# Appunti di Fisica 1

Giacomo Simonetto

Secondo semetre 2023-24

**Sommario**

Appunti del corso di Fisica 1 - (Meccanica e termodinamica) della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

# Indice

# 1 Introduzione

## 1.1 Interazioni fondamentali

Le interazioni (o forze) fondamentali sono:

1. forza gravitazionale: scoperta per prima nel 1600 circa da Galileo
2. forza elettromagnetica: scoperta nel 1800
3. forza debole: legata ai costituenti degli atomi (radioattività)
4. forza forte: legata ai costituenti degli atomi (quark)

Si sta cercando un legame tra la forza elettromagnetica e quella debole (forza elettrodebole) e una teoria che lega le forze elettromagnetica, debole e forte (teoria delle forze unificate). La forza gravitazione è considerata particolare in quanto:

- è molto meno intensa delle altre
- ha solo "carica" positiva (non esiste massa negativa)
- spazio e forza gravitazionale non possono essere sepatati
- non si è ancora riusciti a comprenderla quantisticamente

# 2 Il punto materiale

## 2.1 Introduzione al punto materiale

È una finzione matematica in quanto non esiste nella realtà, ma serve come approssimazione. Non ha estensione, ma ha una massa $m$ ed è possibile determinarne la posizione. In un sistema di riferimento (cartesiano con 3 assi), la posizione è data dal vettore $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$.

## 2.2 Grandezze elementari

massa: $m$, l'unità di misura è $[m] = kg$
posizione: $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, con unità di misura $[x_0] = [y_0] = [z_0] = m$
tempo: $t$, con unità di misura $[t] = s$

## 2.3 Punto materiale in movimento - cinematica

### Posizione

La posizione nello spazio di un punto sono le coordinate del punto un sistema di riferimeno cartesiano di 3 assi.

$$\vec{r}(t) = (x_0(t), y_0(t), z_0(t)) \qquad [x_0] = [y_0] = [z_0] = m$$

### Velocità

La velocità è lo spazio percorso in un tempo piccolo.

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dx}\,\vec{r}(t) \qquad [v] = \frac{m}{s}$$

Per ottenere la posizione dalla velocità:

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \int_{t0}^{t1} \vec{v}(\tau)\,d\tau$$

### Accelerazione

L'accelerazione è la variazione della velocità nel tempo.

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dx}\,\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dx^2}\,\vec{r}(t) \qquad [a] = \frac{m}{s^2}$$

Per ottenere la velocità dall'accelerazione:

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int_{t0}^{t1} \vec{a}(\tau)\,d\tau$$

Per ottenere la posizione dall'accelerazione:

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \int_{t0}^{t1} \left(\vec{v_0}(\tau) + \int_{t0}^{t1} \vec{a}(\tau)\,d\tau\right) d\tau \qquad \left(= \vec{r_0} + \vec{v_0}(t - t_0) + \iint_{t_0}^{t_1} \vec{a}(\tau)\,d\tau^2\right)$$

### Moto uniformemente accelerato

Moto con accelerazione costante, le leggi orarie sono:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{a}(t - t_0) \end{cases}$$

Per convenzione si sceglie $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{a}t \end{cases}$$

Si osserva che per trovare $\vec{r}(t)$ a partire dall'accelerazione è necessario conoscere i due dati iniziali $\vec{r_0}$ (posizione) e $\vec{v_0}$ (velocità), in quanto sono stati fatti due integrali nel calcolo.

Ogni vettore $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ può essere scomposto nelle tre componenti $x, y, z$ degli assi cartesiani ottenendo tre equazioni del moto, una per ogni asse.

Esempi di applicazioni:

- caduta di un grave (da fermo e con moto orizzontale)
- moto di due automobili sulla stessa retta
- moto di un proiettile (con angolo inziale $\theta$ rispetto al suolo)

## 2.4 Moto armonico semplice in una dimensione

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(\omega t + \varphi_0) = A \cdot \sin(\omega(t - t_0)) \qquad \text{con } -\omega t_0 = \varphi_0 \\ v(t) &= A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \\ a(t) &= -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t) \end{aligned}$$

- $A$ ampiezza del moto, $[A] = m$
- $\omega$ velocità angolare, $[\omega] = \frac{rad}{s}$
- $\varphi_0$ sfasamento iniziale, $[\varphi_0] = rad$
- si osserva che $[A] = m$, $[A\omega] = \frac{m}{s}$, $\left[A\omega^2\right] = \frac{m}{s^2}$

## 2.5 Moto circolare uniforme sul piano xy

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (A\cos(\omega t + \varphi_0),\ A\sin(\omega t + \varphi_0),\ 0) \\ \vec{v}(t) &= (-A\omega\sin(\omega t + \varphi_0),\ A\omega\cos(\omega t + \varphi_0),\ 0) \\ \vec{a}(t) &= \big(-A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0),\ -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0),\ 0\big) = -\omega^2\vec{r}(t) \end{aligned}$$

