf.ols('Balance ~ C(Ethnicity, Treatment(reference = "Asian")) ', data = credit)
model3_fit = model3.fit()
model3_fit.summary().tables[1]
```

Out[7]:

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	512.3137	45.632	11.227	0.000	422.602	602.025
C(Ethnicity, Treatment(reference="Asian"))[T.African American]	18.6863	65.021	0.287	0.774	-109.142	146.515
C(Ethnicity, Treatment(reference="Asian"))[T.Caucasian]	6.1838	56.122	0.110	0.912	-104.149	116.517

In [8]:
```
model3.data.orig_exog.head()
```

Out[8]:

	Intercept	C(Ethnicity, Treatment(reference="Asian"))[T.African American]	C(Ethnicity, Treatment(reference="Asian"))[T.Caucasian]
1	1.0	0.0	1.0
2	1.0	0.0	0.0
3	1.0	0.0	0.0
4	1.0	0.0	0.0
5	1.0	0.0	1.0

ANOVA : 분산 이용해서 두 개 변수의 평균 차이

ANCOVA : 공변량의 효과를 제어하고 평균의 차이 보는거

3.3 범주형 설명변수와 연속형 설명변수

- 범주형 설명변수와 연속형 설명변수를 함께 사용한다면?

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 d_i + \epsilon_i$$

* Student = Yes
$Y_i = (\beta_0 + \beta_2) + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$

* Student = No
$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon_i$

In [9]:
```
model4 = smf.ols('Balance ~ Income + Student ', data = credit).fit()
