

Mémoire présenté le :

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA  
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Gaylord LEGRIS

Titre : Analyse de Sensibilités sur des Portefeuilles de Passifs en Assurance Vie selon les indicateurs Solvabilité 2 : Approche par Générations et Agrégations des portefeuilles

Confidentialité :  NON  (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres présents du jury de Signature  
l'Institut des Actuaires*

*Entreprise :*

*Nom :*

*Signature :*

*Directeur de mémoire en entreprise :*

*Nom :*

*Signature :*

*Membres présents du jury de  
l'ISFA*

*Invité :*

*Nom :*

*Signature :*

*Autorisation de publication et  
de mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel  
délai de confidentialité)*

*Signature du responsable entreprise*

*Signature du candidat*

# Table des matières

|                                                                                          |             |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>Résumé</b>                                                                            | <b>iv</b>   |
| <b>Abstract</b>                                                                          | <b>v</b>    |
| <b>Remerciements</b>                                                                     | <b>vi</b>   |
| <b>Synthèse</b>                                                                          | <b>vii</b>  |
| <b>Synthesis</b>                                                                         | <b>viii</b> |
| <b>Introduction</b>                                                                      | <b>1</b>    |
| <b>1 Contexte réglementaire et modélisation en assurance vie</b>                         | <b>3</b>    |
| 1.1 Les spécificités des produits d'assurance vie épargne . . . . .                      | 4           |
| 1.1.1 Principes fondamentaux du contrat d'assurance vie . . . . .                        | 4           |
| 1.1.2 Les principaux supports d'investissement . . . . .                                 | 5           |
| 1.2 Le cadre prudentiel Solvabilité II . . . . .                                         | 6           |
| 1.2.1 Le Pilier 1 : Exigences quantitatives et Bilan Prudentiel . . . . .                | 7           |
| 1.2.2 Le Pilier 2 : Exigences qualitatives et gouvernance . . . . .                      | 10          |
| 1.3 Les Générateurs de Scénarios Économiques (GSE) . . . . .                             | 10          |
| 1.3.1 L'univers Risque Neutre ( $\mathbb{Q}$ ) : un cadre pour la valorisation . . . . . | 11          |
| 1.3.2 L'univers Monde Réel ( $\mathbb{P}$ ) : un outil de pilotage stratégique . . . . . | 13          |
| 1.3.3 Synthèse des deux univers . . . . .                                                | 13          |
| 1.4 La représentation du passif : le concept de <i>Model Point</i> . . . . .             | 14          |
| 1.4.1 La nécessité de l'agrégation . . . . .                                             | 15          |
| 1.4.2 Les impacts de l'agrégation en MP sur les indicateurs S2 . . . . .                 | 15          |
| 1.5 Principes et Enjeux de la Gestion Actif-Passif (ALM) . . . . .                       | 15          |
| 1.5.1 La Modélisation ALM : un Outil de Projection Essentiel . . . . .                   | 16          |
| 1.6 Architecture et Fonctionnement du Modèle de Projection . . . . .                     | 17          |
| 1.6.1 Phase 1 : Initialisation du Modèle . . . . .                                       | 18          |
| 1.6.2 Phase 2 : La Boucle de Projection Annuelle . . . . .                               | 20          |
| 1.6.3 Phase 3 : Finalisation et Génération des Outputs . . . . .                         | 21          |
| 1.7 Limites Actuelles du modèle . . . . .                                                | 22          |

|                                                                                                                          |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2 Construction d'un Générateur de Portefeuilles de Passifs</b>                                                        | <b>23</b> |
| 2.1 Objectifs Stratégiques et Contraintes Techniques . . . . .                                                           | 24        |
| 2.1.1 Définition du générateur de portefeuilles de passifs . . . . .                                                     | 24        |
| 2.1.2 Besoins métiers : simulation de nouveaux produits et analyse concurrentielle . . . . .                             | 24        |
| 2.1.3 Défis de la modélisation : réalisme, volumétrie et flexibilité . . . . .                                           | 26        |
| 2.2 Méthodologie de Génération et Modélisation Statistique . . . . .                                                     | 26        |
| 2.2.1 Approche stochastique par lois de probabilité . . . . .                                                            | 27        |
| 2.2.2 Synthèse et Génération du Portefeuille Final . . . . .                                                             | 35        |
| 2.3 Présentation de l'Outil et du Portefeuille de Référence Généré . . . . .                                             | 36        |
| 2.3.1 Mise en correspondance avec le format final du modèle ALM . . . . .                                                | 37        |
| 2.3.2 Analyse descriptive du portefeuille de référence . . . . .                                                         | 37        |
| <b>3 Protocole d'Analyse : Sélection d'une Méthode d'Agrégation</b>                                                      | <b>38</b> |
| 3.1 Présentation des Méthodes d'Agrégation candidates . . . . .                                                          | 39        |
| 3.1.1 Approche déterministe par regroupement de caractéristiques . . . . .                                               | 40        |
| 3.1.2 Approche par tranches et moyenne pondérée . . . . .                                                                | 41        |
| 3.1.3 Approche statistique par apprentissage non supervisé (K-Means) . . . . .                                           | 42        |
| 3.1.4 Approches basées sur la densité (DBSCAN et HDBSCAN) . . . . .                                                      | 44        |
| 3.2 Définition du Protocole de Test Comparatif . . . . .                                                                 | 47        |
| 3.2.1 Constitution des portefeuilles de test . . . . .                                                                   | 48        |
| 3.2.2 Définition des critères de sélection : fidélité des indicateurs (BE/SCR), performance et temps de calcul . . . . . | 48        |
| 3.3 Analyse Comparative et Choix de la Méthode Optimale . . . . .                                                        | 48        |
| 3.3.1 Synthèse des performances pour chaque méthode candidate . . . . .                                                  | 49        |
| 3.3.2 Justification du choix de la méthode retenue pour l'analyse de sensibilité . . . . .                               | 49        |
| <b>4 Analyse de Sensibilité des Indicateurs S2 aux Caractéristiques du Passif</b>                                        | <b>50</b> |
| 4.1 Définition des Scénarios de Sensibilité . . . . .                                                                    | 51        |
| 4.1.1 Création des portefeuilles de test via le générateur . . . . .                                                     | 52        |
| 4.1.2 Description des chocs sur les variables clés (âge, montant de la PM, etc.) . . . . .                               | 52        |
| 4.1.3 Scénario d'intégration d'un nouveau produit dans le portefeuille . . . . .                                         | 52        |
| 4.2 Analyse de l'Impact de l'Agrégation sur la Mesure des Chocs . . . . .                                                | 52        |
| 4.2.1 Comparaison des indicateurs S2 sur portefeuilles choqués granulaires et agrégés . .                                | 53        |
| 4.2.2 Analyse de la fidélité de la méthode d'agrégation à retranscrire la sensibilité . . . .                            | 53        |
| 4.3 Interprétation des Résultats et Validation de l'Approche . . . . .                                                   | 53        |
| 4.3.1 Validation de la performance de la chaîne de modélisation (Générateur - Agrégation - Modèle ALM) . . . . .         | 54        |
| 4.3.2 Enseignements sur la sensibilité des portefeuilles aux modifications de caractéristiques du passif . . . . .       | 54        |
| <b>5 Conclusion</b>                                                                                                      | <b>55</b> |
| 5.1 Résumé des résultats . . . . .                                                                                       | 56        |
| 5.1.1 Synthèse des principaux résultats obtenus . . . . .                                                                | 56        |
| 5.1.2 Impact des méthodes d'agrégation sur les portefeuilles de passifs . . . . .                                        | 56        |

|                                                                                            |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.2 Perspectives d'amélioration . . . . .                                                  | 56        |
| 5.2.1 Axes d'amélioration pour les générateurs de portefeuilles de passifs . . . . .       | 57        |
| 5.2.2 Évolutions possibles des méthodes d'agrégation et de modélisation ALM . . . . .      | 57        |
| 5.2.3 Autres domaines d'application des générateurs de portefeuilles de passifs . . . . .  | 57        |
| 5.3 Conclusion Générale et Perspectives . . . . .                                          | 57        |
| 5.3.1 Perspectives et Finalisation des Travaux de Recherche . . . . .                      | 58        |
| 5.3.2 Bilan de l'expérience professionnelle chez Accenture : un levier pour le mémoire . . | 59        |
| <b>Annexes</b>                                                                             | <b>61</b> |
| <b>Bibliographie</b>                                                                       | <b>64</b> |

# Résumé

Petit résumé en français de mon mémoire ?

# Abstract

It's a brief sum up in english !

# Remerciements

Pour la réalisation de ce mémoire, je tiens à adresser mes remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à son élaboration. Que ce soit au travail avec Lionel Aldeberd qui m'a appris énormément, Lucas Blancheton qui a toujours été là pour m'aiguiller dans mes choix. Merci à Luc pour les relectures et à tous mes collègues stagiaires et alternants, Antoine, Cindy, Eleonore, Lucile, Malak, Manon, Nicolas, Tanguy et Titouan pour leur bonne humeur ! J'ai vraiment passé des très chouettes moments à vos côtés !

# Synthèse

Un long résumé en français de mon mémoire

# Synthesis

Un long résumé en anglais de mon mémoire

# Introduction

Confirmant son statut de placement privilégié des français, l'assurance vie a vu son encours (provisions mathématiques + provisions pour participation aux bénéfices) atteindre 1 986 milliards d'euros à fin 2024 (France Assureurs) [1]. Son attractivité dans un contexte économique incertain est soulignée par une collecte nette de +28,5 milliards d'euros, alimentée par une forte hausse des cotisations (+14,7 %). Cette dynamique globale masque toutefois une réorientation marquée des flux : alors que les supports en euros enregistrent une collecte nette négative de 4,7 milliards d'euros, les unités de compte captent l'essentiel des nouveaux versements (+33,2 milliards d'euros). Conjuguée à un recul des prestations versées aux assurés (-3,1 %), cette situation place la gestion actif-passif (ALM) au cœur des enjeux stratégiques pour les assureurs. Ceux-ci doivent piloter leur résultats tout en maintenant l'équilibre entre sécurité et rendement pour les épargnants.

Le secteur de l'assurance vie en France est ainsi confronté à un besoin important de pilotage via la gestion actif-passif (ALM). Pour cela, les assureurs s'appuient sur l'utilisation de modèles ALM. Ces modèles simulent l'impact de différentes stratégies ce qui nécessite cependant un grand nombre de projections stochastiques, cela engendre une contrainte opérationnelle majeure : le temps de calcul. Cette contrainte limite non seulement la capacité à explorer en profondeur l'ensemble des risques et des opportunités, mais freine également l'agilité stratégique et la réactivité des prises de décision. C'est de la rencontre entre ces exigences et des contraintes opérationnelles qu'ont les assureurs qu'est née la problématique de ce mémoire : comment concilier la nécessité de rapidité des calculs avec l'impératif de fidélité des indicateurs de risque ?

Ce mémoire se propose d'investiguer cette problématique en étudiant l'impact des techniques d'agrégation du passif, notamment par la création de *model points*, qui consiste en une représentation simplifiée des contrats d'assurance. L'enjeu est de déterminer si cette modélisation simplifiée des portefeuilles de contrats peut constituer une solution fiable pour le pilotage stratégique, et d'évaluer sous quelles conditions une telle simplification est valide sans masquer des dynamiques de risque essentielles au pilotage de l'entreprise.

Pour répondre à cette problématique, ce mémoire adoptera une double approche. Premièrement, il s'agira de développer un générateur de portefeuilles de passif puis le reste de l'analyse portera sur les effets de l'agrégation sur un portefeuille représentatif du marché français. L'objectif est de comprendre comment les risques évoluent à travers l'agrégation. Pour cela, plusieurs méthodes et approches seront testées et comparées. Le critère de sélection de la méthode la plus pertinente reposera sur un double objectif : minimiser l'écart sur des indicateurs clés de la norme Solvabilité II, optimiser la rapidité des calculs

en atteignant le plus haut niveau d'agrégation possible. Une fois la méthode cible sélectionnée, une analyse approfondie de sensibilités sera réalisée sur le portefeuille avant et après agrégation. Cette étude s'appuiera également sur des indicateurs quantitatifs clés issus de la norme Solvabilité II, en évaluant notamment l'impact de chocs économiques sur le Best Estimate, le Solvency Capital Requirement (SCR) et la Present Value of Future Profits (PVFP). Ces métriques permettront de mesurer rigoureusement comment l'agrégation modifie la perception du risque et la valeur économique du portefeuille.

Ce mémoire s'articulera en cinq temps. La première partie posera le cadre conceptuel de l'étude en explorant le contexte réglementaire de Solvabilité II utilisé dans ce mémoire, les produits d'épargne en assurance vie et les fondements des Générateurs de Scénarios Économiques (GSE) en univers risque neutre. Après l'explication du socle théorique, la deuxième partie abordera les principes de la Gestion Actif-Passif (ALM), en détaillant l'architecture du modèle de projection qui servira de base aux travaux de ce mémoire. La troisième partie permettra de poser les bases de l'analyse, avec l'élaboration d'un générateur de portefeuilles de passifs réalistes destiné à produire les données synthétiques cohérentes. Le cœur méthodologique sera présenté en quatrième partie, à travers un protocole d'analyse comparant diverses méthodes d'agrégation afin de choisir celle qui sera utilisée. Enfin, la cinquième partie sera consacrée à l'interprétation des résultats d'agrégations sur des chocs économiques où, par le biais d'analyses de sensibilité approfondies, l'impact de la méthode d'agrégation retenue sur la mesure du risque sera quantifié, validant ou non la pertinence de l'approche adoptée.

# Chapitre 1

## Contexte réglementaire et modélisation en assurance vie

## 1.1 Les spécificités des produits d'assurance vie épargne

### 1.1.1 Principes fondamentaux du contrat d'assurance vie

L'assurance vie est une convention par laquelle un assureur, en contrepartie du versement de primes, s'engage à verser un capital ou une rente à la survenance d'un événement incertain lié à la durée de la vie humaine. Cet événement, qui constitue l'aléa au cœur du contrat, peut être le décès de l'assuré avant une date donnée ou, à l'inverse, sa survie jusqu'à cette date. Ce mécanisme repose sur un cycle de production inversé : l'assureur perçoit les primes bien avant de devoir potentiellement régler les prestations, ce qui l'amène à investir ces sommes sur des horizons de temps longs pour honorer ses engagements futurs.



FIGURE 1.1 – Cycle de production inversé en assurance vie

La nature de ces engagements répond à des objectifs variés. Les contrats en cas de vie prévoient le versement d'un capital ou d'une rente à une échéance prévue si l'assuré est en vie ; ils sont typiquement utilisés pour se constituer un complément de retraite ou une épargne de précaution. À l'opposé, les contrats en cas de décès garantissent le versement d'un capital ou d'une rente au(x) bénéficiaire(s) désigné(s) au décès de l'assuré, souvent pour protéger des proches ou anticiper des droits de succession. Il existe également des contrats mixtes qui combinent ces deux garanties.

Le fonctionnement de ces contrats repose sur la capitalisation : les primes versées sont investies pour financer la propre couverture future de l'assuré. De par leur nature, ces engagements s'étendent sur de très longues périodes. Une caractéristique fondamentale de l'assurance vie française est sa liquidité. L'assuré dispose de la possibilité de récupérer son épargne à tout moment via un rachat, qui peut être partiel ou total. Cette faculté de rachat constitue une option dont la valeur et le risque doivent être finement gérés par l'assureur, car son exercice a un impact direct sur les besoins de liquidité du portefeuille. La fiscalité joue un rôle incitatif majeur car les plus-values sont imposées plus lourdement si le rachat intervient avant la huitième année du contrat. Ceci encourage alors l'épargne de long terme.

La gestion de ces engagements de long terme amène l'assureur à proposer différentes modalités d'investissement. Celles-ci permettent de répartir le risque financier entre l'assuré et l'assureur, définissant ainsi le profil de rendement potentiel du contrat. Un contrat plus sûr aura des possibilités de rendements plus faible qu'un contrat risqué. L'épargne des assurés peut ainsi être investie sur deux principaux types de supports aux profils de risque distincts, qui peuvent être combinés au sein de différents types de contrats.

### 1.1.2 Les principaux supports d'investissement

L'épargne des assurés peut être investie sur deux principaux types de supports aux profils de risque distincts, qui peuvent être combinés au sein de différents types de contrats.

Le **fonds en euros** est le support historique et sécuritaire de l'assurance vie française. Le risque financier y est intégralement porté par l'assureur, qui s'appuie sur une politique d'investissement prudente, majoritairement orientée vers des actifs obligataires. La sécurité de ce support repose sur un ensemble de garanties contractuelles et réglementaires :

- **La garantie du capital** : C'est la garantie la plus fondamentale. L'assureur garantit à tout moment le capital net investi par l'épargnant. Quelle que soit l'évolution des marchés financiers, la somme initialement versée (nette de frais) ne peut pas diminuer.
- **Le taux technique** : Il s'agit d'un taux de revalorisation minimal garanti sur toute la durée du contrat. Fixé à la souscription, il est aujourd'hui très faible, voire nul, en raison des contraintes réglementaires.
- **Le Taux Minimum Garanti (TMG)** : Plus courant aujourd'hui que le taux technique, le TMG est un taux de rendement minimal que l'assureur s'engage à verser pour l'année à venir. Il est fixé annuellement et permet à l'assureur d'ajuster sa politique de rendement.
- **L'effet cliquet** : Ce mécanisme assure que les intérêts générés chaque année sont définitivement acquis. Une fois distribués, ils s'ajoutent au capital garanti et produisent à leur tour des intérêts les années suivantes. Il est impossible de revenir sur les revalorisations passées.
- **La Participation aux Bénéfices (PB)** : L'assureur a l'obligation légale de redistribuer aux assurés au minimum 85% de ses bénéfices financiers et 90% de ses bénéfices techniques. Cette participation constitue la majeure partie du rendement annuel, au-delà du TMG. Pour lisser les performances, une partie de cette PB peut être mise en réserve dans une *Provision pour Participation aux Bénéfices* (PPB) que nous appellerons *Provision pour Participations aux Excedents* (PPE) dans la suite de ce mémoire. La PPE doit être reversée aux assurés dans un délai de huit ans au maximum.