- il vettore velocità è tangente alla circonferenza e perpendicolare al raggio
- il vettore accelerazione è perpendicolare a $\vec{v}$, opposto a $\vec{r}$ e diretto verso il centro
- l'accelerazione del moto è chiamata accelerazione centripeta

## 2.6 Moto vario

- la posizione è data da $\vec{r}(t)$
- la velocità è data da $\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dfrac{d}{dt}\,\vec{r}(t)$
- l'accelerazione è data da $\vec{a}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \dfrac{d}{dt}\,\vec{v}(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}\,\vec{r}(t)$
- la velocità è tangente alla traiettoria, ma non è detto che sia perpendicolare al vettore $\vec{r}$

# 3 Funzioni goniometriche (ripasso e proprietà)

## 3.1 Sviluppi di Taylor

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + o(\theta^5) \qquad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + o(\theta^4)$$

- le formule valgono solo se $\theta$ è un numero puro (non posso ad esempio sommare $m$ e $m^2$).
- $[\theta] = rad$, si misura in radianti (numero puro), un radiante è il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza che sottende un angolo $\theta$ e il raggio della circonferenza.

## 3.2 Formule di Eulero

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

- le formule valgono solo se $\mathrm{Im}(\sin\theta) = \mathrm{Im}(\cos\theta) = 0$ per $\theta \in \mathbb{Q}$:
  ricordando che $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + z^*}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - z^*}{2i}$, si ha:
  $\mathrm{Im}(\cos\theta) = \dfrac{1}{2i} \cdot \left( \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} - \dfrac{e^{-i\theta} + e^{i\theta}}{2} \right) = \dfrac{0}{2i} = 0$
  $\mathrm{Im}(\sin\theta) = \dfrac{1}{2i} \cdot \left( \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} - \dfrac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{2i} \right) = \dfrac{0}{2i} = 0$
- si osserva che $|\cos\theta| \le 1$, $|\sin\theta| \le 1$:
  $|\cos\theta| = \left| \dfrac{e^{i\theta)} + e^{-i\theta}}{2} \right| = \dfrac{1}{2} \left| e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right| \le \dfrac{1}{2} \left| 1 \cdot e^{i\theta} \right| + \left| 1 \cdot e^{-i\theta} \right| = \dfrac{1}{2}(1 + 1) = 1$
  $|\sin\theta| = \ldots$

## 3.3 Derivate

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta \qquad \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\sin\theta = -\sin\theta \qquad \frac{d^2}{d\theta^2}\cos\theta = -\cos\theta$$

# 4 Vettori e versori

## 4.1 Definizione

Un vettore è un "segmento orientato", cioè definito da 3 proprietà: lunghezza, direzione e verso. Un vettore si indica con lettere minuscole come $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... Questa definizione ci permette di essere indipendenti dal sistema di coordinate di riferimento.

La lunghezza di un vettore è chiamata norma o modulo e si indica $||\vec{a}||$

## 4.2 Prodotto per uno scalare

Dati $\vec{a}$ vettore e $\lambda$ scalare (numero reale), allora $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ è un vettore tale che:

- se $\lambda > 0$, $\vec{b}$ ha stessa direzione e verso di $\vec{a}$, con lunghezza $\lambda$ volte quella di $\vec{a}$
- se $\lambda < 0$, $\vec{b}$ ha stessa direzione e verso opposto di $\vec{a}$, con lunghezza $-\lambda$ volte quella di $\vec{a}$
- se $\lambda = 0$, $\vec{b}$ è vettore nullo $\vec{0}$

## 4.3 Somma di vettori

Dati due vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ la loro somma è un vettore $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ definita dalla regola del parallelogramma. La somma ha le seguenti proprietà:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
- $\vec{a}(\lambda_1 + \lambda_2) = \vec{a}\lambda_1 + \vec{a}\lambda_2$
- $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$
- $\vec{a} - \vec{a} = \vec{a}(1 - 1) = \vec{0}$

## 4.4 Versori

- i versori sono vettori unitari (con lunghezza 1).
- sono definiti come $\vec{u_a} = \frac{1}{||\vec{a}||} \cdot \vec{a}$.
- una terna di assi è definita da 3 versori $\vec{u_x}$, $\vec{u_y}$, $\vec{u_z}$.
- dato un vettore $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ si può esprimere come $\vec{a} = a_x\vec{u_x} + a_y\vec{u_y} + a_z\vec{u_z}$

## 4.5 Prodotto scalare

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che formano un angolo $\theta$ misurato in senso antiorario, il prodotto scalare tra due vettori è uno scalare definito come $\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \left|\left|\vec{b}\right|\right| \cos\theta$ con le seguenti proprietà:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$
- $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

