

Appunti di Fondamenti di controlli automatici

Giacomo Simonetto

Secondo semestre 2024-25

Sommario

Appunti del corso di Fondamenti di controlli automatici della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

Indice

1	Introduzione ai controlli automatici	3
2	Nozioni di segnali	3
2.1	Concetto di segnale	3
2.2	Classificazione dei segnali matematici	3
2.3	Impulso di Dirac	4
2.4	Segnali canonici causali a tempo continuo	4
3	Nozioni di sistemi	6
3.1	Concetto di sistema	6
3.2	Parti di un sistema	6
3.3	Sistema dinamico	6
3.4	Sistema dinamico lineare	6
4	Modellizzazione	7
4.1	Modelli di flusso continuo - modelli di trasferimento di risorse a tempo continuo	7
4.2	Modelli di decisione - modelli di trasferimento di risorse a tempo discreto (istanti privilegiati)	9
4.3	Modello a struttura d'età - modello di Leslie	10
4.4	Modelli di transizione tra stati a tempo discreto	12
4.5	Modelli di influenza	14
4.6	Modelli fisici	16
4.7	Sistemi dinamici non lineari	16

1 Introduzione ai controlli automatici

- **automatica**: studia, a livello teorico, sistemi e soluzioni in grado di regularsi automaticamente per raggiungere un obiettivo
- **controlli automatici**: strumenti necessari per utilizzare l'automatica in applicazioni pratiche
- **automazione**: applicazione dell'automatica

2 Nozioni di segnali

2.1 Concetto di segnale

- **segnale**: grandezza che evolve in funzione di una o più variabili indipendenti a cui è associata una informazione di una qualche natura
- **segnale fisico**: segnale che rappresenta la grandezza fisica di un'informazione ed è legato alla realtà, sono misurati attraverso sensori e in genere rappresentano le entrate o le uscite
- **segnale matematico**: segnale che modella segnali fisici, sono ottenuti da funzioni matematiche e vengono analizzati per conoscere l'evoluzione del sistema

2.2 Classificazione dei segnali matematici

Dominio - tempo continuo e discreto

Il dominio è l'insieme dei valori assunti dalla variabile indipendente. Un segnale con una singola variabile indipendente è detto segnale monodimensionale, uno con più variabili indipendenti è detto segnale multidimensionale. In base al dominio il segnale può essere:

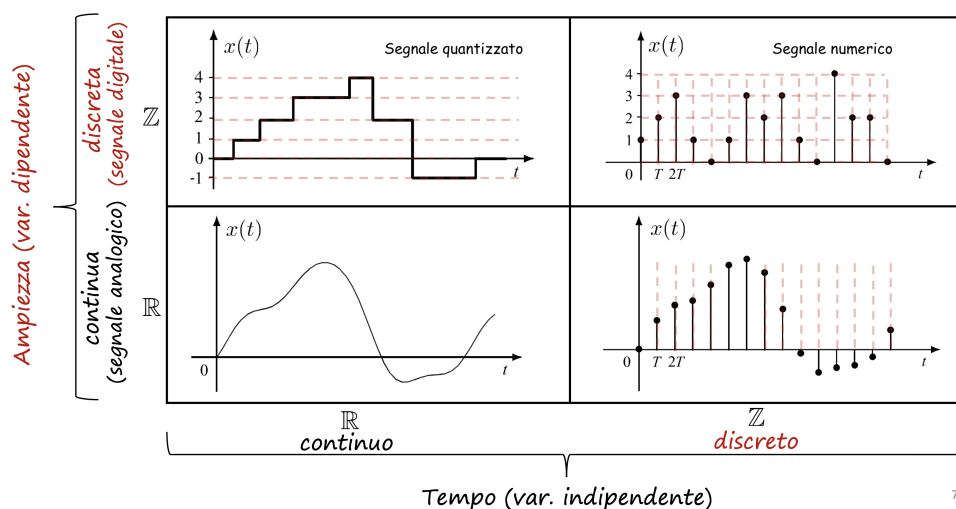
- a tempo continuo $D \subseteq \mathbb{R}$
- a tempo discreto $D \subseteq \mathbb{Z}$

Codominio - segnale analogico e digitale

Il codominio è l'insieme dei valori assunti dalla variabile dipendente. Un segnale con singola variabile dipendente è detto segnale scalare in quanto assume valori scalari, uno con più variabili dipendenti è detto segnale vettoriale in quanto assume valori vettoriali. In base al codominio il segnale può essere:

- analogico (ampiezza continua) $I \subseteq \mathbb{R}$
- digitale (ampiezza discreta) $I \subseteq \mathbb{Z}$

Tabella riassuntiva



Un segnale digitale a tempo continuo è anche detto segnale quantizzato, mentre un segnale digitale a tempo discreto è anche detto segnale numerico.