Les **unités de compte (UC)** offrent une exposition directe aux marchés financiers. Contrairement au fonds en euros, le risque d'investissement est entièrement porté par l'assuré. L'assureur ne garantit pas la valeur du capital, mais un nombre de parts d'actifs (OPCVM, actions, SCPI, etc.). La valeur de l'épargne fluctue ainsi au gré des marchés, offrant un potentiel de rendement supérieur à long terme,

mais exposant également à un risque de perte en capital. Pour l'assureur, ce support est plus simple à gérer car il n'implique pas de garanties financières particulières.

Ces supports sont proposés via deux grandes familles de contrats. Les contrats monosupports permettent d'investir sur un seul type de fonds (soit en euros, soit en UC). Les contrats multisupports sont les plus répandus, quant à eux, combinent au moins un fonds en euros et plusieurs supports en unités de compte, permettant à l'épargnant de répartir son investissement selon son profil de risque. Dans le cadre de cette étude, le portefeuille analysé se compose de contrats multisupports avec une répartition représentative du marché français, soit approximativement 60% en fonds euros et 40% en unités de compte.

|                                                 | Ensemble      |                 | Euros         |                 | Unités de compte |              |
|-------------------------------------------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|------------------|--------------|
|                                                 | En Md€        | Var             | En Md€        | Var.            | En Md€           | Var          |
| <b>Cotisations</b>                              | <b>174,9</b>  | <b>14,70%</b>   | <b>108,6</b>  | <b>19,2%</b>    | <b>66,3</b>      | <b>8,1%</b>  |
| <b>Prestations</b>                              | <b>146,4</b>  | <b>-3,10%</b>   | <b>113,3</b>  | <b>-5,5%</b>    | <b>33,1</b>      | <b>6,4%</b>  |
| <b>Collecte nette</b>                           | <b>28,5</b>   | <b>27,1 Md€</b> | <b>-4,7</b>   | <b>24,1 Md€</b> | <b>33,2</b>      | <b>3 Md€</b> |
| <b>Encours</b>                                  | <b>1985,8</b> | <b>3,90%</b>    | <b>1398,6</b> | <b>1,4%</b>     | <b>587,1</b>     | <b>10,3%</b> |
| dont provisions mathématiques                   | 1932,2        | 4,4%            | 1345          | 2%              | 587,1            | 10,3%        |
| dont provision pour participation aux bénéfices | 53,6          | -11,1%          | 53,6          | -11,1%          | na.              | na.          |

FIGURE 1.2 – Le marché de l'assurance vie en France en 2024 (graphique temporaire)

Ces contrats sont soumis à un ensemble de réglementations prudentielles visant à garantir la solvabilité des assureurs et la protection des assurés. La directive Solvabilité II encadre ces exigences à l'échelle européenne. La partie suivante détaille le cadre réglementaire de Solvabilité II, ses implications pour les assureurs vie, ainsi que les outils de modélisation stochastique utilisés pour répondre à ces exigences.

## 1.2 Le cadre prudentiel Solvabilité II

Entrée en vigueur le 1er janvier 2016, la directive Solvabilité II régit le cadre prudentiel pour la quasi-totalité des assureurs et réassureurs de l'Union Européenne. Son principal objectif est d'harmoniser les pratiques du secteur, d'assurer une protection optimale des assurés et de garantir que les compagnies puissent honorer leurs engagements en toutes circonstances. Pour ce faire, elle instaure une approche économique et prospective, fondée sur une évaluation fine des risques et structurée en trois piliers interdépendants. Seuls les deux premiers piliers seront présentés car ils sont plus pertinents dans le cadre de ce mémoire.

### 1.2.1 Le Pilier 1 : Exigences quantitatives et Bilan Prudentiel

Le Pilier 1 définit les exigences quantitatives, au cœur desquelles se trouve le Bilan Prudentiel. Il s'agit d'une vision économique du bilan comptable où les actifs et les passifs sont évalués de manière cohérente avec leur valeur de marché (*market-consistent*). La structure de cette section suivra l'équation fondamentale du bilan prudentiel :

$$\text{Actifs} = \text{Provisions Techniques} + \text{Fonds Propres} \quad (1.1)$$

Chaque terme de cette équation sera détaillé successivement.

| BILAN ÉCONOMIQUE SOUS SOLVABILITÉ II |                       |                      |
|--------------------------------------|-----------------------|----------------------|
| Actifs                               | Fonds propres         | Capital excédentaire |
|                                      |                       | SCR                  |
|                                      |                       | MCR                  |
|                                      | Provisions techniques | Risk Margin          |
|                                      |                       | Best Estimate        |

FIGURE 1.3 – Bilan économique sous Solvabilité II (graphique temporaire)

#### 1.2.1.1 L'évaluation des Actifs à la Valeur de Marché

Le premier terme du bilan, Actifs, sont comptabilisés à leur Valeur de Marché (VM). Cette approche vise à refléter la valeur la plus juste et actuelle des ressources dont dispose l'assureur pour couvrir ses engagements.

### 1.2.1.2 Les Provisions Techniques : Cœur de l'évaluation du passif

Les Provisions Techniques (PT) représentent la valeur des engagements de l'assureur envers ses assurés. Elles se décomposent en deux parties : le *Best Estimate* (BE) et la Marge de Risque (*Risk Margin* - RM).

$$PT = \text{Best Estimate (BE)} + \text{Marge de Risque (RM)} \quad (1.2)$$

La valorisation des provisions techniques, au cœur du bilan prudentiel, ne peut se contenter d'une vision unique et figée du futur. La présence d'options et de garanties dans les contrats d'épargne impose de distinguer deux approches complémentaires :

- **L'approche déterministe** est un outil de pilotage. Elle repose sur une projection unique des variables économiques. Bien qu'insuffisante pour la valorisation prudentielle, elle demeure un outil fondamental pour l'élaboration du *business plan* et la communication d'un scénario central. Sa limite principale est son incapacité à valoriser les risques asymétriques.
- **L'approche stochastique** est un outil de valorisation. Elle explore un grand nombre de futurs possibles à l'aide d'un **Générateur de Scénarios Économiques (GSE)**. Cet outil produit des milliers de simulations cohérentes des marchés financiers. La valeur d'un indicateur est alors obtenue en calculant la moyenne des résultats sur l'ensemble de ces scénarios (méthode de Monte-Carlo). Cette exploration est indispensable pour quantifier le coût réel des garanties optionnelles (Taux Minimum Garanti, etc.).

La différence de valeur entre ces deux approches est capturée par le concept de **TVOG (Time Value of Options and Guarantees)**. En imposant une approche stochastique, Solvabilité II assure une valorisation *market-consistent* des engagements.

Le **Best Estimate (BE)**, ou *Best Estimate Liability* (BEL), représente la meilleure estimation de la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs liés aux engagements d'assurance. Son calcul est réalisé sur un horizon long (40-60 ans) en *run-off* (portefeuille en extinction, pas de nouvelles souscriptions). Il est obtenu par la moyenne des flux actualisés sur un grand nombre de simulations économiques stochastiques en univers risque neutre :

$$BEL = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \sum_{j=1}^T CF(j) \cdot e^{-\int_0^j r(s)ds} \right] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^T \frac{CF_i(j)}{(1+r_{i,j})^j} \quad (1.3)$$

Où  $N$  est le nombre de simulations,  $T$  l'horizon de projection,  $CF_i(j)$  le flux de trésorerie net de l'année  $j$  pour la simulation  $i$ , et  $r_{i,j}$  le taux d'actualisation sans risque pertinent.

La **Marge de Risque (RM)** complète le Best Estimate. Elle correspond à la rémunération du capital réglementaire qui doit être immobilisé pour couvrir les risques non-financiers (longévité, rachat, etc.) jusqu'à l'extinction du portefeuille. Son calcul repose sur une approche dite de "Coût du Capital" (*Cost*

*of Capital* - CoC), qui consiste à actualiser le coût futur de détention de ce capital :

$$RM = \text{CoC}_{\text{rate}} \times \sum_{j=0}^T \frac{\text{SCR}_{\text{non-fi}}(j)}{(1 + r_{j+1})^{j+1}} \quad (1.4)$$

Où  $\text{CoC}_{\text{rate}}$  est le coût du capital (fixé à 6%), et  $\text{SCR}_{\text{non-fi}}(j)$  est la part du SCR couvrant les risques non-financiers à l'année  $j$ .

#### 1.2.1.3 Les Fonds Propres et les Exigences de Capital

Les **Fonds Propres Prudentiels**, aussi appelés **NAV (Net Asset Value)**, constituent la richesse de l'assureur. Ils sont définis par la différence entre la valeur des actifs et celle des engagements :

$$NAV = VM_{\text{Actifs}} - (BE + RM) \quad (1.5)$$

Ce sont ces fonds propres qui doivent permettre à l'assureur d'absorber des pertes inattendues. Solvabilité II définit donc deux niveaux d'exigence de capital portant sur la NAV.

Le **Solvency Capital Requirement (SCR)** est le montant de fonds propres nécessaire pour absorber des pertes exceptionnelles. Il est calibré pour correspondre à la **Value-at-Risk (VaR)** à **99,5%** de la NAV sur un horizon d'un an. Autrement dit, il s'agit du capital qui doit permettre à l'assureur de faire face à ses engagements sur l'année à venir avec une probabilité de 99,5%. En cas de non-respect, l'assureur fait l'objet d'un suivi renforcé par le régulateur.

Le calcul du SCR peut se faire via un modèle interne (spécifique à l'assureur) ou, plus communément, via la **Formule Standard** définie par la réglementation. Cette dernière est une approche modulaire qui décompose le risque total en plusieurs modules et sous-modules (risque de marché, de souscription, de contrepartie, etc.).

Pour chaque risque élémentaire  $x$ , le capital requis est calculé comme la perte de NAV consécutive à un choc instantané et calibré sur ce risque :

$$SCR_x = \Delta NAV = NAV_{\text{central}} - NAV_{\text{choc } x} \quad (1.6)$$

Les SCR des différents modules sont ensuite agrégés en prenant compte des corrélations prédéfinies entre les risques. L'agrégation de deux modules de risque  $i$  et  $j$  se fait via la formule :

$$SCR_{i,j} = \sqrt{SCR_i^2 + SCR_j^2 + 2 \times Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j} \quad (1.7)$$

où  $Corr_{i,j}$  est le coefficient de corrélation entre les risques  $i$  et  $j$  fourni par la réglementation. Cette agrégation est appliquée de manière hiérarchique pour obtenir le SCR total, appelé *Basic Solvency Capital Requirement (BSCR)* :

$$SCR_{\text{total}} = \sqrt{\sum_i \sum_j SCR_i \times SCR_j \times Corr_{i,j}} \quad (1.8)$$



FIGURE 1.4 – Schéma des modules et sous-modules du SCR en Formule Standard

### 1.2.2 Le Pilier 2 : Exigences qualitatives et gouvernance

Ce pilier se concentre sur la supervision, la gestion des risques et la gouvernance interne. Il impose aux assureurs de mettre en place un système de gouvernance sain, prudent et proportionné. Cela inclut une structure organisationnelle transparente, des politiques écrites claires, et un système de contrôle interne robuste. La direction doit être assurée par au moins deux dirigeants effectifs (principe des 4 yeux) qui doivent répondre à des exigences de compétence et d'honorabilité (*fit and proper*).

Ce système s'articule autour de quatre fonctions clés indépendantes : la fonction actuarielle, la gestion des risques, l'audit interne et la conformité.

L'élément central du Pilier 2 est l'**ORSA** (*Own Risk and Solvency Assessment*). Il s'agit d'un processus interne par lequel l'assureur évalue, sur un horizon de 3 à 5 ans, l'adéquation entre son profil de risque spécifique, ses limites de tolérance et ses besoins globaux en solvabilité. C'est un outil de pilotage stratégique qui permet d'aller au-delà des hypothèses standards pour refléter la stratégie propre de l'entreprise.

## 1.3 Les Générateurs de Scénarios Économiques (GSE)

Le Générateur de Scénarios Économiques (GSE) est un outil mathématique central dans la modélisation stochastique. Il a pour fonction de simuler de multiples trajectoires futures pour les principales variables financières (taux d'intérêt, performance des actions, inflation, etc.). La qualité des projections ALM dépendant directement de la robustesse du GSE, il est nécessaire de distinguer deux cadres de modélisation qui coexistent.

Bien que ces deux univers soient complémentaires, la réglementation Solvabilité II assigne à chacun un rôle très précis pour le calcul des différents indicateurs prudentiels. Le tableau suivant synthétise cette répartition des tâches.

TABLE 1.1 – Répartition des calculs Solvabilité II par univers de projection

| Univers Risque Neutre ( $\mathbb{Q}$ )                                                                                                                                                             | Univers Monde Réel ( $\mathbb{P}$ )                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Indicateurs du Pilier 1 :</b>                                                                                                                                                                   | <b>Exercices du Pilier 2 :</b>                                                                                                                                                              |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>— Best Estimate Liability (BEL)</li> <li>— Marge de Risque (RM)</li> <li>— Solvency Capital Requirement (SCR)</li> <li>— Bilan Prudentiel et NAV</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>— ORSA (Own Risk and Solvency Assessment)</li> <li>— Business Plan et planification stratégique</li> <li>— Test de la pérennité du modèle</li> </ul> |
| <b>Exercices du Pilier 2 :</b>                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                             |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>— ORSA (Own Risk and Solvency Assessment)</li> </ul>                                                                                                        |                                                                                                                                                                                             |
| <b>Finalité : Valorisation Market-Consistent à un instant t.</b>                                                                                                                                   | <b>Finalité : Pilotage</b> stratégique et prospectif.                                                                                                                                       |

La distinction entre ces deux approches est donc fondamentale : l'une sert à valoriser, l'autre à piloter. Les sections suivantes détaillent les modèles mathématiques sous-jacents à chaque univers.

### 1.3.1 L'univers Risque Neutre ( $\mathbb{Q}$ ) : un cadre pour la valorisation

L'univers **Risque Neutre ( $\mathbb{Q}$ )** est un cadre de valorisation théorique, requis par Solvabilité II pour les calculs *market-consistent*. Son objectif n'est pas de prédire l'évolution réelle des marchés, mais de calculer la valeur risque neutralisée d'un actif ou d'un passif à la date de calcul, en se fondant sur les prix de marché observés. Dans cet univers, on postule que tous les investisseurs sont indifférents au risque, ce qui implique que le rendement espéré de n'importe quel actif est égal au taux d'intérêt sans risque. Cette construction, fondée sur l'absence d'opportunité d'arbitrage, est indispensable pour valoriser de manière cohérente les options et garanties complexes des contrats d'assurance. La valeur  $V_0$  d'un flux de trésorerie futur  $CF_T$  est alors son espérance mathématique sous cette probabilité risque neutre, actualisée au taux sans risque  $r(s)$  :

$$V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ CF_T \cdot e^{-\int_0^T r(s) ds} \right] \quad (1.9)$$

Cet univers constitue le fondement du Pilier 1 de Solvabilité II, utilisé pour le calcul du Best Estimate Liability (BEL) et du Solvency Capital Requirement (SCR).

### 1.3.1.1 Modélisation des taux d'intérêt : le modèle de Hull & White

Pour les taux d'intérêt, le modèle de **Hull & White à un facteur** est une référence dans le cadre réglementaire. Son principal avantage est sa capacité à se calibrer parfaitement à la courbe des taux sans risque initiale, telle que fournie par l'EIOPA.

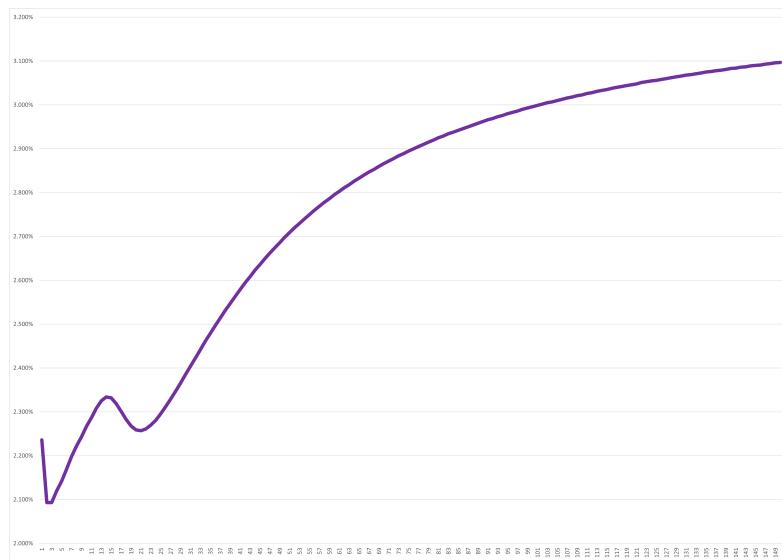


FIGURE 1.5 – Courbe des taux sans risque sans *Volatility Adjustment* au 31/12/2024 publiée par l'EIOPA

Cette flexibilité est obtenue grâce à un paramètre de retour à la moyenne  $\theta(t)$  qui dépend du temps. Son équation différentielle stochastique (EDS) s'écrit :

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (1.10)$$

où  $r_t$  est le taux d'intérêt court,  $a$  la vitesse de retour à la moyenne,  $\sigma$  la volatilité et  $W_t^{\mathbb{Q}}$  un mouvement brownien sous la mesure risque neutre. Pour des raisons de calcul, nous utilisons la solution discrète de cette EDS :

$$r_{t+h} = r_t e^{-ah} + \theta(t+h) - \theta(t)e^{-ah} + \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2ah}}{2a}} Z \quad (1.11)$$

### 1.3.1.2 Modélisation des actions et de l'immobilier : le modèle de Black & Scholes

Pour les actifs risqués comme les actions ou l'immobilier, le modèle de **Black & Scholes** est couramment utilisé. Conformément à la logique risque neutre, le rendement espéré (la dérive du processus) est le taux sans risque  $r_t$ . L'EDS du prix de l'actif  $S_t$  est :

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (1.12)$$

où  $S_t$  est le prix de l'actif,  $r_t$  le taux sans risque et  $\sigma$  la volatilité de l'actif. La solution de cette EDS est donnée par :

$$S_t = S_0 \exp \left( \int_0^t \left( r_s - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma dW_s^Q \right) \quad (1.13)$$

En pratique, on utilise sa solution discrétisée pour simuler les trajectoires de prix sur un pas de temps  $h$  :

$$S_{t+h} = S_t \exp \left( \left( r_t - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \sigma \sqrt{h} Z \right) \quad (1.14)$$

où  $Z$  est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

### 1.3.2 L'univers Monde Réel ( $\mathbb{P}$ ) : un outil de pilotage stratégique

À l'inverse de l'univers risque neutre, l'univers **Monde Réel** ( $\mathbb{P}$ ) vise à générer des scénarios réalistes pour refléter une évolution plausible des marchés. Son objectif est la projection et la planification stratégique, notamment pour l'exercice ORSA (Pilier 2).

