

Appunti di fondamenti di analisi e probabilità

Giacomo Simonetto

Primo semestre 2024-25

Sommario

Appunti del corso di Fondamenti di analisi e probabilità della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

Indice

1	Curve e sostegni	4
1.1	Introduzione sugli intorni	4
1.2	Funzioni vettoriali e curve	5
1.3	Limiti di funzioni vettoriali	5
2	Derivate, gradienti, tangenti, massimi e minimi	6
2.1	Derivate di funzioni vettoriali	6
2.2	Derivate direzionali e derivate parziali	6
2.3	Gradiente	7
2.4	Spazio tangente e differenziabilità	8
2.5	Derivate seconde, matrice Hessiana	9
2.6	Massimi e minimi	9
3	Campi e integrali curvilinei	10
3.1	Integrali curvilinei di funzioni reali	10
3.2	Campi vettoriali	11
3.3	Integrali curvilinei di campi	11
3.4	Campi conservativi	12
3.5	Campi irrotazionali	12
3.6	Calcolo delle primitive con metodo delle integrazioni marginali	13
4	Integrali doppi	14
4.1	Integrali doppi su rettangoli	14
4.2	Integrali doppi su domini limitati	15
4.3	Cambiamento di variabile	15
4.4	Integrali doppi generalizzati su domini illimitati	17
5	Superfici parametriche	18
5.1	Notazioni	18
5.2	Area di una superficie parametrica	18
5.3	Area di un trapezoide di una funzione sopra ad una curva	19
5.4	Area di una superficie di rotazione	19
5.5	Integrale superficiale	20
6	Teoremi della divergenza e di Green - Stokes	21
6.1	Flusso di un campo	21
6.2	Domini Stokiani	21
6.3	Divergenza	22
6.4	Formula di Green	22
7	Equazioni differenziali	23
7.1	Problema di Cauchy ed esistenza e unicità della soluzione	23
7.2	Equazione differenziale a variabili separabili	23
7.3	Equazioni lineari del primo ordine	23
8	Combinatoria	24
8.1	Cardinalità	24
8.2	Sequenze	24
8.3	Permutazioni	24
8.4	Spartizioni	24
8.5	Sottoinsiemi	25
8.6	Principio di moltiplicazione	25
8.7	Principio di divisione	25

9	Probabilità	26
9.1	Definizione assiomatica di probabilità	26
9.2	Probabilità uniforme	26
9.3	Probabilità su insiemi finiti e infiniti numerabili e non numerabili	27
9.4	Continuità della probabilità	27
9.5	Probabilità condizionata e indipendenza di eventi	28
9.6	Variabili aleatorie discrete	29
9.7	Variabile di Bernoulli	29
9.8	Variabile binomiale	29
9.9	Variabile geometrica	30
9.10	Variabile di Poisson	30
9.11	Variabile aleatoria uniforme	30
9.12	Variabile aleatoria esponenziale	31
9.13	Variabile normale o Gaussiana	31
9.14	Valore atteso varianza e covarianza di variabili discrete	32
9.15	Valore atteso varianza e covarianza di variabili continue	33
9.16	Variabili identicamente distribuite	34
9.17	Teorema del limite centrale	34
9.18	Variabili congiunte continue	35
9.19	Legge dei grandi numeri	36

1 Curve e sostegni

1.1 Introduzione sugli intorni

Definizioni su palle e cubi

- Norma di un vettore: $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$
- Distanza tra due punti: $\text{dist}(x, y) := |x - y|$
- Disuguaglianza triangolare: $|x - y| \leq |x| + |y|$
- Disco o palla chiusa: $B(p, r] := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p| \leq r\}$
- Disco o palla aperta: $B(p, r[:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p| < r\}$
- Bordo di una palla: $\partial B(p, r] = \partial B(p, r[:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p| = r\}$
- Quadrato o cubo chiuso: $Q(p, r] := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1 - p_1| \leq r, \dots, |x_n - p_n| \leq r\}$
- Quadrato o cubo aperto: $Q(p, r[:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1 - p_1| < r, \dots, |x_n - p_n| < r\}$
- Bordo di un quadrato: $\partial Q(p, r] = \partial Q(p, r[:= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1 - p_1| = r, \dots, |x_n - p_n| = r\}$

Teorema di inclusione tra palle e cubi

Ogni palla contiene un cubo di stesso centro e viceversa.

Fissato $p \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ vale $B(p, r] \subseteq Q(p, r]$ e $Q(p, r] \subseteq B(p, r\sqrt{n}]$

Definizione di intorno

Un intorno di $p \in \mathbb{R}^n$ è un insieme che contiene una palla centrata in p . Per il teorema precedente, la proposizione vale anche per i quadrati.

Definizione di punto interno ad un insieme

Il punto $p \in D$ è un punto interno all'insieme D se $\exists \delta > 0 : B(p, \delta[\subset D$.

L'insieme dei punti interni di un insieme D si indica con $\text{int}(D)$.

Insieme aperto, chiuso, frontiera e chiusura

- Un insieme è aperto se ogni suo punto è un punto interno: $D = \text{int}(D)$
- Un insieme è chiuso se il suo complementare è aperto
Osservazione: \emptyset e \mathbb{R}^n sono sia aperti che chiusi
- La frontiera ∂D è l'insieme dei punti tali che ogni loro intorno interseca sia D , sia $\mathbb{R}^n \setminus D$
- La chiusura \overline{D} è il più piccolo insieme chiuso contenente D : $\overline{D} = D \cup \partial D$

Prodotto scalare

Il prodotto scalare tra due vettori $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ di \mathbb{R}^n è il numero reale definito come $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è 0.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$, allora $|x \cdot y| \leq |x| |y|$. Si ha l'uguaglianza se solo se uno è multiplo dell'altro.

1.2 Funzioni vettoriali e curve

Definizione di funzioni vettoriali, curve, sostegni di curve

- Una funzione vettoriale è una funzione $f : I_{intervallo} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$
- Una curva (parametrica) è una funzione vettoriale in cui $f_1(t), \dots, f_n(t)$ sono continue in $I = [a, b]$
- Il sostegno di una curva f è l'insieme immagine di f : $f([a, b]) := \{f(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$
- Una curva si dice cartesiana se è della forma $f(t) = (t, h(t))$ o $f(t) = (h(t), t)$, $t \in [a, b]$
- Una curva si dice chiusa se $f(a) = f(b)$
- Una curva si dice semplice se $f(t_1) \neq f(t_2)$, $\forall t_1, t_2$ con $a < t_1 < t_2 \leq b$, ovvero se non si interseca mai ad eccezione degli estremi

Curve e sostegni

- Data una curva $f(t)$, per ottenere il sostegno di tale curva, bisogna eliminare il parametro t , passando dalla forma parametrica a quella cartesiana.
- Viceversa se, dato un sostegno, si vuole ottenere una curva, bisogna introdurre una parametrizzazione del sostegno, passando dalla forma cartesiana a quella parametrica.

1.3 Limiti di funzioni vettoriali

Definizione di limite (finito) in una e più dimensioni

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \ell \in \mathbb{R}^n &\Rightarrow \forall V \text{ intorno di } \ell \exists U \text{ intorno di } p \text{ t.c. } x \in U \setminus \{p\} \Rightarrow f(x) \in V \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - \ell| < \varepsilon \\ \lim_{t \rightarrow t_0} (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = \ell_1, \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = \ell_2, \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) = \ell_n\end{aligned}$$

Continuità

Una funzione è continua se $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$. Nel caso di funzioni vettoriali, essa è continua se ogni sua componente è continua.

2 Derivate, gradienti, tangenti, massimi e minimi

2.1 Derivate di funzioni vettoriali

Definizione di derivata in una e più dimensioni

Una funzione f è derivabile in t_0 se esiste il limite finito del rapporto incrementale.

$$f'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \ell \in \mathbb{R}^n$$

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \quad \Leftrightarrow \quad f'(t_0) = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_n(t_0))$$

Retta tangente ad una curva

Se f è derivabile in t_0 e $f'(t_0) \neq 0$:

- il vettore tangente alla curva è $f'(t_0)$
- la retta tangente alla curva è $\{f(t_0) + f'(t_0)\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Si parla di tangenza alla curva e non al sostegno perché una funzione può passare per lo stesso punto in due momenti diversi. In questo caso si avrebbero due tangenti diverse per uno stesso punto del sostegno, quando invece sarebbero due tangenti associate a due valori diversi del parametro della curva.

Funzioni o curve differenziabili e approssimazioni di primo ordine

Una funzione $f(t)$ si dice differenziabile se vale (specialmente il limite):

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + R(t) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R(t)}{t - t_0} = 0$$

Regole di derivazione di curve

Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ curve derivabili, $\varphi, u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili, $\alpha \in \mathbb{R}$, allora:

1. $\frac{d}{dt} (\text{costante}) = 0$
2. $\frac{d}{dt} (\alpha f) = \alpha f'$
3. $\frac{d}{dt} (\varphi(t)f(t)) = \varphi'(t)f(t) + \varphi(t)f'(t)$
4. $\frac{d}{dt} (f + g) = f' + g'$
5. $\frac{d}{dt} (f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$
6. $\frac{d}{dt} (f \circ u) = f'(u)u'$

2.2 Derivate direzionali e derivate parziali

Definizione di derivata direzionale

La derivata direzionale di f in un punto p lungo la direzione \vec{u} è definita come il limite, se esiste finito del rapporto incrementale.

