Appunti di Fisica 1

Giacomo Simonetto

Secondo semetre 2023-24

Sommario

Appunti del corso di Fisica 1 - (Meccanica e termodinamica) della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

Indice

1 Introduzione

1.1 Interazioni fondamentali

Le interazioni (o forze) fondamentali sono:

1. forza gravitazionale: scoperta per prima nel 1600 circa da Galileo
2. forza elettromagnetica: scoperta nel 1800
3. forza debole: legata ai costituenti degli atomi (radioattività)
4. forza forte: legata ai costituenti degli atomi (quark)

Si sta cercando un legame tra la forza elettromagnetica e quella debole (forza elettrodebole) e una teoria che lega le forze elettromagnetica, debole e forte (teoria delle forze unificate). La forza gravitazione è considerata particolare in quanto:

- è molto meno intensa delle altre
- ha solo "carica" positiva (non esiste massa negativa)
- spazio e forza gravitazionale non possono essere sepatati
- non si è ancora riusciti a comprenderla quantisticamente

2 Il punto materiale

2.1 Introduzione al punto materiale

È una finzione matematica in quanto non esiste nella realtà, ma serve come approssimazione. Non ha estensione, ma ha una massa m ed è possibile determinarne la posizione. In un sistema di riferimento (cartesiano con 3 assi), la posizione è data dal vettore $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$.

2.2 Grandezze elementari

massa: m, l'unità di misura è $[m] = kg$
posizione: $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, con unità di misura $[x_0] = [y_0] = [z_0] = m$
tempo: t, con unità di misura $[t] = s$

2.3 Punto materiale in movimento - cinematica

Posizione

La posizione nello spazio di un punto sono le coordinate del punto un sistema di riferimeno cartesiano di 3 assi.

$$\vec{r}(t) = (x_0(t), y_0(t), z_0(t)) \qquad [x_0] = [y_0] = [z_0] = m$$

Velocità

La velocità è lo spazio percorso in un tempo piccolo.

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\,\vec{r}(t) \qquad [v] = \frac{m}{s}$$

Per ottenere la posizione dalla velocità:

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \int_{t0}^{t1} \vec{v}(\tau)\,d\tau$$

Accelerazione

L'accelerazione è la variazione della velocità nel tempo.

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\,\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dx^2}\,\vec{r}(t) \qquad [a] = \frac{m}{s^2}$$

Per ottenere la velocità dall'accelerazione:

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int_{t0}^{t1} \vec{a}(\tau)\,d\tau$$

Per ottenere la posizione dall'accelerazione:

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \int_{t0}^{t1} \left(\vec{v_0}(\tau) + \int_{t0}^{t1} \vec{a}(\tau)\,d\tau\right) d\tau \quad \left(= \vec{r_0} + \vec{v_0}(t - t_0) + \iint_{t_0}^{t_1} \vec{a}(\tau)\,d\tau^2\right)$$

Moto uniformemente accelerato

Moto con accelerazione costante, le leggi orarie sono:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{a}(t - t_0) \end{cases}$$

Per convenzione si sceglie $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{a}t \end{cases}$$

Si osserva che per trovare $\vec{r}(t)$ a partire dall'accelerazione è necessario conoscere i due dati iniziali $\vec{r_0}$ (posizione) e $\vec{v_0}$ (velocità), in quanto sono stati fatti due integrali nel calcolo.

Ogni vettore $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ può essere scomposto nelle tre componenti x, y, z degli assi cartesiani ottenendo tre equazioni del moto, una per ogni asse.