model4.summary().tables[1]
```

⇒ 기울기는 동일 지정편이 다름

β_2 : 전체적으로 No 그룹에 비해 Yes 그룹의 평균이 얼마나 커지나?

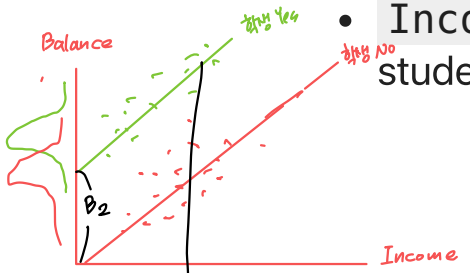
Out[9]:

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	211.1430	32.457	6.505	0.000	147.333	274.952
Student[T.Yes]	382.6705	65.311	5.859	0.000	254.272	511.069
Income	5.9843	0.557	10.751	0.000	4.890	7.079

Student 고정, Income 1증가 → Balance 1증가

- `Student[T.Yes]` 의 계수(382.67): Income이 동일한 수준일 때 학생과 학생 아닌 사람의 평균 신용카드 대금의 차이 (No인 그룹에 비해 Yes그룹이 얼마나 큰가?)

- `Income` 의 계수(5.98): Income이 1 증가할 때 Balance는 5.98 증가한다. (Student/non-student 공통) ⇒ Income : 공변량



* Income이 없다면 Balance의 Income의 평균의 차이 보려고 귀무가설 $H_0: M_1 = M_2$ 채택

* 학생 → Income ↓ → Balance ↑ (학생 효과 + Income 효과)

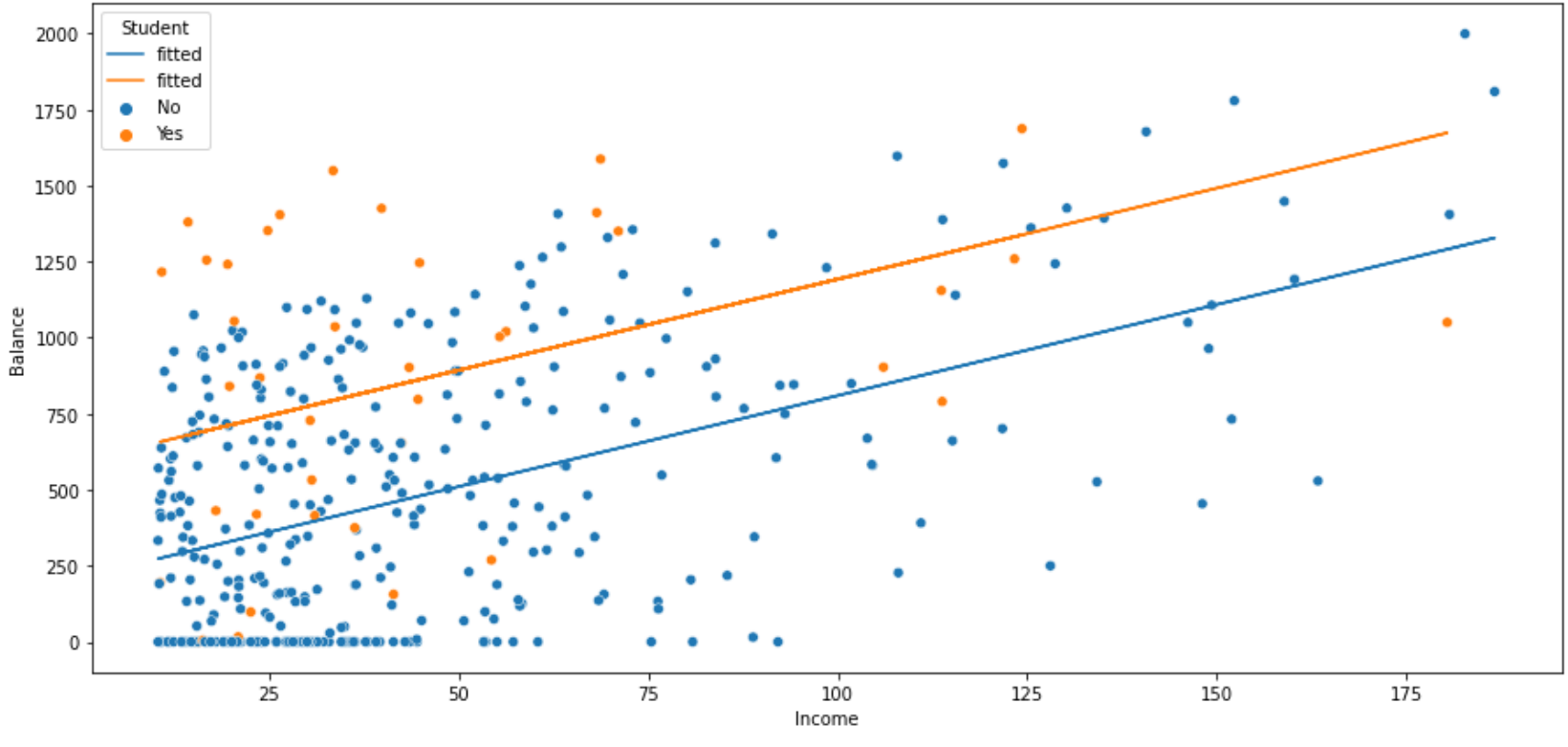
Income 고정하면 학생효과만 볼 수 있음 ⇒ 공분산 분석 (ANCOVA), Income (공변량)

In [10]:

```
credit['fitted'] = model4.fittedvalues

import seaborn as sns
fig, ax = plt.subplots(figsize=(15,7))

credit.groupby('Student').plot(x='Income', y='fitted',
                               ax=ax, legend=False)
sns.scatterplot(x= "Income", y="Balance", data=credit, hue="Student")
plt.show()
```



부분 F검정

q개의 특정 계수가 0인지 검정하고 싶다면?