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(p) = \partial_{\vec{u}}f(p) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\vec{u}) - f(p)}{t} = \ell \in \mathbb{R} \\ &:= g'(0) \text{ con } g(t) = f(p + t\vec{u}) \end{aligned}$$

Per trovare la derivata direzionale bisogna fare:

1. trovare la funzione $g(t) = f(p + t\vec{u})$
2. calcolare la derivata $g'(t)$
3. valutare la derivata per $t \rightarrow 0$

Oss nel caso in cui la funzione f non sia continua in p e non è possibile definire esattamente $g(t)$ e $g'(t)$, è consigliato usare la definizione per calcolare $g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\vec{u}) - f(p)}{t}$

Definizione di derivata parziale

La i -esima derivata parziale di f in p è la derivata direzionale lungo \vec{e}_i di $f(x_1, \dots, x_n)$,

$$\partial_{x_i} f(p) = D_{\vec{e}_i} f(p) = \frac{d}{dx_i} f(p) \quad \text{casi particolari:} \quad \begin{aligned} \partial_x f(p) &= D_{(1,0)} f(p) = \frac{d}{dx} f(p) \\ \partial_y f(p) &= D_{(0,1)} f(p) = \frac{d}{dy} f(p) \end{aligned}$$

Continuità e derivate direzionali

- Una funzione può non essere continua in un punto p , ma avere lo stesso derivate parziali e direzionali. In questo caso si sfrutta la definizione di derivata per calcolarne il valore.

Proprietà delle derivate direzionali

1. $D_u(f(p) + g(p)) = D_u f(p) + D_u g(p)$
2. $D_u(f(p)g(p)) = D_u f(p) g(p) + f(p) D_u g(p)$
3. $D_u(cf(p)) = c D_u f(p)$
4. $D_u(\varphi \circ p)(p) = D_u \varphi(f(p)) = \varphi'(f(p)) D_u f(p)$

2.3 Gradiente

Definizione di gradiente

$$\vec{\nabla} f(p) := (\partial_{x_1} f(p), \partial_{x_2} f(p), \dots, \partial_{x_n} f(p))$$

Proprietà del gradiente

1. $\vec{\nabla}(f(p) + g(p)) = \vec{\nabla} f(p) + \vec{\nabla} g(p)$
2. $\vec{\nabla}(f(p)g(p)) = \vec{\nabla} f(p) g(p) + f(p) \vec{\nabla} g(p)$
3. $\vec{\nabla}(cf(p)) = c \vec{\nabla} f(p)$
4. $\vec{\nabla}(\varphi \circ f)(p) = \vec{\nabla}(\varphi(f(p))) = \varphi'(f(p)) \vec{\nabla} f(p)$
5. gradiente della norma: $\vec{\nabla} |x| = \frac{x}{|x|}$

Relazione tra gradiente e derivate direzionali in funzioni C^1

Una funzione f è di classe C^1 in un aperto se:

- f è continua
- f ha derivate parziali continue

In una funzione C^1 , le derivate direzionali e il gradiente hanno la seguente relazione:

$$\forall u \in \mathbb{R}^n \quad D_u f(p) = \vec{\nabla} f(p) \cdot \vec{u} = \partial_{x_1} f(p) u_1 + \partial_{x_2} f(p) u_2 + \dots + \partial_{x_n} f(p) u_n$$

Osservazione: se in una funzione generica la derivata parziale $D_{(u_1, u_2)} f(p)$ non è esprimibile come combinazione lineare delle derivate parziali, allora non è C^1 . In altre parole se non vale l'equazione $D_u f(p) = \vec{\nabla} f(p) \cdot \vec{u}$, allora $f \notin C^1$.

Direzione di massima e minima crescita

Se f è C^1 in un intorno di p , la direzione lungo cui si ha la massima pendenza è la direzione del vettore gradiente. Viceversa la direzione di minore crescita è opposta a quella di massima crescita.

$$\begin{aligned} D_{u_{max}} f(p) &= |\vec{\nabla} f(p)| & \Leftrightarrow & \quad u_{max} = \frac{\vec{\nabla} f(p)}{|\vec{\nabla} f(p)|} \\ D_{u_{min}} f(p) &= -|\vec{\nabla} f(p)| & \Leftrightarrow & \quad u_{min} = -\frac{\vec{\nabla} f(p)}{|\vec{\nabla} f(p)|} \end{aligned}$$

2.4 Spazio tangente e differenziabilità

Spazio tangente

Lo spazio tangente al grafico di una curva $f(p)$ in un punto p è l'insieme dei punti:
(n.b.: x è un punto sul piano, come lo è anche p , non è una coordinata)

$$\left\{ (x, z) \text{ t.c. } z = f(p) + \vec{\nabla} f(p) \cdot (x - p) \right\}$$

Differenziabilità

Una funzione è differenziabile in un punto p se la funzione f è approssimabile al piano tangente in p in un suo intorno con un errore trascurabile. $L(x)$ è la funzione affine detta linearizzazione di f in p

$$f(x) = f(p) + \vec{\nabla} f(p) \cdot (x - p) + R(x), \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x)}{|x - p|} = 0$$
$$L(x) := f(p) + \vec{\nabla} f(p) \cdot (x - p)$$

Per sapere se una funzione è differenziabile bisogna controllare che il resto $R(x) = o(|x - p|)$, cioè bisogna risolvere il limite per $x \rightarrow p$ e verificare che faccia 0.

Continuità di funzioni differenziabili

Una funzione differenziabile in p è anche continua in p . Quindi valgono le seguenti inclusioni.

$$\text{Funzioni con derivate parziali} \subset \text{Funzioni continue} \subset \text{Funzioni differenziabili} \subset \text{Funzioni } C^1$$

Gradiente di funzioni differenziabili

Nelle funzioni differenziabili il gradiente vale:

$$D_u f(p) = \vec{\nabla} f(p) \cdot u$$

Regola della catena di derivate parziali

Per la regola della catena (con funzione a due variabili e in generale a n variabili):

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \partial_x f(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \partial_y f(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = \vec{\nabla} f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t))$$
$$\frac{d}{dt} f(r(t)) = \vec{\nabla} f(r(t)) \cdot r'(t) = \partial_{x_1} f(x(t)) x_1'(t) + \partial_{x_2} f(x(t)) x_2'(t) + \cdots + \partial_{x_n} f(x(t)) x_n'(t)$$

Gradiente e curve di livello

Il gradiente è perpendicolare alle curve di livello. Nelle curve di livello vale:

$$f(r(t)) = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} f(r(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(r(t)) \cdot r'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(r(t)) \perp r'(t)$$

con $r'(t)$ un vettore con la stessa direzione della tangente alla curva di livello, per un certo t .

2.5 Derivate seconde, matrice Hessiana

Derivate seconde

La derivata parziale di secondo ordine è definita come:

$$\partial_{x_i, x_j}^2 f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_{x_i}(\partial_{x_j} f(x))$$

Matrice Hessiana

$$\text{Hess}f(x) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 f(x) & \cdots & \partial_{x_1, x_n}^2 f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n, x_1}^2 f(x) & \cdots & \partial_{x_n}^2 f(x) \end{pmatrix}$$

Teorema di Schwarz

Data una funzione f di classe C^2 (ovvero con derivate parziali doppie continue), allora vale:

$$\partial_{x_i, x_j}^2 f(x) = \partial_{x_j, x_i}^2 f(x) \quad \forall i, j$$

Per questo principio, la matrice hessiana di funzioni C^2 è una matrice simmetrica.

2.6 Massimi e minimi

Definizione di massimi, minimi e punti di sella

- il punto p è punto di minimo assoluto se $f(x) \geq f(p) \quad \forall x \in D$
- il punto p è punto di massimo assoluto se $f(x) \leq f(p) \quad \forall x \in D$
- il punto p è punto di minimo relativo se $\exists U_p$ intorno di p t.c. $f(x) \geq f(p) \quad \forall x \in U_p \cap D$
- il punto p è punto di massimo relativo se $\exists U_p$ intorno di p t.c. $f(x) \leq f(p) \quad \forall x \in U_p \cap D$
- il punto p è punto di sella se $\forall U_p$ intorno di $p \exists x, y \in U_p \cap D$ t.c. $f(x) < f(p) < f(y)$

Regola di Fermat e punti critici interni

- Se f derivabile rispetto a \vec{u} in p , con p punto di massimo o minimo locale **interno** al dominio, allora vale che $D_u f(p) = 0$, per cui $\vec{\nabla} f(p) = 0$
- I punti interni al dominio per cui $\vec{\nabla} f(p) = 0$ si dicono punti critici e possono essere classificati come punti di massimo locale, di minimo locale o punti di sella.
- Per trovare i punti critici **interni** al dominio, per definizione, bisogna risolvere $\vec{\nabla} f(p) = 0$.

Criterio dell'Hessiana

Data una funzione f di classe C^2 e p punto critico interno al dominio, allora:

- se $\det H_f(p) > 0$ e $\partial_{x,x}^2 f(p) > 0$ allora p è minimo locale
- se $\det H_f(p) > 0$ e $\partial_{x,x}^2 f(p) < 0$ allora p è massimo locale
- se $\det H_f(p) < 0$ allora p è punto di sella
- se $\det H_f(p) = 0$ allora non si può concludere nulla

Massimi e minimi assoluti su domini chiusi e limitati

Per Weierstrass una funzione continua in un dominio chiuso e limitato ammette massimo e minimo assoluto. Per trovare il massimo e minimo assoluto di una funzione bisogna controllare i punti critici interni al dominio D e i punti sul bordo del dominio ∂D .

