

Appunti di Fondamenti di elettronica

Giacomo Simonetto

Primo semestre 2025-26

Sommario

Appunti del corso di Fondamenti di elettronica della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

Indice

1 Introduzione	4
1.1 Definizioni fondamentali	4
1.2 Settori dell'elettronica	4
1.3 Richiamo di teoria dei circuiti	5
1.4 Reti in regime transitorio	7
2 Semiconduttori	9
2.1 Classificazione e proprietà elettriche dei semiconduttori	9
2.2 Drogaggio dei semiconduttori	10
2.3 Corrente elettrica e conducibilità nei semiconduttori	12
2.4 Semiconduttori in equilibrio	13
3 Giunzione PN e diodi	15
3.1 Giunzione pn all'equilibrio	15
3.2 Giunzione pn polarizzata	18
3.3 Giunzione pn polarizzata vista come diodo	19
3.4 Applicazioni speciali dei diodi	20
4 Condensatore MOS o CMOS	22
4.1 Struttura e funzionamento	22
4.2 CMOS con substrato di tipo p	22
4.3 Analisi del p-CMOS in condizioni di svuotamento/inversione	23
4.4 CMOS con substrato di tipo n e differenze rispetto al p-CMOS	24
5 Transistor MOSFET	25
5.1 Struttura generale e classificazione dei MOSFET	25
5.2 Struttura di un NMOSFET e vincoli sui potenziali	26
5.3 Aree di lavoro di un NMOSFET	27
5.4 Curve caratteristiche di corrente-tensione di un NMOSFET	29
5.5 Modello a canale corto di un NMOSFET	30
5.6 Struttura di un PMOSFET e vincoli sui potenziali	31
5.7 Aree di lavoro di un PMOSFET	32
5.8 Curve caratteristiche di corrente-tensione di un PMOSFET	32
5.9 Modello a canale corto di un PMOSFET	33
5.10 Simbologia e rappresentazione circuitale dei MOSFET	34
5.11 Struttura reale del MOSFET	34
5.12 Effetto Body e variazione della tensione di soglia	35
5.13 Corrente di sottosoglia	35
5.14 Capacità parassite dei MOSFET	36
6 Circuiti con i MOSFET	37
6.1 MOSFET in serie a una resistenza	37
6.2 MOSFET connesso a diodo	38
6.3 MOSFET come generatore di corrente	39
6.4 MOSFET usato come interruttore	41
6.5 Scarica di un condensatore con NMOS	41
6.6 Carica di un condensatore con PMOS	43
6.7 Scarica di un condensatore con un PMOS	45
6.8 Carica di un condensatore con un NMOS	47
6.9 Confronto dei transitori per carica e scarica con NMOS e PMOS	49
6.10 Resistenza equivalente del MOSFET come interruttore	50
6.11 Reti di MOSFET e resistenza equivalente complessiva	51

7 Breve cenno ai segnali digitali	52
7.1 Segnali binari logici ed elettrici	52
7.2 Circuiti e porte logiche	52
7.3 Parametri dinamici dei circuiti logici	53
8 Invertitore CMOS	54
8.1 Schema circuitale	54
8.2 Caratteristica di trasferimento ingresso-uscita	55
8.3 Soglia di commutazione logica	56
8.4 Tolleranza al rumore	56
8.5 Invertitore ideale	57
8.6 Tempo di ritardo	58
8.7 Consumo statico	60
8.8 Consumo dinamico	60
8.9 Oscillatore ad anello	61
8.10 Buffer CMOS	62
9 Logica statica complementare	64
9.1 Reti duali	64
9.2 Implementazione di porte logiche elementari	65
9.3 Funzioni invertenti e porte logiche non invertenti	66
9.4 Tempi di ritardo	66
9.5 Problema dei nodi interni	68
9.6 Consumo di potenza	69

1 Introduzione

1.1 Definizioni fondamentali

- **elettronica:** studia e realizza sistemi elettronici;
- **sistema elettronico:** è un insieme di componenti elettronici (sensori, circuiti e attuatori) che raccolgono informazioni dal mondo reale attraverso sensori, le elaborano attraverso circuiti elettronici e prendono decisioni o comandano azioni con degli attuatori;
- **segnaile:** supporto fisico di natura qualunque (elettrica, acustica, ottica) a cui si associa un'informazione allo scopo di poterla trasferire da una sorgente ad un utilizzatore, può essere digitale (ampiezza e tempo discreti) o analogico (ampiezza e tempo continui);
- **sensore:** dispositivo che converte un segnale esterno (come temperatura, pressione, luce, suono) in una grandezza elettrica (come corrente o tensione);
- **circuito elettronico:** rete di componenti elettrici passivi (R, L, C) e attivi (diodi, transistor) che elaborano segnali elettrici (tensione e corrente). In base al tipo di segnale elaborato si distingue in:
 - **circuito analogico:** elabora segnali analogici;
 - **circuito digitale:** elabora segnali digitali;
 - **circuito misto:** opera in entrambi i domini del segnale.

Siccome i segnali provenienti dal mondo reale sono sempre analogici, in generale non esiste un sistema completamente digitale. Ogni sistema digitale, infatti, comprende un ADC (Analog-to-Digital Converter) in ingresso e un DAC (Digital-to-Analog Converter) in uscita.

In base alla realizzazione fisica, un circuito elettronico si distingue in:

- **circuito a elementi discreti:** realizzato con componenti costruiti separatamente che poi vengono montati su un supporto (breadboard, PCB) e collegati tra loro tramite fili o piste conduttrive;
- **circuito integrato (IC):** tutti i componenti sono miniaturizzati e vengono montati su un unico chip di silicio (es. microchip).

Un sistema elettronico completo è formato da circuiti integrati e componenti discreti montati in una scheda in cui sono realizzate le interconnessioni metalliche tra i terminali dei componenti

1.2 Settori dell'elettronica

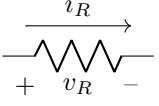
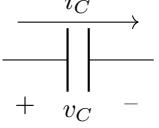
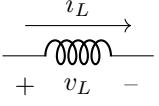
- **elettronica analogica:** progettazione e analisi di circuiti che elaborano segnali analogici;
- **elettronica digitale:** progettazione e analisi di circuiti che elaborano segnali digitali;
- **elettronica di consumo:** dispositivi elettronici per l'uso personale e domestico (computer, telefoni cellulari, televisori, elettrodomestici);
- **microelettronica:** progettazione e fabbricazione di componenti elettronici e circuiti integrati;
- **elettronica di potenza:** conversione e gestione dell'energia elettrica a diversi livelli (dal riscaldamento agli alimentatori per pc, cellulari o altri strumenti);
- **elettronica industriale:** sistemi elettronici per processi produttivi automatizzati;
- **telecomunicazioni:** sistemi per la trasmissione di dati (voce, video, file) attraverso dispositivi mobili o fissi;
- **biomedica:** sviluppo di apparecchiature elettroniche per la diagnostica, la cura e il monitoraggio della salute;
- **automotive:** sistemi per il controllo dei veicoli (dallo specchietto fino alla guida autonoma);
- **informatica:** dispositivi e sistemi elettronici per la gestione dei dati.

1.3 Richiamo di teoria dei circuiti

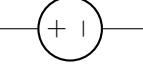
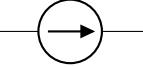
Leggi di Kirchoff

- **Legge delle correnti (LKC):** la somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti.
- **Legge delle tensioni (LKT):** la somma delle tensioni lungo una maglia è uguale a zero.

Elementi passivi

resistore (R):		$v_R(t) = R \cdot i_R(t)$	$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R}$
condensatore (C):		$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$	$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt$
induttore (L):		$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$	$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t) dt$

Elementi attivi

generatore ideale di tensione (GIT):		fornisce una tensione costante indipendentemente dalla corrente che lo attraversa
generatore ideale di corrente (GIC):		fornisce una corrente costante indipendentemente dalla tensione ai suoi capi
diodi e transistor:	...	componenti non lineari che verranno studiati successivamente.

Principi di analisi dei circuiti

- **partitore di tensione:** due resistori in serie dividono la tensione in ingresso V_{in} in due tensioni V_1 e V_2 direttamente proporzionali alle resistenze (inversamente proporzionali alle conduttanze):

$$V_1 = V_{in} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad V_2 = V_{in} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- **partitore di corrente:** due resistori in parallelo dividono la corrente in ingresso I_{in} in due correnti I_1 e I_2 inversamente proporzionali alle resistenze (direttamente proporzionali alle conduttanze):

$$I_1 = I_{in} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad I_2 = I_{in} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

- **sovraposizione degli effetti:** dato un sistema lineare con C_1 , C_2 possibili ingressi ed E_1 , E_2 effetti prodotti in uscita dai due ingressi, se il sistema viene perturbato con un ingresso dato dalla composizione lineare dei due ingressi $C = p_1C_1 + p_2C_2$ con p_1 e p_2 pesi dei due ingressi, l'effetto risultante in uscita sarà la composizione lineare dei due effetti $E = p_1E_1 + p_2E_2$.

In particolare in un circuito lineare con più generatori, la risposta (tensione o corrente) in un componente è uguale alla somma algebrica delle risposte dovute a ciascun generatore preso singolarmente, con gli altri generatori sostituiti dai loro rispettivi cortocircuiti (generatore di tensione ideale) o circuiti aperti (generatore di corrente ideale).

Potenziali, tensioni e nodi di riferimento

- Il potenziale elettrico è definito a meno di una costante, per cui anche la soluzione di una rete elettrica (data dai potenziali ai vari nodi) non è univoca, ma è definita a meno di una costante.
- Per rendere univoca la soluzione, si sceglie un nodo di riferimento a cui si assegna potenziale nullo e si calcolano i potenziali degli altri nodi rispetto a questo.
- Le tensioni, invece, sono sempre definite univocamente come differenze di potenziale tra due nodi.

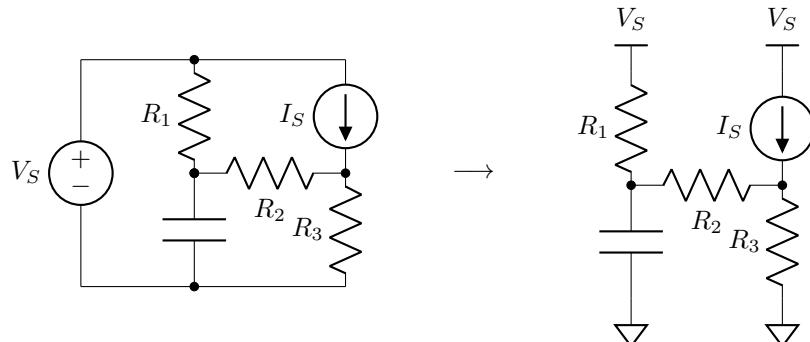
Esistono tre tipi di nodi di riferimento comunemente usati:

nodo con potenziale di riferimento:		nodo con il potenziale di riferimento scelto arbitrariamente a 0V
nodo di massa:		nodo collegato al telaio metallico del dispositivo elettronico
nodo di terra:		nodo collegato fisicamente alla terra tramite un conduttore metallico per motivi di sicurezza; di solito coincide con il nodo di massa; il potenziale di terra è molto stabile e indipendentemente dalle correnti che gli elettrodomestici prelevano o immettono in esso

Rappresentazione elettronica di un circuito

Un circuito elettronico può essere rappresentato in due modi equivalenti:

- **notazione a maglie:** rappresentazione del circuito in maglie e nodi
- **notazione elettronica:** scelto il nodo di riferimento, tutti i terminali collegati a tale nodo sono marcati con il simbolo del nodo di riferimento, inoltre i nodi di cui si conosce già il potenziale (ad esempio quelli collegati a generatori di tensione ideali) sono marcati con il loro valore di potenziale.



Potenza ed energia

Per definire la potenza e l'energia consumata da un componente, si definiscono:

- **convenzione degli utilizzatori:** la corrente entra nel terminale positivo della tensione, se la potenza o l'energia è positiva, il componente assorbe energia.
- **convenzione dei produttori:** la corrente entra nel terminale negativo della tensione, se la potenza o l'energia erogata è positiva, il componente fornisce energia.

Si definiscono quindi:

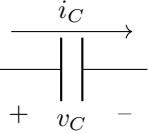
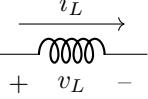
- **potenza istantanea:** $p(t) = v(t) \cdot i(t)$ misurata in Watt [W] = [J/sec]
- **energia:** $E = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot i(t) dt$ misurata in Joule [J] = [W · sec]

1.4 Reti in regime transitorio

Introduzione

- una rete si dice in regime transitorio quando le variabili elettriche (tensione e corrente) variano nel tempo passando da uno stato iniziale a uno stato finale di equilibrio
- un esempio di reti in regime transitorio sono i circuiti in cui sono presenti componenti reattivi (condensatori e induttori) e interruttori che modificano la configurazione del circuito
- il transitorio è l'intervallo di tempo che impiegano le variabili elettriche per passare dallo stato iniziale allo stato finale di equilibrio

Componenti reattivi

componente	schema	in regime stazionario	in regime transitorio
condensatore:		circuito aperto $i_C = 0$	$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$
induttore (L):		cortocircuito $v_L = 0$	$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$

Carica di un condensatore

- condizioni iniziali ($t < 0$): interruttore inizialmente aperto $\rightarrow v_C(0) = 0, i_C(0) = 0$
- nel transitorio ($t \geq 0$): $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}, i_R = \frac{v_R(t)}{R}, v_A = v_R(t) + v_C(t), i_R(t) = i_C(t)$
- dalla legge delle correnti si ottiene un'equazione differenziale del primo ordine:

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{v_A - v_C(t)}{R} \quad \rightarrow \quad \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{v_C(t)}{RC} + \frac{v_A}{RC} \quad \rightarrow \quad v_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + B$$

- si sostituisce la soluzione generale nell'equazione differenziale e si impongono le condizioni iniziali:

$$-\frac{1}{RC}A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{1}{RC}A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{1}{RC}B + \frac{v_A}{RC} \quad \rightarrow \quad B = v_A$$

$$v_C(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A + B = 0 \quad \rightarrow \quad A = -B = -v_A$$

- si ottengono quindi le espressioni delle variabili elettriche durante il transitorio:

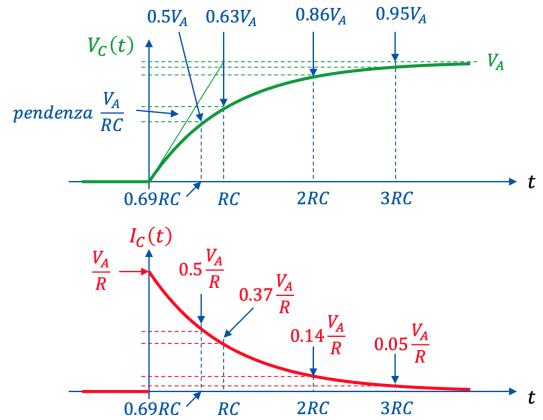
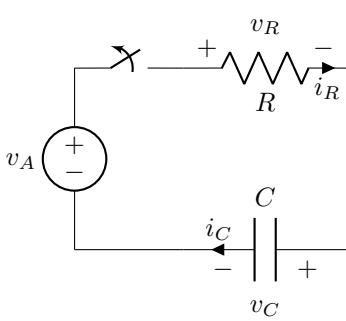
$$v_C(t) = v_A - v_A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad v_R(t) = v_A e^{-\frac{t}{RC}} \quad i_C(t) = i_R(t) = \frac{v_A}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

- l'istante in cui la tensione sul condensatore raggiunge metà del suo valore di regime è:

$$\frac{v_A}{2} = v_A - v_A \cdot e^{-\frac{t_{1/2}}{RC}} \quad \rightarrow \quad t_{1/2} = \ln(2) \cdot RC \approx 0.69RC$$

- analizzando il bilancio energetico del circuito si ottiene che metà dell'energia fornita dal generatore viene immagazzinata nel condensatore e metà viene dissipata dalla resistenza come calore:

$$E_{v_A} = \int_0^\infty v_A \cdot i(t) dt = C \cdot v_A^2 \quad E_R = \int_0^\infty R \cdot i^2(t) dt = \frac{C \cdot v_A^2}{2} \quad E_C = \int_0^\infty v_C(t) \cdot i(t) dt = \frac{C \cdot v_A^2}{2}$$



Scarica di un condensatore

- condizioni iniziali ($t < 0$): interruttore inizialmente aperto $\rightarrow v_C(0) = v_A, i_C(0) = 0$
- nel transitorio ($t \geq 0$): $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}, i_R = \frac{v_R(t)}{R}, v_R(t) = v_C(t), i_R(t) + i_C(t) = 0$
- dalla legge delle correnti si ottiene un'equazione differenziale del primo ordine:

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{v_R(t)}{R} \quad \rightarrow \quad \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{v_C(t)}{RC} \quad \rightarrow \quad v_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

- siccome l'equazione è omogenea, è sufficiente impostare le condizioni iniziali:

$$v_C(0) = v_A \quad \rightarrow \quad A = v_A$$

- si ottengono quindi le espressioni delle variabili elettriche durante il transitorio:

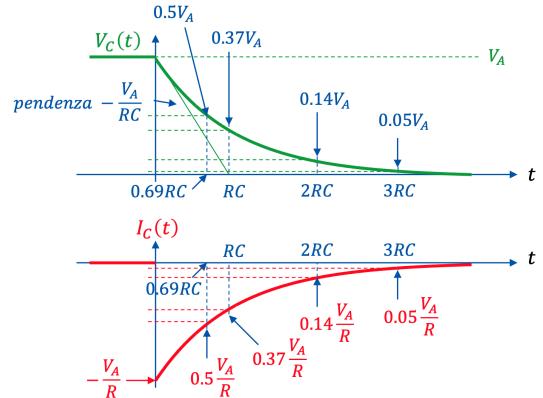
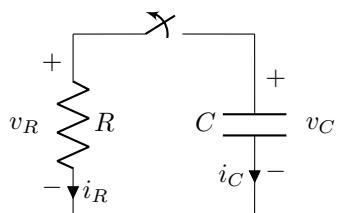
$$v_C(t) = v_R(t) = v_A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad i_C(t) = -\frac{v_A}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad i_R(t) = \frac{v_A}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

- l'istante in cui la tensione sul condensatore raggiunge metà del suo valore di regime è:

$$\frac{v_A}{2} = v_A - v_A \cdot e^{-\frac{t_{1/2}}{RC}} \quad \rightarrow \quad t_{1/2} = \ln(2) \cdot RC \approx 0.69RC$$

- analizzando il bilancio energetico del circuito si ottiene tutta l'energia immagazzinata nel condensatore viene dissipata dalla resistenza come calore e il condensatore rimane scarico alla fine del transitorio:

$$E_R = \int_0^\infty R \cdot i_R^2(t) dt = \frac{C \cdot v_A^2}{2} \quad E_C = \int_0^\infty v_C(t) \cdot i_C(t) dt = -\frac{C \cdot v_A^2}{2}$$



2 Semiconduttori

2.1 Classificazione e proprietà elettriche dei semiconduttori

Classificazione dei materiali

In base alla resistività elettrica ρ dei materiali, questi si dividono in:

- conduttori: $\rho < 10^{-3} \Omega \cdot \text{m}$
- semiconduttori: $10^{-3} \Omega \cdot \text{m} < \rho < 10^5 \Omega \cdot \text{m}$
- isolanti: $\rho > 10^5 \Omega \cdot \text{m}$

Classificazione chimica dei semiconduttori

I semiconduttori sono composti dagli elementi chimici di transizione, come il silicio (Si) e il germanio (Ge). In base alla loro composizione chimica si classificano in:

- **semiconduttori a elemento singolo:** se sono formati da un solo elemento chimico, come silicio (Si) e germanio (Ge)
- **semiconduttori composti:** se sono formati da più elementi, come arseniuro di gallio (GaAs), fosfuro di indio (InP), nitruro di gallio (GaN), tellururo di cadmio (CdTe), ...
- **semiconduttori intrinseci:** se sono puri, cioè non contengono impurità

Struttura del silicio

Il silicio (Si) ha 14 protoni, 14 neutroni e 14 elettroni. Possiede 4 elettroni nel guscio più esterno, detti elettroni di valenza. Tali elettroni sono quelli che partecipano alla formazione dei legami chimici e di conseguenza il silicio è in grado di formare 4 legami covalenti con altri atomi. In un cristallo di silicio, ogni atomo di silicio condivide i suoi 4 elettroni di valenza con 4 atomi di silicio vicini, formando così una struttura cristallina tetraedrica e periodica (simile a quella del carbonio).

Conducibilità elettrica nei metalli, negli isolanti e nei semiconduttori

Un materiale conduce corrente elettrica se possiede elettroni liberi in grado di muoversi all'interno del reticolo cristallino. La differenza tra metalli, isolanti e semiconduttori risiede nel comportamento degli elettroni di valenza:

- nei metalli, gli elettroni di legame sono condivisi tra più atomi e formano una nube di elettroni liberi che si muovono liberamente all'interno del reticolo cristallino, permettendo così la conduzione elettrica
- negli isolanti, gli elettroni di valenza sono fortemente vincolati ai loro atomi e non possono muoversi liberamente all'interno del reticolo cristallino, per cui sono scarsi conduttori di elettricità
- nei semiconduttori si hanno comportamenti simili agli isolanti, però i legami tra gli atomi sono più deboli e con poca energia è possibile rompere tali legami liberando gli elettroni di valenza, che possono così condurre corrente elettrica

L'energia necessaria a liberare un elettrone di valenza è detta **energy gap** (o band gap) e varia a seconda del materiale. Di seguito una tabella con i valori di energy gap per alcuni materiali comuni:

Materiale	Energy gap	Materiale	Energy gap
Silicio (Si)	1.124 eV	Germanio (Ge)	0.66 eV
Arseniuro di gallio (GaAs)	1.42 eV	Nitruro di gallio (GaN)	3.4 eV
Fosfuro di indio (InP)	1.35 eV	Seleniuro di cadmio (CdSe)	1.74 eV
Stagno (Sn)	0.082 eV	Rame (Cu)	“0” eV

Elettroni liberi e lacune

Quando un elettrone di valenza acquisisce sufficiente energia per liberarsi dal legame con il suo atomo, esso diventa un elettrone libero in grado di muoversi liberamente all'interno del reticolo cristallino. Il legame incompleto per la mancanza di un elettrone è detto lacuna (o hole in inglese) e si comporta come una carica positiva mobile all'interno del reticolo cristallino.

La lacuna può essere colmata da un elettrone di valenza di un atomo vicino, che a sua volta lascia una nuova lacuna. In questo modo, la lacuna sembra muoversi all'interno del reticolo cristallino, permettendo così la conduzione elettrica.

Gli elettroni liberi e le lacune sono detti portatori di carica negativa per gli elettroni, positiva per le lacune.

Concentrazione di elettroni e lacune in un semiconduttore intrinseco

In un semiconduttore intrinseco, la concentrazione di elettroni liberi n e la concentrazione di lacune p sono uguali e per definizione si indicano con n_i :

$$n = p = n_i \quad n \cdot p = n_i^2$$

La concentrazione di portatori di carica in un semiconduttore intrinseco dipende dalla temperatura T e dall'energy gap E_g del materiale, secondo la seguente formula, dove B è una costante dipendente dal materiale e k_B è la costante di Boltzmann.

$$n_i = BT^{3/2} e^{-E_g/2k_B T}$$

Si osserva che la concentrazione di portatori di carica aumenta all'aumentare della temperatura. Nel silicio a temperatura ambiente (300 K), la concentrazione di portatori di carica è circa $n_i = 1.45 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.

2.2 Drogaggio dei semiconduttori

Il drogaggio di un semiconduttore consiste nell'aggiunta di impurità al semiconduttore intrinseco per modificarne le proprietà elettriche, senza alterare la struttura del reticolo. Le impurità sono atomi di elementi chimici con un numero di elettroni di valenza diverso da quello del semiconduttore intrinseco che produrranno un eccesso di elettroni liberi o di lacune, migliorando la conducibilità elettrica del materiale.

Drogaggio di tipo n

Il drogaggio di tipo n si ottiene aggiungendo al silicio intrinseco atomi di un elemento chimico con 5 elettroni di valenza, come il fosforo (P), l'arsenico (As) o l'antimonio (Sb). Questi atomi, facendo 4 legami covalenti con gli atomi di silicio vicini, hanno un elettrone in più che non può essere utilizzato per il legame e diventa un elettrone libero. Per questo motivo sono detti donatori.

Drogaggio di tipo p

Il drogaggio di tipo p si ottiene aggiungendo al silicio intrinseco atomi di un elemento chimico con 3 elettroni di valenza, come il boro (B), l'alluminio (Al) o il gallio (Ga). Questi atomi fanno sempre 4 legami covalenti con gli atomi di silicio vicini, ma avendo un elettrone in meno, creano una lacuna. Per questo motivo sono detti accettori.

Equilibrio termodinamico e legge di azione di massa

In un semiconduttore si hanno due processi opposti che avvengono contemporaneamente:

- la **generazione** di coppie elettrone-lacuna, per cui si formano un elettrone libero e una lacuna dovuti alla rottura di un legame covalente; si indica con $G = f_1(T)$ il tasso di generazione, ovvero il numero di coppie elettrone-lacuna generate per unità di volume e di tempo ($\text{[cm}^{-3}\text{s}^{-1}\text{]}$), che dipende dalla temperatura T
- la **ricombinazione** di coppie elettrone-lacuna, in cui un elettrone libero si ricombina con una lacuna; si indica con $R = n \cdot p \cdot f_2(T)$ il tasso di ricombinazione, ovvero il numero di coppie elettrone-lacuna che si ricombinano per unità di volume e di tempo ($\text{[cm}^{-3}\text{s}^{-1}\text{]}$) e dipende dalle concentrazioni di elettroni n e di lacune p e dalla temperatura T

Quando il semiconduttore si trova a temperatura costante e senza sollecitazioni esterne, raggiunge uno stato di **equilibrio termodinamico** in cui:

- la concentrazione di elettroni n e la concentrazione di lacune p rimangono costanti nel tempo
- la velocità di generazione di coppie elettrone-lacuna è uguale alla velocità di ricombinazione

Imponendo l'equilibrio tra generazione e ricombinazione si ottiene la **legge di azione di massa**:

$$G = R \rightarrow f_1(T) = n \cdot p \cdot f_2(T) \rightarrow n \cdot p = \frac{f_1(T)}{f_2(T)} \rightarrow n_i^2 = n \cdot p$$

Concentrazione dei portatori in un semiconduttore drogato di tipo n

In un semiconduttore drogato esclusivamente di tipo n si hanno le seguenti particelle cariche:

- elettroni liberi n (intrinseci e donati dagli atomi di impurità)
- lacune p (intrinseche)
- ioni donatori N_D^+ (atomi di impurità che hanno ceduto un elettrone libero)

Siccome il drogaggio non altera la carica complessiva del semiconduttore, si ha:

$$\begin{aligned} -qn + qp + qN_D &= 0 \rightarrow n - p - N_D = 0 \rightarrow n - n_i^2/n - N_D = 0 \rightarrow n^2 - nN_D - n_i^2 = 0 \\ n &= \frac{N_D \pm \sqrt{N_D^2 + 4n_i^2}}{2} = N_D \frac{1 + \sqrt{1 + 4n_i^2/N_D^2}}{2} \xrightarrow{N_D \gg n_i} n \approx N_D, \quad p = \frac{n_i^2}{N_D} \end{aligned}$$

La concentrazione di elettroni n è maggiore della concentrazione di lacune p , per cui gli elettroni si definiscono **portatori maggioritari**, mentre le lacune si definiscono **portatori minoritari**.

Concentrazione dei portatori in un semiconduttore drogato di tipo p

In un semiconduttore drogato esclusivamente di tipo p si hanno le seguenti particelle cariche:

- elettroni liberi n (intrinseci)
- lacune p (intrinseche e dovute agli atomi di impurità)
- ioni accettori N_A^- (atomi di impurità che hanno accettato un elettrone libero)

Siccome il drogaggio non altera la carica complessiva del semiconduttore, si ha:

$$\begin{aligned} -qn + qp - qN_A &= 0 \rightarrow p - n - N_A = 0 \rightarrow p - n_i^2/p - N_A = 0 \rightarrow p^2 - pN_A - n_i^2 = 0 \\ p &= \frac{N_A \pm \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2}}{2} = N_A \frac{1 + \sqrt{1 + 4n_i^2/N_A^2}}{2} \xrightarrow{N_A \gg n_i} p \approx N_A, \quad n = \frac{n_i^2}{N_A} \end{aligned}$$

La concentrazione di lacune p è maggiore della concentrazione di elettroni n , per cui le lacune si definiscono **portatori maggioritari**, mentre gli elettroni si definiscono **portatori minoritari**.

Concentrazione dei portatori in un semiconduttore drogato sia di tipo n che di tipo p

In un semiconduttore drogato sia di tipo n che di tipo p si hanno le seguenti particelle cariche:

- elettroni liberi n (intrinseci e donati dagli atomi di impurità di tipo n)
- lacune p (intrinseche e dovute agli atomi di impurità di tipo p)
- ioni donatori N_D^+ (atomi di impurità di tipo n che hanno ceduto un elettrone libero)
- ioni accettori N_A^- (atomi di impurità di tipo p che hanno accettato un elettrone libero)

Siccome il drogaggio non altera la carica complessiva del semiconduttore, si ha:

$$-qn + qp + qN_D - qN_A = 0 \rightarrow n - p - N_D + N_A = 0$$

Se $N_D > N_A$ si comporta come un semiconduttore di tipo n con drogaggio netto $N'_D = N_D - N_A$:

$$n^2 - n(N_D - N_A) - n_i^2 = 0 \xrightarrow{N_D - N_A \gg n_i} n \approx N_D - N_A, \quad p = \frac{n_i^2}{N_D - N_A}$$

Viceversa se $N_A > N_D$ si comporta come un semiconduttore di tipo p con drogaggio netto $N'_A = N_A - N_D$:

$$p^2 - p(N_A - N_D) - n_i^2 = 0 \xrightarrow{N_A - N_D \gg n_i} p \approx N_A - N_D, \quad n = \frac{n_i^2}{N_A - N_D}$$

2.3 Corrente elettrica e conducibilità nei semiconduttori

Cause del moto dei portatori di carica

Lo spostamento dei portatori di carica nei semiconduttori è influenzata da tre meccanismi fisici:

- **temperatura:** l'aumento della temperatura provoca un aumento di energia interna (e di conseguenza di energia cinetica) dei portatori di carica, che si muovono più velocemente all'interno del reticolo cristallino
- **campo elettrico:** un campo elettrico esercita una forza sui portatori di carica che di conseguenza induce un movimento ordinato dei portatori di carica, essendo questi ultimi carichi elettricamente
- **gradiente di concentrazione:** una differenza di concentrazione di portatori di carica in due regioni del semiconduttore provoca un flusso di portatori dalla regione a concentrazione maggiore verso la regione a concentrazione minore, questo fenomeno è detto principio di diffusione

Moto dei portatori di carica dovuto alla sola energia cinetica / agitazione termica

In assenza di campo elettrico e di gradiente di concentrazione, i portatori di carica si muovono casualmente all'interno del reticolo cristallino a causa della loro energia cinetica. Questo moto casuale produce uno spostamento medio nullo, poiché i portatori di carica si muovono in tutte le direzioni con uguale probabilità.

Moto dei portatori di carica dovuto al campo elettrico

Quando si applica un campo elettrico E al semiconduttore, i portatori di carica subiscono una forza F_E dovuta al campo elettrico che induce un movimento ordinato dei portatori di carica:

- gli elettroni liberi, essendo cariche negative, si muovono in direzione opposta al campo elettrico
- le lacune, essendo cariche positive, si muovono in direzione del campo elettrico

Il moto ordinato dei portatori di carica dovuto al campo elettrico si sovrappone al moto casuale dovuto all'agitazione termica, producendo uno spostamento medio non nullo dei portatori di carica nella direzione del campo elettrico (per le lacune) o in direzione opposta al campo elettrico (per gli elettroni).