La différence fondamentale réside dans l'introduction d'une **prime de risque** pour rémunérer la volatilité supportée par les investisseurs. Le rendement espéré d'un actif risqué est donc supérieur au taux sans risque, calibré sur des données historiques et des anticipations d'experts :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\text{Rendement de l'actif}] = \text{Taux sans risque} + \text{Prime de risque} \quad (1.15)$$

Les modèles utilisés, bien que similaires dans leur forme à ceux de l'univers  $\mathbb{Q}$  (par exemple, Vasicek pour les taux ou Black & Scholes pour les actions), sont modifiés pour intégrer cette prime. La dérive du processus stochastique n'est plus le taux sans risque  $r_t$ , mais un rendement espéré monde réel  $\mu$ . En somme, si l'univers  $\mathbb{Q}$  valorise les engagements à un instant  $t$ , l'univers  $\mathbb{P}$  permet d'exprimer la situation financière de l'entreprise dans le futur, ce qui le rend indispensable pour le pilotage stratégique.

### 1.3.3 Synthèse des deux univers

Le tableau suivant résume les caractéristiques et les usages des deux univers de projection. Si l'univers risque neutre  $\mathbb{Q}$  répond à la question « *Combien vaut cet engagement aujourd'hui ?* », l'univers monde réel  $\mathbb{P}$  répond à « *Quelle sera ma situation financière demain ?* ».

TABLE 1.2 – Synthèse comparative des univers de projection

| Critère                                  | Univers Risque Neutre<br>( $\mathbb{Q}$ )                                                                    | Univers Monde Réel<br>( $\mathbb{P}$ )                                                               |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Objectif</b>                          | <b>Valorisation</b><br><i>Market-Consistent</i> (Pilier 1 : BEL, SCR). Calculer une valeur juste à $t = 0$ . | <b>Projection</b> stratégique (Pilier 2 : ORSA, Business Plan). Simuler des futurs plausibles.       |
| <b>Rendement Espéré (Actifs risqués)</b> | Taux sans risque ( $r_t$ ). Aucune prime de risque.                                                          | Taux sans risque + Prime de risque ( $\mu = r + \text{prime}$ ).                                     |
| <b>Modèle de Taux Typique</b>            | <b>Hull &amp; White</b> . Flexible, calibré à la courbe des taux initiale.                                   | <b>Vasicek</b> . Économique, retour à une moyenne de long terme.                                     |
| <b>Calibration</b>                       | Calibré sur les prix des instruments financiers <b>actuels</b> (courbe des taux, volatilités implicites).    | Calibré sur des <b>données historiques</b> et des <b>anticipations d'experts</b> (primes de risque). |

Pour la suite de ce mémoire, je vais me concentrer sur l'univers risque neutre  $\mathbb{Q}$ , car il est le plus pertinent pour les calculs prudentiels et la gestion Actif-Passif dans le cadre des calculs liés au pilier 1 de Solvabilité II.

## 1.4 La représentation du passif : le concept de *Model Point*

### 1.4.1 La nécessité de l'agrégation

Les portefeuilles d'assurance vie comptent souvent des centaines de milliers, voire des millions de polices. Une modélisation "police à police" est techniquement possible mais informatiquement très chronophage voire irréalisable pour des calculs stochastiques complexes comme ceux requis par les modèles ALM. La charge de calcul deviendrait prohibitive. La simplification du portefeuille de passif n'est donc pas un choix, mais une contrainte opérationnelle majeure.

La réponse standard à cette contrainte est la création de ***Model Points*** (MP). Un MP est un contrat synthétique représentant un agrégat de polices partageant des caractéristiques homogènes. L'objectif est de réduire drastiquement le volume de données à traiter tout en préservant les propriétés actuarielles et financières essentielles du portefeuille complet. La qualité de la représentation dépend directement de la pertinence des critères de regroupement (caractéristiques du produit, de l'assuré, du contrat), souvent optimisés par des techniques de classification statistique (*clustering*).

### 1.4.2 Les impacts de l'agrégation en MP sur les indicateurs S2

L'utilisation des *Model Points* constitue la méthode standard pour agréger le passif et rendre les modèles ALM opérationnels. Cependant, la manière dont ces groupes de contrats sont formés à partir des polices individuelles a un impact direct et significatif sur la valorisation des indicateurs réglementaires et leur sensibilité aux chocs.

La problématique centrale de ce mémoire est donc d'optimiser cette étape fondamentale de l'agrégation. En partant du portefeuille granulaire "police à police", nous cherchons à définir, comparer et tester différentes méthodes de regroupement pour créer des *Model Points*. L'objectif est de construire une méthodologie de simplification optimale, c'est-à-dire celle qui minimise l'erreur d'agrégation tout en garantissant la plus grande stabilité des indicateurs Solvabilité II (SCR, Marge de Risque, NAV) lors du calcul des différentes sensibilités. Cette section introductory pose donc les fondations de notre analyse : la simplification étant une nécessité, comment s'assurer que la méthode de regroupement choisie est la plus fidèle et la plus robuste possible ?

## 1.5 Principes et Enjeux de la Gestion Actif-Passif (ALM)

La gestion Actif-Passif (ALM) trouve son origine dans une particularité fondamentale du secteur de l’assurance énoncé précédemment dans le mémoire : le **cycle de production inversé**. Contrairement à une entreprise classique qui vend un produit avant d’en percevoir le revenu, un assureur collecte des primes aujourd’hui en échange de la promesse de verser des prestations dans un futur lointain et incertain. Ce décalage temporel est au cœur du modèle économique de l’assurance vie.

Ce mécanisme engendre une inadéquation structurelle (*mismatch*) entre les deux côtés du bilan. D’une part, le passif est constitué d’engagements de longue durée, dont l’échéance et le montant sont soumis à des aléas (mortalité, comportement de rachat des assurés). D’autre part, pour couvrir ces engagements, l’assureur investit les primes sur les marchés financiers, constituant un actif dont la valeur et les flux sont, par nature, volatiles et dépendants du contexte économique.

Cette inadéquation est renforcée par une interdépendance dynamique et complexe entre l’actif et le passif.

- **Le passif influe sur l’actif :** Le versement des prestations (rachats, décès) contraint l’assureur à liquider une partie de ses actifs, parfois dans des conditions de marché défavorables.
- **L’actif influe sur le passif :** La performance des actifs financiers a un impact direct sur le niveau des engagements. C’est notamment le cas de la **Participation aux Bénéfices (PB)**, qui dépend des résultats financiers générés par l’assureur. Le Code des assurances impose une redistribution minimale aux assurés, calculée comme suit :

$$PB_{\min Reg} = 85\% \times \max(RésFi, 0) + \begin{cases} 90\% \times RésTech & \text{si } RésTech \geq 0 \\ 100\% \times RésTech & \text{si } RésTech < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Où le Résultat Financier (RésFi) est directement issu de la performance des actifs et le Résultat Technique (RésTech) des risques de mortalité et de rachat.

La gestion Actif-Passif est donc la discipline qui vise à piloter les risques nés de cette interdépendance afin d’assurer la solvabilité et d’optimiser la rentabilité de l’acteur.

### 1.5.1 La Modélisation ALM : un Outil de Projection Essentiel

Pour quantifier et piloter les risques complexes découlant de l’inadéquation actif-passif, les assureurs ont recours à des modèles de projection actuariels sophistiqués, communément appelés modèles de Gestion Actif-Passif ou modèles ALM. L’utilité principale de ces modèles est de projeter le bilan d’un assureur, qu’il s’agisse d’un bilan prudentiel sous Solvabilité 2 ou d’un bilan comptable sous les normes IFRS17, afin d’évaluer la santé financière future de l’organisme sur un horizon de long terme. Leur fonctionnement repose sur la combinaison de deux piliers fondamentaux : des scénarios prospectifs sur l’environnement économique et financier, et des hypothèses sur le comportement futur des assurés (lois de mortalité, de rachat, etc.).

L'approche de modélisation peut être déterministe ou stochastique, chaque approche répondant à des objectifs d'analyse distincts.

L'approche **déterministe** consiste à projeter le bilan de l'assureur selon une trajectoire unique et prédefinie de l'environnement économique. Cette trajectoire, qualifiée de **scénario central**, est généralement construite à partir de la courbe des taux sans risque fournie par l'EIOPA. Elle permet d'obtenir le (*Best Estimate*) central, c'est à dire la somme des flux futurs actualisés du portefeuille dans un contexte économique considéré comme le plus probable, servant de base pour le plan d'affaires et la valorisation prudentielle.

Cependant, une approche déterministe ne peut à elle seule capturer l'éventail des risques, notamment ceux liés aux options et garanties financières (par exemple, les Taux Minimum Garantis ou les options de rachat) dont le coût ne se matérialise que dans des conditions de marché adverses. Pour pallier cette limite, une approche **stochastique** est nécessaire. Celle-ci s'appuie sur un **Générateur de Scénarios Économiques (GSE)** pour simuler un grand nombre (souvent plusieurs milliers) de trajectoires économiques futures possibles, chacune représentant une évolution plausible des marchés financiers.

Chaque scénario économique généré sert alors d'input pour une projection complète du modèle ALM. En agrégeant les résultats de ces multiples projections via la **méthode de Monte Carlo**, l'assureur obtient non plus une seule valeur, mais une distribution des résultats possibles. L'objectif final est de disposer, pour chaque trajectoire, du détail des flux financiers à la maille la plus fine. Cette granularité permet une analyse statistique approfondie des risques, comme le calcul de quantiles (Value at Risk à 99.5%) pour déterminer le capital de solvabilité requis (SCR) sous Solvabilité 2. Ces modèles stochastiques sont donc au cœur de l'évaluation des risques et de la prise de décision stratégique, et constituent le fondement du modèle de simulation qui sera détaillé dans la suite de ce chapitre.

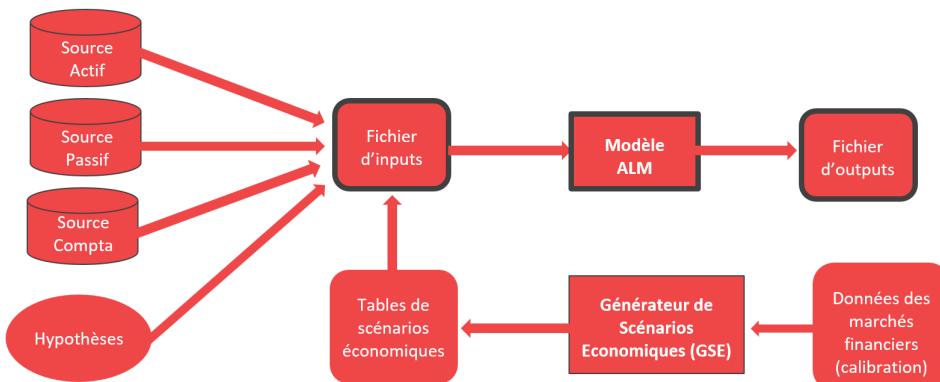


FIGURE 1.6 – Fonctionnement d'un modèle ALM (graphique temporaire)

## 1.6 Architecture et Fonctionnement du Modèle de Projection

L'objectif de cette section est de détailler l'architecture et le séquencement des opérations du modèle ALM développé pour les besoins de cette étude. Le modèle a été conçu pour simuler de manière dynamique et séquentielle le bilan d'un assureur vie sur un horizon de projection pluriannuel.

Son fonctionnement global peut être décomposé en trois phases principales, comme illustré dans la figure 1.7 :

1. **Phase d'Initialisation** : Préparation et validation des données d'entrée, et application des chocs réglementaires à la date de départ.
2. **Boucle de Projection Annuelle** : Cœur du modèle qui simule, année après année, l'évolution du bilan selon une séquence d'événements prédéfinis.
3. **Phase de Finalisation** : Calcul des indicateurs prudentiels et génération des résultats en fin de projection.

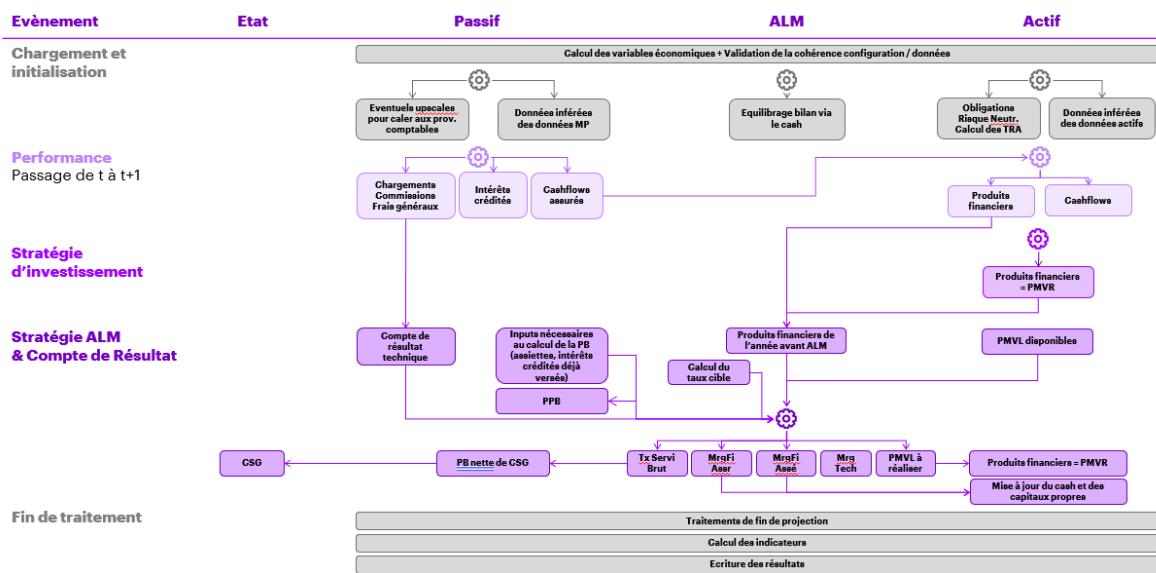


FIGURE 1.7 – Architecture générale et séquencement des événements du modèle ALM. (graphique temporaire)

### 1.6.1 Phase 1 : Initialisation du Modèle

Cette première phase prépare l'environnement de projection. Elle est elle-même divisée en trois sous-étapes.

#### 1.6.1.1 Chargement et Validation des Données d'Entrée

Le modèle est alimenté par un ensemble de données exhaustif, regroupées en quatre catégories :

- **Données Économiques et Financières** : Issues du Générateur de Scénarios Économiques (GSE), elles comprennent les courbes de taux, les taux d'inflation et les performances des différentes classes d'actifs pour chaque scénario stochastique.
- **Portefeuille d'Actifs** : Les *model points* d'actifs représentant l'ensemble des placements de l'assureur (obligations à taux fixe et variable, actions et immobilier).
- **Portefeuille de Passifs** : Les *model points* d'épargne décrivant les engagements envers les assurés.
- **Hypothèses de Modélisation** : Un ensemble de tables paramétrant le comportement futur (stratégie d'investissement, stratégie ALM, règles de participation aux bénéfices, tables de mortalité, de rachat) et les chocs prudentiels Solvabilité 2.

Une étape de validation est systématiquement réalisée pour assurer la cohérence et la qualité des données chargées. Par exemple, nous vérifions qu'il n'y a pas de Provisions mathématiques négatives ou que la somme des taux d'affectation des différentes classes d'actifs est bien égale à 1.

#### 1.6.1.2 Application des Chocs Solvabilité 2 en t=0

L'application des chocs instantanés en t=0 est une étape fondamentale du calcul du SCR (Solvency Capital Requirement) selon la formule standard de Solvabilité 2. L'objectif est de mesurer la résilience de l'assureur face à une série de scénarios de crise prédefinis, calibrés pour représenter un événement se produisant une fois tous les 200 ans.

Pour chaque choc, le modèle crée un "axe analytique" : les données d'entrée sont dupliquées, puis les paramètres pertinents sont modifiés conformément au scénario de choc. La différence entre la valeur des fonds propres dans le scénario central (sans choc) et leur valeur dans le scénario choqué détermine le besoin en capital pour ce risque spécifique.

