

Mémoire présenté le :

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Gaylord LEGRIS

Titre : Analyse de Sensibilités sur des Portefeuilles de Passifs en Assurance Vie selon les indicateurs Solvabilité 2 : Approche par Générations et Agrégations des portefeuilles

Confidentialité : NON (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de Signature
l'Institut des Actuaires*

Entreprise :

Nom :

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom :

Signature :

*Membres présents du jury de
l'ISFA*

Invité :

Nom :

Signature :

*Autorisation de publication et
de mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel
délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Table des matières

Résumé	iv
Abstract	v
Remerciements	vi
Synthèse	vii
Synthesis	viii
Introduction	1
1 Contexte réglementaire et modélisation en assurance vie	3
1.1 Les spécificités des produits d'assurance vie épargne	4
1.1.1 Principes fondamentaux du contrat d'assurance vie	4
1.1.2 Les principaux supports d'investissement	5
1.2 Le cadre prudentiel Solvabilité II	6
1.2.1 Le Pilier 1 : Exigences quantitatives et Bilan Prudentiel	7
1.2.2 Le Pilier 2 : Exigences qualitatives et gouvernance	10
1.3 Les Générateurs de Scénarios Économiques (GSE)	10
1.3.1 L'univers Risque Neutre (\mathbb{Q}) : un cadre pour la valorisation	11
1.3.2 L'univers Monde Réel (\mathbb{P}) : un outil de pilotage stratégique	13
1.3.3 Synthèse des deux univers	13
1.4 La représentation du passif : le concept de <i>Model Point</i>	14
1.4.1 Enjeux de l'agrégation et réduction de la dimensionnalité	15
1.4.2 Cadre réglementaire et exigences de validation	15
1.4.3 Dispositif de contrôle de la qualité de l'agrégation	16
1.4.4 Problématique du mémoire	17
1.5 Gestion Actif-Passif et Architecture du Modèle de Projection	17
1.5.1 Mécanismes de projection et interactions Actif-Passif	18
1.5.2 Algorithmes de projection du passif et valorisation du Best Estimate	19
1.5.3 Limites actuelles du modèle	21
2 Construction d'un Générateur de Portefeuilles de Passifs	22

2.1	Objectifs Stratégiques et Contraintes Techniques	23
2.1.1	Définition du générateur de portefeuilles de passifs	23
2.1.2	Besoins métiers : simulation de nouveaux produits et analyse concurrentielle	23
2.1.3	Défis de la modélisation : réalisme, volumétrie et flexibilité	25
2.2	Méthodologie de Génération et Modélisation Statistique	25
2.2.1	Approche stochastique par lois de probabilité	26
2.2.2	Synthèse et Génération du Portefeuille Final	34
2.2.3	Mise en correspondance avec le format final du modèle ALM	39
2.3	Présentation du Portefeuille de Référence Généré	39
2.3.1	Analyse descriptive du portefeuille de référence	40
2.3.2	Limitations du portefeuille généré	40
3	Présentation des Méthodes d'Agrégation Candidates	41
3.1	Approche déterministes classiques	42
3.1.1	Approche déterministe par regroupement de caractéristiques	43
3.1.2	Approche par tranches et moyenne pondérée	44
3.2	Approches statistiques par apprentissage non supervisé	46
3.2.1	Approche statistique par apprentissage non supervisé (K-Means)	47
3.2.2	Approches basées sur la densité (DBSCAN et HDBSCAN)	49
3.2.3	Approche hiérarchique adaptative (HDBSCAN)	52
3.2.4	Approche par Arbres de Décision (CART)	57
3.3	Approche par travail sur les flux financiers	57
3.3.1	Approche par Appariement de Flux (Cash-Flow Matching)	58
3.3.2	Approche par calibration de lois comportementales a posteriori (Biais Zéro)	59
3.3.3	Techniques transverses d'optimisation et pré-traitement	60
4	Protocole d'Analyse et Résultats de l'Agrégation	61
4.1	Définition du Protocole de Test Comparatif	62
4.1.1	Constitution des portefeuilles de test	63
4.1.2	Définition des critères de sélection	64
4.2	Analyse Comparative et Choix de la Méthode Optimale	64
4.2.1	Synthèse des performances sur le passif seul	65
4.2.2	Justification du choix de la méthode retenue	66
4.3	Analyse de Sensibilité des Indicateurs S2	66
4.3.1	Définition des Scénarios de Sensibilité	67
4.3.2	Analyse de l'Impact de l'Agrégation sur la Mesure des Chocs	67
4.4	Interprétation des Résultats et Validation de l'Approche	67
4.4.1	Validation de la performance de la chaîne de modélisation	68
4.4.2	Enseignements sur la sensibilité des portefeuilles aux modifications du passif	68
5	Conclusion	69
5.1	Résumé des résultats	70
5.1.1	Synthèse des principaux résultats obtenus	70
5.1.2	Impact des méthodes d'agrégation sur les portefeuilles de passifs	70

5.2 Perspectives d'amélioration	70
5.2.1 Axes d'amélioration pour les générateurs de portefeuilles de passifs	71
5.2.2 Évolutions possibles des méthodes d'agrégation et de modélisation ALM	71
5.2.3 Autres domaines d'application des générateurs de portefeuilles de passifs	71
5.3 Conclusion Générale et Perspectives	71
5.3.1 Perspectives et Finalisation des Travaux de Recherche	72
5.3.2 Bilan de l'expérience professionnelle chez Accenture : un levier pour le mémoire . .	73
Annexes	75
Bibliographie	79

Résumé

Petit résumé en français de mon mémoire ?

Abstract

It's a brief sum up in english!

Remerciements

Pour la réalisation de ce mémoire, je tiens à adresser mes remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à son élaboration. Que ce soit au travail avec Lionel Aldeberd qui m'a appris énormément, Lucas Blancheton qui a toujours été là pour m'aiguiller dans mes choix. Merci à Luc pour les relectures et à tous mes collègues stagiaires et alternants, Antoine, Cindy, Eleonore, Lucile, Malak, Manon, Nicolas, Tanguy et Titouan pour leur bonne humeur ! J'ai vraiment passé des très chouettes moments à vos côtés !

Synthèse

Un long résumé en français de mon mémoire

Synthesis

Un long résumé en anglais de mon mémoire

Introduction

Confirmant son statut de placement privilégié des français, l'assurance vie a vu son encours (provisions mathématiques + provisions pour participation aux bénéfices) atteindre 1 986 milliards d'euros à fin 2024 (France Assureurs) [1]. Son attractivité dans un contexte économique incertain est soulignée par une collecte nette de +28,5 milliards d'euros, alimentée par une forte hausse des cotisations (+14,7 %). Cette dynamique globale masque toutefois une réorientation marquée des flux : alors que les supports en euros enregistrent une collecte nette négative de 4,7 milliards d'euros, les unités de compte captent l'essentiel des nouveaux versements (+33,2 milliards d'euros). Conjuguée à un recul des prestations versées aux assurés (-3,1 %), cette situation place la gestion actif-passif (ALM) au cœur des enjeux stratégiques pour les assureurs. Ceux-ci doivent piloter leur résultats tout en maintenant l'équilibre entre sécurité et rendement pour les épargnants.

Le secteur de l'assurance vie en France est ainsi confronté à un besoin important de pilotage via la gestion actif-passif (ALM). Pour cela, les assureurs s'appuient sur l'utilisation de modèles ALM. Ces modèles simulent l'impact de différentes stratégies ce qui nécessite cependant un grand nombre de projections stochastiques, cela engendre une contrainte opérationnelle majeure : le temps de calcul. Cette contrainte limite non seulement la capacité à explorer en profondeur l'ensemble des risques et des opportunités, mais freine également l'agilité stratégique et la réactivité des prises de décision. C'est de la rencontre entre ces exigences et des contraintes opérationnelles qu'ont les assureurs qu'est née la problématique de ce mémoire : comment concilier la nécessité de rapidité des calculs avec l'impératif de fidélité des indicateurs de risque ?

Ce mémoire se propose d'investiguer cette problématique en étudiant l'impact des techniques d'agrégation du passif, notamment par la création de *model points*, qui consiste en une représentation simplifiée des contrats d'assurance. L'enjeu est de déterminer si cette modélisation simplifiée des portefeuilles de contrats peut constituer une solution fiable pour le pilotage stratégique, et d'évaluer sous quelles conditions une telle simplification est valide sans masquer des dynamiques de risque essentielles au pilotage de l'entreprise.

Pour répondre à cette problématique, ce mémoire adoptera une double approche. Premièrement, il s'agira de développer un générateur de portefeuilles de passif puis le reste de l'analyse portera sur les effets de l'agrégation sur un portefeuille représentatif du marché français. L'objectif est de comprendre comment les risques évoluent à travers l'agrégation. Pour cela, plusieurs méthodes et approches seront testées et comparées. Le critère de sélection de la méthode la plus pertinente reposera sur un double objectif : minimiser l'écart sur des indicateurs clés de la norme Solvabilité II, optimiser la rapidité des calculs

en atteignant le plus haut niveau d'agrégation possible. Une fois la méthode cible sélectionnée, une analyse approfondie de sensibilités sera réalisée sur le portefeuille avant et après agrégation. Cette étude s'appuiera également sur des indicateurs quantitatifs clés issus de la norme Solvabilité II, en évaluant notamment l'impact de chocs économiques sur le Best Estimate, le Solvency Capital Requirement (SCR) et la Present Value of Future Profits (PVFP). Ces métriques permettront de mesurer rigoureusement comment l'agrégation modifie la perception du risque et la valeur économique du portefeuille.

Ce mémoire s'articulera en cinq temps. La première partie posera le cadre conceptuel de l'étude en explorant le contexte réglementaire de Solvabilité II utilisé dans ce mémoire, les produits d'épargne en assurance vie et les fondements des Générateurs de Scénarios Économiques (GSE) en univers risque neutre. Après l'explication du socle théorique, la deuxième partie abordera les principes de la Gestion Actif-Passif (ALM), en détaillant l'architecture du modèle de projection qui servira de base aux travaux de ce mémoire. La troisième partie permettra de poser les bases de l'analyse, avec l'élaboration d'un générateur de portefeuilles de passifs réalistes destiné à produire les données synthétiques cohérentes. Le cœur méthodologique sera présenté en quatrième partie, à travers un protocole d'analyse comparant diverses méthodes d'agrégation afin de choisir celle qui sera utilisée. Enfin, la cinquième partie sera consacrée à l'interprétation des résultats d'agrégations sur des chocs économiques où, par le biais d'analyses de sensibilité approfondies, l'impact de la méthode d'agrégation retenue sur la mesure du risque sera quantifié, validant ou non la pertinence de l'approche adoptée.

Chapitre 1

Contexte réglementaire et modélisation en assurance vie

1.1 Les spécificités des produits d'assurance vie épargne

1.1.1 Principes fondamentaux du contrat d'assurance vie

L'assurance vie est une convention par laquelle un assureur, en contrepartie du versement de primes, s'engage à verser un capital ou une rente à la survenance d'un événement incertain lié à la durée de la vie humaine. Cet événement, qui constitue l'aléa au cœur du contrat, peut être le décès de l'assuré avant une date donnée ou, à l'inverse, sa survie jusqu'à cette date. Ce mécanisme repose sur un cycle de production inversé : l'assureur perçoit les primes bien avant de devoir potentiellement régler les prestations, ce qui l'amène à investir ces sommes sur des horizons de temps longs pour honorer ses engagements futurs.



FIGURE 1.1 – Cycle de production inversé en assurance vie

La nature de ces engagements répond à des objectifs variés. Les contrats en cas de vie prévoient le versement d'un capital ou d'une rente à une échéance prévue si l'assuré est en vie ; ils sont typiquement utilisés pour se constituer un complément de retraite ou une épargne de précaution. À l'opposé, les contrats en cas de décès garantissent le versement d'un capital ou d'une rente au(x) bénéficiaire(s) désigné(s) au décès de l'assuré, souvent pour protéger des proches ou anticiper des droits de succession. Il existe également des contrats mixtes qui combinent ces deux garanties.

Le fonctionnement de ces contrats repose sur la capitalisation : les primes versées sont investies pour financer la propre couverture future de l'assuré. De par leur nature, ces engagements s'étendent sur de très longues périodes. Une caractéristique fondamentale de l'assurance vie française est sa liquidité. L'assuré dispose de la possibilité de récupérer son épargne à tout moment via un rachat, qui peut être partiel ou total. Cette faculté de rachat constitue une option dont la valeur et le risque doivent être finement gérés par l'assureur, car son exercice a un impact direct sur les besoins de liquidité du portefeuille. La fiscalité joue un rôle incitatif majeur car les plus-values sont imposées plus lourdement si le rachat intervient avant la huitième année du contrat. Ceci encourage alors l'épargne de long terme.

La gestion de ces engagements de long terme amène l'assureur à proposer différentes modalités d'investissement. Celles-ci permettent de répartir le risque financier entre l'assuré et l'assureur, définissant ainsi le profil de rendement potentiel du contrat. Un contrat plus sûr aura des possibilités de rendements plus faible qu'un contrat risqué. L'épargne des assurés peut ainsi être investie sur deux principaux types de supports aux profils de risque distincts, qui peuvent être combinés au sein de différents types de contrats.

1.1.2 Les principaux supports d'investissement

L'épargne des assurés peut être investie sur deux principaux types de supports aux profils de risque distincts, qui peuvent être combinés au sein de différents types de contrats.

Le **fonds en euros** est le support historique et sécuritaire de l'assurance vie française. Le risque financier y est intégralement porté par l'assureur, qui s'appuie sur une politique d'investissement prudente, majoritairement orientée vers des actifs obligataires. La sécurité de ce support repose sur un ensemble de garanties contractuelles et réglementaires :

- **La garantie du capital** : C'est la garantie la plus fondamentale. L'assureur garantit à tout moment le capital net investi par l'épargnant. Quelle que soit l'évolution des marchés financiers, la somme initialement versée (nette de frais) ne peut pas diminuer.
- **Le taux technique** : Il s'agit d'un taux de revalorisation minimal garanti sur toute la durée du contrat. Fixé à la souscription, il est aujourd'hui très faible, voire nul, en raison des contraintes réglementaires.
- **Le Taux Minimum Garanti (TMG)** : Plus courant aujourd'hui que le taux technique, le TMG est un taux de rendement minimal que l'assureur s'engage à verser pour l'année à venir. Il est fixé annuellement et permet à l'assureur d'ajuster sa politique de rendement.
- **L'effet cliquet** : Ce mécanisme assure que les intérêts générés chaque année sont définitivement acquis. Une fois distribués, ils s'ajoutent au capital garanti et produisent à leur tour des intérêts les années suivantes. Il est impossible de revenir sur les revalorisations passées.
- **La Participation aux Bénéfices (PB)** : L'assureur a l'obligation légale de redistribuer aux assurés au minimum 85% de ses bénéfices financiers et 90% de ses bénéfices techniques. Cette participation constitue la majeure partie du rendement annuel, au-delà du TMG. Pour lisser les performances, une partie de cette PB peut être mise en réserve dans une *Provision pour Participation aux Bénéfices* (PPB) que nous appellerons *Provision pour Participations aux Excedents* (PPE) dans la suite de ce mémoire. La PPE doit être reversée aux assurés dans un délai de huit ans au maximum.

Les **unités de compte (UC)** offrent une exposition directe aux marchés financiers. Contrairement au fonds en euros, le risque d'investissement est entièrement porté par l'assuré. L'assureur ne garantit pas la valeur du capital, mais un nombre de parts d'actifs (OPCVM, actions, SCPI, etc.). La valeur de l'épargne fluctue ainsi au gré des marchés, offrant un potentiel de rendement supérieur à long terme,

mais exposant également à un risque de perte en capital. Pour l'assureur, ce support est plus simple à gérer car il n'implique pas de garanties financières particulières.

Ces supports sont proposés via deux grandes familles de contrats. Les contrats monosupports permettent d'investir sur un seul type de fonds (soit en euros, soit en UC). Les contrats multisupports sont les plus répandus, quant à eux, combinent au moins un fonds en euros et plusieurs supports en unités de compte, permettant à l'épargnant de répartir son investissement selon son profil de risque. Dans le cadre de cette étude, le portefeuille analysé se compose de contrats multisupports avec une répartition représentative du marché français, soit approximativement 60% en fonds euros et 40% en unités de compte.

	Ensemble		Euros		Unités de compte	
	En Md€	Var	En Md€	Var.	En Md€	Var
Cotisations	174,9	14,70%	108,6	19,2%	66,3	8,1%
Prestations	146,4	-3,10%	113,3	-5,5%	33,1	6,4%
Collecte nette	28,5	27,1 Md€	-4,7	24,1 Md€	33,2	3 Md€
Encours	1985,8	3,90%	1398,6	1,4%	587,1	10,3%
dont provisions mathématiques	1932,2	4,4%	1345	2%	587,1	10,3%
dont provision pour participation aux bénéfices	53,6	-11,1%	53,6	-11,1%	na.	na.

FIGURE 1.2 – Le marché de l'assurance vie en France en 2024 (graphique temporaire)

Ces contrats sont soumis à un ensemble de réglementations prudentielles visant à garantir la solvabilité des assureurs et la protection des assurés. La directive Solvabilité II encadre ces exigences à l'échelle européenne. La partie suivante détaille le cadre réglementaire de Solvabilité II, ses implications pour les assureurs vie, ainsi que les outils de modélisation stochastique utilisés pour répondre à ces exigences.

1.2 Le cadre prudentiel Solvabilité II

Entrée en vigueur le 1er janvier 2016, la directive Solvabilité II régit le cadre prudentiel pour la quasi-totalité des assureurs et réassureurs de l'Union Européenne. Son principal objectif est d'harmoniser les pratiques du secteur, d'assurer une protection optimale des assurés et de garantir que les compagnies puissent honorer leurs engagements en toutes circonstances. Pour ce faire, elle instaure une approche économique et prospective, fondée sur une évaluation fine des risques et structurée en trois piliers interdépendants. Seuls les deux premiers piliers seront présentés car ils sont plus pertinents dans le cadre de ce mémoire.

1.2.1 Le Pilier 1 : Exigences quantitatives et Bilan Prudentiel

Le Pilier 1 définit les exigences quantitatives, au cœur desquelles se trouve le Bilan Prudentiel. Il s'agit d'une vision économique du bilan comptable où les actifs et les passifs sont évalués de manière cohérente avec leur valeur de marché (*market-consistent*). La structure de cette section suivra l'équation fondamentale du bilan prudentiel :

$$\text{Actifs} = \text{Provisions Techniques} + \text{Fonds Propres} \quad (1.1)$$

Chaque terme de cette équation sera détaillé successivement.

BILAN ÉCONOMIQUE SOUS SOLVABILITÉ II		
Actifs	Fonds propres	Capital excédentaire
		SCR
		MCR
	Provisions techniques	Risk Margin Best Estimate

FIGURE 1.3 – Bilan économique sous Solvabilité II (graphique temporaire)

1.2.1.1 L'évaluation des Actifs à la Valeur de Marché

Le premier terme du bilan, Actifs, sont comptabilisés à leur Valeur de Marché (VM). Cette approche vise à refléter la valeur la plus juste et actuelle des ressources dont dispose l'assureur pour couvrir ses engagements.

1.2.1.2 Les Provisions Techniques : Cœur de l'évaluation du passif

Les Provisions Techniques (PT) représentent la valeur des engagements de l'assureur envers ses assurés. Elles se décomposent en deux parties : le *Best Estimate* (BE) et la Marge de Risque (*Risk Margin* - RM).

$$PT = \text{Best Estimate (BE)} + \text{Marge de Risque (RM)} \quad (1.2)$$

La valorisation des provisions techniques, au cœur du bilan prudentiel, ne peut se contenter d'une vision unique et figée du futur. La présence d'options et de garanties dans les contrats d'épargne impose de distinguer deux approches complémentaires :

- **L'approche déterministe** est un outil de pilotage. Elle repose sur une projection unique des variables économiques. Bien qu'insuffisante pour la valorisation prudentielle, elle demeure un outil fondamental pour l'élaboration du *business plan* et la communication d'un scénario central. Sa limite principale est son incapacité à valoriser les risques asymétriques.
- **L'approche stochastique** est un outil de valorisation. Elle explore un grand nombre de futurs possibles à l'aide d'un **Générateur de Scénarios Économiques (GSE)**. Cet outil produit des milliers de simulations cohérentes des marchés financiers. La valeur d'un indicateur est alors obtenue en calculant la moyenne des résultats sur l'ensemble de ces scénarios (méthode de Monte-Carlo). Cette exploration est indispensable pour quantifier le coût réel des garanties optionnelles (Taux Minimum Garanti, etc.).

La différence de valeur entre ces deux approches est capturée par le concept de **TVOG (Time Value of Options and Guarantees)**. En imposant une approche stochastique, Solvabilité II assure une valorisation *market-consistent* des engagements.

Le **Best Estimate (BE)**, ou *Best Estimate Liability* (BEL), représente la meilleure estimation de la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs liés aux engagements d'assurance. Son calcul est réalisé sur un horizon long (40-60 ans) en *run-off* (portefeuille en extinction, pas de nouvelles souscriptions). Il est obtenu par la moyenne des flux actualisés sur un grand nombre de simulations économiques stochastiques en univers risque neutre :

$$BEL = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{j=1}^T CF(j) \cdot e^{-\int_0^j r(s)ds} \right] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^T \frac{CF_i(j)}{(1+r_{i,j})^j} \quad (1.3)$$

Où N est le nombre de simulations, T l'horizon de projection, $CF_i(j)$ le flux de trésorerie net de l'année j pour la simulation i , et $r_{i,j}$ le taux d'actualisation sans risque pertinent.

