13ª Lista de Cálculo Diferencial e Integral I - 2021-1

1. Use propriedades para encontrar os valores entre os quais estão compreendidas as seguintes integrais definidas.

a. $\int_2^4 (x+5)\,dx$

b. $\int_0^4 \frac{dx}{1+x^2}$

c. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

2. Se $\int_{-2}^{3} [f(x)+3]\,dx = 6$, calcule $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$

3. Use as propriedades para determinar se cada desigualdade é verdadeira ou falsa

a. $\int_0^1 x dx \leq \int_0^1 dx$

b. $\int_1^2 x^2 dx < \int_1^2 x dx$

c. $0 \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

d. $\int_0^1 x^5 dx \leq \int_0^1 x^6 dx$

4. Em cada caso, calcule $\frac{dy}{dx}$

a. $y = \int_0^x (t^2+1)dt$

b. $y = \int_1^x (w^3 - 2w + 1)dw$

c. $y = \int_{-1}^x \frac{ds}{1+s^2}$

d. $y = \int_0^x \frac{ds}{1+s} + \int_2^x \frac{ds}{1+s}$

e. $y = \int_1^{3x} (5t^3+1)^7 dt$

f. $y = \int_1^{5x+1} \frac{dt}{9+t^2}$

g. $y = \int_{1}^{x-1} \sqrt{t^2 - 1}dt$

h. $y = \int_{x^2+1}^{2} \sqrt[3]{t - 1}dt$

i. $y = \int_{x}^{3x^2+2} \sqrt[4]{t^4 + 17}dt$

j. $y = \int_{x^3}^{x-x^2} \sqrt{t^3 + 1}dt$

5. Use o teorema fundamental do cálculo para calcular cada integral

$$\begin{array}{ll}
(\mathbf{1}) \displaystyle\int_{2}^{3} (3x+4)dx & (\mathbf{2}) \displaystyle\int_{-3}^{-1} (4-8x+3x^2)dx \\
(\mathbf{3}) \displaystyle\int_{1}^{5} (x^3-3x^2+1)dx & (\mathbf{4}) \displaystyle\int_{1}^{3} (x-1)(x^2+x+1)dx \\
(\mathbf{5}) \displaystyle\int_{0}^{1} (x^2+2)^2dx & (\mathbf{6}) \displaystyle\int_{1}^{5} \frac{x^4-16}{x^2+4}dx \\
(\mathbf{7}) \displaystyle\int_{1}^{32} \frac{1+\sqrt[5]{t^2}}{\sqrt[3]{t}}dx & (\mathbf{8}) \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2dx}{(x^3+1)^5} \\
(\mathbf{9}) \displaystyle\int_{0}^{3} |3-x^2|dx & (\mathbf{10}) \displaystyle\int_{-1}^{3} \sqrt[3]{2(|x|-x)}dx \\
(\mathbf{11}) \displaystyle\int_{0}^{3} y|2-y|dy &
\end{array}$$

6. Em cada caso, calcule a área da região limitada pelo gráfico de cada função e as retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$. Esboce o gráfico da função.

a. $f(x) = 1 - x^2$, $a = -1$, $b = 1$

b. $g(x) = x^3 - 2$, $a = 0$, $b = 1$

c. $h(x) = x^3 + 1$, $a = 0$, $b2$

d. $T(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$, $b = \pi$

e. $l(u) = \sqrt{u + 2}$, $a = 0$, $b = 2$

f. $f(t) = t^2 - 9$, $a = -3$, $b = 3$

g. $m(x) = x^n$, $a = 0$, $b = 1$

7. Em cada caso, Esboce o gráfico da função f, calcule a área da região limitada pelo gráfico de cada função e as retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, e determine $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

a. $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & \text{se } 1 < x \leq 4 \\ 10 - 2x, & \text{se } 4 < x \leq 7 \\ 2x - 18, & \text{se } 7 < x \leq 12 \end{cases}$, $a = -2$ e $b = 12$

b. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x - 7, & \text{se } -7 \leq x \leq -6 \\ -x^2 - 4x + 5, & \text{se } -6 < x \leq 0 \\ |x - 5|, & \text{se } 0 < x \leq 8 \end{cases}$, $a = -7$ e $b = 8$

8. Resolva os seguintes problemas:

a. $\forall x \in \mathbb{R}$ e f contínua, $F(x) = \displaystyle\int_x^0 f(t)(t^2 - t)\, dt$, determine os intervalos de crescimento e decrescimento de F.

b. Dadas as funções $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = -ax^2 + 16a + 32$, determine $a > 0$ para que a área limitada pelos gráficos de f e g seja de 180 unidades quadradas.

c. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt = x^2 + \ln(x^3) + 5$. Calcule $f(4)$

d. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $g(e) = 5$ e $\displaystyle\int_1^e g'(x)\, dx = 6$. Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{g(x)}{x}\, dx$

e. Encontre o polinômio $p(x)$ de terceiro grau tal que: $p(0) = p(-2) = 0$, $p(1) = 15$ e $\displaystyle\int_{-2}^0 p(x)\, dx = \frac{4}{3}$.

f. Encontre k para que $\displaystyle\int_{-2}^6 f(x)\, dx = 1$ se $f(x) = \begin{cases} x, & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} - kx, & 0 < x \leq 4 \\ x - 4, & 4 < x \leq 6 \end{cases}$

9. Calcule o comprimento de arco das seguintes curvas:

a. $y = x,\ 0 \leq x \leq 1$

b. $y = \dfrac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}\ 0 \leq x \leq 2$

c. $y = \dfrac{1}{8}x^4 + \dfrac{1}{4x^2},\ 1 \leq x \leq 2$

d. $6xy = x^4 + 3,\ 1 \leq x \leq 2$

e. $y = 2x^2 + 5x,$ embaixo do eixo Ox

f. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{e^{2t}-1}\,dt,\ 0 \leq x \leq 1$

10. Calcule o volume dos seguintes sólidos de revolução

a. $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 3$ em torno do eixo Ox

b. $y = x^2 + 1$, $-1 \leq x \leq 1$ em torno do eixo Ox

c. $y = \dfrac{x^2}{4}$, $0 \leq x \leq 4$ em torno do eixo Ox

d. $x = y^3$, $0 \leq x \leq 8$ em torno do eixo Oy

e. $x = y$, $y = 2x$ e $y = 4$ em torno do eixo Oy

f. $y = 2 - x^2 + 4x$, $0 \leq x \leq 4$ em torno da reta $y = 2$

g. $y = x^3$, $1 \leq y \leq 8$ em torno do eixo Oy

h. $y = \sqrt{x}$, $0 \leq y \leq 2$ em torno da reta $x = 4$

i. $\begin{cases} xy = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$ em torno do eixo Oy

j. $\begin{cases} y^3 = x \\ y = x^2 \end{cases}$ em torno do eixo Oy