La velocità di deriva dei portatori dipende linearmente al campo elettrico (approssimando per campi non troppo elevati):

$$\begin{cases} v_n = -\mu_n \cdot E & \text{per gli elettroni} \rightarrow \text{moto opposto a } E \\ v_p = \mu_p \cdot E & \text{per le lacune} \rightarrow \text{moto concorde a } E \end{cases}$$

con v_n e v_p velocità di deriva degli elettroni e delle lacune ([cm/s]), E il campo elettrico ([V/cm]) e μ_n e μ_p le mobilità degli elettroni e delle lacune rispettivamente ([cm²/Vs]). In generale $\mu_n/\mu_p \approx 3$ siccome gli elettroni si muovono più facilmente delle lacune. Negli esercizi si assume $\mu_n = 1000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ e $\mu_p = 300 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ per il silicio intrinseco a temperatura ambiente.

Corrente di deriva

Analizzando la quantità di carica che attraversa una sezione di area A in un intervallo di tempo dt , si ottiene la corrente di deriva:

$$\begin{aligned} \#_{\text{elettroni}} &= n \cdot A \cdot dx \quad \rightarrow \quad I_n = \frac{-q \cdot \#_{\text{elettr.}}}{dt} = \frac{-q \cdot n \cdot A \cdot dx}{dt} = -q \cdot n \cdot A \cdot v_n \quad \rightarrow \quad j_n^{\text{drift}} = \frac{I_n}{A} = -q \cdot n \cdot v_n \\ \#_{\text{lacune}} &= p \cdot A \cdot dx \quad \rightarrow \quad I_p = \frac{q \cdot \#_{\text{lacune}}}{dt} = \frac{q \cdot p \cdot A \cdot dx}{dt} = q \cdot p \cdot A \cdot v_p \quad \rightarrow \quad j_p^{\text{drift}} = \frac{I_p}{A} = q \cdot p \cdot v_p \\ J_{\text{tot}}^{\text{drift}} &= J_n + J_p = -q \cdot n \cdot v_n + q \cdot p \cdot v_p = q(n\mu_n + p\mu_p)E \end{aligned}$$

Si nota quindi che la densità di corrente di deriva totale $J_{\text{drift,tot}}$ è proporzionale e concorde al campo elettrico E , per una costante di proporzionalità detta resistività elettrica ρ :

$$j_{\text{tot}}^{\text{drift}} = \frac{E}{\rho}, \quad \rho = \frac{1}{q(n\mu_n + p\mu_p)} \quad \begin{cases} j_{\text{tot}}^{\text{drift}} = qN_D\mu_n E, & \rho = 1/qN_D\mu_n \quad \text{se drogato di tipo n} \\ j_{\text{tot}}^{\text{drift}} = qN_A\mu_p E, & \rho = 1/qN_A\mu_p \quad \text{se drogato di tipo p} \end{cases}$$

Moto dei portatori di carica dovuto al gradiente di concentrazione

Quando si mettono in contatto due regioni di un semiconduttore con diversa concentrazione di portatori di carica, si crea un gradiente di concentrazione che induce un flusso di portatori dalla regione a concentrazione maggiore verso la regione a concentrazione minore. Questo fenomeno è detto principio di diffusione e si verifica in natura per tutte le particelle libere di muoversi.

Per analizzare il moto dei portatori di carica dovuto al gradiente di concentrazione, si definisce il flusso per unità di area in un intervallo di tempo dt , misurato in [$\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$]:

$$\phi(x) = -D \frac{dC(x)}{dx} \quad \phi(x)_n = -D_n \frac{dn(x)}{dx} \quad \phi(x)_p = -D_p \frac{dp(x)}{dx}$$

con $C(x)$ la concentrazione di particelle in funzione della posizione x ($[\text{cm}^{-3}]$) e D il coefficiente di diffusione ($[\text{cm}^2/\text{s}]$). Il segno “-” indica che il flusso avviene in direzione opposta al gradiente.

Corrente di diffusione

Analizzando la quantità di carica associata al flusso dei portatori si ottiene la corrente di diffusione:

$$j_n^{\text{diff}} = -q\phi(x)_n = +qD_n \frac{dn(x)}{dx} \quad j_p^{\text{diff}} = +q\phi(x)_p = -qD_p \frac{dp(x)}{dx} \quad [\text{C cm}^{-2}\text{s}^{-1}] = [\text{A cm}^{-2}]$$

Si osserva che il verso della densità di corrente di diffusione dipende dal tipo di portatore:

- la corrente degli elettroni ha lo stesso verso della concentrazione (cariche negative)
- la corrente delle lacune ha verso opposto alla concentrazione (cariche positive)

Corrente totale in un semiconduttore

La corrente totale in un semiconduttore è data dalla somma della corrente di deriva e della corrente di diffusione degli elettroni e delle lacune:

$$j_n = j_n^{\text{drift}} + j_n^{\text{diff}} = -qn\mu_n E + qD_n \frac{dn(x)}{dx} \quad j_p = j_p^{\text{drift}} + j_p^{\text{diff}} = qp\mu_p E - qD_p \frac{dp(x)}{dx}$$

Le costanti D_n , D_p , μ_n , μ_p sono correlate tra loro dalla relazione di Einstein:

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{D_p}{\mu_p} = \frac{k_B T}{q} = V_T$$

dove k_B è la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta, q la carica elementare e V_T è il potenziale termico. Si ottiene quindi la seguente espressione per la corrente totale:

$$j_n = q\mu_n \left(nE + V_T \frac{dn(x)}{dx} \right) \quad j_p = q\mu_p \left(pE - V_T \frac{dp(x)}{dx} \right)$$

2.4 Semiconduttori in equilibrio

Correnti in un semiconduttore in equilibrio

Quando un semiconduttore si trova in equilibrio termodinamico, la somma delle correnti di deriva e di diffusione per ciascun tipo di portatore di carica è nulla (che implica corrente totale nulla):

$$j_n = j_n^{\text{drift}} + j_n^{\text{diff}} = 0 \quad j_p = j_p^{\text{drift}} + j_p^{\text{diff}} = 0 \quad \Rightarrow \quad j_{\text{tot}} = j_n + j_p = 0$$

Gradienti di potenziale e concentrazione

Se in un semiconduttore in equilibrio si ha un gradiente di concentrazione di portatori di carica ($n_2 - n_1$ per gli elettroni o $p_2 - p_1$ per le lacune), si deve necessariamente avere un gradiente di potenziale $v_2 - v_1$ tale da bilanciare la corrente di diffusione con la corrente di deriva, in modo che la corrente totale sia nulla. Si ottiene quindi la seguente relazione:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{p_1}{p_2} = e^{\frac{(v_2 - v_1)}{V_T}}$$

Viceversa se in un semiconduttore in equilibrio si ha un gradiente di potenziale $v_2 - v_1$, si deve necessariamente avere un gradiente di concentrazione di portatori di carica tale da bilanciare la corrente di deriva con la corrente di diffusione:

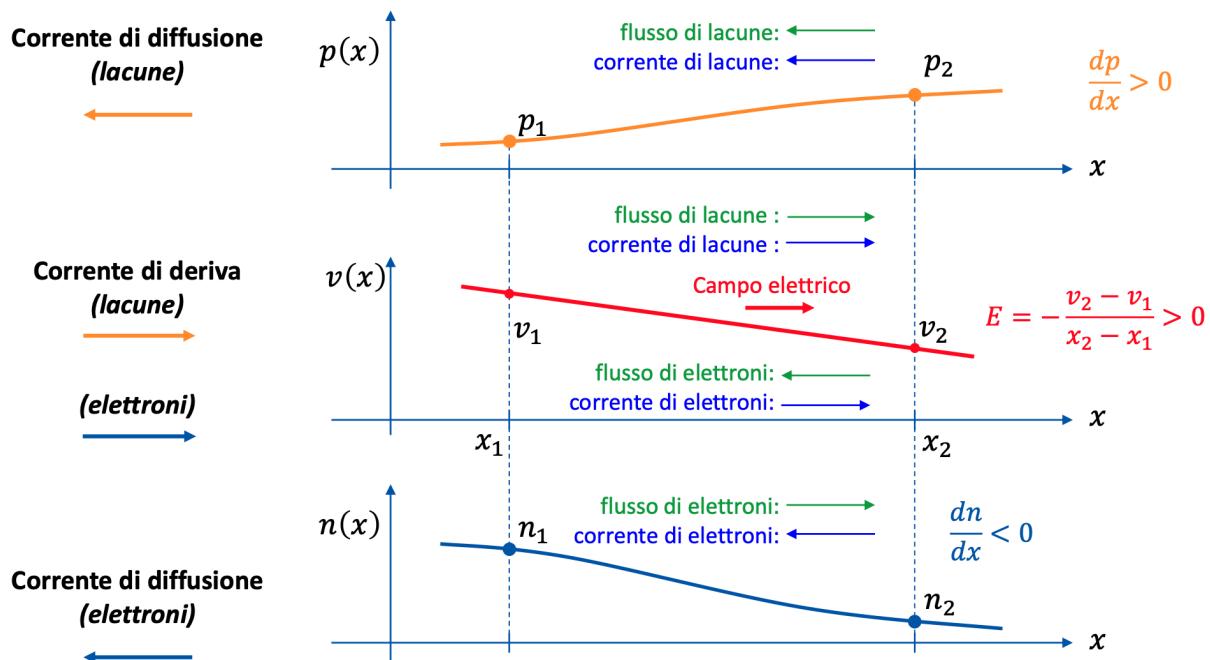
$$\frac{v_2 - v_1}{V_T} = \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

Le due relazioni precedenti sono equivalenti e si ottengono imponendo la condizione di equilibrio $j_n = 0$ e $j_p = 0$, utilizzando $E = -dV/dx$ e risolvendo le due equazioni differenziali ottenute.

Considerazioni sulle correnti, gradienti e potenziali in equilibrio

In un semiconduttore in equilibrio termodinamico in cui è presente un gradiente di concentrazione di portatori di carica e un gradiente di potenziale, valgono le seguenti considerazioni:

1. - j_n^{drift} ha verso opposto al gradiente di potenziale e concorde con il campo elettrico
 - j_p^{drift} ha verso opposto al gradiente di potenziale e concorde con il campo elettrico
 - i gradienti di potenziale per gli elettroni e per le lacune sono uguali tra loro, per cui j^{drift} ha complessivamente verso opposto al gradiente di potenziale e concorde con il campo elettrico
2. - j_n^{diff} ha verso concorde con il gradiente di concentrazione degli elettronni
 - j_p^{diff} ha verso opposto al gradiente di concentrazione delle lacune
 - i gradienti di concentrazione degli elettroni e delle lacune sono opposti tra loro (per la legge di azione di massa), per cui j^{diff} ha complessivamente verso concorde al gradiente di concentrazione degli elettroni e verso opposto al gradiente di concentrazione delle lacune
3. - siccome la corrente totale deve essere nulla, la corrente di deriva e la corrente di diffusione devono avere verso opposto da cui si conclude che:
 - il gradiente di potenziale e il gradiente di concentrazione degli elettroni hanno lo stesso verso
 - il gradiente di potenziale e il gradiente di concentrazione delle lacune hanno verso opposto



3 Giunzione PN e diodi

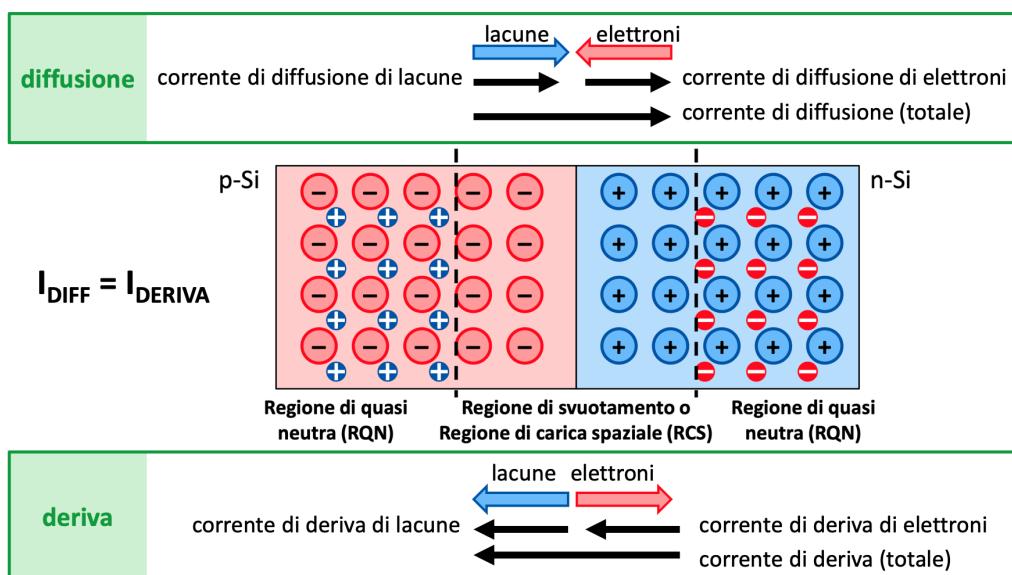
3.1 Giunzione pn all'equilibrio

Struttura base

Una giunzione pn si ottiene unendo due regioni di semiconduttore drogati in modo diverso: una regione di tipo p (con eccesso di lacune) e una regione di tipo n (con eccesso di elettroni).

Equilibrio tra diffusione e potenziale

- Quando le due regioni si uniscono, si forma un **gradiente di concentrazione** dei portatori di carica che induce uno spostamento di elettroni dalla regione n alla regione p e uno spostamento di lacune dalla regione p alla regione n; si forma in questo modo una corrente di diffusione dalla regione n alla regione p.
- Lo spostamento dei portatori induce la formazione di ioni fissi (ioni positivi nella regione n per assenza di elettroni e ioni negativi nella regione p per assenza di lacune) che generano un campo elettrico e un **potenziale di giunzione**; si forma in questo modo anche una corrente di deriva dalla regione p alla regione n che si oppone alla corrente di diffusione.
- All'equilibrio le due correnti si bilanciano, ma rimane una regione in prossimità della giunzione in cui non ci sono portatori di carica liberi e sono presenti solo ioni fissi dovuti all'assenza di portatori di carica.
- Si formano in questo modo tre regioni:
 1. **regione di svuotamento o regione di carica spaziale (RCS)**: zona in prossimità della giunzione priva di portatori di carica liberi (svuotamento) in cui sono presenti solo ioni fissi (carica spaziale);
 2. **regione quasi neutra (RQN) di tipo p**: zona lontana dalla giunzione che non risente della giunzione pn e mantiene le caratteristiche di un semiconduttore di tipo p;
 3. **regione quasi neutra (RQN) di tipo n**: zona lontana dalla giunzione che non risente della giunzione pn e mantiene le caratteristiche di un semiconduttore di tipo n.



Carica elettrica all'equilibrio

La carica elettrica nelle regioni quasi neutre è nulla, siccome non vengono alterate le concentrazioni di portatori di carica liberi (e il drogaggio non modifica la carica complessiva). Nella regione di svuotamento, invece, la carica elettrica è data dalla somma delle cariche degli ioni fissi e dipende dalle concentrazioni di drogaggio N_A e N_D :

$$\rho(x) = \begin{cases} -qN_A & -x_p \leq x \leq 0 \quad (\text{regione p}) \\ +qN_D & 0 < x \leq x_n \quad (\text{regione n}) \end{cases} \rightarrow Q_p = -qN_A x_p, \quad Q_n = +qN_D x_n$$

Siccome non ci sono stati scambi di cariche con l'esterno, la carica totale deve rimanere nulla:

$$Q_p + Q_n = 0 \Rightarrow N_A x_p = N_D x_n$$

Campo elettrico all'equilibrio

Il campo elettrico nella regione di carica spaziale si calcola:

$$\frac{dE(x)}{dx} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon} = \begin{cases} -qN_A/\epsilon & -x_p \leq x \leq 0 \\ +qN_D/\epsilon & 0 < x \leq x_n \end{cases} \Rightarrow E(x) = \begin{cases} -qN_A(x + x_p)/\epsilon & -x_p \leq x \leq 0 \\ +qN_D(x_n - x)/\epsilon & 0 < x \leq x_n \end{cases}$$

Il campo elettrico è nullo nelle regioni quasi neutre e raggiunge il valore massimo in $x = 0$:

$$E_{max} = E(0) = -\frac{qN_A x_p}{\epsilon} = -\frac{qN_D x_n}{\epsilon}$$

Potenziale elettrico all'equilibrio e potenziale di contatto

La differenza di potenziale elettrico si calcola risolvendo l'integrale del campo elettrico $dV(x)/dx = -E(x)$. In particolare si definiscono i potenziali nelle due regioni quasi neutre V_1 in $x = -x_p$ e V_2 in $x = x_n$ e si calcola il potenziale intrinseco di giunzione o potenziale di contatto $V_0 = V_2 - V_1$ tra le due estremità della regione di svuotamento ponendo $V_1 = 0$:

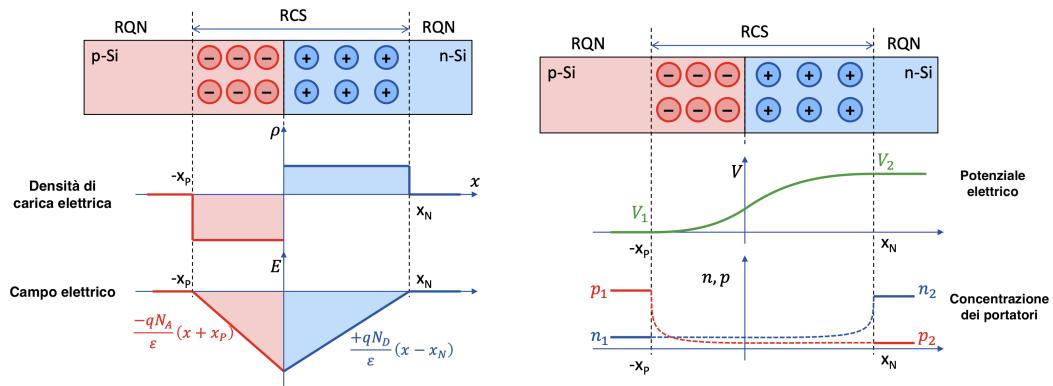
$$V_0 = \int_{-x_p}^{x_n} E(x) dx = \frac{-E(0) \cdot (x_n + x_p)}{2}$$

Potenziale di contatto e concentrazioni di drogaggio

Il potenziale di contatto può essere espresso in funzione delle concentrazioni di drogaggio N_A e N_D e delle concentrazioni intrinseche di portatori di carica n_i :

$$V_0 = V_2 - V_1 = V_T \ln \left(\frac{n_2}{n_1} \right) = V_T \ln \left(\frac{N_A N_D}{n_i^2} \right)$$

Schema riassuntivi per una giunzione pn in equilibrio



Aampiezza della regione di svuotamento all'equilibrio

L'ampiezza della regione di svuotamento $W = x_n + x_p$ dipende dalle concentrazioni dei drogaggi e dal potenziale di contatto:

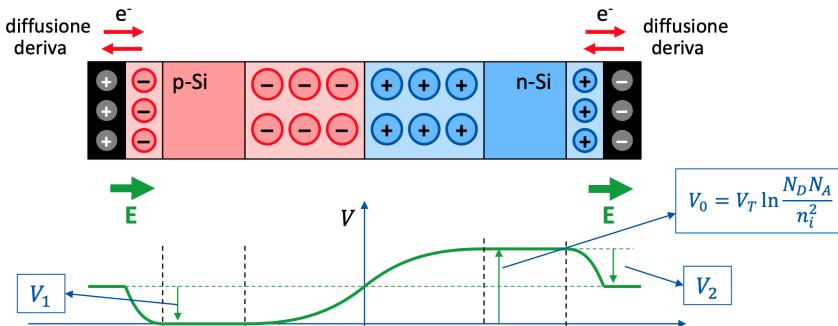
$$V_0 = \frac{-E(0) \cdot W}{2}, \quad x_n N_D = x_p N_A \quad \rightarrow \quad W = \frac{2V_0}{-E(0)} = \frac{2\varepsilon V_0}{q N_A x_p} = \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{q} \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right)}$$

$$x_n = W \frac{N_A}{N_A + N_D} \quad x_p = W \frac{N_D}{N_A + N_D}$$

Si osserva che l'ampiezza della regione di svuotamento è inversamente proporzionale alle concentrazioni di drogaggio, per cui aumentando i drogaggi diminuisce l'ampiezza della regione di svuotamento. Inoltre la regione di svuotamento ripartisce in maniera inversamente proporzionale ai drogaggi, ovvero si allarga maggiormente nella regione meno drogata.

Regione pn con elettrodi metallici

Una giunzione pn, per essere utilizzabile in un circuito, deve essere collegata alle due estremità a due elettrodi metallici. Gli elettrodi, essendo buoni conduttori, inducono una locale ridistribuzione dei portatori di carica (spostamento di lacune dalla regione p all'elettrodo e di elettroni dalla regione n all'elettrodo). Questo effetto ha le stesse dinamiche di una giunzione pn, in particolare si formano due regioni di carica spaziale che inducono una differenza di potenziale V_1 e V_2 tra gli elettrodi e la giunzione che controbilanciano il potenziale di contatto V_0 . All'equilibrio si ha $V_1 + V_0 + V_2 = 0$, per cui la differenza di potenziale tra gli elettrodi è nulla.



3.2 Giunzione pn polarizzata

Polarizzazione diretta e inversa

Si collega una giunzione pn ad un generatore di tensione V_A con polo positivo connesso alla regione p e polo negativo alla regione n. In questo modo si ha una polarizzazione della giunzione che può essere:

- **polarizzazione diretta** se $V_A > 0$
- **polarizzazione inversa** se $V_A < 0$

Inoltre si definisce il potenziale di riferimento come il potenziale della regione n ($V_n = 0V$). In questo modo la regione p ha un potenziale $V_p = -V_0$, uguale ed opposto al potenziale intrinseco o di contatto.

Giunzione in polarizzazione diretta

In polarizzazione diretta la tensione applicata $V_A > 0$ riduce la differenza di potenziale tra le due regioni quasi neutre, ottenendo: $V_p - V_n = -V_0 + V_A$. Di conseguenza il campo elettrico nella regione di svuotamento diminuisce in modulo e l'ampiezza della regione di svuotamento si riduce:

$$W(V_0 - V_A) = \sqrt{\frac{2\epsilon(V_0 - V_A)}{q} \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right)} < W(V_0)$$

Siccome il campo elettrico e il potenziale si riducono, la corrente di deriva diminuisce e prevale il fenomeno di diffusione che induce un flusso di elettroni dalla regione n alla regione p e di lacune dalla regione p alla regione n. Siccome la regione n è ricca di elettroni e la regione p è ricca di lacune, questo flusso è detto flusso dei portatori maggioritari. Si induce in questo modo una **elevata corrente di diffusione dei maggioritari** che attraversa la giunzione pn dalla regione p alla regione n.

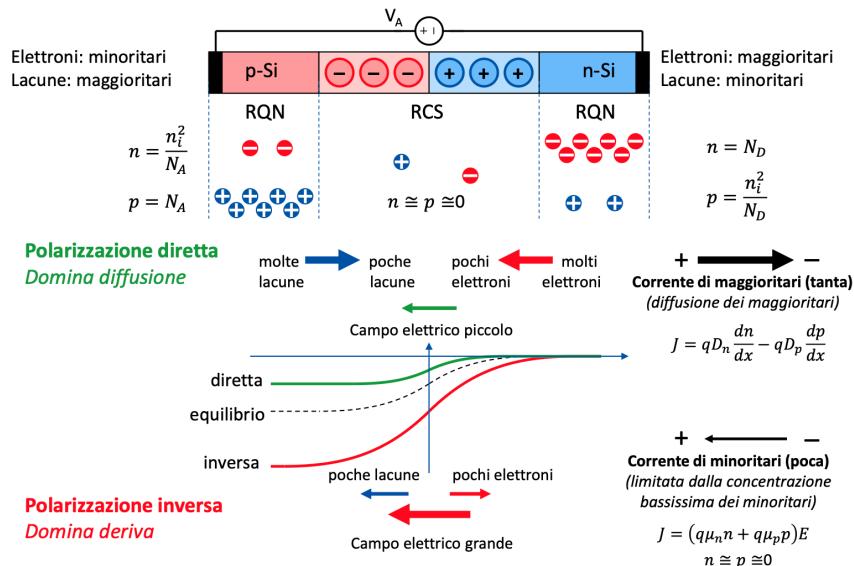
Giunzione in polarizzazione inversa

In polarizzazione inversa la tensione applicata $V_A < 0$ aumenta la differenza di potenziale tra le due regioni quasi neutre, ottenendo: $V_p - V_n = -V_0 - |V_A|$. Di conseguenza il campo elettrico nella regione di svuotamento aumenta in modulo e l'ampiezza della regione di svuotamento si allarga:

$$W(V_0 + |V_A|) = \sqrt{\frac{2\epsilon(V_0 + |V_A|)}{q} \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right)} > W(V_0)$$

Siccome il campo elettrico e il potenziale si aumentano, la corrente di deriva prevale sulla corrente di diffusione. Si ha in questo modo un flusso di elettroni dalla regione p alla regione n e di lacune dalla regione n alla regione p. Siccome la regione p è povera di elettroni e la regione n è povera di lacune, questo flusso è detto flusso dei portatori minoritari. Si induce in questo modo una **debole corrente di deriva dei minoritari** che attraversa la giunzione pn dalla regione n alla regione p.

$$J = (\mu_n n + \mu_p p) qE \quad \text{con } n \approx p \approx 0$$

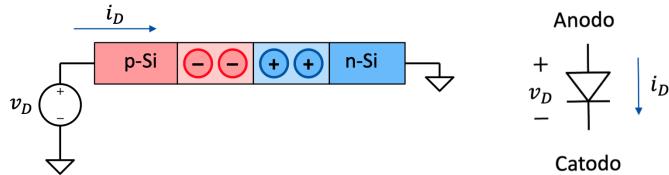


3.3 Giunzione pn polarizzata vista come diodo

Relazione tensione-corrente in un diodo

Si assegnano dei riferimenti ai due terminali della giunzione pn in modo da renderla schematizzabile e utilizzabile come diodo in un circuito elettrico:

- **anodo**: terminale positivo, collegato alla regione p
- **catodo**: terminale negativo, collegato alla regione n

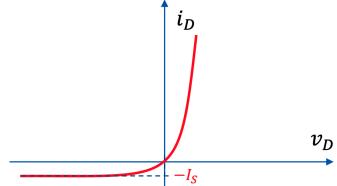


Definiti i riferimenti di tensione e corrente in un diodo (o giunzione pn polarizzata), si può definire la relazione tensione-corrente che lega la tensione applicata V_A alla corrente I che attraversa il diodo:

$$i_D = I_S \left(e^{\frac{v_D}{\eta V_T}} - 1 \right)$$

- i_D e v_D sono la corrente e la tensione nel diodo, con riferimento positivo dall'anodo al catodo;
- I_S è la corrente di saturazione inversa, ovvero la debole corrente che attraversa il diodo quando è collegato in polarizzazione inversa (tipicamente dell'ordine di qualche nA);
- η è il coefficiente di idealità del diodo, che dipende dal materiale e dal processo di fabbricazione (tipicamente compreso tra 1 e 2);
- $V_T = k_B T / q$ è il potenziale termico (del valore di circa 25mV a temperatura ambiente).

Analizzando la curva caratteristica del diodo si osserva che in polarizzazione diretta ($v_D > 0$) la corrente cresce esponenzialmente con la tensione applicata, mentre in polarizzazione inversa ($v_D < 0$) la corrente si stabilizza ad un valore negativo pari a $-I_S$.



Capacità della giunzione in polarizzazione inversa

Analizzando la carica elettrica presente nella regione di carica spaziale di una giunzione pn in polarizzazione inversa si osserva che:

$$Q_n = qN_D x_n = qN_D \frac{N_A}{N_A + N_D} W = \sqrt{2q\varepsilon(V_0 - V_A) \frac{N_A N_D}{N_A + N_D}} \quad Q_n = -Q_p$$

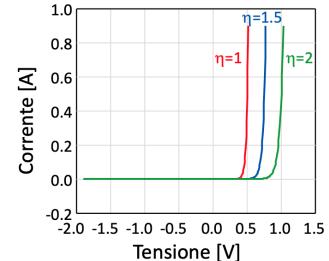
$$Q_p = qN_A x_p = qN_A \frac{N_D}{N_A + N_D} W = \sqrt{2q\varepsilon(V_0 - V_A) \frac{N_A N_D}{N_A + N_D}}$$

Si osserva quindi che la carica dipende dalla tensione applicata V_A . La giunzione pn in polarizzazione inversa equivale ad un condensatore con capacità non lineare data da:

$$C = \frac{dQ}{dV_A} = \sqrt{\frac{q\varepsilon}{2(V_0 - V_A)} \frac{N_A N_D}{N_A + N_D}} = \frac{\varepsilon}{W}$$

Coefficiente di idealità

Facendo variare il coefficiente di idealità η tra 1 e 2 si osserva che avvengono traslazioni orizzontali della curva caratteristica del diodo. Minore è il valore di η , più la curva sale rapidamente in polarizzazione diretta. In genere si utilizza $\eta = 1$ per correnti basse e $\eta = 2$ per correnti elevate.

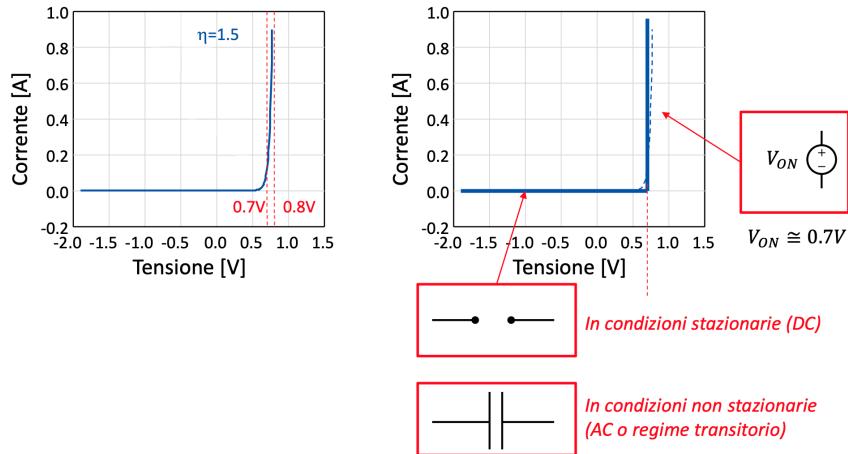


Modello semplificato del diodo

Si osserva che la curva caratteristica del diodo può essere approssimata con un modello semplificato definito in funzione della tensione applicata v_D e di conseguenza della polarizzazione del diodo:

- per $v_D < V_{ON} \rightarrow i_D = 0$ il diodo è in interdizione e si comporta come un circuito aperto in condizioni stazionarie oppure come condensatore non lineare in condizioni non stazionarie;
- per $v_D = V_{ON} \rightarrow i_D > 0$ il diodo è in conduzione e si comporta come un generatore ideale di tensione con tensione V_{ON} .

La tensione V_{ON} è detta tensione di soglia del diodo e divide le due regioni di funzionamento. Tipicamente per un diodo al silicio si assume $V_{ON} = 0.7V$, mentre per un diodo al germanio si assume $V_{ON} = 0.3V$.



3.4 Applicazioni speciali dei diodi

Applicazioni generali

I diodi sono componenti fondamentali in molti circuiti elettronici e trovano applicazione in diversi ambiti:

- **raddrizzatori**: i diodi vengono utilizzati nei circuiti raddrizzatori per convertire la corrente alternata (AC) in corrente continua (DC), permettendo il funzionamento di dispositivi elettronici alimentati a corrente continua;
- **protezione da inversioni di polarità**: i diodi proteggono i circuiti elettronici da danni causati da inversioni accidentali di polarità della tensione di alimentazione;
- **limitatori di tensione**: i diodi limitano la tensione in un circuito, proteggendo i componenti sensibili da sovrattensioni;
- **LED (Light Emitting Diode)**: i diodi LED emettono luce quando attraversati da corrente elettrica, trovando applicazione in display, indicatori luminosi e illuminazione;
- **fotorilevatore**: i diodi a semiconduttore possono essere utilizzati come sensori di luce, convertendo l'energia luminosa in corrente elettrica.