Altre proprietà dei segnali

- **segnali pari:** simmetrici rispetto all'asse delle ascisse, $x(t) = x(-t)$
- **segnali dispari:** simmetrici rispetto all'origine, $x(t) = -x(-t)$
- **segnali causali:** segnali nulli per tempo negativo, $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$
- **segnali periodici:** segnali che si ripetono ogni periodo T , $x(t) = x(t + T)$

2.3 Impulso di Dirac

L'impulso di Dirac $\delta_0(t)$ è definito come la derivata del gradino unitario, ovvero è una distribuzione che esibisce la proprietà di avere integrale unitario su tutto il dominio. È rappresentata graficamente come una freccia verticale e può essere vista come un rettangolo alto e molto stretto di area unitaria.

$$\delta_0(t) := \frac{d}{dt}\delta_{-1}(t) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) = 1$$

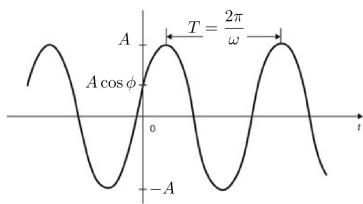
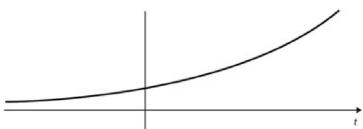
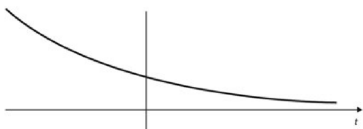
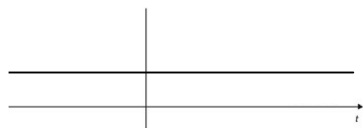
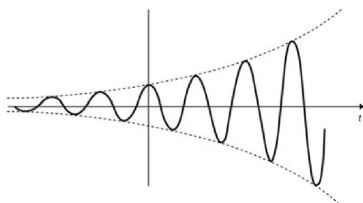
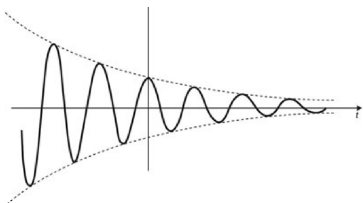
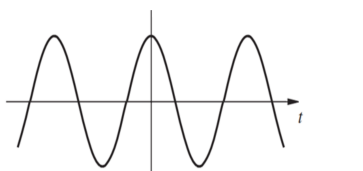
2.4 Segnali canonici causali a tempo continuo

tipo di segnale	formula matematica	grafico
impulso di Dirac	$\delta_0(t)$	
gradino unitario	$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$	
rampa	$\delta_{-2}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$	
rampa parabolica	$\delta_{-3}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2/2 & t \geq 0 \end{cases}$	

Si osserva che per i segnali causali elencati sopra vale la seguente proprietà:

$$\delta_0(t) \xrightleftharpoons[d/dt]{f} \delta_{-1}(t) \xrightleftharpoons[d/dt]{f} \delta_{-2}(t) \xrightleftharpoons[d/dt]{f} \delta_{-3}(t)$$

Altri segnali canonici (non causali) a tempo continuo

tipo di segnale	formula matematica	grafico
segnali sinusoidali	$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ $\omega = 2\pi f \quad f = 1/T$	
segnale esponenziale monotono crescente	$x(t) = e^{\sigma t} \quad \sigma > 0$	
segnale esponenziale monotono decrescente	$x(t) = e^{\sigma t} \quad \sigma < 0$	
segnale esponenziale costante	$x(t) = e^{\sigma t} \quad \sigma = 0$	
segnale sinusoidale crescente in modo esponenziale	$x(t) = e^{\sigma t} A \cos(\omega t + \varphi)$ $\sigma > 0$	
segnale sinusoidale decrescente in modo esponenziale	$x(t) = e^{\sigma t} A \cos(\omega t + \varphi)$ $\sigma < 0$	
segnale sinusoidale "costante in modo esponenziale"	$x(t) = e^{\sigma t} A \cos(\omega t + \varphi)$ $\sigma = 0$	

Considerazioni sui segnali sinusoidali

Un segnale sinusoidale decrescente/crescente in modo esponenziale può essere rappresentato attraverso un numero complesso sfruttando l'esponenziale di un numero complesso e la formula di Eulero

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} \cos(\omega t) + j e^{\sigma t} \sin(\omega t) = e^{\sigma t} A \cos(\omega t + \varphi)$$

I sistemi dinamici lineari hanno, come soluzioni, forme esponenziali e sinusoidali crescenti/decrescenti in modo esponenziale.

Considerazioni a tempo discreto

Il *Delta di Dirac* viene chiamato impulso unitario o *Delta di Kronecker*, per il resto si usano sommatorie al posto degli integrali e qualche denominazione differente che abbiamo trascurato.

3 Nozioni di sistemi

3.1 Concetto di sistema

- un sistema è un oggetto o un insieme di oggetti (elementi, fenomeni, progetti, componenti e sottosistemi) con relazioni organizzate (interazioni, interfacce, entrate, uscite) tra le unità interne o componenti che compongono un insieme unificato
- è delimitato da un confine ed è circondato ed influenzato dall'ambiente
- è descritto dai suoi confini, dalla sua struttura e dal suo scopo e si esprime nel suo funzionamento

3.2 Parti di un sistema

- **componente**: parte irriducibile o un aggregato di parti, noto anche come sottosistema
- **connessione tra componenti**: relazione tra la funzione di un componente e le funzioni di altri componenti
- **confine - contorno**: separazione tra un componente e l'altro all'interno del sistema o separazione tra sistema e ambiente esterno
- **scopo**: obiettivo del sistema
- **ambiente**: tutto ciò che è esterno al sistema
- **interfacce**: punti in cui il sistema entra in contatto con l'ambiente esterno
- **ingresso**: segnali di input dall'ambiente esterno
- **uscita**: segnale di output o risultato restituito all'ambiente esterno
- **vincoli**: limiti fisici, strutturali, ... che il sistema deve sopportare

