10^{a} Lista de Cálculo Diferencial e Integral I - 2021-1

1. Encontrar $\Delta y - dy$ das funções dadas

a. $y = 3x^2 - x + 1$;

b. $y = 2\sqrt{x}$;

c. $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$.

2. Encontrar Δy e dy para os valores dados

a. $y = \frac{1}{2x^2}$; $\Delta x = 0,001$; $x = 1$;

b. $y = 5x^2 - 6x$; $\Delta x = 0,02$; $x = 0$;

c. $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$; $\Delta x = 0,1$; $x = -1$.

3. Utilize diferenciais para calcular um valor aproximado das seguintes raízes:

a. (a) $\sqrt{50}$;

b. (b) $\sqrt[3]{63,5}$;

c. $\sqrt[4]{13}$.

4. Suponha que o raio r e a área $A = \pi r^2$ de um círculo s ejam funções derivavéis de t. Escreva uma equação que relacione $\dfrac{dA}{dt}$ e $\dfrac{dr}{dt}$.

5. Suponha que o raio r e a área da superfície $S = 4\pi r^2$ de uma esfera sejam funções deriváveis de t. Escreva uma equação que relacione $\dfrac{dS}{dt}$ e $\dfrac{dr}{dt}$.

6. O raio r e a altura h de um cilindro circular estão relacionados com o volume V do cilindro pela fórmula $V = \pi r^2 h$.

a. Como $\dfrac{dV}{dt}$ está relacionada a $\dfrac{dh}{dt}$ se r é constante?

b. Como $\dfrac{dV}{dt}$ está relacionada a $\dfrac{dr}{dt}$ se h é constante?

c. Como $\dfrac{dV}{dt}$ está relacionada a $\dfrac{dr}{dt}$ e $\dfrac{dh}{dt}$ se nem r e h são constantes?

7. Sejam x, y e z são os comprimentos dos lados de uma caixa retangular, o comprimento comum das diagonais da caixa é $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

a. Considerando-se que x, y e z são funçõe deriváveis de t, como $\dfrac{ds}{dt}$ está relacionada a $\dfrac{dy}{dt}$ e $\dfrac{dx}{dt}$?

b. Como $\frac{ds}{dt}$ está relacionada a $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$ se x é constante?

c. Como $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$ estão relacionadas se s é constante?

8. Quando um prato circular de metal é aquecido em um forno, seu raio aumenta a uma taxa de $0,01\ cm/min$. A que taxa a área do prato aumenta quando seu raio é de $50\ cm$?

9. O comprimento l de um retângulo diminui a uma taxa de $2\ cm/s$, enquanto a largura w aumenta a uma taxa de $2\ cm/s$. Encontre as taxas de mudança para

a. a área

b. o perímetro

c. os comprimentos das diagonais do retângulo quando $l = 12\ cm$ e $w = 5\ cm$. Quais medidas estão aumentando e quais estão diminuindo?

10. Uma escada com 13 pés está em pé e apoiada em uma parede, quando sua base começa a escorregar, afastando-se da parede. No momento em que a base está a 12 pés da casa, ela escorrega a uma taxa de 5 pés/s.

a. A que taxa o topo da escada escorrega para baixo nesse momento?

b. A que taxa a área do triângulo, formado pela escada, parede e pelo solo, varia?

c. A que taxa o ângulo θ, formado pela escada e pelo solo, varia?

11. A areia cai de uma esteira transpostadora a uma taxa de $10\ m^3/min$ no topo de um monte cônico. A altura do monte sempre tem três oitavos do diâmetro da base. A que taxa variará

a. a altura

b. o raio quando o monte tiver $4\ m$ de altura? Responda em cm/min.

12. Um homem está puxando um barco para o cais à taxa de $5\ m/min$ por meio de uma corda presa ao barco ao nível da água. Se as mãos do homem estão a $1,6\ m$ sobre o nível da água, com que velocidade o barco se aproxima do cais quando a extensão da corda para fora é de $2\ m$?