La **Marge de Risque (RM)** complète le Best Estimate. Elle correspond à la rémunération du capital réglementaire qui doit être immobilisé pour couvrir les risques non-financiers (longévité, rachat, etc.) jusqu'à l'extinction du portefeuille. Son calcul repose sur une approche dite de "Coût du Capital" (*Cost*

of Capital - CoC), qui consiste à actualiser le coût futur de détention de ce capital :

$$RM = \text{CoC}_{\text{rate}} \times \sum_{j=0}^T \frac{\text{SCR}_{\text{non-fi}}(j)}{(1 + r_{j+1})^{j+1}} \quad (1.4)$$

Où CoC_{rate} est le coût du capital (fixé à 6%), et $\text{SCR}_{\text{non-fi}}(j)$ est la part du SCR couvrant les risques non-financiers à l'année j .

1.2.1.3 Les Fonds Propres et les Exigences de Capital

Les **Fonds Propres Prudentiels**, aussi appelés **NAV (Net Asset Value)**, constituent la richesse de l'assureur. Ils sont définis par la différence entre la valeur des actifs et celle des engagements :

$$NAV = VM_{\text{Actifs}} - (BE + RM) \quad (1.5)$$

Ce sont ces fonds propres qui doivent permettre à l'assureur d'absorber des pertes inattendues. Solvabilité II définit donc deux niveaux d'exigence de capital portant sur la NAV.

Le **Solvency Capital Requirement (SCR)** est le montant de fonds propres nécessaire pour absorber des pertes exceptionnelles. Il est calibré pour correspondre à la **Value-at-Risk (VaR)** à **99,5%** de la NAV sur un horizon d'un an. Autrement dit, il s'agit du capital qui doit permettre à l'assureur de faire face à ses engagements sur l'année à venir avec une probabilité de 99,5%. En cas de non-respect, l'assureur fait l'objet d'un suivi renforcé par le régulateur.

Le calcul du SCR peut se faire via un modèle interne (spécifique à l'assureur) ou, plus communément, via la **Formule Standard** définie par la réglementation. Cette dernière est une approche modulaire qui décompose le risque total en plusieurs modules et sous-modules (risque de marché, de souscription, de contrepartie, etc.).

Pour chaque risque élémentaire x , le capital requis est calculé comme la perte de NAV consécutive à un choc instantané et calibré sur ce risque :

$$SCR_x = \Delta NAV = NAV_{\text{central}} - NAV_{\text{choc } x} \quad (1.6)$$

Les SCR des différents modules sont ensuite agrégés en prenant compte des corrélations prédéfinies entre les risques. L'agrégation de deux modules de risque i et j se fait via la formule :

$$SCR_{i,j} = \sqrt{SCR_i^2 + SCR_j^2 + 2 \times Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j} \quad (1.7)$$

où $Corr_{i,j}$ est le coefficient de corrélation entre les risques i et j fourni par la réglementation. Cette agrégation est appliquée de manière hiérarchique pour obtenir le SCR total, appelé *Basic Solvency Capital Requirement (BSCR)* :

$$SCR_{\text{total}} = \sqrt{\sum_i \sum_j SCR_i \times SCR_j \times Corr_{i,j}} \quad (1.8)$$



FIGURE 1.4 – Schéma des modules et sous-modules du SCR en Formule Standard

1.2.2 Le Pilier 2 : Exigences qualitatives et gouvernance

Ce pilier se concentre sur la supervision, la gestion des risques et la gouvernance interne. Il impose aux assureurs de mettre en place un système de gouvernance sain, prudent et proportionné. Cela inclut une structure organisationnelle transparente, des politiques écrites claires, et un système de contrôle interne robuste. La direction doit être assurée par au moins deux dirigeants effectifs (principe des 4 yeux) qui doivent répondre à des exigences de compétence et d'honorabilité (*fit and proper*).

Ce système s'articule autour de quatre fonctions clés indépendantes : la fonction actuarielle, la gestion des risques, l'audit interne et la conformité.

L'élément central du Pilier 2 est l'**ORSA** (*Own Risk and Solvency Assessment*). Il s'agit d'un processus interne par lequel l'assureur évalue, sur un horizon de 3 à 5 ans, l'adéquation entre son profil de risque spécifique, ses limites de tolérance et ses besoins globaux en solvabilité. C'est un outil de pilotage stratégique qui permet d'aller au-delà des hypothèses standards pour refléter la stratégie propre de l'entreprise.

1.3 Les Générateurs de Scénarios Économiques (GSE)

Le Générateur de Scénarios Économiques (GSE) est un outil mathématique central dans la modélisation stochastique. Il a pour fonction de simuler de multiples trajectoires futures pour les principales variables financières (taux d'intérêt, performance des actions, inflation, etc.). La qualité des projections ALM dépendant directement de la robustesse du GSE, il est nécessaire de distinguer deux cadres de modélisation qui coexistent.

Bien que ces deux univers soient complémentaires, la réglementation Solvabilité II assigne à chacun un rôle très précis pour le calcul des différents indicateurs prudentiels. Le tableau suivant synthétise cette répartition des tâches.

TABLE 1.1 – Répartition des calculs Solvabilité II par univers de projection

Univers Risque Neutre (\mathbb{Q})	Univers Monde Réel (\mathbb{P})
Indicateurs du Pilier 1 :	Exercices du Pilier 2 :
<ul style="list-style-type: none"> — Best Estimate Liability (BEL) — Marge de Risque (RM) — Solvency Capital Requirement (SCR) — Bilan Prudentiel et NAV 	<ul style="list-style-type: none"> — ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) — Business Plan et planification stratégique — Test de la pérennité du modèle
Exercices du Pilier 2 :	
<ul style="list-style-type: none"> — ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) 	
Finalité : Valorisation Market-Consistent à un instant t.	Finalité : Pilotage stratégique et prospectif.

La distinction entre ces deux approches est donc fondamentale : l'une sert à valoriser, l'autre à piloter. Les sections suivantes détaillent les modèles mathématiques sous-jacents à chaque univers.

1.3.1 L'univers Risque Neutre (\mathbb{Q}) : un cadre pour la valorisation

L'univers **Risque Neutre (\mathbb{Q})** est un cadre de valorisation théorique, requis par Solvabilité II pour les calculs *market-consistent*. Son objectif n'est pas de prédire l'évolution réelle des marchés, mais de calculer la valeur risque neutralisée d'un actif ou d'un passif à la date de calcul, en se fondant sur les prix de marché observés. Dans cet univers, on postule que tous les investisseurs sont indifférents au risque, ce qui implique que le rendement espéré de n'importe quel actif est égal au taux d'intérêt sans risque. Cette construction, fondée sur l'absence d'opportunité d'arbitrage, est indispensable pour valoriser de manière cohérente les options et garanties complexes des contrats d'assurance. La valeur V_0 d'un flux de trésorerie futur CF_T est alors son espérance mathématique sous cette probabilité risque neutre, actualisée au taux sans risque $r(s)$:

$$V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[CF_T \cdot e^{-\int_0^T r(s) ds} \right] \quad (1.9)$$

Cet univers constitue le fondement du Pilier 1 de Solvabilité II, utilisé pour le calcul du Best Estimate Liability (BEL) et du Solvency Capital Requirement (SCR).

1.3.1.1 Modélisation des taux d'intérêt : le modèle de Hull & White

Pour les taux d'intérêt, le modèle de **Hull & White à un facteur** est une référence dans le cadre réglementaire. Son principal avantage est sa capacité à se calibrer parfaitement à la courbe des taux sans risque initiale, telle que fournie par l'EIOPA.

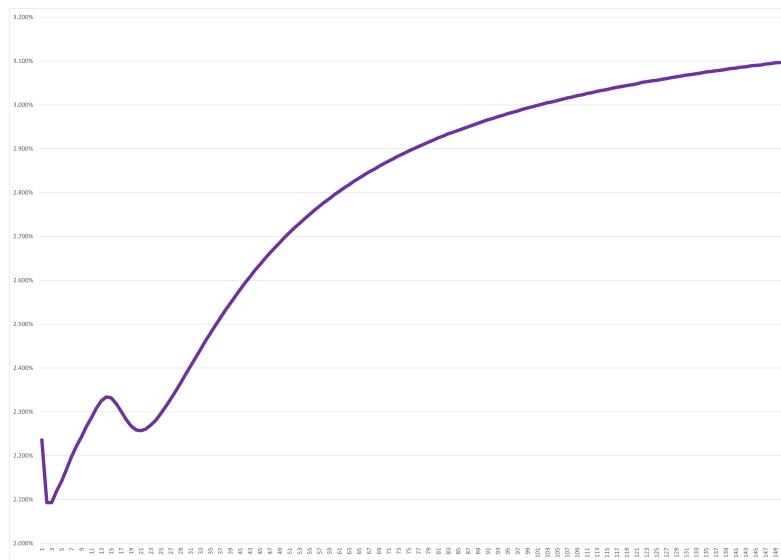


FIGURE 1.5 – Courbe des taux sans risque sans *Volatility Adjustment* au 31/12/2024 publiée par l'EIOPA

Cette flexibilité est obtenue grâce à un paramètre de retour à la moyenne $\theta(t)$ qui dépend du temps. Son équation différentielle stochastique (EDS) s'écrit :

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (1.10)$$

où r_t est le taux d'intérêt court, a la vitesse de retour à la moyenne, σ la volatilité et $W_t^{\mathbb{Q}}$ un mouvement brownien sous la mesure risque neutre. Pour des raisons de calcul, nous utilisons la solution discrète de cette EDS :

$$r_{t+h} = r_t e^{-ah} + \theta(t+h) - \theta(t)e^{-ah} + \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2ah}}{2a}} Z \quad (1.11)$$

1.3.1.2 Modélisation des actions et de l'immobilier : le modèle de Black & Scholes

Pour les actifs risqués comme les actions ou l'immobilier, le modèle de **Black & Scholes** est couramment utilisé. Conformément à la logique risque neutre, le rendement espéré (la dérive du processus) est le taux sans risque r_t . L'EDS du prix de l'actif S_t est :

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (1.12)$$

où S_t est le prix de l'actif, r_t le taux sans risque et σ la volatilité de l'actif. La solution de cette EDS est donnée par :

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \left(r_s - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma dW_s^Q \right) \quad (1.13)$$

En pratique, on utilise sa solution discrétisée pour simuler les trajectoires de prix sur un pas de temps h :

$$S_{t+h} = S_t \exp \left(\left(r_t - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \sigma \sqrt{h} Z \right) \quad (1.14)$$

où Z est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

1.3.2 L'univers Monde Réel (\mathbb{P}) : un outil de pilotage stratégique

À l'inverse de l'univers risque neutre, l'**univers Monde Réel (\mathbb{P})** vise à générer des scénarios réalistes pour refléter une évolution plausible des marchés. Son objectif est la projection et la planification stratégique, notamment pour l'exercice ORSA (Pilier 2).

La différence fondamentale réside dans l'introduction d'une **prime de risque** pour rémunérer la volatilité supportée par les investisseurs. Le rendement espéré d'un actif risqué est donc supérieur au taux sans risque, calibré sur des données historiques et des anticipations d'experts :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\text{Rendement de l'actif}] = \text{Taux sans risque} + \text{Prime de risque} \quad (1.15)$$

Les modèles utilisés, bien que similaires dans leur forme à ceux de l'univers \mathbb{Q} (par exemple, Vasicek pour les taux ou Black & Scholes pour les actions), sont modifiés pour intégrer cette prime. La dérive du processus stochastique n'est plus le taux sans risque r_t , mais un rendement espéré monde réel μ . En somme, si l'univers \mathbb{Q} valorise les engagements à un instant t , l'univers \mathbb{P} permet d'exprimer la situation financière de l'entreprise dans le futur, ce qui le rend indispensable pour le pilotage stratégique.

1.3.3 Synthèse des deux univers

Le tableau suivant résume les caractéristiques et les usages des deux univers de projection. Si l'univers risque neutre \mathbb{Q} répond à la question « *Combien vaut cet engagement aujourd'hui ?* », l'univers monde réel \mathbb{P} répond à « *Quelle sera ma situation financière demain ?* ».

TABLE 1.2 – Synthèse comparative des univers de projection

Critère	Univers Risque Neutre (\mathbb{Q})	Univers Monde Réel (\mathbb{P})
Objectif	Valorisation <i>Market-Consistent</i> (Pilier 1 : BEL, SCR). Calculer une valeur juste à $t = 0$.	Projection stratégique (Pilier 2 : ORSA, Business Plan). Simuler des futurs plausibles.
Rendement Espéré (Actifs risqués)	Taux sans risque (r_t). Aucune prime de risque.	Taux sans risque + Prime de risque ($\mu = r + \text{prime}$).
Modèle de Taux Typique	Hull & White . Flexible, calibré à la courbe des taux initiale.	Vasicek . Économique, retour à une moyenne de long terme.
Calibration	Calibré sur les prix des instruments financiers actuels (courbe des taux, volatilités implicites).	Calibré sur des données historiques et des anticipations d'experts (primes de risque).

Pour la suite de ce mémoire, je vais me concentrer sur l'univers risque neutre \mathbb{Q} , car il est le plus pertinent pour les calculs prudentiels et la gestion Actif-Passif dans le cadre des calculs liés au pilier 1 de Solvabilité II.

1.4 La représentation du passif : le concept de *Model Point*

1.4.1 Enjeux de l'agrégation et réduction de la dimensionnalité

Les portefeuilles d'assurance vie comptent souvent des centaines de milliers, voire des millions de polices. Une modélisation "police à police" est techniquement possible mais informatiquement très chronophage, voire irréalisable pour des calculs stochastiques complexes comme ceux requis par les modèles ALM, où chaque contrat doit être projeté sur des milliers de scénarios économiques.

La charge de calcul deviendrait excessive. La simplification du portefeuille de passif n'est donc pas un choix, mais une contrainte opérationnelle majeure. La réponse standard à cette contrainte est la création de ***Model Points*** (MP). Un MP est un contrat synthétique représentant un agrégat de polices partageant des caractéristiques homogènes (âge, ancienneté, type de produit, TMG). L'objectif est de réduire drastiquement le volume de données à traiter tout en préservant les propriétés actuarielles et financières essentielles du portefeuille complet.

1.4.2 Cadre réglementaire et exigences de validation

Si l'agrégation est une nécessité opérationnelle, elle constitue également un risque de modèle. Le remplacement d'un portefeuille réel par une image simplifiée introduit inévitablement un biais d'estimation. Dans le cadre prudentiel de Solvabilité II, ces simplifications sont encadrées strictement.

1.4.2.1 Le principe de matérialité et justification des approximations

La directive Solvabilité II et les textes de l'ACPR imposent que les méthodes de simplification soient « appropriées » et ne conduisent pas à une sous-estimation significative des risques. En particulier, la *Notice ACPR sur les modèles internes* (2023) [2] rappelle dans son paragraphe 21 que l'entreprise doit « identifier, documenter et justifier la pertinence des simplifications, des approximations et des hypothèses » utilisées. Bien que ce texte vise les modèles internes, il établit un standard de place : l'erreur introduite par l'agrégation doit rester immatérielle au regard du Best Estimate Liability (BEL) et du Capital de Solvabilité Requis (SCR).

Les autorités de contrôle (ACPR, EIOPA) insistent sur deux points majeurs :

- **La granularité adaptée (Segmentation)** : Comme précisé dans le paragraphe 38 de la notice, la granularité des facteurs de risque et la segmentation doivent être justifiées en analysant les avantages et les inconvénients. Une segmentation trop grossière (ex : moyenne des âges sur tout le portefeuille) écraserait la convexité des engagements et sous-estimerait la valeur des options et garanties.
- **La validation quantitative** : L'entreprise doit démontrer, chiffres à l'appui, que le passage du "réel" au "modèle" n'altère pas significativement les indicateurs clés (BEL, SCR).

1.4.3 Dispositif de contrôle de la qualité de l'agrégation

Pour répondre à ces exigences, la construction des *Model Points* doit s'accompagner d'un dispositif de validation robuste, intégré à la gouvernance des risques et à l'exercice ORSA. Ce dispositif repose généralement sur trois niveaux de contrôle.

1.4.3.1 Tests de reproduction des métriques statiques (Reproduction)

Il s'agit de vérifier, à la date d'arrêté, que le portefeuille agrégé (MP) reproduit fidèlement les stocks du portefeuille réel. Les écarts relatifs sont mesurés sur des indicateurs clés tels que :

- La Provision Mathématique (PM) totale et par segment ;
- Les encours moyens, l'âge moyen pondéré des assurés, l'ancienneté moyenne ;
- La répartition par Taux Minimum Garanti (TMG).

Des seuils de tolérance stricts (par exemple < 0.1% d'écart sur la PM) sont définis par l'assureur pour valider cette étape.

1.4.3.2 Contrôles du profil de risque et des queues de distribution

L'agrégation ne doit pas "lisser" les risques extrêmes. Un point d'attention particulier, souligné par les contrôles prudentiels (paragraphe 39 de la notice ACPR), est la bonne représentation des "queues de distribution". Par exemple, un portefeuille contenant quelques très gros contrats ou des contrats très anciens avec des TMG très élevés (4.5%) ne doit pas voir ces risques dilués dans une moyenne à 0% comme c'est le cas pour les contrats récents. Ces profils atypiques nécessitent souvent la création de *Model Points* dédiés pour isoler le risque.

1.4.3.3 Tests de sensibilité et stabilité dynamique

La validation la plus critique concerne le comportement du portefeuille agrégé sous contrainte (chocs). Un regroupement peut sembler correct en vision statique ($t=0$) mais diverger lors des projections. Des tests de sensibilité sont réalisés en comparant les résultats du modèle "Police à Police" (sur un scénario déterministe) et du modèle agrégé :

- **Sensibilité aux taux** : Comportement du BEL suite des chocs de taux d'intérêt (hausse, baisse) ;
- **Sensibilité aux rachats** : Impact des chocs sur les taux de rachat (hausse ou baisse) ;
- **Sensibilité à la mortalité** : Impact des chocs sur les tables de mortalité.

L'objectif est de s'assurer que l'agrégation conserve la convexité du passif et la sensibilité aux variables économiques, garantissant ainsi un calcul correct du SCR.

1.4.4 Problématique du mémoire

C'est dans ce cadre réglementaire et technique que s'inscrit ce mémoire. La méthode d'agrégation choisie a un impact direct sur la qualité des indicateurs S2 produits. En partant du portefeuille granulaire, nous chercherons à définir et comparer différentes méthodes de regroupement (notamment par *Clustering*) pour construire des *Model Points*. L'objectif est d'identifier la méthodologie qui offre le meilleur compromis entre temps de calcul (réduction dimensionnelle) et fidélité prudentielle (stabilité du SCR et des sensibilités), conformément aux attentes du régulateur.

1.5 Gestion Actif-Passif et Architecture du Modèle de Projection

La Gestion Actif-Passif (ALM) est la réponse opérationnelle à l'inadéquation structurelle inhérente au cycle de production inversé de l'assurance vie. Cette discipline vise à piloter les risques nés de l'interdépendance entre :

- **Le Passif** : Des engagements longs, sensibles aux taux (TMG) et aux comportements (rachats).
- **L'Actif** : Des placements volatils dont la performance finance la revalorisation des assurés.

Pour quantifier ces risques et répondre aux exigences de Solvabilité II, il est nécessaire de projeter sur un long horizon de projection le bilan de l'assureur sur un grand nombre de scénarios économiques. Cette section détaille les mécanismes de cette projection et l'architecture du modèle développé en Python pour ce mémoire.

1.5.1 Mécanismes de projection et interactions Actif-Passif

La projection repose sur la modélisation des flux financiers et des règles de gestion qui lient l'actif et le passif.

L'approche Stochastique vs Déterministe

Si une approche déterministe (un seul scénario central) suffit pour construire un *Business Plan*, elle est incapable de capturer le coût des options et garanties financières (TMG, option de rachat). L'approche stochastique est donc indispensable. Elle consiste à simuler des milliers de trajectoires économiques (via le GSE présenté en section 1.3) et à calculer la moyenne des résultats (méthode de Monte-Carlo). C'est cette distribution des résultats qui permet d'estimer la *Value-at-Risk* et donc le SCR.

Le mécanisme de la Participation aux Bénéfices (PB)

L'interaction centrale du modèle est la distribution de la performance financière. Le Code des assurances impose une redistribution minimale, mais le modèle doit simuler la stratégie discrétionnaire de l'assureur. La règle de partage modélisée suit l'algorithme suivant :

1. Calcul du résultat financier (produits financiers nets de charges).
2. Détermination de l'assiette de PB réglementaire.
3. Application de la politique commerciale (Taux cible concurrentiel).
4. Dotation ou reprise à la Provision pour Participation aux Excédents (PPE) pour lisser les rendements dans le temps.

1.5.2 Algorithmes de projection du passif et valorisation du Best Estimate

Contrairement aux modèles traditionnels procédant par itération sur chaque contrat ("boucle ligne à ligne"), ce modèle exploite la vectorisation pour projeter simultanément l'ensemble des *Model Points* sur tous les scénarios.

Cette approche permet de traiter des volumes de données massifs en définissant l'espace de projection comme le produit cartésien :

$$\Omega = \{MP\} \times \{Annees\} \times \{Scenarios\} \times \{ChocsS2\}$$

Les paragraphes suivants détaillent la mécanique actuarielle de projection sur un pas de temps annuel $[t, t + 1]$.

Algorithme de projection des flux de passif

La projection des engagements s'effectue selon une logique de flux en fin de période, adaptée pour simuler la survenance continue des événements. Pour chaque année projetée t , l'évolution de la Provision Mathématique (PM) suit la séquence d'opérations suivante :

1. **Vieillissement et mise à jour des statuts** : L'âge des assurés x devient $x+1$ et l'ancienneté des contrats est incrémentée. Les contrats arrivant à terme sont sortis du stock et le capital constitutif est versé.
2. **Calcul des taux de sortie (Décréments)** : Le modèle applique les tables biométriques et comportementales pour déterminer les probabilités de sortie :
 - **Mortalité** (q_{x+t}) : Application des tables réglementaires ou d'expérience (par génération ou par âge atteint).
 - **Rachats** (α_t) : Application du taux de rachat total lié à l'ancienneté du contrat. (Les rachats conjoncturels ne sont pas modélisés dans la version actuelle du modèle, mais pourraient être intégrés dans une version future pour simuler des comportements plus réalistes en fonction des conditions de marché).
3. **Valorisation intermédiaire et calcul des prestations** : Afin de simuler une distribution uniforme des décès et des rachats au cours de l'année, le modèle calcule une PM revalorisée à mi-période ($t + 0.5$) sur laquelle sont appliqués les taux de sortie.

$$PM_{t+0.5} = PM_t \times (1 + TMG)^{0.5}$$

Les flux de prestations ($P_{MP,t}$) versées sur un Model Point l'année t sont alors déduits :

$$P_{MP,t} = \underbrace{PM_{MP,t+0.5} \times q_{MP,x+t}}_{\text{Prestations Décès}} + \underbrace{PM_{MP,t+0.5} \times (1 - q_{MP,x+t}) \times \alpha_{MP,t}}_{\text{Prestations Rachat}} \quad (1.16)$$

Cette approche assure la cohérence entre la valeur de l'épargne acquise au moment du départ et

les montants effectivement versés.