Esempi di applicazioni:

- caduta di un grave (da fermo e con moto orizzontale)
- moto di due automobili sulla stessa retta
- moto di un proiettile (con angolo inziale θ rispetto al suolo)

2.4 Moto armonico semplice in una dimensione

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos(\omega(t - t_0)) \qquad \text{con } -\omega t_0 = \varphi_0$$
$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

- A ampiezza del moto, $[A] = m$
- ω velocità angolare, $[\omega] = \frac{rad}{s}$
- φ_0 sfasamento iniziale, $[\varphi_0] = rad$
- si osserva che $[A] = m$, $[A\omega] = \frac{m}{s}$, $\left[A\omega^2\right] = \frac{m}{s^2}$

2.5 Moto circolare uniforme sul piano xy

$$\vec{r}(t) = (A\cos(\omega t + \varphi_0),\ A\sin(\omega t + \varphi_0),\ 0)$$
$$\vec{v}(t) = (-A\omega\sin(\omega t + \varphi_0),\ A\omega\cos(\omega t + \varphi_0),\ 0)$$
$$\vec{a}(t) = \left(-A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0),\ -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0),\ 0\right) = -\omega^2\vec{r}(t)$$

- il vettore velocità è tangente alla circonferenza e perpendicolare al raggio
- il vettore accelerazione è perpendicolare a $\vec{v}$, opposto a $\vec{r}$ e diretto verso il centro
- l'accelerazione del moto è chiamata accelerazione centripeta

2.6 Moto vario

- la posizione è data da $\vec{r}(t)$
- la velocità è data da $\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dfrac{d}{dt}\,\vec{r}(t)$
- l'accelerazione è data da $\vec{a}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \dfrac{d}{dt}\,\vec{v}(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}\,\vec{r}(t)$
- la velocità è tangente alla traiettoria, ma non è detto che sia perpendicolare al vettore $\vec{r}$

3 Funzioni goniometriche (ripasso e proprietà)

3.1 Sviluppi di Taylor

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + o(\theta^5) \qquad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + o(\theta^4)$$

- le formule valgono solo se θ è un numero puro (non posso ad esempio sommare m e m^2).
- $[\theta] = rad$, si misura in radianti (numero puro), un radiante è il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza che sottende un angolo θ e il raggio della circonferenza.

3.2 Formule di Eulero

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

- le formule valgono solo se $\text{Im}(\sin\theta) = \text{Im}(\cos\theta) = 0$ per $\theta \in \mathbb{Q}$:
  ricordando che $\text{Re}(z) = \dfrac{z + z^*}{2}$, $\text{Im}(z) = \dfrac{z - z^*}{2i}$, si ha:
  $\text{Im}(\cos\theta) = \dfrac{1}{2i} \cdot \left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} - \dfrac{e^{-i\theta} + e^{i\theta}}{2} \right) = \dfrac{0}{2i} = 0$
  $\text{Im}(\sin\theta) = \dfrac{1}{2i} \cdot \left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} - \dfrac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{2i} \right) = \dfrac{0}{2i} = 0$
- si osserva che $|\cos\theta| \leq 1$, $|\sin\theta| \leq 1$:
  $|\cos\theta| = \left| \dfrac{e^{i\theta)} + e^{-i\theta}}{2} \right| = \dfrac{1}{2} \left| e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right| \leq \dfrac{1}{2} \left| 1 \cdot e^{i\theta} \right| + \left| 1 \cdot e^{-i\theta} \right| = \dfrac{1}{2}(1 + 1) = 1$
  $|\sin\theta| = \ldots$

3.3 Derivate

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta \qquad \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\sin\theta = -\sin\theta \qquad \frac{d^2}{d\theta^2}\cos\theta = -\cos\theta$$

4 Vettori e versori

4.1 Definizione

Un vettore è un "segmento orientato", cioè definito da 3 proprietà: lunghezza, direzione e verso. Un vettore si indica con lettere minuscole come $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... Questa definizione ci permette di essere indipendenti dal sistema di coordinate di riferimento.