Les principaux chocs, ou modules de risque, se répartissent en plusieurs catégories :

- **Le risque de marché** : Il regroupe les risques liés aux fluctuations des marchés financiers.
- **Choc de taux d'intérêt** : Simule une variation soudaine, à la hausse ou à la baisse, de la courbe des taux d'intérêt. Ce choc a un impact majeur sur la valeur des actifs (notamment les obligations) et des passifs (qui sont actualisés avec cette courbe des taux).
- **Choc actions** : Modélise une baisse brutale des marchés actions. La formule standard distingue généralement deux types de chocs actions (Type 1 et Type 2) en fonction de la nature et de la diversification des investissements. Par exemple, un choc de -33.84% pourrait s'appliquer à un portefeuille d'actions diversifié.

- **Choc immobilier** : Représente une chute de la valeur du marché immobilier. Le paramètre de -25% est une valeur standard pour ce type de risque.
- **Choc de spread** : Concerne le risque de crédit sur les obligations et les prêts. Il simule un élargissement des spreads de crédit, ce qui diminue la valeur de marché de ces actifs.
- **Le risque de souscription vie** : Il est lié aux aléas inhérents à l'activité d'assurance vie.
- **Choc de mortalité** : Simule une augmentation soudaine et permanente du taux de mortalité (par exemple, +15%). Ce choc est particulièrement impactant pour les contrats de prévoyance où l'assureur doit verser un capital en cas de décès.
- **Choc de longévité** : À l'inverse, il modélise une baisse permanente du taux de mortalité (les assurés vivent plus longtemps que prévu). Ce risque affecte principalement les rentes viagères, pour lesquelles l'assureur doit verser des prestations plus longtemps.
- **Choc de rachat** : Simule une variation massive et soudaine du comportement des assurés en matière de rachat de leurs contrats. Il se décline en trois sous-modules : une hausse des taux de rachat, une baisse, et un scénario de rachat de masse (catastrophique).
- **Choc de dépenses** : Modélise une augmentation imprévue des frais de gestion de l'assureur, combinée à une hausse de l'inflation de ces frais.
- **Choc de catastrophe** : Concerne les événements extrêmes, comme une pandémie, entraînant une augmentation brutale et temporaire de la mortalité (par exemple, une hausse de 0.15 points de pourcentage du taux de mortalité sur une année).

#### 1.6.1.3 Préparation à la Boucle de Projection

Enfin, les tables de données sont préparées pour la projection en y ajoutant les dimensions d'analyse fondamentales : le **scénario économique**, la **période de projection** (l'année) et l'**événement intranuel**.

### 1.6.2 Phase 2 : La Boucle de Projection Annuelle

Le cœur du modèle est une boucle itérative qui projette le bilan année par année. Pour chaque pas de temps, trois événements clés sont modélisés séquentiellement.

#### 1.6.2.1 Événement 1 : Performance

Cette première étape simule le "passage du temps" sans intervention active du management.

- **Côté Passif** : Les engagements évoluent sous l'effet des flux biométriques (décès), comportementaux (rachats), et contractuels (arrérages de rente). La provision mathématique est revalorisée en

appliquant les Taux Minimums Garantis (TMG) pour les fonds euros et la performance des marchés pour les Unités de Compte (UC).

- **Côté Actif** : La valeur des actifs est mise à jour pour refléter la performance des marchés. Les revenus (coupons, dividendes) sont encaissés et alimentent la trésorerie.

#### 1.6.2.2 Événement 2 : Stratégie d'Investissement

Cette étape modélise les décisions de gestion financière. L'algorithme simule la politique d'investissement en cherchant à maintenir une allocation d'actifs cible. En fonction de la trésorerie disponible, le modèle arbitre entre les différentes classes d'actifs, générant des ordres d'achats et de ventes.

#### 1.6.2.3 Événement 3 : Stratégie ALM et Clôture du Compte de Résultat

C'est l'étape finale de l'exercice annuel, qui vise à équilibrer le bilan.

1. **Détermination du Résultat Financier** : Le modèle agrège l'ensemble des produits financiers générés.
2. **Application de la Stratégie de Participation aux Bénéfices (PB)** : Le modèle calcule la PB à distribuer, en respectant les contraintes réglementaires et en visant un taux cible. Il peut activer des leviers comme la reprise de la Provision pour Participation aux Excédents (PPE) ou la réalisation de plus-values latentes.
3. **Clôture des Comptes** : Le résultat technique et financier sont finalisés pour établir le compte de résultat et s'assurer de l'équilibre du bilan de clôture.

### 1.6.3 Phase 3 : Finalisation et Génération des Outputs

Une fois la boucle achevée pour toutes les années et tous les scénarios, le modèle entre dans sa phase finale.

#### 1.6.3.1 Calcul des Indicateurs Prudentiels

Le principal objectif est de calculer le **Best Estimate (BE)** des passifs. Pour chaque scénario, le modèle agrège les flux de passifs futurs et les actualise en utilisant les courbes de taux sans risque correspondantes. La moyenne des BE sur l'ensemble des scénarios fournit la valeur centrale, tandis que la distribution permet de calculer le capital de solvabilité requis (SCR).

#### 1.6.3.2 Génération des Rapports de Sortie

Enfin, le modèle produit un ensemble de rapports détaillés (similaires aux QRTs réglementaires) présentant les bilans projetés, les comptes de résultat, la décomposition du BE et du SCR, et d'autres indicateurs clés pour l'analyse actuarielle.

## 1.7 Limites Actuelles du modèle

A date, les fonds propres ne sont pas modélisés dans le modèle ALM. En effet, le modèle se concentre sur la projection de l'actif et du passif, ainsi que sur les interactions entre les deux, mais n'intègre pas encore la dynamique des fonds propres. Cette limitation est importante car les fonds propres jouent un rôle crucial dans la solvabilité et la résilience financière de l'assureur. Leur modélisation permettrait de mieux évaluer l'impact des stratégies de gestion sur la solidité financière globale de l'entreprise. L'absence des fonds propres nous empêche de calculer des indicateurs cruciaux tels que le ratio de solvabilité.

## Chapitre 2

# Construction d'un Générateur de Portefeuilles de Passifs

## 2.1 Objectifs Stratégiques et Contraintes Techniques

La capacité à tester la robustesse des modèles et la pertinence des analyses de sensibilité repose sur un prérequis fondamental : la disponibilité de données de passif réalistes. Pour un cabinet de conseil, où l'accès aux portefeuilles des clients n'est pas systématique, la faculté de générer des portefeuilles synthétiques, mais représentatifs du marché, constitue un atout stratégique majeur. C'est dans ce contexte qu'un générateur de portefeuilles de passifs a été conçu et développé dans le cadre de ce mémoire.

Ce chapitre a pour vocation de présenter cet outil et la manière dont il a été construits. Il sera également détaillé les besoins stratégiques et analytiques auxquels ce générateur répond, la méthodologie de génération retenue, les contraintes techniques rencontrées et les données qui ont été utilisées pour rendre le portefeuille le plus réaliste possible.

### 2.1.1 Définition du générateur de portefeuilles de passifs

Le générateur de portefeuille de passifs développé dans le cadre de ce mémoire est un outil conçu pour créer, de manière algorithmique, des ensembles de données synthétiques qui imitent avec réalisme des portefeuilles de contrats d'assurance-vie. Plutôt que de s'appuyer sur des données réelles, souvent confidentielles ou indisponibles, cet outil simule les caractéristiques fondamentales des assurés (âge, sexe, etc.) et de leurs contrats (type de produit, montant de la provision mathématique, date de souscription, etc.).

L'objectif n'est pas de produire des données aléatoires, mais de générer un portefeuille dont les propriétés statistiques, distributions, corrélations, tendances, sont indiscernables de celles d'un portefeuille réel. Pour cela, toutes les lois et hypothèses ont été calibrées sur des données publiques de marché. Avoir des données fiables est très important pour produire des résultats de qualité dans le cadre d'analyses ou de décisions stratégiques, c'est pourquoi le développement d'un tel outil s'est imposé comme une nécessité.

### 2.1.2 Besoins métiers : simulation de nouveaux produits et analyse concurrentielle

Pour un acteur du secteur de l'assurance, qu'il s'agisse d'un assureur ou d'un cabinet de conseil, la capacité à modéliser et à anticiper les dynamiques de marché est un avantage concurrentiel décisif. Le générateur de portefeuilles de passifs répond directement à ce besoin en fournissant un support quantitatif pour la prise de décision stratégique. Il permet par exemple à un cabinet de conseil de tester ses modèles sans dépendre des données clients, et à un assureur d'explorer des scénarios prospectifs ou d'évaluer l'impact de nouvelles offres. Son utilité se manifeste dans trois domaines clés pour les assureurs : le lancement de nouveaux produits, l'orientation du *business mix* et l'analyse concurrentielle.

Premièrement, le lancement d'un nouveau produit d'assurance-vie représente un investissement et un risque significatifs. Avant toute commercialisation, il est impératif d'en évaluer rigoureusement les impacts sur le profil de risque et la rentabilité de l'entreprise. Le générateur offre un véritable laboratoire virtuel pour effectuer ces tests. En simulant l'intégration de milliers de polices conformes aux caractéristiques du nouveau produit (garanties, frais, options), il permet de projeter leur comportement dans le temps.

Il devient alors possible d'analyser leur effet sur les indicateurs prudentiels de Solvabilité II, tels que le *Best Estimate* (BE) et le *Solvency Capital Requirement* (SCR), mais aussi d'évaluer leur sensibilité à divers chocs de marché (hausse des taux, krach boursier) ou de comportement (vagues de rachats). Cet outil permet ainsi de tester, d'ajuster et d'optimiser les caractéristiques d'un produit pour atteindre le couple rendement/risque désiré avant même sa mise sur le marché.

Deuxièmement, le générateur est un outil précieux pour piloter la stratégie à long terme de l'entreprise. La direction peut être amenée à vouloir faire évoluer son *business mix*, c'est-à-dire la répartition de son portefeuille entre différents types de produits (fonds en euros, unités de compte, prévoyance...). Par exemple, dans un contexte de taux bas persistants, un assureur pourrait vouloir accélérer sa transition vers les produits en unités de compte. Le générateur permet de quantifier les implications d'une telle stratégie. En simulant des portefeuilles futurs correspondant à ces nouvelles orientations commerciales, la direction peut visualiser les conséquences sur le bilan, la rentabilité prévisionnelle, mais aussi sur la consommation de capital et l'exposition aux risques. Ces simulations éclairent les décisions stratégiques et s'intègrent naturellement dans des exercices prospectifs comme l'ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*).

Enfin, la capacité à se positionner par rapport à ses concurrents est fondamentale. Faute d'accès aux portefeuilles détaillés des autres acteurs, un assureur doit s'appuyer sur des reconstitutions. En se basant sur des données publiques (rapports annuels ou publications réglementaires comme le Rapport sur la Solvabilité et la Situation Financière) ou des statistiques sectorielles, le générateur peut permettre la création d'un portefeuille représentatif du marché, ou simuler le portefeuille probable d'un concurrent spécifique. Ces portefeuilles synthétiques deviennent alors une base solide pour des analyses comparatives (*benchmarking*). Ils permettent non seulement d'évaluer la performance relative, mais aussi de comparer les profils de risque, d'anticiper les stratégies concurrentes et d'identifier les meilleures pratiques du marché. Il convient toutefois de souligner les limites d'une telle démarche. Une analyse ALM complète et réaliste d'un concurrent ne peut se contenter de la seule modélisation du passif. Elle exigerait également de simuler son portefeuille d'actifs et de disposer d'informations précises sur ses ressources financières et ses fonds propres. Or, ces données, qui relèvent du secret des affaires, sont rarement publiques. Par conséquent, l'analyse comparative reste nécessairement partielle, se concentrant sur les caractéristiques intrinsèques du portefeuille de passifs reconstitué.

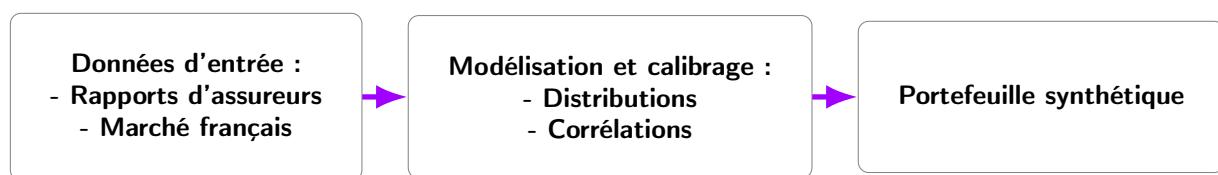


FIGURE 2.1 – Schéma de la méthodologie de génération d'un portefeuille de passifs synthétique.

### 2.1.3 Défis de la modélisation : réalisme, volumétrie et flexibilité

La conception et la mise en œuvre d'un générateur de portefeuilles de passifs efficace soulèvent trois défis majeurs et interdépendants :

- **Le réalisme des données générées** : Il s'agit du défi le plus complexe. L'objectif n'est pas de produire des données aléatoires, mais de créer un portefeuille synthétique dont les propriétés statistiques sont indiscernables de celles d'un portefeuille réel. Cela implique non seulement de reproduire fidèlement les distributions de chaque caractéristique individuelle (âge, montant, etc.), mais aussi, et surtout, de capturer les corrélations complexes qui les lient. Par exemple, l'âge d'un assuré est souvent corrélé au type de produit souscrit et au montant de sa provision mathématique. Ignorer ces dépendances conduirait à un portefeuille incohérent, dont le comportement sous différents scénarios de risque serait erroné, invalidant ainsi les analyses prudentielles ou stratégiques qui en découlent.
- **La gestion de la volumétrie** : Les portefeuilles d'assurance-vie des grands acteurs du marché se comptent en centaines de milliers, voire en millions de contrats. Le générateur doit être capable de produire des ensembles de données de cette ampleur de manière performante, c'est-à-dire dans un temps de calcul raisonnable et sans consommer une quantité excessive de ressources mémoire. Cette contrainte de performance est d'autant plus forte que la gestion des corrélations, nécessaire au réalisme du portefeuille, ajoute une complexité de calcul significative. Il faut donc trouver un équilibre entre la complexité statistique et la performance, ce qui a des implications directes sur les choix technologiques et algorithmiques.
- **La flexibilité de l'outil** : Un générateur ne serait que d'une utilité limitée s'il ne produisait qu'un seul type de portefeuille statique. Pour répondre aux besoins métiers variés, l'outil doit être hautement paramétrable. L'utilisateur doit pouvoir ajuster finement les caractéristiques du portefeuille à générer : définir les spécificités d'un nouveau produit, modifier les distributions statistiques pour simuler un segment de marché différent, ou encore changer les lois de comportement (rachat, mortalité) pour tester de nouvelles hypothèses. Cette section concernant la flexibilité ne sera pas développée dans le cadre de ce mémoire car l'objectif est d'utiliser un portefeuille calibré sur le marché français.

La section suivante présente en détail la méthodologie de modélisation probabiliste qui a été développée pour construire un portefeuille à la fois réaliste et volumineux.

## 2.2 Méthodologie de Génération et Modélisation Statistique

La méthodologie de génération du portefeuille de passifs synthétique repose sur une approche probabiliste. L'objectif est de construire un ensemble de contrats d'assurance dont les propriétés statistiques sont entièrement maîtrisées. Pour ce faire, chaque caractéristique d'un contrat (âge de l'assuré, montant de la provision, etc.) est modélisée comme une variable aléatoire, tirée d'une loi de probabilité préalablement calibrée sur des données de marché quand elles sont disponibles. Sinon, des hypothèses ont été formulées pour recréer ces variables de la manière la plus réaliste possible.

### 2.2.1 Approche stochastique par lois de probabilité

La génération du portefeuille synthétique s'appuie sur une modélisation stochastique où chaque attribut d'un contrat est représenté par une variable aléatoire. Dans un premier temps, l'objectif est de générer un portefeuille complet, représentatif du marché. Pour ce faire, une loi de probabilité marginale est définie pour chaque caractéristique, avec des paramètres rigoureusement calibrés sur des données de marché. Certaines variables sont ensuite liées entre elles pour refléter les dépendances observées dans les portefeuilles réels. Ce même cadre peut ensuite être adapté pour simuler un produit spécifique ; il suffirait alors de générer des variables aléatoires de manière conditionnelle aux caractéristiques de ce produit. Cette méthode garantit à la fois le réalisme statistique du portefeuille et la flexibilité nécessaire aux analyses prospectives.

Les sections suivantes détailleront la méthodologie de calibration pour les variables fondamentales qui structurent le portefeuille :

- L'âge de l'assuré ;
- L'âge à la souscription, qui détermine l'ancienneté du contrat ;
- Le montant de la Provision Mathématique (PM).

D'autres variables, telles que le sexe ou la répartition des supports, seront également modélisées pour compléter le profil de chaque contrat.

#### 2.2.1.1 Modélisation de l'âge des assurés

La première étape a consisté à construire une distribution de probabilité réaliste à partir de deux sources de données :

1. **La pyramide des âges de la population française** pour l'année 2024 [6], fournissant la structure démographique de base entre 0 et 100 ans.
2. **Une étude statistique de l'INSEE** sur la détention d'assurance-vie par tranche d'âge en France [5]

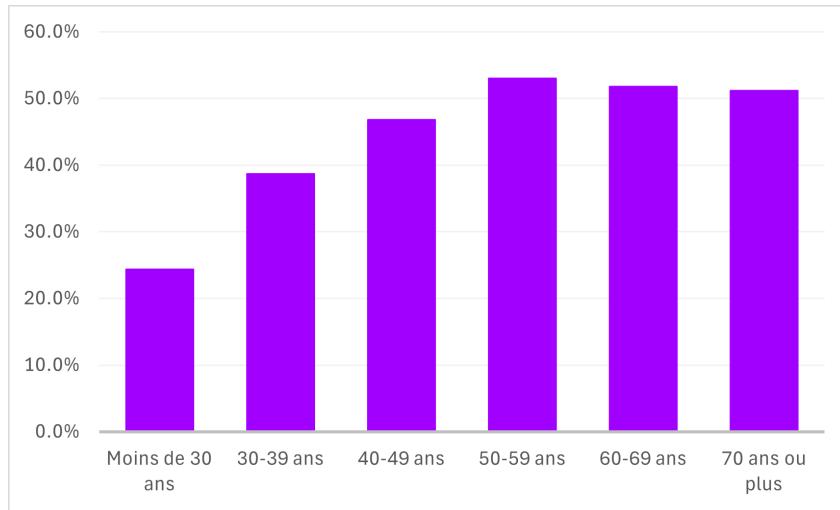


FIGURE 2.2 – Proportion de détention d'assurance-vie par tranche d'âge en France [5].