$$H_0 : \beta_{p-q+1} = \beta_{p-q+2} = \cdots = \beta_p = 0$$

- F 통계량

$$F = \frac{(RSS_0 - RSS)/q}{RSS/(n-p-1)}$$

- RSS_0: 해당하는 q개의 계수를 제외한 모든 변수를 사용하는 모형에 대한 잔차제곱합
- "각 회귀계수에 대한 t-검정" = "$q = 1$인 경우의 F 검정"
- 그 변수들을 추가하는 것에 대한 **부분적 효과**에 대한 검정

Model 4 : Balance ~ Income + Student

Model 5 : Balance ~ Income + Student + Ethnicity

$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ ⇒ H_0이 사실이면 (Under H_0,) Model 4 = Model 5 ⇒ 더 단순한 Model 4 선택

In [11]:

```
from statsmodels.stats.anova import anova_lm
model5 = smf.ols('Balance ~ Income + Student + Ethnicity ', data = credit).fit()
model5.summary().tables[1]
```

Out[11]:

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	206.7655	47.992	4.308	0.000	112.413	301.117
Student[T.Yes]	384.2829	65.569	5.861	0.000	255.376	513.190
β_2 **Ethnicity[T.Asian]**	-7.9309	55.464	-0.143	0.886	-116.973	101.111
β_3 **Ethnicity[T.Caucasian]**	12.4020	48.338	0.257	0.798	-82.629	107.433
Income	5.9859	0.558	10.721	0.000	4.888	7.084

In [12]:

```
anova_lm(model4, model5)
```

Out[12]:

	df_resid	ssr	df_diff	ss_diff	F	Pr(>F)
0	397.0	6.093905e+07	0.0	NaN	NaN	NaN
1	395.0	6.090901e+07	2.0	30047.507138	0.09743	0.907187

자유도의 차이

1 : 모델 2개

2.0 : Model 2개에서의 차이

↳ 귀무가설기각 X ⇒ 2개 모델의 차이 X

⇒ 작은 모델 사용

큰모델이 작은모델 포함할때 ⇒

- H_0 기각 X ⇒ 두 모델의 차이X ⇒ 작은 모델 선택
- H_0 기각 ⇒ 두 모델의 차이 O ⇒ 큰 모델 선택

3.4 Effect coding

- 경우에 따라 특정 level을 기준으로 비교하기 보다는 모든 집단의 평균으로부터 각 집단이 평균의 유의한 차이를 보이는지가 궁금할 수 있다.
- Design matrix를 어떻게 구성하면 좋을까?

$$d_i = \begin{cases} 1 & i\text{번째 사람이 학생이 아닌 경우} \\ -1 & i\text{번째 사람이 학생인 경우} \end{cases}$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 d_i + \epsilon_i$$

$$y_i = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 + \epsilon_i & i\text{번째 사람이 학생이 아닌 경우} \\ \beta_0 - \beta_1 + \epsilon_i & i\text{번째 사람이 학생인 경우} \end{cases}$$

- β_0: 학생 여부를 고려하지 않은 전체 평균 신용카드 대금
- β_1: 학생들은 평균보다 높고 학생이 아닌 사람들은 평균보다 낮은 신용카드 대금의 양

In [13]:
```
model5 = smf.ols('Balance ~ Income + C(Student, Sum)', data = credit)
model5_fit = model5.fit()
model5_fit.summary().tables[1]
```

Out[13]:

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	402.4782	41.540	9.689	0.000	320.812	484.144
C(Student, Sum)[S.No]	-191.3353	32.655	-5.859	0.000	-255.534	-127.136
Income	5.9843	0.557	10.751	0.000	4.890	7.079

In [14]:
```
model5.data.orig_exog
```

Out[14]:

	Intercept	C(Student, Sum)[S.No]	Income
1	1.0	1.0	14.891
2	1.0	-1.0	106.025
3	1.0	1.0	104.593
4	1.0	1.0	148.924
5	1.0	1.0	55.882
...	...	...	...
