Lecture 1. Review: Simple Linear Regression

1.1 Review: 통계적 추론방법

평균에 대한 추정과 검정

Example: Web Stickiness

- 고가의 상품을 판매하는 온라인 쇼핑몰
- 방문자가 웹페이지에 머무르는 시간이 길수록 구매로 이어짐
- 한 웹관리자는 평균 session time이 길어야 160초이고 이를 늘리기 위해 새로운 웹 프레젠테이션이 필요하다고 주장함. 이 주장이 얼마나 믿을만 한가?

In [4]:
```
session_times.head()
```

Out[4]:

	Page	Time
0	Page A	21.0
1	Page B	253.0
2	Page A	35.0
3	Page B	71.0
4	Page A	67.0

추정

M ← $\bar{X} = 131$

신뢰구간 : $\bar{X} \pm t_{0.025, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$

In [5]:
```
stat = weightstats.DescrStatsW(session_times.Time)
stat.tconfint_mean(alpha=0.05)
```

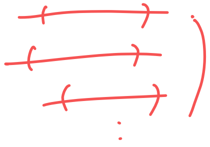
Out[5]:
```
(109.30798906792316, 173.08089982096575)
```

↳ 이 구간에 M가 포함될 확률이 95%이다 (X)

만약 M = 100 → 위의 구간이 M를 포함할 확률은? 0

M = 130 → 〃 ? 1

M은 확률변수 X, 고정된 상수 → M를 포함할 확률은 0 아니면 1


100개

100개의 구간 중 95개의 구간이 M를 포함할 것이다.

가설검정

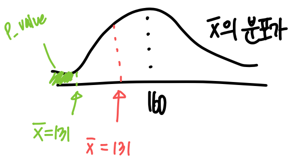
* 만약 $M=160$, n, 6^2이라면

$E(\bar{x})=160$

$Var(\bar{x}) = \frac{6^2}{n}$

중심극한정리 CLT : $\frac{\bar{x}-M}{6/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$

- n이 충분히 크면, $\bar{x} \approx N(160, (\frac{6}{\sqrt{n}})^2)$



$\bar{x}$의 분포가 정규분포를 따르게 된다.

$\begin{cases} H_0 : M=160 \\ H_1 : M<160 \end{cases}$

$\bar{x}=131$이라면 귀무가설로 결론

$\bar{x}=131$ 이라면 대립가설로 결론

귀무가설이 사실일때 꼬리확률 = P_value

P_value가 작아야 대립가설 채택확률↑

(P_value가 작다는건 중심으로부터 많이 벗어났다는 의미이므로 현재 분포인 귀무가설 분포가 틀렸을 가능성↑)

⇒ P_value가 매우 작다

= H_0에서 나올법하지 않은 값이 나왔다

= H_0이 잘못되었다

= H_0 기각, H_1 채택

1. 가설설정

귀무가설이 사실이라고 가정을 한 후 분석 진행

- 귀무가설

  ↳ 등호 반드시 포함

$$H_0 : \mu = 160 \ (\text{or } \mu \geq 160)$$

- 대립가설

  ↳ 증명하고 싶은 것

$$H_1 : \mu < 160$$

2. 유의수준 설정

- 귀무가설이 참인데 귀무가설을 기각할 확률
- 귀무가설이 사실이라고 가정할 때 표본 통계량이 얼마나 극단적인 값(일어날 확률이 낮은 값)이어야 귀무가설이 사실이 아니라고 판단할 지에 대한 임계값
- 얼마만큼의 제 1종 오류를 가설검정 과정에서 감당할 것인가?
- 일반적으로 $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$으로 설정

$$\alpha = 0.05$$

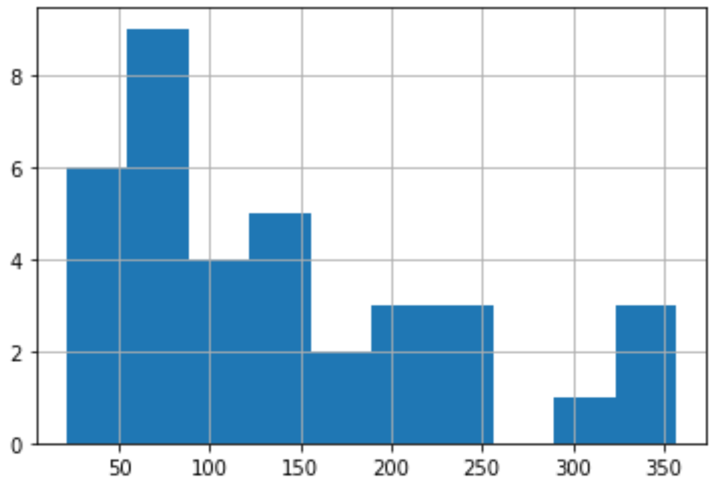
작을수록 귀무가설이 잘 기각되지 않는다. (보수적)

ex) 화재 알람은 조금이라도 이상하면 알람 울리게 해야함 (유의수준 크게 잡기)

