Appunti di fondamenti di analisi e probabilità

Giacomo Simonetto

Primo semestre 2024-25

Sommario

Appunti del corso di Fondamenti di analisi e probabilità della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

Indice

1 Curve e sostegni

1.1 Introduzione sugli intorni

Definizioni su palle e cubi

- Norma di un vettore: $|x| := \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$
- Distanza tra due punti: $\mathrm{dist}(x, y) := |x - y|$
- Disuguaglianza triangolare: $|x - y| \leq |x| + |y|$
- Disco o palla chiusa: $B(p, r] := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p| \leq r\}$
- Disco o palla aperta: $B(p, r[:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p| < r\}$
- Bordo di una palla: $\partial B(p, r] = \partial B(p, r[:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p| = r\}$
- Quadrato o cubo chiuso: $Q(p, r] := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1 - p_1| \leq r, \ldots, |x_n - p_n| \leq r\}$
- Quadrato o cubo aperto: $Q(p, r[=: \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1 - p_1| < r, \ldots, |x_n - p_n| < r\}$
- Bordo di un quadrato: $\partial Q(p, r] = \partial Q(p, r[:= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1 - p_1| = r, \ldots, |x_n - p_n| = r\}$

Teorema di inclusione tra palle e cubi

Ogni palla contiene un cubo di stesso centro e viceversa.
Fissato $p \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ vale $B(p, r] \subseteq Q(p, r]$ e $Q(p, r] \subseteq B(p, r\sqrt{n}]$

Definizione di intorno

Un intorno di $p \in \mathbb{R}^n$ è un insieme che contiene una palla centrata in p. Per il teorema precedente, la proposizione vale anche per i quadrati.

Definizione di punto interno ad un insieme

Il punto $p \in D$ è un punto interno all'insieme D se $\exists \delta > 0 : B(p, \delta[\subset D$.
L'insieme dei punti interni di un insieme D si indica con $\mathrm{int}(D)$.

Insieme aperto, chiuso, frontiera e chiusura

- Un insieme è aperto se ogni suo punto è un punto interno: $D = \mathrm{int}(D)$
- Un insieme è chiuso se il suo complementare è aperto

  Osservazione: $\varnothing$ e $\mathbb{R}^n$ sono sia aperti che chiusi
- La frontiera ∂D è l'insieme dei punti tali che ogni loro intorno interseca sia D, sia $\mathbb{R}^n \backslash D$
- La chiusura $\overline{D}$ è il più piccolo insieme chiuso contente D: $\overline{D} = D \cup \partial D$

Prodotto scalare

Il prodotto scalare tra due vettori $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è il numero reale definito come $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.
Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è 0.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Siano x, $y \in \mathbb{R}^n$, allora $|x \cdot y| \leq |x|\,|y|$. Si ha l'uguaglianza se solo se uno è multiplo dell'altro.

1.2 Funzioni vettoriali e curve

Definizione di funzioni vettoriali, curve, sostegni di curve

- Una funzione vettoriale è una funzione $f : I_{intervallo} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots f_n(t))$
- Una curva (parametrica) è una funzione vettoriale in cui $f_1(t), \dots f_n(t)$ sono continue in $I = [a, b]$
- Il sostegno di una curva f è l'insieme immagine di f: $f([a, b]) := \{f(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$
- Una curva si dice cartesiana se è della forma $f(t) = (t, h(t))$ o $f(t) = (h(t), t)\,, t \in [a, b]$
- Una curva si dice chiusa se $f(a) = f(b)$
- Una curva si dice semplice se $f(t_1) \neq f(t_2),\ \forall t_1, t_2$ con $a < t_1 < t_2 \leq b$, ovvero se non si interseca mai ad eccezione degli estremi

Curve e sostegni

- Data una curva $f(t)$, per ottenere il sostegno di tale curva, bisogna eliminare il parametro t, passando dalla forma parametrica a quella cartesiana.
- Viceversa se, dato un sostegno, si vuole ottenere una curva, bisogna introdurre una parametrizzazione del sostegno, passando dalla forma cartesiana a quella paremtrica.

1.3 Limiti di funzioni vettoriali

Definizione di limite (finito) in una e più dimensioni

$$\begin{aligned}\lim_{t \to t_0} f(t) = \ell \in \mathbb{R}^n \quad &\Rightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } \ell\ \exists U \text{ intorno di } p \text{ t.c. } x \in U \setminus \{p\} \Rightarrow f(x) \in V \\ &\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - \ell| < \varepsilon\end{aligned}$$

$$\lim_{t \to t_0} (f_1(t), f_2(t), \dots f_n(t)) = (\ell_1, \ell_2, \dots \ell_n) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to t_0} f_1(t) = \ell_1,\ \lim_{t \to t_0} f_2(t) = \ell_2, \dots \lim_{t \to t_0} f_n(t) = \ell_n$$

Continuità

Una funzione è continua se $\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$. Nel caso di funzioni vettoriali, essa è continua se ogni sua componente è continua.

2 Derivate, gradienti, tangenti, massimi e minimi

2.1 Derivate di funzioni vettoriali

Definizione di derivata in una e più dimensioni

Una funzione f è derivabile in t_0 se esiste il limite finito del rapporto incrementale.

$$f'(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \ell \in \mathbb{R}^n$$

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots f_n(t)) \quad \Leftrightarrow \quad f'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0), \dots f_n'(t_0))$$

Retta tangente ad una curva

Se f è derivabile in t_0 e $f'(t_0) \neq 0$:

- il vettore tangente alla curva è $f'(t_0)$
- la retta tangente alla curva è $\{f(t_0) + f'(t_0)\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}^n\}$

Si parla di tangenza alla curva e non al sostegno perché una funzione può passare per lo stesso punto in due momenti diversi. In questo caso si avrebbero due tangenti diverse per uno stesso punto del sostegno, quando invece sarebbero due tangeti associate a due valori diversi del parametro della curva.