4. **Prélèvement des frais et capitalisation du stock restant :** Les chargements ($Ch_{MP,t}$) et frais de gestion ($Fg_{MP,t}$) sont prélevés sur l'encours. Le stock restant continue de capitaliser au TMG sur la seconde moitié de l'année. La PM d'un Model Point avant participation aux bénéfices s'écrit alors :

$$PM_{MP,t+1}^{\text{avant PB}} = PM_{MP,t} \times (1 + TMG_{MP}) - P_{MP,t} \times (1 + TMG_{MP})^{0.5} - (Ch_{MP,t} + Fg_{MP,t}) \quad (1.17)$$

5. **Revalorisation finale (Participation aux Bénéfices) :** En fin d'année, le module ALM détermine le taux de revalorisation final (Tx_{servi}). Si la performance de l'actif le permet et que la stratégie l'exige, une Participation aux Bénéfices additionnelle ($PB_{MP,t}$) est injectée sur le Model Point :

$$PB_{MP,t} = PM_{MP,moy} \times \max(0, Tx_{servi} - TMG_{MP})$$

La Provision Mathématique finale du Model Point pour l'année $t + 1$ est donc :

$$PM_{MP,t+1} = PM_{MP,t+1}^{\text{avant PB}} + PB_{MP,t} \quad (1.18)$$

Méthodologie de calcul du Best Estimate (BE)

Conformément aux exigences de Solvabilité II, le *Best Estimate* correspond à la moyenne des valeurs actuelles des flux de trésorerie futurs, pondérée par leur probabilité de réalisation.

Définition des Flux Nets de Trésorerie (CF_t) Pour chaque pas de temps t et chaque scénario, le modèle agrège les flux entrants et sortants du point de vue de l'assureur :

$$CF_t = \text{Prestations}_t + \text{Frais de Gestion}_t - \text{Primes}_t \quad (1.19)$$

À noter que les chargements prélevés sur l'épargne ne constituent pas des flux de trésorerie (ils restent au sein de l'entreprise), mais viennent diminuer la dette envers les assurés.

Actualisation et Agrégation L'actualisation repose sur l'utilisation de **déflateurs stochastiques** $D(0, t)$, fournis par le GSE en cohérence avec la courbe des taux sans risque. Le déflateur intègre intrinsèquement le facteur d'actualisation et la mesure de probabilité risque-neutre \mathbb{Q} .

Le Best Estimate est obtenu par la moyenne arithmétique (méthode de Monte-Carlo) sur l'ensemble des N scénarios simulés :

$$BE = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \left(\sum_{t=1}^T CF_{s,t} \times D_s(0, t) \right) \quad (1.20)$$

Cette approche par déflateurs permet de valoriser de manière cohérente les options et garanties financières (l'effet "cliquet" des Taux Minimums Garantis) qui ne seraient pas capturées par une simple actualisation déterministe.

1.5.3 Limites actuelles du modèle

À date, bien que le modèle projette finement les provisions techniques et les actifs, la dynamique des Fonds Propres n'est pas entièrement modélisée. Cette limitation empêche le calcul direct d'un ratio de solvabilité projeté, mais n'impacte pas la qualité des sensibilités sur le Best Estimate et le SCR, qui constituent le cœur de ce mémoire.

Chapitre 2

Construction d'un Générateur de Portefeuilles de Passifs

2.1 Objectifs Stratégiques et Contraintes Techniques

La capacité à tester la robustesse des modèles et la pertinence des analyses de sensibilité repose sur un prérequis fondamental : la disponibilité de données de passif réalistes. Pour un cabinet de conseil, où l'accès aux portefeuilles des clients n'est pas systématique, la faculté de générer des portefeuilles synthétiques, mais représentatifs du marché, constitue un atout stratégique majeur. C'est dans ce contexte qu'un générateur de portefeuilles de passifs a été conçu et développé dans le cadre de ce mémoire.

Ce chapitre a pour vocation de présenter cet outil et la manière dont il a été construits. Il sera également détaillé les besoins stratégiques et analytiques auxquels ce générateur répond, la méthodologie de génération retenue, les contraintes techniques rencontrées et les données qui ont été utilisées pour rendre le portefeuille le plus réaliste possible.

2.1.1 Définition du générateur de portefeuilles de passifs

Le générateur de portefeuille de passifs développé dans le cadre de ce mémoire est un outil conçu pour créer, de manière algorithmique, des ensembles de données synthétiques qui imitent avec réalisme des portefeuilles de contrats d'assurance-vie. Plutôt que de s'appuyer sur des données réelles, souvent confidentielles ou indisponibles, cet outil simule les caractéristiques fondamentales des assurés (âge, sexe, etc.) et de leurs contrats (type de produit, montant de la provision mathématique, date de souscription, etc.).

L'objectif n'est pas de produire des données aléatoires, mais de générer un portefeuille dont les propriétés statistiques, distributions, corrélations, tendances, sont indiscernables de celles d'un portefeuille réel. Pour cela, toutes les lois et hypothèses ont été calibrées sur des données publiques de marché. Avoir des données fiables est très important pour produire des résultats de qualité dans le cadre d'analyses ou de décisions stratégiques, c'est pourquoi le développement d'un tel outil s'est imposé comme une nécessité.

2.1.2 Besoins métiers : simulation de nouveaux produits et analyse concurrentielle

Pour un acteur du secteur de l'assurance, qu'il s'agisse d'un assureur ou d'un cabinet de conseil, la capacité à modéliser et à anticiper les dynamiques de marché est un avantage concurrentiel décisif. Le générateur de portefeuilles de passifs répond directement à ce besoin en fournissant un support quantitatif pour la prise de décision stratégique. Il permet par exemple à un cabinet de conseil de tester ses modèles sans dépendre des données clients, et à un assureur d'explorer des scénarios prospectifs ou d'évaluer l'impact de nouvelles offres. Son utilité se manifeste dans trois domaines clés pour les assureurs : le lancement de nouveaux produits, l'orientation du *business mix* et l'analyse concurrentielle.

Premièrement, le lancement d'un nouveau produit d'assurance-vie représente un investissement et un risque significatifs. Avant toute commercialisation, il est impératif d'en évaluer rigoureusement les impacts sur le profil de risque et la rentabilité de l'entreprise. Le générateur offre un véritable laboratoire virtuel pour effectuer ces tests. En simulant l'intégration de milliers de polices conformes aux caractéristiques du nouveau produit (garanties, frais, options), il permet de projeter leur comportement dans le temps.

Il devient alors possible d'analyser leur effet sur les indicateurs prudentiels de Solvabilité II, tels que le *Best Estimate* (BE) et le *Solvency Capital Requirement* (SCR), mais aussi d'évaluer leur sensibilité à divers chocs de marché (hausse des taux, krach boursier) ou de comportement (vagues de rachats). Cet outil permet ainsi de tester, d'ajuster et d'optimiser les caractéristiques d'un produit pour atteindre le couple rendement/risque désiré avant même sa mise sur le marché.

Deuxièmement, le générateur est un outil précieux pour piloter la stratégie à long terme de l'entreprise. La direction peut être amenée à vouloir faire évoluer son *business mix*, c'est-à-dire la répartition de son portefeuille entre différents types de produits (fonds en euros, unités de compte, prévoyance...). Par exemple, dans un contexte de taux bas persistants, un assureur pourrait vouloir accélérer sa transition vers les produits en unités de compte. Le générateur permet de quantifier les implications d'une telle stratégie. En simulant des portefeuilles futurs correspondant à ces nouvelles orientations commerciales, la direction peut visualiser les conséquences sur le bilan, la rentabilité prévisionnelle, mais aussi sur la consommation de capital et l'exposition aux risques. Ces simulations éclairent les décisions stratégiques et s'intègrent naturellement dans des exercices prospectifs comme l'ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*).

Enfin, la capacité à se positionner par rapport à ses concurrents est fondamentale. Faute d'accès aux portefeuilles détaillés des autres acteurs, un assureur doit s'appuyer sur des reconstitutions. En se basant sur des données publiques (rapports annuels ou publications réglementaires comme le Rapport sur la Solvabilité et la Situation Financière) ou des statistiques sectorielles, le générateur peut permettre la création d'un portefeuille représentatif du marché, ou simuler le portefeuille probable d'un concurrent spécifique. Ces portefeuilles synthétiques deviennent alors une base solide pour des analyses comparatives (*benchmarking*). Ils permettent non seulement d'évaluer la performance relative, mais aussi de comparer les profils de risque, d'anticiper les stratégies concurrentes et d'identifier les meilleures pratiques du marché. Il convient toutefois de souligner les limites d'une telle démarche. Une analyse ALM complète et réaliste d'un concurrent ne peut se contenter de la seule modélisation du passif. Elle exigerait également de simuler son portefeuille d'actifs et de disposer d'informations précises sur ses ressources financières et ses fonds propres. Or, ces données, qui relèvent du secret des affaires, sont rarement publiques. Par conséquent, l'analyse comparative reste nécessairement partielle, se concentrant sur les caractéristiques intrinsèques du portefeuille de passifs reconstitué.

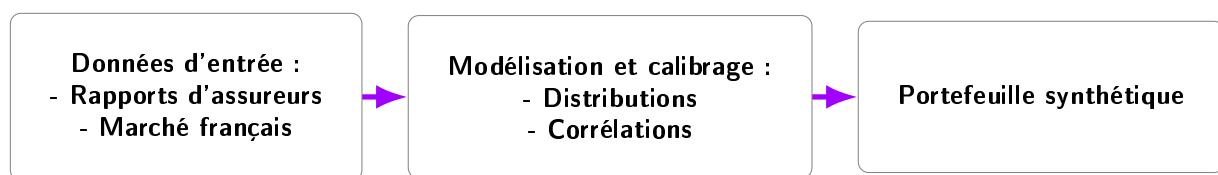


FIGURE 2.1 – Schéma de la méthodologie de génération d'un portefeuille de passifs synthétique.

2.1.3 Défis de la modélisation : réalisme, volumétrie et flexibilité

La conception et la mise en œuvre d'un générateur de portefeuilles de passifs efficace soulèvent trois défis majeurs et interdépendants :

- **Le réalisme des données générées** : Il s'agit du défi le plus complexe. L'objectif n'est pas de produire des données aléatoires, mais de créer un portefeuille synthétique dont les propriétés statistiques sont indiscernables de celles d'un portefeuille réel. Cela implique non seulement de reproduire fidèlement les distributions de chaque caractéristique individuelle (âge, montant, etc.), mais aussi, et surtout, de capturer les corrélations complexes qui les lient. Par exemple, l'âge d'un assuré est souvent corrélé au type de produit souscrit et au montant de sa provision mathématique. Ignorer ces dépendances conduirait à un portefeuille incohérent, dont le comportement sous différents scénarios de risque serait erroné, invalidant ainsi les analyses prudentielles ou stratégiques qui en découlent.
- **La gestion de la volumétrie** : Les portefeuilles d'assurance-vie des grands acteurs du marché se comptent en centaines de milliers, voire en millions de contrats. Le générateur doit être capable de produire des ensembles de données de cette ampleur de manière performante, c'est-à-dire dans un temps de calcul raisonnable et sans consommer une quantité excessive de ressources mémoire. Cette contrainte de performance est d'autant plus forte que la gestion des corrélations, nécessaire au réalisme du portefeuille, ajoute une complexité de calcul significative. Il faut donc trouver un équilibre entre la complexité statistique et la performance, ce qui a des implications directes sur les choix technologiques et algorithmiques.
- **La flexibilité de l'outil** : Un générateur ne serait que d'une utilité limitée s'il ne produisait qu'un seul type de portefeuille statique. Pour répondre aux besoins métiers variés, l'outil doit être hautement paramétrable. L'utilisateur doit pouvoir ajuster finement les caractéristiques du portefeuille à générer : définir les spécificités d'un nouveau produit, modifier les distributions statistiques pour simuler un segment de marché différent, ou encore changer les lois de comportement (rachat, mortalité) pour tester de nouvelles hypothèses. Cette section concernant la flexibilité ne sera pas développée dans le cadre de ce mémoire car l'objectif est d'utiliser un portefeuille calibré sur le marché français.

La section suivante présente en détail la méthodologie de modélisation probabiliste qui a été développée pour construire un portefeuille à la fois réaliste et volumineux.

2.2 Méthodologie de Génération et Modélisation Statistique

La méthodologie de génération du portefeuille de passifs synthétique repose sur une approche probabiliste. L'objectif est de construire un ensemble de contrats d'assurance dont les propriétés statistiques sont entièrement maîtrisées. Pour ce faire, chaque caractéristique d'un contrat (âge de l'assuré, montant de la provision, etc.) est modélisée comme une variable aléatoire, tirée d'une loi de probabilité préalablement calibrée sur des données de marché quand elles sont disponibles. Sinon, des hypothèses ont été formulées pour recréer ces variables de la manière la plus réaliste possible.

2.2.1 Approche stochastique par lois de probabilité

La génération du portefeuille synthétique s'appuie sur une modélisation stochastique où chaque attribut d'un contrat est représenté par une variable aléatoire. Dans un premier temps, l'objectif est de générer un portefeuille complet, représentatif du marché. Pour ce faire, une loi de probabilité marginale est définie pour chaque caractéristique, avec des paramètres rigoureusement calibrés sur des données de marché. Certaines variables sont ensuite liées entre elles pour refléter les dépendances observées dans les portefeuilles réels. Ce même cadre peut ensuite être adapté pour simuler un produit spécifique ; il suffirait alors de générer des variables aléatoires de manière conditionnelle aux caractéristiques de ce produit. Cette méthode garantit à la fois le réalisme statistique du portefeuille et la flexibilité nécessaire aux analyses prospectives.

Les sections suivantes détailleront la méthodologie de calibration pour les variables fondamentales qui structurent le portefeuille :

- L'âge de l'assuré ;
- L'âge à la souscription, qui détermine l'ancienneté du contrat ;
- Le montant de la Provision Mathématique (PM).

D'autres variables, telles que le sexe ou la répartition des supports, seront également modélisées pour compléter le profil de chaque contrat.

2.2.1.1 Modélisation de l'âge des assurés

La première étape a consisté à construire une distribution de probabilité réaliste à partir de deux sources de données :

1. **La pyramide des âges de la population française** pour l'année 2024 [7], fournissant la structure démographique de base entre 0 et 100 ans.
2. **Une étude statistique de l'INSEE** sur la détention d'assurance-vie par tranche d'âge en France [6]

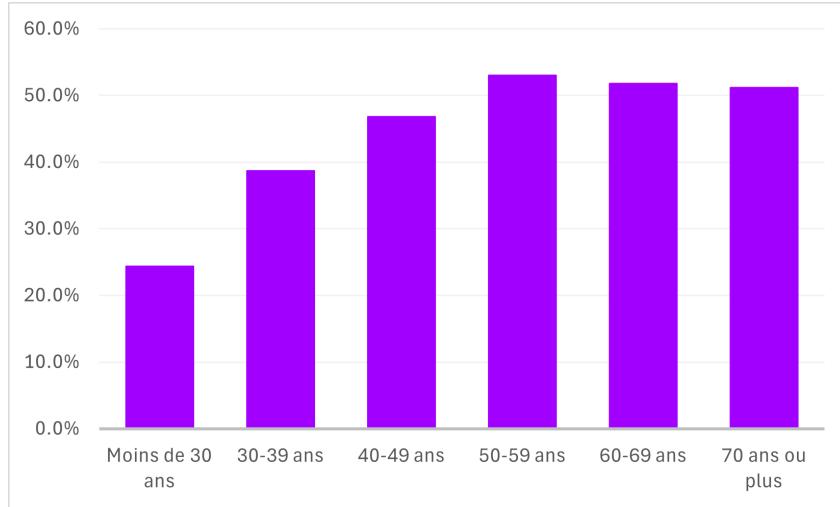


FIGURE 2.2 – Proportion de détention d'assurance-vie par tranche d'âge en France [6].

Afin de transformer les données discrètes de l'INSEE, présentées par tranches d'âge, en une distribution continue du taux de détention par âge, une méthodologie d'interpolation a été mise en œuvre. Cette étape est cruciale pour pouvoir ensuite simuler l'âge des assurés de manière réaliste.

L'approche a consisté à définir d'abord des points de données représentatifs pour chaque tranche d'âge fournie. Les choix suivants ont été faits :

- Pour la tranche des moins de 30 ans, plusieurs points ont été positionnés entre 18 et 30 ans afin de modéliser la croissance progressive de la détention en début de vie active.
- Pour les tranches intermédiaires (par exemple, 30-39 ans), le point central de l'intervalle a été retenu.
- Pour la tranche des "70 ans et plus", un âge représentatif de 80 ans a été choisi car à partir de cet âge, la souscription/résiliation du contrat d'assurance est rare.

Une fois ces points définis, une interpolation PCHIP (*Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial*) : interpolation par morceaux conservant la monotonie et utilisant des polynômes de degré trois) a été appliquée sur la partie de la courbe de 0 à 80 ans. Cette méthode a été privilégiée car elle évite les oscillations artificielles qu'une interpolation cubique aurait générée et garantit que la proportion de détention reste croissante comme ce que suggèrent les données. Pour les âges plus avancés, une interpolation linéaire a été utilisée pour assurer une transition douce, suivie d'un plateau constant après 80 ans. Cette dernière hypothèse modélise une stabilisation du comportement de détention chez les assurés les plus âgés avec une absence de rachats.

Le résultat de ce processus est une fonction continue et lisse qui estime le taux de détention d'assurance-vie pour chaque âge entre 18 et 100 ans, comme illustré par la figure 2.3.

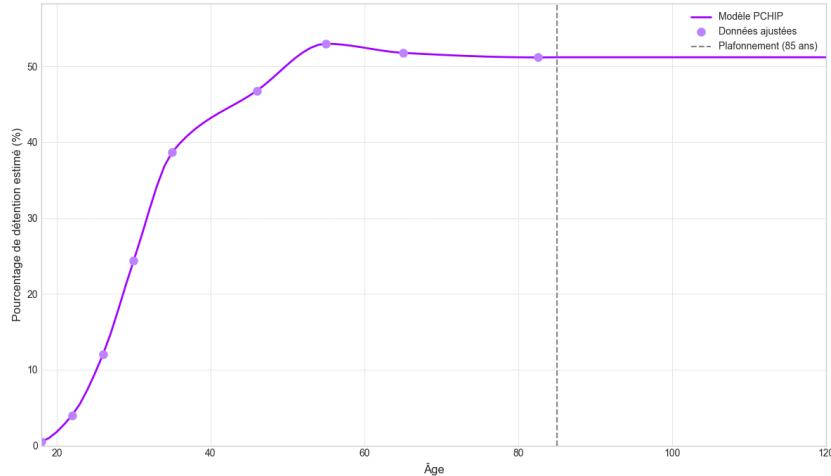


FIGURE 2.3 – Proportion de détention d’assurance-vie par âge en France par diverses méthodes d’interpolation. TODO : modifier légende et titre pour plus de lisibilité + refaire la modélisation avec 80 ans et non 82.5 ans

En multipliant la population de chaque âge par le taux de détention estimé, il a été possible d’obtenir une estimation du nombre d’assurés pour chaque âge et chaque sexe. Après standardisation, on peut alors construire une loi de probabilité empirique. :

$$P(Age = x) = \frac{N_{assures}(x)}{Total_{assures}}$$

Calibration d’une loi usuelle sur la loi empirique Deux lois de probabilité continues ont été sélectionnées comme candidates pour modéliser la distribution empirique : la **loi Gamma** et la **loi Beta**. Les paramètres de ces deux lois ont été estimés par la méthode du maximum de vraisemblance sur un échantillon de 200 000 individus tirés de la loi empirique. Pour déterminer la loi la plus adéquate, des critères visuels et statistiques (Test de Kolmogorov-Smirnov¹, AIC², BIC^{3 4}) ont été utilisés. La figure 2.4 montre l’ajustement de la loi Beta qui a des meilleurs résultats statistiques et qui épouse mieux la distribution empirique que la loi Gamma (figure 5.2).

1. Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d’adéquation non paramétrique comparant la fonction de répartition empirique d’un échantillon à celle d’une loi théorique. La statistique D représente l’écart maximal absolu entre ces deux fonctions : une valeur faible indique un bon ajustement.

2. Le critère d’information d’Akaike (AIC) est une mesure de la qualité d’un modèle statistique qui arbitre entre la qualité de l’ajustement et la complexité du modèle. Il pénalise l’ajout de paramètres pour éviter le surapprentissage. Un AIC plus faible indique un meilleur modèle.

3. Le critère d’information bayésien (BIC) est similaire à l’AIC mais impose une pénalité plus forte pour le nombre de paramètres, dépendant de la taille de l’échantillon. Il tend à favoriser des modèles plus parcimonieux. Comme pour l’AIC, une valeur plus faible est préférable.