#### Prodotto scalare tra versori

- $\vec{u_x} \cdot \vec{u_x} = \vec{u_y} \cdot \vec{u_y} = \vec{u_z} \cdot \vec{u_z} = 1$
- $\vec{u_x} \cdot \vec{u_y} = \vec{u_y} \cdot \vec{u_z} = \vec{u_z} \cdot \vec{u_x} = 0$

#### Prodotto scalare per componenti

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{u_x} + a_y\vec{u_y} + a_z\vec{u_z}) \cdot (b_x\vec{u_x} + b_y\vec{u_y} + b_z\vec{u_z}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = ||\vec{a}||^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad \Rightarrow \quad ||\vec{a}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

## 4.6 Prodotto vettore

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ con angolo $\theta$ misurato in senso antiorario, il prodotto vettore tra due vettori è un vettore definito come $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = ||\vec{a}|| \left|\left|\vec{b}\right|\right| \sin\theta \; \vec{u_c}$ con $\vec{u_c}$ versore perpendicolare al piano di $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

- se due vettori sono paralleli, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- l'orientamento di $\vec{u_c}$ è una scelta convenzionale secondo la "regola della mano destra"
- $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

**Prodotto vettore tra versori**

- $\vec{u_x} \times \vec{u_x} = \vec{u_y} \times \vec{u_y} = \vec{u_z} \times \vec{u_z} = 0$
- $\vec{u_x} \times \vec{u_y} = \vec{u_z}$
- $\vec{u_y} \times \vec{u_z} = \vec{u_x}$
- $\vec{u_z} \times \vec{u_x} = \vec{u_y}$

## 4.7 Derivata di vettore

- Dato un vettore $\vec{a}(t) = (a_x(t)\; \vec{u_x} + a_y(t)\; \vec{u_y} + a_z(t)\; \vec{u_z})$, la sua derivata è definita come $\frac{d}{dt}\,\vec{a}(t) = \left(\frac{d}{dt}\, a_x(t)\; \vec{u_x} + \frac{d}{dt}\, a_y(t)\; \vec{u_y} + \frac{d}{dt}\, a_z(t)\; \vec{u_z}\right)$
- Dato un versore $\vec{u}(t)$, la sua derivata è definita come $\frac{d}{dt}\,\vec{u}(t) = \frac{d\,\theta(t)}{dt}\,\vec{u_\perp}(t)$ con $\vec{u_\perp}(t)$ versore perpendicolare a $\vec{u}(t)$ e con $\theta$ angolo spazzato da $\vec{u}(t)$ in $\Delta t$ piccolo.

Sia $\vec{r}(t)$ vettore qualsiasi, la sua derivata è definita come

$$\frac{d}{dt}\,\vec{r}(t) = \frac{d\,||\vec{r}(t)||}{dt}\,\vec{u_r}(t) + ||\vec{r}(t)||\,\frac{d\,\theta(t)}{dt}\,\vec{u_\perp}(t)$$

# 5 Dinamica del punto materiale

## 5.1 Prima legge della dinamica - principio di inerzia

## 5.2 Seconda legge della dinamica - legge di Newton

## 5.3 Terza legge della dinamica - principio di azione-reazione

## 5.4 Sistemi di riferimento inerziali

## 5.5 Forza gravitazionale universale

## 5.6 Forza elastica

## 5.7 Forza di reazione vincolare

## 5.8 Forza di attrito radente

## 5.9 Forza di attrito viscoso

# 6 Trovare le equazioni del moto

## 6.1 Piano inclinato

## 6.2 Oscillatore armonico semplice

## 6.3 Trovare le soluzioni del moto per una forza generica in 1D

## 6.4 Oscillatore armonico con l'azione della forza peso

## 6.5 Oscillatore armonico smorzato (con forza peso e attrito)

## 6.6 Risonanza e oscillatore armonico

## 6.7 Velocità limite

## 6.8 Fili in tensione

## 6.9 Pendolo semplice

## 6.10 Pendolo conico

## 6.11 Curve sopraelevate (paraboliche)

# 7 Lavoro ed energia

## 7.1 Introduzione

## 7.2 Lavoro della forza peso

## 7.3 Lavoro della forza peso

## 7.4 Lavoro della forza elastica

## 7.5 Lavoro della forza di reazione vincolare

## 7.6 Lavoro della forza di attrito radente

## 7.7 Segno del lavoro

# 8 Forze conservative e non conservative

## 8.1 Introduzione

## 8.2 Energia potenziale

#### Potenziali da ricordare

#### Potenziali in 1D

## 8.3 Teorema dell'energia cinetica

## 8.4 Applicazioni del lavoro ed energia

## 8.5 Potenza

## 8.6 Gradiente di una forza

# 9 Quantità conservate

## 9.1 Lavoro

## 9.2 Impulso

## 9.3 Momento angolare

## 9.4 Applicazioni del momento angolare

# 10 Trasformazioni tra sistemi di riferimento

## 10.1 Posizione

## 10.2 Velocità

## 10.3 Accelerazione

## 10.4 Forze e forze apparenti

## 10.5 Esperimento di Guglielmini