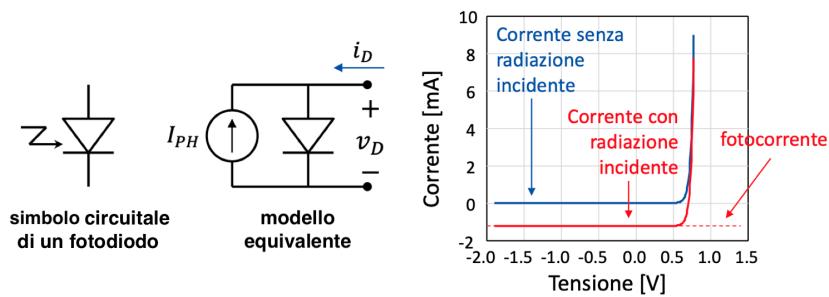
Fotodiodo

Il fotodiodo è una giunzione pn collegata in polarizzazione inversa con l'area di svuotamento esposta alla luce. Quando la luce colpisce la regione di svuotamento, genera coppie elettrone-lacuna (fotogenerazione) che vengono separate dal campo elettrico presente nella regione, generando una corrente detta photocorrente. La photocorrente è proporzionale all'intensità della luce incidente. Viene utilizzato in applicazioni come sensori di luce e telecomunicazioni ottiche.

$$i_D = I_S \left(e^{\frac{v_D}{V_T}} - 1 \right) - I_{PH} \quad I_{PH} = R \cdot P_0$$

I_{PH} : photocorrente (A)
 P_0 : potenza ottica incidente (W)
 R : responsività (A/W)

La curva caratteristica risulta spostata verso il basso di un valore pari alla photocorrente I_{PH} . È possibile schematizzare un fotodiodo come un diodo ideale in parallelo ad una sorgente di corrente pari a I_{PH} .



LED (Light Emitting Diode) o diodi a emissione luminosa

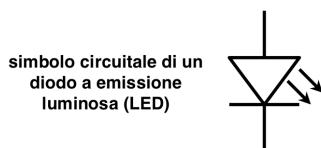
I LED sono giunzioni pn in polarizzazione diretta con l'area di svuotamento “scoperta”. Quando una corrente attraversa il LED, le lacune dalla regione p si ricombinano con gli elettroni dalla regione n nella regione di svuotamento, rilasciando energia sotto forma di fotoni (emissione di luce).

La lunghezza d'onda della luce emessa dipende dalla differenza di energia tra la banda di conduzione e la banda di valenza (energy gap) propria di ogni semiconduttore. Si utilizzano, infatti, semiconduttori diversi per ottenere colori diversi.

Un parametro importante è la tensione di accensione V_{ON} dei LED, ovvero la tensione a cui il LED inizia a emettere luce. In genere è superiore alla tensione di soglia in quanto non basta fornire energia per permettere il passaggio della corrente, ma è necessario fornire energia sufficiente per permettere l'emissione dei fotoni.

$V_{ON} > \frac{hc}{\lambda q}$	h : costante di Planck (6.626×10^{-34} Js)	$\lambda = 620$ nm (rosso) $V_{ON} \approx 2.0 - 2.2$ V
	c : velocità della luce (3.0×10^8 m/s)	$\lambda = 520$ nm (giallo) $V_{ON} \approx 2.1 - 2.2$ V
	λ : lunghezza d'onda della luce emessa	$\lambda = 510$ nm (verde) $V_{ON} \approx 2.5 - 3.3$ V
	q : carica dell'elettrone (1.6×10^{-19} C)	$\lambda = 470$ nm (blu) $V_{ON} \approx 3.2 - 3.3$ V

Non esiste nessun semiconduttore che emetta luce bianca: per creare un “LED bianco” si utilizza un LED blu con un rivestimento di fosforo (giallo) che converte parte della luce blu in luce gialla. Dalla combinazione delle due luci si ottiene la luce bianca percepita dall'occhio umano. In base alla quantità di fosforo utilizzata si possono ottenere diverse tonalità di bianco (caldo, neutro, freddo).



4 Condensatore MOS o CMOS

4.1 Struttura e funzionamento

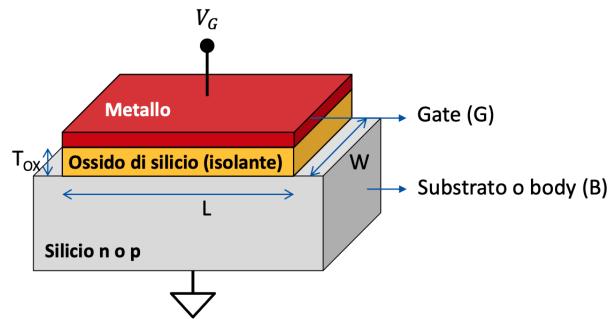
Struttura base

Un condensatore MOS (Metal-Oxide-Semiconductor) è costituito da tre strati principali:

- un metallo (Metal) che funge da elettrodo superiore detto **gate** (G), generalmente in polisilicio;
- un ossido (Oxide) che funge da dielettrico o isolante, di solito in diossido di silicio, SiO_2 ;
- un semiconduttore (Semiconductor) che funge da elettrodo inferiore detto **substrato o body** (B), generalmente in silicio drogato di tipo p o n.

Funzionamento e proprietà

- Si identificano le dimensioni del dielettrico con L lunghezza, W larghezza e T_{ox} spessore.
- Si assume di collegare il substrato a massa (0 V) e applicare una tensione variabile al gate V_G .
- La capacità del condensatore MOS è data da: $C_{ox} = \epsilon \frac{W \cdot L}{T_{ox}}$



4.2 CMOS con substrato di tipo p

Tensione di gate negativa ($V_G < 0$)

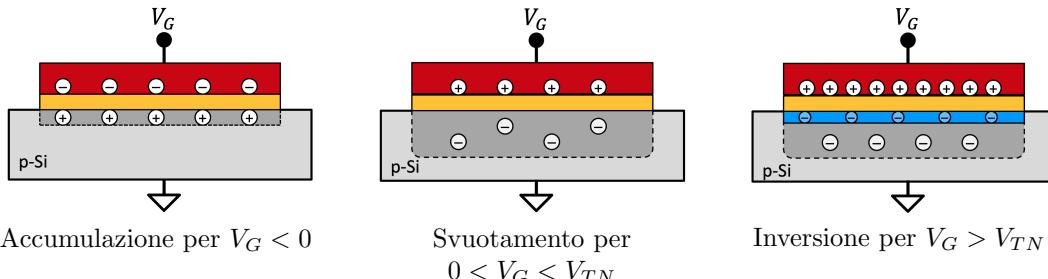
Se $V_G < 0$, il gate si carica negativamente, attirando le cariche positive (lacune) verso la superficie del semiconduttore, creando una **regione di accumulazione** di lacune vicino alla superficie.

Tensione di gate inferiore alla tensione di soglia ($0 < V_G < V_{TN}$)

Se $0 < V_G < V_{TN}$, il gate si carica positivamente, creando una **regione di svuotamento** di lacune vicino alla superficie del semiconduttore, lasciando dietro di sé ioni negativi fissi (atomi droganti). Si forma così una zona di carica spaziale negativa, priva di portatori mobili.

Tensione di gate superiore alla tensione di soglia ($V_G > V_{TN}$)

Se $V_G > V_{TN}$, il gate si carica ulteriormente positivamente, attirando elettroni verso la superficie del semiconduttore, creando una **regione di inversione** dove la concentrazione di elettroni supera quella delle lacune. Si forma così un canale conduttivo di tipo n. La dimensione della regione di svuotamento rimane quasi costante, dopo aver raggiunto il massimo per $V_G = V_{TN}$, mentre la concentrazione di elettroni nella regione di inversione aumenta con V_G .



4.3 Analisi del p-CMOS in condizioni di svuotamento/inversione

Densità di carica

Analizzando la densità di carica $\rho(x)$, il campo elettrico $E(x)$ si ottengono le seguenti relazioni:

$$\rho(x) = \begin{cases} -qN_A & \text{per } -x_D < x < 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Campo elettrico

Dalla densità di carica si ricava il campo elettrico $E(x)$ nella regione di svuotamento e nell'ossido, si noti che c'è una discontinuità del campo elettrico all'interfaccia semiconduttore-ossido dovuta alla differenza di permittività tra i due materiali, inoltre il campo elettrico nell'ossido è costante:

$$E(x) = \begin{cases} -qN_A(x + x_D)/\varepsilon_S & \text{per } -x_D < x < 0 \\ -qN_Ax_D/\varepsilon_{OX} & \text{per } 0 < x < t_{OX} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \begin{aligned} E(0^-) &= -\frac{qN_Ax_D}{\varepsilon_S} \\ E(0^+) &= -\frac{qN_Ax_D}{\varepsilon_{OX}} \\ E_{OX} &= E(0)\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_{OX}} \end{aligned}$$

Potenziale elettrico

Da cui si ottiene il potenziale nel substrato V_B (potenziale di riferimento), il potenziale all'interfaccia (tra semiconduttore e ossido) $V(0)$ e il potenziale al gate V_G :

$$V_B = V(-x_D) = 0 \quad V(0) = \frac{qN_A}{2\varepsilon_S}x_D^2 \quad V_G = V(t_{OX}) = \frac{qN_A}{2\varepsilon_S}x_D^2 + \frac{qN_Ax_D}{\varepsilon_{OX}}t_{OX}$$

Concentrazioni dei portatori

Si ricavano le concentrazioni dei portatori nella regione neutra $p_1 n_1$, lontano dall'interfaccia, e le concentrazioni all'interfaccia p_2, n_2 . All'interfaccia le concentrazioni variano esponenzialmente con $V(0)$:

$$\begin{aligned} p_1 &= N_A & p_2 &= p_1 e^{-\frac{V(0)}{V_T}} & \frac{n_2}{n_1} &= \frac{p_1}{p_2} = e^{\frac{v_2-v_1}{V_T}} & \frac{v_2-v_1}{V_T} &= \ln \frac{n_2}{n_1} = \ln \frac{p_1}{p_2} \\ n_1 &= n_i^2/N_A & n_2 &= n_1 e^{\frac{V(0)}{V_T}} \end{aligned}$$

Tensione di soglia

Si definisce la **tensione di soglia** V_{TN} come differenza di potenziale tra gate e substrato $V_G - V_B$ (pari a V_G) per cui la concentrazione di elettroni all'interfaccia è uguale al numero di lacune nella regione neutra, ovvero quando c'è inversione totale con $n_2 = N_A$:

$$V(0) = \frac{qN_A}{2\varepsilon_S}x_D^2 = 2V_T \ln \frac{N_A}{n_i}, \quad x_D = \sqrt{\frac{4\varepsilon_S V_T}{qN_A} \ln \frac{N_A}{n_i}} \rightarrow V_{TN} = 2V_T \ln \frac{N_A}{n_i} + \frac{t_{OX}}{\varepsilon_{OX}} \sqrt{4\varepsilon_S qN_A V_T \ln \frac{N_A}{n_i}}$$

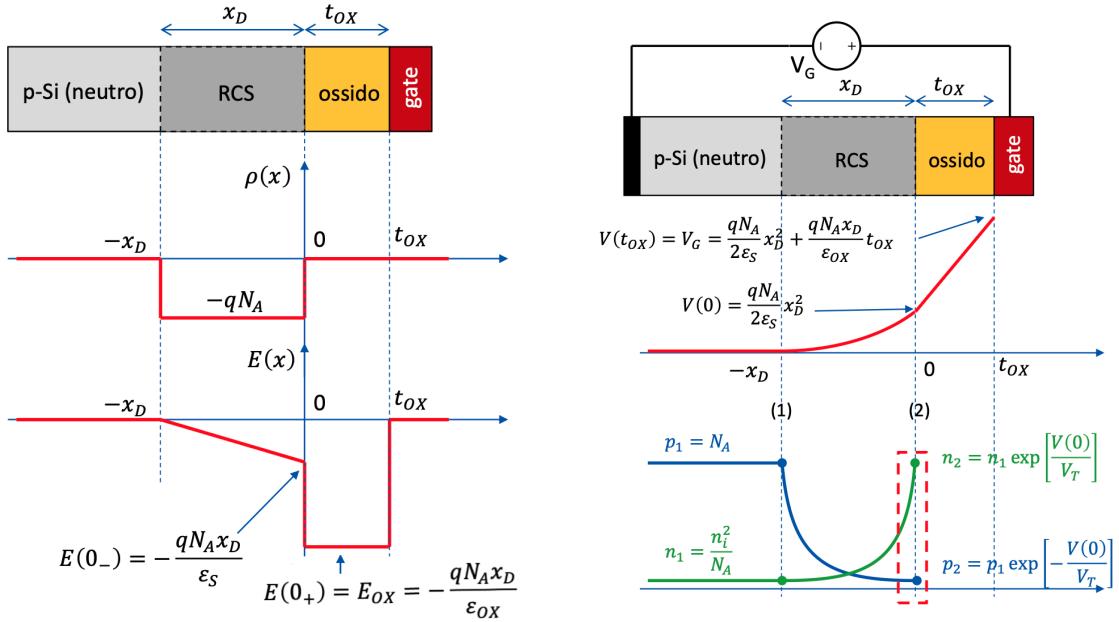
La tensione di soglia dipende, quindi, dallo spessore dell'ossido t_{OX} , dalla concentrazione di drogaggio del substrato N_A e dai materiali usati (tramite ε_{OX} e ε_S).

Carica elettrica e capacità

La carica elettrica per unità di area immagazzinata nel condensatore MOS è data dalla somma degli ioni fissi nella regione di svuotamento e degli elettroni nella regione di inversione:

$$Q_{RCS} = C \cdot V_{TN} \quad Q_n = C \cdot (V_G - V_{TN}) \quad Q_{TOT} = Q_{RCS} + Q_n = Q \cdot V_G$$

Rappresentazione grafica del comportamento del p-CMOS

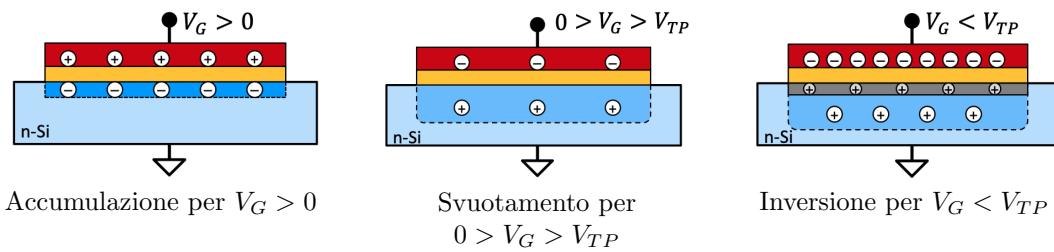


4.4 CMOS con substrato di tipo n e differenze rispetto al p-CMOS

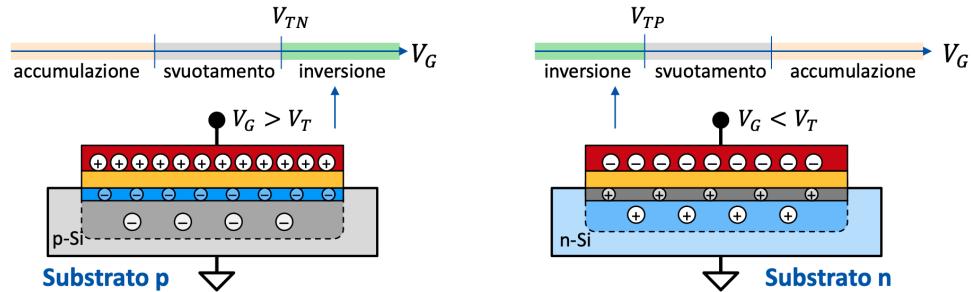
Comportamento del CMOS con substrato di tipo p

Il funzionamento è analogo a quello del CMOS con substrato di tipo p, ma con le polarità invertite:

- per $V_G > 0$, si crea una regione di accumulazione di elettroni.
- per $0 > V_G > V_{TP}$, si crea una regione di svuotamento di elettroni.
- per $V_G < V_{TP}$, si crea una regione di inversione con un canale conduttivo di tipo p.



Rappresentazione aree di lavoro dei CMOS di tipo p e n

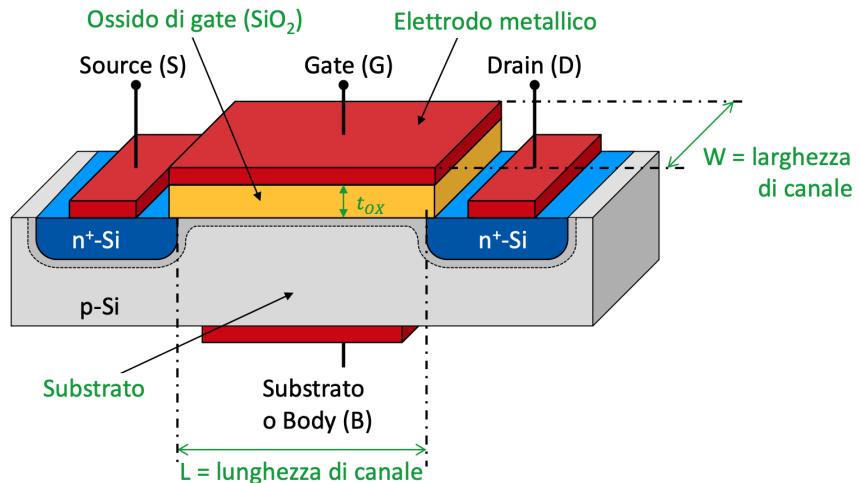


5 Transistor MOSFET

5.1 Struttura generale e classificazione dei MOSFET

Introduzione

Un transistor MOSFET (Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor) è un dispositivo a quattro terminali che sfrutta un condensatore MOS per controllare il flusso di corrente tra due terminali detti **source** (S) e **drain** (D) tramite un potenziale applicato ad un terzo terminale detto **gate** (G). Il quarto terminale è il substrato o **body** (B) e viene generalmente collegato al source o ad un potenziale di riferimento (massa o V_{DD}). Di seguito una rappresentazione schematica di un NMOSFET:



Struttura fisica

A livello fisico, un MOSFET è costituito da un condensatore MOS con gate e substrato affiancato da due regioni pesantemente drogata di tipo opposto al substrato, dette source e drain, che fungono da terminali di ingresso e uscita. Il dielettrico del condensatore MOS è generalmente in diossido di silicio (SiO_2).

Ad ogni terminale è associato un potenziale elettrico e per ogni coppia di terminali si definisce la tensione e la corrente tra i due nodi:

- | | |
|------------------------------------|--|
| - V_G : potenziale del gate | - $V_{XY} = V_X - V_Y$: tensione tra i nodi X e Y |
| - V_S : potenziale del source | es. $V_{GS} = V_G - V_S$ tensione tra gate e source |
| - V_D : potenziale del drain | - I_{XY} : corrente che entra nel nodo X e esce dal nodo Y |
| - V_B : potenziale del substrato | es. I_{DS} corrente che entra nel drain e esce dal source |

Si definiscono inoltre le dimensioni fisiche del MOSFET:

- L : lunghezza del canale tra source e drain
- W : larghezza del canale tra source e drain
- t_{OX} : spessore dell'ossido isolante tra gate e substrato

Classificazione

In base al tipo di canale (e di conseguenza in base al tipo del substrato), i MOSFET si classificano in:

- **NMOSFET o MOSFET a canale n**:

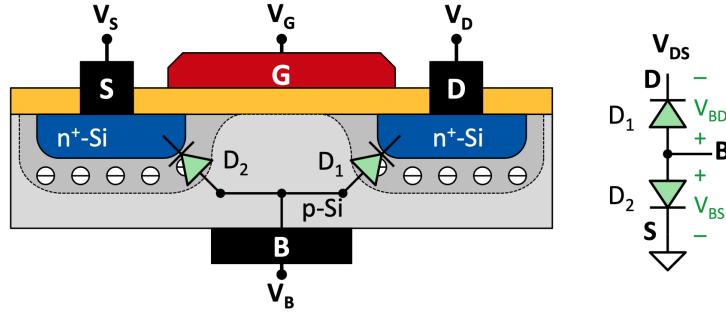
substrato di tipo p, source e drain di tipo n⁺, canale di tipo n con gli elettroni come portatori principali, il substrato p collegato al potenziale minore del circuito (massa o al source) e il source ha potenziale minore del drain

- **PMOSFET o MOSFET a canale p**:

substrato di tipo n, source e drain di tipo p⁺, canale di tipo p con le lacune come portatori principali, il substrato n collegato al potenziale maggiore del circuito (V_{DD} o al source) e il source ha potenziale maggiore del drain

5.2 Struttura di un NMOSFET e vincoli sui potenziali

Si assume per convenzione che il terminale di source ha potenziale minore di quello di drain: $V_S < V_D$ e, di conseguenza, che la corrente scorra dal drain al source: $I_{DS} > 0$.



Condizioni all'equilibrio (nessuna tensione applicata)

In assenza di tensioni, tutti i potenziali sono nulli e non c'è corrente tra i terminali. In particolare si hanno due giunzioni pn in equilibrio tra il substrato p e le regioni n⁺ del source e del drain. Siccome le regioni n⁺ sono pesantemente drogate, la regione di svuotamento si estende quasi totalmente nel substrato p.

Vincoli di polarizzazione dei diodi e potenziale di substrato

I due diodi con catodi collegati ai nodi source e drain e con anodo in comune nel substrato, devono rimanere in interdizione per il corretto funzionamento del MOSFET, si ottengono le seguenti condizioni:

- $V_{BS} \leq 0 \rightarrow V_S \geq V_B$ (diodo source-substrato in interdizione)
- $V_{BD} \leq 0 \rightarrow V_D \geq V_B$ (diodo drain-substrato in interdizione)

Si ottiene che il substrato V_B deve essere il nodo a potenziale più basso $V_D \geq V_S \geq V_B$. Si solito si collega il substrato al potenziale minore dell'intero circuito (massa) $V_B = 0$ oppure al source $V_B = V_S$.

NOTA: Non è possibile collegare il substrato al drain perché si violerebbe la condizione di interdizione del diodo source-substrato in quanto $V_S < V_D$ e quindi $V_{BS} = V_B - V_S = V_D - V_S > 0$.

Potenziale e tensioni di gate

Il potenziale di gate V_G controlla la tensione tra le armature del condensatore MOS che si forma tra il gate e il substrato e di conseguenza identifica l'area di lavoro del PMOSFET. La tensione tra le due armature è variabile lungo la lunghezza del canale ed è compresa tra le tensioni di gate-source e gate-drain ai margini del canale:

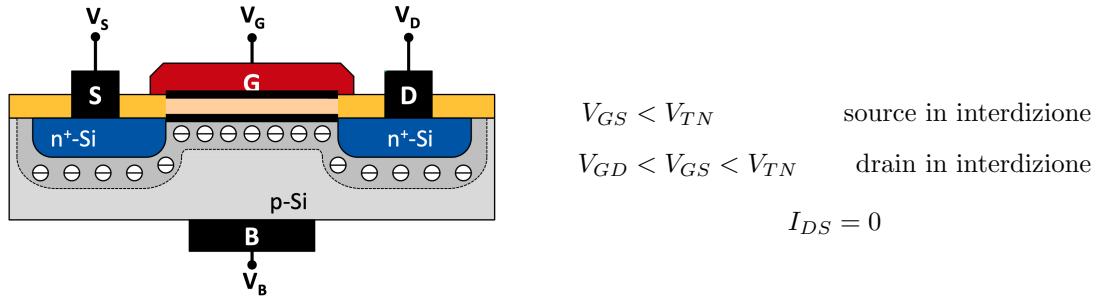
- in prossimità del source $V_{C,source} = V_{GS} = V_G - V_S$
- in prossimità del drain $V_{C,drain} = V_{GD} = V_G - V_D$

NOTA: siccome $V_D \geq V_S$, si ha $V_{GS} \geq V_{GD}$

5.3 Aree di lavoro di un NMOSFET

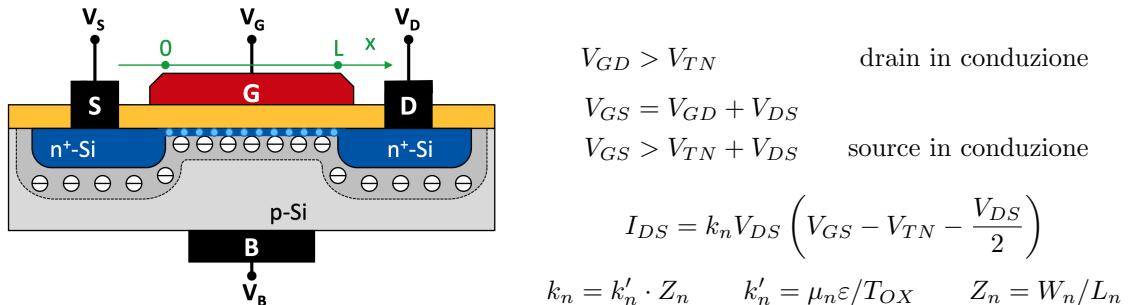
NMOSFET spento o in interdizione per $V_{GS} < V_{TN}$

La tensione tra le armature del condensatore MOS è inferiore alla tensione di soglia V_{TN} sia in prossimità del source ($V_{GS} < V_{TN}$) che in prossimità del drain ($V_{GD} < V_{GS} < V_{TN}$). Il condensatore, quindi, è in regime di svuotamento ed è presente nel substrato, in prossimità dell'ossido, un'area di svuotamento (senza portatori di carica) che separa source e drain. Non essendoci cariche libere per condurre corrente tra drain e source, si ha corrente nulla $I_{DS} = 0$ e il transistor è spento o in interdizione.



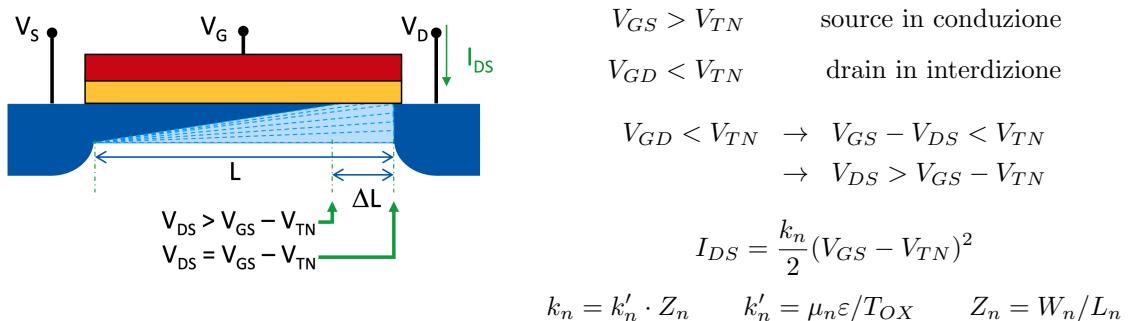
NMOSFET in conduzione lineare (o triodo) per $V_{DS} < V_{GS} - V_{TN}$

La tensione delle armature del condensatore MOS è superiore alla tensione di soglia V_{TN} sia in prossimità del drain ($V_{GD} > V_{TN}$) che in prossimità del source ($V_{GS} > V_{GD} > V_{TN}$). Il condensatore si trova in regime di inversione e si forma un canale conduttivo di tipo n (di elettroni) che congiunge source e drain. Gli elettroni che costituiscono il canale si muovono liberamente dal source al drain, permettendo il passaggio di corrente $I_{DS} > 0$ dal drain al source. Il transistor si comporta come una resistenza non lineare (dipendente da V_{GS}) tra drain e source.



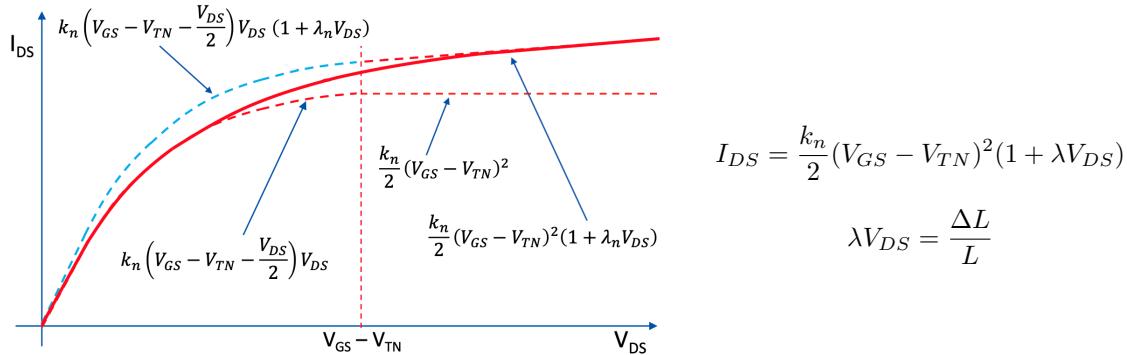
NMOSFET in saturazione per pinchoff per $V_{DS} > V_{GS} - V_{TN}$

La tensione delle armature del condensatore MOS è superiore alla tensione di soglia V_{TN} in prossimità del source ($V_{GS} > V_{TN}$), ma inferiore alla tensione di soglia in prossimità del drain ($V_{GD} < V_{TN}$). Il condensatore si trova in regime misto: inversione in prossimità del source e svuotamento in prossimità del drain e si forma un canale conduttivo di tipo n che congiunge solo parzialmente source e drain. Nonostante ciò i portatori riescono a fluire lo stesso nella RCS spinti dal campo elettrico tra source e drain. In questo modo si ha ugualmente il passaggio di una corrente $I_{DS} \neq 0$ costante rispetto a V_{DS} (a meno della modulazione di lunghezza di canale).