4. L’AIC et le BIC servent à comparer deux ajustements, pour savoir quel modèle est le mieux ajusté on va donc regarder le plus faible AIC/BIC

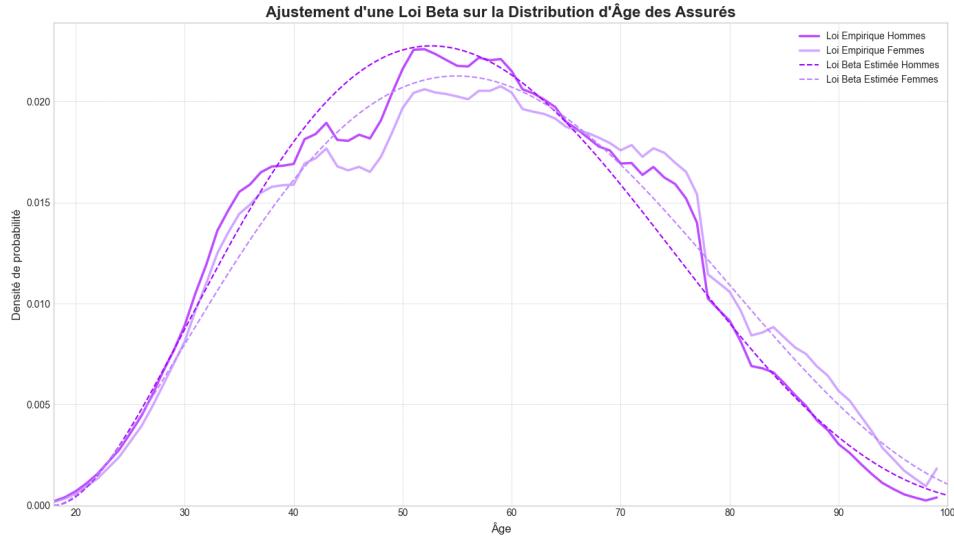


FIGURE 2.4 – Ajustement de la loi Beta sur la distribution empirique. TODO : Séparer une version homme et une femme et mettre en annexe

Le tableau 2.1 confirme cette observation. La loi Beta présente une statistique K-S inférieure (traduisant une distance maximale plus faible entre la distribution théorique et empirique) ainsi que des scores AIC et BIC plus bas, indiquant un meilleur ajustement global. C'est donc cette loi qui a été retenue pour modéliser l'âge des assurés dans le portefeuille synthétique.

Métrique	Loi Gamma	Loi Beta	Meilleur Modèle
Statistique K-S (D)	0.0396	0.0271	Beta
AIC (Akaike)	1 674 497	1 668 357	Beta
BIC (Bayésien)	1 674 527	1 668 378	Beta

TABLE 2.1 – Tableau comparatif des métriques d'ajustement (population masculine). TODO : mettre aussi les résultats pour la population féminine, mettre également des valeurs en gras

2.2.1.2 Modélisation de l'âge à la souscription

Une fois l'âge des assurés modélisé, il est indispensable de déterminer l'âge à la souscription. Cette variable est fondamentale, car elle permet de calculer l'ancienneté du contrat, un paramètre clé qui influence directement les lois de comportement, notamment les taux de rachat, dans les modèles de projection.

La distribution de l'âge à la souscription n'a pas été calibrée sur des données directes, mais a été dérivée de la courbe de taux de détention par âge, établie dans la section précédente. L'hypothèse sous-jacente est que la densité de probabilité de souscrire à un âge donné est proportionnelle à la vitesse à laquelle le taux de détention augmente à cet âge. Autrement dit, la distribution de l'âge à la souscription peut être approximée par la dérivée discrète de la fonction du taux de détention. Par exemple, une forte pente de la courbe de détention entre 25 et 35 ans signale une intense activité de souscription dans cette tranche

d'âge. En calculant la différence finie entre les points de la courbe interpolée, il est donc possible de construire une distribution empirique de l'âge à la souscription.

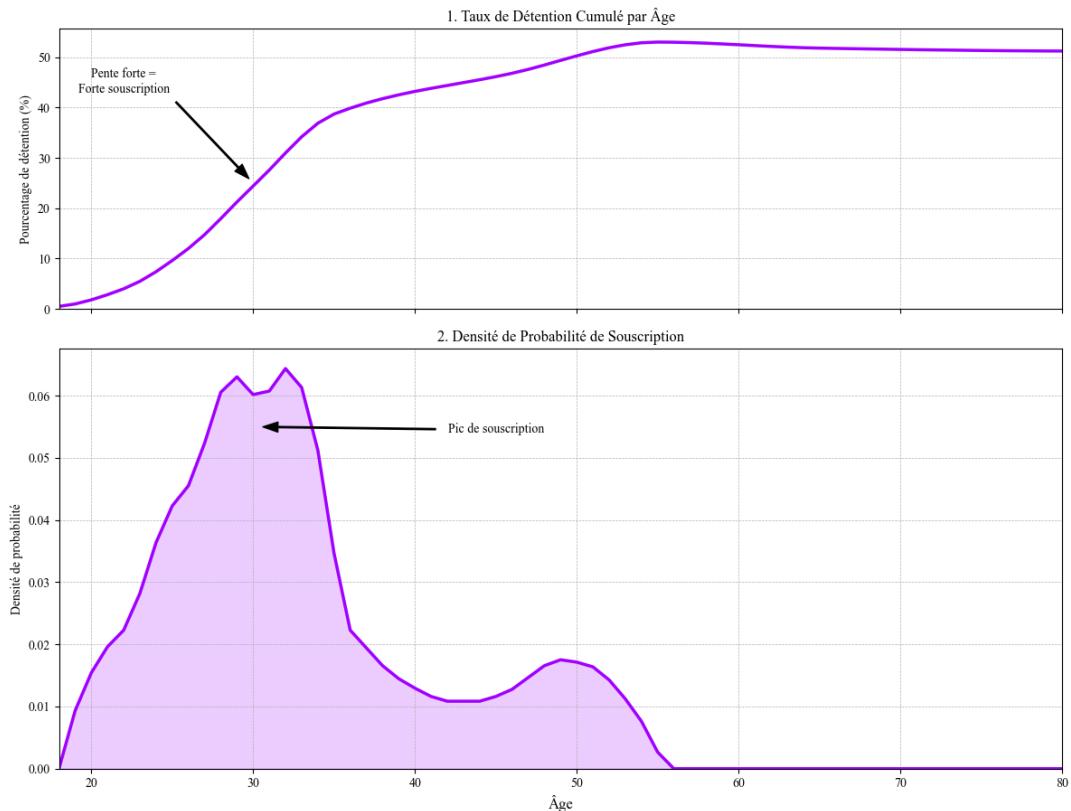


FIGURE 2.5 – Passage de la distribution empirique de l'âge à la souscription à la densité de probabilité du taux de souscription.

Plusieurs lois de probabilité ont été testées pour modéliser cette distribution empirique de l'âge à la souscription :

- La **loi Gamma** : définie sur \mathbb{R}^+ , elle est souvent utilisée pour modéliser des durées. Sa densité est $f(x; k, \theta) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)}$.
- La **loi Beta** : définie sur un intervalle borné $[a, b]$, elle offre une grande flexibilité de forme. Sa densité standard sur $[0, 1]$ est $f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$.
- La **loi de Weibull** : courante en analyse de survie, sa densité est donnée par $f(x; \lambda, k) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}$.
- Le **Modèle de Mélange Gaussien (GMM)** : il s'agit d'une combinaison linéaire de plusieurs lois normales, permettant de s'ajuster à des distributions multimodales. Sa densité est $f(x) =$

$$\sum_{i=1}^K w_i \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i} \right)^2}.$$

Le tableau 2.2 présente les résultats.

Distribution	AIC	BIC	K-S (D)
GMM (n=2)	1 125 603	1 125 654	0.0485
Beta	1 385 454	1 385 495	0.0845
Gamma	1 400 178	1 400 208	0.1110
Weibull	1 437 176	1 437 207	0.1544

TABLE 2.2 – Tableau comparatif des métriques d'ajustement pour l'âge à la souscription. TODO : mettre également des valeurs en gras

Le **Mélange Gaussien à deux composantes (GMM)** s'est avéré être le modèle le plus performant, avec des scores AIC et BIC nettement inférieurs. Cela s'explique car 2 pics de souscription sont observables sur la distribution. Cette bimodalité, illustrée par la calibration de la loi GMM en figure 2.6, est une caractéristique de marché que les lois de probabilité plus simples ne peuvent capturer.

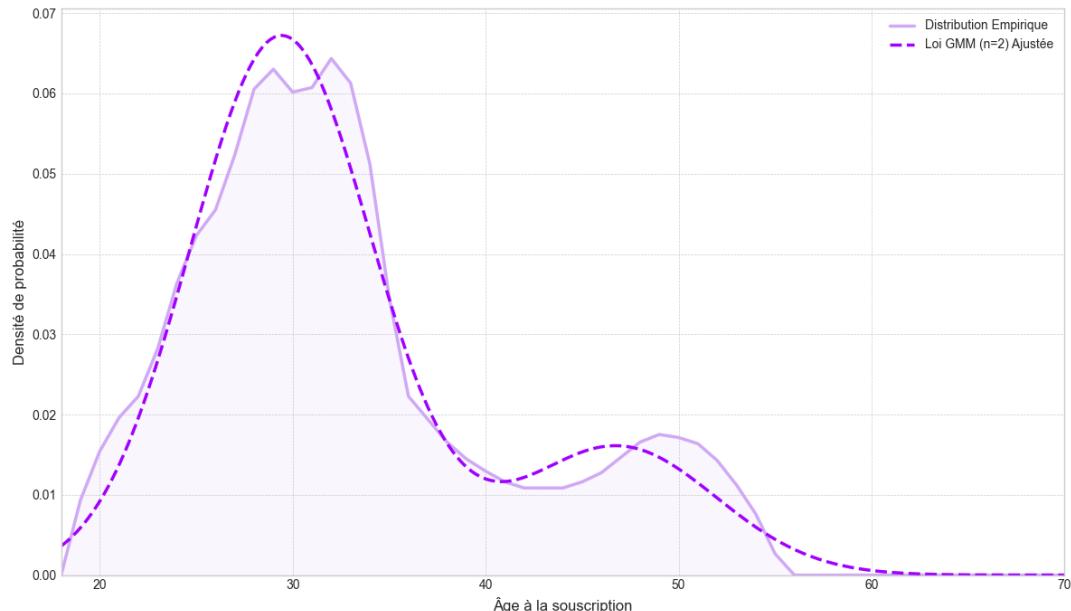


FIGURE 2.6 – Ajustement d'une GMM sur la distribution de l'âge à la souscription.

2.2.1.3 Modélisation de la Provision Mathématique (PM)

Pour calculer la Provision Mathématique à partir des données marché, une méthode plus complexe a été mise en place. Une approche directe consistant à ajuster une loi sur des données de PM n'est pas possible car des données publiques sur ce sujet n'existent pas. Une méthodologie de modélisation conditionnelle a donc été mise en place.

L'hypothèse fondamentale est que la PM d'un individu est principalement fonction de son patrimoine, qui lui-même est fortement corrélé à son âge. La modélisation s'est donc déroulée en plusieurs étapes.

La première étape a consisté à modéliser la distribution du patrimoine brut en fonction de l'âge, en s'appuyant sur les données de l'INSEE [8]. Plutôt que de calibrer une seule loi pour toute la population, une **loi Lognormale** a été ajustée pour chaque tranche d'âge. Les paramètres de cette loi, μ et σ , ont été estimés par la méthode de **correspondance des quantiles**. Cette méthode est particulièrement adaptée lorsque les données individuelles ne sont pas disponibles et que seules des statistiques agrégées sont fournies. Elle consiste à déterminer les paramètres qui minimisent l'écart quadratique entre les quantiles théoriques de la loi et les quantiles empiriques observés (ici les déciles) :

$$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \arg \min_{\mu, \sigma} \sum_{i=1}^9 (F^{-1}(p_i; \mu, \sigma) - Q_{emp}(p_i))^2 \quad (2.1)$$

où $p_i \in \{0.1, \dots, 0.9\}$, F^{-1} est la fonction quantile de la loi Lognormale et Q_{emp} les valeurs fournies par l'INSEE. Cette approche garantit que la distribution ajustée reproduit fidèlement la dispersion de la population réelle. Le tableau 2.3 synthétise les paramètres obtenus.

Tranche d'âge	μ	σ
Moins de 30 ans	9.9233	1.7713
30 à 39 ans	11.6750	1.8374
40 à 49 ans	12.1756	2.1221
50 à 59 ans	12.3216	2.0551
60 à 69 ans	12.3579	2.0772
70 ans ou plus	12.2620	1.8199

TABLE 2.3 – Paramètres de la loi Lognormale du patrimoine brut, calibrés par tranche d'âge.

Sur la base des calibrations précédentes, une population synthétique de 500 000 individus a été générée. Pour chaque individu, un âge a été tiré selon la loi Bêta déterminée précédemment, puis un patrimoine a été tiré selon la loi Lognormale conditionnelle correspondant à son âge. On obtient ainsi un échantillon de paires (Âge, Patrimoine) respectant la corrélation observée dans la réalité (TODO : rajouter un graphe 3D si c'est possible/lisible).

La deuxième étape consiste à estimer la part du patrimoine de chaque individu allouée à l'assurance-vie. Pour ce faire, les données de l'INSEE sur la composition du patrimoine par décile [8] sont utilisées. La figure 2.7 illustre la part du patrimoine financier en fonction du patrimoine brut moyen. Cette relation n'est pas linéaire. Pour les patrimoines les plus modestes, qui n'ont pas encore la capacité d'investir dans l'immobilier, la part des actifs financiers est relativement élevée. À mesure que le patrimoine augmente, une part significative est allouée à l'immobilier, ce qui diminue mécaniquement la part relative du patrimoine financier. Ce phénomène s'inverse cependant pour les patrimoines les plus élevés, où la diversification vers des actifs financiers redevient prépondérante, entraînant une remontée de leur part dans le patrimoine total, ce n'est pas observable sur le graphique 2.7 car les données sont agrégées par décile.

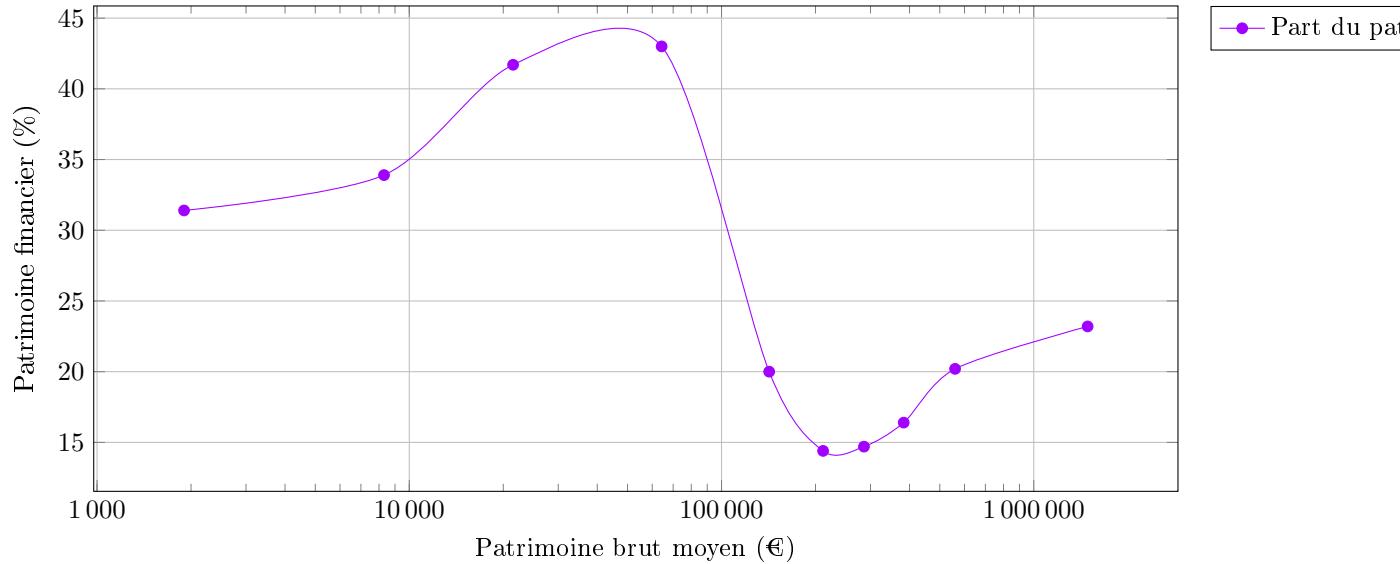


FIGURE 2.7 – Part du patrimoine financier en fonction du patrimoine brut moyen, par décile [8].

La troisième étape consiste à lier le patrimoine financier à la Provision Mathématique. Il est en effet plus réaliste de considérer que l'épargne en assurance-vie (ou la provision mathématique du point de vue de l'assureur) constitue une part du patrimoine financier plutôt que du patrimoine brut. Une hypothèse centrale est donc formulée : la PM d'un individu est estimée comme une fraction de son patrimoine financier. Sur la base de données INSEE [8], cette fraction est fixée à **40%**. Ainsi, pour chaque individu de la population simulée, la PM est calculée comme suit :

$$PM = Patrimoine\ Brut \times Part\ du\ Patrimoine\ Financier \times 40\%$$

Cette règle permet de transformer la distribution de patrimoine en une distribution de PM, en tenant compte des non-linéarités observées dans la composition du patrimoine.

Après avoir appliqué ce processus à toute la population simulée, nous obtenons un échantillon réaliste de Provisions Mathématiques. Une dernière calibration a montré que la distribution de ces PM pouvait être modélisée de manière très satisfaisante par une **loi Lognormale**. Bien que les tests d'adéquation classiques rejettent formellement l'hypothèse nulle en raison de la très grande taille de l'échantillon (rendant le test extrêmement sensible aux infimes déviations), l'analyse comparative des critères d'information et de la distance K-S confirme la supériorité de la loi Lognormale sur cet ajustement, comme l'indique le tableau 2.4.

Distribution	AIC	BIC	K-S (D)
Lognorm	7 142 088	7 142 120	0.017
Gamma	7 254 743	7 254 774	0.145

TABLE 2.4 – Pour le critère de Kolmogorov-Smirnov, la loi Lognormale est largement meilleure que la loi Gamma pour estimer cette distribution.

2.2.2 Synthèse et Génération du Portefeuille Final

L'étape finale de la modélisation consiste à assembler les différentes distributions marginales et conditionnelles calibrées précédemment pour générer le portefeuille de passifs complet. Contrairement à une approche purement multivariée (copule globale 3D) qui peinerait à capturer la nature conditionnelle de la richesse par rapport à l'âge, une approche hybride a été implémentée.

2.2.2.1 Modélisation de la dépendance des âges par Copule

L'analyse des données montre une corrélation mécanique et comportementale entre l'âge de l'assuré et son âge à la souscription. Pour reproduire cette structure de dépendance sans figer les distributions marginales, une **Copule Gaussienne bivariée** a été utilisée.

Cette copule permet de générer des paires de rangs corrélés $(u, v) \in [0, 1]^2$ avec un paramètre de corrélation de Spearman calibré à $\rho = 0.7$. Ces rangs sont ensuite transformés en valeurs réelles via les fonctions quantiles inverses (PPF) des lois marginales retenues :

$$\begin{aligned} — Age_{assure} &= F_{Beta}^{-1}(u) \\ — Age_{souscription} &= F_{GMM}^{-1}(v) \end{aligned}$$

Une contrainte métier stricte est appliquée post-génération : l'âge à la souscription doit nécessairement être inférieur ou égal à l'âge actuel de l'assuré ($Age_{souscription} \leq Age_{assure}$). Les paires ne respectant pas cette condition sont rejetées et régénérées, assurant ainsi la cohérence temporelle des contrats.

2.2.2.2 Génération en cascade de la Provision Mathématique

Une fois le profil d'âge de l'assuré fixé, la Provision Mathématique (PM) est générée de manière conditionnelle, reproduisant la chaîne causale identifiée lors de la calibration :

1. **Génération du Patrimoine Global** : Pour un âge donné, un montant de patrimoine est tiré aléatoirement dans la loi Lognormale spécifique à la tranche d'âge de l'assuré (cf. section précédente).
2. **Test de Détection** : Une épreuve de Bernoulli détermine si l'individu détient un contrat d'assurance-vie, avec une probabilité dépendant de son niveau de patrimoine.
3. **Calcul de la PM** : Pour les détenteurs, la PM est calculée par application déterministe des ratios calibrés :

$$PM = Patrimoine \times \%_{Financier}(Patrimoine) \times 40\%$$

2.2.2.3 Historique des taux techniques et des TMG retenus pour la modélisation

La détermination des *taux minimums garantis* (TMG) par année de souscription s'appuie sur les plafonds réglementaires de taux techniques définis par le Code des assurances, tels qu'analysés dans la note « Le taux technique en assurance vie » publiée par l'ACPR [14], et les travaux de l'ACPR sur l'assurance vie en environnement de taux bas [15], complétés par la veille de marché de Good Value for Money sur les caractéristiques des contrats d'assurance vie [18].

La note [14] rappelle notamment que, depuis les années 1990, le taux technique maximal autorisable sur les contrats d'assurance vie est encadré par une formule fonction du taux moyen des emprunts d'État (TME), avec un plafond de l'ordre de 4,5 % au début des années 1990, puis une baisse progressive de ce plafond au fil de la diminution des taux d'intérêt. Les travaux ultérieurs de l'ACPR montrent qu'en environnement de taux bas, le taux technique moyen effectivement pratiqué sur le stock de contrats s'est progressivement rapproché de 0 %, avec un taux moyen de l'ordre de 0,35–0,5 % au milieu des années 2010 [15].

Sur la base de ces éléments réglementaires et de marché, nous construisons une série historique de TMG par année de souscription. Pour chaque année t , nous retenons :

- un *taux technique maximal réglementaire* TT_t^{\max} , issu des plafonds ACPR/Code des assurances ;
- un TMG_t effectivement utilisé dans notre modèle, calibré en dessous de ce plafond, de façon à représenter un contrat « typique » de l'année considérée.

Le tableau 5.1 présente la série retenue pour la période 1993–2024.