- $\max f = \max \{f(p) \text{ t.c. } p \in \{\text{punti di massimo interni a } D\} \cup \{\text{punti di massimo su } \partial D\}\}$
- $\min f = \min \{f(p) \text{ t.c. } p \in \{\text{punti di minimo interni a } D\} \cup \{\text{punti di minimo su } \partial D\}\}$

3 Campi e integrali curvilinei

3.1 Integrali curvilinei di funzioni reali

Definizione

Data una funzione reale $\mu(x)$ e una curva $r(t)$ definita in un intervallo chiuso $[a, b]$, allora l'integrale curvilineo di μ sulla curva r vale:

$$\int_r \mu \, ds := \int_a^b \mu(r(t)) \cdot |r'(t)| \, dt$$

Lunghezza di una curva

La lunghezza di una curva è l'integrale curvilineo con $\mu = 1$:

$$\text{Lunghezza} := \int_r ds = \int_a^b |r'(t)| \, dt$$

Baricentro di una curva

Il baricentro di una curva r con densità $\mu(x)$ è definito come:

$$\text{Baricentro} := \frac{\int_r (x_1, x_2, \dots, x_n) \mu(x) \, ds}{\int_r \mu \, ds} = \frac{\int_r x_1 \mu(x) \, ds + \int_r x_2 \mu(x) \, ds + \dots + \int_r x_n \mu(x) \, ds}{\int_r \mu \, ds}$$

Per $\mu = 1$ si ottiene il baricentro geometrico:

$$\text{Baricentro geometrico} := \frac{\int_r (x_1, x_2, \dots, x_n) \, ds}{\int_r ds} = \frac{\int_r x_1 \, ds + \int_r x_2 \, ds + \dots + \int_r x_n \, ds}{\text{Lunghezza}(r)}$$

Proprietà dell'integrale curvilineo

1. $\int_r (\mu(x) + \nu(x)) \, ds = \int_r \mu(x) \, ds + \int_r \nu(x) \, ds$
2. se $c = \text{costante}$, allora $\int_r c\mu(x) \, ds = c \int_r \mu(x) \, ds$
3. se $\mu \leq \nu$, allora $\int_r \mu(x) \, ds \leq \int_r \nu(x) \, ds$
4. cammino inverso: $\int_{r^{-1}} \mu(x) \, ds = \int_r \mu(x) \, ds$
5. giustapposizione di cammini: $\int_{r_1, r_2} \mu(x) \, ds = \int_{r_1} \mu(x) \, ds + \int_{r_2} \mu(x) \, ds$

3.2 Campi vettoriali

Definizione

Un campo vettoriale è una funzione $F : \begin{matrix} D \subseteq \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ x \in D & \mapsto & F(x) \end{matrix}$ con $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$

Campi vettoriali radiali

Un campo vettoriale definito in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è detto radiale se ha la forma $F(x) = g(x) \cdot \frac{x}{|x|}$

Esempi di campi radiali:

- campo gravitazionale $F(r) = -\frac{G \cdot m}{|r^2|} \hat{r} = g(|r|) \frac{r}{|r|}$ nella forma $F(x) = \frac{K}{|x^2|} \frac{x}{|x|}$
- campo elettrico $E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |r^2|} \hat{r} = g(|r|) \frac{r}{|r|}$ nella forma $F(x) = \frac{K}{|x^2|} \frac{x}{|x|}$
- campi della forma $F(x) = h(|x|) x$, infatti per $x \neq 0$ si ha $F(x) = |x| g(|x|) \frac{x}{|x|}$

Campi gradienti e potenziali

Un campo F è detto gradiente se esiste $U : D \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$ per cui $F = \vec{\nabla} U$.

Il potenziale, in fisica, è definito $V := -U$

Gradienti da ricordare

- **campo radiale** della forma $F(x) = h(x) \frac{x}{|x|}$ con primitiva $g(x) = \int h(x) dx$
- **campo gravitazionale** della forma $F(x, y) = \frac{K}{x^2+y^2} \frac{(x, y)}{|(x, y)|}$ con gradiente $G(x, y) = -\frac{K}{|(x, y)|}$
- **campi continui** della forma $F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$

3.3 Integrali curvilinei di campi

Dato un campo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e un cammino $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1$ a tratti, allora l'integrale curvilineo del campo F lungo il cammino r vale:

$$\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_r \vec{F}(x) \cdot d\vec{r} := \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Circuitazione

Se il cammino r è un percorso chiuso, l'integrale prende il nome di circuitazione di F su r : $\oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Lavoro di una forza

Se F è una forza e $r(t)$ è un cammino, il lavoro di F lungo r è: $W = \int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$

Se la forza è costante e $r(t) = P + t\overrightarrow{PQ}$ il lavoro diventa: $W = \int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F} \cdot \overrightarrow{PQ} dt = F \cdot \overrightarrow{PQ}$

Notazioni alternative

1. $\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_r F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$
2. $\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_r \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ con $\vec{T}(x) = \vec{T}(\vec{r}(t)) := \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$ detto campo dei vettori tangenti
3. $\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_r (F_1(x), \dots, F_n(x)) \cdot (dx_1, \dots, dx_n) = \int_r F_1(x) dx_1 + \dots F_n(x) dx_n$ not. termodinamica

3.4 Campi conservativi

Definizione

Un campo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è conservativo se $\forall r_1, r_2$ cammini con stessi estremi o $\forall r$ cammino chiuso, vale:

$$\int_{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Teorema fondamentale dei campi gradienti

Sia $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo gradiente con $\vec{\nabla}U = F$ e $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un cammino, allora vale

$$\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(r(b)) - U(r(a))$$

Siccome l'integrale è indipendente dal cammino, allora il campo è conservativo.

$$\text{Dim} \quad \int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{\nabla}U(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) dt = U(r(b)) - U(r(a))$$

Equivalenze campi conservativi, campi gradienti, circuitazione

campo conservativo \Leftrightarrow campo gradiente $\Leftrightarrow \int_r \vec{F} \cdot d\vec{r}$ dipende solo da $r(a)$ e $r(b)$ $\Leftrightarrow \oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

3.5 Campi irrotazionali

Definizione

Un campo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è irrotazionale se e solo se $\partial_{x_i} F_j = \partial_{x_j} F_i \quad \forall i, j$

Rotore

Il rotore $\text{rot}(\vec{F}) : \vec{F} \rightarrow \vec{G}$ è un operatore che da un campo vettoriale, restituisce un altro campo vettoriale. Se si interpreta il campo \vec{F} come il moto di particelle di un fluido sullo spazio, il campo $\text{rot}(\vec{F})$ è un campo vettoriale i cui vettori hanno direzione e verso uguale all'asse di rotazione delle particelle attorno ad un punto x e modulo pari al doppio della velocità angolare delle particelle che si muovono lungo i vettori del campo F .

$$\text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Campo conservativo + C^1 implica campo irrotazionale

Se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo C^1 e conservativo, allora è anche irrotazionale.

Dimostrazione:

1. F conservativo $\Leftrightarrow \vec{\nabla}U = F \Leftrightarrow \partial_{x_i} U = F_i$
2. $F \in C^1 \Leftrightarrow \partial_{x_i} F_j = \partial_{x_j} F_i$ per Teorema di Schwarz
3. per 1. si ha $\partial_{x_i} F_j = \partial_{x_i} \partial_{x_j} U$ e $\partial_{x_j} F_i = \partial_{x_j} \partial_{x_i} U$
4. per 2. si ha $\partial_{x_i} F_j = \partial_{x_j} F_i$ ovvero che F è irrotazionale

Osservazione: tutti i campi conservativi e C^1 sono irrotazionali, ma non tutti i campi irrotazionali sono conservativi e C^1 .

Domini semplicemente connessi

Un dominio aperto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è **connesso** se $\forall x, y \in D \exists r : [a, b] \rightarrow D$ tale che $r(a) = x, r(b) = y$

Un dominio aperto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è **semplicemente connesso** se ogni circuito $r : [a, b] \rightarrow D$ si può contrarre con continuità ad un punto in D .

Irrotazionali su domini semplicemente connessi

Se un campo $F \in C^1$ è irrotazionale su un dominio semplicemente connesso, allora F è conservativo

- campo conservativo e $C^1 \Rightarrow$ campo irrotazionale
- campo conservativo e C^1 su D sempl. connesso \Leftrightarrow campo irrotazionale e C^1 su D sempl. connesso

Osservazione: se ho un campo irrotazionale su un dominio D , posso restringere il dominio ad uno semplicemente connesso (es. un rettangolo o una palla centrata in un punto), per cui il campo diventa anche gradiente sul dominio ristretto.

3.6 Calcolo delle primitive con metodo delle integrazioni marginali

Sia $F(x, y) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$ campo vettoriale irrotazionale, gradiente, C^1 su dominio semplicemente connesso. Si vuole trovare il potenziale $U(x, y)$.

1. siccome è gradiente, vale $\vec{\nabla}U = \vec{F}$:
$$\begin{cases} \partial_x U(x, y) = F_x(x, y) \\ \partial_y U(x, y) = F_y(x, y) \end{cases}$$
2. integro una delle due equazioni per ottenere U :
$$\int \partial_x U(x, y) dx = \int F_x(x, y) dx \Rightarrow U(x, y) = U_{\text{parziale}}(x, y) + \varphi(y)$$
3. osservo che $\varphi(y)$ è indipendente da x e vale $\partial_x(U(x, y) - U_{\text{parziale}}(x, y)) = 0$
4. risolvo l'altra equazione sostituendo $U(x, y) = U_{\text{parziale}}(x, y) + \varphi(y)$ e ottenendo $\varphi(y)$:
$$\partial_y(U_{\text{parziale}}(x, y) + \varphi(y)) = F_y(x, y) \Rightarrow \varphi'(y) = g(y) + c \Rightarrow \varphi(y) = \int \varphi'(y) dy$$
5. a questo punto ho $U_{\text{parziale}}(x, y)$ dal punto 2 e $\varphi(y)$ dal punto 4, per cui posso ottenere il potenziale:
$$U(x, y) = U_{\text{parziale}}(x, y) + \varphi(y)$$

Osservazioni:

- se nel punto 4 ottengo una espressione $\varphi'(y)$ che dipende anche da x , allora non sono verificate tutte le condizioni del dominio e il campo potrebbe essere non gradiente o rotazionale.
- se ho un campo irrotazionale, ma il dominio non è semplicemente connesso, posso partizionare il dominio in rettangoli (es. un rettangolo comprende le $x > 0$ e un altro le $x < 0$) e trovare una primitiva per ogni rettangolo.