Modulazione di lunghezza di canale con NMOSFET in saturazione per pinchoff

Quando il MOSFET entra in saturazione per pinchoff, la regione di strozzamento si sposta verso il source, riducendo la lunghezza L del canale conduttivo. Questo fenomeno, chiamato modulazione di lunghezza di canale, provoca un lieve aumento della corrente I_{DS} con l'aumentare di V_{DS} anche in saturazione. Si può modellare questo effetto aggiungendo alla corrente in saturazione un termine correttivo che dipende dal coefficiente di modulazione di lunghezza λ determinato dalle caratteristiche fisiche del MOSFET:



Analizzando la continuità della corrente tra la regione lineare e la regione di saturazione con modulazione di lunghezza di canale si osserva che matematicamente c'è una discontinuità che in natura non esiste. Per ovviare a questo problema si utilizza la correzione di lunghezza di canale anche nella regione lineare (tratteggio blu nella figura superiore):

$$I_{DS,\text{lin}} = k_n V_{DS} \left(V_{GS} - V_{TN} - \frac{V_{DS}}{2} \right) (1 + \lambda V_{DS}) \quad \text{per } V_{DS} \ll V_{GS} - V_{TN}$$

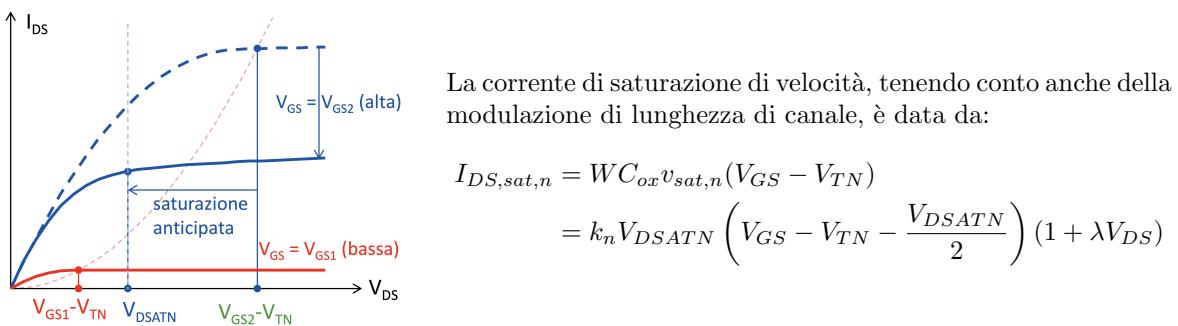
$$I_{DS,\text{sat}} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda V_{DS}) \quad \text{per } V_{DS} \gg V_{GS} - V_{TN}$$

NMOSFET in saturazione di velocità per $V_{DS} > V_{DSATN}$

I portatori di carica (in questo caso elettroni) si muovono nel canale spinti dal campo elettrico $E = V_{DS}/L$ con velocità $v_n = \mu_n E = \mu_n V_{DS}/L$. La velocità è, quindi, proporzionale a V_{DS} . Tale velocità raggiunge un valore massimo costante detto velocità di saturazione $v_{sat,n} = 8 \cdot 10^6 \text{ cm/s}$ per un certo campo elettrico critico $E_{crit,n}$ e una certa tensione critica $V_{DS,sat,n}$:

$$E_{crit,n} = \frac{v_{sat,n}}{\mu_n} = 1.3 \frac{\text{V}}{\mu\text{m}} \quad V_{DSATN} = E_{crit,n} \cdot L = \frac{v_{sat,n}}{\mu_n} L$$

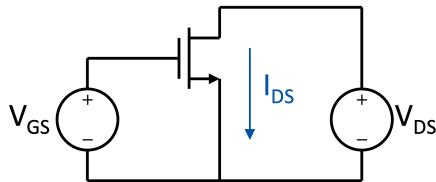
Per $V_{DS} > V_{DSATN}$, si osserva che la velocità degli elettroni e di conseguenza anche la corrente I_{DS} rimangono costanti. Si ha un fenomeno di saturazione anticipata, detto saturazione di velocità, quando ci si aspetterebbe che il MOSFET lavori in regime di conduzione lineare.



5.4 Curve caratteristiche di corrente-tensione di un NMOSFET

La corrente I_{DS} dipende da due tensioni indipendenti V_{GS} e V_{DS} . Si identificano due curve caratteristiche:

- **caratteristica di uscita** con I_{DS} in funzione di V_{DS} per valori costanti di V_{GS}
- **caratteristica di trasferimento o transcaratteristica** con I_{DS} in funzione di V_{GS} per valori costanti di V_{DS}

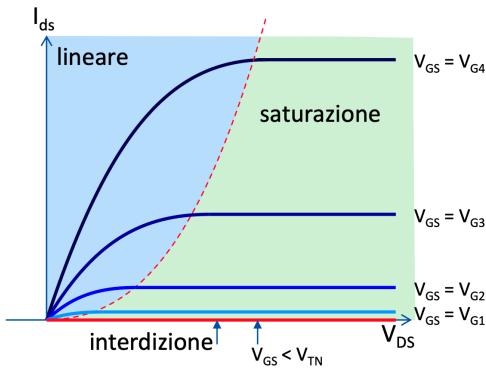


Per analizzare le curve caratteristiche si collega il mosfet ad un circuito di test con due generatori di tensione V_{GS} e V_{DS} e si misura la corrente I_{DS} che scorre tra drain e source. Per la caratteristica di uscita si mantiene V_{GS} costante e si varia V_{DS} , mentre per la transcaratteristica si mantiene V_{DS} costante e si varia V_{GS} .

Caratteristica di uscita $I_{DS} - V_{DS}$

Le tre aree di funzionamento del NMOSFET si riflettono nella caratteristica di uscita $I_{DS} - V_{DS}$:

- **interdizione** per $V_{GS} < V_{TN}$: linea orizzontale coincidente con l'asse delle ascisse
- **conduzione lineare** per $V_{DS} < V_{GS} - V_{TN}$: a sinistra della linea di saturazione
- **saturazione per pinchoff** per $V_{DS} > V_{GS} - V_{TN}$: a destra della linea di saturazione
- **curva di saturazione**: separa la regione di funzionamento lineare e quella di saturazione, è costituita dai punti (V_{DS}, I_{DS}) che soddisfano l'equazione:



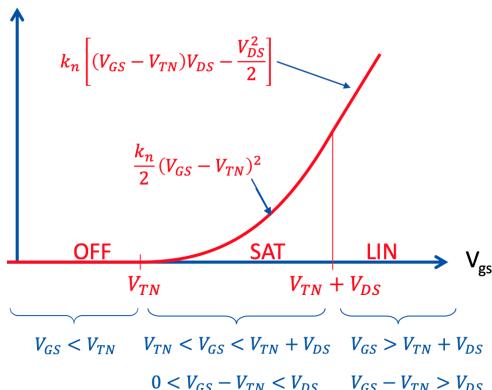
$$I_{DS,sat} = \frac{k_n}{2} V_{DS}^2 \text{ con } V_{DS} = V_{GS} - V_{TN}$$

- aumentando V_{DS} , il transistor passa da regime lineare a regime di saturazione per pinchoff
- aumentando V_{GS} ($V_{G4} > V_{G3} > V_{G2} > V_{G1} > V_{TN}$) la corrente I_{DS} aumenta

Transcaratteristica $I_{DS} - V_{GS}$

Le tre aree di funzionamento del NMOSFET si riflettono nella caratteristica di uscita $I_{DS} - V_{GS}$:

- **interdizione** per $V_{GS} < V_{TN}$: linea orizzontale coincidente con l'asse delle ascisse
- **saturazione per pinchoff** per $V_{TN} < V_{GS} < V_{DS} + V_{TN}$ crescita quadratica
- **conduzione lineare** per $V_{DS} + V_{TN} < V_{GS}$ crescita lineare



- aumentando V_{GS} , il transistor passa da regime di interdizione a regime di saturazione per pinchoff e successivamente a regime lineare
- aumentando V_{DS} il confine tra regime di saturazione e regime lineare si sposta verso destra, inoltre aumenta la pendenza della retta in regime lineare

5.5 Modello a canale corto di un NMOSFET

Equazione generale per I_{DS}

Il modello a canale corto tiene conto di tutti i fenomeni fisici che avvengono in un MOSFET reale, tra cui la modulazione di lunghezza di canale e la saturazione di velocità. Tutte le aree di funzionamento del NMOSFET si possono descrivere con un'unica equazione per la corrente I_{DS} :

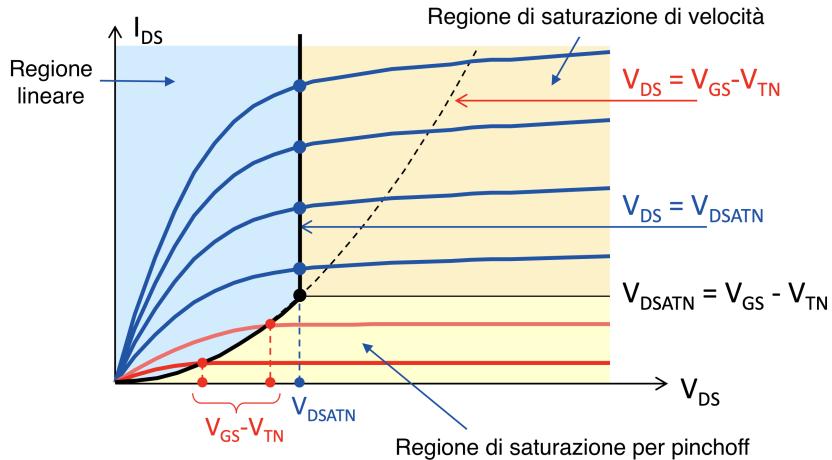
- per $V_{GS} < V_{TN}$ mosfet in interdizione e $I_{DS} = 0$
- per $V_{GS} > V_{TN}$ mosfet in conduzione con I_{DS} che dipende da V_{MIN} :

$$I_{DS} = k'_n Z_n V_{MIN} \left(V_{GS} - V_{TN} - \frac{V_{MIN}}{2} \right) (1 + \lambda_n V_{DS}) \quad k'_n = \frac{\mu_n \epsilon}{T_{OX}} \quad Z_n = \frac{W_n}{L_n}$$

$$V_{MIN} = \min \begin{cases} V_{DS} & \text{regime lineare} \\ V_{GS} - V_{TN} & \text{saturazione per pinchoff} \\ V_{DSATN} & \text{saturazione per velocità} \end{cases}$$

Caratteristica di uscita del modello a canale corto

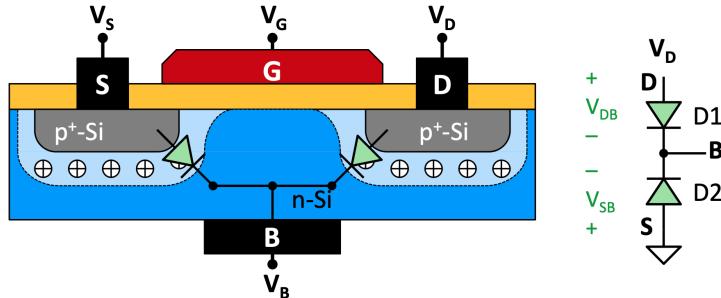
Includendo anche gli effetti della saturazione di velocità, la caratteristica di uscita complessiva del modello a canale corto del NMOSFET risulta come segue:



- la regione di conduzione lineare e la regione di saturazione per pinchoff sono separate dalla curva di saturazione per pinchoff data dalla parabola $I_{DS} = k_n/2 \cdot V_{DS}^2$ con $V_{DS} = V_{GS} - V_{TN}$
- la regione di conduzione lineare e la regione di saturazione per velocità sono separate dalla linea verticale $V_{DS} = V_{DSATN}$
- la regione di saturazione per pinchoff e la regione di saturazione per velocità sono separate dalla linea orizzontale $I_{DS} = k_n/2 \cdot V_{DS}^2$ con $V_{DS} = V_{DSATN}$

5.6 Struttura di un PMOSFET e vincoli sui potenziali

Il funzionamento di un MOSFET a canale p (PMOSFET) con substrato di tipo n è analogo a quello del NMOSFET, ma con le polarità invertite. Tutte le tensioni, infatti, sono negative. Si assume per convenzione che il terminale di source ha potenziale maggiore di quello di drain ($V_S > V_D$) e, di conseguenza, che la corrente scorre dal source al drain rimanendo sempre positiva ($I_{DS} > 0$).



Condizioni all'equilibrio

In analogia al NMOSFET, all'equilibrio le due giunzioni pn tra substrato n e le regioni p⁺ del source e del drain sono in equilibrio e la regione di svuotamento si estende quasi totalmente nel substrato n.

Vincoli di polarizzazione dei diodi e potenziale di substrato

I due diodi con anodi collegati ai nodi source e drain e con catodo in comune nel substrato, devono rimanere in interdizione per il corretto funzionamento del MOSFET, si ottengono le seguenti condizioni:

- $V_{BS} \geq 0 \rightarrow V_S \leq V_B$ (diodo source-substrato in interdizione)
- $V_{BD} \geq 0 \rightarrow V_D \leq V_B$ (diodo drain-substrato in interdizione)

Si ottiene che il substrato V_B deve essere il nodo a potenziale più alto $V_D \leq V_S \leq V_B$. Di solito si collega il substrato al potenziale maggiore dell'intero circuito (alimentazione) $V_B = V_{DD}$ oppure al source $V_B = V_S$.

NOTA: Non è possibile collegare il substrato al drain perché si violerebbe la condizione di interdizione del diodo source-substrato in quanto $V_S > V_D$ e quindi $V_{BS} = V_B - V_S = V_D - V_S < 0$.

Potenziale e tensioni di gate

Analogamente al NMOSFET, il potenziale di gate V_G controlla l'area di lavoro del PMOSFET. La tensione tra le due armature è variabile lungo la lunghezza del canale ed è compresa tra le tensioni di gate-source e gate-drain ai margini del canale:

- in prossimità del source $V_{C,source} = V_{GS} = V_G - V_S$
- in prossimità del drain $V_{C,drain} = V_{GD} = V_G - V_D$

NOTA: siccome $0 > V_S \geq V_D$, si ha $V_{GS} \leq V_{GD}$ (oppure $|V_{GS}| \geq |V_{GD}|$)

5.7 Aree di lavoro di un PMOSFET

Le aree di lavoro del PMOSFET sono analoghe a quelle del NMOSFET, ma con le polarità invertite:

- **PMOSFET spento o in interdizione** per $0 > V_{GS} > V_{TP}$:
il condensatore è in regime di svuotamento e non c'è corrente tra drain e source $I_{DS} = 0$
- **PMOSFET in conduzione lineare** per $V_{DS} > V_{GS} - V_{TP} \Leftrightarrow 0 > V_{TP} > V_{GD} > V_{GS}$:
si ha una corrente I_{DS} tra source e drain data dal movimento delle lacune nel canale di tipo p

$$I_{DS} = k_p V_{DS} \left(V_{GS} - V_{TP} - \frac{V_{DS}}{2} \right) \quad k_p = k'_p \cdot Z_p \quad k'_p = \mu_p \varepsilon / T_{OX} \quad Z_p = W_p / Z_p$$

- **PMOSFET in saturazione per pinchoff** per $V_{DS} < V_{GS} - V_{TP} \Leftrightarrow 0 > V_{GD} > V_{TP} > V_{GS}$:
il condensatore è in regime misto e si ha una corrente I_{DS} costante rispetto a V_{DS} :

$$I_{DS} = \frac{k_p}{2} (V_{GS} - V_{TP})^2$$

- **Modulazione di lunghezza di canale**:

Analogamente a quella dell'NMOSFET, applicando il fattore correttivo si ottiene:

$$I_{DS} = \frac{k_p}{2} (V_{GS} - V_{TP})^2 (1 + \lambda_p V_{DS}) \quad \text{con } V_{DS} < 0, \lambda_p < 0$$

- **PMOSFET in saturazione di velocità** per $V_{DS} < V_{DSATP}$:

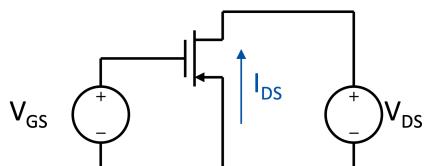
Analogamente a quello dell'NMOSFET, si ha una corrente I_{DS} costante rispetto a V_{DS} :

$$I_{DS} = k_p V_{DSATP} \left(V_{GS} - V_{TP} - \frac{V_{DSATP}}{2} \right) (1 + \lambda_p V_{DS}) \quad \text{con } V_{DSATP} < 0$$

(alcuni valori tipici per PMOSFET: $\mu_p = 200 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ $v_{sat,p} \approx 4 \cdot 10^6 \text{ cm/s}$ $E_C \approx 2 \text{ V/cm}$)

5.8 Curve caratteristiche di corrente-tensione di un PMOSFET

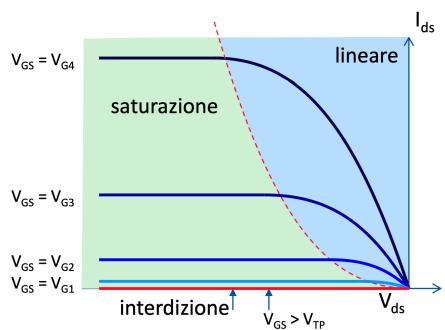
Alllo stesso modo dell'NMOSFET, si definiscono le curve caratteristiche di un PMOSFET, studiate attraverso un circuito simile:



- **caratteristica di uscita** con I_{DS} in funzione di V_{DS} per valori costanti di V_{GS}
- **caratteristica di trasferimento o transcaratteristica** con I_{DS} in funzione di V_{GS} per valori costanti di V_{DS}

Caratteristica di uscita $I_{DS} - V_{DS}$

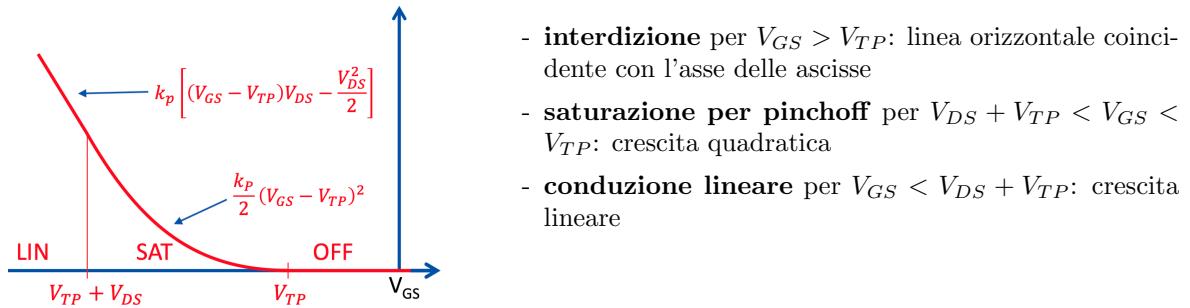
Rispetto al NMOSFET, la caratteristica di uscita $I_{DS} - V_{DS}$ del PMOSFET è speculare rispetto all'asse delle ordinate, mantenendo invariate le forme delle curve e il posizionamento delle aree di funzionamento:



- **interdizione** per $V_{GS} > 0$: linea orizzontale coincidente con l'asse delle ascisse
- **conduzione lineare** per $V_{DS} > V_{GS} - V_{TP}$: a destra della linea di saturazione
- **saturazione per pinchoff** per $V_{DS} < V_{GS} - V_{TP}$: a sinistra della linea di saturazione
- **curva di saturazione**: separa la regione di funzionamento lineare e quella di saturazione, è costituita dai punti in cui $V_{DS} = V_{GS} - V_{TP}$

Transcaratteristica I_{DS} - V_{GS}

Rispetto al NMOSFET, la transcaratteristica I_{DS} - V_{GS} del PMOSFET è speculare rispetto all'asse delle ordinate, mantenendo invariate le forme delle curve e il posizionamento delle aree di funzionamento:



5.9 Modello a canale corto di un PMOSFET

Equazione generale per I_{DS}

Anche per il PMOSFET si può utilizzare un'unica equazione per la corrente I_{DS} che tiene conto di tutti i fenomeni fisici:

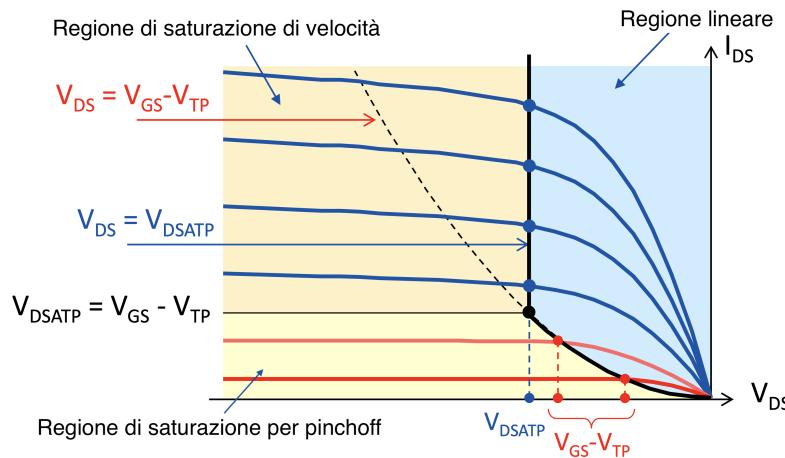
- per $V_{GS} > V_{TP}$ mosfet in interdizione e $I_{DS} = 0$
- per $V_{GS} < V_{TP}$ mosfet in conduzione con I_{DS} che dipende da V_{MAX} :

$$I_{DS} = k'_p Z_p V_{MAX} \left(V_{GS} - V_{TP} - \frac{V_{MAX}}{2} \right) (1 + \lambda_p V_{DS}) \quad k'_p = \frac{\mu_p \varepsilon}{T_{OX}} \quad Z_p = \frac{W_p}{L_p}$$

$$V_{MAX} = \max \left\{ \begin{array}{ll} V_{DS} & \text{regime lineare} \\ V_{GS} - V_{TP} & \text{saturazione per pinchoff} \\ V_{DSATP} & \text{saturazione per velocità} \end{array} \right\}$$

Caratteristica di uscita del modello a canale corto

La caratteristica di uscita complessiva del modello a canale corto del PMOSFET risulta come segue:

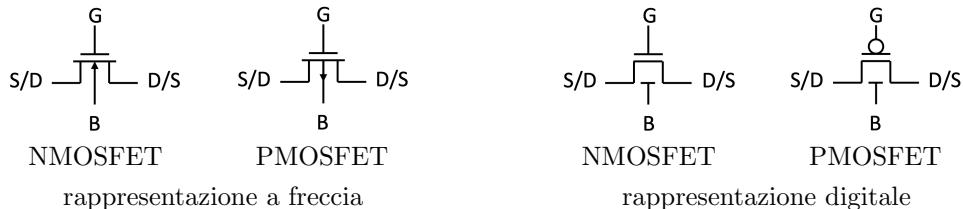


- la regione di conduzione lineare e la regione di saturazione per pinchoff sono separate dalla curva di saturazione per pinchoff data dalla parabola $I_{DS} = k_p/2 \cdot V_{DS}^2$ con $V_{DS} = V_{GS} - V_{TP}$
- la regione di conduzione lineare e la regione di saturazione per velocità sono separate dalla linea verticale $V_{DS} = V_{DSATP}$
- la regione di saturazione per pinchoff e la regione di saturazione per velocità sono separate dalla linea orizzontale $I_{DS} = k_p/2 \cdot V_{DS}^2$ con $V_{DS} = V_{DSATP}$

5.10 Simbologia e rappresentazione circuitale dei MOSFET

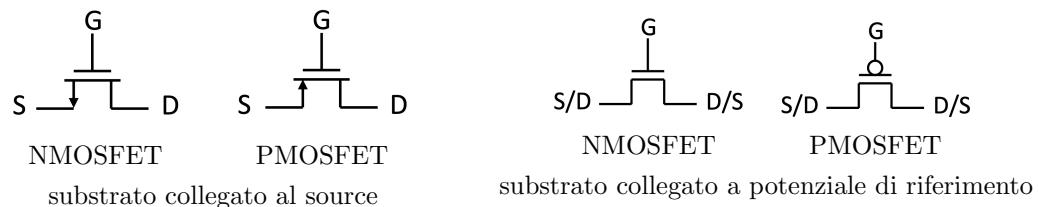
Simbologia a 4 terminali - con substrato

Nelle simbologie a 4 terminali non è possibile identificare univocamente il drain e il source in quanto sono perfettamente identici. Nelle rappresentazioni a freccia, la freccia sul terminale del substrato indica il tipo di MOSFET ed è concorde con il flusso di corrente nel diodo formato tra substrato e source/drain.



Simbologia a 3 terminali - senza substrato

Nelle simbologie a 3 terminali, il substrato viene omesso in quanto collegato al source o ad un potenziale di riferimento. Quando il substrato è collegato al source, il terminale source è identificato con la freccia concorde al flusso di corrente tra source e drain. Quando il substrato è collegato ad un potenziale di riferimento, il terminale source non è identificabile univocamente in quanto non ci sono freccie.

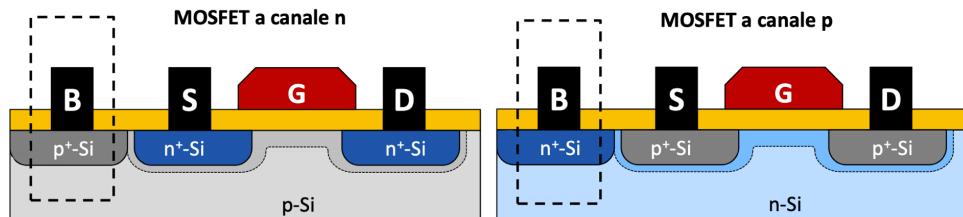


5.11 Struttura reale del MOSFET

Per ottimizzare le prestazioni, lo spazio e il processo produttivo vengono apportate alcune modifiche al nodo di substrato (B):

- al posto di trovarsi sotto, il substrato viene realizzato sulla parte superiore del transistor a lato del source o del drain per facilitare il processo di fabbricazione
- in prossimità dell'elettrodo, il substrato viene ulteriormente drogato dello stesso tipo del substrato (p^+ in NMOSFET o n^+ in PMOSFET) per ridurre la resistenza di contatto

Di seguito sono riportate le illustrazioni delle strutture reali di un NMOSFET e di un PMOSFET:



5.12 Effetto Body e variazione della tensione di soglia

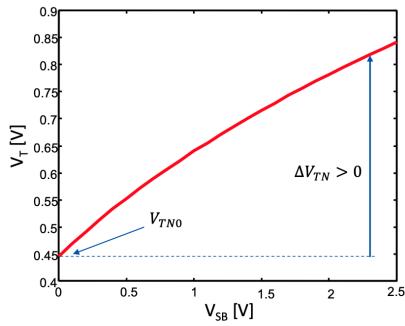
Quando il substrato non è collegato al source, ma ad un potenziale di riferimento (massa o alimentazione), la tensione tra substrato e source V_{BS} può essere diversa da zero. Questa tensione fa variare la tensione di soglia del MOSFET secondo le relazioni (in base al tipo di MOSFET):

$$V_{TN} = V_{TN0} + \gamma_n \left(\sqrt{V_{SB} + 2\phi_n} - \sqrt{2\phi_n} \right) \quad \gamma_n = \frac{\sqrt{2qN_D\varepsilon_{Si}}}{C_{OX}} \quad \phi_n = \frac{k_B T}{q} \ln \left(\frac{N_A}{n_i} \right)$$

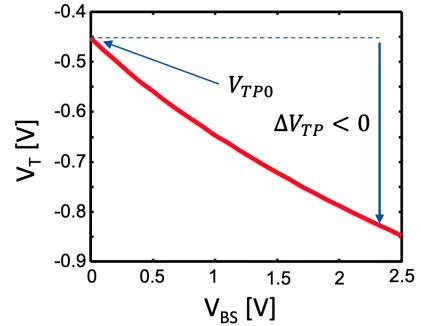
$$V_{TP} = V_{TP0} - \gamma_p \left(\sqrt{V_{SB} + 2\phi_p} - \sqrt{2\phi_p} \right) \quad \gamma_p = \frac{\sqrt{2qN_A\varepsilon_{Si}}}{C_{OX}} \quad \phi_p = \frac{k_B T}{q} \ln \left(\frac{N_D}{n_i} \right)$$

- V_{TN0} e V_{TP0} : tensione di soglia per $V_{SB} = 0$
- γ e ϕ : parametri legati al droggaggio e allo spessore dell'ossido
- C_{OX} : capacità per unità di area dell'ossido

Rappresentando graficamente la variazione della tensione di soglia in funzione di V_{SB} , si ottiene:



Variazione di V_{TN} per NMOSFET



Variazione di V_{TP} per PMOSFET

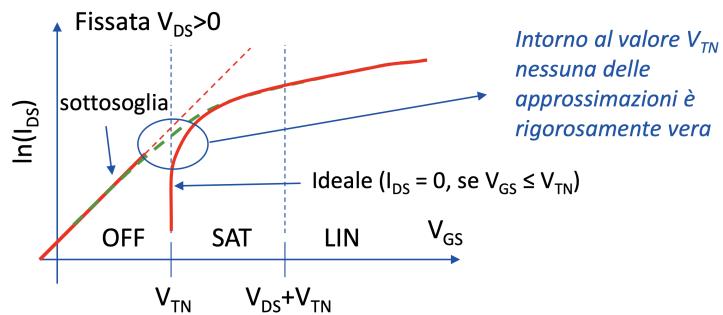
5.13 Corrente di sottosoglia

La corrente di sottosoglia è una piccola corrente che scorre tra drain e source anche quando il MOSFET è in interdizione ($V_{GS} < V_T$). Questa corrente è molto debole e vale:

$$I_{DS} = I_{0n} e^{\frac{V_{GS}-V_{TN}}{nV_T}} \left(1 - e^{-\frac{V_{DS}}{nV_T}} \right) \quad \text{per NMOSFET}$$

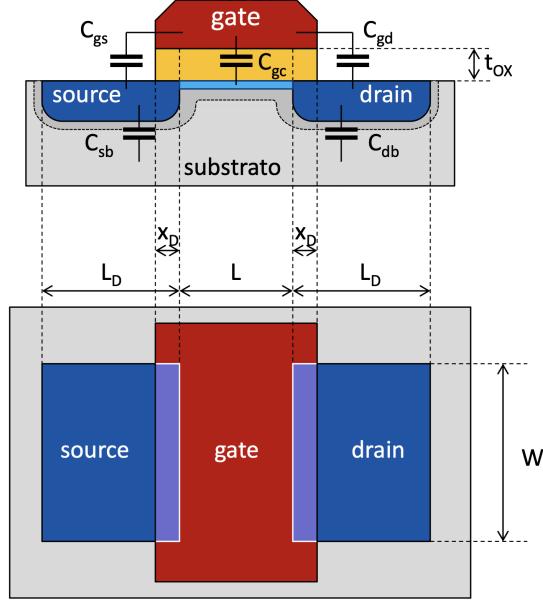
$$I_{DS} = I_{0p} e^{-\frac{V_{GS}-V_{TP}}{nV_T}} \left(1 - e^{\frac{V_{DS}}{nV_T}} \right) \quad \text{per PMOSFET}$$

Analizzando la transcaratteristica per un NMOSFET si osserva che la corrente di sottosoglia decresce esponenzialmente per $V_{GS} < V_{TN}$ (siccome le ordinate sono in scala logaritmica, la curva appare lineare):



5.14 Capacità parassite dei MOSFET

Avendo numerose giunzioni pn che si vengono a formare, i MOSFET presentano delle capacità parassite che influenzano il loro funzionamento alle alte frequenze, come evidenziato in figura. Le capacità parassite sono indipendenti dal tipo di MOSFET (NMOSFET o PMOSFET), per cui le conclusioni ottenute valgono sia per un NMOSFET che per un PMOSFET.



Le capacità parassite per ogni coppia di terminali sono:

- C_{sb} : capacità source-substrato $C_{sb} \approx C_{j0} \cdot L_D \cdot W$
- C_{db} : capacità drain-substrato $C_{db} \approx C_{j0} \cdot L_D \cdot W$
- C_{gs} : capacità gate-source $C_{gs} \approx C_{gs0} \cdot W$
- C_{gd} : capacità gate-drain $C_{gd} \approx C_{gd0} \cdot W$
- C_{gc} : capacità gate-substrato (del condensatore MOS) $C_{gc} = C_{OX} \cdot L \cdot W$

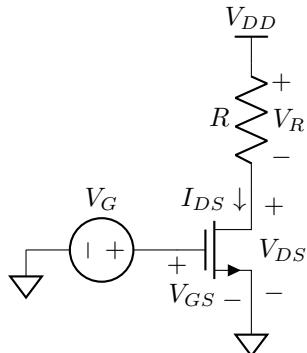
Le capacità parassite complessive di ogni nodo rispetto al substrato sono:

$$\begin{aligned} C_{source} &= C_{sb} + C_{gs} = (C_{j0}L_D + C_{gs0}) \cdot W = C_{s0} \cdot W && \text{con } C_{s0} = C_{j0}L_D + C_{gs0} \\ C_{drain} &= C_{db} + C_{gd} = (C_{j0}L_D + C_{gd0}) \cdot W = C_{d0} \cdot W && \text{con } C_{d0} = C_{j0}L_D + C_{gd0} \\ C_{gate} &= C_{gs} + C_{gd} + C_{gc} = (C_{gs0} + C_{gd0} + C_{OX}L) \cdot W \approx C_{g0} \cdot WL && \text{per } C_{gs} + C_{gd} \ll C_{OX}L \end{aligned}$$

6 Circuiti con i MOSFET

6.1 MOSFET in serie a una resistenza

Circuito NMOSFET e resistenza



Si costruisce un circuito con un NMOSFET e una resistenza come illustrato di lato, in cui:

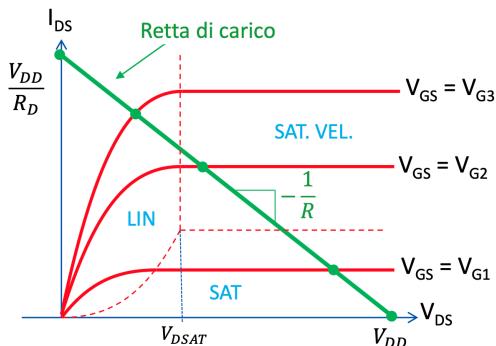
- il terminale di drain è collegato a una tensione di alimentazione V_{DD} tramite una resistenza di carico R ;
- il terminale di source è collegato a massa;
- il terminale di gate è collegato a un generatore di tensione V_G .