Afin de transformer les données discrètes de l'INSEE, présentées par tranches d'âge, en une distribution continue du taux de détention par âge, une méthodologie d'interpolation a été mise en œuvre. Cette étape est cruciale pour pouvoir ensuite simuler l'âge des assurés de manière réaliste.

L'approche a consisté à définir d'abord des points de données représentatifs pour chaque tranche d'âge fournie. Les choix suivants ont été faits :

- Pour la tranche des moins de 30 ans, plusieurs points ont été positionnés entre 18 et 30 ans afin de modéliser la croissance progressive de la détention en début de vie active.
- Pour les tranches intermédiaires (par exemple, 30-39 ans), le point central de l'intervalle a été retenu.
- Pour la tranche des "70 ans et plus", un âge représentatif de 80 ans a été choisi car à partir de cet âge, la souscription/résiliation du contrat d'assurance est rare.

Une fois ces points définis, une interpolation PCHIP (*Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial*) : interpolation par morceaux conservant la monotonie et utilisant des polynômes de degré trois) a été appliquée sur la partie de la courbe de 0 à 80 ans. Cette méthode a été privilégiée car elle évite les oscillations artificielles qu'une interpolation cubique aurait générées et garantit que la proportion de détention reste croissante comme ce que suggèrent les données. Pour les âges plus avancés, une interpolation linéaire a été utilisée pour assurer une transition douce, suivie d'un plateau constant après 80 ans. Cette dernière hypothèse modélise une stabilisation du comportement de détention chez les assurés les plus âgés avec une absence de rachats.

Le résultat de ce processus est une fonction continue et lisse qui estime le taux de détention d'assurance-vie pour chaque âge entre 18 et 100 ans, comme illustré par la figure 2.3.

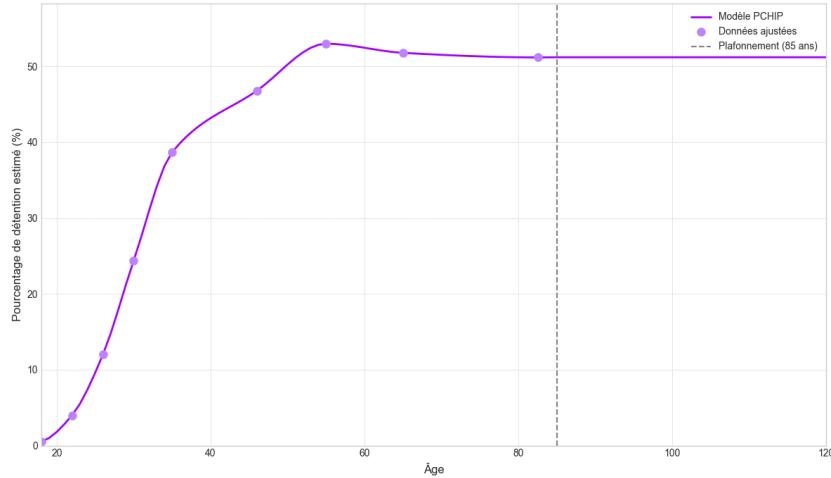


FIGURE 2.3 – Proportion de détention d’assurance-vie par âge en France par diverses méthodes d’interpolation. TODO : modifier légende et titre pour plus de lisibilité + refaire la modélisation avec 80 ans et non 82.5 ans

En multipliant la population de chaque âge par le taux de détention estimé, il a été possible d’obtenir une estimation du nombre d’assurés pour chaque âge et chaque sexe. Après standardisation, on peut alors construire une loi de probabilité empirique. :

$$P(Age = x) = \frac{N_{assures}(x)}{Total_{assures}}$$

**Calibration d’une loi usuelle sur la loi empirique** Deux lois de probabilité continues ont été sélectionnées comme candidates pour modéliser la distribution empirique : la **loi Gamma** et la **loi Beta**. Les paramètres de ces deux lois ont été estimés par la méthode du maximum de vraisemblance sur un échantillon de 200 000 individus tirés de la loi empirique. Pour déterminer la loi la plus adéquate, des critères visuels et statistiques (Test de Kolmogorov-Smirnov<sup>1</sup>, AIC<sup>2</sup>, BIC<sup>3 4</sup>) ont été utilisés. La figure 2.4 montre l’ajustement de la loi Beta qui a des meilleurs résultats statistiques et qui épouse mieux la distribution empirique que la loi Gamma (figure 5.2).

1. Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d’adéquation non paramétrique comparant la fonction de répartition empirique d’un échantillon à celle d’une loi théorique. La statistique  $D$  représente l’écart maximal absolu entre ces deux fonctions : une valeur faible indique un bon ajustement.

2. Le critère d’information d’Akaike (AIC) est une mesure de la qualité d’un modèle statistique qui arbitre entre la qualité de l’ajustement et la complexité du modèle. Il pénalise l’ajout de paramètres pour éviter le surapprentissage. Un AIC plus faible indique un meilleur modèle.

3. Le critère d’information bayésien (BIC) est similaire à l’AIC mais impose une pénalité plus forte pour le nombre de paramètres, dépendant de la taille de l’échantillon. Il tend à favoriser des modèles plus parcimonieux. Comme pour l’AIC, une valeur plus faible est préférable.

4. L’AIC et le BIC servent à comparer deux ajustements, pour savoir quel modèle est le mieux ajusté on va donc regarder le plus faible AIC/BIC

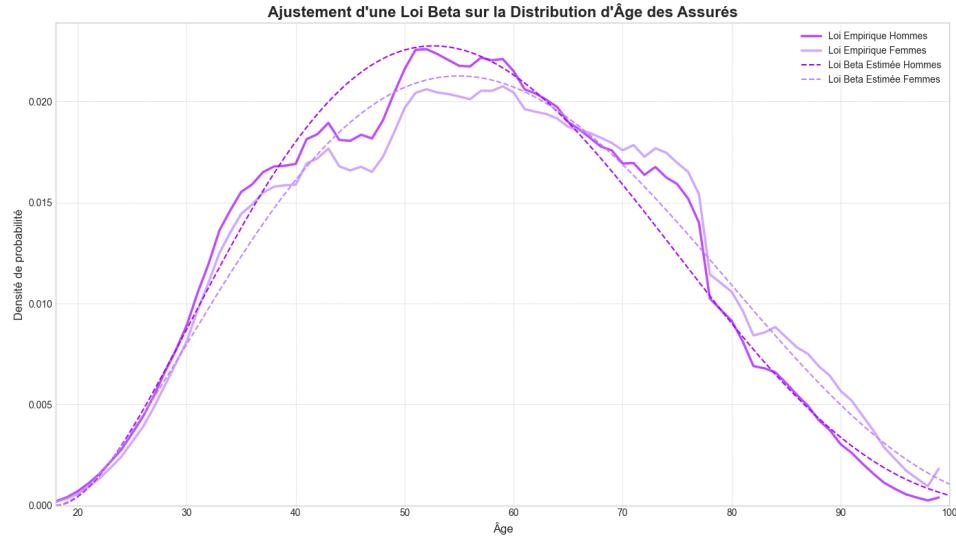


FIGURE 2.4 – Ajustement de la loi Beta sur la distribution empirique. TODO : Séparer une version homme et une femme et mettre en annexe

Le tableau 2.1 confirme cette observation. La loi Beta présente une statistique K-S inférieure (traduisant une distance maximale plus faible entre la distribution théorique et empirique) ainsi que des scores AIC et BIC plus bas, indiquant un meilleur ajustement global. C'est donc cette loi qui a été retenue pour modéliser l'âge des assurés dans le portefeuille synthétique.

| Métrique            | Loi Gamma | Loi Beta  | Meilleur Modèle |
|---------------------|-----------|-----------|-----------------|
| Statistique K-S (D) | 0.0396    | 0.0271    | Beta            |
| AIC (Akaike)        | 1 674 497 | 1 668 357 | Beta            |
| BIC (Bayésien)      | 1 674 527 | 1 668 378 | Beta            |

TABLE 2.1 – Tableau comparatif des métriques d'ajustement (population masculine). TODO : mettre aussi les résultats pour la population féminine, mettre également des valeurs en gras

### 2.2.1.2 Modélisation de l'âge à la souscription

Une fois l'âge des assurés modélisé, il est indispensable de déterminer l'âge à la souscription. Cette variable est fondamentale, car elle permet de calculer l'ancienneté du contrat, un paramètre clé qui influence directement les lois de comportement, notamment les taux de rachat, dans les modèles de projection.

La distribution de l'âge à la souscription n'a pas été calibrée sur des données directes, mais a été dérivée de la courbe de taux de détention par âge, établie dans la section précédente. L'hypothèse sous-jacente est que la densité de probabilité de souscrire à un âge donné est proportionnelle à la vitesse à laquelle le taux de détention augmente à cet âge. Autrement dit, la distribution de l'âge à la souscription peut être approximée par la dérivée discrète de la fonction du taux de détention. Par exemple, une forte pente de la courbe de détention entre 25 et 35 ans signale une intense activité de souscription dans cette tranche

d'âge. En calculant la différence finie entre les points de la courbe interpolée, il est donc possible de construire une distribution empirique de l'âge à la souscription.

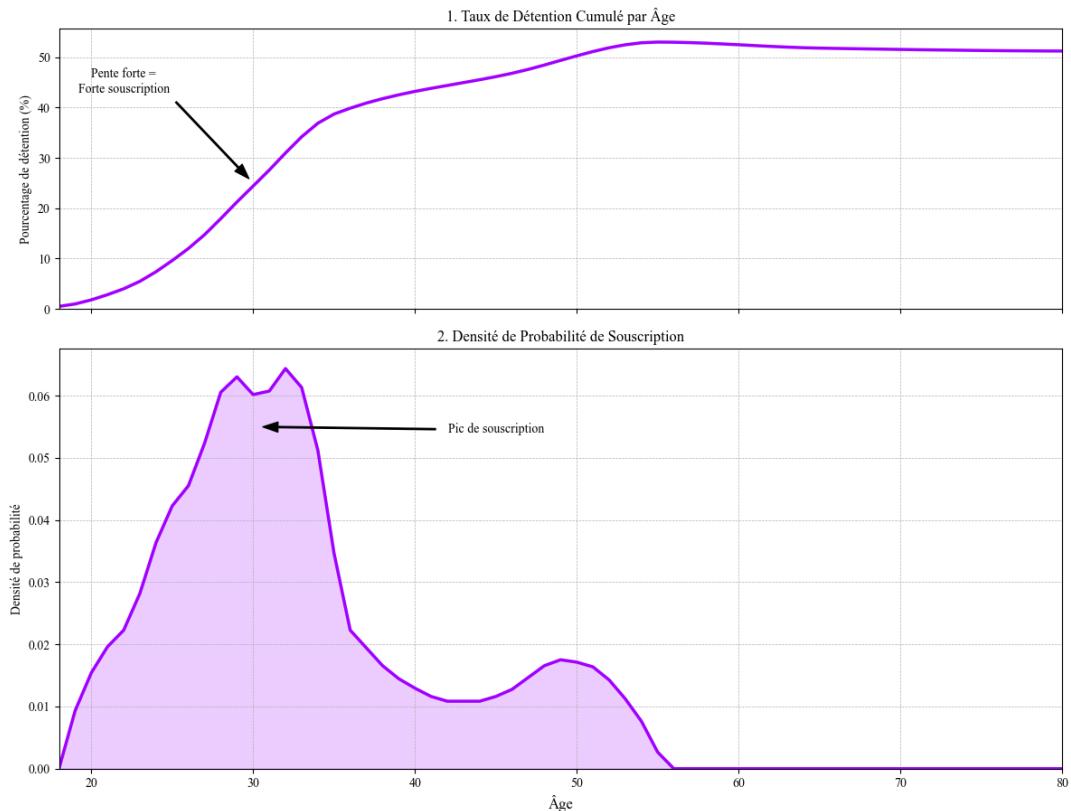


FIGURE 2.5 – Passage de la distribution empirique de l'âge à la souscription à la densité de probabilité du taux de souscription.

Plusieurs lois de probabilité ont été testées pour modéliser cette distribution empirique de l'âge à la souscription :

- La **loi Gamma** : définie sur  $\mathbb{R}^+$ , elle est souvent utilisée pour modéliser des durées. Sa densité est  $f(x; k, \theta) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)}$ .
- La **loi Beta** : définie sur un intervalle borné  $[a, b]$ , elle offre une grande flexibilité de forme. Sa densité standard sur  $[0, 1]$  est  $f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$ .
- La **loi de Weibull** : courante en analyse de survie, sa densité est donnée par  $f(x; \lambda, k) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}$ .
- Le **Modèle de Mélange Gaussien (GMM)** : il s'agit d'une combinaison linéaire de plusieurs lois normales, permettant de s'ajuster à des distributions multimodales. Sa densité est  $f(x) =$

$$\sum_{i=1}^K w_i \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu_i}{\sigma_i} \right)^2}.$$

Le tableau 2.2 présente les résultats.

| Distribution | AIC       | BIC       | K-S (D) |
|--------------|-----------|-----------|---------|
| GMM (n=2)    | 1 125 603 | 1 125 654 | 0.0485  |
| Beta         | 1 385 454 | 1 385 495 | 0.0845  |
| Gamma        | 1 400 178 | 1 400 208 | 0.1110  |
| Weibull      | 1 437 176 | 1 437 207 | 0.1544  |

TABLE 2.2 – Tableau comparatif des métriques d'ajustement pour l'âge à la souscription. TODO : mettre également des valeurs en gras

Le **Mélange Gaussien à deux composantes (GMM)** s'est avéré être le modèle le plus performant, avec des scores AIC et BIC nettement inférieurs. Cela s'explique car 2 pics de souscription sont observables sur la distribution. Cette bimodalité, illustrée par la calibration de la loi GMM en figure 2.6, est une caractéristique de marché que les lois de probabilité plus simples ne peuvent capturer.

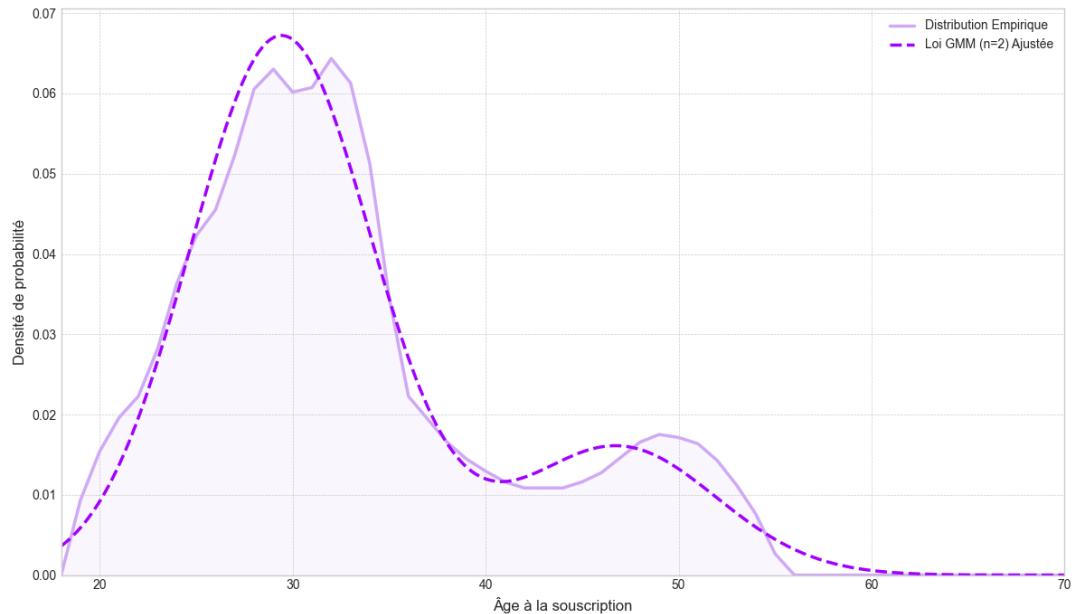


FIGURE 2.6 – Ajustement d'une GMM sur la distribution de l'âge à la souscription.

### 2.2.1.3 Modélisation de la Provision Mathématique (PM)

Pour calculer la Provision Mathématique à partir des données marché, une méthode plus complexe a été mise en place. Une approche directe consistant à ajuster une loi sur des données de PM n'est pas possible car des données publiques sur ce sujet n'existent pas. Une méthodologie de modélisation conditionnelle a donc été mise en place.

L'hypothèse fondamentale est que la PM d'un individu est principalement fonction de son patrimoine, qui lui-même est fortement corrélé à son âge. La modélisation s'est donc déroulée en plusieurs étapes.