3.3 Sistema dinamico

Un sistema dinamico è un sistema che evolve nel tempo ed è composto da:

- **stato**: insieme di variabili che descrivono completamente il sistema
- **ingressi**: variabili che influenzano l'evoluzione dello stato
- **uscite**: variabili che descrivono lo stato (parzialmente o completamente)
- **leggi**: formule matematiche che descrivono l'evoluzione del sistema e le relazioni tra input/output

3.4 Sistema dinamico lineare

Un sistema dinamico si dice lineare se vale il principio di sovrapposizione degli effetti, ovvero se il risultato finale è una ottenuto tramite combinazione lineare degli eventi agenti sul sistema, indipendentemente dall'ordine con cui si verificano.

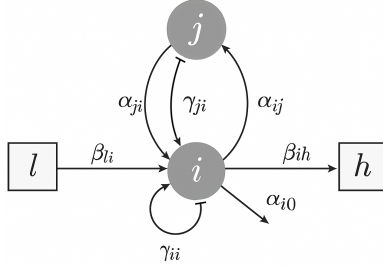
4 Modellizzazione

4.1 Modelli di flusso continuo - modelli di trasferimento di risorse a tempo continuo

Introduzione

I modelli a flusso continuo, o modelli di trasferimento di risorse a tempo continuo, sono modelli costituiti da più compartimenti, in cui si analizzano gli spostamenti delle risorse tra i diversi compartimenti.

Rappresentazione grafica



$l \rightarrow$ ingresso $u_l(t)$
 $h \rightarrow$ uscita $u_h(t)$
 $i \rightarrow$ compartimento o contenitore di risorse
 $j \rightarrow$ compartimento o contenitore di risorse
 $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow$ parametri di flusso $\in \mathbb{R}$

$x_i(t) \rightarrow$ risorse nel compartimento i all'istante t , variabile di stato
 $x_j(t) \rightarrow$ risorse nel compartimento j all'istante t , variabile di stato
 $\alpha_{ij}x_i(t) \rightarrow$ trasferimento di risorse dal compartimento i al compartimento j
 $\alpha_{ji}x_j(t) \rightarrow$ trasferimento di risorse dal compartimento j al compartimento i
 $\alpha_{i0}x_i(t) \rightarrow$ trasferimento di risorse dal compartimento i all'ambiente, perdite
 $\beta_{li}u_l(t) \rightarrow$ trasferimento di risorse dall'ingresso al compartimento i
 $\beta_{ih}u_h(t) \rightarrow$ trasferimento di risorse dal compartimento i all'uscita
 $\gamma_{ii}x_i(t) \rightarrow$ accumulo della risorsa generata nel compartimento i
 $\gamma_{ji}x_j(t) \rightarrow$ trasferimento della risorsa generata in j da j a i

Rappresentazione in funzioni matematiche

Per ogni compartimento si scrive l'equazione del bilancio del flusso:

velocità di variazione delle risorse in i = flusso entrante in i - flusso uscente da i

Si ottengono n equazioni differenziali, una per ogni i compartimento (con n compartimenti):

$$\dot{x}_i(t) = \left(\sum_{l=1}^p \beta_{li}u_l(t) + \sum_{j=1}^n (\alpha_{ji} + \gamma_{ji})x_j(t) + \gamma_{ii}x_i(t) \right) - \left(\sum_{h=1}^p \beta_{ih}u_h(t) + \sum_{j=0}^n \alpha_{ij}x_i(t) \right)$$

È possibile scrivere tutto ciò in forma matriciale: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}_{\text{variabili di stato}} \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}_{\text{variazione var. di stato}} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}_{\text{entrate/uscite}}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_{ij} = \alpha_{ji} + \gamma_{ji} \\ a_{ii} = \gamma_{ii} - \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} \end{cases} \quad B(t) = \begin{bmatrix} \beta_{li} \\ \vdots \\ \beta_{ih} \end{bmatrix}$$

Punto di equilibrio di un modello a flusso continuo / trasferimento di risorse

Dato un sistema dinamico nella forma $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, per calcolarne l'equilibrio:

1. si fissano gli ingressi e le uscite ad un certo valore $u(t) = \bar{u}$, altrimenti se gli ingressi continuano a variare, non si raggiungerà mai una situazione di equilibrio
2. si definisce lo stato di equilibrio \bar{x} tale per cui $\bar{x} = x(t)$ per $t \gg 0$
3. si osserva che all'equilibrio non ci devono essere variazioni delle risorse, ovvero $\dot{x}(t) = 0$
4. si ottiene un'equazione matriciale $0 = A\bar{x} + B\bar{u}$ nell'incognita \bar{x}
5. la soluzione dell'equazione corrisponde allo stato di equilibrio e vale:

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

Si osserva che in un sistema isolato, senza ingressi e uscite, la soluzione dell'equazione $0 = A\bar{x}$ corrisponde al nucleo della matrice A : $\bar{x} = \ker \{A\}$