4 Integrali doppi

4.1 Integrali doppi su rettangoli

Integrali doppi alla Riemann

Data una funzione $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, il volume del trapeziode sotteso dalla funzione è dato dalla somma di Riemann dei parallepiedi ottenuti dividendo il dominio in piccoli rettangoli con lato tendente a 0 e si indica:

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy$$

Integrale iterato sui rettangoli

L'integrale doppio può essere scritto come integrale iterato:

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

Formula di riduzione sui rettangoli

Si osserva che è possibile ottenere l'area di una fetta verticale lungo un asse integrando solo lungo x o y :

$$\int_a^b f(x, y) \, dx = A(y)_{\text{area fetta } \perp \text{ a } y} \quad \int_c^d f(x, y) \, dy = A(x)_{\text{area fetta } \perp \text{ a } x}$$

Quindi per risolvere l'integrale doppio posso prima risolverlo integrando per una variabile trovando l'area di una fetta verticale e successivamente integrare l'area trovata rispetto all'altra variabile.

$$\begin{aligned} \int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) \, dy \right\} dx = \int_a^b A(x)_{\text{area fetta } \perp \text{ a } x} dx \\ &= \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) \, dx \right\} dy = \int_c^d A(y)_{\text{area fetta } \perp \text{ a } y} dy \end{aligned}$$

Integrale di un prodotto di funzioni

Se la funzione $f(x, y)$ è a variabili separabili, ovvero se $f(x, y) = g(x)h(y)$, allora l'integrale diventa:

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{[a,b] \times [c,d]} g(x)h(y) \, dx \, dy = \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \left(\int_c^d h(y) \, dy \right)$$

4.2 Integrali doppi su domini limitati

Funzione integrabile

Una funzione $f(x, y)$ è integrabile in un integrale doppio su un dominio D se f è continua e limitata e se D è limitato e misurabile.

Proprietà dell'integrale doppio

1. $\int_D c f(x, y) \, dx \, dy = c \int_D f(x, y) \, dx \, dy$
2. $\int_D f(x, y) + g(x, y) \, dx \, dy = \int_D f(x, y) \, dx \, dy + \int_D g(x, y) \, dx \, dy$
3. se $f \geq 0$ allora $\int_D f(x, y) \, dx \, dy \geq 0$
4. se D è sostegno di una curva, allora $\int_D f(x, y) \, dx \, dy = 0$
5. se $D = D_1 \cup D_2$ con $D_1 \cap D_2$ pari al più ad un'unione di sostegni di curve, allora si ha:
$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy + \int_{D_2} f(x, y) \, dx \, dy$$

Integrali su regioni semplici rispetto a x

Una regione D è semplice rispetto a x se $D = \{(x, y) : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$.

L'integrale iterato di f su D diventa:

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b \left\{ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right\} dx$$

Integrali su regioni semplici rispetto a y

Una regione D è semplice rispetto a y se $D = \{(x, y) : y \in [c, d], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$.

L'integrale iterato di f su D diventa:

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left\{ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \, dx \right\} dy$$

4.3 Cambiamento di variabile

La matrice Jacobiana per il cambio di variabili

La matrice Jacobiana di una funzione $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ è definita come:

$$\varphi'(u, v) = J_\varphi(u, v) := \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_1(u, v) & \partial_v \varphi_1(u, v) \\ \partial_u \varphi_2(u, v) & \partial_v \varphi_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} \varphi_1(u, v) \\ \vec{\nabla} \varphi_2(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{con } |\varphi'(u, v)| := |\det \varphi'(u, v)|$$

Formula del cambiamento di variabili

Dato un integrale doppio di $f(x, y)$ su D nelle variabili x e y , è possibile riscriverlo in funzione delle

variabili u e v , attraverso $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (x, y)$ $D = \varphi(E)$
 $\varphi^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (u, v)$, con $E = \varphi^{-1}(D)$ come segue:

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_E f(\varphi(u, v)) |\varphi'(u, v)| \, du \, dv$$

Elemento d'area, dilatazioni e applicazioni lineari

Il fattore $|\varphi'(u, v)|$ è detto elemento d'area ed è il coefficiente di proporzionalità tra le aree di D ed E :

$$\text{Area}(D) = |\varphi'(u, v)| \text{Area}(E)$$

Simmetrie

Se il dominio è simmetrico rispetto all'asse y ($(x, y) \in D \Leftrightarrow (-x, y) \in D$) e la funzione è dispari, ovvero $f(-x, y) = -f(x, y)$, allora $\int_D f(x, y) \, dx \, dy = 0$

Se il dominio è simmetrico rispetto all'asse y ($(x, y) \in D \Leftrightarrow (-x, y) \in D$) e la funzione è pari, ovvero $f(-x, y) = f(x, y)$, definito $D^+ := \{(x, y) \in D : x > 0\}$ allora $\int_D f(x, y) \, dx \, dy = 2 \int_{D^+} f(x, y) \, dx \, dy$

Baricentro in un piano

Dato un dominio D , per calcolare il baricentro della regione D :

$$\text{Baricentro} = (x_D, y_D) := \left(\frac{\int_D x \, dx \, dy}{\int_D dx \, dy}, \frac{\int_D y \, dx \, dy}{\int_D dx \, dy} \right)$$

Passaggio in coordinate polari

1. Definiamo $\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases}$ con $\rho > 0$ e $t \in [0, 2\pi]$, per cui $\varphi(\rho, t) = (\rho \cos t, \rho \sin t)$
2. Si ha che: $\varphi'(\rho, t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\rho \sin t \\ \sin t & \rho \cos t \end{pmatrix}$, $|\varphi'(\rho, t)| = |\det \varphi'(\rho, t)| = \rho$, $E = \varphi^{-1}(D)$
3. Inoltre f è integrabile in D se e solo se $f(\rho \cos t, \rho \sin t) \rho$ è integrabile su E e si ha:

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_E f(\rho \cos t, \rho \sin t) \rho \, d\rho \, dt$$

4.4 Integrali doppi generalizzati su domini illimitati

Integrale doppio generalizzato e integrale iterato generalizzato

L'integrale doppio generalizzato ha la forma:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dx \, dy$$

Criterio di integrabilità

La funzione f **positiva** ($f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty[$) è integrabile in senso generalizzato su \mathbb{R}^2 se è verificata almeno una delle seguenti condizioni

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dy$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dy \right\} dx$ esistono finiti
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dx \right\} dy$ esistono finiti

Osservazione: se la funzione non è definita positiva o se il suo modulo non è integrabile, allora i processi risolutivi per integrali iterati, cambi di variabile,... potrebbero non valere più e dare risultati finiti, ma diversi. In particolare se scambio l'ordine delle variabili di integrazione ottengo due risultati diversi.

Integrale di Gauss

L'integrale di Gauss, che normalmente non si può risolvere è $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\pi}$

1. risolvo $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy$ con formule di riduzione:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \, dx \, dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \, dy \right) \\ &= (\text{Integrale di Gauss})^2 \end{aligned}$$

2. risolvo $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy$ con coordinate polari:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy &= \int_{\rho=0}^{+\infty} \int_{t=0}^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho \, dt \, d\rho = \left(\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} \, d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} dt \right) = 2\pi \cdot \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^{+\infty} \\ &= \pi \end{aligned}$$

3. unendo i risultati ottengo $(\text{Integrale di Gauss})^2 = \pi \Rightarrow \text{Integrale di Gauss} = \sqrt{\pi}$

5 Superfici parametriche

5.1 Notazioni

Definizione

Una superficie parametrica in \mathbb{R}^3 su dominio chiuso e limitato $D \subset \mathbb{R}^2$ è definita:

$$p : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(u, v) = (p_1(u, v), p_2(u, v), p_3(u, v))$$

Sostegno di una superficie parametrica

Il sostegno di una superficie p è $p(D) \subset \mathbb{R}^3$, che è C^1 se p_1, p_2, p_3 sono C^1 in D .

Superfici parametriche notevoli

- **Superficie cartesiana:**

$$p(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad \text{con sostegno } \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$$

- **Nastro di Möbius:**

$$p(u, v) = ((R + v \cos(u/2)) \cos u, (R + v \cos(u/2)) \sin u, v \sin(u/2))$$

- **Superficie sferica:**

$$\varphi(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \quad \rho \in [0, +\infty[, \phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]$$

5.2 Area di una superficie parametrica

Elemento d'area di una superficie parametrica

L'elemento d'area di una superficie parametrica $p(u, v)$ è l'area del parallelogramma formato dai due vettori $\vec{p}_u(u, v) := \partial_u p(u, v)$ e $\vec{p}_v(u, v) := \partial_v p(u, v)$

$$\text{Elemento d'area}(p) := |\vec{p}_u(u, v) \times \vec{p}_v(u, v)| = |\partial_u p(u, v) \times \partial_v p(u, v)|$$

Osservazioni:

1. per \bar{u} e \bar{v} fissati, con $(\bar{u}, \bar{v}) \in D$:
 $\partial_u p(\bar{u}, \bar{v}) := (\partial_u p_1(\bar{u}, \bar{v}), \partial_u p_2(\bar{u}, \bar{v}), \partial_u p_3(\bar{u}, \bar{v}))$ è il vettore tangente alla curva $u \mapsto p(u, \bar{v})$ in $u = \bar{u}$
 $\partial_v p(\bar{u}, \bar{v}) := (\partial_v p_1(\bar{u}, \bar{v}), \partial_v p_2(\bar{u}, \bar{v}), \partial_v p_3(\bar{u}, \bar{v}))$ è il vettore tangente alla curva $v \mapsto p(\bar{u}, v)$ in $v = \bar{v}$
2. l'area del parallelogramma formato da due vettori \vec{a} e \vec{b} è: $|\vec{a} \times \vec{b}|$

Area di una superficie parametrica

L'area di una superficie parametrica p è l'integrale su D dell'elemento d'area:

$$\text{Area}(p) := \int_D |\vec{p}_u(u, v) \times \vec{p}_v(u, v)| \, dx \, dy$$

Elementi d'area notevoli

- elemento d'area di una superficie cartesiana $p(x, y)$: $|\vec{p}_x \times \vec{p}_y| = \sqrt{1 + \left| \vec{\nabla} f(x, y) \right|^2}$
- elemento d'area di una superficie sferica $p(\phi, \theta)$: $|\vec{p}_\phi \times \vec{p}_\theta| = R^2 \sin \phi$