La première étape a consisté à modéliser la distribution du patrimoine brut en fonction de l'âge, en s'appuyant sur les données de l'INSEE [7]. Plutôt que de calibrer une seule loi pour toute la population, une **loi Lognormale** a été ajustée pour chaque tranche d'âge. Les paramètres de cette loi,  $\mu$  et  $\sigma$ , ont été estimés par la méthode de **correspondance des quantiles**. Cette méthode est particulièrement adaptée lorsque les données individuelles ne sont pas disponibles et que seules des statistiques agrégées sont fournies. Elle consiste à déterminer les paramètres qui minimisent l'écart quadratique entre les quantiles théoriques de la loi et les quantiles empiriques observés (ici les déciles) :

$$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \arg \min_{\mu, \sigma} \sum_{i=1}^9 (F^{-1}(p_i; \mu, \sigma) - Q_{emp}(p_i))^2 \quad (2.1)$$

où  $p_i \in \{0.1, \dots, 0.9\}$ ,  $F^{-1}$  est la fonction quantile de la loi Lognormale et  $Q_{emp}$  les valeurs fournies par l'INSEE. Cette approche garantit que la distribution ajustée reproduit fidèlement la dispersion de la population réelle. Le tableau 2.3 synthétise les paramètres obtenus.

| Tranche d'âge   | $\mu$   | $\sigma$ |
|-----------------|---------|----------|
| Moins de 30 ans | 9.9233  | 1.7713   |
| 30 à 39 ans     | 11.6750 | 1.8374   |
| 40 à 49 ans     | 12.1756 | 2.1221   |
| 50 à 59 ans     | 12.3216 | 2.0551   |
| 60 à 69 ans     | 12.3579 | 2.0772   |
| 70 ans ou plus  | 12.2620 | 1.8199   |

TABLE 2.3 – Paramètres de la loi Lognormale du patrimoine brut, calibrés par tranche d'âge.

Sur la base des calibrations précédentes, une population synthétique de 500 000 individus a été générée. Pour chaque individu, un âge a été tiré selon la loi Bêta déterminée précédemment, puis un patrimoine a été tiré selon la loi Lognormale conditionnelle correspondant à son âge. On obtient ainsi un échantillon de paires (Âge, Patrimoine) respectant la corrélation observée dans la réalité (TODO : rajouter un graphe 3D si c'est possible/lisible).

La deuxième étape consiste à estimer la part du patrimoine de chaque individu allouée à l'assurance-vie. Pour ce faire, les données de l'INSEE sur la composition du patrimoine par décile [7] sont utilisées. La figure 2.7 illustre la part du patrimoine financier en fonction du patrimoine brut moyen. Cette relation n'est pas linéaire. Pour les patrimoines les plus modestes, qui n'ont pas encore la capacité d'investir dans l'immobilier, la part des actifs financiers est relativement élevée. À mesure que le patrimoine augmente, une part significative est allouée à l'immobilier, ce qui diminue mécaniquement la part relative du patrimoine financier. Ce phénomène s'inverse cependant pour les patrimoines les plus élevés, où la diversification vers des actifs financiers redouble prépondérante, entraînant une remontée de leur part dans le patrimoine total, ce n'est pas observable sur le graphique 2.7 car les données sont agrégées par décile.

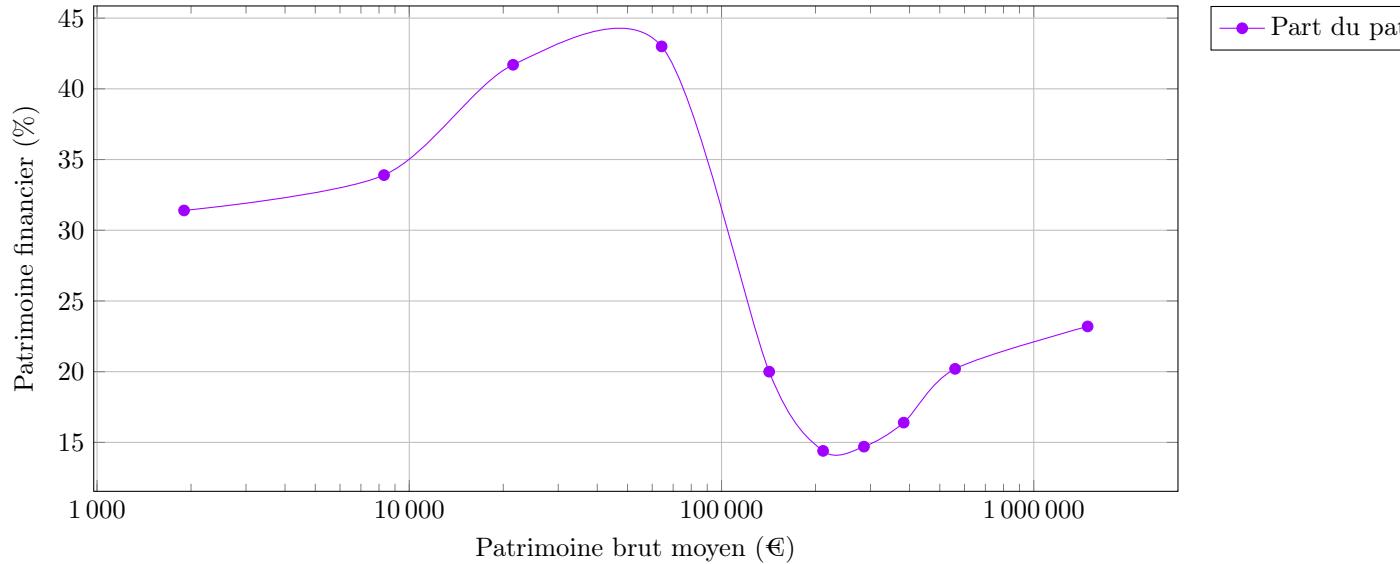


FIGURE 2.7 – Part du patrimoine financier en fonction du patrimoine brut moyen, par décile [7].

La troisième étape consiste à lier le patrimoine financier à la Provision Mathématique. Il est en effet plus réaliste de considérer que l'épargne en assurance-vie (ou la provision mathématique du point de vue de l'assureur) constitue une part du patrimoine financier plutôt que du patrimoine brut. Une hypothèse centrale est donc formulée : la PM d'un individu est estimée comme une fraction de son patrimoine financier. Sur la base de données INSEE [7], cette fraction est fixée à **40%**. Ainsi, pour chaque individu de la population simulée, la PM est calculée comme suit :

$$PM = Patrimoine\ Brut \times Part\ du\ Patrimoine\ Financier \times 40\%$$

Cette règle permet de transformer la distribution de patrimoine en une distribution de PM, en tenant compte des non-linéarités observées dans la composition du patrimoine.

Après avoir appliqué ce processus à toute la population simulée, nous obtenons un échantillon réaliste de Provisions Mathématiques. Une dernière calibration a montré que la distribution de ces PM pouvait être modélisée de manière très satisfaisante par une **loi Lognormale**. Bien que les tests d'adéquation classiques rejettent formellement l'hypothèse nulle en raison de la très grande taille de l'échantillon (rendant le test extrêmement sensible aux infimes déviations), l'analyse comparative des critères d'information et de la distance K-S confirme la supériorité de la loi Lognormale sur cet ajustement, comme l'indique le tableau 2.4.

| Distribution | AIC       | BIC       | K-S (D) |
|--------------|-----------|-----------|---------|
| Lognorm      | 7 142 088 | 7 142 120 | 0.017   |
| Gamma        | 7 254 743 | 7 254 774 | 0.145   |

TABLE 2.4 – Pour le critère de Kolmogorov-Smirnov, la loi Lognormale est largement meilleure que la loi Gamma pour estimer cette distribution.

## 2.2.2 Synthèse et Génération du Portefeuille Final

L'étape finale de la modélisation consiste à assembler les différentes distributions marginales et conditionnelles calibrées précédemment pour générer le portefeuille de passifs complet. Contrairement à une approche purement multivariée (copule globale 3D) qui peinerait à capturer la nature conditionnelle de la richesse par rapport à l'âge, une approche hybride a été implémentée.

### 2.2.2.1 Modélisation de la dépendance des âges par Copule

L'analyse des données montre une corrélation mécanique et comportementale entre l'âge de l'assuré et son âge à la souscription. Pour reproduire cette structure de dépendance sans figer les distributions marginales, une **Copule Gaussienne bivariée** a été utilisée.

Cette copule permet de générer des paires de rangs corrélés  $(u, v) \in [0, 1]^2$  avec un paramètre de corrélation de Spearman calibré à  $\rho = 0.7$ . Ces rangs sont ensuite transformés en valeurs réelles via les fonctions quantiles inverses (PPF) des lois marginales retenues :

- $Age_{assure} = F_{Beta}^{-1}(u)$
- $Age_{souscription} = F_{GMM}^{-1}(v)$

Une contrainte métier stricte est appliquée post-génération : l'âge à la souscription doit nécessairement être inférieur ou égal à l'âge actuel de l'assuré ( $Age_{souscription} \leq Age_{assure}$ ). Les paires ne respectant pas cette condition sont rejetées et régénérées, assurant ainsi la cohérence temporelle des contrats.

### 2.2.2.2 Génération en cascade de la Provision Mathématique

Une fois le profil d'âge de l'assuré fixé, la Provision Mathématique (PM) est générée de manière conditionnelle, reproduisant la chaîne causale identifiée lors de la calibration :

1. **Génération du Patrimoine Global** : Pour un âge donné, un montant de patrimoine est tiré aléatoirement dans la loi Lognormale spécifique à la tranche d'âge de l'assuré (cf. section précédente).
2. **Test de Détection** : Une épreuve de Bernoulli détermine si l'individu détient un contrat d'assurance-vie, avec une probabilité dépendant de son niveau de patrimoine.
3. **Calcul de la PM** : Pour les détenteurs, la PM est calculée par application déterministe des ratios calibrés :

$$PM = Patrimoine \times \%_{Financier}(Patrimoine) \times 40\%$$

### 2.2.2.3 Enrichissement du Portefeuille : Sexe et TMG

Pour finaliser le portefeuille, deux variables supplémentaires sont attribuées à chaque contrat généré :

- **Le Sexe de l'assuré** : Il est généré aléatoirement selon une loi de Bernoulli, calibrée sur la répartition hommes/femmes observée dans la population des assurés.

- **Le Taux Minimum Garanti (TMG)** : Contrairement aux autres variables stochastiques, le TMG est modélisé de manière déterministe en fonction de l'année de souscription. L'année de souscription est d'abord déduite par calcul :

$$\text{Annee}_{\text{sous}} = \text{Annee}_{\text{actuelle}} - (\text{Age}_{\text{actuel}} - \text{Age}_{\text{souscription}})$$

Une table de correspondance historique est ensuite utilisée pour attribuer un TMG cohérent avec les conditions de marché de l'époque (taux élevés pour les vieux contrats, taux nuls ou faibles pour les contrats récents).

Ce processus itératif permet de générer un portefeuille synthétique de 1 000 000 contrats présentant des caractéristiques statistiques fidèles à la réalité du marché français, prêt à être utilisé pour les étapes d'agrégation.

## 2.3 Présentation de l'Outil et du Portefeuille de Référence Généré

- 2.3.1 Mise en correspondance avec le format final du modèle ALM
- 2.3.2 Analyse descriptive du portefeuille de référence

## Chapitre 3

# Protocole d'Analyse : Sélection d'une Méthode d'Agrégation

Après avoir établi le cadre réglementaire et construit un générateur de passif capable de produire des données réalistes, il convient désormais d'aborder la problématique centrale : la réduction de la dimension du portefeuille de passif. L'impossibilité technique de projeter individuellement chaque contrat au sein de modèles stochastiques gourmands en ressources fait de l'agrégation du passif un impératif pour l'ensemble du marché de l'assurance. Cette nécessité découle directement de l'exigence de réactivité lors des phases de clôture, où la finesse de l'analyse doit impérativement se concilier avec une performance des modèles de projection utilisés car il faut effectuer beaucoup de lancements différents.

L'objectif de ce chapitre est de définir et de mettre en œuvre un protocole d'analyse visant à sélectionner la méthode d'agrégation la plus performante pour cette étude. L'enjeu est de résoudre un problème d'optimisation sous contraintes : comment réduire drastiquement la volumétrie des données en entrée du modèle ALM, et par extension les temps de traitement, sans altérer la fidélité des indicateurs de risque prudentiels, à savoir le Best Estimate (BE) et le Solvency Capital Requirement (SCR) ?

Pour répondre à cette question, plusieurs approches d'agrégation seront comparées. Deux grandes familles de méthodes seront étudiées :

- **Les approches déterministes classiques** : Il s'agit des méthodes traditionnellement utilisées sur le marché, reposant sur un regroupement des contrats par caractéristiques communes ou par tranches. Elles serviront de point de référence pour l'étude.
- **Les approches statistiques par apprentissage non supervisé** : L'apport des algorithmes de Clustering, tels que les K-Means ou les méthodes basées sur la densité, sera exploré pour constituer des Model Points basés sur une similarité multidimensionnelle des risques.

La démarche s'articulera en trois temps. Les spécificités mathématiques et algorithmiques de chaque méthode candidate seront d'abord exposées. Il s'agira également de détailler le fonctionnement des algorithmes d'apprentissage non supervisé, dont l'usage reste encore peu répandu dans les pratiques actuarielles. Un protocole de test standardisé sera ensuite défini, en précisant les résultats sur le portefeuille de référence et les métriques d'évaluation retenues (écart sur le Best Estimate et taux de compression). Enfin, l'analyse comparative des résultats sera réalisée, ce qui permettra de sélectionner la méthode optimale qui sera utilisée pour les analyses de sensibilité du chapitre suivant.

## 3.1 Présentation des Méthodes d’Agrégation candidates

### 3.1.1 Approche déterministe par regroupement de caractéristiques

La méthode par regroupement de caractéristiques repose sur une segmentation par classes de risque, cette approche constitue le standard historique en actuariat. Elle servira de base de comparaison pour évaluer la performance des algorithmes de regroupement statistique plus avancés présentés dans les parties suivantes.

Le principe fondamental repose sur une partition déterministe du portefeuille. L’objectif est de regrouper les contrats partageant des caractéristiques de risque identiques. Dans un modèle de projection de gestion actif-passif, l’évolution de la Provision Mathématique (PM) est influencée par des caractéristiques spécifiques du contrat. La mortalité dépend de la génération, de l’âge et du sexe ; les rachats sont corrélés à l’âge de l’assuré et à l’ancienneté du contrat (fiscalité) ; la revalorisation dépend du Taux Minimum Garanti (TMG).

Par conséquent, pour garantir que le Model Point agrégé se comporte comme la somme des contrats individuels, il est impératif de regrouper les polices selon ces axes discriminants. Contrairement aux méthodes statistiques qui cherchent des similarités globales, cette approche applique une segmentation rigide. Les critères de regroupement retenus pour cette étude sont :

- **Le Sexe** : Indispensable pour l’application des tables de mortalité différencierées.
- **Le Taux Minimum Garanti (TMG)** : Crucial pour la valorisation des garanties financières.
- **L’Âge de l’assuré** : Discrétisé à l’entier inférieur pour correspondre aux entrées des tables de mortalité.
- **L’Ancienneté du contrat** : Discrétisée à l’entier inférieur pour modéliser correctement la fiscalité et les rachats structurels.

Mathématiquement, cette méthode définit une relation d’équivalence stricte. Deux contrats  $i$  et  $j$  appartiennent au même Model Point  $k$  si et seulement si leurs vecteurs de caractéristiques discrétisées sont identiques :

$$(\text{Sexe}_i, \lfloor \text{Age}_i \rfloor, \lfloor \text{Anc}_i \rfloor, \text{TMG}_i) = (\text{Sexe}_j, \lfloor \text{Age}_j \rfloor, \lfloor \text{Anc}_j \rfloor, \text{TMG}_j)$$

Une fois les groupes constitués, l’agrégation s’opère par la somme des variables extensives (dont la valeur pour le groupe est la somme des valeurs individuelles). La Provision Mathématique du Model Point  $k$  est alors la somme des PM des contrats qui le constituent :

$$PM_{MP_k} = \sum_{i \in Groupe_k} PM_i$$

Les variables intensives du Model Point (dont la valeur est indépendante de la taille du groupe, comme l’Âge ou l’Ancienneté) prennent alors les valeurs définies par la segmentation (par exemple, 45 ans et 10

ans), et non une moyenne pondérée, ce qui est cohérent avec la logique de discrétisation à l'entier.

Cette approche présente l'avantage majeur de la simplicité et de la transparence. Elle conserve exactement la volumétrie financière du portefeuille et respecte scrupuleusement les garanties contractuelles (absence de dilution du TMG par moyenne). Elle garantit une homogénéité parfaite des assurés au sein d'un groupe.

Cependant, elle présente des limites intrinsèques :

- **La rigidité de la structure de regroupement :** La définition des classes est fixée *a priori* et de manière uniforme, sans tenir compte de la distribution réelle des capitaux. Cette approche ne permet pas de concentrer automatiquement la précision du regroupement sur les zones à fort enjeux financiers, traitant potentiellement avec la même granularité les segments marginaux et les segments prépondérants.
- **L'absence de contrôle sur la compression :** Le nombre de Model Points finaux n'est pas paramétrable. Il dépend exclusivement de la dispersion du portefeuille et de la finesse de la segmentation. Sur un portefeuille très hétérogène, cette méthode peut générer un nombre de groupes très élevé, dont certains ne contiendront que peu de contrats, limitant ainsi l'efficacité de la réduction de dimension (phénomène du « fléau de la dimension »).

### 3.1.2 Approche par tranches et moyenne pondérée

Cette méthode constitue une évolution de la segmentation par classes présentée précédemment. Elle vise à réduire davantage le nombre de Model Points en relâchant la contrainte d'égalité stricte sur les variables continues (âge et ancienneté) au profit d'une logique d'intervalles, ou discrétisation par paliers.

Le principe de regroupement reste déterministe. Les variables catégorielles ou contractuelles majeures (Sexe, TMG) conservent une discrimination stricte. En revanche, l'espace des variables temporelles est découpé en tranches. Dans le cadre de cette implémentation, les intervalles suivant ont été retenus :

- Un pas de 2 ans pour l'âge de l'assuré ;
- Un pas de 5 ans pour l'ancienneté du contrat.