Funzioni o curve differenziabili e approssimazioni di primo ordine

Una funzione $f(t)$ si dice differenziabile se vale (specialmente il limite):

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + R(t) \qquad \lim_{t \to t_0} \frac{R(t)}{t - t_0} = 0$$

Regole di derivazione di curve

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ curve derivabili, $\varphi, u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili, $\alpha \in \mathbb{R}$, allora:

1. $\frac{d}{dt}$ (costante) $= 0$
2. $\frac{d}{dt}\ (\alpha f) = \alpha f'$
3. $\frac{d}{dt}\ (\varphi(t) f(t)) = \varphi'(t) f(t) + \varphi(t) f'(t)$
4. $\frac{d}{dt}\ (f + g) = f' + g'$
5. $\frac{d}{dt}\ (f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$
6. $\frac{d}{dt}\ (f \circ u) = f'(u) u'$

2.2 Derivate direzionali e derivate parziali

Definizione di derivata direzionale

La derivata direzionale di f in un punto p lungo la direzione $\vec{u}$ è definita come il limite, se esiste finito del rapporto incrementale.

$$D_{\vec{u}} f(p) = \partial_{\vec{u}} f(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p + t\vec{u}) - f(p)}{t} = \ell \in \mathbb{R}$$
$$:= g'(0) \text{ con } g(t) = f(p + t\vec{u})$$

Per trovare la derivata direzionale bisogna fare:

1. trovare la funzione $g(t) = f(p + t\vec{u})$
2. calcolare la derivata $g'(t)$
3. valutare la derivata per $t \to 0$

Oss nel caso in cui la funzione f non sia continua in p e non è possibile definire esattamente $g(t)$ e $g'(t)$, è consigliato usare la definizione per calcolare $g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + t\vec{u}) - f(p)}{t}$

Definizione di derivata parziale

La i-esima derivata parziale di f in p è la derivata direzionale lungo $\vec{e_i}$ di $f(x_1,\dots x_n)$,

$$\partial_{x_i} f(p) = D_{\vec{e_i}} f(p) = \frac{d}{dx_i} f(p) \qquad \text{casi particolari:} \quad \begin{array}{l} \partial_x f(p) = D_{(1,0)} f(p) = \frac{d}{dx} f(p) \\ \partial_y f(p) = D_{(0,1)} f(p) = \frac{d}{dy} f(p) \end{array}$$

Continuità e derivate direzionali

- Una funzione può non essere continua in un punto p, ma avere lo stesso derivate parziali e direzionali. In questo caso si sfrutta la definzione di derivata per calcolarne il valore.

Proprietà delle derivate direzionali

1. $D_u(f(p) + g(p)) = D_u f(p) + D_u f(p)$
2. $D_u(f(p)g(p)) = D_u f(p)\ g(p) + f(p) D_u g(p)$
3. $D_u(cf(p)) = cD_u f(p)$
4. $D_u(\varphi \circ p)(p)) = D_u \varphi(f(p)) = \varphi(f(p)) D_u f(p)$

2.3 Gradiente

Definizione di gradiente

$$\vec{\nabla} f(p) := (\partial_{x_1} f(p), \partial_{x_2} f(p), \dots \partial_{x_n} f(p))$$

Proprietà del gradiente

1. $\vec{\nabla}(f(p) + g(p)) = \vec{\nabla} f(p) + \vec{\nabla} g(p)$
2. $\vec{\nabla}(f(p)g(p)) = \vec{\nabla} f(p)\ g(p) + f(p)\vec{\nabla} g(p)$
3. $\vec{\nabla}(cf(p)) = c\vec{\nabla} f(p)$
4. $\vec{\nabla}(\varphi \circ f)(p) = \vec{\nabla}(\varphi(f(p))) = \varphi'(f(p))\vec{\nabla} f(p)$
5. gradiente della norma: $\vec{\nabla}\,|x| = \frac{x}{|x|}$

Relazione tra gradiente e derivate direzionali in funzioni C1

Una funzione f è di classe C^1 in un aperto se:

- f è continua
- f ha derivate parziali continue

In una funzione C^1, le derivate direzionali e il gradiente hanno la seguente relazione:

$$\forall u \in \mathbb{R}^n \qquad D_u f(p) = \vec{\nabla} f(p) \cdot \vec{u} = \partial_{x_1} f(p) u_1 + \partial_{x_2} f(p) u_2 + \dots \partial_{x_n} f(p) u_n$$

Osservazione: se in una funzione generica la derivata parziale $D_{(u_1,u_2)} f(p)$ non è esprimibile come combinazione lineare delle derivate parziali, allora non è C^1. In altre parole se non vale l'equazione $D_u f(p) = \vec{\nabla} f(p) \cdot \vec{u}$, allora $f \notin C^1$.

Direzione di massima e minima crescita

Se f è C^1 in un intorno di p, la direzione lungo cui si ha la massima pendenza è la direzione del vettore gradiente. Viceversa la direzione di minore crescita è opposta a quella di massima crescita.

$$D_{u_{max}} f(p) = \left|\vec{\nabla} f(p)\right| \qquad \Leftrightarrow \qquad u_{max} = \frac{\vec{\nabla} f(p)}{\left|\vec{\nabla} f(p)\right|}$$

$$D_{u_{min}} f(p) = -\left|\vec{\nabla} f(p)\right| \qquad \Leftrightarrow \qquad u_{min} = -\frac{\vec{\nabla} f(p)}{\left|\vec{\nabla} f(p)\right|}$$

2.4 Spazio tangente e differenziabilità

Spazio tangente

Lo spazio tangente al grafico di una curva $f(p)$ in un punto p è l'insieme dei punti:
(n.b.: x è un punto sul piano, come lo è anche p, non è una coordinata)

$$\Big\{(x, z) \text{ t.c. } z = f(p) + \vec{\nabla} f(p) \cdot (x - p)\Big\}$$

Differenziabilità

Una funzione è differenziabile in un punto p se la funzione f è approssimabile al piano tangente in p in un suo intorno con un errore trascurabile. $L(x)$ è la funzione affine detta linearizzazione di f in p

$$f(x) = f(p) + \vec{\nabla} f(p) \cdot (x - p) + R(x), \qquad \lim_{x \to p} \frac{R(x)}{|x - p| = 0}$$
$$L(x) := f(p) + \vec{\nabla} f(p) \cdot (x - p)$$

Per sapere se una funzione è differenziabile bisogna controllare che il resto $R(x) = o(|x - p|)$, cioè bisogna risolvere il limite per $x \to p$ e verificare che faccia 0.

Continuità di funzioni differenziabili

Una funzione differenziabile in p è anche continua in p. Quindi valgono le seguenti inclusioni.

Funzioni con derivate parziali $\subset$ Funzioni continue $\subset$ Funzioni differenziabili $\subset$ Funzioni C^1

Gradiente di funzioni differenziabili

Nelle funzioni differenziabili il gradiente vale:

$$D_u f(p) = \vec{\nabla} f(p) \cdot u$$

Regola della catena di derivate parziali

Per la regola della catena (con funzione a due variabili e in generale a n variabili):

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \partial_x f(x(t, y(t))) \cdot x'(t) + \partial_y f(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = \vec{\nabla} f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t))$$
$$\frac{d}{dt} f(r(t)) = \vec{\nabla} f(r(t)) \cdot r'(t) = \partial_{x_1} f(x(t)) {x_1}'(t) + \partial_{x_2} f(x(t)) {x_2}'(t) + \cdots + \partial_{x_n} f(x(t)) {x_n}'(t)$$

Gradiente e curve di livello

Il gradiente è perpendicolare alle curve di livello. Nelle curve di livello vale:

$$f(r(t)) = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} f(r(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(r(t)) \cdot r'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(r(t)) \perp r'(t)$$

con $r'(t)$ un vettore con la stessa direzione della tangete alla curva di livello, per un certo t.