396	1.0	1.0	12.096
397	1.0	1.0	13.364
398	1.0	1.0	57.872
399	1.0	1.0	37.728
400	1.0	1.0	18.701

400 rows × 3 columns

3.5 선형모형의 확장: 교호작용(상호작용) 효과 (Interaction effect)

- 표준 선형모형은 TV와 radio 둘 다 sales와 상관관계가 있으나 한 광고매체의 지출 증가가 sales에 미치는 영향은 다른 매체에 대한 지출과 무관하다고 가정

- 라디오 광고지출이 TV 광고의 효과를 증가시킨다면? 고정 광고예산을 라디오와 TV에 절반씩 지출하는 것이 어느 한쪽에 모두 사용하는 것보다 판매량 증가가 더 클 수 있다. ⇒ 시너지 효과

- 교호작용 항의 추가

main effect

Interaction effect term

$$
\begin{aligned}
Y &= \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 + \epsilon \\
&= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_3 X_2) X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon \\
&= \beta_0 + \tilde{\beta}_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon
\end{aligned}
$$

X_1의 기울기가 X_2에 따라 변함

- $X_2 = 0 \Rightarrow X_1$의 기울기 : β_1
- $X_2 \neq 0 \Rightarrow X_1$의 기울기 : $\beta_1 + \beta_3 X_2$

In [15]:

```
ad=pd.read_csv(data_path + "Advertising.csv")
model_ad = smf.ols('Sales~TV+Radio+TV*Radio', data = ad).fit()
model_ad.summary().tables[1]
```

Out[15]:

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	6.7502	0.248	27.233	0.000	6.261	7.239
TV	0.0191	0.002	12.699	0.000	0.016	0.022
Radio	0.0289	0.009	3.241	0.001	0.011	0.046
TV:Radio	0.0011	5.24e-05	20.727	0.000	0.001	0.001

Sales ~ TV + Radio

Interaction term

유의한

⇒ 모델에 넣어주는게 좋다.

TV의 기울기 : 0.0191 + 0.0011 Radio

① Radio = 0 ⇒ TV의 기울기 = 0.0191

② Radio = 100 ⇒ TV의 기울기 = 0.0191 + 0.11 = 0.1291

Radio에 기울수록 TV 1 단위 늘리면 Sales가 더 가파르게 증가

- 교호작용 항이 유의함: 실제 상관관계가 가산적이지 않다는 증거
- TV광고지출이 1천 달러 증가하면 판매량은 $(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3 \times Radio) \times 1,000$ 유닛 증가
- 라디오 광고 지출이 1천달러 증가하면 판매량은 $(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 \times TV) \times 1,000$ 유닛 증가

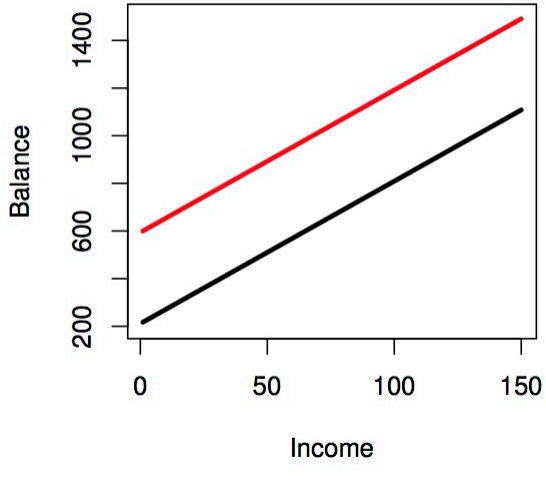
- 교호작용항이 유의하지만 주효과(main effect: 여기서는 TV와 radio)가 유의하지 않은 경우 주효과를 제거해야 하는가?