La lungheza di un vettore è chiamata norma o modulo e si indica $||\vec{a}||$

4.2 Prodotto per uno scalare

Dati $\vec{a}$ vettore e λ scalare (numero reale), allora $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ è un vettore tale che:

- se $\lambda > 0$, $\vec{b}$ ha stessa direzione e verso di $\vec{a}$, con lunghezza λ volte quella di $\vec{a}$
- se $\lambda < 0$, $\vec{b}$ ha stessa direzione e verso opposto di $\vec{a}$, con lunghezza $-\lambda$ volte quella di $\vec{a}$
- se $\lambda = 0$, $\vec{b}$ è vettore nullo $\vec{0}$

4.3 Somma di vettori

Dati due vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ la loro somma è un vettore $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ definita dalla regola del parallelogramma. La somma ha le seguenti proprietà:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
- $\vec{a}(\lambda_1 + \lambda_2) = \vec{a}\lambda_1 + \vec{a}\lambda_2$
- $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$
- $\vec{a} - \vec{a} = \vec{a}(1 - 1) = \vec{0}$

4.4 Versori

- i versori sono vettori unitari (con lunghezza 1).
- sono definiti come $\vec{u_a} = \frac{1}{||\vec{a}||} \cdot \vec{a}$.
- una terna di assi è definita da 3 versori $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$.
- dato un vettore $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ si può esprimere come $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z$

4.5 Prodotto scalare

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che formano un angolo θ misurato in senso antiorario, il prodotto scalare tra due vettori è uno scalare definito come $\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \left|\left|\vec{b}\right|\right| \cos\theta$ con le seguenti proprietà:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$
- $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

Prodotto scalare tra versori

- $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1$
- $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_x = 0$

Prodotto scalare per componenti

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z) \cdot (b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = ||\vec{a}||^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad \Rightarrow \quad ||\vec{a}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

4.6 Prodotto vettore

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ con angolo θ misurato in senso antiorario, il prodotto vettore tra due vettori è un vettore definito come $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = ||\vec{a}|| \left|\left|\vec{b}\right|\right| \sin\theta \, \vec{u_c}$ con $\vec{u_c}$ versore perpendicolare al piano di $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

- se due vettori sono paralleli, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- l'orientamento di $\vec{u_c}$ è una scelta convenzionale secondo la "regola della mano destra"
- $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Prodotto vettore tra versori

- $\vec{u}_x \times \vec{u}_x = \vec{u}_y \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \times \vec{u}_z = 0$
- $\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z$
- $\vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x$
- $\vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y$

4.7 Derivata di vettore

- Dato un vettore $\vec{a}(t) = (a_x(t)\, \vec{u}_x + a_y(t)\, \vec{u}_y + a_z(t)\, \vec{u}_z)$, la sua derivata è definita come $\frac{d}{dt}\, \vec{a}(t) = \left(\frac{d}{dt}\, a_x(t)\, \vec{u}_x + \frac{d}{dt}\, a_y(t)\, \vec{u}_y + \frac{d}{dt}\, a_z(t)\, \vec{u}_z\right)$
- Dato un versore $\vec{u}(t)$, la sua derivata è definita come $\frac{d}{dt}\, \vec{u}(t) = \frac{d\,\theta(t)}{dt}\, \vec{u_\perp}(t)$ con $\vec{u_\perp}(t)$ versore perpendicolare a $\vec{u}(t)$ e con θ angolo spazzato da $\vec{u}(t)$ in Δt piccolo.

Sia $\vec{r}(t)$ vettore qualsiasi, la sua derivata è definita come

$$\frac{d}{dt}\, \vec{r}(t) = \frac{d\, ||\vec{r}(t)||}{dt}\, \vec{u_r}(t) + ||\vec{r}(t)||\, \frac{d\,\theta(t)}{dt}\, \vec{u_\perp}(t)$$

5 Dinamica del punto materiale

5.1 Prima legge della dinamica - principio di inerzia

Se su un corpo non agisce alcuna forza, allora questo si muove a velocità costante $\vec{v}$.