Esempi visti a lezione

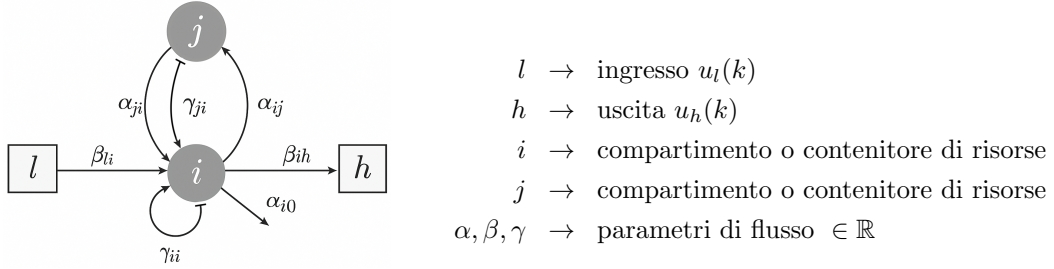
- serbatoio con ingressi, uscite, serbatoi multipli intermedi e altre variazioni
- sistema di raffreddamento della CPU
- traffico automobilistico
- parco macchine
- emigrazione italiana con natalità

4.2 Modelli di decisione - modelli di trasferimento di risorse a tempo discreto (istanti privilegiati)

Introduzione

I modelli di decisione, o modelli di trasferimento di risorse a tempo discreto, sono modelli costituiti da più compartimenti, in cui si analizzano gli spostamenti delle risorse tra i diversi compartimenti in istati di tempo privilegiati. Le rappresentazioni e i procedimenti sono molto simili ai modelli di flusso continuo.

Rappresentazione grafica



I parametri $x_i(k)$, $x_j(k)$, $\alpha_{ij}x_i(k)$, $\alpha_{ji}x_j(k)$, $\alpha_{i0}x_i(k)$, $\beta_{li}u_l(k)$, $\beta_{ih}u_h(k)$, $\gamma_{ii}x_i(k)$, $\gamma_{ji}x_j(k)$ sono analoghi al modello precedente, soltanto che ora, al posto di essere in funzione del tempo $t \in \mathbb{R}$, sono in funzione di istanti privilegiati attraverso la variabile $k \in \mathbb{N}$

Rappresentazione in formule matematiche

Per ogni compartimento si scrive l'equazione del bilancio del flusso:

$$\text{variazione delle risorse in } i = \text{flusso entrante in } i - \text{flusso uscente da } i$$

Si ottengono n equazioni, una per ogni i compartimento (con n compartimenti):

$$x_i(k+1) - x_i(k) = \left(\sum_{l=1}^p \beta_{li} u_l(k) + \sum_{j=1}^n (\alpha_{ji} + \gamma_{ji}) x_j(k) + \gamma_{ii} x_i(k) \right) - \left(\sum_{h=1}^p \beta_{ih} u_h(k) + \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} x_i(k) \right)$$

$$x_i(k+1) = \left(\sum_{l=1}^p \beta_{li} u_l(k) + \sum_{j=1}^n (\alpha_{ji} + \gamma_{ji}) x_j(k) + \gamma_{ii} x_i(k) \right) - \left(\sum_{h=1}^p \beta_{ih} u_h(k) + \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} x_i(k) \right) + x_i(k)$$

È possibile scrivere tutto ciò in forma matriciale: $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_p(k) \end{bmatrix} \quad B(k) = \begin{bmatrix} \beta_{l1} \\ \vdots \\ \beta_{lh} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{con } a_{ij} = \alpha_{ji} + \gamma_{ji} \quad a_{ii} = 1 + \gamma_{ii} - \sum_{j=0}^n \alpha_{ij}$$

Esempi visti a lezione

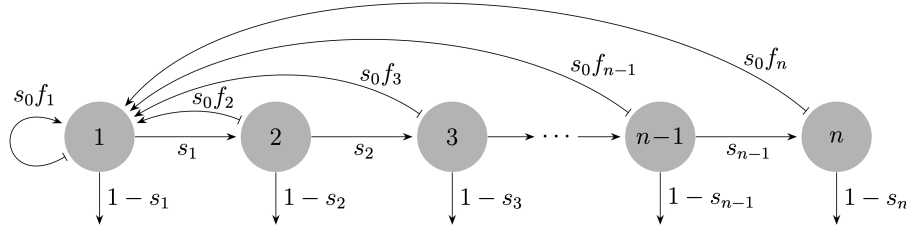
- modello di Leslie a struttura d'età (approfondito successivamente)
- fenomeno di emigrazione
- sistema di utilizzo della CPU

4.3 Modello a struttura d'età - modello di Leslie

Introduzione

I modelli a struttura d'età o di Leslie sono modelli di trasferimento di risorse a tempo discreto specifici per analizzare l'andamento di una popolazione, suddividendola in classi d'età. In genere si contano il numero di femmine per classe d'età.