1. 가정 체크
    - One sample t-test의 가정
        - 자료가 정규분포를 따른다 (분포가 종모양) **또는**
        - 심하게 편중되거나 극단치를 포함한 경우 표본수가 50개 (혹은 30개) 이상이다.

In [6]:
```
session_times.Time.hist()
```

Out[6]:
```
<AxesSubplot:>
```



1. 검정통계량과 P-value의 계산
   - 귀무가설이 참이라고 가정할 때 아래의 T-통계량은 자유도 n-1을 가지는 t분포를 따름

$$\text{T-statistics} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

표준오차

In [7]:
```
t_result = stat.ttest_mean(value = 160, alternative='smaller')
print('T_statistics: %.3f, p-value: %.3f, degrees of freedom: %i' %(t_result))
```

```
T_statistics: -1.197, p-value: 0.120, degrees of freedom: 35
```

수치형 변수(평균)에 대한 추론

- y = 수치형 변수

```
import statsmodels.stats.weightstats as stat

import statsmodels.stats as stats
```

문제	관심모수	점추정량	가정체크	검정가설	검정방법/Python 명령어
한 그룹 평균	μ	$\bar{x}$	$n > 30 (> 50)$ or 정규분포	$H_0 : \mu = \mu_0$	One-sample T-test `stat.ttest_mean`
두 그룹 평균 비교(독립 표본)	$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$n_1 + n_2 > 30 (> 50)$ 두 집단 모두 정규분포	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$	Two-sample t-test `stat.ttest_ind`
두 그룹 평균 비교 (쌍체 표본)	μ_d	$\bar{x}_d$	$n > 30 (> 50)$ </br> or 정규분포	$H_0 : \mu_d = 0$	Paired t-test `stat.ttest_mean`
셋 이상 그룹 평균 비교	$\mu_1, \ldots, \mu_m$	$\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_m$	$n_i > 30 (> 50)$ or 정규분포 등분산	$H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_m$	ANOVA `statsmodels.stats.anova.AnovaRM`
양적변수 간의 상관관계	$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$ β_0, β_1	$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$	선형성, 독립성, 등분산성, 정규성	$H_0 : \beta_i = 0$	Regression `statsmodels.api.OLS`

범주형변수(비율)에 대한 추론

- y = 범주형 변수

문제	모수	점추정량	가정체크	검정가설	검정방법
한 그룹 비율	p	$\hat{p}$	$np > 5$ $n(1-p) > 5$	$H_0 : p = p_0$	Z-test `stats.proportion.proportions_ztest`
두 그룹 비율 비교	$p_1 - p_2$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$n_i p_i > 5$ $n_i(1-p_i) > 5$	$H_0 : p_1 - p_2 = 0$	Z-test `stats.proportion.proportions_ztest`
적합성 검정	$p_1, \ldots, p_m$	$\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m$	모든 기대빈도>5	$H_0 : p_1 = p_{01}, \ldots, p_m = p_{0m}$	Chi-square test `scipy.stats.chisquare`
독립성 검정			모든 기대빈도>5	H_0 : 두 범주형 변수가 독립이다.	Chi-square test `scipy.stats.chi2_contingency`
양적변수와의 관계	$logit(p) = \beta_0 + \beta_1 x$ β_0, β_1	$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$	종속변수가 이항분포	$H_0 : \beta_i = 0$	Logistic regression `sklearn.linear_models.LogisticRegression`

1.2 Review: Simple Linear Regression

예: Advertising

- Advertising data는 200개의 다른 시장에서 제품의 sales(단위: 1천 유닛)와 각 시장별로 그 제품에 대한 광고예산(단위: 1천 달러)으로 구성된다. 광고 예산은 세가지 매체(TV, radio, newspaper)에 대한 것이다. 세 매체에 대한 광고 지출을 제어함으로써 간접적으로 판매를 증진시키려고 한다.
    - 광고 예산과 판매 사이에 상관관계가 있는가?
    - 광고 예산과 판매 사이에 얼마나 강한 상관관계가 있는가?