5.2 Seconda legge della dinamica - legge di Newton

Definita $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantità di moto, ovvero la variazione della quantità di moto rispetto al tempo è pari alla risultante di tutte le forze che agiscono sul corpo:

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt}\,\vec{p}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t)$$

- la quantità di moto ha unità di misura $[\vec{p}] = kg \cdot \dfrac{m}{s}$
- la forza ha come unità di misura $\left[\vec{F}\right] = kg \cdot \dfrac{m}{s^2} = N$
- se $\vec{F} = \vec{0}$ allora $m\,\vec{a} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{v}$ costante
- la massa rappresenta un ostacolo al moto (più precisamente alla variazione della velocità), per questo viene chiamata massa inerziale.
- la forza si ricava sperimentalmente e in generale ha la forma $\vec{F}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$, ovvero può dipendere dalla posizione, dalla velocità o dal tempo

5.3 Terza legge della dinamica - principio di azione-reazione

Se un corpo A esercita una forza $\vec{F}_{AB}$ su un corpo B, allora B esercita una forza $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ su A

5.4 Sistemi di riferimento

Dati due sistemi di riferimento O e O', le equazioni del moto di un punto P rispetto a O' sono:

- $\vec{r'}(t) = \vec{r}(t) + \vec{r}_{OO'}(t)$
- $\vec{v'}(t) = \vec{v}(t) + \frac{d}{dt}\,\vec{r}_{OO'}(t)$
- $\vec{a'}(t) = \vec{a}(t) + \frac{d^2}{dt^2}\,\vec{r}_{OO'}(t)$

Sistemi di riferimento inerziali

Due sistemi di riferimento inerziali sono tali se si muovono con velocità costante (con accelerazione nulla) uno rispetto all'altro. Dati due sistemi di riferimento inerziali O e O' tali per cui in O vale $\vec{F} = m\,\vec{a}$, in O' vale $\vec{F'} = m\,\vec{a'}$ allora vale anche $\vec{F} = \vec{F'}$ in quanto $\vec{a} = \vec{a'}$, cioè $\dfrac{d^2}{dt^2}\,\vec{r}_{OO'}(t) = 0$.

5.5 Forza gravitazionale universale

La forza gravitazionale tra un corpo A di massa m_A e un corpo B di massa m_B vale:

$$\vec{F}_{AB} = -G_N \frac{m_A \cdot m_B}{||\vec{r}_{AB}||^2} \, \vec{u}_{AB}$$

- il segno $-$ indica che è attrattiva
- $||\vec{r}_{AB}||$ è la distanza tra i due corpi
- $G_N \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \, \dfrac{N \cdot m^2}{kg^2}$ è la costante di gravitazione universale di Newton

Massa gravitazionale

Le masse nella formula vengono dette masse gravitazionali in quanto sono considerate respondabili del moto di attrazione gravitazionale. Nel teorema della relatività generale verrà dimostrato che la massa inerziale e gravitazionale corrispondono.

Accelerazione gravitazionale e forza peso

Per il corpo A vale $||\vec{a}_A|| = -G_N \dfrac{m_B}{||\vec{r}_{AB}||^2}$

- l'accelerazione gravitazionale dipende solo dalla massa del corpo che attrae
- sulla superficie terrestre vale $g \approx 9.8 \, \dfrac{m}{s^2}$
- la forza di attrazione che esercita la Terra su un oggetto di massa m è detta forza peso $\vec{F}_p = m \, g \, \vec{u}_z$.

5.6 Forza elastica

La forza elastica esercita da una molla su un corpo di massa m è definita come:

$$\vec{F}_{el} = -k \, \Delta x \, \vec{u}_x$$

- definendo $x = 0$ il punto in cui la molla è a riposo per cui $\vec{F}_{el} = 0$, si ha $\vec{F}_{el} = -k \, x \, \vec{u}_x$
- è una forza di richiamo: tende a riportare la molla alla posizione di riposo, infatti agisce in verso opposto al vettore posizione per la presenza del segno $-$
- è una forza universale: non fa parte delle forze elementari, ma è la forma di tutte le forze di richiamo (localmente a $x = 0$)

5.7 Forza di reazione vincolare

La forza di reazoine vincolare è esercitata da una superfice su un corpo appoggiato ad essa. È perpendicolare alla superficie e opposta alla somma delle forze entranti, definita come:

$$\vec{F}_\perp = \left|\left|\vec{F}_{TOT,\perp}\right|\right| \vec{u}_\perp = -\vec{F}_{TOT,\perp}$$