2.5 Derivate seconde, matrice Hessiana

Derivate seconde

La derivata parziale di secondo ordine è definita come:

$$\partial^2_{x_i,x_j} f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial_{x_i} \partial_{x_j}} = \partial_{x_i}(\partial_{x_j} f(x))$$

Matrice Hessiana

$$\text{Hess} f(x) := \begin{pmatrix} \partial^2_{{x_1}^2} f(x) & \cdots & \partial^2_{x_1,x_n} f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2_{x_n,x_1} f(x) & \cdots & \partial^2_{{x_n}^2} f(x) \end{pmatrix}$$

Teorema di Schwarz

Data una funzione f di classe C^2 (ovvero con derivate parziali doppie continue), allora vale:

$$\partial^2_{x_i,x_j} f(x) = \partial^2_{x_j,x_i} f(x) \qquad \forall i, j$$

Per questo principio, la matrice hessiana di funzioni C^2 è una matrice simmetrica.

2.6 Massimi e minimi

Definizione di massimi, minimi e punti di sella

- il punto p è punto di minimo assoluto se $f(x) \geq f(p) \quad \forall x \in D$
- il punto p è punto di massimo assoluto se $f(x) \leq f(p) \quad \forall x \in D$
- il punto p è punto di minimo relativo se $\exists U_p$ intorno di p t.c. $f(x) \geq f(p) \quad \forall x \in U_p \cap D$
- il punto p è punto di massimo relativo se $\exists U_p$ intorno di p t.c. $f(x) \leq f(p) \quad \forall x \in U_p \cap D$
- il punto p è punto di sella se $\forall U_p$ intorno di p $\exists x, y \in U_p \cap D$ t.c. $f(x) < f(p) < f(y)$

Regola di Fermat e punti critici interni

- Se f derivabile rispetto a $\vec{u}$ in p, con p punto di massimo o minimo locale **interno** al dominio, allora vale che $D_u f(p) = 0$, per cui $\vec{\nabla} f(p) = 0$
- I punti interni al dominio per cui $\vec{\nabla} f(p) = 0$ si dicono punti critici e possono essere classificati come punti di massimo locale, di minimo locale o punti di sella.
- Per trovare i punti critici **interni** al dominio, per definizione, bisogna risolvere $\vec{\nabla} f(p) = 0$.

Criterio dell'Hessiana

Data una funzione f di classe C^2 e p punto critico interno al dominio, allora:

- se $\det H_f(p) > 0$ e $\partial^2_{x,x} f(p) > 0$ allora p è minimo locale
- se $\det H_f(p) > 0$ e $\partial^2_{x,x} f(p) < 0$ allora p è massimo locale
- se $\det H_f(p) < 0$ allora p è punto di sella
- se $\det H_f(p) = 0$ allora non si può concludere nulla

Massimi e minimi assoluti su domini chiusi e limitati

Per Weierstrass una funzione continua in un dominio chiuso e limitato ammette massimo e minimo assoluto. Per trovare il massimo e minimo assoluto di una funzione bisogna controllare i punti critici interni al dominio D e i punti sul bordo del dominio ∂D.

- $\max f = \max \{f(p) \text{ t.c. } p \in \{\text{punti di massimo interni a } D\} \cup \{\text{punti di massimo su } \partial D\}\}$
- $\min f = \min \{f(p) \text{ t.c. } p \in \{\text{punti di minimo interni a } D\} \cup \{\text{punti di minimo su } \partial D\}\}$

3 Campi e integrali curvilinei

3.1 Integrali curvilinei di funzioni reali

Definizione

Data una funzione reale $\mu(x)$ e una curva $r(t)$ definita in un intervallo chiuso $[a, b]$, allora l'integrale curvilineo di μ sulla curva r vale:

$$\int_r \mu \, ds := \int_a^b \mu(r(t)) \cdot |r'(t)| \, dt$$

Lunghezza di una curva

La lunghezza di una curva è l'integrale curvilineo con $\mu = 1$:

$$\text{Lunghezza} := \int_r ds = \int_a^b |r'(t)| \, dt$$

Baricentro di una curva

Il baricentro di una curva r con densità $\mu(x)$ è definito come:

$$\text{Baricentro} := \frac{\int_r (x_1, x_2, \dots x_n)\mu(x) \, ds}{\int_r \mu \, ds} = \frac{\int_r x_1\mu(x) \, ds + \int_r x_2\mu(x) \, ds + \dots + \int_r x_n\mu(x) \, ds}{\int_r \mu \, ds}$$

Per $\mu = 1$ si ottiene il baricentro geometrico:

$$\text{Baricentro geometrico} := \frac{\int_r (x_1, x_2, \dots x_n) \, ds}{\int_r ds} = \frac{\int_r x_1 \, ds + \int_r x_2 \, ds + \dots + \int_r x_n \, ds}{\text{Lunghezza(r)}}$$

Proprietà dell'integrale curvilineo

1. $\int_r (\mu(x) + \nu(x)) \, ds = \int_r \mu(x) \, ds + \int_r \nu(x) \, ds$
2. se $c =$ costante, allora $\int_r c\mu(x) \, ds = c \int_r \mu(x) \, ds$
3. se $\mu \leq \nu$, allora $\int_r \mu(x) \, ds \leq \int_r \nu(x) \, ds$
4. cammino inverso: $\int_{r^{-1}} \mu(x) \, ds = \int_r \mu(x) \, ds$
5. giustapposizione di cammini: $\int_{r_1, r_2} \mu(x) \, ds = \int_{r_1} \mu(x) \, ds + \int_{r_2} \mu(x) \, ds$

3.2 Campi vettoriali

Definizione

Un campo vettoriale è una funzione $F : \begin{array}{ccc} D \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x \in D & \mapsto & F(x) \end{array}$ con $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots F_n(x))$

Campi vettoriali radiali

Un campo vettoriale definito in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è detto radiale se ha la forma $F(x) = g(x) \cdot \frac{x}{|x|}$

Esempi di campi radiali:

- campo gravitazionale $F(r) = -\frac{G \cdot m}{|r^2|}\ \hat{r} = g(|r|)\ \frac{r}{|r|}$ nella forma $F(x) = \frac{K}{|x^2|}\ \frac{x}{|x|}$
- campo elettrico $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,|r^2|}\ \hat{r} = g(|r|)\ \frac{r}{|r|}$ nella forma $F(x) = \frac{K}{|x^2|}\ \frac{x}{|x|}$
- campi della forma $F(x) = h(|x|)\ x$, infatti per $x \neq 0$ si ha $F(x) = |x|\ \ g(|x|)\ \frac{x}{|x|}$