Rappresentazione grafica



- $1, 2, \dots, n \rightarrow$ compartimenti / classi di età
- $x_1(k) \rightarrow$ popolazione con età $\in [0, T[$
- $x_i(k) \rightarrow$ popolazione con età $\in [(i-1)T, iT[$
- $x_n(k) \rightarrow$ popolazione con età $\in [nT, +\infty[$
- $s_0 \rightarrow$ tasso di sopravvivenza alla nascita $\in \mathbb{R}$
- $s_i \rightarrow$ tasso di sopravvivenza per passaggio alla classe successiva $\in \mathbb{R}$
- $f_i \rightarrow$ tasso di fertilità $\in \mathbb{R}$
- $1 - s_i \rightarrow$ tasso di mortalità $\in \mathbb{R}$

Rappresentazione in formule matematiche

Per il primo compartimento si ha:

$$x_1(k+1) - x_1(k) = s_0 \sum_{i=1}^n f_i x_i(k) - s_1 x_1(k) - (1 - s_1) x_1(k) \quad \rightarrow \quad x_1(k+1) = s_0 \sum_{i=1}^n f_i x_i(k)$$

Per un generico compartimento i con $1 < i < n$ si ha:

$$x_i(k+1) - x_i(k) = s_{i-1} x_{i-1}(k) - s_i x_i(k) - (1 - s_i) x_i(k) \quad \rightarrow \quad x_i(k+1) = s_{i-1} x_{i-1}(k)$$

Per l'ultimo compartimento si ha:

$$x_n(k+1) - x_n(k) = s_{n-1} x_{n-1}(k) - (1 - s_n) x_n(k) \quad \rightarrow \quad x_n(k+1) = s_{n-1} x_{n-1}(k) + s_n x_n(k)$$

In forma matriciale si ottiene la matrice A che vale:

$$A = \begin{pmatrix} s_0 f_1 & s_0 f_2 & s_0 f_3 & \dots & s_0 f_{n-1} & s_0 f_n \\ s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & s_n \end{pmatrix}$$

Tasso di riproduzione e andamento del sistema

Si definiscono i seguenti indici di sopravvivenza/riproduttività:

- $s_0 \cdot s_1 \cdot \dots \cdot s_{i-1}$ probabilità che una femmina sopravviva fino alla classe i
- $s_0 \cdot s_1 \cdot \dots \cdot s_{i-1} \cdot f_i$ femmine generate in media da una femmina di classe i
- $R = s_0 f_1 + s_0 s_1 f_2 + \dots + s_0 s_1 \dots s_{i-1} f_i (1 + s_n + s_n^2 + \dots)$ tasso netto di riproduzione
 - $R > 1$ popolazione in aumento
 - $R = 1$ popolazione stazionaria
 - $R < 1$ popolazione in calo

Equilibrio della struttura d'età

L'analisi dell'equilibrio di una struttura d'età viene fatta sul vettore normalizzato della popolazione per ogni classe di età. In questo modo si analizza la distribuzione della popolazione in percentuale tra le varie classi, indipendentemente dall'andamento complessivo del sistema (popolazione in aumento, in calo, ...).

1. normalizzazione del vettore popolazione:

$$S(k) = \begin{pmatrix} s_1(k) \\ \vdots \\ s_n(k) \end{pmatrix} = \frac{x(k)}{N(k)} = \begin{pmatrix} x_1(k)/N(k) \\ \vdots \\ x_n(k)/N(k) \end{pmatrix} \quad \text{con } N(k) = x_1(k) + x_2(k) + \dots + x_n(k)$$

2. si impone la condizione di equilibrio e si ottiene un'equazione matriciale

$$S(k+1) = S(k) = S_{eq} \quad S(k+1) = \frac{x(k+1)}{N(k+1)} \quad S(k) = \frac{x(k)}{N(k)}$$

$$x(k+1) = Ax(k) \rightarrow N(k+1)S(k+1) = AN(k)S(k) \xrightarrow{\text{all'equilibrio, } k \gg 0} \frac{N(k+1)}{N(k)} S_{eq} = AS_{eq}$$

3. si osserva che all'equilibrio $\lambda := N(k+1)/N(k)$ è autovalore di A con:

$$\lambda > 1 \text{ popolazione in aumento} \quad \lambda = 1 \text{ popolazione stazionaria} \quad \lambda < 1 \text{ popolazione in calo}$$

4. si osserva che all'equilibrio S_{eq} è autovettore di A associato all'autovalore λ

Analizzando le singole componenti del vettore di equilibrio si può capire la tendenza della popolazione. Ad esempio se si ha una classe "giovane" che è meno numerosa della classe "vecchia" si ha un andamento decrescente esponenzialmente.

$$S_{eq,i}(k) = \frac{x_i(k)}{N(k)} \quad S_{eq,i+1}(k) = \frac{x_{i+1}(k)}{N(k)} \quad S_{eq,i+1}(k+1) = \frac{x_{i+1}(k+1)}{N(k+1)} \quad \begin{matrix} x_{i+1}(k+1) = s_i x_i(k) \\ N(k+1) = \lambda N(k) \end{matrix}$$

$$S_{eq,i}(k) < S_{eq,i+1}(k) = S_{eq,i+1}(k+1) \rightarrow \frac{x_i(k)}{N(k)} < \frac{x_{i+1}(k+1)}{N(k+1)} = \frac{s_i x_i(k)}{\lambda N(k)} \rightarrow 1 > s_i > \lambda$$

Esempi visti a lezione

- popolazione di conigli
- popolazione di salmoni
- catena di produzione con test di qualità

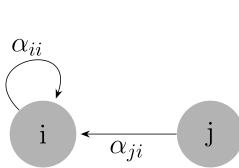
4.4 Modelli di transizione tra stati a tempo discreto

Introduzione

Il modello di transizione tra stati si utilizza per rappresentare sistemi le cui variabili di stato possono assumere solamente un numero finito di valori (detti attributi). Non sono presenti ingressi o uscite e il modello si basa sulla probabilità con cui il sistema cambia da uno stato ad un altro.