5.8 Forza di attrito radente

Forza di attrito esercitata dallo strisciamento di un corpo sulla superficie definita come:

$$\vec{F}_{\text{attrito radente}} = \begin{cases} -\vec{F}_\parallel & \text{se } \left|\left|\vec{F}_\parallel\right|\right| < \mu_s \left|\left|\vec{F}_\perp\right|\right| \\ -\mu_d \left|\left|\vec{F}_\perp\right|\right| \, \vec{u}_v & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- μ_s numero puro, coefficiente di attrito statico (per $\vec{v} = 0$)
- μ_d numero puro, coefficiente di attrito dinamico
- $\vec{u}_v$ versore con direzione e verso di $\vec{v}$
- generalmente $\mu_d < \mu_s$

5.9 Forza di attrito viscoso

Forza di attrito esercitata da un fluido su un corpo in movimento, definita come:

$$\vec{F}_{\text{attrito viscoso}} = -b\,\vec{v}$$

- b coefficiente di attrito viscoso, $[b] = \frac{kg}{s}$
- direzione opposta alla velocità e modulo proporzionale ad essa
- in presenza di solo attrito viscoso lungo $\vec{u}_x$ le equazioni del moto diventano:

  $$v_x(t) = v_0\, e^{-\frac{b}{m}t} \qquad x(t) = x_0 + \frac{m\,v_0}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

  il grafico della velocità è un'esponenziale con esponente decrescente, quello della posizione è un'esponenziale capovolta con asintoto orizzontale $x_\infty = x_0 + \frac{m\,v_0}{b}$

6 Trovare le equazioni del moto

6.1 Piano inclinato

Piano inclinato liscio

- le forze presenti sono $\vec{F}_P = -m\,g\,\vec{u}_z$ forza peso e $\vec{F}_R = \left|\left|\vec{F}_\perp\right|\right|\vec{u}_\perp$ forza di reazione vincolare
- si scompongono le forze lungo la direzione $\|$ e $\perp$ al piano e si applica la seconda legge della dinamica
- lungo $\vec{u}_\|$ si ha $a_\| = 0$, lungo $\vec{u}_\perp$ si ha $a_\perp = g\,\sin\theta$
- il moto è uniformemente accelerato con accelerazione minore di g

Piano inclinato scabro

- le forze presenti sono $\vec{F}_P = -m\,g\,\vec{u}_z$, $\vec{F}_R = \left|\left|\vec{F}_\perp\right|\right|\vec{u}_\perp$, $\vec{F}_A$ forza di attrito
- si scompongono le forze lungo la direzione $\|$ e $\perp$ al piano e si applica la seconda legge della dinamica
- per $\mu_s < \tan\theta$ il corpo non si muove
- lungo $\vec{u}_\|$ si ha $a_\| = 0$, lungo $\vec{u}_\perp$ si ha $a_\perp = g\,\sin\theta\,(1 - \mu_d\cot\theta)$
- il moto è uniformemente accelerato con accelerazione minore di g

6.2 Trovare le soluzioni del moto per una forza generica in 1D

Data una generica forza $\vec{F}_x$ lungo $\vec{u}_x$, l'equazione del moto dalla la seconda legge della dinamica è:

$$m\,a_x(t) = F_x(x(t), v(t), t) = -k\,x(t) - b\,v_x(t) + f(t) \quad\Rightarrow\quad a_x(t) = -\frac{k\,x(t)}{m} - \frac{b\,v_x(t)}{m} + \frac{f(t)}{m}$$

- $-k\,x(t)$ è la componente dipendente dalla posizione con k costante elastica
- $-b\,v_x(t)$ è la componente dipendente dalla velocità con b costante
- $f(t)$ è la componente dipendente dal tempo, può essere costante (es. mg) o periodica (es. risonanza)

Dall'equazione sopra si deriva l'equazione differenzale (1) e la sua omogenea associata (2):