Campi gradienti e potenziali

Un campo F è detto gradiente se esiste $U : D \to \mathbb{R}^n \in C^1$ per cui $F = \vec{\nabla} U$.
Il potenziale, in fisica, è definito $V := -U$

Gradienti da ricordare

- **campo radiale** della forma $F(x) = h(x)\ \frac{x}{|x|}$ con primitiva $g(x) = \int h(x)\ dx$
- **campo gravitazionale** della forma $F(x, y) = \frac{K}{x^2+y^2}\ \frac{(x,y)}{|(x,y)|}$ con gradiente $G(x, y) = -\frac{K}{|(x,y)|}$
- **campi continui** della forma $F(x_1, \dots x_n) = (f_1(x_1), \dots f_n(x_n))$

3.3 Integrali curvilinei di campi

Dato un campo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e un cammino $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n \in C^1$ a tratti, allora l'integrale curvilineo del campo F lungo il cammino r vale:

$$\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_r \vec{F}(x) \cdot d\vec{r} := \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot \vec{r}'(t)\ dt$$

Circuitazione

Se il cammino r è un percorso chiuso, l'integrale prende il nome di circuitazione di F su r: $\oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Lavoro di una forza

Se F è una forza e $r(t)$ è un cammino, il lavoro di F lungo r è: $W = \int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\ dt$

Se la forza è costante e $r(t) = P + t\overline{PQ}$ il lavoro diventa: $W = \int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F} \cdot \overrightarrow{PQ}\ dt = F \cdot \overrightarrow{PQ}$

Notazioni alternative

1. $\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_r F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$
2. $\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_r \vec{F} \cdot \vec{T}\ ds$ con $\vec{T}(x) = \vec{T}(\vec{r}(t)) := \frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$ detto campo dei vettori tangenti
3. $\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_r (F_1(x), \dots F_n(x)) \cdot (dx_1, \dots dx_n) = \int_r F_1(x)dx_1 + \dots F_n(x)dx_n$ not. termodinamica

3.4 Campi conservativi

Definizione

Un campo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è conservativo se $\forall r_1, r_2$ cammini con stessi estremi o $\forall r$ cammino chiuso, vale:

$$\int_{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r_1} = \int_{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Teorema fondamentale dei campi gradienti

Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo gradiente con $\vec{\nabla} U = F$ e $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un cammino, allora vale

$$\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(r(b)) - U(r(a))$$

Siccome l'integrale è indipendente dal cammino, allora il campo è conservativo.

$$\text{Dim} \quad \int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt = \int_a^b \vec{\nabla} U(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t))\, dt = U(r(b)) - U(r(a))$$

Equivalenze campi conservativi, campi gradienti, circuitazione

campo conservativo $\Leftrightarrow$ campo gradiente $\Leftrightarrow$ $\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r}$ dipende solo da $r(a)$ e $r(b)$ $\Leftrightarrow$ $\oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

3.5 Campi irrotazionali

Definizione

Un campo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è irrotazionale se e solo se $\partial_{x_i} F_j = \partial_{x_j} F_i \ \ \forall i, j$

Rotore

Il rotore $\text{rot}(\vec{F}) : \vec{F} \to \vec{G}$ è un operatore che da un campo vettoriale, restituisce un altro campo vettoriale. Se si interpreta il campo $\vec{F}$ come il moto di particelle di un fluido sullo spazio, il campo $\text{rot}(\vec{F})$ è un campo vettoriale i cui vettori hanno direzione e verso uguale all'asse di rotazione delle particelle attorno ad un punto x e modulo pari al doppio della velocità angolare delle particelle che si muovono lungo i vettori del campo F.

$$\text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} x & y & x \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Campo conservativo + C1 implica campo irrotazionale

Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un campo C^1 e conservativo, allora è anche irrotazionale.
Dimostrazione:

1. F conservativo $\Leftrightarrow$ $\vec{\nabla} U = F$ $\Leftrightarrow$ $\partial_{x_i} U = F_i$
2. $F \in C^1$ $\Leftrightarrow$ $\partial_{x_i} F_j = \partial_{x_j} F_i$ per Terorema di Schwarz
3. per 1. si ha $\partial_{x_i} F_j = \partial_{x_i} \partial_{x_j} U$ e $\partial_{x_j} F_i = \partial_{x_j} \partial_{x_i} U$
4. per 2. si ha $\partial_{x_i} F_j = \partial_{x_j} F_i$ ovvero che F è irrotazionale

Osservazione: tutti i campi conservativi e C^1 sono irrotazionali, ma non tutti i campi irrotazionali sono conservativi e C^1.

Domini semplicemente connessi

Un dominio aperto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è **connesso** se $\forall x, y \in D\ \exists r : [a, b] \to D$ tale che $r(a) = x, r(b) = y$
Un dominio aperto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è **semplicemente connesso** se ogni circuito $r : [a, b] \to D$ si può contrarre con continuità ad un punto in D.

Irrotazionali su domini semplicemente connessi

Se un campo $F \in C^1$ è irrotazionale su un dominio semplicemente connesso, allora F è conservativo

- campo conservativo e C^1 $\Rightarrow$ campo irrotazionale
- campo conservativo e C^1 su D sempl. connesso $\Leftrightarrow$ campo irrotazionale e C^1 su D sempl. connesso

Osservazione: se ho un campo irrotazionale su un dominio D, posso restringere il dominio ad uno semplicemente connesso (es. un rettangolo o una palla centrata in un punto), per cui il campo diventa anche gradiente sul dominio ristretto.

3.6 Calcolo delle primitive con metodo delle integrazioni marginali

Sia $F(x,y) = (F_x(x,y), F_y(x,y))$ campo vettoriale irrotazionale, gradiente, C^1 su dominio semplicemente connesso. Si vuole trovare il potenziale $U(x,y)$.

1. siccome è gradiente, vale $\vec{\nabla}U = \vec{F}$: $\begin{cases} \partial_x U(x,y) = F_x(x,y) \\ \partial_y U(x,y) = F_y(x,y) \end{cases}$

2. integro una delle due equazioni per ottenere U:
   $\int \partial_x U(x,y)\, dx = \int F_x(x,y)\, dx \quad \Rightarrow \quad U(x,y) = U_{\text{parziale}}(x,y) + \varphi(y)$

3. osservo che $\varphi(y)$ è indipendente da x e vale $\partial_x(U(x,y) - U_{\text{parziale}}(x,y)) = 0$

4. risolvo l'altra equazione sostituendo $U(x,y) = U_{\text{parziale}}(x,y) + \varphi(y)$ e ottenendo $\varphi(y)$:
   $\partial_y(U_{\text{parziale}}(x,y) + \varphi(y)) = F_y(x,y) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = g(y) + c \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \int \varphi'(y)\, dy$

5. a questo punto ho $U_{\text{parziale}}(x,y)$ dal punto 2 e $\varphi(y)$ dal punto 4, per cui posso ottenere il potenziale: $U(x,y) = U_{\text{parziale}}(x,y) + \varphi(y)$

Osservazioni:

- se nel punto 4 ottengo una espressione $\varphi'(y)$ che dipende anche da x, allora non sono verificate tutte le condizioni del dominio e il campo potrebbe essere non gradiente o rotazionale.
- se ho un campo irrotazionale, ma il dominio non è semplicemente connesso, posso partizionare il dominio in rettangoli (es. un rettangolo comprende le $x > 0$ e un altro le $x < 0$) e trovare una primitiva per ogni rettangolo.