단순회귀분석

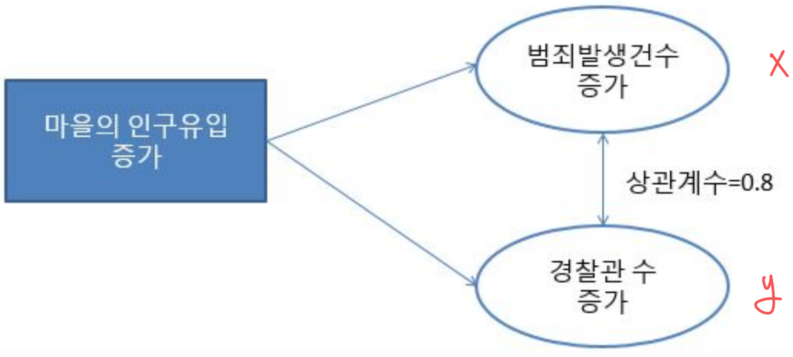
- 하나의 종속변수와 하나의 설명변수 간의 관계를 직선으로 표현하는 방법
- 종속변수: 예측될 변수
- 설명변수 (독립변수): 종속변수를 예측하는데 활용될 변수

상관분석 vs 회귀분석

- 상관분석
  - 두 변수 간의 선형관계의 강도 측정
  - 인과관계 없음
  - False 상관관계 유의
- 회귀분석
  - 원인이 되는 변수 (설명변수)에 따른 종속변수의 결과 예측 (의존적 관계)
  - 둘 이상의 변수들 간의 관계
  - 상관관계 포함

    ↳ X과 Y의 원인이 될거라는 충분한 근거가 필요함 (선행연구 or 기존 지식)
  - 인과관계는 통계학의 범주를 넘어서서 이론적인 선험적인 고려가 선행되어야 한다.

    ↳ 관찰연구의 경우 인과관계 해석판단 어려움



X y

y X

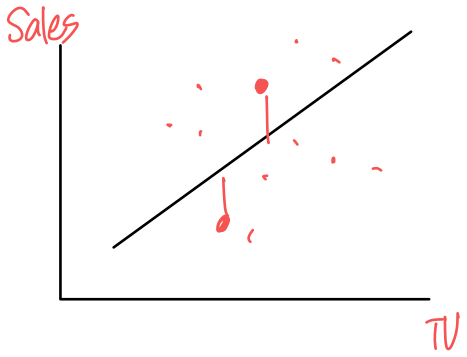
$$y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

$\beta_1 > 0$: 범죄가 증가해서 경찰관 증가 ⇒ 합리적

$\beta_1 < 0$: 경찰 증가해서 범죄 증가 ⇒ 뭔가 이상함

인과관계

1.2.1 단순 선형회귀 모형



Example: Advertisement

- TV 광고예산과 판매량의 관계를 선형식으로 표현

$$Sales \approx \beta_0 + \beta_1 \times TV$$

단순 선형회귀 모형

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- β_0 : 절편 (모수)
- β_1 : 기울기 (모수)
- ϵ_i: 오차항 (확률변수: 평균 0, 분산 σ^2)