5.3 Area di un trapezoide di una funzione sopra ad una curva

Trapeziode di una funzione su una curva

Definita $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$, $r(t) = (r_1(t), r_2(t))$ una curva C^1 sul piano x, y e $h : r([a, b]) \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione continua positiva che associa ad ogni punto della curva un certo valore lungo l'asse z , si definisce il trapezoide definito come il sostegno della superficie p compresa tra la curva r e il sostegno della funzione h :

$$\begin{aligned}\text{Trap}_r(h) &:= \{(r(t), z) : t \in [a, b], 0 \leq z \leq h(r(t))\} \\ p(t, z) &= (r_1(t), r_2(t), z) \quad (t, z) \in D, \quad D = \{(t, z) : t \in [a, b], 0 \leq z \leq h(r(t))\}\end{aligned}$$

Area del trapeziode

L'area del trapezoide è definita come l'integrale della funzione h sulla curva r :

$$\text{Area}(\text{Trap}_r(h)) := \int_r h \, ds = \int_a^b h(r(t)) |r'(t)| \, dt$$

Calcolo dell'elemento d'area della superficie del trapeziode

Se si parte da $p(t, z) = (r_1(t), r_2(t), z)$ e si calcola l'elemento d'area $|p_t \times p_z| = \sqrt{r_1'^2(t) + r_2'^2(t)} = |r'(t)|$, per cui per definizione di area di una superficie è:

$$\int_D |p_t \times p_z| \, dt \, dz = \int_D |r'(t)| \, dt \, dz = \int_a^b \int_0^{h(r(t))} |r'(t)| \, dz \, dt = \int_a^b h(r(t)) |r'(t)| \, dt$$

5.4 Area di una superficie di rotazione

Superficie di rotazione

Data una curva $r(t) = (r_1(t), r_2(t))$ sul piano xz , la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare la curva attorno all'asse z è:

$$p(t, \theta) = (r_1(t) \cos \theta, r_1(t) \sin \theta, r_2(t)) \quad t \in [a, b], \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

Elemento d'area

L'elemento d'area della superficie di rotazione è: $|p_t \times p_\theta| = r_1(t) |r'(t)|$

$$\begin{aligned}|p_t \times p_\theta|^2 &= (r_1'(t) \cos \theta, r_1'(t) \sin \theta, r_2'(t)) \times (-r_1(t) \sin \theta, r_1(t) \cos \theta, 0) \\ &= (r_1'(t) r_1(t) \cos^2 \theta + r_1'(t) r_1(t) \sin^2 \theta)^2 + (-r_1(t) r_2'(t) \cos \theta)^2 + (-r_1(t) r_2'(t) \sin \theta)^2 \\ &= (r_1(t) r_1'(t))^2 + (r_1(t) r_2'(t))^2 = r_1^2(t) (r_1'(t) + r_2'(t))^2 \\ &= r_1^2(t) |r'(t)|^2 \\ |p_t \times p_\theta| &= r_1(t) |r'(t)|\end{aligned}$$

Area della superficie di rotazione

L'area della superficie di rotazione è:

$$\begin{aligned}\text{Area}(p) &= \int_D |p_t \times p_\theta| \, dt \, d\theta = \int_D r_1(t) |r'(t)| \, dt \, d\theta = \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \right) \cdot \left(\int_a^b r_1(t) |r'(t)| \, dt \right) \\ &= (\theta_2 - \theta_1) \cdot \int_a^b r_1(t) |r'(t)| \, dt\end{aligned}$$

Teorema di Pappo - Guldino

Indicata con x_r la distanza tra il baricentro di r dall'asse di rotazione e $\text{Lunghezza}(r)$ la lunghezza della curva che viene fatta ruotare per generare p :

$$\text{Area}(p) = (\theta_2 - \theta_1) \cdot x_r \cdot \text{Lunghezza}(r)$$

osservando che 1. $\int_a^b f(r_1(t), r_2(t)) |r'(t)| dt = \int_r f ds$

2. $\int_a^b r_1(t) |r'(t)| dt = \int_r x ds$ per $r_1(t) = f_x(t)$

3. $x_{\text{baricentro}} = \frac{\int_r x ds}{\text{Lunghezza}} \Rightarrow \int_r x ds = x_{\text{baricentro}} \cdot \text{Lunghezza}$

si ottiene che $(\theta_2 - \theta_1) \cdot \int_a^b r_1(t) |r'(t)| dt = (\theta_2 - \theta_1) \cdot \int_r x ds = (\theta_2 - \theta_1) \cdot x_r \cdot \text{Lunghezza}(r)$

Superficie di rotazione generata da una curva cartesiana

Sia $z = h(x)$ una curva cartesiana, la superficie ottenuta ruotando h attorno all'asse z è una superficie cartesiana $z = h(\sqrt{x^2 + y^2})$ con $\sqrt{x^2 + y^2}$ la distanza del punto (x, y) rispetto all'asse z e con elemento d'area $\sqrt{1 + \left| \vec{\nabla} h(\sqrt{x^2 + y^2}) \right|^2}$ e area $\int_D \sqrt{1 + \left| \vec{\nabla} h(\sqrt{x^2 + y^2}) \right|^2} dx dy$

5.5 Integrale superficiale

Definizione

L'integrale di una funzione $\mu(x, y, z)$ su una superficie p è:

$$\int_p \mu d\sigma_p = \int_p \mu(x, y, z) d\sigma_p = \int_D \mu(p(u, v)) |p_u \times p_v| du dv$$

Invarianza dell'integrale superficiale

Date due superfici equivalenti p_1 e p_2 e f una funzione continua, allora $\int_{p_1} f d\sigma_{p_1} = \int_{p_2} f d\sigma_{p_2}$

6 Teoremi della divergenza e di Green - Stokes

6.1 Flusso di un campo

Dato un cammino r e un campo F continuo, il flusso di F attraverso r è:

$$\text{Flusso} := \int_r \det \begin{pmatrix} F_1 & dx \\ F_2 & dy \end{pmatrix}$$

$$\text{Flusso} := 1. \int_a^b \det \begin{pmatrix} F_1(r(t)) & r'_1(t) \\ F_2(r(t)) & r'_2(t) \end{pmatrix} dt = \int_a^b F_1(r(t)) r'_2(t) - F_2(r(t)) r'_1(t) dt$$

$$2. \int_r \det \begin{pmatrix} F_1(x, y) & dx \\ F_2(x, y) & dy \end{pmatrix} = \int_r F_1(x, y) dy - F_2(x, y) dx$$

$$3. \int_r \vec{F} \cdot \vec{N}_r ds, \quad \text{con } \vec{N}_{\text{normale a } p} = \frac{1}{|r'(t)|} \begin{pmatrix} r'_1(t) \\ -r'_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Dimostrazione punto 3:} \quad & \int_a^b F_1(r(t)) r'_2(t) - F_2(r(t)) r'_1(t) dt = \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot \begin{pmatrix} r'_1(t) \\ -r'_2(t) \end{pmatrix} dt = \\ & = \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot \frac{1}{|r'(t)|} \begin{pmatrix} r'_1(t) \\ -r'_2(t) \end{pmatrix} |r'(t)| dt = \int_a^b \vec{F}(r(t)) \cdot \vec{N}(r(t)) |r'(t)| dt = \\ & = \int_r \vec{F} \cdot \vec{N}_r ds \end{aligned}$$

6.2 Domini Stokiani

Definizione

Un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ si dice stokiano se:

- attorno ad ogni punto del bordo di D c'è una separazione tra interno ed esterno di D , ovvero non esistono punti isolati o cammini "all'interno" di D che non fanno parte del dominio.
- il bordo ∂D è l'unione di un numero finito di sostegni di curve chiuse regolari semplici r_1, \dots, r_n tali che il loro orientamento fa sì che il vettore normale \vec{N} punta sempre all'esterno del dominio; il bordo viene detto bordo positivamente orientato e si indica con $\partial^+ D$

Integrali su bordi positivamente orientati

Dato D aperto stokiano con $\partial^+ D$ bordo positivamente orientato e $F = (F_1, F_2)$ campo continuo, l'integrale di G lungo il bordo di D è:

$$\text{Circuitazione:} \quad \int_{\partial^+ D} F_1 dx + F_2 dy = \int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot \vec{T} ds := \int_{r_1} \vec{F} \cdot \vec{T} ds + \dots + \int_{r_n} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

Flusso di campi attraverso domini stokiani

Dato D aperto stokiano con $\partial^+ D$ bordo positivamente orientato e $F = (F_1, f_2)$ campo continuo, il flusso di F lungo il bordo di D è:

$$\text{Flusso:} \quad \int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot \vec{N} ds := \int_{\partial^+ D} F_1(x, y) dy - F_2(x, y) dx = \int_{\partial^+ D} \det \begin{pmatrix} F_1 & dx \\ F_2 & dy \end{pmatrix}$$

6.3 Divergenza

Definizione

Dato un campo $F = (F_1, F_2)$ di classe C^1 su aperto D , la divergenza di F è:

$$\operatorname{div} F(x, y) := \partial_x F_1(x, y) + \partial_y F_2(x, y) = \det \begin{pmatrix} \partial_x & -F_2 \\ \partial_y & F_1 \end{pmatrix}$$

Teorema della divergenza

Il flusso di un campo $F = (F_1, F_2)$ di classe C^1 su aperto stokiano D è:

$$\int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot \vec{N} \, ds = \int_D \operatorname{div} F \, dx \, dy$$

Interpretazione

I punti in cui $\operatorname{div} F(x, y) < 0$ sono punti di compressione, ovvero dove il flusso di entrata è maggiore di quello in uscita. Quelli in cui $\operatorname{div} F(x, y) > 0$ sono punti di espansione, dove il flusso in uscita è maggiore di quello in entrata. Infine dove $\operatorname{div} F(x, y) = 0$ il flusso in entrata è pari a quello in uscita.