4 Integrali doppi

4.1 Integrali doppi su rettangoli

Integrali doppi alla Riemann

Data una funzione $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, il volume del trapeziode sotteso dalla funzione è dato dalla somma di Riemann dei parallepipedi ottenuti dividendo il dominio in piccoli rettangoli con lato tendente a 0 e si indica:

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dx\, dy$$

Integrale iterato sui rettangoli

L'integrale doppio può essere scritto come integrale iterato:

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

Formula di riduzione sui rettangoli

Si osserva che è possibile ottere l'area di una fetta verticale lungo un asse integrando solo lungo x o y:

$$\int_a^b f(x, y)\, dx = A(y)_{\text{area fetta} \perp \text{a y}} \qquad \int_c^d f(x, y)\, dy = A(x)_{\text{area fetta} \perp \text{a x}}$$

Quindi per risolvere l'integrale doppio posso prima risolverlo integrando per una variabile trovando l'area di una fetta verticale e successivamente integrare l'area trovata rispetto all'altra variabile.

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dx\, dy = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y)\, dy \right\} dx = \int_a^b A(x)_{\text{area fetta} \perp \text{a x}}\, dx \\ \displaystyle\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y)\, dx \right\} dy = \int_c^d A(y)_{\text{area fetta} \perp \text{a y}}\, dy \end{cases}$$

Integrale di un prodotto di funzioni

Se la funzione $f(x, y)$ è a variabili separabili, ovvero se $f(x, y) = g(x)h(y)$, allora l'integrale diventa:

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)\, dx\, dy = \left(\int_a^b g(x)\, dx \right) \left(\int_c^d h(y)\, dy \right)$$

4.2 Integrali doppi su domini limitati

Funzione integrabile

Una funzione $f(x, y)$ è integrabile in un integrale doppio su un dominio D se f è continua e limitata e se D è limitato e misurabile.

Proprietà dell'integrale doppio

1. $\displaystyle\int_D cf(x, y)\, dx\, dy = c \int_D f(x, y)\, dx\, dy$
2. $\displaystyle\int_D f(x, y) + g(x, y)\, dx\, dy = \int_D f(x, y)\, dx\, dy + \int_D g(x, y)\, dx\, dy$
3. se $f \geq 0$ allora $\displaystyle\int_D f(x, y)\, dx\, dy \geq 0$
4. se D è sostegno di una curva, allora $\displaystyle\int_D f(x, y)\, dx\, dy = 0$
5. se $D = D_1 \cup D_2$ con $D_1 \cap D_2$ pari al più ad un'unione di sostegni di curve, allora si ha: $\displaystyle\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \int_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy$

Integrali su regioni semplici rispetto a x

Una regione D è semplice rispetto a x se $D = \{(x, y) : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$.
L'integrale iterato di f su D diventa:

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left\{ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx$$

Integrali su regioni semplici rispetto a y

Una regione D è semplice rispetto a y se $D = \{(x, y) : y \in [c, d], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$.
L'integrale iterato di f su D diventa:

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left\{ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy$$

4.3 Cambiamento di variabile

La matrice Jacobiana per il cambio di variabili

La matrice Jacobiana di una funzione $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ è definita come:

$$\varphi'(u, v) = J_\varphi(u, v) := \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_1(u, v) & \partial_v \varphi_1(u, v) \\ \partial_u \varphi_2(u, v) & \partial_v \varphi_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} \varphi_1(u, v) \\ \vec{\nabla} \varphi_2(u, v) \end{pmatrix} \qquad \text{con } |\varphi'(u, v)| := |\det \varphi'(u, v)|$$

Formula del cambiamento di variabili

Dato un integrale doppio di $f(x, y)$ su D nelle variabili x e y, è possibile riscriverlo in funzione delle variabili u e v, attraverso $\begin{matrix} \varphi(u, v) = (x(u, v),\ y(u, v)) = (x, y) \\ \varphi^{-1}(x, y) = (u(x, y),\ v(x, y)) = (u, v) \end{matrix}$, con $\begin{matrix} D = \varphi(E) \\ E = \varphi^{-1}(D) \end{matrix}$ come segue:

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_E f(\varphi(u, v))\, |\varphi'(u, v)|\; du,\, dv$$

Elemento d'area, dilatazioni e applicazioni lineari

Il fattore $|\varphi'(u, v)|$ è detto elemento d'area ed è il coefficiente di proporzionalità tra le aree di D ed E:

$$\text{Aera}(D) = |\varphi'(u, v)|\, \text{Area}(E)$$

Simmetrie

Se il dominio è simmetrico rispetto all'asse y ($(x, y) \in D \Leftrightarrow (-x, y) \in D$) e la funzione è dispari, ovvero $f(-x, y) = -f(x, y)$, allora $\displaystyle\int_D f(x, y)\, dx\, dy = 0$

Se il dominio è simmetrico rispetto all'asse y ($(x, y) \in D \Leftrightarrow (-x, y) \in D$) e la funzione è pari, ovvero $f(-x, y) = f(x, y)$, definito $D^+ := \{(x, y) \in D : x > 0\}$ allora $\displaystyle\int_D f(x, y)\, dx\, dy = 2 \int_{D^+} f(x, y)\, dx\, dy$

Baricentro in un piano

Dato un dominio D, per calcolare il baricentro della regione D:

$$\text{Baricentro} = (x_D, y_D) := \left(\frac{\displaystyle\int_D x\, dx\, dy}{\displaystyle\int_D dx\, dy}, \ \frac{\displaystyle\int_D y\, dx\, dy}{\displaystyle\int_D dx\, dy} \right)$$

Passaggio in coordinate polari

1. Definiamo $\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases}$ con $\rho > 0$ e $t \in [0, 2\pi]$, per cui $\varphi(\rho, t) = (\rho \cos t, \rho \sin t)$

2. Si ha che: $\varphi'(\rho, t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\rho \sin t \\ \sin t & \rho \cos t \end{pmatrix}$, $\quad |\varphi'(\rho, t)| = |\det \varphi'(\rho, t)| = \rho, \quad E = \varphi^{-1}(D)$

3. Inoltre f è integrabile in D se e solo se $f(\rho \cos t, \rho \sin t)\, \rho$ è integrabile su E e si ha:

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_E f(\rho \cos t, \rho \sin t)\, \rho\, d\rho\, dt$$

4.4 Integrali doppi generalizzati su domini illimitati

Integrale doppio generalizzato e integrale iterato generalizzato

L'integrale doppio generalizzato ha la forma:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

Criterio di integrabilità

La funzione f **positiva** ($f : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty[$) è integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}^2$ se è verificata almeno una delle seguenti condizioni

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\right\} dx$ esistono finiti
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right\} dy$ esistono finiti

Osservazione: se la funzione non è definita positiva o se il suo modulo non è integrabile, allora i processi risolutivi per integrali iterati, cambi di variabile,... potrebbero non valere più e dare risultati finiti, ma diversi. In particolare se scambio l'ordine delle variabili di integrazione ottengo due risultati diversi.