추정된 회귀식

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

- $\hat{y}_i$: x_i 값에 대한 y_i의 예측값

- $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$: 계수추정치

선형회귀모형의 가정

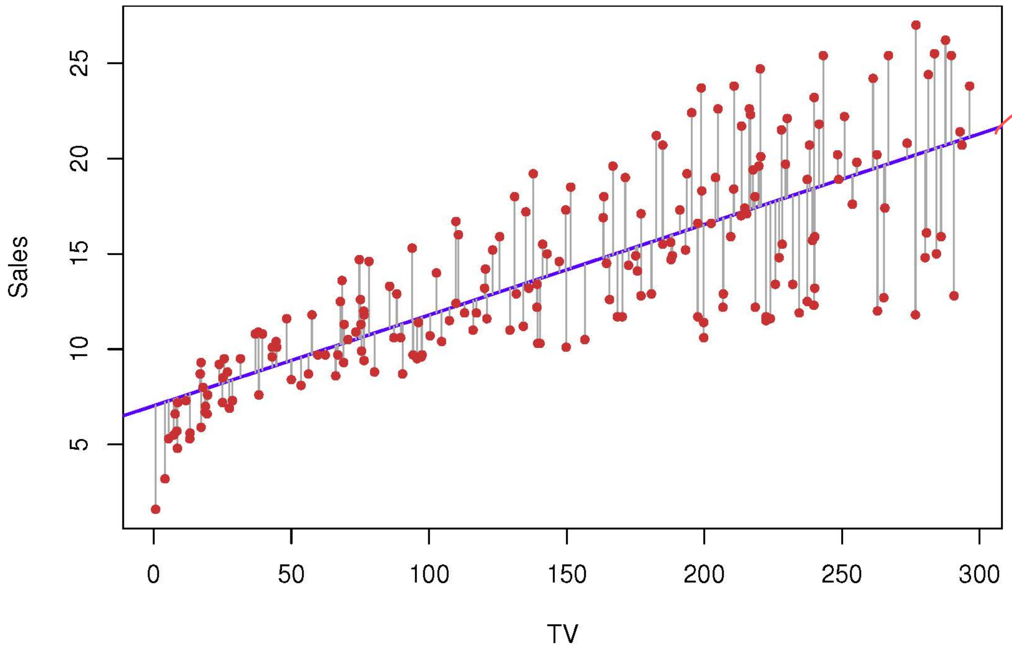
- y와 x는 선형관계이다.
- 오차항은 서로 독립이다.
- 오차항 분산은 동일하다
- 오차항은 정규분포를 따른다.

1.2.2 회귀계수의 추정

- n개의 관측치 쌍이 주어진 상황

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

- 어떤 $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$가 좋은 추정치인가?



$y_i - \hat{y}_i$: 잔차 (residual)

최소제곱법(Least Square Estimation; LSE) =(Ordinary Least Square, OLS)

- 잔차(residual)

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

  - 잔차를 줄이는 회귀선이 좋음.

- 잔차제곱합(Residual Sum of Square; RSS)

$$RSS = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2$$

- 최소제곱법

  - RSS를 최소화 하는 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$을 선택

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$y = X\beta + \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & x_{11} & \cdots & x_{p1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & x_{1n} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y}$$

$$\min_{\beta_0, \beta_1} \Sigma (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

In [8]:

```python
model = smf.ols('Sales ~ TV', data = ad).fit()
model.summary()
```

Out[8]:

OLS Regression Results

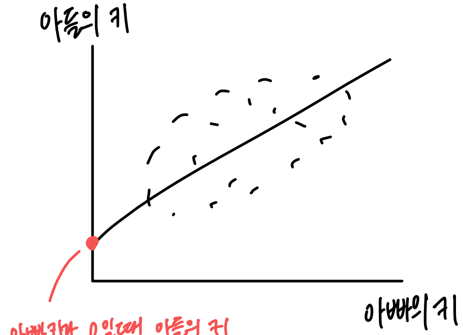
Dep. Variable:	Sales	**R-squared:**	0.612
Model:	OLS	**Adj. R-squared:**	0.610
Method:	Least Squares	**F-statistic:**	312.1
Date:	Thu, 25 Feb 2021	**Prob (F-statistic):**	1.47e-42
Time:	12:08:21	**Log-Likelihood:**	-519.05
No. Observations:	200	**AIC:**	1042.
Df Residuals:	198	**BIC:**	1049.
Df Model:	1		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	**std err**	**t**	**P>|t|**	**[0.025**	**0.975]**
Intercept	7.0326	0.458	15.360	0.000	6.130	7.935
TV	0.0475	0.003	17.668	0.000	0.042	0.053

P_value < alpha ⇒ 귀무가설 기각

Omnibus:	0.531	**Durbin-Watson:**	1.935
Prob(Omnibus):	0.767	**Jarque-Bera (JB):**	0.669
Skew:	-0.089	**Prob(JB):**	0.716
Kurtosis:	2.779	**Cond. No.**	338.

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.



→ 키가 크면 계속 키큰 자식이 나와야 하지만,
결국은 평균으로 회귀한다.

아빠키가 0일때 아들의 키
→ 말이 안됨! 신뢰 못가
→ extrapolation 문제

회귀계수의 해석

- 추정된 회귀식

$$\hat{y} = 7.033 + 0.0475x$$

- $\hat{\beta}_1$: TV광고 투자가 매 1천달러 증가할 경우 판매량은 47.5 유닛만큼 증가한다.
- $\hat{\beta}_0$: TV광고 투자가 0달러 일때 판매량은 7033 유닛이다(?!)