    - 계층적 원리에 의해 교호작용을 포함하면 주효과가 유의하지 않더라도 모델에 포함
    - $X_1 \times X_2$가 유의하면 X_1, X_2의 각 계수가 0인지는 관심 없음
    - 주효과를 제외하면 교호작용의 의미를 바꾸는 경향이 있음

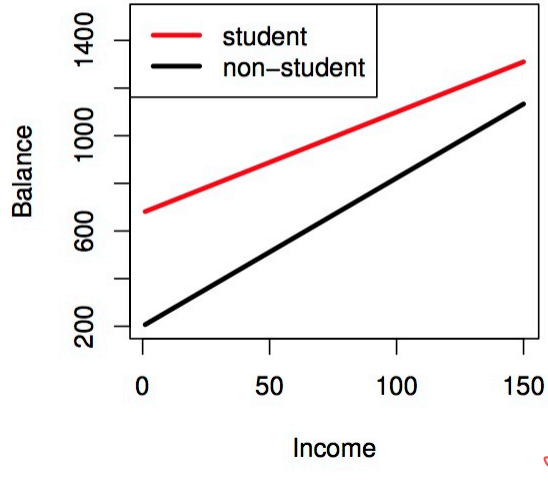
범주형 변수와 연속형 변수 사이의 교호작용

- 학생 여부에 따라 소득이 증가할 때 카드잔고가 증가하는 속도가 다를 수 있지 않을까? 즉, 학생 여부와 소득 간의 교호작용이 존재하지 않을까?

- credit 데이터에서 income과 student 사이의 교호작용 고려

$$balance_i \approx \beta_0 + \beta_1 \times income_i + \beta_2 \times student + \beta_3 \times income_i \times student_i$$





$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 d_i + \beta_3 x_i d_i + \varepsilon$

$= (\beta_0 + \beta_2 d_i) + (\beta_1 + \beta_3 d_i) x_i + \varepsilon$

① student = Yes ($d_i = 1$)

$y_i = (\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3) x_i + \varepsilon$

↳ 학생 x

② student = No ($d_i = 0$)

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon$

In [16]:
```
model6 = smf.ols('Balance~(Income+Student)**2', data = credit).fit()
model6.summary().tables[1]
```

Out[16]:

	coef	std err	t	P>|t|	[0.025	0.975]
Intercept	200.6232	33.698	5.953	0.000	134.373	266.873
Student[T.Yes]	476.6758	104.351	4.568	0.000	271.524	681.827
Income	6.2182	0.592	10.502	0.000	5.054	7.382
Income:Student[T.Yes]	-1.9992	1.731	-1.155	0.249	-5.403	1.404

학생이면 상점평수 ↑

학생 아닌데 기울기

유의 X

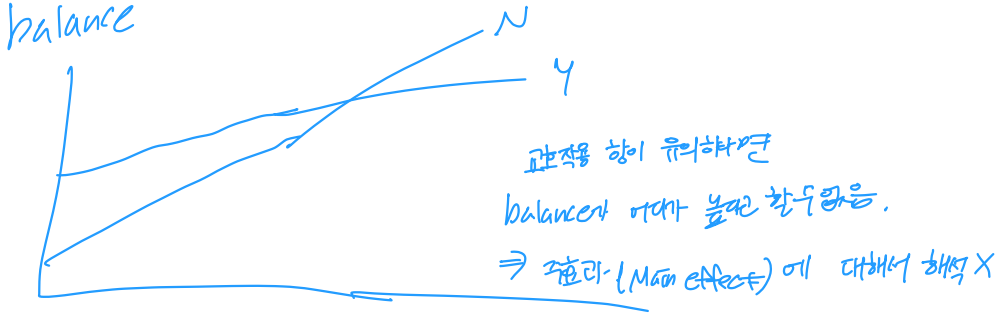
- 교호작용 항이 통계적으로 유의하지 않으므로 학생 여부에 따라 소득의 기울기가 다르지 않다고 결론. 즉, 두 집단의 회귀식이 서로 평행.

⇒ 학생이면 상점평은 큰데 기울기는 같음

학생 아니면 상점평은 작은데 기울기는 같음.

⇒ 두 집단의 차이 X

(어떤 집단의 balance가 높다고 할 수 없음.



교호작용 항이 유의하다면

balance에 미치는 효과가 달라짐.

⇒ 주효과(Main effect)에 대해서 해석 X

교호작용이 유의하지 않으면 main effect도 해석해야함.

(각 항이 유의하지 않더라도) (변수 포함해야 함)