Integrale di Gauss

L'integrale di Gauss, che normalmente non si può risolvere è $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$

1. risolvo $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ con formule di riduzione:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)\\ &= (\text{Integrale di Gauss})^2\end{aligned}$$

2. risolvo $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ con coordinate polari:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy &= \int_{\rho=0}^{+\infty}\int_{t=0}^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho\,dt\,d\rho = \left(\int_0^{+\infty}\rho e^{-\rho^2}\,d\rho\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} dt\right) = 2\pi\cdot\left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right]_0^{+\infty}\\ &= \pi\end{aligned}$$

3. unendo i risultati ottengo $(\text{Integrale di Gauss})^2 = \pi \quad\Rightarrow\quad \text{Integrale di Gauss} = \sqrt{\pi}$

5 Superfici parametriche

5.1 Notazioni

Definizione

Una superficie parametrica in $\mathbb{R}^3$ su dominio chiuso e limitato $D \subset \mathbb{R}^2$ è definita:

$$p : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad p(u,v) = (p_1(u,v), p_2(u,v), p_3(u,v))$$

Sostegno di una superficie parametrica

Il sostegno di una superficie p è $p(D) \subset \mathbb{R}^3$, che è C^1 se p_1, p_2, p_3 sono C^1 in D.

Superfici parametriche notevoli

- **Superficie cartesiana**:

$$p(u,v) = (u, v, f(u,v)) \quad \text{con sostegno } \left\{(u, v, f(u,v)) : (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2\right\}$$

- **Nastro di Möbius**:

$$p(u,v) = ((R + v\cos(u/2)\cos u), \ \ (R + v\cos(u/2))\sin u, \ \ v\sin(u/2))$$

- **Superficie sferica**:

$$\varphi(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi) \quad \rho \in [0, +\infty[, \ \phi \in [0, \pi], \ \theta \in [0, 2\pi]$$

5.2 Area di una superficie parametrica

Elemento d'area di una superficie parametrica

L'elemento d'area di una superficie parametrica $p(u,v)$ è l'area del parallelogramma formato dai due vettori $\vec{p_u}(u,v) := \partial_u p(u,v)$ e $\vec{p_v}(u,v) := \partial_v p(u,v)$

$$\text{Elemento d'area}(p) := |\vec{p_u}(u,v) \times \vec{p_v}(u,v)| = |\partial_u p(u,v) \times \partial_v p(u,v)|$$

Osservazioni:

1. per $\overline{u}$ e $\overline{v}$ fissati, con $(\overline{u}, \overline{v}) \in D$:
   $\partial_u p(\overline{u}, \overline{v}) := (\partial_u p_1(\overline{u}, \overline{v}), \ \partial_u p_2(\overline{u}, \overline{v}), \ \partial_u p_3(\overline{u}, \overline{v}))$ è il vettore tangente alla curva $u \mapsto p(u, \overline{v})$ in $u = \overline{u}$
   $\partial_v p(\overline{u}, \overline{v}) := (\partial_v p_1(\overline{u}, \overline{v}), \ \partial_v p_2(\overline{u}, \overline{v}), \ \partial_v p_3(\overline{u}, \overline{v}))$ è il vettore tangente alla curva $v \mapsto p(\overline{u}, v)$ in $v = \overline{v}$
2. l'area del parallelogramma formato da due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Area di una superficie parametrica

L'area di una superficie parametrica p è l'integrale su D dell'elemento d'area:

$$\text{Area(p)} := \int_D |\vec{p_u}(u,v) \times \vec{p_v}(u,v)| \, dx\, dy$$

Elementi d'area notevoli

- elemento d'area di una superficie cartesiana $p(x,y)$: $\quad |\vec{p_x} \times \vec{p_y}| = \sqrt{1 + \left|\vec{\nabla} f(x,y)\right|^2}$
- elemento d'area di una superficie sferica $p(\phi, \theta)$: $\quad |\vec{p_\phi} \times \vec{p_\theta}| = R^2 \sin\phi$

5.3 Area di un trapezoide di una funzione sopra ad una curva

Trapeziode di una funzione su una curva

Definita $r : [a, b] \to \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y,\ r(t) = (r_1(t), r_2(t))$ una curva C^1 sul piano x, y e $h : r([a, b]) \to [0, +\infty[_z$ una funzione continua positiva che associa ad ogni punto della curva un certo valore lungo l'asse z, si definisce il trapezoide definito come il sostegno della superficie p compresa tra la curva r e il sostegno della funzione h:

$$\begin{aligned}\mathrm{Trap}_r(h) &:= \{(r(t), z) : t \in [a, b], 0 \le z \le h(r(t))\} \\ p(t, z) &= (r_1(t), r_2(t), z) \qquad (t, z) \in D,\ D = \{(t, z) : t \in [a, b], 0 \le z \le h(r(t))\}\end{aligned}$$

Area del trapezioide

L'area del trapezoide è definita come l'integrale della funzione h sulla curva r:

$$\mathrm{Area}(\mathrm{Trap}_r(h)) := \int_r h\ ds = \int_a^b h(r(t))\,|r'(t)|\ dt$$

Calcolo dell'elemento d'area della superficie del trapeziode

Se si parte da $p(t, z) = (r_1(t), r_2(t), z)$ e si calcola l'elemento d'area $|p_t \times p_z| = \sqrt{{r_1'}^2(t) + {r_2'}^2(t)} = |r'(t)|$, per cui per definizione di area di una superficie è:

$$\int_D |p_t \times p_z|\ dt\,dz = \int_D |r'(t)|\ dt\,dz = \int_a^b \int_0^{h(r(t))} |r'(t)|\ dz\,dt = \int_a^b h(r(t))\,|r'(t)|\ dt$$