Rappresentazione grafica con grafo di transizione o catena di Markov

La rappresentazione grafica del modello di transizione tra stati è detta anche catena di transizione o catena di Markov. Il processo modellizzato è, infatti, chiamato anche processo Markoviano.



$i, j \rightarrow$ stati i e j
 $x_i(k) \rightarrow$ probabilità di essere nello stato i
 $x_j(k) \rightarrow$ probabilità di essere nello stato j
 $\alpha_{ii} \rightarrow$ probabilità di rimanere nello stesso stato
 $\alpha_{ji} \rightarrow$ probabilità di cambiare stato da j a i

Rappresentazione in formule matematiche

Si declinano le equazioni dei modelli di decisione (a tempo discreto), data la grande somiglianza dei due modelli e si ottengono n equazioni, una per ogni i compartimento (con n compartimenti):

$$x_i(k+1) - x_i(k) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ji} x_j(k) + \alpha_{ii} x_i(k) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i(k) \rightarrow x_i(k+1) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ji} x_j(k) + \alpha_{ii} x_i(k)$$

con $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 1$ per la formula della probabilità totale

È possibile scrivere tutto ciò in forma matriciale: $x(k+1) = Ax(k)$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{con } a_{ji} = \alpha_{ij}$$

- $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji} = 1$ la somma delle colonne di A è pari a 1 per la formula della probabilità totale
- $\sum_{i=1}^n x_i(k) = 1$ la somma del vettore delle variabili di stato (essendo probabilità) è sempre 1

Equilibrio nei modelli di transizione tra stati

- il vettore x_{eq} delle variabili di stato all'equilibrio deve soddisfare l'equazione $x_{eq} = Ax_{eq}$, ovvero x_{eq} corrisponde all'autovettore associato all'autovalore 1
- si osserva che $x_{eq,i} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{eq,j}$, ovvero l'elemento $x_{eq,i}$ sarà maggiore se ci sono molti archi entranti sullo stato i con probabilità associate grandi e provenienti da altri stati molto probabili

Caso particolare nel calcolo dell'equilibrio

Si osserva che nel caso in cui ci sia uno stato che non presenta archi uscenti, se non un self-loop su se stesso, con il passare del tempo si andrà a finire in quello stato e non si riuscirà più ad uscirne. Si otterrà, quindi, un vettore x_{eq} delle variabili di stato all'equilibrio composto da tutti 0, tranne in corrispondenza dello stato trappola in cui ci sarà 1.

Nel page rank, per ovviare a questo problema, si è scelto di inserire una matrice di perturbazione che ammette una piccola probabilità di uscire dalla pagina in questione e finire in una pagina a caso tra le altre con uguale probabilità.

$$A_{corretta} = p A + (1 - p) A_{perturbazione} \quad \text{con } p = \text{piccola probablità di uscire dalla pagina}$$
$$A_{perturbazione} = \begin{pmatrix} q & q & \dots & q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q & q & \dots & q \end{pmatrix} \quad \text{con } q = \frac{1}{n \text{ righe}}$$

Esempi visti a lezione

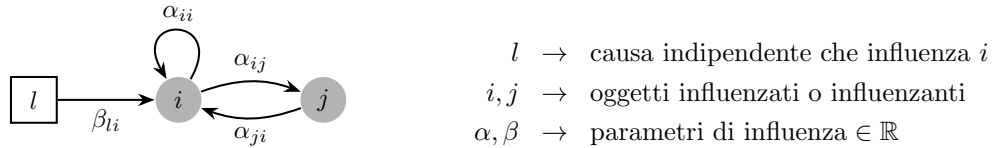
- previsioni del meteo
- page ranking di Google
- condivisione di risorse
- code e sistemi di servizio

4.5 Modelli di influenza

Introduzione

I modelli di influenza servono per rappresentare fenomeni di causa effetto in cui ci sono più oggetti che si influenzano tra di loro. Possono essere sia a tempo continuo che a tempo discreto

Rappresentazione grafica



- $x_i(t/k) \rightarrow$ opinione del primo oggetto/persona, variabile di stato
- $x_j(t/k) \rightarrow$ opinione del secondo oggetto/persona, variabile di stato
- $\alpha_{ij}x_i(t/k) \rightarrow$ influenza di i sull'oggetto j
- $\alpha_{ji}x_j(t/k) \rightarrow$ influenza di j sull'oggetto i
- $\alpha_{ii}x_i(t/k) \rightarrow$ mantenimento della propria opinione
- $\beta_{li}u_l(t/k) \rightarrow$ influenza dall'ingresso indipendente il

Rappresentazione in funzioni matematiche

Per il tempo discreto si ottiene:

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}x_j(k) + \sum_{l=1}^p \beta_{li}u_l(k) \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

Per il tempo continuo si ottiene:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}x_j(t) + \sum_{l=1}^p \beta_{li}u_l(t) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

Esistono due modelli di influenza delle opinioni, per sistemi isolati, che hanno la particolarità di prevedere o meno l'influenza dalle condizioni iniziali:

- **modello di DeGroot:** lo stato non è influenzato dalla condizione iniziale e all'equilibrio tutti gli oggetti avranno la stessa opinione

$$x(k+1) = \lambda Ax(k) + (1-\lambda)x(0) \quad \lambda = 1 \quad \rightarrow \quad x(k+1) = Ax(k)$$