L'utilizzo di un NMOSFET al posto di un PMOSFET è perfettamente arbitrario e non cambia nulla nel procedimento di soluzione del circuito.

Soluzione del circuito per via grafica

La risoluzione del circuito consiste nel trovare la corrente I_{DS} e la tensione V_{DS} che soddisfano sia la caratteristica del MOSFET sia la caratteristica della resistenza R . Dalle LKC si impone $I_{DS} = I_R$ e si risolve l'equazione in funzione di V_{DS} .

Un'alternativa alla risoluzione analitica è la risoluzione grafica, che consiste nel tracciare sullo stesso grafico la caratteristica di uscita del MOSFET (I_{DS} in funzione di V_{DS}) e la caratteristica della resistenza R sempre in funzione di V_{DS} e trovare il punto di intersezione tra le due curve.



Un'alternativa alla risoluzione analitica è la risoluzione grafica, che consiste nel tracciare sullo stesso grafico la caratteristica di uscita del MOSFET (I_{DS} in funzione di V_{DS}) e la caratteristica della resistenza R sempre in funzione di V_{DS} e trovare il punto di intersezione tra le due curve.

Modello a canale lungo

Il modello a canale lungo del MOSFET prevede che il transistor operi in una delle tre regioni (interdizione, lineare o saturazione per pinchoff) senza considerare gli effetti di modulazione di lunghezza di canale e saturazione di velocità. Per risolvere il circuito si procede come segue:

1. si determina se il MOSFET è “acceso” o “spento” confrontando V_{GS} con la tensione di soglia V_{TN} :
 - se $V_{GS} < V_{TN}$, il MOSFET è in interdizione e $I_{DS} = 0$
 - se $V_{GS} \geq V_{TN}$, il MOSFET è acceso e si procede al passo successivo
2. si ipotizza che il MOSFET sia in uno dei due regimi di conduzione (lineare o saturazione) e si risolve la rete ponendo $I_{DS} = I_R$ (per le LKC), utilizzando la formula I_{DS} corrispondente all'ipotesi fatta e si risolve per V_{DS} :
 - se si ipotizza il regime lineare: $k_n V_{DS} \left(V_{GS} - V_{TN} - \frac{V_{DS}}{2} \right) = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R}$
 - se si ipotizza il regime di saturazione: $\frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R}$
3. si verifica se l'ipotesi fatta sul regime di funzionamento è corretta:
 - se si è ipotizzato il regime lineare, si verifica che $V_{DS} < V_{GS} - V_{TN}$;
 - se si è ipotizzato il regime di saturazione, si verifica che $V_{DS} \geq V_{GS} - V_{TN}$.
4. se l'ipotesi è corretta, si è trovata la soluzione; altrimenti si ripete il passo 2 con l'altra ipotesi.

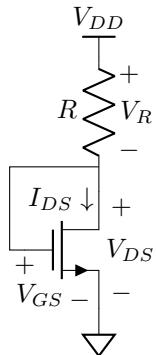
Modello a canale corto

La soluzione del circuito con il modello a canale corto è analoga a quella con il modello a canale lungo, con la differenza che si prevede anche l'effetto di modulazione di lunghezza di canale e la possibilità che il MOSFET lavori in saturazione di velocità. In particolare si procede come segue:

1. si determina se il MOSFET è “acceso” o “spento” come nel modello a canale lungo;
2. si calcolano, se possibile, i tre valori di V_{MIN} ($V_{DS}, V_{GS} - V_{TN}, V_{DSATN}$) e se si conoscono già due dei valori (esempio $V_{GS} - V_{TN}$ e V_{DSATN}), si può escludere a priori quello maggiore (ovvero quello che sicuramente non sarà il minimo), riducendo così il numero di ipotesi da fare;
3. si ipotizza che il MOSFET sia in uno dei tre regimi di conduzione (lineare, saturazione per pinchoff o saturazione di velocità) escludendone, se possibile, uno come spiegato al passo precedente, e si risolve la rete come nel modello a canale lungo:
 - in regime lineare: $k_n V_{DS} \left(V_{GS} - V_{TN} - \frac{V_{DS}}{2} \right) (1 + \lambda V_{DS}) = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R}$
 - in saturazione per pinchoff: $\frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda V_{DS}) = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R}$
 - in saturazione di velocità: $k_n V_{DSATN} \left(V_{GS} - V_{TN} - \frac{V_{DSATN}}{2} \right) (1 + \lambda V_{DS}) = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R}$
4. si verifica se l'ipotesi fatta sul regime di funzionamento è corretta:
 - se si è ipotizzato il regime lineare: $V_{DS} = \min\{V_{GS} - V_{TN}, V_{DSATN}, V_{DS}\}$;
 - se si è ipotizzato il regime di sat. per pinchoff: $V_{GS} - V_{TN} = \min\{V_{GS} - V_{TN}, V_{DSATN}, V_{DS}\}$;
 - se si è ipotizzato il regime di sat. di velocità: $V_{DSATN} = \min\{V_{GS} - V_{TN}, V_{DSATN}, V_{DS}\}$;
5. se l'ipotesi è corretta, si è trovata la soluzione; altrimenti si ripete il passo 3 con un'altra ipotesi.

6.2 MOSFET connesso a diodo

Circuito di un NMOSFET connesso a diodo



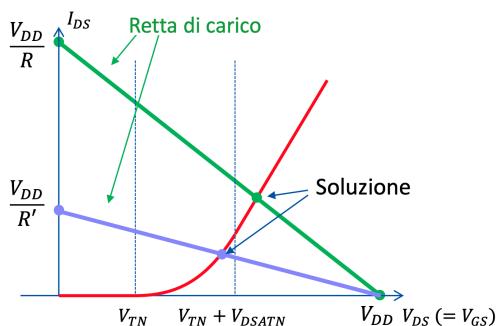
Si costruisce un circuito con un NMOSFET e una resistenza come illustrato di lato, in cui:

- il terminale di source è collegato a massa;
- il terminale di drain è collegato a una tensione di alimentazione V_{DD} tramite una resistenza di carico R ;
- il terminale di gate è cortocircuitato al terminale di drain e $V_{GS} = V_{DS}$

L'utilizzo di un NMOSFET al posto di un PMOSFET è perfettamente arbitrario e non cambia nulla nel procedimento di soluzione del circuito.

Considerazioni sul regime di funzionamento e risoluzione grafica

Si osserva che il MOSFET connesso in questo modo, se acceso, lavora in saturazione per pinchoff o in saturazione di velocità, per cui si comporta in modo simile a un diodo ideale con soglia V_{TN} :



- se $V_{GS} < V_{TN}$, il MOSFET è spento con $I_{DS} = 0$;
- se $V_{GS} \geq V_{TN}$, il MOSFET è acceso e lavora in saturazione per pinchoff $V_{DS} = V_{GS} > V_{GS} - V_{TN}$ oppure in sat. di velocità se $V_{DS} = V_{GS} > V_{DSATN}$

Si nota che la caratteristica di uscita del MOSFET in questo caso è simile a quella di un diodo con soglia V_{TN} .

Come nel caso precedente, la risoluzione grafica consiste nel trovare le intersezioni delle due caratteristiche di uscita del MOSFET e della resistenza R .

Analisi del circuito

Per risolvere il circuito si procede come segue:

1. si determina se il MOSFET è “acceso” o “spento” confrontando V_{GS} con la tensione di soglia V_{TN} :
 - se $V_{GS} < V_{TN}$, il MOSFET è in interdizione e $I_{DS} = 0$
 - se $V_{GS} \geq V_{TN}$, il MOSFET è acceso e si procede al passo successivo
2. se si utilizza il modello a canale lungo, si utilizza I_{DS} in saturazione per pinchoff e si impone la condizione $I_{DS} = I_R \rightarrow I_{DS} = \frac{k_n}{2}(V_{GS} - V_{TN})^2 = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R}$; non serve verificare il regime di funzionamento, in quanto il MOSFET connesso in questo modo lavora sempre in saturazione
3. se si utilizza il modello a canale corto, bisogna ipotizzare il regime di saturazione (pinchoff o velocità) e risolvere il circuito utilizzando la formula corrispondente:
 - in saturazione per pinchoff: $\frac{k_n}{2}(V_{GS} - V_{TN})^2(1 + \lambda V_{DS}) = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R}$
 - in saturazione di velocità: $k_n V_{DSATN} \left(V_{GS} - V_{TN} - \frac{V_{DSATN}}{2} \right) (1 + \lambda V_{DS}) = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R}$
4. si verifica se l’ipotesi fatta sul regime di funzionamento è corretta:
 - se si è ipotizzato il regime di sat. per pinchoff: $V_{GS} - V_{TN} = \min\{V_{GS} - V_{TN}, V_{DSATN}, V_{DS}\}$;
 - se si è ipotizzato il regime di sat. di velocità: $V_{DSATN} = \min\{V_{GS} - V_{TN}, V_{DSATN}, V_{DS}\}$;
5. se l’ipotesi è corretta, si è trovata la soluzione; altrimenti si ripete il passo 3 con un’altra ipotesi

6.3 MOSFET come generatore di corrente

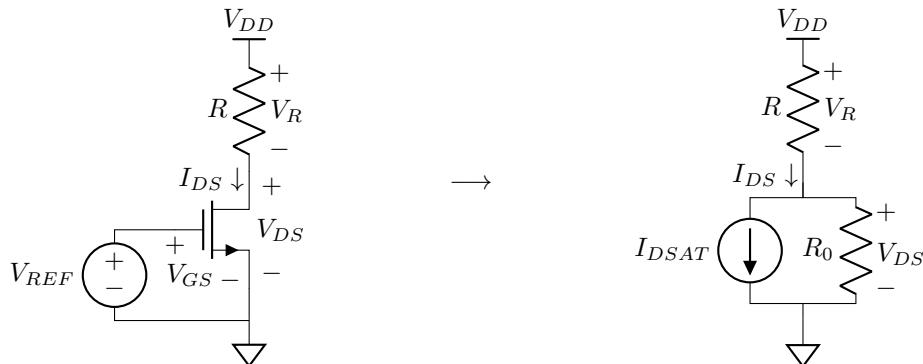
Circuito di un NMOSFET connesso come generatore di corrente

Si costruisce un circuito con un NMOSFET e una resistenza come illustrato sotto, in cui:

- il terminale di source è collegato a massa;
- il terminale di drain è collegato a una tensione di alimentazione V_{DD} tramite una resistenza di carico R ;
- il terminale di gate è cortocircuitato al terminale di source e $V_{GS} = V_{REF}$

Si suppone, inoltre, che il valore di V_{REF} sia tale da mantenere il MOSFET sempre acceso e in regime di saturazione per pinchoff o in saturazione di velocità, ovvero che sia soddisfatta la condizione:

$$V_{DS} > \min\{V_{REF} - V_{TN}, V_{DSATN}\}$$



L’utilizzo di un NMOSFET al posto di un PMOSFET è perfettamente arbitrario e non cambia nulla nel procedimento di soluzione del circuito.

Considerazioni sul regime di funzionamento e risoluzione grafica

Il MOSFET in saturazione, connesso in questo modo, si può modellare con un generatore lineare di corrente secondo il teorema di Norton, come illustrato sopra. In saturazione, infatti, la corrente I_{DS} è direttamente proporzionale a V_{DS} tramite il parametro λ_n :

$$I_{DS} = I_{DSAT}(1 + \lambda_n V_{DS}) = I_{DSAT} + \lambda_n I_{DSAT} V_{DS} = I_{DSAT} + R_0 V_{DS} \quad \text{con } R_0 = \frac{1}{\lambda_n I_{DSAT}}$$

Si osserva che la corrente I_{DS} ha due contributi:

- una corrente costante I_{DSAT} di saturazione del mosfet, corrisponde alla corrente erogata dal generatore ideale di corrente per Norton;
- una corrente variabile $R_0 V_{DS}$ che dipende linearmente dalla tensione V_{DS} e che può essere modellata con una resistenza R_0 in parallelo con il generatore ideale di corrente.

Si nota che se $\lambda = 0 \rightarrow I_{DS} = I_{DSAT} \rightarrow R_0 = \infty$, ovvero se non si considera l'effetto di modulazione di lunghezza di canale, il MOSFET si comporta come un generatore ideale di corrente.

Il generatore lineare di corrente di Norton ha dei vincoli sul suo funzionamento, in quanto deve essere soddisfatta la condizione che il MOSFET rimanga in saturazione per pinchoff o in saturazione di velocità:

$$V_{DS} > \min\{V_{REF} - V_{TN} \text{ sat. per pinchoff}, V_{DSATN} \text{ sat. di velocità}\}$$

Se questa condizione non è soddisfatta, il MOSFET esce dal regime di saturazione e il modello con il generatore lineare di corrente non è più valido.

Analisi del circuito

Per risolvere il circuito utilizzando il modello a canale corto si procede come segue:

1. si impone che il mosfet sia acceso e che sia in saturazione (per pinchoff o di velocità) per cui si deve avere: $V_{REF} > V_{TN}$ e $V_{DS} > \min\{V_{REF} - V_{TN}, V_{DSATN}\}$
2. si ipotizza il regime di saturazione (pinchoff o velocità) e si calcola I_{DSAT} e R_0 :
 - in regime di saturazione per pinchoff: $I_{DSAT} = \frac{k_n}{2}(V_{REF} - V_{TN})^2$
 - in regime di saturazione di velocità: $I_{DSAT} = k_n V_{DSATN} \left(V_{REF} - V_{TN} - \frac{V_{DSATN}}{2} \right)$
 - a prescindere dal regime di saturazione $R_0 = 1/(\lambda_n I_{DSAT})$
3. si applica il teorema di Norton, ovvero si sostituisce il MOSFET con il generatore lineare di corrente e si risolve il circuito (es. per sovrapposizione degli effetti) in funzione di V_{DS} :

$$V_{DS} = V_{DD} \frac{R_0}{R + R_0} - I_{DSAT} R_0 \frac{R}{R + R_0}$$

4. si verifica l'ipotesi sul regime di saturazione sia soddisfatta:
 - in regime di saturazione per pinchoff: $V_{DS} > V_{REF} - V_{TN}$
 - in regime di saturazione di velocità: $V_{DS} > V_{DSATN}$
5. se la condizione è soddisfatta, si è trovata la soluzione; altrimenti si deve ripetere il procedimento per l'altro regime di saturazione

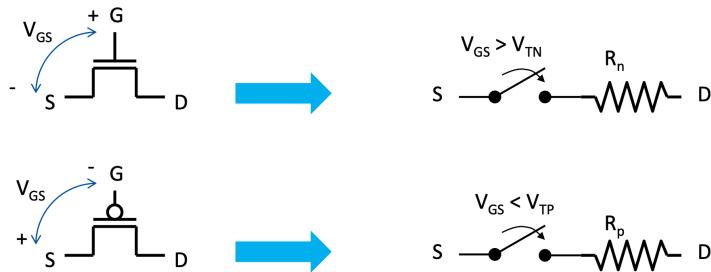
Il modello a canale lungo è un caso particolare del modello a canale corto con $\lambda_n = 0$ e $R_0 = \infty$, per cui il MOSFET si può modellare come un generatore ideale di corrente con corrente I_{DSAT} data dal regime di saturazione per pinchoff. Non prevedendo l'effetto di modulazione di lunghezza di canale e il fenomeno di saturazione di velocità, alla fine è sufficiente verificare solo la condizione $V_{DS} > V_{REF} - V_{TN}$.

6.4 MOSFET usato come interruttore

Modellizzazione del MOSFET come interruttore

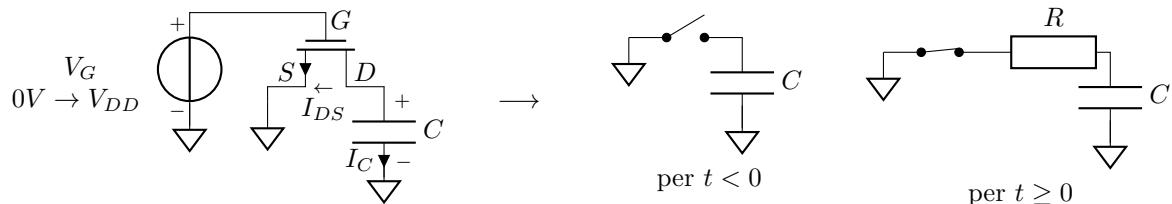
Nell'elettronica digitale i MOSFET sono utilizzati come interruttori ON/OFF. È possibile, infatti, modellare un MOSFET come un interruttore ideale pilotato dalla tensione di gate V_{GS} in serie ad una resistenza R_n per gli NMOS o R_p per i PMOS. Si considerano, quindi, soltanto due regimi di funzionamento:

- MOSFET "spento": interruttore aperto, $I_{DS} = 0$, per $V_{GS} < V_{TN}$ (NMOS) o $V_{GS} > V_{TP}$ (PMOS);
- MOSFET "acceso": resistore di resistenza R_n (NMOS) o R_p (PMOS).



6.5 Scarica di un condensatore con NMOS

Circuito di scarica



Equazioni del circuito per le leggi di Kirchhoff e la struttura della rete

$$V_G(t) = \begin{cases} 0V & t < 0 \\ V_{DD} & t \geq 0 \end{cases} \quad V_C(t \leq 0) = V_{DD} \quad V_{GS}(t) = V_G(t) \quad V_{DS}(t) = V_C(t) \quad I_{DS} + I_C(t) = 0$$

Analisi delle fasi del transitorio

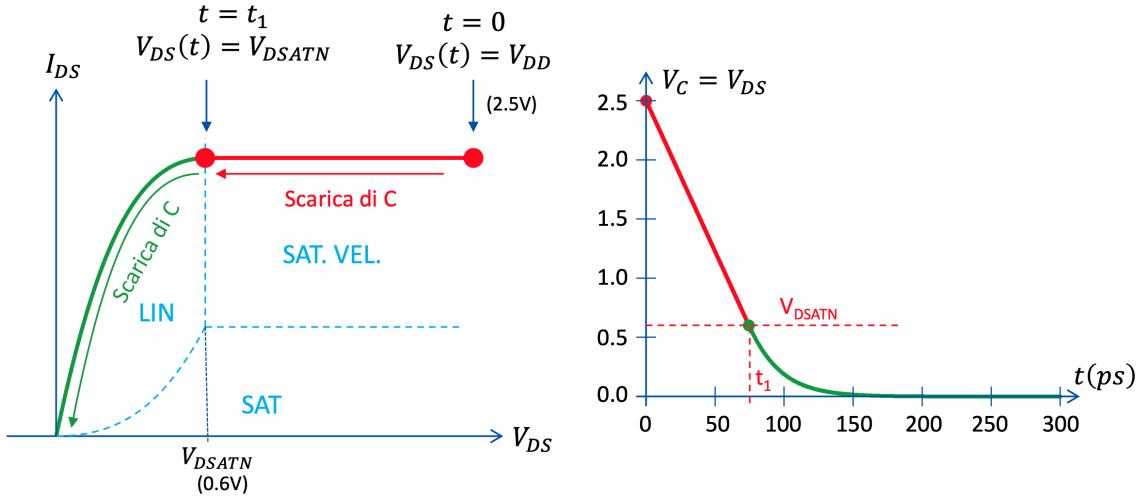
Si analizzano le variabili del circuito per $t < 0$, $t = 0$, $t > 0$ e $t \rightarrow \infty$:

- per $t < 0$: l'NMOS è spento poiché $V_{GS} = 0V < V_{TN}$ e il condensatore è carico a V_{DD} ;
- per $t = 0$: l'NMOS si accende poiché $V_{GS} = V_{DD} > V_{TN}$;
- per $t > 0$: l'NMOS rimane acceso poiché $V_{GS} = V_{DD} > V_{TN}$ e il condensatore si scarica;
- per $t \rightarrow \infty$: a regime l'NMOS rimane acceso e il condensatore si scarica completamente.

Analisi grafica delle fasi del transitorio

Si suppone, sotto certi dati, che il mosfet lavori soltanto in saturazione di velocità o in regime lineare. Si osserva che la scarica del condensatore avviene in due fasi (con un punto intermedio $t = t_1$):

1. per $0 < t < t_1$, $V_{DS} > V_{DSATN}$ il mosfet lavora in regime di saturazione di velocità e la corrente di scarica è costante pari a I_{DSATN} :
2. per $t = t_1$, $V_{DS} = V_{DSATN}$ il mosfet passa dal regime di saturazione di velocità a regime lineare;
3. per $t > t_1$, $V_{DS} < V_{DSATN}$ il mosfet lavora in regime lineare e la corrente di scarica dipende dalla tensione $V_{DS}(t) = V_C(t)$ e quindi dalla tensione del condensatore



Soluzione analitica del circuito

Si analizza la prima fase di scarica del condensatore per $0 < t < t_1$ (saturazione di velocità):

$$I_C(t) = C \frac{dV_C}{dt} \quad I_{DSATN} = k'_n Z_n V_{DSATN} \left(V_{DD} - V_{TN} - \frac{V_{DSATN}}{2} \right)$$

$$I_C(t) = -I_{DSATN} \quad \rightarrow \quad V_C(t) = V_{DD} - \frac{I_{DSATN}}{C} t$$

Si analizza il passaggio dalla prima alla seconda fase di scarica per $t = t_1$:

$$V_{GS}(t_1) = V_{DSATN} \quad \rightarrow \quad V_C(t_1) = V_{DSATN} \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{C}{I_{DSATN}} (V_{DD} - V_{DSATN})$$

Si analizza la seconda fase di scarica del condensatore per $t > t_1$ (regime lineare):

$$I_C(t) = C \frac{dV_C}{dt} \quad I_{DS}(t) = k'_n Z_n V_C(t) \left(V_{DD} - V_{TN} - \frac{V_C(t)}{2} \right)$$

$$I_C(t) = -I_{DS}(t) \quad \rightarrow \quad V_C(t) = \frac{1}{A e^{\alpha(t-t_1)} + B}$$

$$\alpha = \frac{k'_n Z_n}{C} (V_{DD} - V_{TN}) \quad A = \frac{1}{V_{DSATN}} - \frac{1}{2(V_{DD} - V_{TN})} \quad B = \frac{1}{2(V_{DD} - V_{TN})}$$

Carica del condensatore a regime

Per $t \rightarrow \infty$, la tensione sul condensatore si riduce a zero e il condensatore si scarica completamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_C(t) = 0V$$

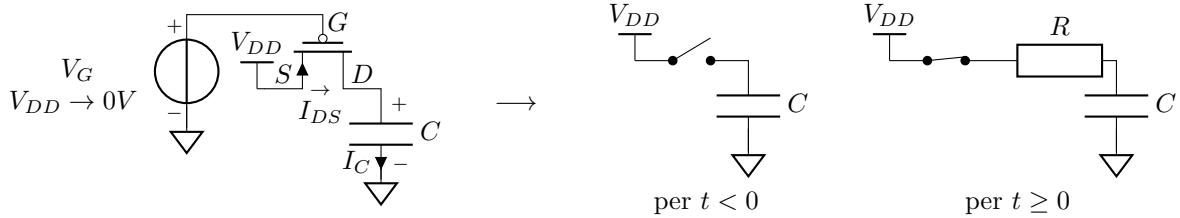
Tempo di dimezzamento di $V_C(t)$

Il tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ è il tempo necessario affinché la tensione sul condensatore si riduca alla metà del suo valore iniziale V_{DD} , ovvero quando $V_C(t_{1/2}) = V_{DD}/2$. Si osserva che tale valore viene assunto durante la prima fase di scarica, in cui il mosfet lavora in saturazione di velocità. Si calcola, quindi, $t_{1/2}$ come segue:

$$V_C(t_{1/2}) = \frac{V_{DD}}{2} \quad \rightarrow \quad t_{1/2} = \frac{CV_{DD}}{2I_{DSATN}}$$

6.6 Carica di un condensatore con PMOS

Circuito di carica



Equazioni del circuito per le leggi di Kirchhoff e la struttura della rete

$$V_G(t) = \begin{cases} V_{DD} & t < 0 \\ 0V & t \geq 0 \end{cases} \quad V_C(t \leq 0) = 0V \quad V_{GS}(t) = V_G(t) - V_{DD} \quad V_{DS}(t) = V_C(t) - V_{DD} \quad I_{DS} = I_C(t)$$

Analisi delle fasi del transitorio

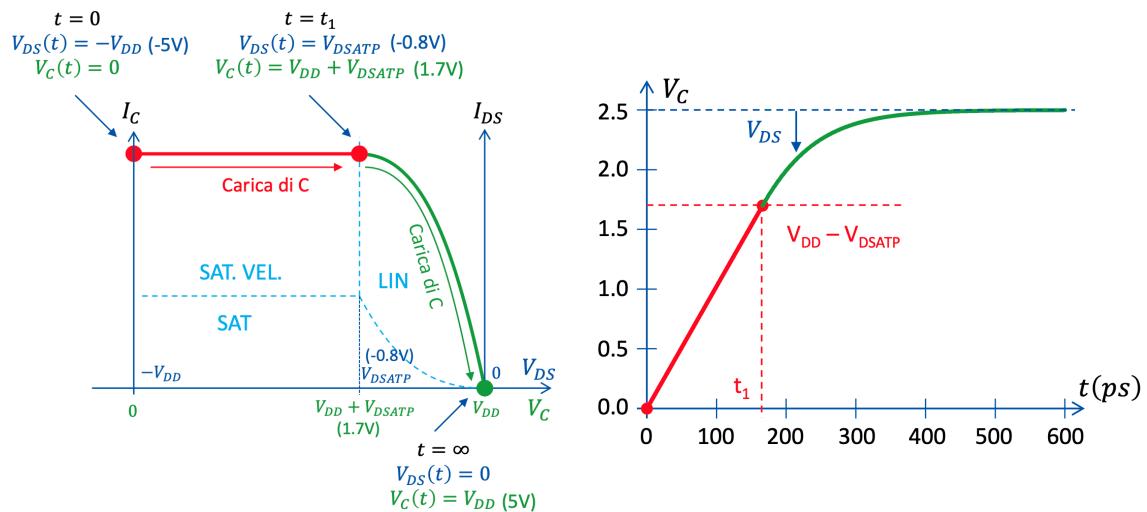
Si analizzano le variabili del circuito per $t < 0$, $t = 0$, $t > 0$ e $t \rightarrow \infty$:

- per $t < 0$: il PMOS è spento poiché $V_{GS} = 0V > V_{TP}$ e il condensatore è scarico con $V_C = 0V$;
- per $t = 0$: il PMOS si accende poiché $V_{GS} = -V_{DD} < V_{TP}$;
- per $t > 0$: il PMOS rimane acceso poiché $V_{GS} = -V_{DD} < V_{TP}$ e il condensatore si carica;
- per $t \rightarrow \infty$: a regime il PMOS rimane acceso e il condensatore si carica completamente a V_{DD} .