Un contrat  $i$  appartient à un groupe  $k$  si ses caractéristiques discrètes correspondent et si ses variables continues tombent dans les intervalles définis :

$$i \in MP_k \iff \begin{cases} \text{Sexe}_i = \text{Sexe}_k \\ \text{TMG}_i = \text{TMG}_k \\ \text{Age}_i \in [\text{Age}_{min}^k, \text{Age}_{max}^k[ \\ \text{Ancienneté}_i \in [\text{Anc}_{min}^k, \text{Anc}_{max}^k[ \end{cases}$$

La spécificité majeure de cette approche réside dans la détermination des caractéristiques du Model Point. Contrairement à une approche simpliste qui retiendrait le centre de l'intervalle (par exemple, 31

ans pour la tranche [30-32]), dans cette méthode il faut calculer le barycentre des contrats regroupés. Finalement, afin de préserver la structure financière du portefeuille, la moyenne est pondérée par la Provision Mathématique (PM).

Ainsi, l'âge ( $Age_{MP}$ ) et l'ancienneté ( $Anc_{MP}$ ) du Model Point sont calculés comme suit :

$$Age_{MP} = \frac{\sum_{i \in MP} Age_i \times PM_i}{\sum_{i \in MP} PM_i} ; \quad Anc_{MP} = \frac{\sum_{i \in MP} Ancienneté_i \times PM_i}{\sum_{i \in MP} PM_i}$$

Cette pondération par les encours permet de s'assurer que le Model Point est représentatif des contrats les plus significatifs financièrement au sein de la tranche, minimisant ainsi le biais d'agrégation sur les projections de flux futurs.

### 3.1.3 Approche statistique par apprentissage non supervisé (K-Means)

Contrairement aux méthodes déterministes qui segmentent l'espace des risques selon une grille préétablie, les approches par apprentissage non supervisé (Machine Learning) visent à déterminer la structure des données. L'objectif n'est plus d'imposer un regroupement, mais de laisser l'algorithme identifier les zones de forte densité du portefeuille pour y placer les groupes semblables, dans notre cas les Model Points.

Parmi les algorithmes de clustering, la méthode des K-Means a été retenue car c'est une méthode robuste et fonctionne très bien pour minimiser l'inertie intra-classe, c'est-à-dire la dispersion des contrats autour de leur Model Point représentatif.

#### 3.1.3.1 Principe de l'algorithme

L'algorithme des K-Means cherche à partitionner un ensemble de  $N$  contrats en  $K$  groupes (ou clusters) distincts, de manière à minimiser la distance entre chaque contrat et le centre de son groupe (le centroïde). Dans notre contexte, ce centroïde deviendra le Model Point.

Mathématiquement, pour un ensemble de contrats représentés par des vecteurs de caractéristiques  $x_i \in \mathbb{R}^d$  (où  $d$  est le nombre de dimensions : Âge, Ancienneté, TMG...), l'algorithme cherche à déterminer les  $K$  centroïdes  $\mu_1, \dots, \mu_K$  qui minimisent la fonction objectif  $J$  (l'inertie) :

$$J = \sum_{j=1}^K \sum_{x_i \in S_j} w_i \|x_i - \mu_j\|^2$$

Où :

- $S_j$  est l'ensemble des contrats assignés au cluster  $j$ .
- $\|\cdot\|$  est la distance/norme utilisée (ici norme euclidienne).
- $w_i$  est le poids du contrat  $i$ , ici cela correspond à la Provision Mathématique ( $PM_i$ ). Ainsi, l'algorithme est forcé de minimiser l'erreur de regroupement prioritairement pour les contrats à fort

enjeux financiers.

### 3.1.3.2 Application aux données du portefeuille

La mise en œuvre de cet algorithme sur un portefeuille d'épargne nécessite plusieurs étapes pour garantir la pertinence des regroupements : le choix des variables, la standardisation des données, et l'adaptation de l'algorithme pour intégrer la pondération par la PM.

Les variables retenues pour le calcul de la distance sont celles qui impactent directement le profil de risque et les flux futurs :

- L'Âge de l'assuré ;
- L'Ancienneté fiscale ;
- Le Taux Minimum Garanti (TMG).

Ces variables ayant des échelles très différentes (un âge varie de 0 à 100, un TMG de 0 à 0.04), un calcul de distance brut donnerait un poids disproportionné à l'âge. Il est donc impératif de procéder à une standardisation (centrage-réduction) des données avant le clustering :

$$\tilde{x}_{i,d} = \frac{x_{i,d} - \mu_d}{\sigma_d}$$

Cette transformation place toutes les variables sur une échelle comparable, permettant à l'algorithme de traiter équitablement les différentes dimensions du risque.

L'algorithme utilisé est une variante pondérée des K-Means. Contrairement à une approche standard où chaque point a une importance égale, ici chaque contrat « attire » le centroïde proportionnellement à sa PM. Le processus itératif est le suivant :

1. **Initialisation** : Sélection des  $K$  centroïdes initiaux via la méthode **k-means++**. Contrairement à une initialisation totalement aléatoire qui risque de conduire à des optimums locaux de mauvaise qualité, cet algorithme répartit les centres initiaux de manière espacée. Le premier centroïde est choisi au hasard, puis chaque centroïde suivant est sélectionné avec une probabilité proportionnelle au carré de la distance qui le sépare du centroïde le plus proche déjà choisi ( $D(x)^2$ ). Cela accélère considérablement la convergence.
2. **Affectation** : Chaque contrat est assigné au centroïde le plus proche en termes de distance euclidienne pondérée.
3. **Mise à jour** : Les nouveaux centroïdes sont recalculés comme le barycentre pondéré des contrats de leur cluster.
4. **Convergence** : Répétition des étapes 2 et 3 jusqu'à stabilisation des centroïdes.

### 3.1.3.3 Constitution des Model Points finaux

Une fois la convergence atteinte, chaque cluster  $j$  est transformé en un Model Point unique.

- Les variables extensives (PM, Nombre de contrats) sont sommées :  $PM_{MP_j} = \sum_{i \in S_j} PM_i$ .

- Les variables intensives (Âge, Ancienneté, TMG) sont définies par les coordonnées du centroïde final, qui correspondent naturellement à la moyenne pondérée des caractéristiques des contrats du cluster.

Cette méthode permet de définir automatiquement des Model Points situés au cœur des masses financières du portefeuille, comme illustré dans la Figure 3.1, offrant ainsi une représentation optimale de la distribution des risques.

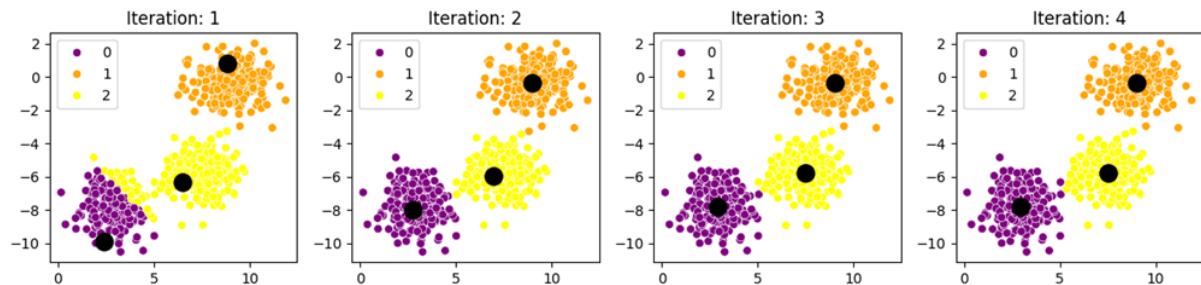


FIGURE 3.1 – Visualisation de la méthode K-Means sur un jeu de données fictif [10]

### 3.1.4 Approches basées sur la densité (DBSCAN et HDBSCAN)

Si l'algorithme des K-Means est performant pour des données réparties de manière homogène et sphérique, il montre ses limites lorsque les structures sous-jacentes du portefeuille sont complexes ou de densités variables. En effet, les données d'un portefeuille d'assurance présentent souvent des formes allongées ou irrégulières (par exemple, une génération de produits vendue massivement sur une courte période crée une concentration spécifique de forme non convexe).

Pour capter ces formes complexes sans fixer *a priori* le nombre de points comme dans les K-Means, des méthodes basées sur la densité peuvent être mises en place : DBSCAN (*Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise* ou *Regroupement spatial basé sur la densité d'applications avec bruit*) et son extension hiérarchique HDBSCAN.

#### 3.1.4.1 Principes fondamentaux de DBSCAN

L'algorithme DBSCAN définit un cluster comme une zone de forte densité séparée par des zones de faible densité. Il repose sur deux paramètres clés : un rayon de voisinage  $\varepsilon$  (*epsilon*) et un nombre minimum de points *MinPts*.

Mathématiquement, la notion de densité est formalisée par le voisinage  $\varepsilon$  d'un point  $x$ , noté  $N_\varepsilon(x)$  :  $N_\varepsilon(x) = \{y \in D \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$

Un point  $x$  est qualifié de **point cœur** (*core point*) si son voisinage contient au moins *MinPts* points :  $|N_\varepsilon(x)| \geq \text{MinPts}$ .

À partir de cette définition, les clusters sont construits par propagation de la propriété de *densité*-

accessibilité :

- Un point  $p$  est directement densité-accessible depuis  $q$  si  $q$  est un point cœur et  $p \in N_\varepsilon(q)$ .
- Un cluster est alors l'ensemble maximal de points connectés par cette relation de densité.
- Tout point n'appartenant à aucun cluster est considéré comme du **bruit** (*outlier*).



FIGURE 3.2 – Explication de l'algorithme DBSCAN (TODO : A refaire)

### 3.1.4.2 Adaptation aux contraintes assurantielles

L'application directe de DBSCAN aux données brutes d'un portefeuille d'assurance se heurte à deux obstacles majeurs nécessitant des adaptations spécifiques implémentées dans notre protocole : Le problème de la discrétisation et la gestion du bruit.

Les variables de gestion (Âge, Ancienneté) sont traditionnellement stockées sous forme d'entiers. Cette structure crée une grille artificielle où des milliers de contrats se superposent exactement sur les mêmes

coordonnées  $(x, y)$ . Cela fausse le calcul de densité locale : un point isolé sur la grille peut artificiellement paraître très dense simplement parce qu'il superpose plusieurs contrats identiques.

Pour y remédier, nous appliquons une technique de **Dithering** (bruitage uniforme). Avant l'étape de clustering, une perturbation aléatoire  $u_i$  est ajoutée aux variables temporelles de chaque contrat  $x_i$  :  $\tilde{x}_{i,d} = x_{i,d} + u_{i,d}$  avec  $u_{i,d} \sim \mathcal{U}([-0.5, 0.5])$ . Cette transformation permet de « fluidifier » l'espace et de révéler la véritable topologie de densité des contrats, sans altérer les propriétés statistiques globales du portefeuille (l'espérance de la perturbation étant nulle).

Contrairement à une analyse de données classique exploratoire où le bruit peut être écarté, dans un modèle épargne, la complétude des engagements est une contrainte absolue :  $\sum PM_{MP} = \sum PM_{contrats}$ . Les contrats classés comme « bruit » par DBSCAN (zones de faible densité ou points isolés) ne peuvent être ignorés.

Il a donc fallu implémenter une étape de post-traitement systématique : une réallocation via un algorithme des ***k*-plus proches voisins (k-NN)** avec  $k = 1$ . Chaque contrat identifié comme bruit  $x_{noise}$  est réaffecté au cluster validé  $C_j$  le plus proche :  $Class(x_{noise}) = Class(\underset{y \in \text{Clustered}}{\operatorname{argmin}} d(x_{noise}, y))$ . Cela garantit qu'aucun contrat n'est perdu tout en rattachant les profils atypiques aux segments les plus ressemblants.

### 3.1.4.3 L'évolution vers HDBSCAN

Une limite intrinsèque de DBSCAN est l'utilisation d'un seuil de densité global ( $\varepsilon$ ) unique pour tout l'espace. Or, un portefeuille d'assurance est hétérogène : il contient des zones très denses (cœur de cible commercial récent) et des zones diffuses (anciens produits en *run-off*). Un  $\varepsilon$  trop petit fragmente les zones diffuses en bruit, tandis qu'un  $\varepsilon$  trop grand fusionne des clusters distincts dans les zones denses.

Pour pallier cette rigidité, l'algorithme **HDBSCAN** (*Hierarchical DBSCAN*) a été créé. Au lieu de fixer un rayon  $\varepsilon$ , l'algorithme construit une hiérarchie de clusters pour toutes les valeurs possibles de  $\varepsilon$  (ou plutôt  $\lambda = 1/\varepsilon$ ).

La sélection des clusters optimaux ne se fait plus par une coupure horizontale de l'arbre (comme dans les méthodes hiérarchiques classiques), mais en optimisant la stabilité des clusters via la mesure *Excess of Mass* (eom). Pour chaque cluster potentiel  $C$ , on calcule une stabilité  $\mathcal{S}(C)$  basée sur la persistance des points dans le cluster à travers les différents niveaux de densité  $\lambda$  :  $\mathcal{S}(C) = \sum_{x \in C} (\lambda_{death}(x) - \lambda_{birth}(C))$ . Où  $\lambda_{death}(x)$  est la valeur de densité à laquelle le point  $x$  quitte le cluster (devient du bruit ou change de branche), et  $\lambda_{birth}(C)$  est la densité à laquelle le cluster  $C$  apparaît. L'algorithme sélectionne ensuite l'ensemble de clusters disjoints qui maximise la somme des stabilités.

Cette approche permet d'identifier simultanément des micro-clusters très denses et des macro-clusters plus étendus, offrant une segmentation beaucoup plus fine et adaptative de la population des assurés, particulièrement adaptée à la diversité des portefeuilles vie.

### 3.1.4.4 Constitution finale des Model Points

Une fois la partition optimale obtenue (via DBSCAN ou HDBSCAN) et le bruit réalloué, la construction des Model Points suit la logique de conservation des flux financiers. Pour chaque cluster  $j$ , le Model Point

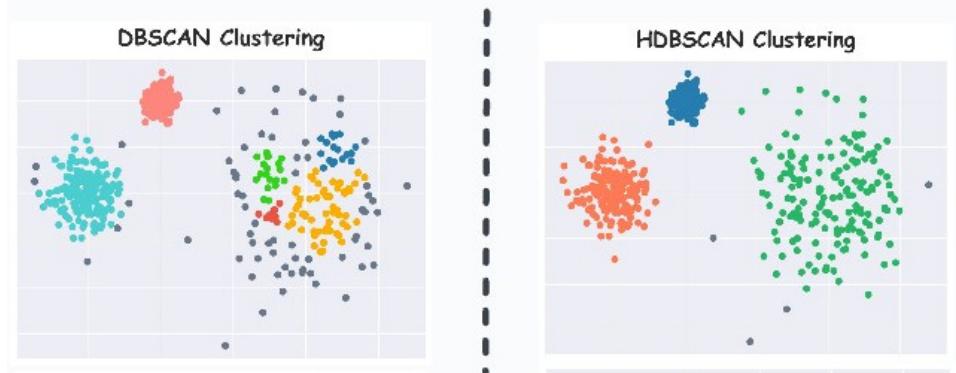


FIGURE 3.3 – Différence entre DBSCAN et HDBSCAN[11]

est défini par le barycentre pondéré des contrats :

$$\mu_j = \frac{\sum_{i \in C_j} PM_i \cdot x_i}{\sum_{i \in C_j} PM_i}$$

Cette méthode assure que le Model Point se situe au centre de gravité financier de son groupe, minimisant ainsi le biais d'agrégation sur les projections futures.

## 3.2 Définition du Protocole de Test Comparatif

- 3.2.1 Constitution des portefeuilles de test
- 3.2.2 Définition des critères de sélection : fidélité des indicateurs (BE/SCR), performance et temps de calcul

### 3.3 Analyse Comparative et Choix de la Méthode Optimale

- 3.3.1 Synthèse des performances pour chaque méthode candidate
- 3.3.2 Justification du choix de la méthode retenue pour l'analyse de sensibilité

## Chapitre 4

# Analyse de Sensibilité des Indicateurs S2 aux Caractéristiques du Passif

Le but de ce chapitre est de tester la robustesse de la méthode d'agrégation sélectionnée au chapitre 4. Pour ce faire, des chocs (réglementaires + autres) seront appliqués sur des portefeuilles de test générés via le générateur présenté au chapitre 3. L'objectif est d'analyser l'impact de ces chocs sur les indicateurs S2 (BE, SCR) en comparant les résultats obtenus sur les portefeuilles granulaires (sans agrégation) et les portefeuilles agrégés (avec la méthode d'agrégation retenue). Cette analyse permettra de vérifier que la méthode d'agrégation choisie préserve la sensibilité des indicateurs aux variations des caractéristiques du passif, assurant ainsi la fiabilité des analyses de risque et de solvabilité dans un contexte d'optimisation computationnelle.

## 4.1 Définition des Scénarios de Sensibilité

- 4.1.1 Création des portefeuilles de test via le générateur
- 4.1.2 Description des chocs sur les variables clés (âge, montant de la PM, etc.)
- 4.1.3 Scénario d'intégration d'un nouveau produit dans le portefeuille

## 4.2 Analyse de l'Impact de l'Agrégation sur la Mesure des Chocs

- 4.2.1 Comparaison des indicateurs S2 sur portefeuilles choqués granulaires et agrégés
- 4.2.2 Analyse de la fidélité de la méthode d'agrégation à retranscrire la sensibilité

## 4.3 Interprétation des Résultats et Validation de l'Approche

- 4.3.1 Validation de la performance de la chaîne de modélisation (Générateur - Agrégation - Modèle ALM)
- 4.3.2 Enseignements sur la sensibilité des portefeuilles aux modifications de caractéristiques du passif

## Chapitre 5

### Conclusion

## 5.1 Résumé des résultats

- 5.1.1 Synthèse des principaux résultats obtenus
- 5.1.2 Impact des méthodes d'agrégation sur les portefeuilles de passifs

## 5.2 Perspectives d'amélioration

- 5.2.1 Axes d'amélioration pour les générateurs de portefeuilles de passifs
- 5.2.2 Évolutions possibles des méthodes d'agrégation et de modélisation ALM
- 5.2.3 Autres domaines d'application des générateurs de portefeuilles de passifs

## 5.3 Conclusion Générale et Perspectives

Ce mémoire, présenté ici dans sa version intermédiaire, dresse le bilan d'une première phase de recherche consacrée à la construction d'un cadre méthodologique et au développement des outils de modélisation. Les résultats quantitatifs finaux ne sont pas encore établis à ce stade, la priorité ayant été donnée à l'élaboration d'un socle technique robuste. Cette conclusion a donc pour double vocation de définir avec précision la feuille de route pour la finalisation des travaux et de présenter un bilan synthétique des compétences clés acquises chez Accenture, qui ont été déterminantes pour ce projet.