Dimostrazione del Principio di Archimede

Ho un solido D immerso in un fluido con densità costante μ . Il fluido agisce con una forza data dalla formula $\mu g y \vec{N}$ sul bordo di D . Si vuole calcolare la risultante di tutte le forze agenti sul bordo di D . Il vettore \vec{N} è definito come segue $\vec{N} := (N_1, N_2)$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ D} \mu g y \vec{N} \, ds &:= \begin{pmatrix} \int_{\partial^+ D} \mu g y N_1 \, ds \\ \int_{\partial^+ D} \mu g y N_2 \, ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\partial^+ D} (\mu g y, 0) \cdot \vec{N} \, ds \\ \int_{\partial^+ D} (0, \mu g y) \cdot \vec{N} \, ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_D \operatorname{div}(\mu g y, 0) \, dx \, dy \\ \int_D \operatorname{div}(0, \mu g y) \, dx \, dy \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \int_D 0 \, dx \, dy \\ \int_D \mu g \, dx \, dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu g \operatorname{Area}(D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{Peso}(D) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si ottiene che la risultante delle forze agenti sul bordo è un vettore che ha direzione concorde all'asse y (è rivolto verticalmente) e modulo pari al peso dell'acqua che occuperebbe il "volume" di D .

6.4 Formula di Green

Definizione

Dato un campo $F = (F_1, F_2)$ di classe C^1 su aperto D , l'integrale di F lungo il bordo di D vale:

$$\int_{\partial^+ D} F_1(x, y) \, dx + F_2(x, y) \, dy = \int_D \partial_x F_2(x, y) - \partial_y F_1(x, y) \, dx \, dy = \int_D \operatorname{rot}(F) \cdot (0, 0, 1) \, dx \, dy$$

$$\text{Circuitazione: } \int_{\partial^+ D} F_1 \, dx + F_2 \, dy = \int_D \det \begin{pmatrix} \partial_x & F_1 \\ \partial_y & F_2 \end{pmatrix} \, dx \, dy$$

Calcolo delle aree con la formula di Green

Sia D un dominio stokiano, allora:

$$\operatorname{Area}(D) = \int_{\partial^+ D} x \, dy = \int_{\partial^+ D} -y \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} x \, dy - y \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} \det \begin{pmatrix} x & dx \\ y & dy \end{pmatrix}$$

7 Equazioni differenziali

7.1 Problema di Cauchy ed esistenza e unicità della soluzione

Soluzione di un'equazione differenziale

Data $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, una soluzione dell'equazione $y' = f(t, y)$ è una funzione $yI \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 tale che $(t, y(t)) \in D$ e $y'(t) = f(t, y(t))$. L'insieme delle soluzioni è detta soluzione generale dell'equazione differenziale.

Problema di Cauchy

Data un'equazione differenziale, il problema di Cauchy di un'equazione differenziale è:
$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

La soluzione generale che risolve anche il problema di Cauchy è detta soluzione del problema di Cauchy,

Esistenza e unicità della soluzione locale

Sia $D = I \times \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua, se valgono

- $\partial_y f(t, y)$ esiste continua
- $\partial_y f(t, y)$ limitata su ogni striscia $[\alpha', \beta'] \times \mathbb{R}$, con $[\alpha', \beta'] \subset I$

Allora per ogni $(t_0, y_0) \in D$ esiste ed è unica la soluzione definita su tutto I del problema di Cauchy.

7.2 Equazione differenziale a variabili separabili

Definizione

Un'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ è detta a variabili separabili se $f(t, y) = g(t)h(y)$

Soluzione caso $h(y) = 0$

Dato $\begin{cases} y' = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, la soluzione è $y(t) = y_0$

Soluzione caso generale

1. si isolano le y da una parte e le t dall'altra parte: $\frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t)$
2. si integra da entrambe le parti: $\int \frac{y'(t)}{h(y(t))} dt = \int \frac{1}{h(y)} dy := H(y)$ e $\int g(t) dt := G(t)$
3. si uniscono le soluzioni invertendo $H(y)$ per ottenere y : $y(t) = H^{-1}(G(t)) + C$
4. si determina C in base alla seconda condizione del sistema di Cauchy
5. si determina l'intervallo massimo di validità della soluzione

7.3 Equazioni lineari del primo ordine

Definizione

Un'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ è detta lineare del primo ordine se $f(t, y) = a(t)y + b(t)$

Soluzione

1. si osserva che $(y' - a(t)y)e^{-A(t)} = (ye^{-A(t)})'$ con $A' = a$
2. si sceglie una primitiva A tale che $A' = a$, si sposta $a(t)y$ dall'altra parte dell'uguaglianza e si moltiplica per $e^{-A(t)}$ in modo da avere $(y' - a(t)y)e^{-A(t)} = b(t)e^{-A(t)} \Rightarrow (ye^{-A(t)})' = b(t)e^{-A(t)}$
3. si integra da tutte e due le parti e divido per $e^{-A(t)}$ per ricondurre alla forma $y = \dots$
4. si determina C in base alla seconda condizione del sistema di Cauchy
5. si determina l'intervallo massimo di validità della soluzione

8 Combinatoria

8.1 Cardinalità

Notazione

La cardinalità di un'insieme X finito è il numero dei suoi elementi distinti e si indica con $|X|$ o $\#X$

Prioprietà

1. se A e B sono disgiunti, ovvero $A \cap B = \emptyset$, allora $|A \cup B| = |A| + |B|$
2. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
3. $|A \times B| = |A| \times |B|$
4. la cardinalità del complementare è $|A^c| = |X| - |A|$
5. principio di inclusione/esclusione:
 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$
6. principio di biiezione:
due insiemi hanno la stessa cardinalità se e solo se sono in corrispondenza biunivoca

8.2 Sequenze

Una k -sequenza di I_n è una k -upla ordinata (a_1, \dots, a_k) di elementi non necessariamente distinti di I_n , ovvero è un elemento del prodotto cartesiano $\underbrace{I_n \times \dots \times I_n}_{k \text{ volte}}$

Sequenze con ripetizione

Una sequenza è detta con ripetizione se non necessariamente tutti gli elementi sono distinti. Il numero delle k -sequenze con ripetizione di I_n è n^k

Sequenze senza ripetizione

Una sequenza è detta senza ripetizione gli elementi sono tutti distinti. Il numero delle k -sequenze senza ripetizione di I_n è $\frac{n!}{(n-k)!}$ per $k \leq n$.

8.3 Permutazioni

Le permutazioni sono le k -sequenze ottenute riordinando gli elementi di una qualunque k -sequenza di I_n .

Permutazioni di sequenze senza ripetizione

Il numero di permutazioni di k -sequenze senza ripetizione è $k!$. Si nota che esiste una corrispondenza biunivoca tra le k -sequenze senza ripetizione di I_k e le permutazioni di esse.

Permutazioni di sequenze con ripetizione - anagrammi

Il numero di permutazioni di k -sequenze con ripetizione è $\frac{k!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$ con m_1, m_2, \dots il numero di ripetizioni/molteplicità degli elementi della sequenza. Si nota che se $m_1 = m_2 = \dots = m_k = 1$, allora si ricade nel caso delle permutazioni senza ripetizione.

8.4 Spartizioni

Una n -spartizione è una n -upla ordinata C_1, \dots, C_n di sottoinsiemi a due a due disgiunti di I_k eventualmente anche vuoti tali che $C_1 \cup \dots \cup C_n = I_k$. Per la corrispondenza biiettiva tra spartizioni e sequenze con ripetizione illustrata sotto, il numero di n -spartizioni di I_k è pari al numero delle k -sequenze con ripetizione di I_n , ovvero è n^k .

Corrispondenza biunivoca tra spartizioni e sequenze con ripetizione

Si nota che esiste una corrispondenza biunivoca tra le n -spartizioni di I_k e le k -sequenze con ripetizione di I_n . Data una n -spartizione di I_k , è possibile indicare il sottoinsieme di ciascun elemento di I_k associandogli un numero di I_n , ottenendo così una k -sequenza con ripetizione di I_n .

8.5 Sottoinsiemi

Un k -sottoinsieme di I_n è un sottoinsieme formato da k elementi distinti di I_n . Il numero di k -sottoinsiemi di I_n si indica con $C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi, spartizioni e sequenze

Si osserva che esiste una corrispondenza biunivoca tra le 2-spartizioni di I_n e i sottoinsiemi di I_n . Infatti, data una spartizione $(C_1, C_2 = C_1^c)$ è possibile ottenere un sottoinsieme $A \subseteq I_n$ tale che $A = C_1$. Per cui il numero di sottoinsiemi di I_n è pari al numero delle 2-spartizioni di I_n . Siccome le 2-spartizioni di I_n sono in corrispondenza biunivoca con le n -sequenze di I_2 , allora:

$$|\text{sottoinsiemi di } I_n| = |2\text{-spartizioni di } I_n| = |n\text{-sequenze di } I_2| = n^2$$

Corrispondenza tra i sottoinsiemi e le sequenze senza ripetizione

Si osserva che ad ogni k -sottoinsieme di I_n corrispondono $k!$ k -sequenze senza ripetizione di I_n . Per cui

8.6 Principio di moltiplicazione

Supponiamo che gli elementi di un insieme X possano essere individuati con una procedura di n fasi dove:

1. la prima fase ha m_1 esiti possibili
2. la seconda fase ha m_2 esiti possibili

... ..

- n. la n -esima fase ha m_n esiti possibili

! dato un elemento è possibile determinare univocamente la fase in cui è estratto

Allora $|X| = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$

8.7 Principio di divisione

Siano X, Y due insiemi finiti, se ad ogni elemento y di Y sono associati m elementi x_1, \dots, x_m di X , allora vale che $|X| = |Y| \times m$.