Analisi grafica delle fasi del transitorio

Si suppone, sotto certi dati, che il mosfet lavori soltanto in saturazione di velocità o in regime lineare. Si osserva che la scarica del condensatore avviene in due fasi (con un punto intermedio $t = t_1$):

1. per $0 < t < t_1$, $V_{DS} < V_{DSATP}$ il mosfet lavora in regime di saturazione di velocità e la corrente di scarica è costante pari a I_{DSATP} ;
2. per $t = t_1$, $V_{DS} = V_{DSATP}$ il mosfet passa dal regime di saturazione di velocità a regime lineare;
3. per $t > t_1$, $V_{DS} > V_{DSATP}$ il mosfet lavora in regime lineare e la corrente di scarica dipende dalla tensione $V_{DS}(t) = V_C(t) - V_{DD}$ e quindi dalla tensione del condensatore



Soluzione analitica del circuito

Si analizza la prima fase di scarica del condensatore per $0 < t < t_1$ (saturazione di velocità):

$$I_C(t) = C \frac{dV_C}{dt} \quad I_{DSATP} = k'_p Z_p V_{DSATP} \left(-V_{DD} - V_{TP} - \frac{V_{DSATP}}{2} \right)$$

$$I_C(t) = I_{DSATP} \quad \rightarrow \quad V_C(t) = \frac{I_{DSATP}}{C} t$$

Si analizza il passaggio dalla prima alla seconda fase di per $t = t_1$:

$$V_{DS}(t_1) = V_{DSATP} \quad \rightarrow \quad V_C(t_1) - V_{DD} = V_{DSATP} \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{C}{I_{DSATP}} (V_{DD} + V_{DSATP})$$

Si analizza la seconda fase di scarica del condensatore per $t > t_1$ (regime lineare):

$$I_C(t) = C \frac{dV_C}{dt} \quad I_{DS}(t) = k'_p Z_p (V_C(t) - V_{DD}) \left(-V_{DD} - V_{TP} - \frac{V_C(t) - V_{DD}}{2} \right)$$

$$I_C(t) = I_{DS}(t) \quad \rightarrow \quad V_C(t) = \frac{1}{A e^{\alpha(t-t_1)} + B} + V_{DD}$$

$$\alpha = \frac{k'_p Z_p}{C} (V_{DD} + V_{TP}) \quad A = \frac{1}{V_{DSATP}} + \frac{1}{2(V_{DD} + V_{TP})} \quad B = -\frac{1}{2(V_{DD} + V_{TP})}$$

Carica del condensatore a regime

Per $t \rightarrow \infty$, la tensione sul condensatore raggiunge il valore V_{DD} e il condensatore si carica completamente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_C(t) = V_{DD}$$

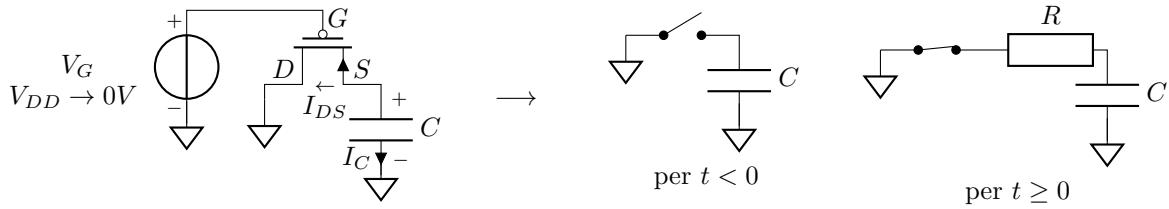
Tempo di dimezzamento di $V_C(t)$

Si analizza il tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ osservando che tale valore viene assunto durante la prima fase di carica, in cui il mosfet lavora in saturazione di velocità:

$$V_C(t_{1/2}) = \frac{V_{DD}}{2} \quad \rightarrow \quad t_{1/2} = \frac{CV_{DD}}{2I_{DSATP}}$$

6.7 Scarica di un condensatore con un PMOS

Circuito di scarica



Equazioni del circuito per le leggi di Kirchhoff e la struttura della rete

$$V_G(t) = \begin{cases} V_{DD} & t < 0 \\ 0V & t \geq 0 \end{cases} \quad V_C(t \leq 0) = V_{DD} \quad V_{GS}(t) = V_G(t) - V_C(t) \quad I_{DS} + I_C(t) = 0$$

$$V_{DS}(t) = -V_C(t)$$

Analisi delle fasi del transitorio

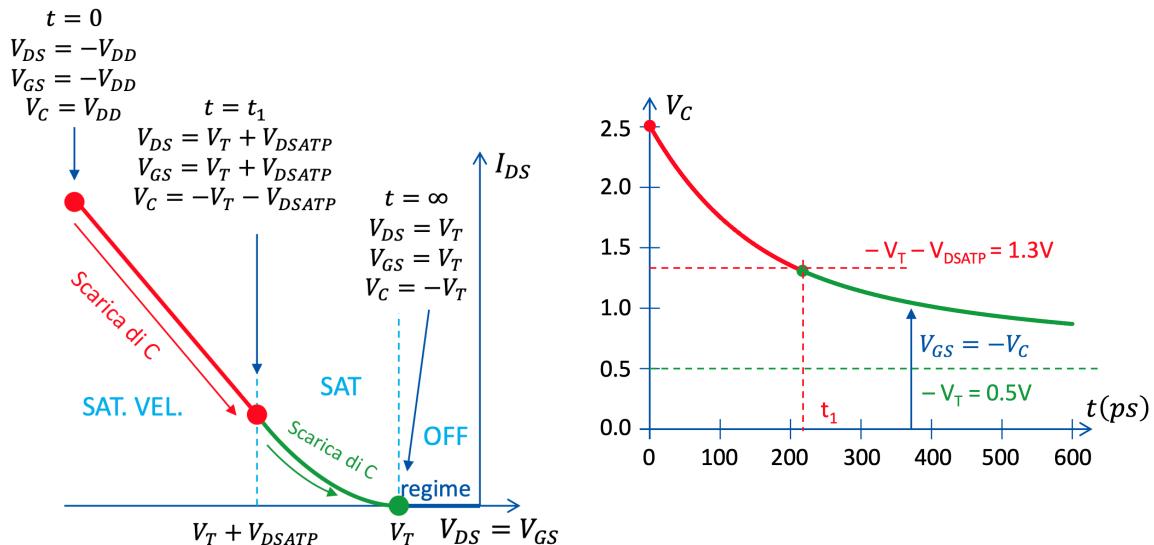
Si analizzano le variabili del circuito per $t < 0$, $t = 0$, $t > 0$ e $t \rightarrow \infty$:

- per $t < 0$: il PMOS è spento poiché $V_{GS}(t) = 0V > V_{TP}$ e il condensatore è carico a V_{DD} ;
- per $t = 0$: il PMOS si accende poiché $V_{GS}(t) = -V_{DD} < V_{TP}$;
- per $t > 0$: il PMOS è acceso finché $V_{GS}(t) < V_{TP} \rightarrow V_C(t) > -V_{TP}$
- per $t \rightarrow \infty$: a regime il PMOS si spegne per $V_{GS}(t) = V_{TP} \rightarrow V_C(t) = -V_{TP}$ lasciando il condensatore carico con tensione finale $V_C(t) = -V_{TP}$

Analisi grafica delle fasi del transitorio

Il PMOS è connesso a diodo (gate e drain entrambi a massa per $t \geq 0$), quindi lavora solo in saturazione. Si osserva che la scarica del condensatore avviene in due fasi (con un punto intermedio $t = t_1$):

1. per $0 < t < t_1$, $V_{GS} - V_{TP} < V_{DSATP}$ il mosfet lavora in regime di saturazione di velocità e la corrente di scarica è costante pari a I_{DSATP} :
2. per $t = t_1$, $V_{GS} - V_{TP} = V_{DSATP}$ il mosfet passa dal regime di saturazione per velocità a quello di saturazione per pinchoff:
3. per $t > t_1$, $V_{GS} - V_{TP} > V_{DSATP}$ il mosfet lavora in saturazione per pinchoff e la corrente di scarica dipende da $V_{GS}(t) - V_{TP} = -V_C(t) - V_{TP}$ e quindi anche dalla tensione del condensatore $V_C(t)$



Soluzione analitica del circuito

Si analizza la prima fase di scarica del condensatore per $0 < t < t_1$ (saturazione di velocità):

$$I_C(t) = C \frac{dV_C}{dt} \quad I_{DSATP}(t) = k'_p Z_p V_{DSATP} \left(-V_C(t) - V_{TP} - \frac{V_{DSATP}}{2} \right)$$

$$I_C(t) = I_{DSATP}(t) \rightarrow V_C(t) = V_{DD} - \left(V_{TP} + \frac{V_{DSATP}}{2} \right) (1 - e^{-\alpha t}) \quad \text{con } \alpha = -\frac{k'_p Z_p V_{DSATP}}{C}$$

Si analizza il passaggio dalla prima alla seconda fase di per $t = t_1$:

$$V_{GS}(t_1) - V_{TP} = V_{DSATP} \rightarrow V_C(t_1) = -V_{TP} - V_{DSATP} \rightarrow t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{2V_{DD} + 2V_{TP} + V_{DSATP}}{-V_{DSATP}} \right)$$

Si analizza la seconda fase di scarica del condensatore per $t > t_1$ (saturazione per pinchoff):

$$I_C(t) = C \frac{dV_C}{dt} \quad I_{DS}(t) = \frac{k'_p Z_p}{2} (V_{GS}(t) - V_{TP})^2 = \frac{k'_p Z_p}{2} (-V_C(t) - V_{TP})^2$$

$$I_C(t) = I_{DS}(t) \rightarrow V_C(t) = -V_{TP} + \frac{2CV_{DSATP}}{k'_p Z_p V_{DSATP}(t - t_1) - 2C}$$

Valore di regime

Si analizza il valore di regime della tensione sul condensatore $V_C(t)$ per $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_C(t) = -V_{TP}$$

Si ha, quindi, che il condensatore si scarica fino a raggiungere la tensione di soglia del PMOS.

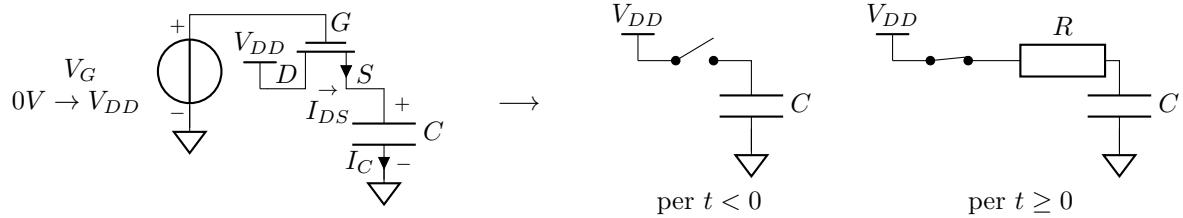
Tempo di dimezzamento di $V_C(t)$

Si analizza il tempo di dimezzamento $t_{1/2}$, osservando che tale valore viene assunto durante la seconda fase di scarica, in cui il mosfet lavora in saturazione per pinchoff:

$$V_C(t_{1/2}) = \frac{V_{DD}}{2} \rightarrow t_{1/2} = t_1 - 2C \frac{V_{DD} + 2V_{TP} + 2V_{DSATP}}{k'_p Z_p V_{DSATP}(V_{DD} + 2V_{TP})}$$

6.8 Carica di un condensatore con un NMOS

Circuito di carica



Equazioni del circuito per le leggi di Kirchhoff e la struttura della rete

$$V_G(t) = \begin{cases} 0V & t < 0 \\ V_{DD} & t \geq 0 \end{cases} \quad V_C(t \leq 0) = 0V \quad \begin{aligned} V_{GS}(t) &= V_G(t) - V_C(t) \\ V_{DS}(t) &= V_{DD} - V_C(t) \end{aligned} \quad I_{DS} = I_C(t)$$

Analisi delle fasi del transitorio

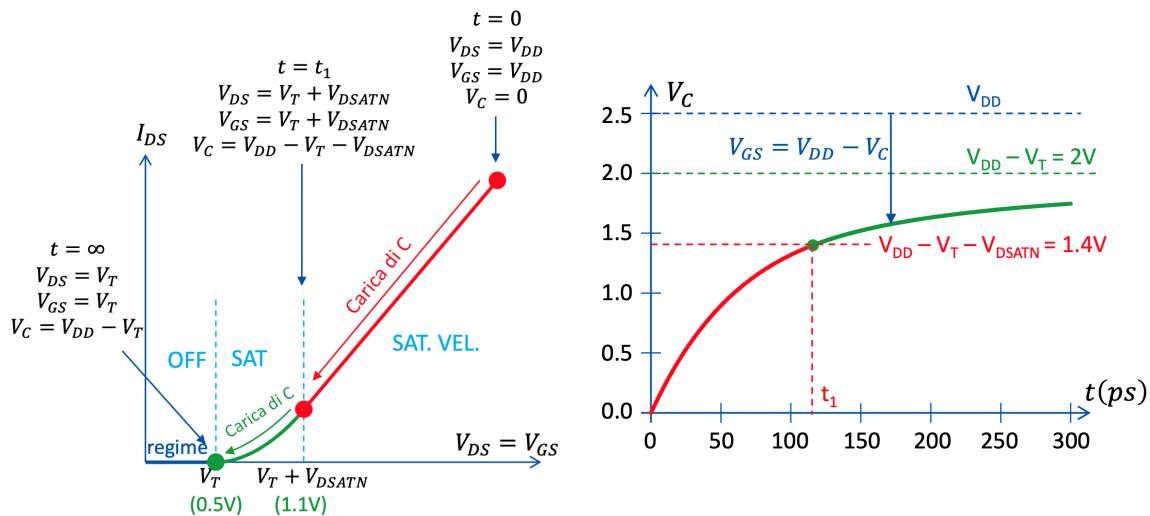
Si analizzano le variabili del circuito per $t < 0$, $t = 0$, $t > 0$ e $t \rightarrow \infty$:

- per $t < 0$: l'NMOS è spento poiché $V_{GS}(t) = 0V < V_{TN}$;
- per $t = 0$: l'MOS si accende poiché $V_{GS}(t) = V_{DD} > V_{TN}$;
- per $t > 0$: l'MOS è acceso finché $V_{GS}(t) > V_{TN} \rightarrow V_C(t) < V_{DD} - V_{TN}$
- per $t \rightarrow \infty$: a regime l'MOS si spegne quando $V_{GS}(t) = V_{TN} \rightarrow V_C(t) = V_{DD} - V_{TN}$ lasciando il condensatore carico con tensione finale $V_C(t) = V_{DD} - V_{TN}$

Analisi grafica delle fasi del transitorio

Il PMOS è connesso a diodo (gate e drain entrambi a V_{DD} per $t \geq 0$), quindi lavora solo in saturazione. Si osserva che la carica del condensatore avviene in due fasi (con un punto intermedio $t = t_1$):

1. per $0 < t < t_1$, $V_{GS} - V_{TN} > V_{DSATN}$ il mosfet lavora in regime di saturazione di velocità e la corrente di carica è costante pari a I_{DSATN} :
2. per $t = t_1$, $V_{GS} - V_{TN} = V_{DSATN}$ il mosfet passa dal regime di saturazione per velocità a quello di saturazione per pinchoff:
3. per $t > t_1$, $V_{GS} - V_{TN} < V_{DSATN}$ il mosfet lavora in saturazione per pinchoff e la corrente di scarica dipende da $V_{GS}(t) - V_{TN} = V_{DD} - V_C(t) - V_{TN}$, quindi anche dalla tensione del condensatore $V_C(t)$



Soluzione analitica del circuito

Si analizza la prima fase di carica del condensatore per $0 < t < t_1$ (saturazione di velocità):

$$I_C(t) = C \frac{dV_C}{dt} \quad I_{DSATN}(t) = k'_p Z_p V_{DSATN} \left(V_{DD} - V_C(t) - V_{TN} - \frac{V_{DSATN}}{2} \right)$$

$$I_C(t) = I_{DSATN}(t) \rightarrow V_C(t) = \left(V_{DD} - V_{TN} - \frac{V_{DSATN}}{2} \right) (1 - e^{-\alpha t}) \quad \text{con } \alpha = -\frac{k'_p Z_p V_{DSATN}}{C}$$

Si analizza il passaggio dalla prima alla seconda fase di per $t = t_1$:

$$V_{GS}(t_1) - V_{TN} = V_{DSATN} \rightarrow V_C(t_1) = V_{DD} - V_{TN} - V_{DSATN} \rightarrow t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{V_{DD} - V_{TN}}{V_{DSATN}} - 1 \right)$$

Si analizza la seconda fase di carica del condensatore per $t > t_1$ (saturazione per pinchoff):

$$I_C(t) = C \frac{dV_C}{dt} \quad I_{DS}(t) = \frac{k'_p Z_p}{2} (V_{GS}(t) - V_{TN})^2 = \frac{k'_p Z_p}{2} (V_{DD} - V_C(t) - V_{TN})^2$$

$$I_C(t) = I_{DS}(t) \rightarrow V_C(t) = V_{DD} - V_{TN} - \frac{2CV_{DSATN}}{k'_p Z_p V_{DSATN}(t - t_1) + 2C}$$

Valore di regime

Si analizza il valore di regime della tensione sul condensatore $V_C(t)$ per $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_C(t) = V_{DD} - V_{TN}$$

Si ha, quindi, che il condensatore si carica fino a raggiungere la tensione finale $V_C(t) = V_{DD} - V_{TN}$.

Tempo di dimezzamento di $V_C(t)$

Si analizza il tempo di dimezzamento $t_{1/2}$, osservando che tale valore viene assunto durante la prima fase di carica, in cui il mosfet lavora in saturazione per velocità:

$$V_C(t_{1/2}) = \frac{V_{DD}}{2} \rightarrow t_{1/2} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{2V_{DD} - 2V_{TN} - V_{DSATN}}{V_{DD} - 2V_{TN} - V_{DSATN}} \right)$$

6.9 Confronto dei transitori per carica e scarica con NMOS e PMOS

Dati

Si scelgono i seguenti dati per il confronto dei transitori di carica e scarica con NMOS e PMOS:

circuito	NMOS		PMOS	
$C = 10fF$	$k'_n = 125\mu A/V^2$	$Z_n = 2$	$k'_p = 40\mu A/V^2$	$Z_p = 2$
$V_{DD} = 2.5V$	$V_{TN} = 0.5V$	$V_{DSATN} = 0.6V$	$V_{TP} = -0.5V$	$V_{DSATP} = -0.8V$

Confronto dei tempi caratteristici

circuito	t_1	$t_{1/2}$	$V_C(t \rightarrow \infty)$
scarica con NMOS	74.5 ps	49 ps	0V
carica con NMOS	115.6 ps	88.6 ps	$V_{DD} - V_{TN} < V_{DD}$
carica con PMOS	151.7 ps	122 ps	V_{DD}
scarica con PMOS	216.6 ps	237 ps	$-V_{TP} > 0V$

Si nota che:

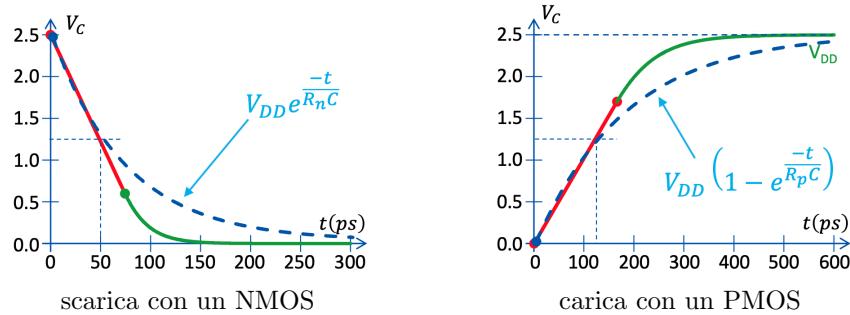
- l'NMOS scarica totalmente il condensatore, ma lo carica parzialmente fino ad un valore inferiore a V_{DD} , si dice che **l'NMOS trasmette bene il valore logico basso (0V)**;
- il PMOS carica totalmente il condensatore, ma lo scarica parzialmente fino ad un valore superiore a 0V, si dice che **il PMOS trasmette bene il valore logico alto (V_{DD})**;
- i tempi di dimezzamento per trasmettere il valore logico “cattivo” (carica con NMOS e scarica con PMOS) sono circa il doppio rispetto a quelli per trasmettere il valore logico “buono” (scarica con NMOS e carica con PMOS);
- il tempo di carica con PMOS è circa il doppio rispetto al tempo di scarica con NMOS, a parità del fattore di forma $Z_n = Z_p$

Effetto body nei circuiti di carica e scarica dei condensatori

Spesso, nei circuiti digitali, i body degli NMOS sono collegati a massa e quelli dei PMOS a V_{DD} , non necessariamente al loro source. Nell'NMOS in scarica e nel PMOS in carica ciò non comporta variazioni, mentre nell'NMOS in carica e nel PMOS in scarica si ha un aumento in modulo della soglia di tensione V_{TN} e V_{TP} rispettivamente, a causa dell'effetto body. Ciò comporta un aumento dei tempi di carica e scarica dei condensatori e un **peggioramento ulteriore nella trasmissione dei valori logici “cattivi”**.

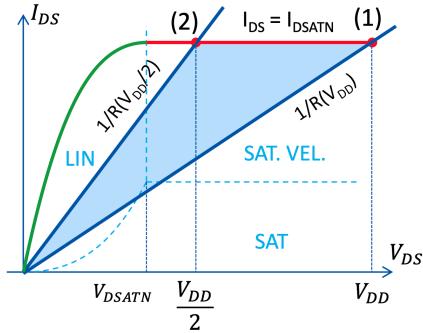
6.10 Resistenza equivalente del MOSFET come interruttore

Per facilitare l'analisi dei circuiti con MOSFET come interruttori, si può approssimare il comportamento del MOSFET acceso con una resistenza equivalente R_{eq} . In questo modo si linearizza il comportamento non lineare del MOSFET e si possono utilizzare le tecniche di analisi dei circuiti lineari. In particolare le curve di scarica e carica diventano esponenziali con costante di tempo $\tau = R_{eq}C$.



Definizione di resistenza equivalente R_{eq}

Si definisce la resistenza equivalente R_{eq} del MOSFET come interruttore acceso come la media della resistenza istantanea agli estremi dell'intervallo di interesse, ovvero a $t = 0$ e a $t = t_{1/2}$, quando il MOSFET trasmette il valore logico "buono".



$$\text{NMOS: } R_n(0) = \frac{V_{DD}}{I_{DSATN}}, \quad R_n(t_{1/2}) = \frac{V_{DD}/2}{I_{DSATN}} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_n = \frac{R_n(0) + R_n(t_{1/2})}{2} = \frac{3}{4} \frac{V_{DD}}{I_{DSATN}}$$

$$\text{PMOS: } R_p(0) = \frac{V_{DD}}{I_{DSATP}}, \quad R_p(t_{1/2}) = \frac{V_{DD}/2}{I_{DSATP}} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_p = \frac{R_p(0) + R_p(t_{1/2})}{2} = \frac{3}{4} \frac{V_{DD}}{I_{DSATP}}$$

NOTE:

- nelle elaborazioni delle reti logiche digitali, si considera solo la prima parte del transitorio, ovvero fino al tempo di dimezzamento $t_{1/2}$, in quanto è il momento in cui la tensione è vicina alla tensione di soglia logica, ovvero al valore in cui il segnale digitale cambia stato logico (da 0 a 1 o da 1 a 0);
- si calcola la resistenza solo nei casi in cui il MOSFET trasmette il valore logico "buono", siccome è il comportamento più ricercato ed utilizzato nei circuiti digitali; più avanti viene anche approfondita la resistenza equivalente per valori logici "cattivi".

Fattore di forma e resistenza equivalente

La corrente di saturazione I_{DSAT} dipende dal fattore di forma Z del MOSFET e può esser riscritta come:

$$I_{DSATN} = Z_n V_{DSATN0} \quad I_{DSATP} = Z_p V_{DSATP0}$$

Per cui la resistenza equivalente può essere riscritta in funzione delle costanti R_{n0} e R_{p0} , ovvero le resistenze equivalenti per fattore di forma unitario $Z_n = Z_p = 1$.

$$R_n = \frac{R_{n0}}{Z_n} \text{ con } R_{n0} = \frac{3}{4} \frac{V_{DD}}{V_{DSATN0}} \quad R_p = \frac{R_{p0}}{Z_p} \text{ con } R_{p0} = \frac{3}{4} \frac{V_{DD}}{V_{DSATP0}}$$

Si nota che la resistenza equivalente R_{eq} è inversamente proporzionale al fattore di forma Z del MOSFET, per cui aumentando il fattore di forma Z del MOSFET, si riduce la resistenza equivalente R_{eq} e quindi si riduce anche la costante di tempo $\tau = R_{eq}C$ del circuito, migliorando le prestazioni del circuito.

Analizzando i valori tipici delle tecnologie CMOS si osserva che:

$$k'_n \approx 3k'_p, \quad V_{TN} \approx -V_{TP}, \quad V_{DSATN} \approx -\frac{2}{3}V_{DSATP} \Rightarrow R_{n0} \approx 2R_{p0}$$

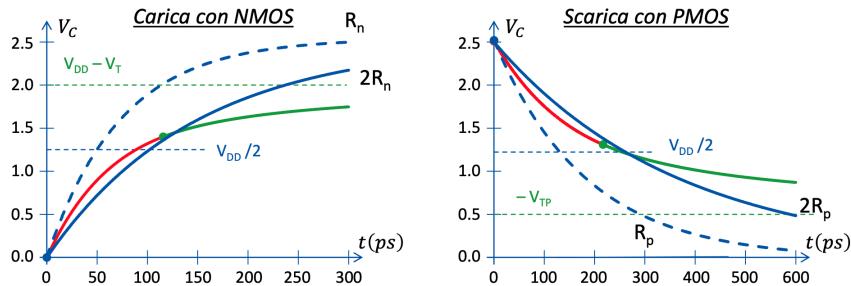
$$\frac{R_{n0}}{R_{p0}} = \frac{k'_n V_{DSATN} (V_{DD} - V_{TN} - \frac{V_{DSATN}}{2})}{k'_p V_{DSATP} (-V_{DD} - V_{TP} - \frac{V_{DSATP}}{2})} \approx \frac{k'_n V_{DSATN}}{-k'_p V_{DSATP}} \approx 3 \cdot \frac{2}{3} = 3$$

Resistenze equivalenti per valori logici “cattivi”

Si osserva che per approssimare al meglio il transitorio dei mosfet nella trasmissione di valori logici “cattivi”, è necessario raddoppiare le resistenze equivalenti calcolate in precedenza:

NMOS (carica): $R_{n,cattivo} = 2R_{n,buono}$

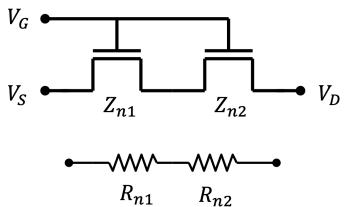
PMOS (scarica): $R_{p,cattivo} = 2R_{p,buono}$



6.11 Reti di MOSFET e resistenza equivalente complessiva

Serie di MOS

La serie di MOSFET equivale ad un MOSFET equivalente con resistenza equivalente pari alla somma delle resistenze equivalenti dei singoli MOSFET e con fattore di forma pari al reciproco della somma dei reciproci dei fattori di forma dei singoli MOSFET:

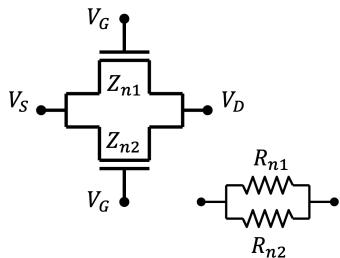


$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \rightarrow Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Parallelo di MOS

La parallelo di MOSFET equivale ad un MOSFET equivalente con resistenza equivalente pari al reciproco della somma dei reciproci delle resistenze equivalenti dei singoli MOSFET e con fattore di forma pari alla somma dei fattori di forma dei singoli MOSFET:



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2$$

7 Breve cenno ai segnali digitali

7.1 Segnali binari logici ed elettrici

- **segnale digitale:** segnale ad ampiezza discreta e a tempo discreto. Viene detto anche segnale numerico perché tempo e ampiezza possono essere rappresentati con numeri
- **segnale binario:** segnale digitale che può assumere solo due valori distinti, uno il negato dell'altro. In base al dominio può essere rappresentato in modi diversi:
 - nel **dominio logico** è rappresentato con una variabile booleana che può assumere i valori logici *True* (1) e *False* (0).
 - nel **dominio elettrico** è rappresentato con due livelli di tensione distinti, uno alto V_H (HIGH) e uno basso V_L (LOW), che corrispondono al potenziale più alto e più basso del circuito.

7.2 Circuiti e porte logiche

Un **circuito logico** è un componente elettronico che elabora segnali digitali binari ed è formato da più transistor. È costituito da uno o più ingressi e da una o più uscite che possono assumere i due valori di tensione V_H e V_L . In particolare il valore dell'uscita è esprimibile come funzione logica degli ingressi.

Esistono due famiglie di circuiti logici:

- **circuiti combinatori:** l'uscita dipende solo dagli ingressi in un dato istante di tempo
- **circuiti sequenziali:** l'uscita dipende dagli ingressi in un dato istante di tempo e anche dall'uscita dell'istante precedente, vengono anche detti circuiti con memoria.

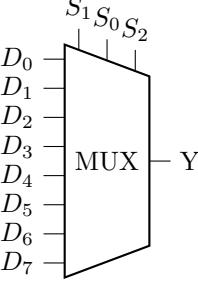
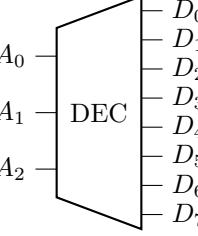
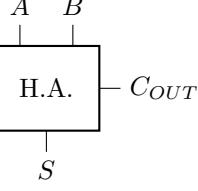
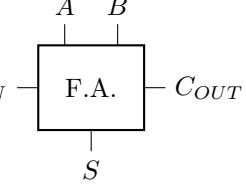
Per semplificare la notazione si assumono le seguenti convenzioni sui livelli di tensione:

- il livello logico alto è rappresentato con $V_H = V_{DD} > 0$, ovvero il potenziale maggiore del circuito;
- il livello logico basso è rappresentato con $V_L = 0V$, ovvero il potenziale minore del circuito;
- si nominano i nodi delle reti logiche con variabili booleane A, B, C, \dots per indicare che i valori di potenziale che possono assumere sono $V_L = 0V$ o $V_H = V_{DD}$.

Porte logiche e circuiti logici fondamentali

Una **porta logica** è un circuito logico combinatorio che implementa una specifica funzione logica booleana. Di seguito sono riportate le porte logiche e i circuiti logici fondamentali.

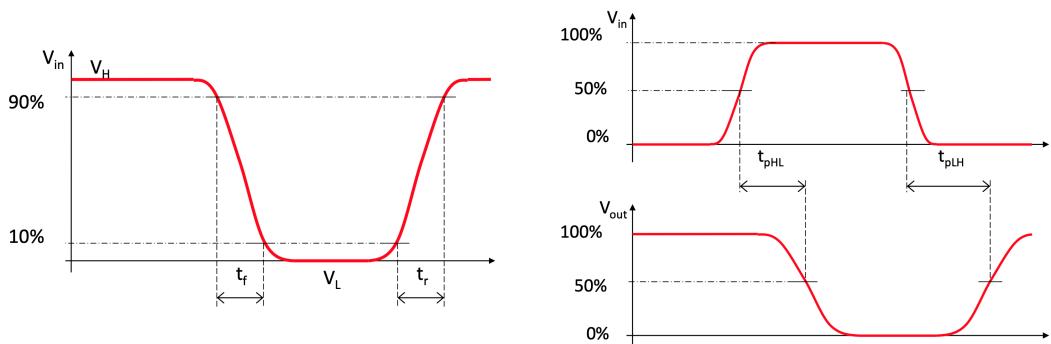
circuito	Funzione identità	Porta AND	Porta OR	Porta XOR
simbolo				
funzione	$Y = A$	$Y = A \cdot B$	$Y = A + B$	$Y = A \oplus B$
tab. di verità	$\begin{array}{c c} A & Y \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c c c} & A & B & Y \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c c c} & A & B & Y \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c c c} & A & B & Y \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$
circuito	Invertitore NOT	Porta NAND	Porta NOR	Porta XNOR
simbolo				
funzione	$Y = \bar{A}$	$Y = \overline{A \cdot B}$	$Y = \overline{A + B}$	$Y = \overline{A \oplus B}$
tab. di verità	$\begin{array}{c c} A & Y \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c c} & A & B & Y \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c c} & A & B & Y \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c c} & A & B & Y \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$

circuito	simbolo	descrizione
Multiplexer (MUX)		Dispositivo che seleziona quale tra 2^n segnali di ingresso $D_0, D_1, \dots, D_{2^n-1}$ trasmettere alla porta di uscita Y , tramite n segnali di controllo S_0, S_1, \dots, S_{n-1} .
Decoder (DEC)		Dispositivo che decodifica un segnale di ingresso A di n bit in 2^n segnali di uscita $D_0, D_1, \dots, D_{2^n-1}$, attivando solo l'uscita corrispondente al valore binario di A .
Half Adder (HA)		Circuito che somma due bit A e B , producendo una somma S e una riporto C : $C_{OUT} = A \cdot B \quad S = A \oplus B$
Full Adder (FA)		Circuito che somma due bit A e B con un riporto in ingresso C_{IN} , producendo una somma S e un riporto in uscita C_{OUT} : $C_{OUT} = A \cdot B + C_{IN} \cdot (A + B) \quad S = A \oplus B \oplus C_{IN}$

7.3 Parametri dinamici dei circuiti logici

Per misurare le prestazioni di un circuito logico si usano i seguenti parametri dinamici:

- **tempo di commutazione**: tempo impiegato dall'uscita di un circuito logico per cambiare stato (grafico a sinistra). Si distinguono due tempi di commutazione:
 - t_f : tempo di discesa, dal 90% (alto) al 10% (basso) dell'escursione totale
 - t_r : tempo di salita, dal 10% (basso) al 90% (alto) dell'escursione totale
- **tempo di propagazione t_p** : tempo medio di propagazione del segnale dall'ingresso all'uscita del circuito logico (grafico a destra). Si distinguono due tempi di propagazione:
 - t_{PLH} : tempo di propagazione con l'uscita che passa da livello logico basso a livello logico alto
 - t_{PHL} : tempo di propagazione con l'uscita che passa da livello logico alto a livello logico basso

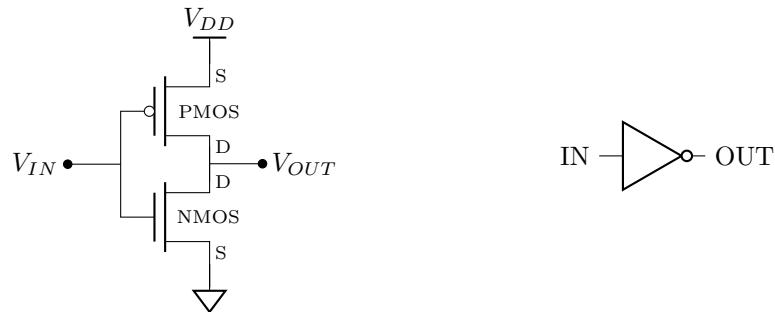


8 Invertitore CMOS

8.1 Schema circuitale

Schema circuitale e simbolo logico

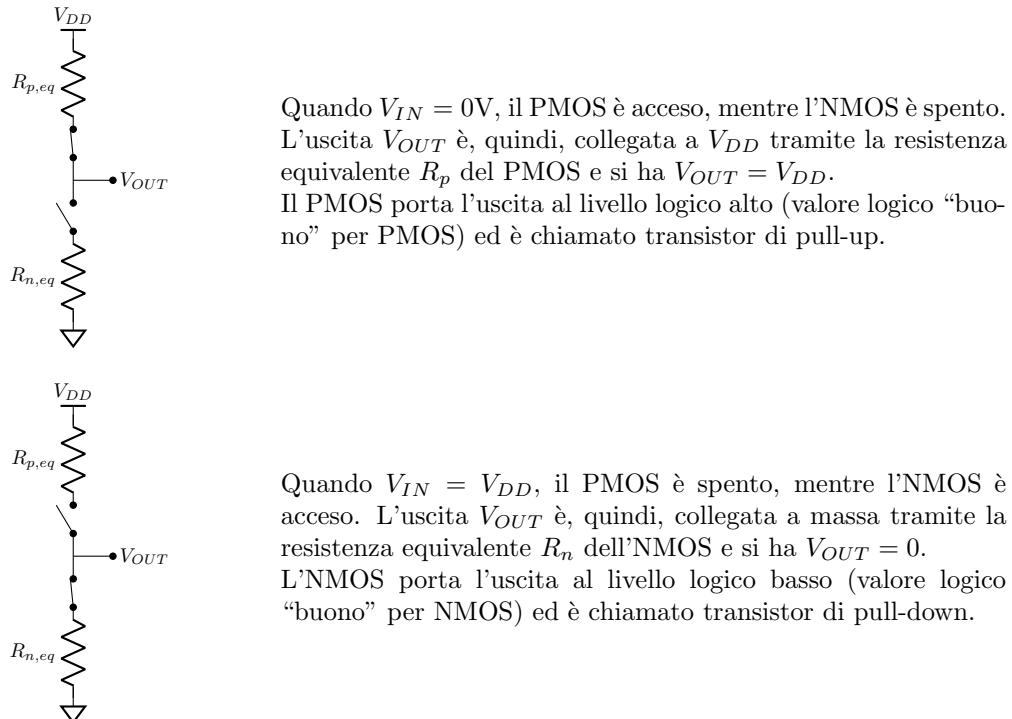
L'invertitore CMOS è il circuito logico più semplice realizzabile con la tecnologia CMOS. Implementa la funzione logica NOT, ovvero l'operazione di negazione booleana. Lo schema circuitale dell'invertitore CMOS è riportato in figura (a sinistra), insieme al simbolo logico corrispondente (a destra).