### 5.3.1 Perspectives et Finalisation des Travaux de Recherche

Le modèle ALM sous Python, désormais opérationnel, constitue la pierre angulaire de l'analyse à venir. Les prochaines étapes seront dédiées à son exploitation intensive afin de répondre à la problématique du mémoire. Les axes de travail prioritaires sont les suivants :

- **Analyse Comparative et Critique des Méthodes d'Agrégation** : Une investigation approfondie de plusieurs méthodes d'agrégation de portefeuilles sera menée. Au-delà d'une simple application mécanique, il s'agira de disséquer les fondements théoriques de chaque approche, leurs hypothèses et leur incidence sur la mesure de la diversification des risques. Une attention particulière sera portée à la **robustesse** des méthodes, c'est-à-dire leur capacité à produire des indicateurs agrégés stables et convergents, y compris sous des conditions de marché dégradées ou lors de variations des hypothèses de modélisation.
- **Enrichissement du Générateur de Portefeuilles de Passifs** : La crédibilité des résultats repose sur le réalisme des simulations. Le générateur de portefeuilles sera donc affiné pour intégrer des structures de dépendance plus sophistiquées entre les variables clés (âge des assurés, montant des provisions mathématiques, comportement de rachat, etc.). Cette évolution permettra de simuler des portefeuilles plus fidèles à la réalité d'un assureur et de tester la résilience de nos conclusions dans des scénarios adverses.
- **Conduite d'une Campagne d'Analyses de Sensibilité** : Une fois les méthodologies d'agrégation validées, une série de tests de sensibilité sera déployée. En appliquant les chocs réglementaires prévus par Solvabilité 2 (choc taux, actions, mortalité, rachat), nous vérifierons la stabilité des agrégations et quantifierons leur impact sur le Solvency Capital Requirement (SCR). L'objectif final est d'offrir une vision claire de la manière dont l'agrégation modifie et stabilise le profil de risque d'un portefeuille.

La feuille de route pour la finalisation du mémoire est clairement établie et s'inscrit dans la continuité logique des travaux déjà réalisés. Les parties non encore écrites ont un plan clair et détaillé qui montre la robustesse de l'approche. La maîtrise des outils et des concepts acquise jusqu'à présent me permet d'aborder cette dernière phase avec une grande confiance. Une planification rigoureuse et une exécution méthodique assureront l'achèvement des analyses et la rédaction finale dans les délais impartis.

### 5.3.2 Bilan de l'expérience professionnelle chez Accenture : un levier pour le mémoire

Mon année en alternance chez Accenture a été une expérience fondatrice, m'offrant un cadre idéal pour développer les compétences techniques indispensables à la réalisation de ce mémoire.

#### 5.3.2.1 Développement et industrialisation d'un modèle ALM en Python

Au cœur de mes missions se trouvait le développement d'un modèle ALM (Asset-Liability Management) entièrement programmé en Python. Sous la supervision d'un Manager, j'ai pu assimiler les meilleures pratiques de l'ingénierie logicielle appliquée à l'actuariat. Cela inclut la gestion de projet via **Git**, un système de contrôle de version essentiel pour le travail collaboratif et le suivi rigoureux des modifications du code. J'ai également mis en place des batteries de tests unitaires, notamment via des interfaces avec Excel, pour garantir la fiabilité et la cohérence des résultats du modèle à chaque itération.

Ce socle technique m'a permis de mener à bien des projets complexes, comme la transformation du modèle ALM développé en un modèle de projection de passifs de retraite. Cette adaptation a exigé une refonte profonde de la logique de modélisation du passif, consolidant ainsi ma compréhension des mécanismes actuariels. J'ai par ailleurs conçu et développé un générateur de portefeuilles de passifs, un outil stratégique pour Accenture afin de réaliser des tests de performance et de résistance sur le modèle.

#### 5.3.2.2 Développement d'un modèle de passifs sociaux sous Python

Dans le cadre de mon alternance chez Accenture, j'ai eu l'opportunité de recréer un logiciel calculant des passifs sociaux en Python. Les passifs sociaux sont des engagements financiers liés aux prestations sociales, tels que les retraites ou les indemnités de départ à la retraite que les entreprises doivent provisionner. Ce projet m'a permis de mettre en pratique mes compétences en programmation tout en approfondissant ma compréhension des enjeux actuels liés à la gestion des ressources humaines et à la prévoyance sociale.

Ce logiciel a été conçu pour être modulable et facilement intégrable dans les systèmes existants des clients d'Accenture, facilitant ainsi son adoption. J'ai également veillé à ce qu'il soit accompagné d'une documentation complète, permettant aux utilisateurs de comprendre rapidement son fonctionnement et de l'utiliser efficacement pour des futures missions sur ce sujet.

#### 5.3.2.3 Maîtrise d'un écosystème technique moderne

Cette immersion professionnelle m'a permis de maîtriser un environnement de développement avancé. J'ai travaillé quotidiennement sous **Linux**, un système d'exploitation open-source prisé pour sa stabilité et sa sécurité, qui est le standard dans de nombreux environnements de calcul scientifique et de serveurs. J'ai également acquis une compétence sur **Docker**, une technologie de conteneurisation. Un conteneur est une sorte de "boîte" logicielle qui embarque une application et toutes ses dépendances, garantissant ainsi qu'elle s'exécute de manière identique et fiable, quel que soit l'ordinateur ou le serveur sur lequel elle est déployée.

#### 5.3.2.4 Expertise en gestion de données et en calcul distribué (Cloud)

La manipulation de grands volumes de données est au cœur des problématiques actuarielles modernes. J'ai pu renforcer mes compétences en utilisant des bibliothèques Python de haute performance comme **Polars** pour le traitement de données et **Xlwings** pour automatiser les interactions entre Python et Excel. Mon apprentissage le plus significatif fut la prise en main de **Snowflake**, une plateforme de données hébergée dans le cloud. Snowflake permet non seulement de stocker et de requêter d'énormes jeux de données via le langage SQL, mais aussi d'exploiter sa puissance de calcul massive pour exécuter des scripts Python, comme le modèle ALM, directement sur la plateforme, optimisant ainsi drastiquement les temps de traitement et les besoins en ressources.

#### 5.3.2.5 Collaboration, autonomie et transmission des savoirs

Au-delà des aspects purement techniques, j'ai appris à évoluer au sein d'une équipe projet agile, en participant à des réunions de suivi quotidiennes. J'ai également eu la responsabilité de former plusieurs nouveaux collaborateurs, à la fois sur le fonctionnement technique du modèle ALM et sur les bonnes pratiques de développement à adopter. Cette expérience de transmission a été extrêmement formatrice, renforçant mes capacités de communication et de vulgarisation de concepts complexes.

## Annexes

## Chapitre 3

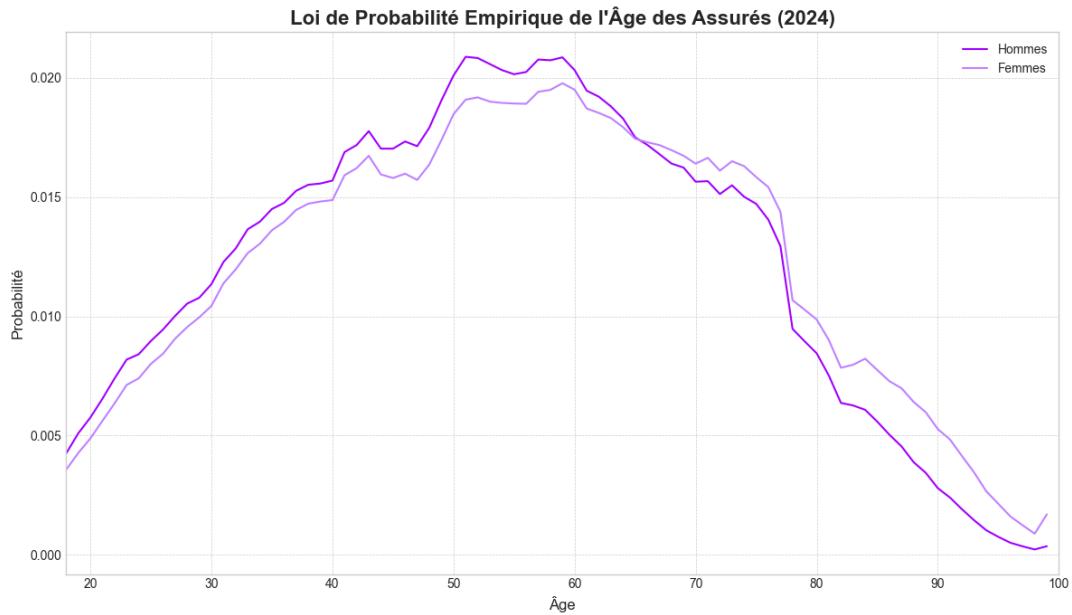


FIGURE 5.1 – Distribution empirique de l'âge des assurés (Hommes et Femmes).

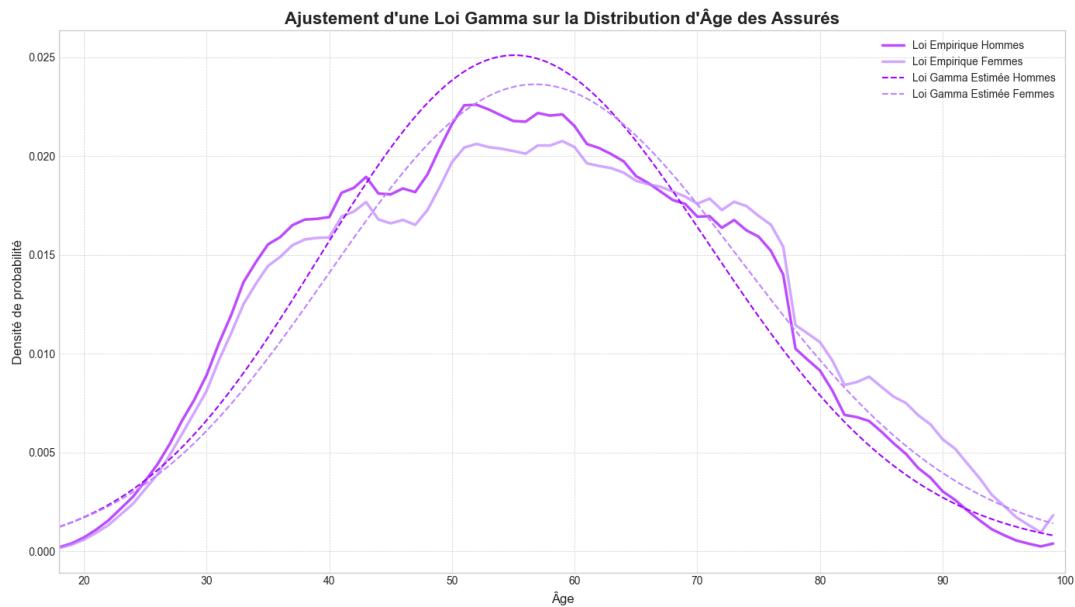


FIGURE 5.2 – Ajustement de la loi Gamma sur la distribution empirique.

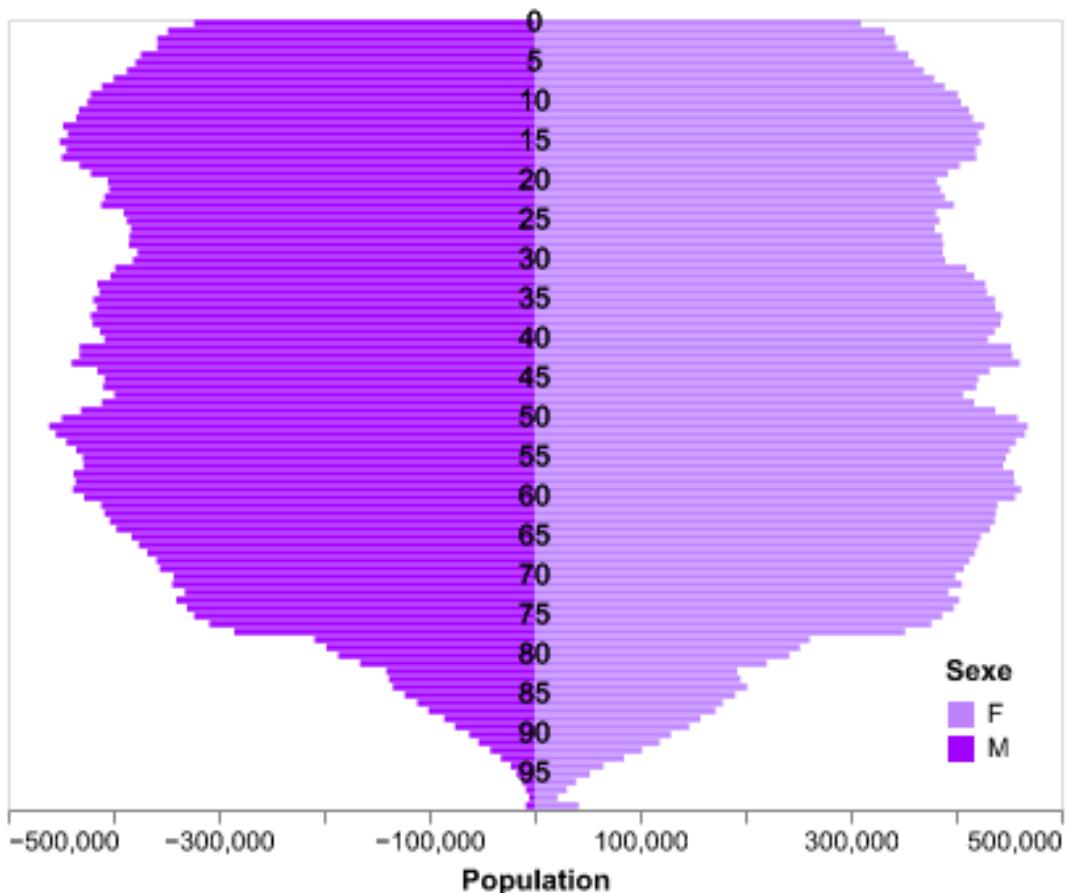


FIGURE 5.3 – Pyramide des âges de la population française en 2024 [6].

# Bibliographie

- [1] FRANCE ASSUREURS. *L'assurance vie en 2024.* (23 septembre 2025). Consulté le 28 Octobre 2025, sur <https://www.franceassureurs.fr/nos-chiffres-cles/assurance-vie/lassurance-vie-en-2024/>
- [2] DORNAIKA Fadi, HAMAD Denis, CONSTANTIN Joseph, TRONG HOANG Vinh. *Advances in Data Clustering.* Lieu d'édition : Springer, 2024.
- [3] GOFFARD Pierre-Olivier, GUERRAULT Xavier. « Is it optimal to group policyholders by age, gender, and seniority for BEL computations based on model points ? ». *European Actuarial Journal,* volume 5, 17 Avril 2015, p. 165-180.
- [4] BEN FADHEL Amine. « Accélération de l'évaluation de la solvabilité prospective d'un assureur épargne ». *Mémoire pour l'Institut des Actuaires*, 2022.
- [5] INSEE. *Taux de détention des produits de patrimoine selon l'âge de la personne de référence du ménage en 2021.* (2021). Consulté le 18 Septembre 2025, sur [https://www.insee.fr/fr/outil-interactif/5367857/details/30\\_RPC/34\\_PAT/34A\\_Figure1](https://www.insee.fr/fr/outil-interactif/5367857/details/30_RPC/34_PAT/34A_Figure1)
- [6] INSEE. *Pyramide des âges de la population française en 2024.* (2024). Consulté le 1er Septembre 2025, sur <https://www.insee.fr/fr/outil-interactif/5014911/pyramide.htm>
- [7] INSEE. *Enquête Histoire de vie et Patrimoine 2020-2021.* 2021. Consulté le 24 Janvier 2026, sur <https://www.insee.fr/fr/statistiques/7941419?sommaire=7941491#tableau-figure1>
- [8] IFOP. *Enquête sur les 60 ans de l'indépendance financière des femmes : chiffres clés sur la répartition hommes-femmes en assurance vie.* (16 Juillet 2025). Consulté le 16 Novembre 2025, sur <https://www.ifop.com/article/enquete-sur-les-60-ans-de-lindependance-financiere-des-femmes/>
- [9] IFOP. *Baromètre - les femmes et l'argent : chiffres clés sur la répartition hommes-femmes sur les fonds EURO et UC en assurance vie.* (Janvier 2024). Consulté le 16 Novembre 2025, sur <https://www.ifop.com/wp-content/uploads/2024/03/barometre-vives-2024ok-1.pdf>
- [10] geeksforgeeks. *K-Means vs K-Means++ Clustering Algorithm.* Consulté le 1 Février 2026, sur <https://www.geeksforgeeks.org/machine-learning/k-means-vs-k-means-clustering-algorithm/>
- [11] Daily Dose of Data Science. *HDBSCAN vs. DBSCAN.* Consulté le 1 Février 2026, sur <https://blog.dailydoseofds.com/p/hdbscan-vs-dbscan>