三角公式汇总

一、任意角的三角函数

在角α的终边上任取一点$P(x,y)$，记：$r=\sqrt{x^2+y^2}$，

正弦：$\sin\alpha=\frac{y}{r}$　　余弦：$\cos\alpha=\frac{x}{r}$

正切：$\tan\alpha=\frac{y}{x}$　　余切：$\cot\alpha=\frac{x}{y}$

正割：$\sec\alpha=\frac{r}{x}$　　余割：$\csc\alpha=\frac{r}{y}$

注：我们还可以用单位圆中的有向线段表示任意角的三角函数：如图，与单位圆有关的有向线段MP、OM、AT分别叫做角α的正弦线、余弦线、正切线。

二、同角三角函数的基本关系式

倒数关系：$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$，$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$，$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$。

商数关系：$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$。

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$。

三、诱导公式

⑴$\alpha+2k\pi\ (k\in Z)$、$-\alpha$、$\pi+\alpha$、$\pi-\alpha$、$2\pi-\alpha$的三角函数值，等于α的同名函数值，前面加上一个把α看成锐角时原函数值的符号。（口诀：函数名不变，符号看象限）

⑵$\frac{\pi}{2}+\alpha$、$\frac{\pi}{2}-\alpha$、$\frac{3\pi}{2}+\alpha$、$\frac{3\pi}{2}-\alpha$的三角函数值，等于α的异名函数值，前面加上一个把α看成锐角时原函数值的符号。（口诀：函数名改变，符号看象限）

四、和角公式和差角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

五、二倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\cdots(*)$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

二倍角的余弦公式$(*)$有以下常用变形：（规律：降幂扩角，升幂缩角）

$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha \qquad 1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$$

$$1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 \qquad 1-\sin 2\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$$

$$\boxed{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\quad \sin^2\alpha=\frac{1+\sin 2\alpha}{2},\quad \tan\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\text{。}}$$

六、万能公式（可以理解为二倍角公式的另一种形式）

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha},\quad \cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha},\quad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\text{。}$$

万能公式告诉我们，单角的三角函数都可以用半角的正切来表示。

七、和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\qquad\cdots(1)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\quad\cdots(2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\quad\cdots(3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\quad\cdots(4)$$

了解和差化积公式的推导，有助于我们理解并掌握好公式：

$$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

两式相加可得公式(1)，两式相减可得公式(2)。

$$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

两式相加可得公式(3)，两式相减可得公式(4)。

八、积化和差公式

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

我们可以把积化和差公式看成是和差化积公式的逆应用。

九、辅助角公式

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$（）

其中：角φ的终边所在的象限与点(a,b)所在的象限相同，

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}，\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}，\quad \tan\varphi=\frac{b}{a}。$$

十、正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$为$\Delta ABC$外接圆半径）

十一、余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$

十二、三角形的面积公式

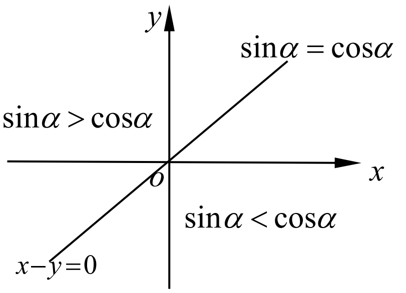
$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times$底$\times$高

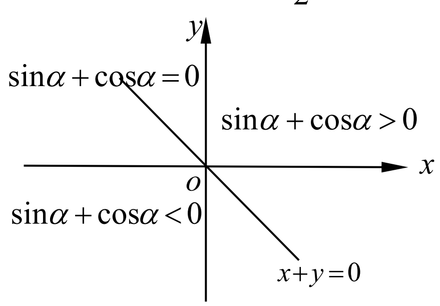
$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$（两边一夹角）

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{abc}{4R}$（$R$为$\Delta ABC$外接圆半径）

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{a+b+c}{2}\cdot r$（$r$为$\Delta ABC$内切圆半径）

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$…海仑公式（其中$p=\dfrac{a+b+c}{2}$）





十三诱导公式

公式一： 设α为任意角，终边相同的角的同一三角函数的值相等 k 是整数	sin（2kπ+α）=sinα cos（2kπ+α）=cosα tan（2kπ+α）=tanα cot（2kπ+α）=cotα sec（2kπ+α）=secα csc（2kπ+α）=cscα
公式二： 设α为任意角，π+α的三角函数值与α的三角函数值之间的关系	sin（π+α）=－sinα cos（π+α）=－cosα tan（π+α）=tanα cot（π+α）=cotα sec(π+α)=-secα csc(π+α)=-cscα
公式三： 任意角α与 -α的三角函数值之间的关系	sin（－α）=－sinα cos（－α）=cosα tan（－α）=－tanα cot（－α）=－cotα sec(-α)=secα csc(-α)=-cscα
公式四： 利用公式二和公式三可以得到π-α与α的三角函数值之间的关系	sin（π－α）=sinα cos（π－α）=-cosα tan（π－α）=－tanα cot（π－α）=－cotα sec(π-α)=-secα csc(π-α)=cscα
公式五： 利用公式四和三角函数的奇偶性可以得到α-π与α的三角函数值之间的关系	sin（α-π）=－sinα cos（α-π）=－cosα tan（α-π）=tanα cot（α-π）=cotα sec(α-π)=-secα csc(α-π)=－cscα
公式六： 利用公式一和公式三可以得到 2π-α与α的三角函数值之间的关系	sin（2π－α）=－sinα cos（2π－α）=cosα tan（2π－α）=－tanα cot（2π－α）=－cotα

	sec(2π-α)=secα csc(2π-α)=-cscα
公式七： π/2±α及 3π/2±α与α的三角函数值之间的关系	sin（π/2+α）=cosα cos（π/2+α）=－sinα tan（π/2+α）=－cotα cot（π/2+α）=－tanα sec(π/2+α)=-cscα csc(π/2+α)=secα sin（π/2－α）=cosα cos（π/2－α）=sinα tan（π/2－α）=cotα cot（π/2－α）=tanα sec(π/2-α)=cscα csc(π/2-α)=secα sin（3π/2+α）=－cosα cos（3π/2+α）=sinα tan（3π/2+α）=－cotα cot（3π/2+α）=－tanα sec(3π/2+α)=cscα csc(3π/2+α)=-secα sin（3π/2－α）=－cosα cos（3π/2－α）=－sinα tan（3π/2－α）=cotα cot（3π/2－α）=tanα sec(3π/2-α)=-cscα csc(3π/2-α)=-secα

下面的公式再记一次，大家：

四、和角公式和差角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

五、二倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\cdots(*)$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

二倍角的余弦公式$(*)$有以下常用变形：（规律：降幂扩角，升幂缩角）

$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$　　$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$

$1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$　　$1-\sin 2\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

$$\boxed{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\quad \sin^2\alpha=\frac{1+\sin 2\alpha}{2},\quad \tan\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$ 。