Fattoriale e formula di Stirling

$$n! = \begin{cases} n \times (n-1)! & \text{per } n \geq 1 \\ 1 & \text{per } n = 0 \end{cases} \quad n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$1. \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$$

$$2. \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$3. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$4. \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

$$5. (x+y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$$

9 Probabilità

9.1 Definizione assiomatica di probabilità

Definizione

La probabilità su uno spazio campionario Ω è la funzione

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1], \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

tale che:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$
- dati $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ una famiglia numerabile di insiemi a due a due disgiunti, allora vale
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (P(A_1) + \dots + P(A_n))$$

Proprietà

1. $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$
- 3.1 se A e B sono disgiunti $A \cap B = \emptyset$, allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 3.2 se A_1, \dots, A_n a due a due disgiunti, $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$
- 4.1 se $E \subseteq F \subseteq \Omega$, allora $P(E) \leq P(F)$
- 4.2 se $E \subseteq F \subseteq \Omega$, allora $P(F \setminus E) = P(F) - P(E)$

Principio di inclusione / esclusione

1. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
2. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{i=1}^3 P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} P(A_i \cap A_j) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
3. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum_{i=1}^4 P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$

9.2 Probabilità uniforme

Definizione

La probabilità è uniforme su Ω se per ogni elemento ω di Ω si ha:

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Considerazioni per la risoluzione di esercizi

In una estrazione senza reimmissione, la probabilità di estrarre una pallina alla prima estrazione è uguale alla probabilità di estrarre la medesima pallina all'ultima estrazione.

9.3 Probabilità su insiemi finiti e infiniti numerabili e non numerabili

Probabilità su un insieme finito

Dato un insieme finito $\Omega = \{x_1, \dots, x_m\}$ e definite $p_1, \dots, p_m \geq 0$ tali che $p_1 + \dots + p_m \geq 0$ e $P(x_i) = p_i \quad \forall i \in [1, m]$, la probabilità su un insieme $A \subseteq \Omega$ è:

$$P(A) = \sum_{k: x_k \in A} p_k$$

Probabilità in un insieme infinito numerabile

Dato un insieme numerabile $\Omega = \{x_1, x_2, \dots\}$ e definite $p_1, p_2 \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$ e $P(x_i) = p_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$ la probabilità su un insieme $A \subseteq \Omega$ è:

$$P(A) = \sum_{k: x_k \in A} p_k$$

Osservazione: un insieme è numerabile può essere messo in corrispondenza biunivoca con \mathbb{N}

Probabilità in un insieme infinito non numerabile - intervalli/aree

In un insieme infinito non numerabile, la probabilità di un singolo evento è $P(x_i) = 0$, la probabilità su un intervallo $[a, b]$ è:

$$P([a, b]) = P(]a, b]) = b - a$$

9.4 Continuità della probabilità

Probabilità di unione crescente

Siano $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ successione di sottoinsiemi di uno spazio campionario Ω , allora:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} P(E_i)$$

Probabilità di unione decrescente

Siano $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ successione di sottoinsiemi di uno spazio campionario Ω , allora:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} P(E_i)$$

Complementare di intersezione e unione

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^c \qquad \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^c$$

9.5 Probabilità condizionata e indipendenza di eventi

Definizione

La probabilità condizionata di E ad F , con $E, F \subseteq \Omega$ e $P(F) \neq 0$ è:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

Si osserva che se P è uniforme su Ω , allora lo è anche $P(\cdot|F)$ su F

Probabilità di una intersezione

$$P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F) = P(F|E) \cdot P(E)$$

Formula del prodotto

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

Formula di inversione

$$P(F|E) = \frac{P(E|F) \cdot P(F)}{P(E)}$$

Formula della partizione o della probabilità totale

Sia $F_1, F_2 \dots F_n$ una n -partizione di Ω :

$$P(E) = P(E|F_1) \cdot P(F_1) + P(E|F_2) \cdot P(F_2) + \dots + P(E|F_n) \cdot P(F_n)$$

Formula di Bayes

Sia $F_1, F_2 \dots F_n$ una n -partizione di Ω :

$$P(F_1|E) = \frac{P(E|F_1) \cdot P(F_1)}{P(E|F_1) \cdot P(F_1) + P(E|F_2) \cdot P(F_2) + \dots + P(E|F_n) \cdot P(F_n)}$$

Indipendenza di due eventi

$$A \text{ e } B \text{ indipendenti} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B)$$

Indipendenza di una famiglia di eventi

Indipendenza di eventi a due a due non implica l'indipendenza di tutti gli eventi:

$$P(A|B) = P(A), P(B|C) = P(B), P(C|A) = P(C) \not\Leftrightarrow A, B, C \text{ eventi indipendenti}$$

$$(A_1, \dots, A_n) \text{ indipendenti} \Leftrightarrow P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$$

Indipendenza condizionata

$$A|F \text{ e } B|F \text{ indipendenti} \Leftrightarrow P(AB|F) = P(A|F) \cdot P(B|F)$$

9.6 Variabili aleatorie discrete

Definizione

Una variabile aleatoria definita su uno spazio campionario Ω è una funzione $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Una variabile aleatoria è detta discreta se $\text{Im}(X)$ è un insieme finito numerabile $\{x_1, x_2, \dots\}$

Denistà di una variabile aleatoria discreta

La densità discreta di una variabile aleatoria discreta è una funzione

$$p_x : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto P(X = x)$$

Proprietà della densità discreta

- $\sum_k p_x(x_k) = 1$
- $P(X \in A) = \sum_{k: x_k \in A} p_x(x_k)$

Distribuzione di una variabile aleatoria

La distribuzione discreta di una variabile aleatoria discreta è una funzione

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto P(X \leq x)$$

Proprietà della distribuzione discreta

- F_X è crescente
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- F_X è continua a destra: $\lim_{x \rightarrow a^+} F_X(x) = F_X(a)$
- $P(X < a) = F_X(a^-) := \lim_{x \rightarrow a^-} F_X(x)$
- $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

Osservazione: due variabili aleatorie X e Y con stesse distribuzioni $F_X = F_Y$ assumono i valori con uguali probabilità: $P(X \in A) = P(Y \in A)$

9.7 Variabile di Bernoulli

Definizione

La variabile di Bernoulli con parametro p si indica con $X \sim Be(p)$ e possiede le seguenti proprietà:

- $\text{Im}(X) = \{0, 1\}$
- $p_x(1) = p, \quad p_x(0) = 1 - p$

9.8 Variabile binomiale

Definizione

La variabile binomiale con parametri n e p si indica con $X \sim B(n, p)$ e possiede le seguenti proprietà:

- $\text{Im}(X) = \{0, 1, \dots, n\}$
- $p_x(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Binomiale come approssimazione di Bernoulli indipendenti

Siano $X_1, X_2, \dots, X_n \sim Be(p)$ Bernoulli indipendenti di parametro p e $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, allora $X \sim B(n, p)$ è una binomiale di parametri n, p

9.9 Variabile geometrica

Definizione

La variabile geometrica con parametro p si indica con $X \sim Ge(p)$ e possiede le seguenti proprietà:

- $\text{Im}(X) = \mathbb{N}_{\geq 1}$
- $p_x(1) = p (1 - p)^{k-1}$

Assenza di memoria di una variabile geometrica

$$P(X > k + m \mid X > k) = P(X > m)$$

9.10 Variabile di Poisson

Definizione

La variabile di Poisson con parametro λ si indica con $X \sim Po(\lambda)$ e possiede le seguenti proprietà:

- $\text{Im}(X) = \mathbb{N}$
- $p_x(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Poisson come approssimazione di una binomiale

Siano $X_n \sim B(n, \frac{\lambda}{n})$ e $Y \sim Po(\lambda)$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = P(Y = k)$

In pratica $X \sim B(n, p)$ si può approssimare con $Y \sim Po(\lambda)$ se $np \leq 10$, $n \geq 20$, $p \leq 0.05$

Somme di Poisson indipendenti

Siano $X \sim Po(\lambda)$ e $Y \sim Po(\mu)$ indipendenti, allora $X + Y \sim Po(\lambda + \mu)$

Processo di Poisson

Un processo di Poisson di intensità λ è una famiglia di variabili aleatorie $\{X_t : t > 0\}$ con:

- $X_t \sim Po(\lambda t)$
- $X_{t+\tau} - X_t \sim Po(\lambda \tau)$
- $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sono indipendenti

9.11 Variabile aleatoria uniforme

Definizione

La variabile uniforme definita su un intervallo $[a, b]$ si indica con $X \sim U([a, b])$ e possiede le seguenti proprietà:

- $P(X \in [c, d]) = \frac{d - c}{b - a}$
- $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} & \text{per } x \in]a, b[\\ 0 & \text{per } x < a \vee x > b \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ \frac{x - a}{b - a} & \text{per } x \in [a, b[\\ 1 & \text{per } x \geq b \end{cases}$

9.12 Variabile aleatoria esponenziale

Definizione

La variabile esponenziale con parametro λ si indica con $X \sim Exp(\lambda)$ e possiede le seguenti proprietà:

- $\text{Im}(X) = \mathbb{N}$
- $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$
- $f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$

Variabile esponenziale e processo di Poisson

Dato un processo di Poisson di intensità λ si hanno le seguenti caratteristiche:

- $T :=$ istante nel quale si verifica il primo fenomeno
 - $X_t \sim Po(\lambda t)$ numero di fenomeni verificati fino all'istante t
1. se $t < 0$ allora $F_T(t) = 0$
 2. se $t \geq 0$ allora $\{T > t\} = \{X_t = 0\}$, per cui $P(T > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$

Assenza di memoria della esponenziale

$$P(T > t + s \mid t > s) = P(T > t)$$

9.13 Variabile normale o Gaussiana

Definizione variabile normale standard

La variabile normale standard Z si indica con $Z \sim N(0, 1)$ e possiede le seguenti proprietà:

- $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x) dx = 1$
- $\Phi(x) := F_Z(x)$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- $E[Z] = 0$, $\text{Var}[Z] = 1$

Definizione variabile normale o gaussiana

La variabile normale o gaussiana X si indica con $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e possiede le seguenti proprietà:

- $X := \mu + \sigma Z$ $Z \sim N(0, 1)$
- $E[Z] = \mu$, $\text{Var}[Z] = \sigma^2$
- $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$

Per calcolare la distribuzione di $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ci si riconduce alla distribuzione $\Phi(x)$ della normale standard Z attraverso la prima proprietà $X = \mu + \sigma Z$: $F_X(x) = P(\mu + \sigma Z \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

Variabili normalizzate

Una variabile aleatoria X si dice normalizzata se $E[X] = 0$ e $\text{Var}[X] = 1$. Per normalizzare una variabile non normalizzata si deve calcolare:

$$\bar{X} := \frac{X - E[X]}{\sigma_X}$$

Una variabile normalizzata non coincide necessariamente con una variabile normale: vedere teorema del limite centrale per correlazione tra variabili indipendenti identicamente distribuite e variabili normali.