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d}{dt} + \frac{k}{m}\right)x(t) = \frac{f(t)}{m} \tag{1}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d}{dt} + \frac{k}{m}\right)x(t) = 0 \tag{2}$$

Le soluzioni di (1) si scrivono nella forma:

$$X(t) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) + x_s(t)$$

- $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono soluzioni generiche della omogenea associata
- $x_s(t)$ è una soluzione particolare della differenzale
- λ_1 e λ_2 sono parametri liberi da determinare in funzione delle condizioni iniziali

6.3 Oscillatore armonico semplice

Moto di un corpo attaccatto all'estremità di una molla con costante elastica k che si muove lungo una direzione ($\vec{u}_x$), con $x = 0$ posizione di riposo della molla. La forza che agisce sul corpo è la forza elastica e dipende solo dalla posizione:

$$m\, a_x = -k\, x(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\, x(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

L'equazione del moto che soddisfa la differenziale sopra corrisponde a quella del moto armonico:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

- A ampiezza del moto, $[A] = m$
- ω velocità angolare, $[\omega] = \frac{rad}{s}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$
- φ_0 sfasamento iniziale, $[\varphi_0] = rad$

L'equazione del moto dipende dai due parametri A e φ_0 da definire in base alle condizioni iniziali, ad esempio si possono esprimere in funzione delle condizioni iniziali x_0 e v_0:

$$x_0 = A\cos\varphi_0 \qquad v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 \qquad \tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega\, x_0} \qquad A = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

L'equazione si può riscrivere come composizione di funzioni goniometriche esplicitando i due parametri dipendenti dalle condizioni iniziali:

$$x(t) = A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t)$$

- A_1 prima ampiezza del moto, $[A_1] = m$, con $A_1 = A\cos\varphi_0$
- A_2 seconda ampiezza del moto, $[A_2] = m$, con $A_2 = -A\sin\varphi_0$

6.4 Oscillatore armonico con l'azione della forza peso

Stessa situazione precedente, con moto lungo $\vec{u}_z$, considerando anche la forza peso del corpo. Le forze che agiscono sono quella elastica e la forza peso e dipendono ancora soltanto dalla posizione:

$$m\, a_z = -k\, z(t) - m\, g \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\, z(t) + \frac{k}{m} z(t) = -g$$

L'equazione del moto che soddisfa la differenziale sopra corrisponde a quella del moto armonico al netto di una costante dovuta alla presenza della forza peso:

$$z(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) + \Delta l \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{z}(t) = z(t) - \Delta l = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

- A ampiezza del moto, $[A] = m$
- ω velocità angolare, $[\omega] = \frac{rad}{s}$
- φ_0 sfasamento iniziale, $[\varphi_0] = rad$
- $\Delta l = -\dfrac{m\, g}{k}$ spostamento della posizione di equilibrio dovuta alla forza peso
- $\tilde{z}(t) = z(t) - \Delta l$ equazione della posizione introdotta traslando il punto di riposo della molla di Δl affiché $\tilde{z}(t) = 0$ per $z(t) = -\dfrac{m\, g}{k}$

6.5 Oscillatore armonico smorzato (con forza peso e attrito)

Analoga situazione precedente, con l'introduzione della forza di attrito viscoso con coefficiente di attrito b. L'equazione delle forze in gioco è:

$$m\,a_z = -k\,z(t) - m\,g - b\,v(t) \quad \Rightarrow \quad m\,a_z = -k\,\tilde{z}(t) - b\,v(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\,\tilde{z}(t) + \frac{b}{m}\frac{d}{dt}\,\tilde{z}(t) + \frac{k}{m}\tilde{z}(t) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\,\tilde{z}(t) + 2\gamma\frac{d}{dt}\,\tilde{z}(t) + \omega^2\tilde{z}(t) = 0$$

- $2\gamma = \dfrac{b}{m} > 0$ fattore di smorzamento (approfondito dopo)
- $\omega^2 = \dfrac{k}{m} > 0$ velocità oscillazione (approfondito dopo)