L'invertitore CMOS è costituito da un transistor NMOS e un transistor PMOS collegati in serie tra V_{DD} e massa. L'ingresso del circuito è collegato ai gate di entrambi i transistor, mentre l'uscita è prelevata dal nodo di connessione tra i due transistor.

Funzionamento

Per comprendere meglio il funzionamento dell'invertitore CMOS si sostituiscono i transistor (usati come interruttori) con la serie di interruttore e resistenza equivalente, come mostrato in figura. Si distinguono due casi principali in base al valore logico dell'ingresso V_{IN} :



In entrambi i casi l'uscita V_{OUT} assume il valore logico opposto rispetto all'ingresso V_{IN} , come previsto dalla funzione logica NOT.

8.2 Caratteristica di trasferimento ingresso-uscita

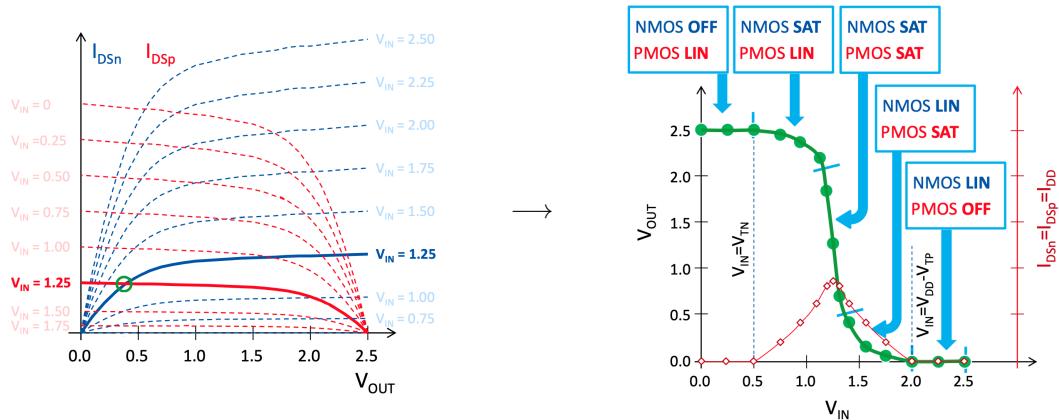
La caratteristica statica di trasferimento, o caratteristica di trasferimento ingresso-uscita (VTC, voltage transfer characteristic) è la curva che descrive il valore di V_{OUT} in funzione di V_{IN} .

Calcolo grafico della VTC

Per ottenerla, si uguagliano le correnti attraverso i due transistor secondo la legge di Kirchhoff delle correnti (LKC).

$$I_{DS,n}(V_{IN}, V_{OUT}) = I_{DS,p}(V_{IN}, V_{OUT})$$

Per evitare di fare conti, si risolve l'equazione graficamente, ovvero si tracciano le curve delle due correnti in funzione di V_{OUT} per diversi valori di V_{IN} . I punti di intersezione delle due curve rappresentano le soluzioni dell'equazione, ovvero i valori di V_{OUT} corrispondenti a ciascun valore di V_{IN} .



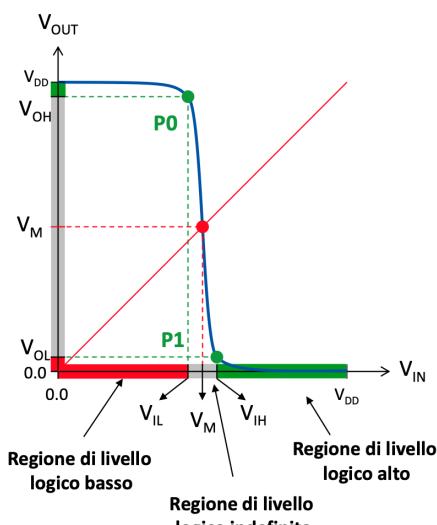
Regioni di funzionamento dei transistor

Si osserva che per $V_{IN} = 0V$ o $V_{IN} = V_{DD}$ un solo transistor è acceso in regime lineare, mentre l'altro è spento. Per valori intermedi si ha che:

- il PMOS passa da lineare a saturazione e infine si spegne al crescere di V_{IN}
- l'NMOS da interdizione, passa da saturazione e infine lineare al crescere di V_{IN}

Punti importanti

La pendenza della VTC (ovvero la derivata di V_{OUT} in funzione di V_{IN}) corrisponde al guadagno in tensione dell'invertitore. Si definiscono i seguenti punti importanti della VTC:



P_0 e P_1 corrispondono ai punti con guadagno unitario. Tali punti delimitano la regione di livello logico indefinito, con guadagno > 1 e le regioni di livello logico definito (a sinistra e a destra), con guadagno < 1 .

Si osserva che in corrispondenza delle regioni di livello logico definito la pendenza della curva è molto bassa (guadagno < 1), per cui piccole variazioni di V_{IN} producono variazioni trascurabili di V_{OUT} (proprietà di rigenerazione del segnale).

Il pallino rosso in cui $V_{OUT} = V_{IN}$ è il punto di soglia di commutazione logica dell'invertitore. La tensione di ingresso associata a questo punto è detta soglia di commutazione logica V_M .

8.3 Soglia di commutazione logica

Calcolo della tensione di commutazione logica

Per calcolare la soglia di commutazione logica V_M si impone la condizione $V_{OUT} = V_{IN} = V_M$, ovvero si cortocircuitano l'ingresso e l'uscita dell'invertitore. Si ottiene, quindi, la seguente equazione che dipende solo da V_M :

$$I_{DS,n}(V_M) = I_{DS,p}(V_M)$$

Si ottiene V_M risolvendo l'equazione:

$$V_M = \frac{V_{TN} + \frac{V_{DSATN}}{2} + r \left(V_{DD} + V_{TP} + \frac{V_{DSATP}}{2} \right)}{1 + r} \quad \text{con } r = -\frac{Z_p}{Z_n} \frac{k'_p V_{DSATP}}{k'_n V_{DSATN}}$$

Relazione tra tensione di commutazione logica e rapporto dei fattori di forma

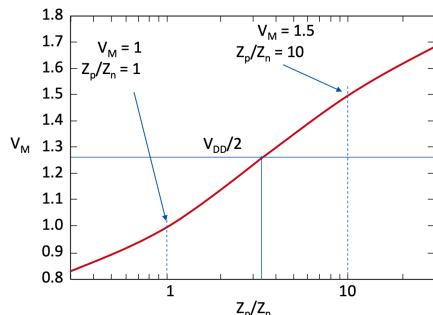
Si osserva che V_M oltre a dipendere dai parametri fisici dei transistor e dal valore di V_{DD} , dipende anche dal rapporto tra i fattori di forma dei due transistor Z_p/Z_n . Modificando tale rapporto è possibile regolare il valore di V_M . In particolare per avere $V_M = V_{DD}/2$ si ottiene:

$$V_M = \frac{V_{DD}}{2} \rightarrow r = \frac{\frac{V_{DD}}{2} - V_{TN} - \frac{V_{DSATN}}{2}}{\frac{V_{DD}}{2} + V_{TP} + \frac{V_{DSATP}}{2}} \rightarrow \frac{Z_p}{Z_n} = -r \frac{k'_n V_{DSATN}}{k'_p V_{DSATP}} \approx 3 - 3.5$$

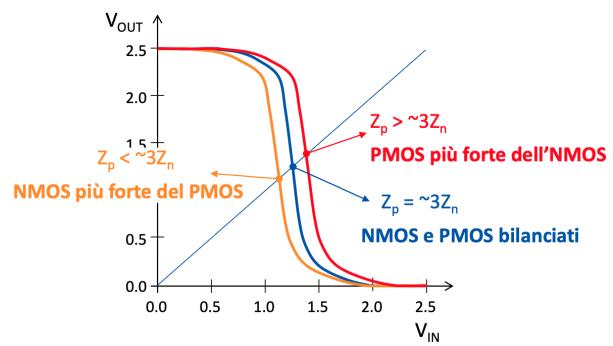
Analizzando graficamente come varia V_M al variare del rapporto Z_p/Z_n , si osserva che:

- per $Z_p > 3Z_n$ aumenta V_M , prevale il PMOS e la VTC si sposta verso destra (il valore logico alto si mantiene più a lungo)
- per $Z_p < 3Z_n$ diminuisce V_M , prevale l'NMOS e la VTC si sposta verso sinistra (il valore logico basso si mantiene più a lungo)
- per $Z_p = 3Z_n$ si ha $V_M \approx V_{DD}/2$ e i due transistor si bilanciano e la VTC è simmetrica

Infine si nota che la curva è molto piatta in corrispondenza della soglia di commutazione logica, il che implica che V_M è poco sensibile alle variazioni dei fattori di forma dei transistor.



V_M al variare di Z_p/Z_n , in scala logaritmica



VTC al variare di Z_p/Z_n

8.4 Tolleranza al rumore

Tipi di disturbi in un circuito elettrico

In un circuito elettrico possono essere presenti diversi tipi di disturbi che possono alterare il corretto funzionamento del circuito stesso. I principali tipi di disturbi sono:

- **accoppiamenti induttivi**: disturbi causati dalla mutua induzione di due conduttori vicini dovuta all'induttanza parassita delle piste di collegamento
- **accoppiamenti capacitivi**: disturbi causati dalla capacità parassita tra due conduttori vicini
- **rumore dell'alimentazione**: variazioni indesiderate della tensione di alimentazione del circuito dovuta ad esempio dalla caduta di tensione per le resistenze lungo le linee di alimentazione

Margine di immunità al rumore

Il margine di immunità al rumore o NM (noise margin) rappresenta l'ampiezza massima del disturbo che è possibile avere durante la trasmissione del segnale tra due porte logiche, senza che si verifichino errori di interpretazione del segnale logico. In base al livello logico si distinguono due margini di immunità:

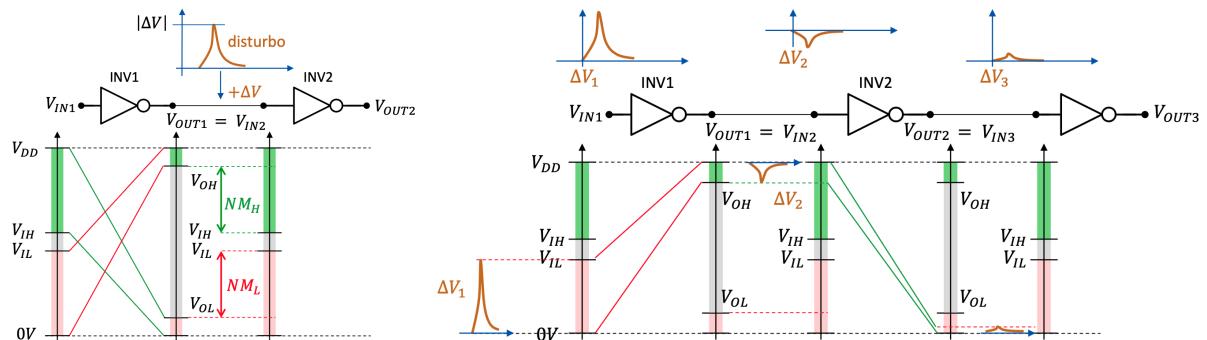
- NM per il livello logico alto: $NM_H = V_{OH} - V_{IH}$ ovvero la differenza tra la minima tensione di uscita di un segnale a livello logico alto e la minima tensione di ingresso per riconoscere un segnale come livello logico alto;
- NM per il livello logico basso: $NM_L = V_{IL} - V_{OL}$ ovvero la differenza tra la massima tensione di ingresso per riconoscere un segnale come livello logico basso e la massima tensione di uscita di un segnale a livello logico basso.

Il margine di immunità complessivo, ovvero il massimo disturbo tollerabile, corrisponde al margine di immunità più piccolo tra i due livelli logici $NM = \min(NM_H, NM_L)$.

Rigenerazione del segnale

La rigenerazione del segnale è la capacità di un circuito logico di ripristinare i livelli logici di uscita a valori vicini ai valori ideali V_{OH} e V_{OL} , attenuando gli effetti dei disturbi e del rumore sul segnale.

Affinché una porta logica sia in grado di rigenerare il segnale, è necessario che il guadagno della VTC sia minore di 1 nelle regioni di livello logico definito e maggiore di 1 nella regione di livello logico indefinito.



Ruolo della tensione di commutazione logica nella rigenerazione del segnale

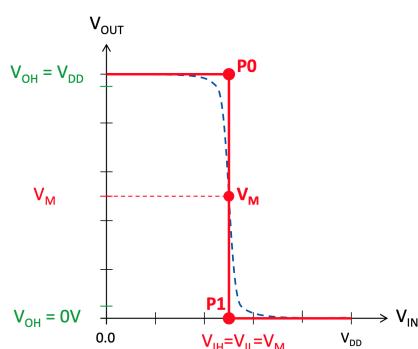
I margini di immunità al rumore per un invertitore CMOS possono essere approssimati come:

$$NM_H \approx V_{DD} - V_M \quad NM_L \approx V_M \quad NM \approx \min(NM_H, NM_L)$$

Si osserva che per massimizzare il margine di immunità complessivo NM è necessario bilanciare i due margini di immunità, ovvero impostare la soglia di commutazione logica V_M a metà della tensione di alimentazione $V_{DD}/2$. Si ottiene così che il dimensionamento ottimo dei transistor per massimizzare la tolleranza al rumore è $Z_p \approx 3Z_n$.

8.5 Invertitore ideale

Un invertitore ideale è un invertitore logico che interpreta $V_{IN} < V_M$ come livello logico basso e $V_{IN} > V_M$ come livello logico alto, inoltre rigenera l'uscita esattamente ai valori ideali $V_{OH} = V_{DD}$ e $V_{OL} = 0V$.



La curva VTL di un invertitore ideale è una curva a gradino che passa per il punto di soglia di commutazione logica e la funzione di trasferimento è una funzione definita a tratti:

$$V_{OUT} = \begin{cases} V_{DD} & \text{se } V_{IN} < V_M \\ V_M & \text{se } V_{IN} = V_M \\ 0V & \text{se } V_{IN} > V_M \end{cases}$$

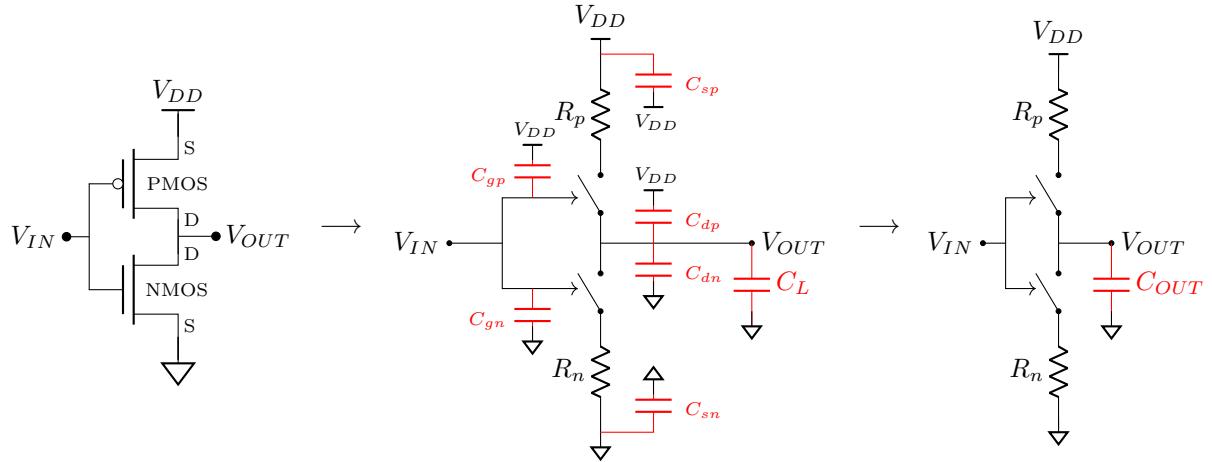
I margini di immunità al rumore diventano esattamente

$$NM_H = V_{DD} - V_M \quad NM_L = V_M$$

8.6 Tempo di ritardo

Modello RC dell'invertitore

Ad ogni terminale dei transistor sono associate delle capacità parassite. Queste capacità vanno caricate e scaricate durante la commutazione del segnale, causando un ritardo temporale tra l'ingresso e l'uscita dell'invertitore. Si rappresenta, quindi, l'invertitore con un modello RC equivalente in cui le capacità parassite sono evidenziate in rosso ed è stata aggiunta la capacità di carico C_L collegata all'uscita del circuito:



Analizzando le resistenze e le capacità del modello RC equivalente per i nodi di ingresso ed uscita si ha:

$$R_{IN} = \infty \quad C_{IN} = C_{gn} + C_{dp} \quad R_{OUT} = \frac{R_n + R_p}{2} \quad C_{OUT} = C_{gp} + C_{dn} + C_L$$

NOTA: le capacità dei source sono cortocircuitate per cui sono ininfluenti, inoltre per semplicità, le capacità del PMOS possono essere considerate collegate a massa invece che a V_{DD} .

Calcolo dei tempi di ritardo intrinseci

Il tempo di ritardo è il tempo che impiega la porta di uscita a raggiungere il 50% del valore finale dopo un cambio di stato dell'ingresso. Il tempo di ritardo si dice intrinseco se il carico esterno è nullo ($C_L = 0$). Si definiscono due tempi di ritardo intrinseci:

- tempo di ritardo di salita t_{pLH0} : tempo che impiega l'uscita a salire dal 50% del livello logico basso al 50% del livello logico alto dopo un fronte di salita dell'ingresso

$$V_{OUT} = \frac{V_{DD}}{2} \rightarrow V_{DD} - V_{DD} e^{-\frac{t_{pLH0}}{R_p C_{OUT}}} = \frac{V_{DD}}{2} \rightarrow t_{pLH0} = \ln(2) R_p C_{OUT} \approx 0.69 R_p C_{OUT}$$

- tempo di ritardo di discesa t_{pHL0} : tempo che impiega l'uscita a scendere dal 50% del livello logico alto al 50% del livello logico basso dopo un fronte di discesa dell'ingresso

$$V_{OUT} = \frac{V_{DD}}{2} \rightarrow V_{DD} e^{-\frac{t_{pHL0}}{R_n C_{OUT}}} = \frac{V_{DD}}{2} \rightarrow t_{pHL0} = \ln(2) R_n C_{OUT} \approx 0.69 R_n C_{OUT}$$

Si calcola il tempo di propagazione intrinseco medio come:

$$t_{p0} = \frac{t_{pLH0} + t_{pHL0}}{2} = \ln(2) \frac{R_n + R_p}{2} C_{OUT} \approx 0.69 \frac{R_n + R_p}{2} C_{OUT} = 0.69 R_{OUT} C_{OUT}$$

Carico esterno e fan-out

Quando l'invertitore guida un carico esterno C_L , i tempi di ritardo aumentano in quanto la capacità totale da caricare o scaricare è maggiore. Si definiscono il fan-out f e il coefficiente di carico γ :

$$f = \frac{C_L}{C_{IN}} \quad \gamma = \frac{C_{OUT}}{C_{IN}}$$

Si ottengono, quindi, i tempi di ritardo con carico esterno:

$$t_{pLH} = 0.69 R_p (C_{OUT} + C_L) = 0.69 R_p C_{OUT} + 0.69 R_p C_L = t_{pLH0} + 0.69 R_p C_L$$

$$t_{pHL} = 0.69 R_n (C_{OUT} + C_L) = 0.69 R_n C_{OUT} + 0.69 R_n C_L = t_{pHL0} + 0.69 R_n C_L$$

$$t_p = \frac{t_{pLH} + t_{pHL}}{2} = 0.69 R_{OUT} (C_{OUT} + C_L) = t_{p0} + 0.69 R_{OUT} C_L = t_{p0} \left(1 + \frac{f}{\gamma} \right)$$

Ottimizzazione del tempo di ritardo intrinseco

Si osserva che il tempo di ritardo dipende da una serie di parametri tecnologici (specifici dei materiali) e da altri parametri di progettazione che possono essere scelti liberamente. In particolare si può agire su:

- il rapporto tra i fattori di forma dei transistor Z_p/Z_n
- il fattore di carico f che dipende dall'architettura del circuito logico
- la tensione di alimentazione V_{DD} , difficile da modificare in quanto spesso imposta da vincoli esterni

Il tempo di ritardo può essere ottimizzato secondo i seguenti criteri:

- ottimizzare il tempo massimo di ritardo $\max(t_{pHL}, t_{pLH})$
- ottimizzare il tempo di ritardo medio t_p

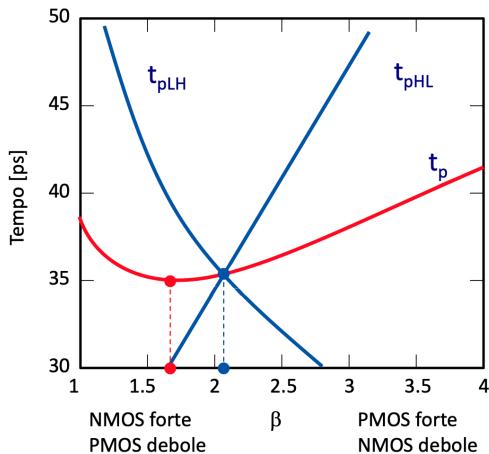
Si definiscono quindi i coefficienti β e ρ e si procede all'ottimizzazione scegliendo il valore ottimale di β in base al criterio scelto:

$$\beta = \frac{Z_p}{Z_n} = \frac{W_p}{W_n} \quad \rho = \frac{R_{p0}}{R_{n0}}$$

$$t_{pHL0} = 0.69 R_n C_{OUT} = 0.69 \frac{R_{n0}}{Z_n} C_{d0} W_n (1 + \beta) = 0.69 R_{n0} C_{d0} L (1 + \beta)$$

$$t_{pLH0} = 0.69 R_p C_{OUT} = 0.69 \frac{\rho R_{n0}}{\beta Z_n} C_{d0} W_n (1 + \beta) = 0.69 R_{n0} C_{d0} L \left(\frac{\rho}{\beta} + \rho \right)$$

$$t_{p0} = 0.69 \frac{R_{n0} C_{d0} L}{2} \left(1 + \beta + \rho + \frac{\rho}{\beta} \right)$$



Ottimizzando il tempo massimo di ritardo (ovvero imponendo $t_{pHL0} = t_{pLH0}$, punto blu in figura):

$$\begin{aligned} t_{pHL0} = t_{pLH0} &\rightarrow 1 + \beta = \frac{\rho}{\beta} + \rho \\ &\rightarrow \beta = \rho \approx 2 - 2.5 \end{aligned}$$

Ottimizzando il tempo medio di ritardo (ovvero trovando il minimo di t_{p0} , punto rosso in figura):

$$\begin{aligned} \frac{dt_{p0}}{d\beta} = 0 &\rightarrow 1 - \frac{\rho}{\beta^2} = 0 \\ &\rightarrow \beta = \sqrt{\rho} \approx 1.4 - 1.6 \end{aligned}$$

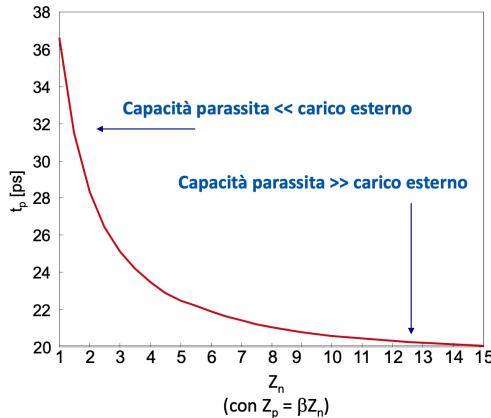
Dimensionamento dell'invertitore con carico esterno

Fissato un certo β si calcola come ottimizzare il tempo di ritardo in funzione della capacità di carico esterna C_L andando a dimensionare opportunamente i transistor. Si ottiene:

$$t_p = 0.69 R_{OUT} C_{OUT} \left(1 + \frac{C_L}{C_{OUT}} \right) = t_{p0} \left(1 + \frac{C_L}{C_{OUT}} \right) \quad \text{con } t_{p0} \text{ indipendente da } C_L$$

$$1 + \frac{C_L}{C_{OUT}} = 1 + \frac{C_L}{C_{d0} W_n (1 + \beta)} \approx 1 + C_L \frac{\text{costante}}{W_n} \quad R_{OUT} = \frac{1}{2} \frac{R_{n0}}{Z_n} \left(1 + \frac{\rho}{\beta} \right) \approx \frac{\text{costante}}{Z_n}$$

Si osserva che per minimizzare il tempo di ritardo si può aumentare la larghezza W_n (e proporzionalmente anche $W_p = \beta W_n$ e $Z_n = \beta Z_p$) in modo da ridurre sia R_{OUT} che il termine $\left(1 + \frac{C_L}{C_{OUT}} \right)$. Facendo così, però, si aumenta l'area occupata dal circuito e la capacità parassita di uscita C_{OUT} .



Osservando il grafico di t_p in funzione di $Z_n = W_n/L$ si osserva che:

- diminuendo Z_n il tempo di ritardo aumenta (come previsto) a causa dell'aumento di R_{OUT} che limita la corrente di carica/scarica di C_{OUT}
- aumentando Z_n il tempo di ritardo diminuisce inizialmente a causa della diminuzione di R_{OUT} ma poi si stabilizza attorno ad un valore minimo dovuto al fatto che l'invertitore deve anche "auto-caricarsi" la capacità parassita C_{OUT} che è ormai diventata significativa rispetto a C_L

8.7 Consumo statico

Il consumo statico è il consumo di potenza dell'invertitore quando l'ingresso è mantenuto costante ad un livello logico definito (alto o basso). In questo caso uno dei due transistor è sempre spento per cui non c'è corrente di drenaggio tra i due terminali di alimentazione V_{DD} e massa. L'unico contributo al consumo statico è dovuto alle correnti di sottosoglia dei due transistor, alle correnti di perdita dell'ossido di gate e alla corrente inversa del diodo drain-substrato. Questi contributi sono però trascurabili, per cui si può considerare che il consumo statico di un invertitore CMOS sia praticamente nullo.

8.8 Consumo dinamico

Analisi del consumo dinamico per una porta logica generale

Il consumo dinamico è il consumo di potenza di una generica porta logica durante la commutazione del segnale di uscita. La potenza assorbita dalla porta logica viene utilizzata per la carica e scarica delle capacità parassite e del carico esterno. Si analizza il consumo dinamico per entrambe le fasi di commutazione dell'uscita (LH e HL):

- commutazione dell'uscita LH:

$$\begin{aligned} \text{energia assorbita} \quad E_{V_{DD}} &= \int_0^T V_{DD} i_{DD}(t) dt = V_{DD} \int_{V_{OL}}^{V_{OH}} C \cdot dV = CV_{DD}(V_{OH} - V_{OL}) \\ \text{energia immagazzinata} \quad E_C &= \int_{V_{OL}}^{V_{OH}} V \cdot C \cdot dV = \frac{1}{2}CV_{OH}^2 - \frac{1}{2}CV_{OL}^2 \\ \text{energia dissipata} \quad E_{diss} &= E_{V_{DD}} - E_C \end{aligned}$$

- commutazione dell'uscita HL:

$$\begin{aligned} \text{energia assorbita} \quad E_{V_{DD}} &= 0 \quad \text{il pmos è spento e non viene assorbita corrente da } V_{DD} \\ \text{energia immagazzinata} \quad E_C &= \int_{V_{OH}}^{V_{OL}} V \cdot C \cdot dV = \frac{1}{2}CV_{OL}^2 - \frac{1}{2}CV_{OH}^2 \\ \text{energia dissipata} \quad E_{diss} &= -E_C \end{aligned}$$

Complessivamente si ottiene che l'energia totale assorbita dal generatore V_{DD} durante un ciclo di commutazione completo (LH + HL) è pari all'energia dissipata e vale:

$$E_{V_{DD},tot} = E_{diss,tot} = C \cdot V_{DD}(V_{OH} - V_{OL})$$

Definita la frequenza di commutazione f (numero di cicli di commutazione al secondo), si ottiene la potenza dinamica dissipata dalla porta logica:

$$P_{DYN} = E_{diss,tot} \cdot f = C \cdot V_{DD}(V_{OH} - V_{OL}) \cdot f$$

Consumo dinamico dell'invertitore

Applicando la formula generale del consumo dinamico all'invertitore CMOS si ottiene:

$$P_{DYN,invertitore} = C_{OUT} \cdot V_{DD}^2 \cdot f$$

Cammino diretto

Si osserva che durante la commutazione del segnale di uscita, per un breve intervallo di tempo, entrambi i transistor possono essere contemporaneamente accesi, creando un cammino diretto tra V_{DD} e massa. In questo intervallo di tempo si ha una corrente di cortocircuito I_{CC} che causa una dissipazione di potenza addizionale.

In generale il cammino diretto si verifica quando la tensione di ingresso attiva entrambi i mosfet per legge $V_{TN} < V_{IN} < V_{DD} - V_{TP}$ e il tempo di durata del cammino diretto si indica con t_{cc} .

8.9 Oscillatore ad anello

L'oscillatore ad anello è un circuito costituito da un numero dispari di invertitori collegati in cascata, in cui l'uscita dell'ultimo invertitore è collegata all'ingresso del primo. In questo modo si crea un circuito ad anello chiuso che genera un segnale che commuta periodicamente tra i livelli logici alto e basso ad una data frequenza.

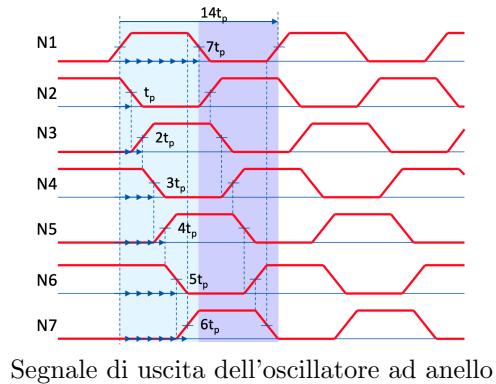
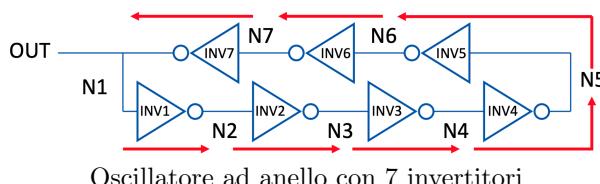
NOTA1: per il corretto funzionamento dell'oscillatore è necessario che il numero di invertitori sia dispari e maggiore di 3: con un invertitore si ha un circuito stabile alla soglia logica, con un numero pari di invertitori si ha un circuito che si stabilizza ad uno dei due livelli logici senza commutare mai.