- **modello di Friedkin e Johnsen:** lo stato è sempre influenzato dalla condizione iniziale e all'equilibrio le opinioni non convergono ad un consenso comune

$$x(k+1) = \lambda Ax(k) + (1-\lambda)x(0) \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Analisi qualitativa del diagramma delle fasi o spazio di stato

Per risolvere i problemi di influenza si ricorre allo studio del diagramma delle fasi detto anche spazio di stato, ovvero del grafico in cui, negli assi cartesiani sono presenti le variabili di stato e si è indipendenti dal tempo. Per semplicità si scelgono solo modelli con due oggetti/personone e con ingressi costanti:

$$0 = \dot{x}_1(t) = \alpha_{11}x_1(t) + \alpha_{21}x_2(t) + \beta_{11}\bar{u}_1 + \beta_{21}\bar{u}_2$$

$$0 = \dot{x}_2(t) = \alpha_{12}x_1(t) + \alpha_{22}x_2(t) + \beta_{12}\bar{u}_1 + \beta_{22}\bar{u}_2$$

- si analizzano le funzioni matematiche che descrivono il sistema all'equilibrio in maniera indipendente in modo da trovare delle equazioni che descrivono delle rette $x_1 = m_1x_2 + q_1$ e $x_2 = m_2x_1 + q_2$

$$x_1 = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}x_2 - \frac{\beta_{11}\bar{u}_1 + \beta_{21}\bar{u}_2}{\alpha_{11}} \quad x_2 = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}x_1 - \frac{\beta_{12}\bar{u}_1 + \beta_{22}\bar{u}_2}{\alpha_{22}}$$

- si tracciano le rette nel diagramma delle fasi e si analizza il grafico ottenuto, se esiste il punto di equilibrio, allora è l'intersezione delle due rette

Esempi visti a lezione

- relazione amorosa tra Romeo e Giulietta
- corsa agli armamenti
- dinamica dei prezzi

Corsa agli armamenti a tempo continuo

Sono presenti due nazioni che si influenzano a vicenda e due cause (aggressività delle nazioni) che influenzano rispettivamente la prima e la seconda nazione.

$$\dot{x}_1(t) = -\alpha_{11}x_1(t) + \alpha_{21}x_2(t) + \bar{u}_1 \quad x_1 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}x_2 + \frac{\bar{u}_1}{\alpha_{11}}$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha_{12}x_1(t) - \alpha_{22}x_2(t) + \bar{u}_2 \quad x_2 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}x_1 + \frac{\bar{u}_2}{\alpha_{22}}$$

Per la corsa agli armamenti si era osservato che potevano verificarsi due casi, in base ai valori α :

1. le rette si incontrano nel punto di equilibrio e si divide il piano in 4 quadranti, analizzando i casi in cui $\dot{x}_1(t) > 0$ e $\dot{x}_2(t) > 0$ si osservava cosa avviene in ciascuno dei 4 quadranti: si tende all'equilibrio
2. le rette non si incontrano e dividono il piano in 3 sezioni, analizzando cosa avveniva nelle tre sezioni si osserva che tra le due rette, il sistema diverge a $+\infty$, altrimenti converge sulle due rette

Dinamica dei prezzi a tempo discreto

Si definiscono i consumatori e i produttori con le loro sensibilità:

$q = bp + Q$	$p = \text{prezzo}$	$a = \text{sensib. consumatori}$	$q(k) = -ap(k) + D$ istantanea
$q = -ap + D$	$q = \text{quantità}$	$b = \text{sensib. produttori}$	$q(k+1) = bp(k) + Q$ non istant.

Si analizza il grafico ottenuto dalle due rette in funzione dei parametri a, b e delle variabili di stato p, q e si osserva che le rette sono sempre incidenti nel punto di equilibrio, ma si distinguono tre casi:

- $a > b$: scelto un punto sulle rette, si tende a convergere nell'intersezione attraverso moti oscillanti "rettangolari" esponenzialmente smorzati
- $a = b$: scelto un punto sulle due rette, si ottiene un moto oscillante "rettangolare" costante, per cui non si raggiungerà mai l'equilibrio, a meno che non si parta proprio da esso
- $a < b$: scelto un punto sulle due rette, si ottiene un moto oscillante "rettangolare" divergente, per cui non si raggiungerà mai l'equilibrio, a meno che non si parta proprio da esso

Tale analisi si ottiene analizzando il prezzo di equilibrio $p_{eq} = -1/(a+b) (D-Q)$ e analizzando la deviazione del prezzo rispetto all'equilibrio $\tilde{p}(k+1) = -b/a \tilde{p}(k)$ con $\tilde{p}(k) = p(k) - p_{eq}$.