On observe alors que, jusqu'au milieu des années 1990, les plafonds de taux techniques autorisent des TMG jusqu'à 4,5 %, ce qui est cohérent avec les niveaux de TMG donnés dans contrats de l'époque tels que décrits dans [14, 18]. À partir de la fin des années 1990 et des années 2000, la baisse des taux d'intérêt se traduit par une réduction progressive des plafonds réglementaires et des TMG pratiqués, les valeurs retenues TMG_t restant systématiquement inférieures à TT_t^{\max} afin de tenir compte d'un certain conservatisme des assureurs.

À partir de 2015, nous faisons l'hypothèse de TMG nuls ($TMG_t = 0$) pour les nouveaux contrats, ce qui reflète l'environnement de taux durablement bas documenté par l'ACPR [15] et la généralisation des contrats d'épargne en assurance vie sans garantie explicite de taux (garantie limitée au capital net de frais, la performance étant portée par la participation aux bénéfices). Cette hypothèse est cohérente avec les analyses de marché montrant que, sur la période récente, la quasi-totalité des nouveaux contrats d'épargne individuelle n'affichent plus de taux minimum garanti significatif [18].

Dans le cadre de la modélisation ALM présentée dans la suite, cette série annuelle de TMG constitue la base pour la construction de profils discrets par génération de contrat : pour chaque année de souscription t , trois profils de contrat sont définis autour de TMG_t (un profil « généreux », un profil médian et un profil conservateur), de façon à représenter la dispersion observée des TMG dans une même cohorte tout en conservant un cadre de simulation discret adapté à l'agrégation de passifs.

2.2.2.4 Intégration du TAF et du TFGSE dans la modélisation des TMG

Au-delà du seul TMG_t , la valorisation des engagements en assurance vie dépend fortement des *frais de gestion prélevés sur les encours* et de la *participation aux bénéfices* (PB) effectivement redistribuée aux assurés. Pour capturer ces deux dimensions dans un cadre de modélisation discret, nous introduisons deux paramètres complémentaires pour chaque contrat :

- le taux de frais de gestion sur encours $TFGSE$, appliqué annuellement sur la provision mathématique ;

- le taux d'affectation des produits financiers *TAF*, représentant la part des produits financiers attribuée aux assurés (taux servi et dotation à la provision pour participation aux bénéfices).

Les données de marché publiées par France Assureurs sur l'assurance vie en unités de compte montrent qu'en 2024, les frais de gestion sur encours des contrats en unités de compte s'élèvent en moyenne à 0,88 % par an, avec une valeur de 0,83 % pour les gestions libres ou pilotées sans surcoût et un surcoût moyen de 0,36 % pour la gestion sous mandat [19]. Pour les supports en euros, les mêmes travaux indiquent un taux de frais de gestion d'environ 0,66 % par an, ce qui situe la moyenne de marché entre 0,6 % et 0,7 % selon le type de contrat [19]. Ces ordres de grandeur sont cohérents avec les comparatifs de frais publiés par différents acteurs de place, qui situent la plupart des contrats dans une fourchette de 0,5 % à 1,0 % de frais de gestion annuels sur encours.

Dans le modèle, afin de rester cohérent avec cette distribution observée tout en conservant une structure discrète compatible avec l'agrégation ALM, nous retenons trois niveaux de *TFGSE* :

$$TFGSE \in \{0,50\%, 0,70\%, 0,90\%\}.$$

Ces trois valeurs représentent respectivement :

- un profil « peu chargé » (0,50 %), typique de contrats compétitifs ou de gammes patrimoniales ;
- un profil « moyen » (0,70 %), proche de la moyenne observée sur les fonds en euros ;
- un profil « chargé » (0,90 %), représentant des contrats grand public avec une structure de frais élevée.

Dans chaque cohorte d'année *t*, la probabilité d'appartenance à l'un de ces trois profils est ajustée de manière à ce que la moyenne pondérée de *TFGSE* reste compatible avec les statistiques agrégées de marché, tout en reflétant une amélioration progressive des grilles tarifaires sur les générations récentes de contrats.

Concernant la participation aux bénéfices, le cadre réglementaire impose une redistribution d'au moins 85 % des bénéfices financiers et 90 % des bénéfices techniques au profit des assurés, sous forme de PB et de dotation à la provision pour participation aux bénéfices (PPB). Les analyses de l'ACPR sur la revalorisation des contrats d'assurance vie mettent en évidence que, sur longue période, la part des produits financiers effectivement affectée aux assurés (taux servi + variation de PPB) se situe fréquemment au-delà de 80 % du résultat financier, les marges techniques des assureurs restant limitées [15, 16].

Nous modélisons cette réalité au moyen d'un taux d'affectation des produits financiers *TAF* discret, qui représente la part des produits financiers attribuée aux assurés sur un exercice donné. Trois niveaux sont retenus :

$$TAF \in \{80\%, 90\%, 95\%\}.$$

Ces niveaux correspondent à :

- 80 % : un comportement proche du plancher réglementaire, associé à des contrats peu généreux en termes de participation aux bénéfices ;

- 90 % : un comportement « moyen » de marché, cohérent avec les constats de l'ACPR sur des marges techniques modérées ;
- 95 % : un profil particulièrement favorable aux assurés, typique de certains contrats haut de gamme ou de gammes associatives affichant des taux servis durablement supérieurs à la moyenne du marché.

Pour assurer la cohérence économique du modèle, une dépendance entre $TFGSE$ et TAF sera introduite au travers de profils de contrat. Concrètement, pour chaque contrat synthétique, nous tirons d'abord un profil de frais parmi $\{0,50\%, 0,70\%, 0,90\%\}$, puis un niveau de TAF parmi les trois valeurs $\{80\%, 90\%, 95\%\}$, avec une loi discrète conditionnelle. Par exemple, un contrat à faibles frais ($TFGSE = 0,50\%$) aura une probabilité plus forte d'être associé à un TAF élevé ($90\text{--}95\%$), tandis qu'un contrat fortement chargé ($TFGSE = 0,90\%$) sera plus souvent associé à un TAF dans la partie basse de la grille ($80\text{--}85\%$). Ce couplage reproduit qualitativement le fait que les contrats les plus compétitifs en frais sont également ceux qui, historiquement, affichent les meilleurs taux servis et une politique de PB plus favorable aux assurés.

Au total, pour une année de souscription t donnée, chaque contrat du portefeuille synthétique est donc caractérisé par un triplet discret $(TMG_t, TFGSE, TAF)$, où :

- TMG_t est fixé par la table historique de la section précédente, construite à partir des plafonds de taux techniques ACPR ;
- $TFGSE$ prend l'une des trois valeurs $\{0,50\%, 0,70\%, 0,90\%\}$;
- TAF prend l'une des trois valeurs $\{80\%, 90\%, 95\%\}$.

Ce choix de discréétisation permet de simplifier la génération du portefeuilles sur les aspects financiers et assurantiels tout en restant ancré sur des ordres de grandeur observés sur le marché français de l'assurance vie, tels que documentés par France Assureurs et l'ACPR [15, 16, 19].

2.2.2.5 Corrélation des caractéristiques contractuelles avec la provision mathématique

Dans le modèle initial, les paramètres $(TMG_t, TFGSE, TAF)$ sont tirés indépendamment de l'année de souscription t . Cependant, pour refléter fidèlement la structure du portefeuille d'un assureur français, il est pertinent d'introduire une dépendance entre ces caractéristiques contractuelles et la *provision mathématique* du contrat PM_k , qui sert de proxy naturel pour segmenter les contrats par gamme commerciale (Mass Market, Patrimonial, Gestion Privée).

Cette approche s'appuie sur deux observations de marché :

1. Les frais de gestion sur encours $TFGSE$ sont généralement *dégressifs* avec l'encours du contrat : les contrats à forte provision mathématique (typiquement $> 100\text{k}\€$, voire $> 500\text{k}\€$ pour la Gestion Privée) bénéficient de grilles tarifaires plus favorables [19].
2. Les contrats à gros encours sont historiquement plus concentrés dans les gammes patrimoniales et de Gestion Privée, qui affichent des politiques de participation aux bénéfices (PB) et des taux minimums garantis (TMG) différenciés par rapport aux contrats retail (petits patrimoines).

Nous segmentons les contrats selon trois tranches de provision mathématique PM_k :

Gamme	Tranche PM_k	Exemple typique
Mass Market / Retail	$PM_k \leq 50\,000$	Contrats petit patrimoine
Patrimonial	$50\,000 < PM_k \leq 500\,000$	Clientèle moyenne/haute gamme
Gestion Privée	$PM_k > 500\,000$	HNWI, family offices

Ces seuils sont inspirés de la segmentation commerciale standard des acteurs français (AXA, CNP Assurances, Generali) et cohérents avec les statistiques agrégées de France Assureurs sur la structure par encours des contrats d'épargne individuelle [19].

Pour chaque contrat généré, après tirage de l'année t et de la provision mathématique PM_k , les paramètres ($TFGSE, TAF$) sont tirés selon la loi conditionnelle suivante :

TABLE 2.5 – Lois discrètes conditionnelles de ($TFGSE, TAF$) selon la tranche de provision mathématique

Gamme	Tranche PM_k	Probabilités $P(TFGSE, TAF PM_k)$		
		(0,5%, 90%)	(0,7%, 90%)	(0,9%, 80%)
Mass Market	$PM_k \leq 50k$	0,20	0,40	0,40
Patrimonial	$50k < PM_k \leq 500k$	0,40	0,40	0,20
Gestion Privée	$PM_k > 500k$	0,60	0,30	0,10

Le TMG reste fonction de l'année t uniquement (TMG_t de la table 5.1), mais la pondération des générations anciennes (TMG élevés) sera naturellement plus forte dans les tranches Gestion Privée, car ces contrats ont eu plus de temps pour accumuler des provisions élevées.

L'algorithme de génération de portefeuille devient :

1. Tirer l'année de souscription $t \in [1993, 2024]$ selon la structure d'âge du portefeuille ;
2. Tirer la provision mathématique PM_k (loi lognormale typique des encours assurance vie) ;
3. Identifier la tranche de PM_k et tirer le couple ($TFGSE, TAF$) selon la table 2.5 ;
4. Assigner TMG_t selon la table historique ;
5. Calculer le TMG net : $TMG_t^{net} = \max(TM_G - TFGSE, 0)$.

Cette structure assure plusieurs cohérences observables :

- **TFGSE moyen** : la moyenne pondérée par les tranches de PM_k retombe autour de 0,65–0,70 %, cohérent avec France Assureurs (fonds euros : 0,66 %) [19].
- **TMG moyen** : les contrats anciens ($TMG > 2\%$) sont naturellement plus présents dans les tranches à gros PM_k , ce qui est cohérent avec le taux technique moyen actuel du portefeuille (0,35–0,5 %) rapporté par l'ACPR [15].
- **Relation frais-rendement** : les gros contrats (GP) ont à la fois des frais plus bas et un TAF plus élevé, reproduisant le différentiel de performance observé entre gammes.

Cette approche par corrélation avec la provision mathématique permet ainsi de générer un portefeuille synthétique dont les caractéristiques microéconomiques (par contrat) sont cohérentes avec les statistiques

macroéconomiques publiées, tout en conservant une structure parfaitement discrète et donc compatible avec l'agrégation ALM.

2.2.2.6 Ajout du sexe pour finaliser le portefeuille

Pour finaliser le portefeuille, le sexe est une variable important à modéliser. Il est généré aléatoirement selon une loi de Bernoulli, calibrée sur la répartition hommes/femmes observée dans la population des assurés. En France, les données de l'INSEE indiquent que la répartition est légèrement en faveur des femmes, avec environ 52 % de femmes et 48 % d'hommes parmi les assurés en assurance vie [?]. Cette répartition est donc utilisée pour générer le sexe de chaque individu du portefeuille synthétique, en tirant une variable binaire où $P(\text{Sexe} = \text{Femme}) = 0.52$ et $P(\text{Sexe} = \text{Homme}) = 0.48$.

Ce processus itératif permet de générer un portefeuille synthétique de 1 000 000 contrats présentant des caractéristiques statistiques fidèles à la réalité du marché français, prêt à être utilisé pour les étapes d'agrégation.

2.2.3 Mise en correspondance avec le format final du modèle ALM

Une fois les caractéristiques individuelles générées (âge, âge à la souscription, PM, TMG, TAF, TFGSE, sexe), il est nécessaire de les formater pour les rendre compatibles avec les exigences d'entrée du modèle ALM utilisé pour la projection des passifs. Cela implique notamment de :

- Discréteriser les variables continues (âge, PM) en classes d'âge et de PM adaptées à la granularité du modèle ALM.
- Assigner à chaque contrat un profil de frais et de participation aux bénéfices en fonction des règles définies précédemment.
- Structurer les données dans un format tabulaire ou matriciel compatible avec les algorithmes d'agrégation et de projection utilisés dans le modèle ALM.

2.3 Présentation du Portefeuille de Référence Généré

2.3.1 Analyse descriptive du portefeuille de référence

2.3.2 Limitations du portefeuille généré

Chapitre 3

Présentation des Méthodes d’Agrégation Candidates

Après avoir établi le cadre réglementaire et construit un générateur de passif capable de produire des données réalistes, il convient désormais d'aborder la problématique centrale de ce mémoire : la réduction de la dimension du portefeuille de passif.

L'impossibilité technique de projeter individuellement chaque contrat au sein des modèles de gestion actif-passif (ALM), particulièrement gourmands en ressources computationnelles, fait de l'agrégation du passif un impératif incontournable pour le marché de l'assurance. Cette nécessité découle directement des exigences de réactivité lors des phases de clôture réglementaire Solvabilité 2, où la finesse de l'analyse des risques doit impérativement se concilier avec la performance d'exécution pour permettre le lancement de multiples sensibilités et scénarios économiques.

L'enjeu sous-jacent est de résoudre un problème complexe d'optimisation sous contraintes : comment réduire drastiquement la volumétrie des données en entrée du modèle ALM sans altérer la fidélité des indicateurs de risque prudentiels, à savoir le *Best Estimate* (BE) et le *Solvency Capital Requirement* (SCR) ?

Pour répondre à cette problématique, l'objectif de ce chapitre est de définir et d'exposer de manière exhaustive les fondements mathématiques et algorithmiques de différentes approches d'agrégation qui seront mises en concurrence dans ce mémoire. La démarche s'articulera autour de l'étude de trois grandes familles de méthodes :

- **Les approches déterministes classiques** : Méthodes traditionnellement utilisées sur le marché, elles reposent sur une segmentation experte du portefeuille par caractéristiques communes ou par tranches (*Banding*). Elles serviront de référence (ou *benchmark*) pour évaluer l'apport des techniques plus complexes.
- **Les approches statistiques par apprentissage non supervisé** : L'apport des algorithmes de *Machine Learning*, tels que les algorithmes de partitionnement (K-Means), basés sur la densité (DBSCAN, HDBSCAN) ou les arbres de décision (CART), sera exploré pour constituer des *Model Points* fondés sur une similarité multidimensionnelle des profils de risque.
- **Les approches dynamiques basées sur les flux financiers** : En rupture avec le regroupement spatial statique, ces méthodes avancées (telles que le *Cash-Flow Matching* et l'approche par calibration *a posteriori*) proposent d'agréger les contrats en fonction de leur comportement projeté et de leur cinétique d'écoulement.

L'exposé détaillé de ces modèles nous permettra de poser le socle théorique nécessaire avant d'aborder, dans le chapitre suivant, le protocole de test standardisé et l'analyse comparative de leurs performances respectives.

3.1 Approche déterministes classiques

3.1.1 Approche déterministe par regroupement de caractéristiques

La méthode par regroupement de caractéristiques repose sur une segmentation par classes de risque, cette approche constitue le standard historique en actuariat. Elle servira de base de comparaison pour évaluer la performance des algorithmes de regroupement statistique plus avancés présentés dans les parties suivantes.

Le principe fondamental repose sur une partition déterministe du portefeuille. L'objectif est de regrouper les contrats partageant des caractéristiques de risque identiques. Dans un modèle de projection de gestion actif-passif, l'évolution de la Provision Mathématique (PM) est influencée par des caractéristiques spécifiques du contrat. La mortalité dépend de la génération, de l'âge et du sexe ; les rachats sont corrélés à l'âge de l'assuré et à l'ancienneté du contrat (fiscalité) ; la revalorisation dépend du Taux Minimum Garanti (TMG).

Par conséquent, pour garantir que le Model Point agrégé se comporte comme la somme des contrats individuels, il est impératif de regrouper les polices selon ces axes discriminants . Contrairement aux méthodes statistiques qui cherchent des similarités globales, cette approche applique une segmentation rigide. Les critères de regroupement retenus pour cette étude sont :

- **Le Sexe** : Indispensable pour l'application des tables de mortalité différencierées.
- **Le Taux Minimum Garanti (TMG)** : Crucial pour la valorisation des garanties financières.
- **L'Âge de l'assuré** : Discrétisé à l'entier inférieur pour correspondre aux entrées des tables de mortalité.
- **L'Ancienneté du contrat** : Discrétisée à l'entier inférieur pour modéliser correctement la fiscalité et les rachats structurels.

Mathématiquement, cette méthode définit une relation d'équivalence stricte. Deux contrats i et j appartiennent au même Model Point k si et seulement si leurs vecteurs de caractéristiques discrétisées sont identiques :

$$(\text{Sexe}_i, \lfloor \text{Age}_i \rfloor, \lfloor \text{Anc}_i \rfloor, \text{TMG}_i) = (\text{Sexe}_j, \lfloor \text{Age}_j \rfloor, \lfloor \text{Anc}_j \rfloor, \text{TMG}_j)$$

Une fois les groupes constitués, l'agrégation s'opère par la somme des variables extensives (dont la valeur pour le groupe est la somme des valeurs individuelles). La Provision Mathématique du Model Point k est alors la somme des PM des contrats qui le constituent :

$$PM_{MP_k} = \sum_{i \in Groupe_k} PM_i$$

Les variables intensives du Model Point (dont la valeur est indépendante de la taille du groupe, comme l'Âge ou l'Ancienneté) prennent alors les valeurs définies par la segmentation (par exemple, 45 ans et

10 ans), et non une moyenne pondérée, ce qui est cohérent avec la logique de discréétisation à l'entier.

Cette approche présente l'avantage majeur de la simplicité et de la transparence. Elle conserve exactement la volumétrie financière du portefeuille et respecte scrupuleusement les garanties contractuelles (absence de dilution du TMG par moyenne). Elle garantit une homogénéité parfaite des assurés au sein d'un groupe.

Cependant, elle présente des limites intrinsèques :

- **La rigidité de la structure de regroupement :** La définition des classes est fixée *a priori* et de manière uniforme, sans tenir compte de la distribution réelle des capitaux. Cette approche ne permet pas de concentrer automatiquement la précision du regroupement sur les zones à fort enjeux financiers, traitant potentiellement avec la même granularité les segments marginaux et les segments prépondérants.
- **L'absence de contrôle sur la compression :** Le nombre de Model Points finaux n'est pas paramétrable. Il dépend exclusivement de la dispersion du portefeuille et de la finesse de la segmentation. Sur un portefeuille très hétérogène, cette méthode peut générer un nombre de groupes très élevé, dont certains ne contiendront que peu de contrats, limitant ainsi l'efficacité de la réduction de dimension (phénomène du « fléau de la dimension »).

3.1.2 Approche par tranches et moyenne pondérée

Cette méthode constitue une évolution de la segmentation par classes présentée précédemment. Elle vise à réduire davantage le nombre de Model Points en relâchant la contrainte d'égalité stricte sur les variables continues (âge et ancienneté) au profit d'une logique d'intervalles, ou discréétisation par paliers.

Le principe de regroupement reste déterministe. Les variables catégorielles ou contractuelles majeures (Sexe, TMG) conservent une discrimination stricte. En revanche, l'espace des variables temporelles est découpé en tranches. Dans le cadre de cette implémentation, les intervalles suivants ont été retenus :

- Un pas de 2 ans pour l'âge de l'assuré ;
- Un pas de 5 ans pour l'ancienneté du contrat.

Un contrat i appartient à un groupe k si ses caractéristiques discrètes correspondent et si ses variables continues tombent dans les intervalles définis :

$$i \in MP_k \iff \begin{cases} Sexe_i = Sexe_k \\ TMG_i = TMG_k \\ Age_i \in [Age_{min}^k, Age_{max}^k[\\ Ancienneté_i \in [Anc_{min}^k, Anc_{max}^k[\end{cases}$$

La spécificité majeure de cette approche réside dans la détermination des caractéristiques du Model Point. Contrairement à une approche simpliste qui retiendrait le centre de l'intervalle (par exemple, 31

ans pour la tranche [30-32]), dans cette méthode il faut calculer le barycentre des contrats regroupés. Finalement, afin de préserver la structure financière du portefeuille, la moyenne est pondérée par la Provision Mathématique (PM).

Ainsi, l'âge (Age_{MP}) et l'ancienneté (Anc_{MP}) du Model Point sont calculés comme suit :

$$Age_{MP} = \frac{\sum_{i \in MP} Age_i \times PM_i}{\sum_{i \in MP} PM_i} ; \quad Anc_{MP} = \frac{\sum_{i \in MP} Ancienneté_i \times PM_i}{\sum_{i \in MP} PM_i}$$

Cette pondération par les encours permet de s'assurer que le Model Point est représentatif des contrats les plus significatifs financièrement au sein de la tranche, minimisant ainsi le biais d'agrégation sur les projections de flux futurs.

3.1.2.1 Variante « Smart Granular » et stratégies métier

Dans le cadre de l'optimisation, une variante nommée **Smart Granular** a été développée. Contrairement au Banding classique à pas constant, cette approche adapte la finesse des mailles selon la sensibilité locale des risques. Plusieurs profils de découpage ont été implémentés pour répondre à des objectifs d'analyse différents :

- **Smart Focus Active** : Priorise la précision sur la phase de constitution de l'épargne (20-65 ans) avec un pas de 2 ans, tout en compressant fortement les extrêmes (pas de 15 ans au-delà de 85 ans).
- **Smart Focus Young** : Stratégie ultra-fine sur les nouveaux entrants (pas de 1 an jusqu'à 50 ans) pour capturer la dynamique de croissance du portefeuille.
- **Smart Focus Fiscal** : Découpage spécifique autour de l'ancienneté 8 ans (pas de 1 an entre 0 et 12 ans) pour modéliser avec précision le basculement de la fiscalité des rachats.
- **Smart Granular (Équilibré)** : Mélange des approches précédentes, resserrant les mailles à la fois sur l'âge et sur le cap fiscal des 8 ans.