13. Uma lâmpada colocada em um poste está a $5\ m$ de altura. Se um homem de $2\ m$ de altura caminha afastando-se da lâmpada à taxa de $5\ m/s$, com que velocidade se alonga sua sombra?

14. Na questão anterior, a que taxa se move a extremidade da sombra do homem?

15. Uma cidade é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado por

$$f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}$$

a. Qual a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 4$?

b. Qual a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 8$?

c. Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no quinto dia?

16. Esboce o gráfico da função $f(x) = |2x - 1| - 3$. Verifique que $f(-1) = f(2) = 0$ e que f' não se anula. Explique porque isto não contradiz o Teorema de Rolle.

17. Dados f, a e b, determine o valor de c que verifica o Teorema do Valor Médio.

1. $f(x) = x^2,\ a = 1,\ b = 2$;
2. $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x,\ a = 1,\ b = 4$;
3. $f(x) = x^3,\ a = 1,\ b = 3$;
4. $f(x) = x^{2/3},\ a = 1,\ b = 8$.

18. Dados

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = -1, \quad b = 1,$$

verifique que não existe c tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Explique porque isto não contradiz o Teorema do Valor Médio.

19. Encontre d tal que $(d, f(d))$ é um ponto de inflexão de $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$.

20. Determine c se o gráfico de $f(x) = cx^2 + \dfrac{1}{x^2}$ tem um ponto de inflexão em $(1, f(1))$.

21. Determine a e b de forma que o gráfico de $f(x) = ax^3 + bx^2$ passa pelo ponto $(-1, 1)$ e tem um ponto de inflexão quando $x = \frac{1}{3}$.

22. Determine A e B tal que a curva $y = Ax^{1/2} + Bx^{-1/2}$ tem um ponto de inflexão em $(1, 4)$.

23. Faça o estudo: domínio, zeros, interseções com os eixos coordenados, paridade, assíntotas, intervalos de crescimento/decrescimento, valores extremos relativos, concavidade e pontos de inflexão, etc das seguintes funções:

a. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

b. $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

c. $h(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

d. $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x-3}$

e. $f(x) = \dfrac{2x^2+x-3}{3x-9}$

f. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$

g. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x < 1 \\ x^3 - x^2 + 7x - 2, x \geq 1 \end{cases}$

h. $y = 3x + (x+2)^{3/5}$

24. Encontre a área do maior retângulo que tem 200 cm. de perímetro.

25. Encontre a área do maior triângulo isósceles que tem 18cm. de perímetro.

26. Um fabricante de caixas de estanho deseja fazer uso de pedaços de estanho com dimensões de 8 cm. por 15 cm, cortando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Encontre o comprimento do lado do quadrado que será cortado de cada pedaço de estanho para se obter uma caixa aberta de maior volume possível.

27. Um campo retangular vai ser fechado por uma cerca e depois dividido ao meio por outra cerca. Se a cerca que passa pela metade custa $R\$10,00$ por metro e a outra cerca custa $R\$25,00$ por metro, encontre as dimensões do campo de maior área possível que pode ser fechado com um custo de $R\$4.800,00$

28. Encontre as dimensões do cilindro circular reto de maior superfície lateral que pode ser inscrito numa esfera de raio igual a 6 cm.

29. Encontre as dimensões do cilindro circular reto de maior volume possível que pode ser inscrito numa esfera de raio igual a 6 cm.

30. Corta-se um pedaço de arame de 2 m. de comprimento em duas partes. Uma parte será dobrada em forma de círculo e a outra em uma forma quadrada. Como deverá ser cortado o arame para que

a. a soma das áreas das duas figuras seja tão pequena quanto possível $\frac{8}{\pi+4}$

b. a soma das áreas das duas figuras seja tão grande quanto possível

31. Uma tenda cônica possui 3000 metros cúbicos. Ache as dimensões se a quantidade de lona é mínima(despreze a base).

32. Uma folha de papel dispõe de 18 centímetros quadrados para impressão de um jornal. As margens superior e inferior estão a 2 cm. da extremidade correspondente do papel. Cada margem lateral deve ser de 1 cm. Quais as dimensões da folha de papel para que sua área total seja mínima?