NOTA2: è necessario, inoltre, che il tempo di salita e discesa del segnale attraverso un singolo invertitore sia molto inferiore al tempo di propagazione del segnale su tutto l'anello (metà del periodo di oscillazione), altrimenti il circuito non riesce a commutare correttamente e si comporta come un singolo invertitore stabilizzato alla soglia logica.

Analizzando periodo, frequenza di oscillazione e consumo dinamico si ottiene:

$$T = 2Nt_p \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2Nt_p} \quad P_{DYN} = N \cdot C_X V_{DD}^2 f \quad \text{per } N > t_{r,f}/t_p$$

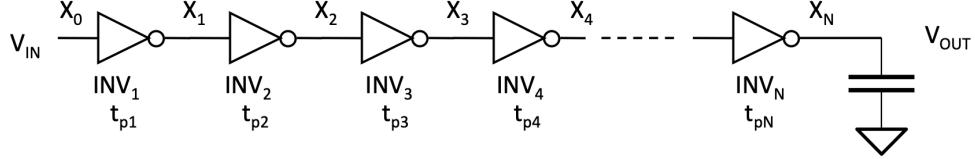
dove N è il numero di invertitori nell'anello, t_p è il tempo di propagazione di un singolo invertitore e C_X è la capacità di un nodo interno all'anello.



8.10 Buffer CMOS

Struttura generale

Il buffer CMOS è un circuito costituito da una serie di invertitori collegati in cascata, utilizzato per aumentare la capacità di pilotaggio del segnale di uscita e migliorare le prestazioni del circuito logico.



Si suppone per ipotesi che L , C_{d0} e C_{g0} siano uguali per tutti i transistor (pmos e nmos) di ogni invertitore. Di conseguenza anche il parametro γ risulta essere uguale per tutti gli invertitori del buffer e indipendente dalle dimensioni dei transistori.

$$\gamma_i = \frac{C_{OUT}}{C_{IN}} = \frac{C_{d0}}{C_{g0}L} \cdot \frac{W_p + W_n}{W_p + W_n} = \frac{C_{d0}}{C_{g0}L} = \text{costante per ogni invertitore}$$

Il tempo di ritardo complessivo è dato dalla somma dei tempi di ritardo di ogni singolo invertitore:

$$t_{p,tot} = \sum_{i=1}^N t_{p,i} \quad \text{con } t_{p,i} = t_{p0,i} \left(1 + \frac{f_i}{\gamma_i} \right)$$

Le possibili ottimizzazioni per minimizzare il tempo di ritardo del buffer sono:

- ottimizzare il tempo medio di ritardo intrinseco t_{p0}
- ottimizzare il numero di stadi N
- ottimizzare il fattore di carico f tra uno stadio e l'altro

Ottimizzazione di t_{p0} - dimensionamento del singolo invertitore

Negli invertitori il segnale viene ripetutamente invertito e il tempo di ritardo complessivo è dato dalla somma dei tempi di salita t_{pLH} e discesa t_{pHL} di ogni invertitore. Il modo migliore per ottimizzare il tempo complessivo è minimizzare la somma dei tempi di ritardo t_{pLH} e t_{pHL} , ovvero minimizzare il tempo di ritardo medio t_{p0} di ogni stadio. Di conseguenza (per come è stato visto in precedenza) si deve scegliere il rapporto tra i fattori di forma dei transistori come $\beta = \sqrt{\rho}$. In questo modo tutti gli invertitori hanno lo stesso tempo di ritardo intrinseco minimo:

$$t_{p0} = 0.69 \frac{R_{n0} C_{d0} L}{2} \left(1 + \beta + \rho + \frac{\rho}{\beta} \right) \quad R_{n0}, C_{d0}, L, \beta = \sqrt{\rho} \text{ costanti per ogni invertitore}$$

Ottimizzazione di f - dimensionamento progressivo degli stadi

Il fanout di un singolo invertitore dipende dal rapporto tra il fattore di forma dei suoi transistori e quello dell'invertitore successivo.

$$f_i = \frac{C_{IN,i+1}}{C_{IN,i}} = \frac{C_{g0}L(W_{p,i+1} + W_{n,i+1})}{C_{g0}L(W_{p,i} + W_{n,i})} = \frac{Z_{p,i+1} + Z_{n,i+1}}{Z_{p,i} + Z_{n,i}} = \frac{\beta Z_{n,i+1} + Z_{n,i+1}}{\beta Z_{n,i} + Z_{n,i}} = \frac{Z_{n,i+1}}{Z_{n,i}}$$

Si assume che tale rapporto sia costante per ogni stadio ottenendo così un dimensionamento progressivo dei transistori nei vari invertitori tale per cui ogni invertitore ha dimensioni f volte maggiori del precedente e ogni nodo ha capacità f volte maggiore del precedente:

$$\begin{aligned} Z_{n,i+1} &= f Z_{n,i} = f^i Z_{n,1} & W_{n,i+1} &= f W_{n,i} = f^i W_{n,1} & C_{X,j} &= f C_{X,j-1} = f^i C_{X,1} \\ Z_{p,i+1} &= f Z_{p,i} = f^i Z_{p,1} & W_{p,i+1} &= f W_{p,i} = f^i W_{p,1} \end{aligned}$$

Calcolo del valore di f ottimale

Si osserva che tutti gli stadi hanno lo stesso tempo di ritardo $t_{p,i}$, essendo t_{p0} , γ e f costanti per ogni invertitore, per cui è possibile calcolare il tempo di ritardo complessivo del buffer come:

$$t_{p,tot} = N \cdot t_p = N \cdot t_{p0} \left(1 + \frac{f}{\gamma}\right) \quad \text{per } t_p = t_{p0} \left(1 + \frac{f}{\gamma}\right)$$

Calcolando il fanout totale del buffer si ottiene il numero di stadi necessari per raggiungere il carico esterno C_L :

$$F = \frac{C_L}{C_{IN}} = \frac{C_{in,2} C_{in,3}}{C_{in,1} C_{in,2}} \dots \frac{C_{in,N}}{C_{in,N-1}} = f_1 f_2 f_3 \dots f_N = f^N \rightarrow N = \frac{\ln(F)}{\ln(f)}$$

Sostituendo il valore di N con l'espressione appena trovata, si ottiene un'espressione per il tempo di ritardo complessivo con l'unica incognita f . Per determinare il valore ottimale di f si cerca il tempo di ritardo è minimo, analizzando la derivata rispetto a f :

$$t_{p,tot} = \frac{\ln F}{\ln f} t_{p0} \left(1 + \frac{f}{\gamma}\right) \quad \frac{\partial t_{p,tot}}{\partial f} \rightarrow f = e^{1+\frac{\gamma}{f}}$$

L'equazione precedente non ammette una soluzione analitica, per cui si ricorre a metodi numerici per trovare il valore ottimale di f . Per $\gamma = 1$ risulta $f = 3.6$.

Calcolo del valore di N , buffer invertente e non invertente

Una volta determinato il valore di f e conoscendo il fanout totale F si può calcolare il numero di stadi necessari per realizzare il buffer arrondendando il valore ottenuto all'intero più vicino:

$$N = \frac{\ln(F)}{\ln(f)}$$

Si osserva che se si vuole realizzare un buffer non invertente, è necessario avere un numero pari di stadi, mentre se si vuole realizzare un buffer invertente, è necessario avere un numero dispari di stadi.

Consumo dinamico del buffer

L'energia necessaria a far commutare l'uscita del buffer è usata per caricare e scaricare le capacità parassite di ogni invertitore e la capacità di carico esterna C_L . Per cui nella formula generale del consumo dinamico, al posto di C_{OUT} si deve usare la somma delle capacità dei nodi interni più la capacità del nodo di uscita:

$$C_{tot} = \sum_{i=1}^{N-1} C_{X,i} + C_F \quad \begin{aligned} C_{X,i} &= C_{OUT,i} + C_{IN,i+1} && \text{capacità nodo interno i-esimo} \\ C_F &= C_{OUT,N} + C_L && \text{capacità nodo di uscita} \end{aligned}$$

$$P_{DYN} = C_{tot} V_{DD}^2 f_{\text{frequenza}}$$

Impieghi

Il buffer CMOS viene utilizzato per ridurre il tempo di ritardo quando si deve pilotare un carico esterno elevato. Alcuni esempi di impiego del buffer sono:

- pilotaggio di bus di dati o passaggio di segnali per piste lunghe con elevata capacità parassita
- pilotaggio di ingressi di circuiti logici con elevata capacità di ingresso
- pilotaggio da parte del clock di tutti i registri del computer

9 Logica statica complementare

9.1 Reti duali

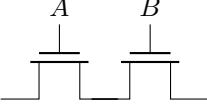
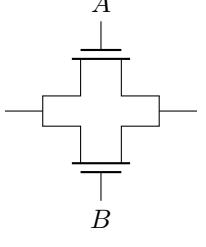
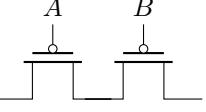
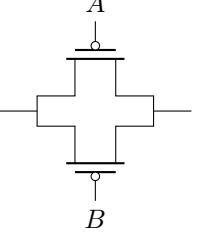
Rete di pull-up e rete di pull-down

Il principio alla base della logica statica complementare è quello di basarsi sulla struttura dell'invertitore cmos e generalizzarla per realizzare qualsiasi funzione logica combinatoria, in modo da sfruttare i vantaggi dell'invertitore:

- resistenza di ingresso infinita;
- consumo di potenza praticamente nullo in stato stazionario;
- elevata immunità al rumore, proprietà rigenerativa del segnale;
- la soglia logica e il tempo di propagazione intrinseci dipendono solo da Z_p/Z_n .

Per fare ciò, si sfrutta la presenza di due reti complementari: la rete di pull-up (PUN), costituita da mosfet di tipo p, e la rete di pull-down (PDN), costituita da mosfet di tipo n che si attivano in modo complementare per caricare o scaricare il nodo di uscita.

Serie e paralleli di mosfet

tipo di circuito	serie di nmos	parallelo di nmos	serie di pmos	parallelo di pmos																																																												
schema circuitale																																																																
funzione logica	AND $A \cdot B$	OR $A + B$	NOR $\overline{A + B}$	NAND $\overline{A \cdot B}$																																																												
tabella di verità	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>V_{out}</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	V_{out}	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>V_{out}</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	V_{out}	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>V_{out}</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	V_{out}	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>V_{out}</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	V_{out}	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
A	B	V_{out}																																																														
0	0	0																																																														
0	1	0																																																														
1	0	0																																																														
1	1	1																																																														
A	B	V_{out}																																																														
0	0	0																																																														
0	1	1																																																														
1	0	1																																																														
1	1	1																																																														
A	B	V_{out}																																																														
0	0	1																																																														
0	1	0																																																														
1	0	0																																																														
1	1	0																																																														
A	B	V_{out}																																																														
0	0	1																																																														
0	1	1																																																														
1	0	1																																																														
1	1	0																																																														

Interruttore duale o complementare

Due interruttori pilotati dallo stesso segnale sono duali o complementari se fissato un qualunque valore del segnale uno e uno solo dei due è acceso. Un esempio di interruttori duali sono un nmos e un pmos pilotati dallo stesso segnale, come avviene in un invertitore cmos.

Rete duale

Una rete duale è l'estensione del concetto di interruttori duali ad una rete di interruttori. Due reti pilotate dagli stessi ingressi sono duali se e solo se per ogni combinazione di ingressi una e una sola delle due reti è attiva. Il principio delle reti duali è alla base delle reti di pull-up e pull-down nella logica statica complementare. Da una rete di nmos si può ottenere la rete duale di pmos sostituendo ogni serie di nmos con un parallelo di pmos e viceversa.

9.2 Implementazione di porte logiche elementari

Principio generale

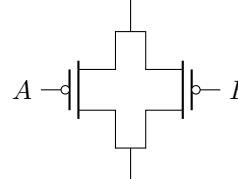
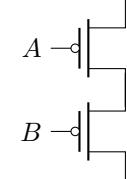
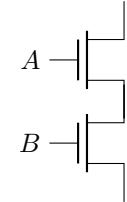
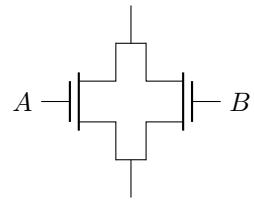
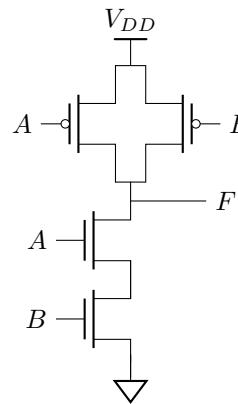
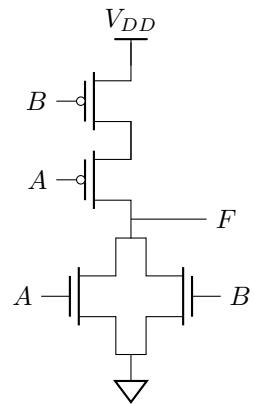
Data una funzione logica con N ingressi $F(A, B, C, \dots)$, si osserva che:

- per ogni combinazione di ingressi per cui $F(\dots) = 0$, l'uscita della porta logica deve essere 0V, ovvero la rete di pull-down (PDN) deve essere attiva e collegare l'uscita a massa;
- per ogni combinazione di ingressi per cui $F(\dots) = 1$, l'uscita della porta logica deve essere V_{DD} , ovvero la rete di pull-up (PUN) deve essere attiva e collegare l'uscita a V_{DD} .

Per implementare una porta logica con logica statica complementare si segue il seguente procedimento:

1. si costruisce la rete di pull-down (PDN), che implementa la funzione logica $X = \overline{F}$
2. si costruisce la rete di pull-up (PUN), duale della PDN che implementa la funzione logica F
3. infine si collega la PUN tra V_{DD} e l'uscita, e la PDN tra l'uscita e massa

Esempio di porte logiche elementari invertenti

tipo di circuito	porta NAND	porta NOR
funzione logica	$F = \overline{A \cdot B}$ $X = A \cdot B$	$F = \overline{A + B}$ $X = A + B$
simbolo logico		
rete di pull-up		
rete di pull-down		
porta logica completa		

9.3 Funzioni invertenti e porte logiche non invertenti

Funzioni invertenti e non invertenti

- Una funzione logica $F(X_1, X_2, \dots, X_N)$ è invertente se facendo variare un ingresso X_i da 0 a 1, dopo aver fissato gli altri ingressi, l'uscita F commuta nel verso opposto di X_i o rimane costante. Un esempio di funzioni invertenti sono le porte NAND e NOR.
- Una funzione logica $F(X_1, X_2, \dots, X_N)$ è non invertente se facendo variare un ingresso X_i da 0 a 1, dopo aver fissato gli altri ingressi, l'uscita F commuta nello stesso verso di X_i o rimane costante. Un esempio di funzioni non invertenti sono le porte AND e OR.
- Una funzione può non essere né invertente né non invertente, ad esempio la funzione XOR.

Limiti della logica statica complementare

Con la logica statica complementare è possibile implementare direttamente solo funzioni invertenti, come NAND e NOR (illustrate sopra). Per implementare funzioni non invertenti, come AND e OR, è necessario aggiungere un ulteriore stadio di inversione all'uscita oppure agli ingressi della porta logica invertente.

Esempi di porte logiche non invertenti

- AND non invertente: $F = A \cdot B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$ è implementabile come una porta NOR con ingressi invertiti, oppure come una porta NAND seguita da un invertitore.
- OR non invertente: $F = A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$ è implementabile come una porta NAND con ingressi invertiti, oppure come una porta NOR seguita da un invertitore.

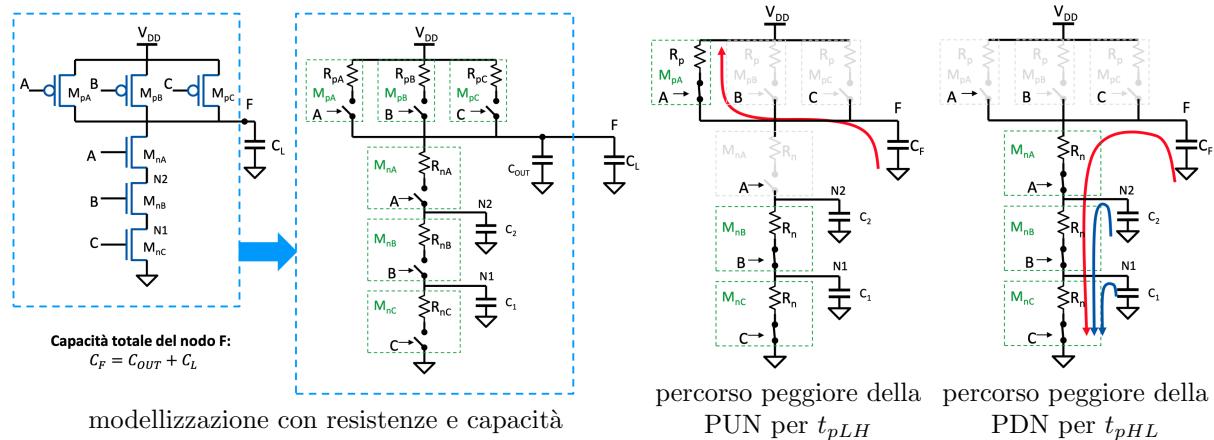
9.4 Tempi di ritardo

Ricerca del percorso peggiore e modello di Elmore

L'analisi dei tempi di ritardo di una porta logica a più ingressi consiste nell'analizzare la carica e scarica del nodo di uscita attraverso i percorsi di carica (nella PUN) e scarica (nella PDN) con resistenza equivalente massima, ovvero lungo il percorso peggiore. In genere il percorso peggiore è quello con maggior numero di mosfet in serie e minor numero di mosfet in parallelo.

Una volta individuato il percorso peggiore, si modella il circuito come una rete di Elmore, in cui ogni mosfet viene rappresentato come una resistenza (R_n o R_p) collegata a massa attraverso una capacità complessiva del nodo interno. Una volta tracciata la rete di Elmore, è possibile calcolare il tempo di ritardo t_{pHL} usando la rete di scarica (PDN) e il tempo di ritardo t_{pLH} usando la rete di carica (PUN), secondo le formule del modello di Elmore.

Di seguito l'esempio dell'individuazione dei percorsi peggiori nella PUN e PDN per il calcolo dei due tempi di ritardo t_{pLH} e t_{pHL} nel caso di una nand a 3 ingressi.



Per il caso sopra, i tempi di ritardo risultano:

$$t_{pLH} = 0.69 R_p (C_{OUT} + C_F) \quad t_{pHL} = 0.69 (R_n C_1 + 2R_n C_2 + 3R_n (C_{OUT} + C_L))$$

$$\text{con } C_1 = C_{dn,C} + C_{sn,B}, \quad C_2 = C_{dn,B} + C_{sn,A} \quad C_{OUT} = C_{dn,a} + C_{dp,A} + C_{dp,B} + C_{dp,C}$$

Tempo di ritardo medio

Il tempo di ritardo medio t_p di una porta logica in statica complementare risulta:

$$t_{p0} = \frac{t_{pHL0} + t_{pLH0}}{2} = 0.69 \frac{R_n(C_1 + 2C_2 + 3C_{OUT}) + R_p C_{OUT}}{2}$$

$$t_p = t_{p0} + 0.69 \frac{3R_n + R_p}{2} C_L = 0.69 R_{OUT} C_L \quad R_{OUT} = \frac{R_{PUN} + R_{PDN}}{2}$$

Dipendenza dal numero di ingressi

Dalle formule del modello di Elmore per una porta logica a N ingressi (N mosfet in parallelo e altrettanti in serie), il tempo di ritardo intrinseco dipende quadraticamente dal numero di ingressi N . Questo effetto non è desiderabile, in quanto porta ad un aumento significativo del tempo di ritardo al crescere del numero di ingressi della porta logica.

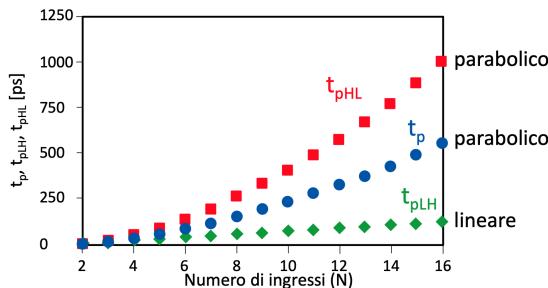
$$t_{p0} = 0.69 \frac{R_n(C_1 + C_2 + \dots + (N-1)C_{N-1} + NC_{OUT}) + R_p C_{OUT}}{2} \quad \text{con } C_{OUT} = C_{dn} + NC_{dp}$$

$$= 0.69 \frac{R_n(C_1 + C_2 + \dots + (N-1)C_{N-1} + N(C_{dn} + NC_{dp})) + R_p(C_{dn} + NC_{dp})}{2}$$

$$= 0.69 \frac{R_n(C_1 + C_2 + \dots + (N-1)C_{N-1} + NC_{dn} + \mathbf{N^2 C_{dp}}} + R_p(C_{dn} + NC_{dp})$$

Il contributo del carico esterno, invece, cresce linearmente con N :

$$t_p = t_{p0} + 0.69 \frac{\mathbf{NR_n} + R_p}{2} C_L$$



Analizzando il grafico del tempo di ritardo in funzione del numero di ingressi per una porta logica NAND, t_p cresce parabolicamente con N .

Bilanciamento PUN e PDN

Per uniformare il caso peggiore tra t_{pLH} e t_{pHL} , si può agire sul rapporto Z_p/Z_n dei mosfet, per bilanciare le resistenze equivalenti della PUN e PDN al caso peggiore.

$$R_{PU} = \alpha \frac{R_{p0}}{Z_p} \quad R_{PD} = \beta \frac{R_{n0}}{Z_n} \quad R_{PU} = R_{PD} \rightarrow Z_p = \frac{\alpha R_{p0}}{\beta R_{n0}} Z_n$$

Si osserva che per ottimizzare il tempo di ritardo è possibile avere Z_p e Z_n minori per i mosfet che sono collegati direttamente al nodo di uscita (coinvolti nel termine quadratico) e maggiori per i mosfet più lontani dall'uscita.

Tempo di ritardo di più porte logiche in cascata

Quando si collegano in cascata più porte logiche (ad esempio per realizzare funzioni non invertenti come AND = NAND + NOT e OR = NOR + NOT), il tempo di ritardo complessivo è dato dalla somma dei tempi di ritardo delle singole porte logiche. In particolare il pedice del tempo di ritardo t_{pHL} o t_{pLH} complessivo è determinato dall'uscita dell'ultima porta logica della catena. Ad esempio per una AND realizzata come NAND + NOT, il tempo di ritardo complessivo risulta:

$$t_{pHL,AND} = t_{pLH,NAND} + t_{pHL,NOT} \quad t_{pLH,AND} = t_{pHL,NAND} + t_{pLH,NOT}$$

9.5 Problema dei nodi interni

Problema dei nodi interni

Il problema dei nodi interni si verifica quando, a causa della presenza di nodi interni tra mosfet in serie, il tempo di ritardo aumenta in modo significativo siccome, insieme alla capacità di uscita, devono essere caricate/scaricate anche tutte le capacità parassite dei nodi interni. Il numero di nodi interni è legato al numero di ingressi della porta logica, e quindi il problema si aggrava al crescere del numero di ingressi.

Soluzione 1: riordino degli ingressi

Si suppone che gli N ingressi di una porta logica provengano da altre reti combinatorie con tempi di ritardo diversi. Per cercare di contenere il problema dei nodi interni, si può riordinare gli ingressi in modo che la rete combinatoria con tempo di ritardo minore venga collegata al mosfet più vicino a massa (o a V_{DD} nella PUN) e la rete con tempo di ritardo maggiore venga collegata al mosfet più lontano dall'uscita. In questo modo, quando la rete più lenta commuta, le reti più veloci hanno già precaricato/scaricato i nodi interni e l'unica capacità da caricare/scaricare è quella di uscita.

Soluzione 2: suddivisione in più stadi

Quando il numero di ingressi resta comunque elevato, è possibile risolvere la questione dei nodi interni suddividendo la porta logica in più stadi di porte logiche con meno ingressi ciascuna. In questo modo si riduce il numero di nodi interni per ogni stadio, e si riduce il tempo di ritardo complessivo. Si osserva che il valore ottimo di ingressi per stadio si aggira tra 4 e 5. Ovviamente suddividendo il numero di ingressi in più stadi si aumenta il numero totale di mosfet necessari per realizzare la stessa funzione logica e quindi l'area occupata sul chip.

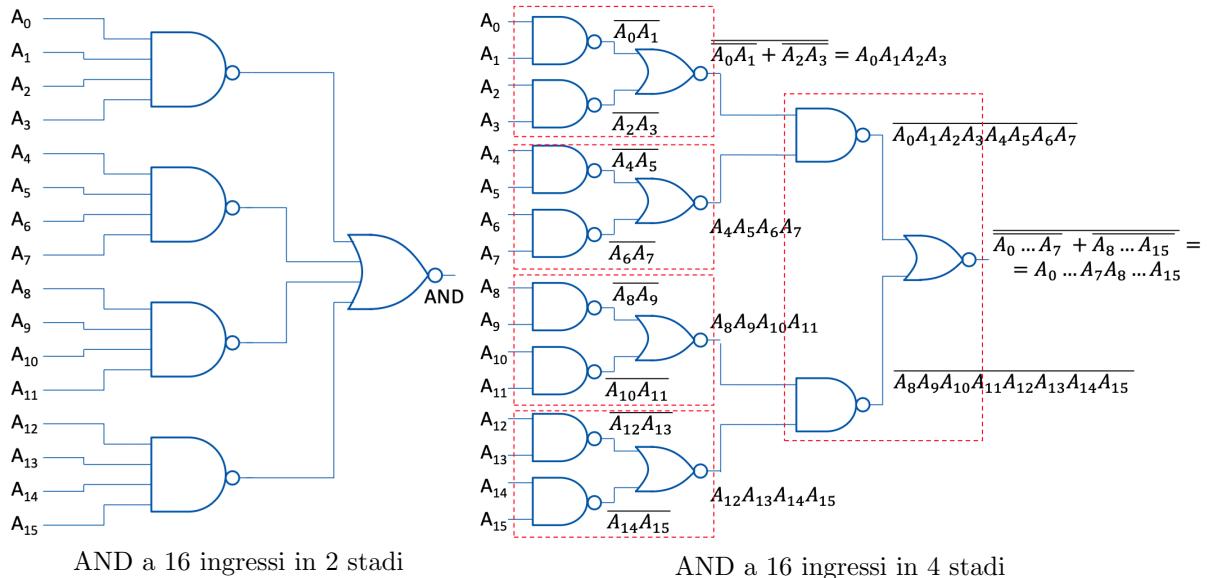
Per suddividere una porta logica in più stadi si possono utilizzare le leggi di De Morgan:

$$A + B + C + D \text{ (OR a 4 ingressi)} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}} \text{ (NOR + NAND a 2 ingressi)}$$

$$A \cdot B \cdot C \cdot D \text{ (AND a 4 ingressi)} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{C} \cdot \overline{D}} \text{ (NAND + NOR a 2 ingressi)}$$

Di seguito un confronto delle prestazioni di una porta AND a 16 ingressi realizzata con numero differente di stadi:

numero di stadi	tempo di ritardo intrinseco	numero di mosfet
1 stadio da 16 ingressi	$t_{p0} \approx 0.69RCN^2 = 0.69\ 256\ RC$	32 mosfet
2 stadi da 4 ingressi ciascuno	$t_{p0} \approx 2 \cdot 0.69RCN^2 = 0.69\ 32\ RC$	40 mosfet
4 stadi da 2 ingressi ciascuno	$t_{p0} \approx 4 \cdot 0.69RCN^2 = 0.69\ 16\ RC$	60 mosfet



9.6 Consumo di potenza

Consumo dinamico

Il consumo dinamico di una porta logica si basa sulla formula generale definita in precedenza, solo che essendoci più ingressi la frequenza media di commutazione f viene sostituita dalla frequenza effettiva di commutazione dell'uscita calcolata come prodotto tra la frequenza di commutazione degli ingressi f e il fattore di attività α_F dell'uscita.

$$P_{DYN} = C_F \cdot V_{DD}(V_H - V_L) \cdot f \cdot \alpha_F \quad f \cdot \alpha_F = \text{frequenza effettiva di commutazione dell'uscita}$$

Fattore di attività

Il fattore di attività α_F di una porta logica è definito come la probabilità che l'uscita della porta logica commuti da 0 a 1 in un dato intervallo di tempo. Definito p_F la probabilità che l'uscita della porta logica sia 1 e supponendo che l'uscita di una porta logica non dipenda dal suo stato precedente (tempo invariante), il fattore di attività risulta:

$$\alpha_F = P(0 \rightarrow 1) = P(F = 0 \text{ per } t = i - 1) \cdot P(F = 1 \text{ per } t = i) = p_F \cdot (1 - p_F)$$

La probabilità p_F che l'uscita della porta logica sia a 1 dipende dalla funzione logica implementata e dalle probabilità degli ingressi p_{X_i} (che si suppone siano tutte indipendenti e tempo invarianti). Per calcolare p_F si può utilizzare:

- la tabella di verità della porta logica, calcolando la somma delle probabilità delle combinazioni di ingressi che portano all'uscita a 1
- l'espressione logica della funzione F , convertendo le operazioni logiche tra ingressi in operazioni algebriche sulle probabilità degli ingressi secondo le seguenti regole e facendo attenzione ad eliminare le intersezioni (sulla OR):

$$\text{NOT} \rightarrow p_{\bar{X}} = 1 - p_X \quad \text{AND} \rightarrow p_{A \cdot B} = p_A \cdot p_B \quad \text{OR} \rightarrow p_{A+B} = p_A + p_B - p_A \cdot p_B$$

- le mappe di Karnaugh per semplificare l'espressione logica in somme esclusive di prodotti, in modo da evitare le intersezioni e facilitare il calcolo delle probabilità

Di seguito le probabilità p_F e i fattori di attività α_F per le porte logiche elementari a 2 ingressi:

Funzione logica	P_F	Fattore di attività α_F
AND	$p_A p_B$	$p_A p_B \cdot (1 - p_A p_B)$
NAND	$1 - p_A p_B$	$p_A p_B \cdot (1 - p_A p_B)$
OR	$p_A + (1 - p_A)p_B$	$(p_A + (1 - p_A)p_B) \cdot (1 - (p_A + (1 - p_A)p_B))$
NOR	$(1 - p_A)(1 - p_B)$	$(p_A + (1 - p_A)p_B) \cdot (1 - (p_A + (1 - p_A)p_B))$
XOR	$(p_A + p_B - 2p_A p_B)$	$(p_A + p_B - 2p_A p_B) \cdot (1 - p_A - p_B + 2p_A p_B)$
XNOR	$1 - p_A - p_B + 2p_A p_B$	$(p_A + p_B - 2p_A p_B) \cdot (1 - p_A - p_B + 2p_A p_B)$

Capacità logica

Si nota che nella formula del consumo dinamico compare la capacità C_F che rappresenta la capacità totale del nodo di uscita della porta logica. È possibile definire la capacità logica come il prodotto tra la capacità C_F e il fattore di attività α_F .

$$C_{\text{logica}} = C_F \cdot \alpha_F$$

In questo modo la formula del consumo dinamico può essere interpretata come il consumo dinamico per caricare e scaricare ad una frequenza f una capacità effettiva pari alla capacità logica.

$$P_{DYN} = C_{\text{logica}} \cdot V_{DD}(V_H - V_L) \cdot f$$