3.1.2.2 Limites de l'approche et variance intra-classe

Bien que la pondération par la Provision Mathématique assure la conservation du barycentre financier, le regroupement par tranches (Banding) écrase inévitablement la dispersion au sein de chaque groupe. Mathématiquement, la variance intra-classe (ou inertie) d'une tranche k pour une caractéristique X (comme l'âge) s'exprime par :

$$Var(X_k) = \frac{1}{\sum_{i \in MP_k} PM_i} \sum_{i \in MP_k} PM_i (X_i - X_{MP_k})^2$$

Plus la tranche est large, plus cette variance augmente, ce qui dilue la précision du profil de risque. Le modèle ALM traitant les flux de manière non linéaire (notamment via les probabilités de rachat ou de mortalité), cette perte de dispersion engendre le fameux « biais d'agrégation ». C'est cette limitation

fondamentale qui justifie le recours à des algorithmes de partitionnement dynamique (*Machine Learning*), capables de minimiser cette inertie de manière optimale plutôt que de subir une grille prédéfinie.

3.2 Approches statistiques par apprentissage non supervisé

3.2.1 Approche statistique par apprentissage non supervisé (K-Means)

Contrairement aux méthodes déterministes qui segmentent l'espace des risques selon une grille préétablie, les approches par apprentissage non supervisé (Machine Learning) visent à déterminer la structure des données. L'objectif n'est plus d'imposer un regroupement, mais de laisser l'algorithme identifier les zones de forte densité du portefeuille pour y placer les groupes semblables, dans notre cas les Model Points.

Parmi les algorithmes de clustering, la méthode des K-Means a été retenue car c'est une méthode robuste et fonctionne très bien pour minimiser l'inertie intra-classe, c'est-à-dire la dispersion des contrats autour de leur Model Point représentatif.

3.2.1.1 Principe de l'algorithme

L'algorithme des K-Means cherche à partitionner un ensemble de N contrats en K groupes (ou clusters) distincts, de manière à minimiser la distance entre chaque contrat et le centre de son groupe (le centroïde). Dans notre contexte, ce centroïde deviendra le Model Point.

Mathématiquement, pour un ensemble de contrats représentés par des vecteurs de caractéristiques $x_i \in \mathbb{R}^d$ (où d est le nombre de dimensions : Âge, Ancienneté, TMG...), l'algorithme cherche à déterminer les K centroïdes μ_1, \dots, μ_K qui minimisent la fonction objectif J (l'inertie) :

$$J = \sum_{j=1}^K \sum_{x_i \in S_j} w_i \|x_i - \mu_j\|^2$$

Où :

- S_j est l'ensemble des contrats assignés au cluster j .
- $\|\cdot\|$ est la distance/norme utilisée (ici norme euclidienne).
- w_i est le poids du contrat i , ici cela correspond à la Provision Mathématique (PM_i). Ainsi, l'algorithme est forcé de minimiser l'erreur de regroupement prioritairement pour les contrats à fort enjeux financiers.

3.2.1.2 Application aux données du portefeuille

La mise en œuvre de cet algorithme sur un portefeuille d'épargne nécessite plusieurs étapes pour garantir la pertinence des regroupements : le choix des variables, la standardisation des données, et l'adaptation de l'algorithme pour intégrer la pondération par la PM.

Les variables retenues pour le calcul de la distance sont celles qui impactent directement le profil de

risque et les flux futurs :

- L'Âge de l'assuré;
- L'Ancienneté fiscale;
- Le Taux Minimum Garanti (TMG).

Ces variables ayant des échelles très différentes (un âge varie de 0 à 100, un TMG de 0 à 0.04), un calcul de distance brut donnerait un poids disproportionné à l'âge. Il est donc impératif de procéder à une standardisation (centrage-réduction) des données avant le clustering :

$$\tilde{x}_{i,d} = \frac{x_{i,d} - \mu_d}{\sigma_d}$$

Cette transformation place toutes les variables sur une échelle comparable, permettant à l'algorithme de traiter équitablement les différentes dimensions du risque.

L'algorithme utilisé est une variante pondérée des K-Means. Contrairement à une approche standard où chaque point a une importance égale, ici chaque contrat « attire » le centroïde proportionnellement à sa PM. Le processus itératif est le suivant :

1. **Initialisation :** Sélection des K centroïdes initiaux via la méthode **k-means++**. Contrairement à une initialisation totalement aléatoire qui risque de conduire à des optimums locaux de mauvaise qualité, cet algorithme répartit les centres initiaux de manière espacée. Le premier centroïde est choisi au hasard, puis chaque centroïde suivant est sélectionné avec une probabilité proportionnelle au carré de la distance qui le sépare du centroïde le plus proche déjà choisi ($D(x)^2$). Cela accélère considérablement la convergence.
2. **Affectation :** Chaque contrat est assigné au centroïde le plus proche en termes de distance euclidienne pondérée.
3. **Mise à jour :** Les nouveaux centroïdes sont recalculés comme le barycentre pondéré des contrats de leur cluster.
4. **Convergence :** Répétition des étapes 2 et 3 jusqu'à stabilisation des centroïdes.

3.2.1.3 Constitution des Model Points finaux

Une fois la convergence atteinte, chaque cluster j est transformé en un Model Point unique.

- Les variables extensives (PM, Nombre de contrats) sont sommées : $PM_{MP_j} = \sum_{i \in S_j} PM_i$.
- Les variables intensives (Âge, Ancienneté, TMG) sont définies par les coordonnées du centroïde final, qui correspondent naturellement à la moyenne pondérée des caractéristiques des contrats du cluster.

Cette méthode permet de définir automatiquement des Model Points situés au cœur des masses financières du portefeuille, comme illustré dans la Figure 3.1, offrant ainsi une représentation optimale de la distribution des risques.

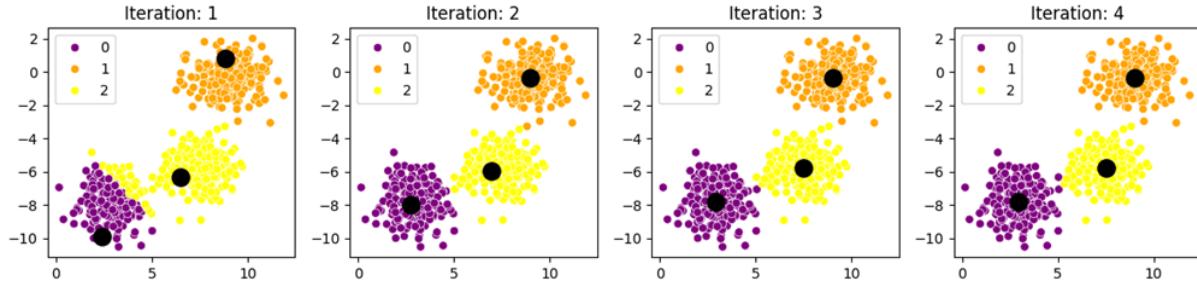


FIGURE 3.1 – Visualisation de la méthode K-Means sur un jeu de données fictif [11]

3.2.2 Approches basées sur la densité (DBSCAN et HDBSCAN)

Si l'algorithme des K-Means est performant pour des données réparties de manière homogène et sphérique, il montre ses limites lorsque les structures sous-jacentes du portefeuille sont complexes ou de densités variables. En effet, les données d'un portefeuille d'assurance vie présentent souvent des formes allongées ou irrégulières. Par exemple, une génération de produits vendue massivement sur une courte période crée une concentration spécifique de forme non convexe.

Pour capter ces formes complexes sans fixer *a priori* le nombre de Model Points comme dans les K-Means, des méthodes basées sur la densité peuvent être mises en place : DB SCAN (*Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise* ou *Regroupement spatial basé sur la densité d'applications avec bruit*) et son extension hiérarchique HDBSCAN.

3.2.2.1 Principes fondamentaux de DBSCAN

L'algorithme DBSCAN définit un cluster comme une zone de forte densité séparée par des zones de faible densité. Il repose sur deux paramètres clés : un rayon de voisinage ε (*epsilon*) et un nombre minimum de points *MinPts*.

Mathématiquement, la notion de densité est formalisée par le voisinage ε d'un point x , noté $N_\varepsilon(x)$: $N_\varepsilon(x) = \{y \in D \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$

Un point x est qualifié de **point cœur** (*core point*) si son voisinage contient au moins *MinPts* points : $|N_\varepsilon(x)| \geq \text{MinPts}$.

À partir de cette définition, les clusters sont construits par propagation de la propriété de *densité-accessibilité* :

- Un point p est directement densité-accessible depuis q si q est un point cœur et $p \in N_\varepsilon(q)$.
- Un cluster est alors l'ensemble maximal de points connectés par cette relation de densité.
- Tout point n'appartenant à aucun cluster est considéré comme du **bruit** (*outlier*).



FIGURE 3.2 – Explication de l'algorithme DBSCAN (TODO : A refaire)

3.2.2.2 Adaptation aux contraintes assurantielles

L’application directe de DBSCAN aux données brutes du portefeuille d’assurance vie utilisé se heurte à deux obstacles majeurs nécessitant des adaptations spécifiques implémentées dans le protocole : Le problème de la discréétisation et la gestion du bruit.

Les variables de gestion (Âge, Ancienneté) sont traditionnellement stockées de manière discrète. Cette structure crée une grille artificielle où plusieurs contrats se superposent exactement sur les mêmes coordonnées (x, y). Cela fausse le calcul de densité locale : un point isolé sur la grille peut artificiellement paraître très dense simplement parce qu’il superpose plusieurs contrats identiques au mêmes caractéristiques.

Pour y remédier, une technique de **Dithering** (bruitage uniforme) peut être utilisée. Avant l’étape de clustering, une perturbation aléatoire u_i est ajoutée aux variables temporelles de chaque contrat x_i :

$$\tilde{x}_{i,d} = x_{i,d} + u_{i,d} \quad \text{avec} \quad u_{i,d} \sim \mathcal{U}([-0.5, 0.5])$$

Cette transformation permet alors de fluidifier l’espace et d’éviter une trop grande densité des contrats,

sans altérer les propriétés statistiques globales du portefeuille (l'espérance de la perturbation étant nulle).

3.2.2.3 Gestion du bruit et réallocation des contrats

Contrairement à une analyse de données classique exploratoire où le bruit peut être écarté, dans un modèle épargne, la complétude des engagements est une contrainte absolue :

$$\sum PM_{MP} = \sum PM_{contrats}.$$

Les contrats classés comme « bruit » par DBSCAN (zones de faible densité ou points isolés) ne peuvent être ignorés.

Il a donc fallu implémenter une étape de post-traitement systématique : une réallocation via un algorithme des **k-plus proches voisins** (**k-NN**) avec $k = 1$. Chaque contrat identifié comme bruit x_{noise} est réaffecté au cluster validé C_j le plus proche : $Class(x_{noise}) = Class(\underset{y \in \text{Clustered}}{\operatorname{argmin}} d(x_{noise}, y))$ Cela garantit qu'aucun contrat n'est perdu tout en rattachant les profils atypiques aux segments les plus ressemblants.



FIGURE 3.3 – Explication du reclassement du bruit (TODO : A refaire)

3.2.3 Approche hiérarchique adaptative (HDBSCAN)

Bien que l'algorithme DBSCAN permette de créer des clusters sur des données non sphériques comme le fait l'algorithme K-Means, il conserve une limite majeure : l'utilisation d'un seuil de densité global (ε) unique. Dans un portefeuille d'assurance vie, la densité des données est hétérogène. Certaines zones, correspondant aux produits récemment commercialisés, présentent une très forte concentration de contrats, tandis que d'autres, regroupant des générations anciennes ou des produits de niche, sont beaucoup plus diffuses. L'application d'un ε unique conduit inévitablement à un compromis insatisfaisant : un seuil strict fragmente les zones diffuses en bruit, tandis qu'un seuil lâche fusionne des clusters distincts dans les zones denses.

Pour répondre à cette problématique, l'algorithme **HDBSCAN** (*Hierarchical Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise*) propose une approche hiérarchique permettant de détecter des clusters de densités variables. Son fonctionnement se décompose en cinq étapes clés [13] :

3.2.3.1 Transformation de l'espace : la distance d'accessibilité mutuelle

Afin de rendre l'algorithme plus robuste aux points aberrants (bruit), HDBSCAN ne travaille pas directement sur la distance euclidienne brute, mais définit une nouvelle métrique : la « distance d'accessibilité mutuelle ».

$$d_{mreach}(a, b) = \max\{\text{core}_k(a), \text{core}_k(b), d(a, b)\}$$

Où $\text{core}_k(x)$ est la distance du point x à son k -ième voisin le plus proche. Cette métrique permet de pondérer la distance entre deux points par leur densité locale : si un point se trouve dans une zone de faible densité, sa distance de cœur sera élevée, augmentant ainsi sa distance mutuelle d_{mreach} avec les autres points. Cette transformation a pour effet d'isoler les points aberrants en les « repoussant » hors des zones de forte concentration, ce qui stabilise la formation des clusters.

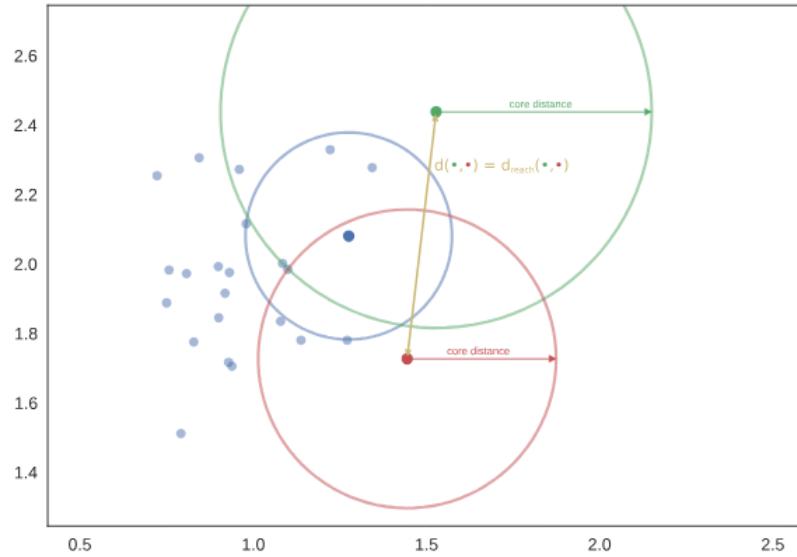


FIGURE 3.4 – Illustration de la distance d'accessibilité mutuelle [13]

3.2.3.2 Construction de l'Arbre Couvrant Minimum (MST)

L'algorithme construit ensuite un graphe où chaque contrat est un sommet, relié aux autres par des arêtes pondérées par la distance d_{mreach} . Un Arbre Couvrant Minimum (Minimum Spanning Tree - MST) est généré pour connecter l'ensemble des points en minimisant le poids total des arêtes.

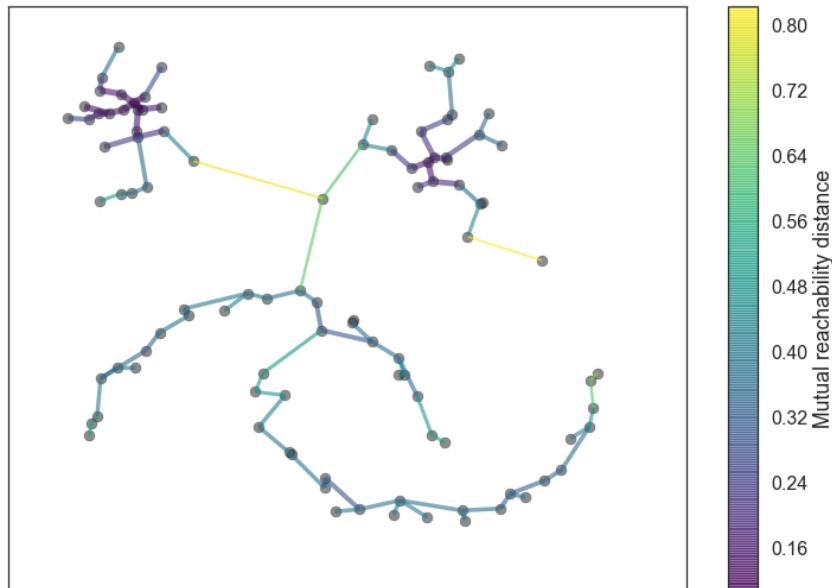


FIGURE 3.5 – Construction de l'Arbre Couvrant Minimum [13]

3.2.3.3 Construction de la hiérarchie des clusters

En supprimant itérativement les arêtes du MST par ordre décroissant de poids, l'algorithme déconnecte progressivement le graphe. Cela crée une structure dendrogrammatique (arbre hiérarchique) représentant l'ensemble des regroupements possibles, du plus global (un seul cluster) au plus fin (chaque point est un cluster).

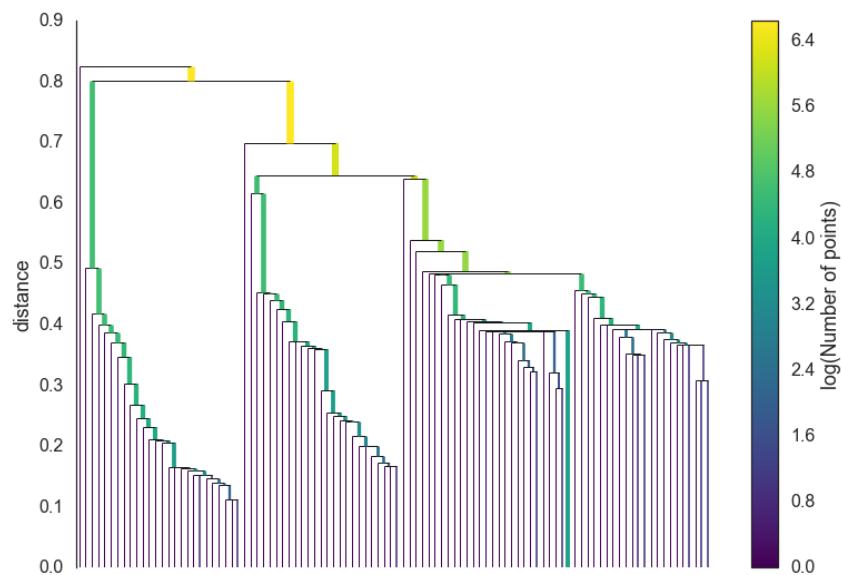


FIGURE 3.6 – Construction de la hiérarchie des clusters [13]

3.2.3.4 Condensation de l'arbre

L'arbre hiérarchique complet étant trop complexe, il est condensé. À chaque séparation (split), on vérifie si les nouveaux groupes formés atteignent une taille minimale ($MinPts$). Si ce n'est pas le cas, les points sont considérés comme du bruit détaché du cluster principal. Si les deux branches sont suffisamment grandes, on considère qu'il y a naissance de deux vrais clusters. Cette étape simplifie drastiquement l'arbre en ne conservant que les branches significatives.

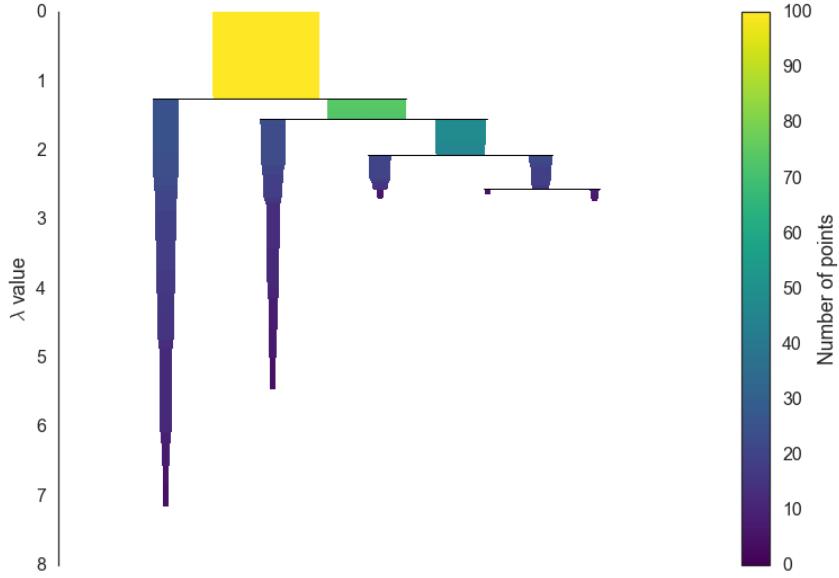


FIGURE 3.7 – Condensation de l’arbre hiérarchique [13]

3.2.3.5 Extraction des clusters stables

Contrairement aux méthodes hiérarchiques classiques qui coupent l’arbre à un niveau fixe, HDBSCAN sélectionne les clusters en maximisant une mesure de stabilité appelée *Excess of Mass* (eom). La stabilité d’un cluster est définie par la somme, pour tous ses points, de la différence entre la densité à laquelle le point quitte le cluster (λ_{death}) et celle où le cluster est apparu (λ_{birth}) :

$$\mathcal{S}(C) = \sum_{x \in C} (\lambda_{death}(x) - \lambda_{birth}(C))$$

L’algorithme remonte l’arbre condensé et sélectionne l’ensemble de clusters disjoints qui maximise cette stabilité globale.