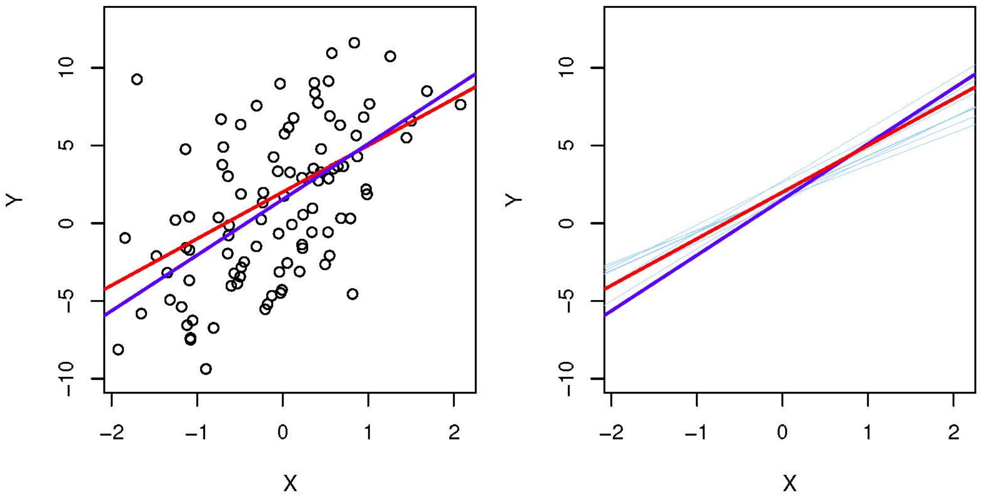
β_0의 해석은 주의해야 함. 0이 데이터의 범위 안에 포함되는지 확인. ⇒ β_0 해석은 잘 안한다.

Extrapolation 문제

1.2.3 계수 추정값의 정확도 평가

- $\hat{\beta}_1$의 해석 중 "47.5 유닛"이 얼마나 정확할까?
  - 다른 표본을 사용한다면?
  - 1000개의 서로 다른 표본을 사용하여 회귀계수를 계산하였을 때 그 값의 평균과 표준편차는?

- 모회귀선과 최소제곱선



$(X^TX)^{-1}X^Ty$: 확률변수

$y = X\beta + \varepsilon$

확률변수

- 최소제곱선의 평균

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0, \quad E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

  - 특정 데이터셋에 대해 계산한 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$은 β_0, β_1과 정확히 일치하지 않음
  - 많은 수의 데이터 셋에 대해 얻은 여러 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$을 평균하면 β_0, β_1와 일치 → **비편향 추정량(Unbiased estimator)**

- 최소제곱선의 표준오차 (standard error)

  - 하나의 추정값 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$은 β_0, β_1과 얼마나 다를 것인가?

$$\underbrace{SE(\hat{\beta}_0)^2}_{\text{표준오차}} = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \right], \quad \underbrace{SE(\hat{\beta}_1)^2}_{\text{표준오차}} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

  - $\hat{\sigma}^2 = RSS/(n-2)$ 사용하여 SE를 추정

    Standard Error

↳ RSE (잔차표준오차)

표준편차 : 평균으로 벗어난 정도

X의 표준오차 = $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: 통계량의 표준편차

$\bar{x} \pm t_{0.025,n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

회귀계수에 대한 95% 신뢰구간

$$\hat{\beta}_1 \pm 2 \cdot SE(\hat{\beta}_1), \quad \hat{\beta}_0 \pm 2 \cdot SE(\hat{\beta}_0)$$

In [9]:
```
model.conf_int(alpha=0.05)
```

Out[9]:

	0	1
Intercept	6.129719	7.935468
TV	0.042231	0.052843

- 광고를 전혀 하지 않으면 평균 판매량은 [6130, 7940] 사이의 값으로 떨어진다
- TV광고 투자가 매 1천달러 증가할 경우 판매량은 평균 [42, 53] 사이의 값만큼 증가한다.

회귀계수에 대한 가설검정

- 귀무가설, 대립가설

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \beta_1 = 0 \\
H_1 &: \beta_1 \neq 0
\end{aligned}
$$

→ X와 Y의 관계 X

95% 신뢰구간(CI)가 0을 포함하면?