9.14 Valore atteso varianza e covarianza di variabili discrete

Valore atteso

Sia X una variabile aleatoria discreta, il valore atteso (o media) di X è:

$$E[X] := \sum_{i=1}^m x_i p_x(x_i) = \sum_{i=1}^m x_i P(X = x_i) = \sum_{x \in \text{Im}(X)} x P(X = x)$$

Il valore atteso si dice finito se $\sum_{x \in \text{Im}(X)} |x_i| p_x(x_i) < +\infty$

Algebra di valori attesi

- combinazioni lineari: $E[aX + b] := aE[x] + b$
- somma di variabili aleatorie: $E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]$
- composte di una variabile: $E[g \circ X] := E[g(x)] = \sum_{x \in \text{Im}(X)} g(x) p_x(x)$
- composte di più variabili: $E[g(X, Y)] := \sum_{x \in \text{Im}(X)} g(x, y) P(X = x, Y = y)$
- prodotto di variabili: $E[X \cdot Y] = \sum_{x \in \text{Im}(X)} xy P(X = x, Y = y)$
- prodotto di v. indipendenti: $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

Valori attesi da ricordare

- $X \sim Be(p) \rightarrow E[X] = p$
- $X \sim B(n, p) \rightarrow E[X] = np$
- $X \sim Ge(p) \rightarrow E[X] = \frac{1}{p}$
- $X \sim Po(\lambda) \rightarrow E[X] = \lambda$

Varianza e deviazione standard

Sia X una variabile aleatoria discreta, la varianza di X è:

$$\text{Var}[X] := E[(X - \mu_x)^2] = E[X^2] - \mu_x^2 \quad \mu_x := E[X]$$

Sia X una variabile aleatoria discreta, la deviazione standard di X è:

$$\sigma_x := \sqrt{\text{Var}[X]}$$

Algebra della varianza

- combinazioni lineari: $\text{Var}[aX + b] := a^2 \text{Var}[x]$
- variabili indipendenti: $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

Varianze da ricordare

- $X \sim \text{costante} \rightarrow \text{Var}[X] = 0$
- $X \sim Be(p) \rightarrow \text{Var}[X] = p(1 - p)$
- $X \sim B(n, p) \rightarrow \text{Var}[X] = np(1 - p)$
- $X \sim Ge(p) \rightarrow \text{Var}[X] = \frac{1 - p}{p^2}$
- $X \sim Po(\lambda) \rightarrow \text{Var}[X] = \lambda$

Covarianza

Sia X una variabile aleatoria discreta, la covarianza di X è:

$$\text{Cov}[X, Y] := E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = E[XY] - \mu_x \mu_y, \quad \mu_x := E[X] \quad \mu_y := E[Y]$$

Proprietà della covarianza

- $\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X]$
- $\text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X]$
- $\text{Cov}[X, Y] = 0$ se X e Y sono indipendenti

9.15 Valore atteso varianza e covarianza di variabili continue

Valore atteso

Sia X una variabile aleatoria continua, il valore atteso (o media) di X è:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Algebra di valori attesi

- se $X \leq Y$, allora $E[X] \leq E[Y]$
- combinazioni lineari: $E[aX + b] := aE[x] + b$
- combinazioni lineari: $E[aX + bY] := aE[x] + bE[Y]$
- composte di una variabile: $E[g \circ X] := E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x) dx$

Valori attesi da ricordare

- $X \sim U([a, b]) \rightarrow E[X] = \frac{a+b}{2}$
- $X \sim \text{Exp}(\lambda) \rightarrow E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $Z \sim N(0, 1) \rightarrow E[X] = 0$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow E[X] = \mu$

Varianza

Sia X una variabile aleatoria continua, la varianza di X è:

$$\text{Var}[X] := E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - E[X]^2$$

Sia X una variabile aleatoria continua, la deviazione standard di X è:

$$\sigma_x := \sqrt{\text{Var}[X]}$$

Algebra della varianza

- combinazioni lineari: $\text{Var}[aX + b] := a^2 \text{Var}[x]$
- variabili indipendenti: $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

Varianze da ricordare

- $X \sim U([a, b]) \rightarrow \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $X \sim \text{Exp}(\lambda) \rightarrow \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$
- $Z \sim N(0, 1) \rightarrow \text{Var}[X] = 1$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow \text{Var}[X] = \sigma^2$

9.16 Variabili identicamente distribuite

Definizione

Due variabili si dicono identicamente distribuite se hanno la stessa funzione di distribuzione $F_X = F_Y$ e di conseguenza hanno $E[X] = E[Y]$ e $\text{Var}[X] = \text{Var}[Y]$.

Composizione di variabili indipendenti identicamente distribuite

Siano X_1, X_2, \dots, X_n famiglia numerabile di variabili indipendenti identicamente distribuite con $E[X_i] = \mu$ e $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$, allora si ha che:

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = n\mu \quad \text{Var}[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = n\sigma^2$$

Standardizzazione di variabili indipendenti identicamente distribuite

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

9.17 Teorema del limite centrale

Enunciato

Siano X_1, X_2, \dots, X_n famiglia numerabile di variabili indipendenti identicamente distribuite con $E[X_i] = \mu$ e $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$, allora si ha che:

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq a\right) \rightarrow \Phi(a) \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Ovvero è possibile approssimare la somma di variabili indipendenti identicamente distribuite con una variabile normale con stesso valore atteso e stessa varianza:

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq a) \approx P(n\mu + \sqrt{n\sigma^2}Z \leq a) \quad n \rightarrow +\infty \quad Z \sim N(0, 1)$$

Approssimazione della binomiale con una normale

$$P(B(n, p) \leq a) \approx P(N(np, np(1-p)) \leq a) = P(np + \sqrt{np(1-p)}Z \leq a) \quad n \rightarrow +\infty$$

Come valore di n sufficientemente grande si intende $1/n \ll p \ll 1 - 1/n$

Approssimazione della Poisson con una normale

$$P(Po(\lambda) \leq a) \approx P(N(\lambda, \lambda) \leq a) = P(\lambda + \sqrt{\lambda}Z \leq a) \quad n \rightarrow +\infty$$

Come valore di n sufficientemente grande si intende $1/n \ll p \ll 1 - 1/n$

9.18 Variabili congiunte continue

Definizione

Una variabile congiunta continua è una coppia di variabili aleatorie $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ tali per cui esiste la densità congiunta continua

$$f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty[\quad P((X, Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy$$

Si osserva che $f_{X,Y} \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy = 1$

Variabile congiunta uniforme su un insieme

Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ con area finita, la variabile uniforme su C si indica con $(X, Y) \sim U(C)$:

$$f_{X,Y}(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{\text{Area}(C)} & \text{per } (x, y) \in C \\ 0 & \text{per } (x, y) \notin C \end{cases} \quad P((x, y) \in A) := \int_A \frac{1}{\text{Area}(C)} \, dx \, dy = \frac{\text{Area}(A)}{\text{Area}(C)}$$

Relazione tra densità e distribuzione

$$f_{X,Y}(x, y) = \partial_{x,y}^2 F_{X,Y}(x, y)$$

densità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) \, dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) \, dx$$

Valore atteso

$$E[g(X, Y)] = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \quad E[XY] = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} xy f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy$$

Covarianza

$$\text{Cov}[X, Y] := E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[XY] - \mu_X \mu_Y$$

Varianza di una somma

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] &= \sum_{i,j} \text{Cov}[X_i, X_j] \\ &= \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + \cdots + \text{Var}[X_n] + \sum_{i \neq j} \text{Cov}[X_i, X_j] \\ &= \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + \cdots + \text{Var}[X_n] + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}[X_i, X_j] \end{aligned}$$

Indipendenza di variabili congiunte continue

Siano X, Y continue indipendenti, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$P((x, y) \in A \times B) = \int_{A \times B} f_X(x) f_Y(y) \, dx \, dy = \left(\int_A f_X(x) \, dx \right) \cdot \left(\int_B f_Y(y) \, dy \right) = P(x \in A) \cdot P(y \in B)$$

Criterio dell'indipendenza

Quando due variabili congiunte (X, Y) sono indipendenti, l'insieme dove $f_{X,Y} \neq 0$ è un prodotto:

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) \neq 0\} \cdot \{y \in \mathbb{R} : f_Y(y) \neq 0\}$$

Non vale il viceversa: se l'insieme dove $f_{X,Y} \neq 0$ è un prodotto, non è detto che (X, Y) siano indipendenti.

Varianza di somme indipendenti

Siano (X, Y) indipendenti

$$\text{Cov}[X, Y] = 0 \quad \text{Var}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + \cdots + \text{Var}[X_n]$$

9.19 Legge dei grandi numeri

Legge debole dei grandi numeri

Siano X_1, X_2, \dots una famiglia numerabile di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con $E[X_i] = \mu$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu \right| < \varepsilon \right) = 1$$

Legge forte dei grandi numeri

Siano X_1, X_2, \dots una famiglia numerabile di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con $E[X_i] = \mu$, allora:

$$P \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mu \right) = 1$$