3.2.3.6 Stratégies d’extraction des clusters : EOM vs Leaf

Deux stratégies de sélection des nœuds dans la hiérarchie ont été mises en concurrence :

- **Excess of Mass (EOM)** : C’est la stratégie par défaut de HDBSCAN. Elle cherche à maximiser la stabilité globale en sélectionnant les clusters les plus persistants dans l’arbre. Elle a tendance à produire des macro-clusters, ce qui favorise un fort taux de compression mais peut lisser des micro-segments atypiques.
- **Leaf (Feuilles)** : Cette variante force l’algorithme à sélectionner uniquement les nœuds terminaux de l’arbre condensé (les « feuilles »). Elle garantit l’homogénéité maximale au sein de chaque Model Point en évitant toute fusion, au prix d’un nombre de MP plus important.

Cette méthodologie permet d’identifier simultanément des micro-clusters très compacts et des macro-

clusters plus étendus, offrant une segmentation optimale et adaptative de la population des assurés sans paramétrage complexe d'un rayon de voisinage.

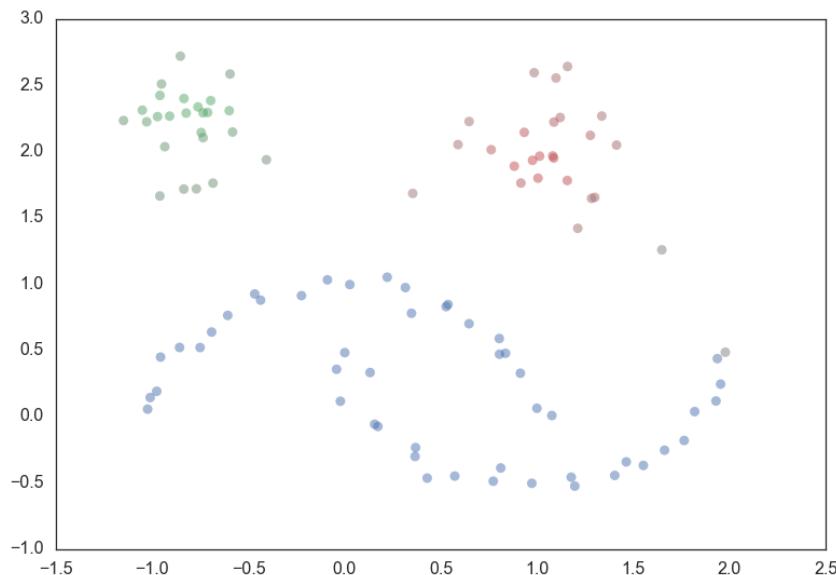


FIGURE 3.8 – Résultat final du clustering HDBSCAN [13]

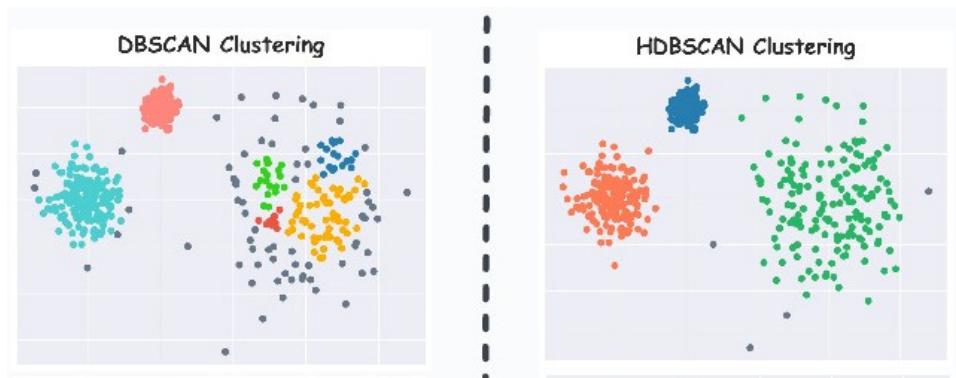


FIGURE 3.9 – Comparaison des approches DBSCAN et HDBSCAN [12]

3.2.3.7 Constitution finale des Model Points

Une fois la partition optimale obtenue (via DBSCAN ou HDBSCAN) et le bruit réalloué, la construction des Model Points suit la logique de conservation des flux financiers. Pour chaque cluster j , le Model Point est défini par le barycentre pondéré des contrats :

$$\mu_j = \frac{\sum_{i \in C_j} PM_i \cdot x_i}{\sum_{i \in C_j} PM_i}$$

Cette méthode assure que le Model Point se situe au centre de gravité financier de son groupe, minimisant ainsi le biais d'agrégation sur les projections futures.

3.2.4 Approche par Arbres de Décision (CART)

L'approche par arbres de décision, et plus précisément l'algorithme CART (*Classification and Regression Trees*), introduit une logique d'apprentissage supervisé dans le processus d'agrégation. Contrairement aux K-Means qui cherchent une similarité globale, le CART vise à partitionner le portefeuille en minimisant la variance d'une variable cible d'intérêt.

Dans le cadre de cette étude, deux variantes de ciblage ont été implémentées :

- **Refined** : La cible est une combinaison linéaire de l'encours et du taux garanti ($PM \times (1 + 10 \times TMG)$), afin de forcer l'arbre à isoler les masses financières à fort enjeux de revalorisation.
- **Spread Focus** : La cible est le TMG pur, l'objectif étant d'obtenir des clusters d'une grande pureté financière pour limiter la dilution des garanties.

L'algorithme procède par divisions successives (splits) binaires de l'espace des caractéristiques (Âge, Ancienneté, TMG). À chaque étape, il choisit la variable et le seuil qui maximisent l'homogénéité de la cible au sein des deux groupes formés. Le processus s'arrête lorsqu'un nombre maximal de feuilles (correspondant au nombre de Model Points souhaité) est atteint.

3.2.4.1 Définition de la variable cible : Refined vs Spread Focus

La puissance de l'arbre CART réside dans le choix de la métrique à optimiser :

- **Variante Refined** : On définit une cible $Y_i = PM_i \times (1 + \alpha \cdot TMG_i)$. Cette pondération force l'arbre à accorder plus d'importance aux contrats qui présentent un lourd financement tout en ayant un coût de garantie élevé. C'est une approche visant l'équilibre entre masse et risque.
- **Variante Spread Focus** : La cible est le TMG pur. L'algorithme cherche alors à créer des groupes où l'hétérogénéité des taux garantis est minimale. Cette approche est privilégiée pour les modèles ALM très sensibles au spread entre taux de marché et taux techniques.

Cette méthode présente l'avantage d'identifier automatiquement les interactions non linéaires entre les variables (par exemple, un seuil d'âge qui ne devient critique que pour une certaine ancienneté). Cependant, elle produit une segmentation par « paliers » qui peut s'avérer trop brutale pour modéliser des phénomènes continus comme la mortalité.

3.3 Approche par travail sur les flux financiers

3.3.1 Approche par Appariement de Flux (Cash-Flow Matching)

La méthode de *Cash-Flow Matching* constitue l'approche la plus avancée de ce protocole. Elle repose sur un changement de paradigme : au lieu de regrouper les contrats selon leurs caractéristiques statiques, on les regroupe selon leur **profil de risque dynamique**.

Le principe s'articule en deux phases :

1. **Phase de Projection Proxy** : Chaque contrat individuel i est projeté au sein du moteur métier sous un scénario déterministe central sur un horizon de $T = 20$ ans. On extrait de cette projection un vecteur de flux financiers $\mathbf{CF}_i = [f_{i,1}, f_{i,2}, \dots, f_{i,T}]$, où $f_{i,t}$ représente la somme des prestations (rachats, décès, termes) et de la marge financière à l'année t .
2. **Phase de Clustering** : L'algorithme des K-Means est ensuite appliqué non pas sur les données de gestion, mais sur ces vecteurs de flux \mathbf{CF}_i . La distance entre deux contrats est alors définie par leur proximité comportementale dans le temps :

$$d(i, j) = \sqrt{\sum_{t=1}^T w_t (f_{i,t} - f_{j,t})^2}$$

3.3.1.1 Niveaux de fidélité du moteur proxy

Cette approche a été déclinée en deux versions selon la complexité du moteur de projection utilisé pour générer les vecteurs \mathbf{CF}_i :

- **Mode Proxy (Simple)** : Utilise un modèle simplifié, souvent linéaire ou déterministe de premier ordre, pour projeter les flux. C'est une méthode rapide mais qui peut négliger les effets de second ordre comme l'épuisement de la PPE ou les options de rachat dynamique.
- **Mode Real OPS (Moteur Métier)** : Utilise le véritable moteur de calcul Polars développé pour ce mémoire. Bien que plus coûteux en temps de préparation (env. 30s), il garantit que le clustering s'opère sur la réalité économique exacte du contrat, capturant l'intégralité des non-linéarités (participation aux bénéfices, rachats structurels, fiscalité).

Cette approche, désignée sous le terme **Real OPS** dans cette étude, permet de capturer intrinsèquement toutes les non-linéarités du modèle ALM. Deux contrats présentant des caractéristiques très différentes (par exemple, un assuré jeune sur un contrat ancien et un assuré âgé sur un contrat récent) peuvent être regroupés si'ils génèrent des flux de sorte statistiquement équivalents.

L'avantage majeur est la réduction drastique du « biais d'agrégation » puisque le critère de regroupement est précisément l'indicateur que l'on cherche à calculer au final (le Best Estimate). L'inconvénient réside dans le coût computationnel de la pré-projection initiale, qui doit être compensé par le gain de temps lors des lancements ALM ultérieurs.

3.3.2 Approche par calibration de lois comportementales *a posteriori* (Biais Zéro)

L'approche par calibration *a posteriori*, dénommée « Biais Zéro » dans cette étude, marque une rupture méthodologique avec les techniques de clustering spatial. Là où les méthodes classiques tentent d'ajuster des contrats à des lois de mortalité existantes, cette approche propose d'adapter les lois de sortie pour qu'elles correspondent parfaitement à un regroupement arbitraire de contrats.

3.3.2.1 Mécanique des décréments et bases de calibration

Pour atteindre une erreur nulle sur le Best Estimate, la calibration doit respecter scrupuleusement l'ordonnancement des flux au sein du moteur de projection Polars. Le moteur applique la séquence suivante sur une période $[t, t + 1]$:

1. **Revalorisation technique** : Application du TMG au prorata temporis sur la PM de début d'année.
2. **Calcul des rachats** : Les rachats s'appliquent sur la PM revalorisée à mi-période.
3. **Calcul des décès** : Les décès s'appliquent sur la PM nette des rachats.

Ainsi, les lois induites $q_{k,t}$ ne sont pas calculées sur la PM de début d'année, mais sur les **bases d'application exactes** (mi-période). Pour un groupe de contrats k , les probabilités de rachat ($q_{k,t}^{rt}$) et de décès ($q_{k,t}^{dc}$) sont définies par :

$$q_{k,t}^{rt} = \frac{\sum_{i \in k} \text{Prestations_Rachats}_{i,t}}{\sum_{i \in k} \text{Base_Rachats}_{i,t}} ; \quad q_{k,t}^{dc} = \frac{\sum_{i \in k} \text{Prestations_Décès}_{i,t}}{\sum_{i \in k} \text{Base_Décès}_{i,t}} \quad (3.1)$$

Où la base de rachat intègre les intérêts techniques acquis à mi-période, et la base de décès est nette des rachats déjà effectués. Cette précision mathématique permet de capturer l'intégralité de la cinétique des flux, rendant le Model Point agnostique de la démographie réelle (*Age, Sexe*).

3.3.2.2 Définition des clés d'agrégation financières

Le portefeuille est partitionné selon un triplet de variables financières qui régissent la mécanique de revalorisation :

- **Le TMG net** : Le taux minimum garanti servi à l'assuré.
- **Le TFGSE** : Le taux de frais de gestion sur encours prélevé par l'assureur.
- **Le TAF** : Le taux d'affectation des produits financiers.

Cette segmentation garantit que le **Model Point Financier (MPF)** possède un seuil de rentabilité brut identique à celui des contrats individuels :

$$TMG_{brut} = \frac{TMG_{net} + TFGSE}{TAF} \quad (3.2)$$

L'agrégation sur ces clés, combinée aux lois induites, permet d'atteindre le « Biais Zéro » opérationnel, l'erreur résiduelle ne provenant plus que des arrondis numériques (estimée à 0,006% dans nos tests).

3.3.3 Techniques transverses d'optimisation et pré-traitement

Au-delà du choix de l'algorithme de clustering, la performance de l'agrégation dépend fortement de la préparation des données et des contraintes métier imposées lors du processus.

3.3.3.1 Stratification par Risques Majeurs (TMG et Sexe)

Afin d'éviter des compensations de risques biologiquement ou financièrement absurdes, une stratégie de **pré-split** a été systématiquement appliquée. Le portefeuille est d'abord divisé en strates étanches selon :

- **Le Sexe** : Pour garantir le respect des tables de mortalité différencierées.
- **Le Taux Minimum Garanti (TMG)** : Pour éviter de diluer la valeur des garanties financières.

L'algorithme de clustering (K-Means ou HDBSCAN) est ensuite lancé indépendamment au sein de chaque strate. Cette approche garantit une « pureté » minimale des Model Points finaux.

3.3.3.2 Ingénierie des caractéristiques : Log-PM et Poids Dimensionnels

Pour orienter les algorithmes vers les zones à fort enjeux, deux techniques de *Feature Engineering* ont été testées :

- **Ajout de la dimension Log-PM** : On ajoute le logarithme de la Provision Mathématique comme variable spatiale. Cela force l'algorithme à regrouper des contrats de taille financière similaire, évitant qu'un « gros » contrat ne soit noyé dans une masse de « petits » contrats.
- **Pondération des dimensions** : Lors du calcul de la distance euclidienne, des poids w_d sont appliqués. Par exemple, une importance de 10 est donnée au TMG contre 1 pour l'Âge, pour s'assurer que la proximité financière prime sur la proximité démographique.

Chapitre 4

Protocole d'Analyse et Résultats de l'Agrégation

Ce chapitre constitue le cœur expérimental de cette étude. Après avoir exposé les fondements théoriques des méthodes d'agrégation, il s'agit désormais de mettre en œuvre un cadre rigoureux pour comparer leurs performances. L'objectif est double : quantifier précisément le risque de modèle induit par la réduction de dimension sur le passif seul, puis valider la robustesse de la méthode sélectionnée à travers des analyses de sensibilité.

4.1 Définition du Protocole de Test Comparatif

La sélection de la méthode d'agrégation optimale ne peut reposer sur une simple intuition statistique. Elle nécessite un cadre expérimental capable de simuler les conditions réelles d'une clôture prudentielle, en mettant en concurrence la simplicité des méthodes déterministes et la puissance des approches par apprentissage.

4.1.1 Constitution des portefeuilles de test

L'étude s'appuie sur un portefeuille de référence, désigné par la suite comme le « Portefeuille Full », composé de **50 000 contrats individuels**. Ce volume a été choisi pour représenter une taille critique permettant d'observer les phénomènes de compensation statistique tout en restant techniquement projetable en un temps raisonnable pour établir une base de comparaison exacte.

Chaque contrat est défini par un vecteur de caractéristiques multidimensionnel $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{12}$, comprenant notamment :

- **Variables de risques biométriques** : Âge de l'assuré (de 18 à 95 ans) et Sexe.
- **Variables de structure fiscale** : Ancienneté du contrat (cruciale pour les lois de rachat et la fiscalité en cas de décès).
- **Variables financières** : Provision Mathématique (PM), Taux Minimum Garanti (TMG) variant de 0% à 4,5%, et taux de chargement.

Le processus de mise en œuvre suit une architecture en trois étapes distinctes :

1. **Phase de pré-traitement** : Standardisation (z-score) des variables continues et application du *dithering* pour les méthodes de densité afin de fluidifier l'espace des données discrétisées.
2. **Génération des Model Points** : Application de chaque algorithme cible pour obtenir des portefeuilles compressés. Pour chaque méthode, nous avons fait varier les hyperparamètres afin de générer une famille de portefeuilles allant de 25 à 5 000 lignes.
3. **Projection ALM Massive** : Chaque portefeuille compressé est injecté dans le moteur de projection complet (projection sur 50 ans, scénario central Best Estimate) pour mesurer l'impact réel sur les flux.

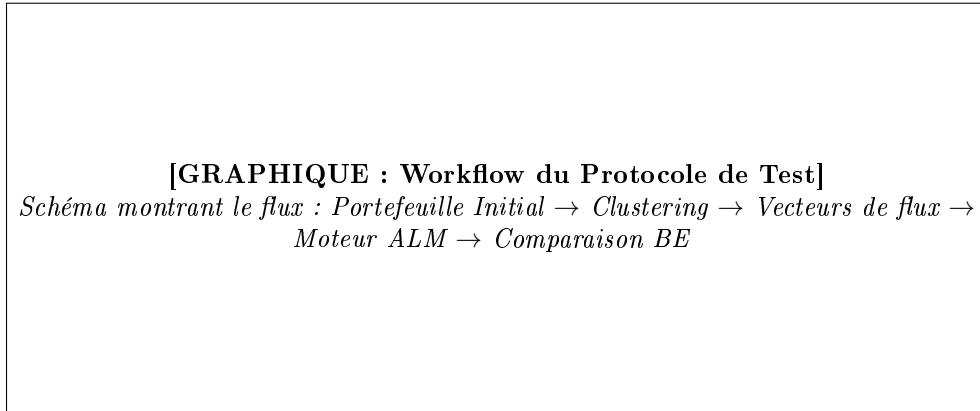


FIGURE 4.1 – Schéma de mise en œuvre du protocole de test comparatif

4.1.2 Définition des critères de sélection

Le choix final de la méthode repose sur un arbitrage multicritère, principalement axé sur la recherche d'un point optimal sur la « Courbe de Pareto » entre précision et taux de compression.

- **La fidélité sur le Best Estimate (BE)** : Mesurée par l'erreur relative $\Delta_{BE}\%$. Une erreur supérieure à 0,05% est considérée comme significative.

$$\Delta_{BE}\% = \frac{BE_{agrégé} - BE_{référence}}{BE_{référence}}$$

- **La préservation de la "Pureté Financière"** : Capacité de la méthode à ne pas diluer les taux garantis (TMG) au sein des groupes.
- **Le taux de compression** : On cherche à descendre en dessous de 1 000 Model Points pour garantir la fluidité des calculs stochastiques futurs.
- **Le temps de constitution (Overhead)** : Le coût de préparation des données doit rester marginal par rapport au gain de temps de projection.

4.2 Analyse Comparative et Choix de la Méthode Optimale

4.2.1 Synthèse des performances sur le passif seul

L'analyse massive réalisée (plus de 150 simulations individuelles) a permis de dresser une matrice de performance exhaustive permettant d'isoler le comportement de chaque algorithme face à la compression.

Méthode	Variante / Paramètres	Nb MP	Erreur BE %	Écart (M€)	Robustesse
Référence	Portefeuille 50k lignes	50 000	0,000 %	0,0	Absolue
Biais Zéro	Triplet (TMG, TFG, TAF)	1 105	0,006 %	0,8	Optimale
Biais Zéro	Compression massive	2 060	-0,005 %	-0,7	Excellent
Banding	Smart Fiscal (Anc 8 ans)	1 253	0,0018 %	0,2	Très stable
K-Means	Pondéré PM (n=1000)	999	0,0021 %	0,3	Constante
HDBSCAN	Selection : Leaf (Fin)	1 013	0,0026 %	0,3	Très sensible
Banding	Classique (Age 5, Anc 5)	483	0,0024 %	0,3	Stable
CART	Refined (Target PM/TMG)	999	-0,1081 %	-13,5	Biaisée
CART	Spread Focus (TMG Only)	26	0,1319 %	16,5	Grossière

TABLE 4.1 – Matrice comparative des performances d'agrégation sur le Best Estimate

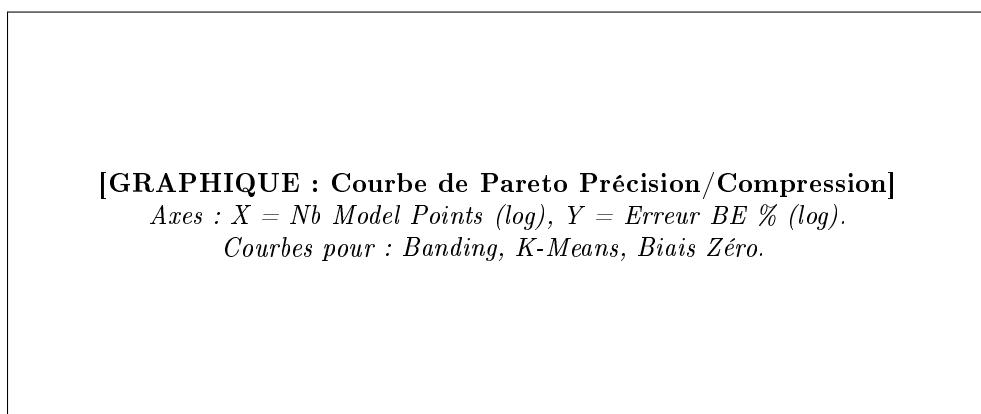


FIGURE 4.2 – Arbitrage Précision vs Nombre de Model Points par méthode

Plusieurs enseignements majeurs découlent de ces résultats :

1. **La neutralisation du biais par calibration** : La méthode « Biais Zéro » surpassé toutes les autres en termes de fidélité pure. En calibrant les probabilités de sortie sur les bases réelles à mi-période, l'agrégation devient quasiment transparente pour le calcul du Best Estimate.
2. **L'importance du triplet financier** : Les tests ont montré que le respect strict des clés (TMG, TFGSE, TAF) est indispensable. Une agrégation ignorant les frais de gestion (TFGSE) génère un biais résiduel de plus de 2%, quel que soit le protocole de calibration.

3. **L'efficacité du Banding Fiscal :** Le découpage métier autour de l'ancienneté de 8 ans reste une alternative très performante pour les méthodes déterministes.
4. **Le biais des approches CART :** Bien que très compressives, les méthodes par arbres de décision introduisent des ruptures artificielles dans la structure de revalorisation, nuisant à la précision globale.