⇒ 귀무가설 채택

- 검정통계량

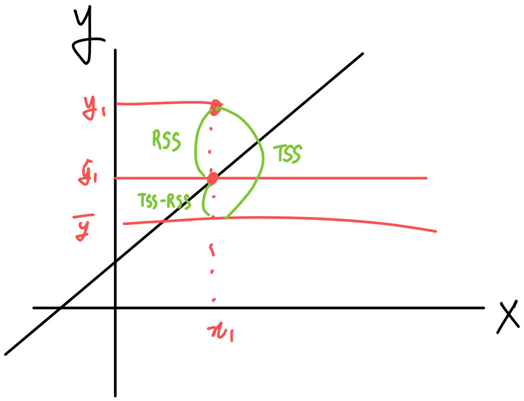
$$
t = \frac{\hat{\beta}_1}{SE(\hat{\beta}_1)}
$$

  - H_0가 사실일 때 $t \sim t_{n-2}$ 분포를 따른다.

- p-value
  - H_0가 사실일 때 어떤 값이 $|t|$와 같거나 큰 경우를 관측할 확률
  - 실질적인 상관성이 없는데도 우연히 의미있는 상관성이 예측될 확률
  - p-value가 충분히 작으면 상관성이 있다고 결론 (H_0 기각)

- 회귀계수 해석의 주의점
    - 귀무가설 $H_0 : \beta_1 = 0$ 기각하여 x와 y의 관계가 유의하다고 하더라도 x와 y 간에 원인-결과 관계가 존재한다고 결론 내릴 수는 없다.
    - $H0 : \beta_1 = 0$을 기각하고 통계적 유의성만 검정할 수 있기 때문에 x와 y의 관계가 선형이라고 결론내릴 수 없다.
    - $\hat{\beta}_0$에 대한 해석은 설명변수 자료의 범위가 0을 포함할 때만 의미가 있다.

1.2.4 모델의 정확도 평가



- 모델이 데이터에 얼마나 적합한가?

결정계수 $\mathbf{R}^2$ → 총 y의 변동 중에서 회귀식으로 설명 가능한 변동

(X가 있어야 설명 가능)

- 비율로 표현되는 적합도 측도

$$R^2 = \frac{TSS - RSS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

  - $TSS = \sum(y_i - \bar{y})^2$: 총 제곱합 (회귀분석 수행 전 Y안에 내재된 변동량)
  - $TSS - RSS = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$: 회귀를 수행함으로써 설명된 Y의 변동량 → 이 값이 클수록 좋음
  - $RSS = \sum(y_i - \hat{y})^2$: 회귀식에 의해 설명되지 않는 Y의 변동량

- $0 \leq R^2 \leq 1$
- X를 사용하여 설명될 수 있는 Y의 변동 비율(proportion of variability)
    - $R^2 \approx 1$: Y의 변동 중 많은 부분이 회귀식에 의해 설명
    - $R^2 \approx 0$: Y의 변동 중 대부분이 회귀식에 의해 설명되지 않음

In [10]:
```
model.rsquared
```

Out[10]:
```
0.611875050850071
```

- sales의 변동 중 61%가 TV에 대한 선형회귀에 의해 설명된다.
- 단순선형회귀에서는 R^2는 피어슨 상관계수의 제곱과 같다.

In [11]:
```
stats.pearsonr(ad.Sales,ad.TV)[0]**2
```

Out[11]:
```
0.6118750508500711
```

1.2.5 예측

- 주어진 독립변수에 대한 종속변수의 값을 추정된 회귀식에 의해 예측한다.

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$$ x의 범위 안에 놓여야 함

In [12]:
```
pred = model.get_prediction(exog = dict(TV=100))
pred.summary_frame(alpha = 0.05)
```

Out[12]:

	mean	mean_se	mean_ci_lower	mean_ci_upper	obs_ci_lower	obs_ci_upper
0	11.786258	0.262897	11.26782	12.304695	5.339251	18.233264

신뢰구간

큰 구간!

- 수많은 도시에 대한 **평균** 판매량을 둘러싼 불확실성을 수량화
- TV광고에 10만달러를 지출한다면 판매량의 평균은 11268개와 12305개 사이일 것으로 95% 확신함

예측구간

- **특정** 도시의 판매량에 대한 불확실성을 수량화
- TV광고에 10만달러를 지출한 도시에서 판매량은 5339개와 18233개 사이일 것으로 95% 확신함
- 회귀식은 가지고 있는 data 범위 밖에서 예측은 주의!! (Extrapolation 문제)