4.6 Modelli fisici

Circuiti elettrici

Per modellare un circuito elettrico si utilizza un sistema matematico con i seguenti elementi:

- **variabili di stato:** le tensioni dei condensatori e le correnti negli induttori
- **ingressi:** i vari generatori e disturbi
- **equazioni:** equazioni costitutive dei componenti e le leggi di Kirchhoff per il circuito

Sistemi meccanici traslazionali

Per modellare i sistemi meccanici traslazionali (carrellino, molla, smorzatore) si definiscono:

- **variabili di stato:** le posizioni e relative derivate dei carrellini/oggetti in movimento
- **ingressi:** le forze esterne agenti sul sistema
- **equazioni:** equazioni costitutive delle varie parti (molla, smorzatore), il primo principio della dinamica (inerzia) e il secondo principio (legge di Newton)

Sistemi meccanici rotativi

Per modellare i sistemi meccanici rotativi (massa rotante, molla torsionale, smorzatore rotante) si definiscono:

- **variabili di stato:** posizione angolare e relative derivate delle masse rotanti
- **ingressi:** momenti esterni agenti sul sistema
- **equazioni:** equazioni costitutive delle varie parti (molla torsionale e smorzatore torsionale), il primo principio della dinamica (inerzia) e il secondo principio (legge di Newton per rotazioni)

4.7 Sistemi dinamici non lineari

I sistemi fisici non lineari sono particolarmente ostici da analizzare dal punto vista matematico. Per cui, per studiarli, verranno linearizzati attorno ai punti di equilibrio e ne verrà studiato il comportamento per brevi scostamenti dall'equilibrio.

Rappresentazione matematica di un sistema non lineare

Il sistema non lineare non si può esprimere come combinazione lineare degli stati e degli ingressi/uscite, ma si utilizzano generiche funzioni dipendenti dagli stati e dagli ingressi/uscite.

$$\begin{array}{ll} \text{tempo continuo} & \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \dots = \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{array} \right. \Leftrightarrow \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ \text{tempo discreto} & \left\{ \begin{array}{l} x_1(k+1) = f_1(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \\ \dots = \dots \\ x_n(k+1) = f_n(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \end{array} \right. \Leftrightarrow x(k+1) = f(x(k), u(k)) \end{array}$$

Studio dell'equilibrio

Si studiano le equazioni in modo da ottenere gli stati stazionari (tempo continuo) o i punti fissi (tempo discreto) tali per cui si ha stabilità.

$$\begin{array}{ll} \text{tempo continuo} & \left\{ \begin{array}{l} 0 = \dot{\bar{x}}_1(t) = f_1(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t), \bar{u}_1(t), \dots, \bar{u}_m(t)) \\ \dots = \dots \end{array} \right. \\ \text{tempo discreto} & \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_1(k) = f_1(\bar{x}_1(k), \dots, \bar{x}_n(k), \bar{u}_1(k), \dots, \bar{u}_m(k)) \\ \dots = \dots \end{array} \right. \end{array}$$

Linearizzazione all'equilibrio

Attraverso l'espansione di Taylor si linearizzano le funzioni intorno ai punti di equilibrio con:

$$\begin{aligned} - (\bar{x}_{eq}, \bar{u}_{eq}) &= (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m) \\ - (\tilde{x}, \tilde{u}) &= (x, u) - (x_{eq}, u_{eq}) \rightarrow (\tilde{x}_{eq}, \tilde{u}_{eq}) = (\vec{0}, \vec{0}) \end{aligned}$$

Di seguito la linearizzazione di f_1 in tempo continuo con Taylor, si osserva che si ottiene una combinazione lineare delle variabili di stato e degli ingressi in cui i coefficienti sono ottenuti dalle derivate parziali.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) = \\ \dot{x}_1(t) &\approx \underbrace{f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}}_{a_{11}} \underbrace{(x_1(t) - \bar{x}_1)}_{\tilde{x}_1} + \dots + \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}}_{a_{1n}} \underbrace{(x_n(t) - \bar{x}_n)}_{\tilde{x}_n} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}}_{b_{11}} \underbrace{(u_1(t) - \bar{u}_1)}_{\tilde{u}_1} + \dots + \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial u_m} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}}_{b_{1m}} \underbrace{(u_m(t) - \bar{u}_m)}_{\tilde{u}_m} \\ \dot{x}_1(t) &\approx a_{11}\tilde{x}_1 + \dots + a_{1n}\tilde{x}_n + b_{11}\tilde{u}_1 + \dots + b_{1m}\tilde{u}_m \end{aligned}$$

$$\text{In generale} \quad \dot{\tilde{x}}(t) \approx A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \quad A = (a_{ij}) \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \quad B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}$$

Di seguito la linearizzazione di f_1 in tempo discreto con Taylor, si osserva che si ottiene una combinazione lineare delle variabili di stato e degli ingressi in cui i coefficienti sono ottenuti dalle derivate parziali.

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) = \\ x_1(k+1) &\approx \underbrace{f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}}_{a_{11}} \underbrace{(x_1(k) - \bar{x}_1)}_{\tilde{x}_1} + \dots + \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}}_{a_{1n}} \underbrace{(x_n(k) - \bar{x}_n)}_{\tilde{x}_n} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}}_{b_{11}} \underbrace{(u_1(k) - \bar{u}_1)}_{\tilde{u}_1} + \dots + \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial u_m} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}}_{b_{1m}} \underbrace{(u_m(k) - \bar{u}_m)}_{\tilde{u}_m} \\ x_1(k+1) &\approx a_{11}\tilde{x}_1 + \dots + a_{1n}\tilde{x}_n + b_{11}\tilde{u}_1 + \dots + b_{1m}\tilde{u}_m \end{aligned}$$

$$\text{In generale} \quad \tilde{x}(k+1) \approx A\tilde{x}(k) + B\tilde{u}(k) \quad A = (a_{ij}) \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \quad B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}$$