4.2.2 Justification du choix de la méthode retenue

Au terme de cette analyse, la méthode **Calibration a posteriori (Biais Zéro)** est retenue pour la suite de ce mémoire. Elle offre le niveau de précision requis pour des analyses de sensibilité fines, garantissant que les variations de Best Estimate mesurées seront exclusivement dues aux chocs appliqués et non à un bruit de regroupement résiduel.

4.3 Analyse de Sensibilité des Indicateurs S2

Le but de cette section est de tester la robustesse de la méthode d'agrégation sélectionnée face à des variations de l'environnement ou du portefeuille.

4.3.1 Définition des Scénarios de Sensibilité

4.3.1.1 Création des portefeuilles de test via le générateur

4.3.1.2 Description des chocs sur les variables clés (âge, montant de la PM, etc.)

4.3.1.3 Scénario d'intégration d'un nouveau produit dans le portefeuille

4.3.2 Analyse de l'Impact de l'Agrégation sur la Mesure des Chocs

4.3.2.1 Comparaison des indicateurs S2 sur portefeuilles choqués granulaires et agrégés

4.3.2.2 Analyse de la fidélité de la méthode d'agrégation à retranscrire la sensibilité

4.4 Interprétation des Résultats et Validation de l'Approche

- 4.4.1 Validation de la performance de la chaîne de modélisation
- 4.4.2 Enseignements sur la sensibilité des portefeuilles aux modifications du passif

Chapitre 5

Conclusion

5.1 Résumé des résultats

- 5.1.1 Synthèse des principaux résultats obtenus
- 5.1.2 Impact des méthodes d'agrégation sur les portefeuilles de passifs

5.2 Perspectives d'amélioration

- 5.2.1 Axes d'amélioration pour les générateurs de portefeuilles de passifs
- 5.2.2 Évolutions possibles des méthodes d'agrégation et de modélisation ALM
- 5.2.3 Autres domaines d'application des générateurs de portefeuilles de passifs

5.3 Conclusion Générale et Perspectives

Ce mémoire, présenté ici dans sa version intermédiaire, dresse le bilan d'une première phase de recherche consacrée à la construction d'un cadre méthodologique et au développement des outils de modélisation. Les résultats quantitatifs finaux ne sont pas encore établis à ce stade, la priorité ayant été donnée à l'élaboration d'un socle technique robuste. Cette conclusion a donc pour double vocation de définir avec précision la feuille de route pour la finalisation des travaux et de présenter un bilan synthétique des compétences clés acquises chez Accenture, qui ont été déterminantes pour ce projet.

5.3.1 Perspectives et Finalisation des Travaux de Recherche

Le modèle ALM sous Python, désormais opérationnel, constitue la pierre angulaire de l'analyse à venir. Les prochaines étapes seront dédiées à son exploitation intensive afin de répondre à la problématique du mémoire. Les axes de travail prioritaires sont les suivants :

- **Analyse Comparative et Critique des Méthodes d'Agrégation** : Une investigation approfondie de plusieurs méthodes d'agrégation de portefeuilles sera menée. Au-delà d'une simple application mécanique, il s'agira de disséquer les fondements théoriques de chaque approche, leurs hypothèses et leur incidence sur la mesure de la diversification des risques. Une attention particulière sera portée à la **robustesse** des méthodes, c'est-à-dire leur capacité à produire des indicateurs agrégés stables et convergents, y compris sous des conditions de marché dégradées ou lors de variations des hypothèses de modélisation.
- **Enrichissement du Générateur de Portefeuilles de Passifs** : La crédibilité des résultats repose sur le réalisme des simulations. Le générateur de portefeuilles sera donc affiné pour intégrer des structures de dépendance plus sophistiquées entre les variables clés (âge des assurés, montant des provisions mathématiques, comportement de rachat, etc.). Cette évolution permettra de simuler des portefeuilles plus fidèles à la réalité d'un assureur et de tester la résilience de nos conclusions dans des scénarios adverses.
- **Conduite d'une Campagne d'Analyses de Sensibilité** : Une fois les méthodologies d'agrégation validées, une série de tests de sensibilité sera déployée. En appliquant les chocs réglementaires prévus par Solvabilité 2 (choc taux, actions, mortalité, rachat), nous vérifierons la stabilité des agrégations et quantifierons leur impact sur le Solvency Capital Requirement (SCR). L'objectif final est d'offrir une vision claire de la manière dont l'agrégation modifie et stabilise le profil de risque d'un portefeuille.

La feuille de route pour la finalisation du mémoire est clairement établie et s'inscrit dans la continuité logique des travaux déjà réalisés. Les parties non encore écrites ont un plan clair et détaillé qui montre la robustesse de l'approche. La maîtrise des outils et des concepts acquise jusqu'à présent me permet d'aborder cette dernière phase avec une grande confiance. Une planification rigoureuse et une exécution méthodique assureront l'achèvement des analyses et la rédaction finale dans les délais impartis.

5.3.2 Bilan de l'expérience professionnelle chez Accenture : un levier pour le mémoire

Mon année en alternance chez Accenture a été une expérience fondatrice, m'offrant un cadre idéal pour développer les compétences techniques indispensables à la réalisation de ce mémoire.

5.3.2.1 Développement et industrialisation d'un modèle ALM en Python

Au cœur de mes missions se trouvait le développement d'un modèle ALM (Asset-Liability Management) entièrement programmé en Python. Sous la supervision d'un Manager, j'ai pu assimiler les meilleures pratiques de l'ingénierie logicielle appliquée à l'actuariat. Cela inclut la gestion de projet via **Git**, un système de contrôle de version essentiel pour le travail collaboratif et le suivi rigoureux des modifications du code. J'ai également mis en place des batteries de tests unitaires, notamment via des interfaces avec Excel, pour garantir la fiabilité et la cohérence des résultats du modèle à chaque itération.

Ce socle technique m'a permis de mener à bien des projets complexes, comme la transformation du modèle ALM développé en un modèle de projection de passifs de retraite. Cette adaptation a exigé une refonte profonde de la logique de modélisation du passif, consolidant ainsi ma compréhension des mécanismes actuariels. J'ai par ailleurs conçu et développé un générateur de portefeuilles de passifs, un outil stratégique pour Accenture afin de réaliser des tests de performance et de résistance sur le modèle.

5.3.2.2 Développement d'un modèle de passifs sociaux sous Python

Dans le cadre de mon alternance chez Accenture, j'ai eu l'opportunité de recréer un logiciel calculant des passifs sociaux en Python. Les passifs sociaux sont des engagements financiers liés aux prestations sociales, tels que les retraites ou les indemnités de départ à la retraite que les entreprises doivent provisionner. Ce projet m'a permis de mettre en pratique mes compétences en programmation tout en approfondissant ma compréhension des enjeux actuels liés à la gestion des ressources humaines et à la prévoyance sociale.

Ce logiciel a été conçu pour être modulable et facilement intégrable dans les systèmes existants des clients d'Accenture, facilitant ainsi son adoption. J'ai également veillé à ce qu'il soit accompagné d'une documentation complète, permettant aux utilisateurs de comprendre rapidement son fonctionnement et de l'utiliser efficacement pour des futures missions sur ce sujet.

5.3.2.3 Maîtrise d'un écosystème technique moderne

Cette immersion professionnelle m'a permis de maîtriser un environnement de développement avancé. J'ai travaillé quotidiennement sous **Linux**, un système d'exploitation open-source prisé pour sa stabilité et sa sécurité, qui est le standard dans de nombreux environnements de calcul scientifique et de serveurs. J'ai également acquis une compétence sur **Docker**, une technologie de conteneurisation. Un conteneur est une sorte de "boîte" logicielle qui embarque une application et toutes ses dépendances, garantissant ainsi qu'elle s'exécute de manière identique et fiable, quel que soit l'ordinateur ou le serveur sur lequel elle est déployée.

5.3.2.4 Expertise en gestion de données et en calcul distribué (Cloud)

La manipulation de grands volumes de données est au cœur des problématiques actuarielles modernes. J'ai pu renforcer mes compétences en utilisant des bibliothèques Python de haute performance comme **Polars** pour le traitement de données et **Xlwings** pour automatiser les interactions entre Python et Excel. Mon apprentissage le plus significatif fut la prise en main de **Snowflake**, une plateforme de données hébergée dans le cloud. Snowflake permet non seulement de stocker et de requêter d'énormes jeux de données via le langage SQL, mais aussi d'exploiter sa puissance de calcul massive pour exécuter des scripts Python, comme le modèle ALM, directement sur la plateforme, optimisant ainsi drastiquement les temps de traitement et les besoins en ressources.

5.3.2.5 Collaboration, autonomie et transmission des savoirs

Au-delà des aspects purement techniques, j'ai appris à évoluer au sein d'une équipe projet agile, en participant à des réunions de suivi quotidiennes. J'ai également eu la responsabilité de former plusieurs nouveaux collaborateurs, à la fois sur le fonctionnement technique du modèle ALM et sur les bonnes pratiques de développement à adopter. Cette expérience de transmission a été extrêmement formatrice, renforçant mes capacités de communication et de vulgarisation de concepts complexes.

Annexes

Chapitre 2

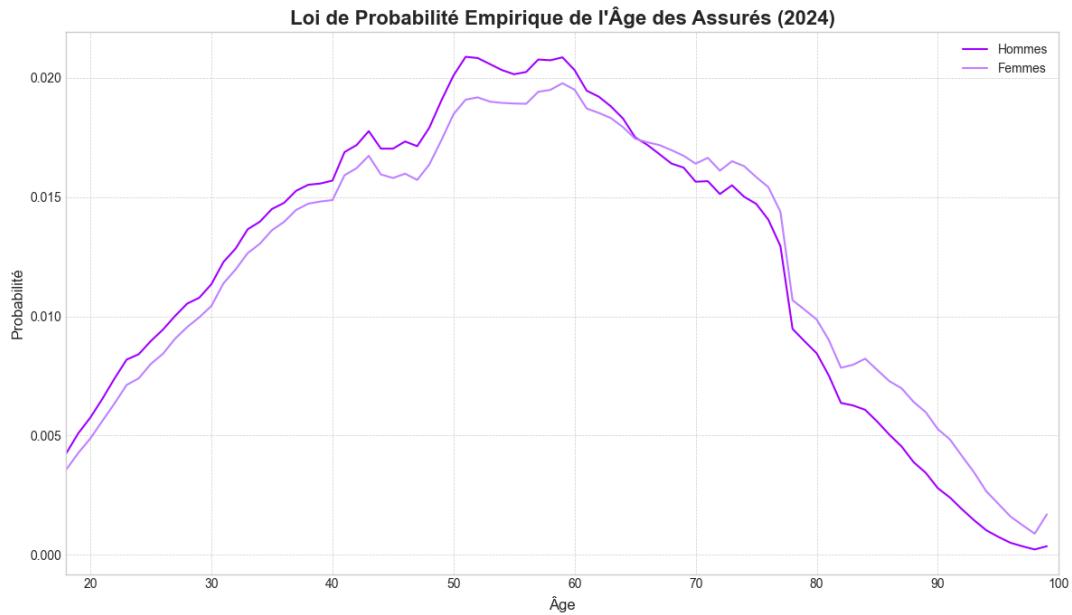


FIGURE 5.1 – Distribution empirique de l'âge des assurés (Hommes et Femmes).

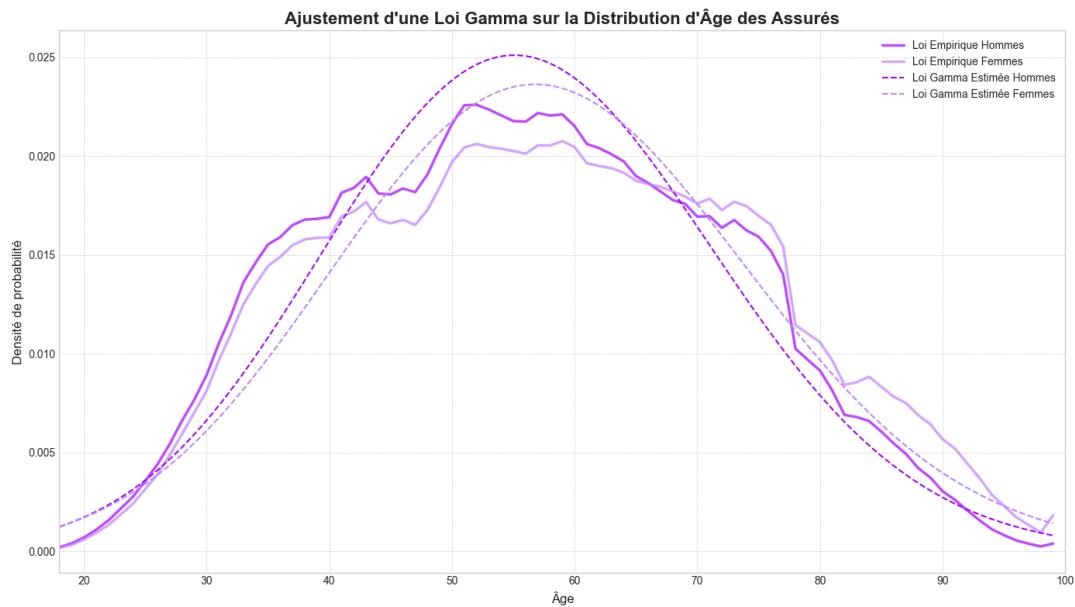


FIGURE 5.2 – Ajustement de la loi Gamma sur la distribution empirique.

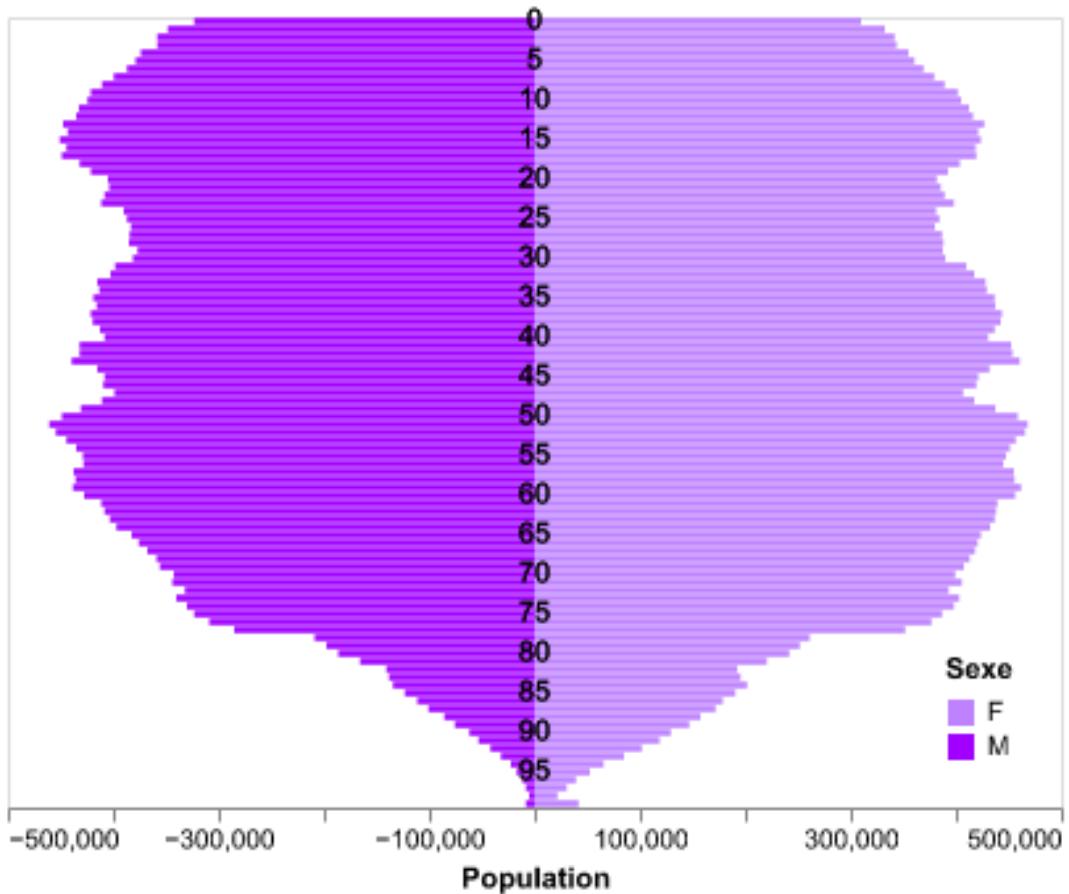


FIGURE 5.3 – Pyramide des âges de la population française en 2024 [7].

TABLE 5.1 – Historique du taux technique maximal et du TMG utilisé dans le modèle (1993–2024)

Année	TT_t^{\max} (taux technique max)	TMG_t (taux min. garanti retenu)
1993	0,045	0,045
1994	0,045	0,045
1995	0,035	0,035
1996	0,035	0,035
1997	0,0339	0,0325
1998	0,0272	0,025
1999	0,0265	0,025
2000	0,0329	0,0325
2001	0,0301	0,030
2002	0,0292	0,0275
2003	0,0247	0,0225
2004	0,0243	0,0225
2005	0,0207	0,020
2006	0,0229	0,0225
2007	0,0260	0,025
2008	0,0261	0,025
2009	0,0219	0,020
2010	0,0189	0,0175
2011	0,0213	0,020
2012	0,0153	0,015
2013	0,0141	0,0125
2014	0,0099	0,0075
2015	0,0051	0,0000
2016	0,0027	0,0000
2017	0,0045	0,0000
2018	0,0048	0,0000
2019	0,0009	0,0000
2020	0,0000	0,0000
2021	0,0003	0,0000
2022	0,0090	0,0000
2023	0,0186	0,0000
2024	0,0180	0,0000

Bibliographie

- [1] FRANCE ASSUREURS. *L'assurance vie en 2024*. (23 septembre 2025). Consulté le 28 Octobre 2025, sur <https://www.franceassureurs.fr/nos-chiffres-cles/assurance-vie/lassurance-vie-en-2024/>
- [2] ACPR. *Notice sur les modèles internes*. (2023). Consulté le 17 Février 2026, sur https://acpr.banque-france.fr/system/files/import/acpr/media/2023/12/01/20231201_notice_mi_s2.pdf
- [3] DORNAIKA Fadi, HAMAD Denis, CONSTANTIN Joseph, TRONG HOANG Vinh. *Advances in Data Clustering*. Lieu d'édition : Springer, 2024.
- [4] GOFFARD Pierre-Olivier, GUERRAULT Xavier. « Is it optimal to group policyholders by age, gender, and seniority for BEL computations based on model points? ». *European Actuarial Journal*, volume 5, 17 Avril 2015, p. 165-180.
- [5] BEN FADHEL Amine. « Accélération de l'évaluation de la solvabilité prospective d'un assureur épargne ». *Mémoire pour l'Institut des Actuaires* , 2022.
- [6] INSEE. *Taux de détention des produits de patrimoine selon l'âge de la personne de référence du ménage en 2021*. (2021). Consulté le 18 Septembre 2025, sur https://www.insee.fr/fr/outil-interactif/5367857/details/30_RPC/34_PAT/34A_Figure1
- [7] INSEE. *Pyramide des âges de la population française en 2024*. (2024). Consulté le 1er Septembre 2025, sur <https://www.insee.fr/fr/outil-interactif/5014911/pyramide.htm>
- [8] INSEE. *Enquête Histoire de vie et Patrimoine 2020-2021*. 2021. Consulté le 24 Janvier 2026, sur <https://www.insee.fr/fr/statistiques/7941419?sommaire=7941491#tableau-figure1>
- [9] IFOP. *Enquête sur les 60 ans de l'indépendance financière des femmes : chiffres clés sur la répartition hommes-femmes en assurance vie*. (16 Juillet 2025). Consulté le 16 Novembre 2025, sur <https://www.ifop.com/article/enquete-sur-les-60-ans-de-lindependance-financiere-des-femmes/>
- [10] IFOP. *Baromètre - les femmes et l'argent : chiffres clés sur la répartition hommes-femmes sur les fonds EURO et UC en assurance vie*. (Janvier 2024). Consulté le 16 Novembre 2025, sur <https://www.ifop.com/wp-content/uploads/2024/03/barometre-vives-2024ok-1.pdf>
- [11] geeksforgeeks. *K-Means vs K-Means++ Clustering Algorithm*. Consulté le 1 Février 2026, sur <https://www.geeksforgeeks.org/machine-learning/k-means-vs-k-means-clustering-algorithm/>
- [12] Daily Dose of Data Science. *HDBSCAN vs. DBSCAN*. Consulté le 1 Février 2026, sur <https://blog.dailydoseofds.com/p/hdbscan-vs-dbscan>

- [13] HDBSCAN Developers. *How HDBSCAN Works*. Consulté le 3 Février 2026, sur https://hdbSCAN.readthedocs.io/en/latest/how_hdbscan_works.html
- [14] ACPR. *Le taux technique en assurance vie (Code des assurances)*. Consulté le 14 Février 2026, sur https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/201606_as66_le_taux_technique_en_assurance_vie.pdf
- [15] ACPR. *Assurance vie en France et environnement de taux bas*. Consulté le 14 Février 2026, sur https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/201705-as78-taux-bas-version-3_0.pdf
- [16] ACPR. *Revalorisation 2024 des contrats d'assurance-vie et de capitalisation*. Consulté le 14 Février 2026, sur <https://acpr.banque-france.fr/fr/publications-et-statistiques/publications/ndeg-175-revalorisation-2024-des-contrats-dassurance-vie-et-de-capitalisation>
- [17] ACPR. *Le marché de l'assurance-vie en 2024*. Consulté le 14 Février 2026, sur <https://acpr.banque-france.fr/fr/publications-et-statistiques/publications/ndeg-170-le-marche-de-lassurance-vie-en-2024>
- [18] Good Value for Money. *Taux Minimum Garanti (TMG)*. Consulté le 14 Février 2026, sur <https://www.goodvalueformoney.eu/documentation/taux-minimum-garanti-tag>
- [19] France Assureurs. *L'assurance vie en unités de compte en 2024*. Consulté le 14 Février 2026, sur <https://www.franceassureurs.fr/nos-chiffres-cles/assurance-vie/lassurance-vie-en-unites-de-compte-en-2024/>