5.4 Area di una superficie di rotazione

Superficie di rotazione

Data una curva $r(t) = (r_1(t), r_2(t))$ sul piano xz, la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare la curva attorno all'asse z è:

$$p(t, \theta) = (r_1(t)\cos\theta, r_1(t)\sin\theta, r_2(t)) \qquad t \in [a, b],\ \ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

Elemento d'area

L'elemento d'area della superficie di rotazione è: $|p_t \times p_\theta| = r_1(t)\,|r'(t)|$

$$\begin{aligned}|p_t \times p_\theta|^2 &= (r_1'(t)\cos\theta,\ r_1'(t)\sin\theta,\ r_2'(t)) \times (-r_1(t)\sin\theta,\ r_1(t)\cos\theta,\ 0) \\ &= (r_1'(t)\ r_1(t)\cos^2\theta + r_1'(t)\ r_1(t)\sin^2\theta)^2 + (-r_1(t)\ r_2'(t)\cos\theta)^2 + (-r_1(t)\ r_2'(t)\sin\theta)^2 \\ &= (r_1(t)\ r_1'(t))^2 + (r_1(t)\ r_2'(t))^2 = {r_1}^2(t)\ (r_1'(t) + r_2'(t))^2 \\ &= {r_1}^2(t)\,|r'(t)|^2 \\ |p_t \times p_\theta| &= r_1(t)\,|r'(t)|\end{aligned}$$

Area della superficie di rotazione

L'area della superficie di rotazione è:

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(p) &= \int_D |p_t \times p_\theta|\ dt\,d\theta = \int_D r_1(t)\,|r'(t)|\ dt\,d\theta = \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\right) \cdot \left(\int_a^b r_1(t)\,|r'(t)|\ dt\right) \\ &= (\theta_2 - \theta_1) \cdot \int_a^b r_1(t)\,|r'(t)|\ dt\end{aligned}$$

Teorema di Pappo - Guldino

Indicata con x_r la distanza tra il baricentro di r dall'asse di rotazione e Lunghezza(r) la lunghezza della curva che viene fatta ruotare per generare p:

$$\text{Area}(p) = (\theta_2 - \theta_1) \cdot x_r \cdot \text{Lunghezza}(r)$$

$$\begin{aligned}
\text{osservando che 1.} \quad & \int_a^b f(r_1(t), r_2(t))\,|r'(t)|\;dt = \int_r f\;ds \\
\text{2.} \quad & \int_a^b r_1(t)\,|r'(t)|\;dt = \int_r x\;ds \;\text{ per } r_1(t) = f_x(t) \\
\text{3.} \quad & x_{\text{baricentro}} = \frac{\int_r x\;ds}{\text{Lunghezza}} \quad \Rightarrow \quad \int_r x\;ds = x_{\text{baricentro}} \cdot \text{Lunghezza}
\end{aligned}$$

$$\text{si ottiene che } (\theta_2 - \theta_1) \cdot \int_a^b r_1(t)\,|r'(t)|\;dt = (\theta_2 - \theta_1) \cdot \int_r x\;ds = (\theta_2 - \theta_1) \cdot x_r \cdot \text{Lunghezza}(r)$$

Superficie di rotazione generata da una curva cartesiana

Sia $z = h(x)$ una curva cartesiana, la superficie ottenuta ruotando h attorno all'asse z è una superficie cartesiana $z = h(\sqrt{x^2+y^2})$ con $\sqrt{x^2+y^2}$ la distanza del punto (x,y) rispetto all'asse z e con elemento d'area $\sqrt{1 + \left|\vec{\nabla}\, h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right|}$ e area $\int_D \sqrt{1 + \left|\vec{\nabla}\, h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right|}\;dx\,dy$

5.5 Integrale superficiale

Definizione

L'integrale di una funzione $\mu(x,y,z)$ su una superficie p è:

$$\int_p \mu\;d\sigma_p = \int_p \mu(x,y,z)\;d\sigma_p = \int_D \mu(p(u,v))\,|p_u \times p_v|\;du\,dv$$

Invarianza dell'integrale superficiale

Date due superfici equivalenti p_1 e p_2 e f una funzione continua, allora $\int_{p_1} f\;d\sigma_{p_1} = \int_{p_2} f\;d\sigma_{p_2}$

6 Teoremi della divergenza e di Green - Stokes

6.1 Flusso di un campo

Dato un cammino r e un campo F continuo, il flusso di F attraverso r è:

$$\text{Flusso} := \int_r \det \begin{pmatrix} F_1 & dx \\ F_2 & dy \end{pmatrix}$$

$$\text{Flusso} := 1. \int_a^b \det \begin{pmatrix} F_1(r(t)) & r_1'(t) \\ F_2(r(t)) & r_2'(t) \end{pmatrix} dt = \int_a^b F_1(r(t))\, r_2'(t) - F_2(r(t)) r_1'(t)\, dt$$

$$2. \int_r \det \begin{pmatrix} F_1(x,y) & dx \\ F_2(x,y) & dy \end{pmatrix} = \int_r F_1(x,y)\, dy - F_2(x,y)\, dx$$

$$3. \int_r \vec{F} \cdot \vec{N}_r\, ds, \quad \text{con } \vec{N}_{\text{normale a } p} = \frac{1}{|r'(t)|} \begin{pmatrix} r_1'(t) \\ -r_2'(t) \end{pmatrix}$$

Dimostrazione punto 3:
$$\int_a^b F_1(r(t))\, r_2'(t) - F_2(r(t)) r_1'(t)\, dt = \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot \begin{pmatrix} r_1'(t) \\ -r_2'(t) \end{pmatrix} dt =$$
$$= \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot \frac{1}{|r'(t)|} \begin{pmatrix} r_1'(t) \\ -r_2'(t) \end{pmatrix} |r'(t)|\, dt = \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot \vec{N}(r(t))\, |r'(t)|\, dt =$$
$$= \int_r \vec{F} \cdot \vec{N}_r\, ds$$

6.2 Domini Stokiani

Definizione

Un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ si dice stokiano se:

- attorno ad ogni punto del bordo di D c'è una separazione tra interno ed esterno di D, ovvero non esistono punti isolati o cammini "all'interno" di D che non fanno parte del dominio.
- il bordo ∂D è l'unione di un numero finito di sostegni di curve chiuse regolari semplici $r_1, \dots r_n$ tali che il loro orientamento fa sì che il vettore normale $\vec{N}$ punta sempre all'esterno del dominio; il bordo viene detto bordo positivamente orientato e si indica con $\partial^+ D$

Integrali su bordi positivamente orientati

Dato D aperto stokiano con $\partial^+ D$ bordo positivamente orientato e $F = (F_1, F_2)$ campo continuo, l'integrale di G lungo il bordo di D è:

$$\text{Circuitazione:} \quad \int_{\partial^+ D} F_1\, dx + F_2\, dy = \int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds := \int_{r_1} \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds + \dots + \int_{r_n} \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

Flusso di campi attraverso domini stokiani

Dato D aperto stokiano con $\partial^+ D$ bordo positivamente orientato e $F = (F_1, f_2)$ campo continuo, il flusso di F lungo il bordo di D è:

$$\text{Flusso:} \quad \int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot \vec{N}\, ds := \int_{\partial^+ D} F_1(x,y)\, dy - F_2(x,y)\, dx = \int_{\partial^+ D} \det \begin{pmatrix} F_1 & dx \\ F_2 & dy \end{pmatrix}$$

6.3 Divergenza

Definizione

Dato un campo $F = (F_1, F_2)$ di classe C^1 su aperto D, la divergenza di F è:

$$\text{div}F(x,y) := \partial_x F_1(x,y) + \partial_y F_2(x,y) = \det\begin{pmatrix} \partial_x & -F_2 \\ \partial_y & F_1 \end{pmatrix}$$

Teorema della divergenza

Il flusso di un campo $F = (F_1, F_2)$ di classe C^1 su aperto stokiano D è:

$$\int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot \vec{N}\, ds = \int_D \text{div}F\, dx\, dy$$

Interpretazione

I punti in cui $\text{div}F(x,y) < 0$ sono punti di compressione, ovvero dove il flusso di entrata è maggiore di quello in uscita. Quelli in cui $\text{div}F(x,y) > 0$ sono punti di espansione, dove il flusso in uscita è maggiore di quello in entrata. Infine dove $\text{div}F(x,y) = 0$ il flusso in entrata è pari a quello in uscita.

Dimostrazione del Principio di Archimede

Ho un solido D immmerso in un fluido con densità costante μ. Il fluido agisce con una forza data dalla formula $\mu g y \vec{N}$ sul bordo di D. Si vuole calcolare la risultante di tutte le forze agenti sul bordo di D.
Il vettore $\vec{N}$ è definito come segue $\vec{N} := (N_1, N_2)$.

$$\int_{\partial^+ D} \mu g y \vec{N}\, ds := \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\partial^+ D} \mu g y N_1\, ds \\ \displaystyle\int_{\partial^+ D} \mu g y N_2\, ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\partial^+ D} (\mu g y,\ 0) \cdot \vec{N}\, ds \\ \displaystyle\int_{\partial^+ D} (0,\ \mu g y) \cdot \vec{N}\, ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_D \text{div}(\mu g y,\ 0)\, dx\, dy \\ \displaystyle\int_D \text{div}(0,\ \mu g y)\, dx\, dy \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \displaystyle\int_D 0\, dx\, dy \\ \displaystyle\int_D \mu g\, dx\, dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu g \text{Area}(D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Peso}(D) \end{pmatrix}$$

Si ottiene che la risultante delle forze agenti sul bordo è un vettore che ha direzione concorde all'asse y (è rivolto verticalmente) e modulo pari al peso dell'acqua che occuperebbe il "volume" di D.

6.4 Formula di Green

Definizione

Dato un campo $F = (F_1, F_2)$ di classe C^1 su aperto D, l'integrale di F lungo il bordo di D vale:

$$\int_{\partial^+ D} F_1(x,y)\, dx + F_2(x,y)\, dy = \int_D \partial_x F_2(x,y) - \partial_y F_1(x,y)\, dx\, dy = \int_D \text{rot}(F) \cdot (0,0,1)\, dx\, dy$$

$$\text{Circuitazione:} \quad \int_{\partial^+ D} F_1\, dx + F_2\, dy = \int_D \det\begin{pmatrix} \partial_x & F_1 \\ \partial_y & F_2 \end{pmatrix} dx\, dy$$

Calcolo delle aree con la formula di Green

Sia D un dominio stokiano, allora:

$$\text{Area}(D) = \int_{\partial^+ D} x\, dy = \int_{\partial^+ D} -y\, dx = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ D} x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ D} \det\begin{pmatrix} x & dx \\ y & dy \end{pmatrix}$$

7 Equazioni differenziali

7.1 Problema di Cauchy ed esistenza e unicità della soluzione

Soluzione di un'equazione differenziale

Data $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una soluzione dell'equazione $y' = f(t, y)$ è una funzione $yI \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 tale che $(t, y(t)) \in D$ e $y'(t) = f(t, y(t))$. L'insieme delle soluzioni è detta soluzione generale dell'equazione differenziale.

Problema di Cauchy

Data un'equazione differenziale, il problema di Cauchy di un'equazione differenziale è: $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$
La soluzione generale che risolve anche il problema di Cauchy è detta soluzione del problema di Cauchy,

Esistenza e unicità della soluzione locale

Sia $D = I \times \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ funzione continua, se valgono
- $\partial_y f(t, y)$ esiste continua
- $\partial_y f(t, y)$ limitata su ogni striscia $[\alpha', \beta'] \times \mathbb{R}$, con $[\alpha', \beta'] \subset I$

Allora per ogni $(t_0, y_0) \in D$ esiste ed è unica la soluzione definita su tutto I del problema di Cauchy.

7.2 Equazione differenziale a variabili separabili

Definizione

Un'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ è detta a variabili separabili se $f(t, y) = g(t)\, h(y)$

Soluzione caso h(y) = 0

Dato $\begin{cases} y' = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, la soluzione è $y(t) = y_0$

Soluzione caso generale

1. si isolano le y da una parte e le t dall'altra parte: $\frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t)$
2. si integra da entrambe le parti: $\int \frac{y'(t)}{h(y(t))} dt = \int \frac{1}{h(y)} dy := H(y)$ e $\int g(t) dt := G(t)$
3. si uniscono le soluzioni invertendo $H(y)$ per ottenere y: $y(t) = H^{-1}(G(t)) + C$
4. si determina C in base alla seconda condizione del sistema di Cauchy
5. si determina l'intervallo massimo di validità della soluzione

7.3 Equazioni lineari del primo ordine

Definizione

Un'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ è detta lineare del primo ordine se $f(t, y) = a(t)y + b(t)$

Soluzione

1. si osserva che $(y' - a(t)y)e^{-A(t)} = (ye^{-A(t)})'$ con $A' = a$
2. si sceglie una primitiva A tale che $A' = a$, si sposta $a(t)y$ dall'altra parte dell'uguaglianza e si moltiplica per $e^{-A(t)}$ in modo da avere $(y' - a(t)y)\, e^{-A(t)} = b(t)\, e^{-A(t)} \Rightarrow (ye^{-A(t)})' = b(t)e^{-A(t)}$
3. si integra da tutte e due le parti e divido per $e^{-A(t)}$ per ricondurmi alla forma $y = \dots$
4. si determina C in base alla seconda condizione del sistema di Cauchy
5. si determina l'intervallo massimo di validità della soluzione