L'equazione che soddisfa la soluzione è del tipo $z_0\,e^{\lambda t}$ con $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ ed in base alla condizione di esistenza della radice si considerano i casi $\gamma > \omega$ (1) e $\gamma < \omega$ (2), :

1. per $\gamma > \omega$ la radice esiste nei reali e si ha:

$$\tilde{z}(t) = z_1\,e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)\,t} + z_2\,e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)\,t}$$

   - z_1, z_2 parametri da determinare in base alla situazione iniziale, per $t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{z}(0) = z_1 + z_2$
   - la componente $z_2\,e^{\lambda_2 t}$ va a 0 più velocemente rispetto a $z_1\,e^{\lambda_1 t}$, per cui il comportamento prevalente dipende dal secondo contributo
   - il grafico spazio-tempo è un'esponenziale con esponenti negativi crescenti, può essere simmetrica rispetto all'asse orizzontale in base al segno di $\tilde{z}(0)$

2. per $\gamma < \omega$ la radice ha soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\,\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}$:

$$\tilde{z}(t) = z_1\,e^{-\gamma t}\,e^{i\,\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t} + z_2\,e^{-\gamma t}\,e^{-i\,\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t} = e^{-\gamma t}\left(z_1\,e^{i\,\sqrt{|\gamma^2+\omega^2|}} + z_2\,e^{-i\,\sqrt{|\gamma^2+\omega^2|}}\right) \quad (1)$$

$$\begin{cases} \tilde{z}(t) = A\,e^{-\gamma t}\left(\frac{e^{i\,\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t} + e^{-i\,\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t}}{2}\right) = A\,e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{|\gamma^2+\omega^2|}\,t\right) & \text{per } z_1 = z_2 = \frac{A}{2} \\ \tilde{z}(t) = B\,e^{-\gamma t}\left(\frac{e^{i\,\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t} - e^{-i\,\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t}}{2i}\right) = B\,e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{|\gamma^2+\omega^2|}\,t\right) & \text{per } z_1 = -z_2 = \frac{B}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\tilde{z}(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos\left(\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t\right)\right) \quad \text{per } z_1 = \frac{A}{2} + \frac{B}{2i},\ \ z_2 = \frac{A}{2} - \frac{B}{2i} \quad (3)$$
$$\tilde{z}(t) = e^{-\gamma t}\,C\cos\left(\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t\right) \quad \text{per } A = C\cos\varphi_0,\ \ B = C\sin\varphi_0 \quad (4)$$

   - eq. (1) si ottiene sostituendo le soluzioni $\gamma_{1,2}$ per i parametri $z_{1,2}$
   - eq. (2) si ottiene in funzione dei parametri A e B: gli esponenziali complessi si riconducono alle formule di Eulero per seni e coseni
   - eq. (3) si uniscono le equazioni precedenti con A e B al posto di $z_{1,2}$
   - eq. (4) si utilizza C e φ_0 al posto di A e B
   - si osserva che il moto è armonico, esponenzialmente smorzato, in quanto l'ampiezza di riduce esponenzialmente
   - il periodo di oscillazione vale $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}}$

3. il caso $\gamma = \omega$ non viene trattato perché non capiterà mai nella realtà

6.6 Risonanza e oscillatore armonico

6.7 Velocità limite

6.8 Fili in tensione

6.9 Pendolo semplice

6.10 Pendolo conico

6.11 Curve sopraelevate (paraboliche)

7 Lavoro ed energia

7.1 Introduzione

7.2 Lavoro della forza peso

7.3 Lavoro della forza peso

7.4 Lavoro della forza elastica

7.5 Lavoro della forza di reazione vincolare

7.6 Lavoro della forza di attrito radente

7.7 Segno del lavoro

8 Forze conservative e non conservative

8.1 Introduzione

8.2 Energia potenziale

Potenziali da ricordare

Potenziali in 1D

8.3 Teorema dell'energia cinetica

8.4 Applicazioni del lavoro ed energia

8.5 Potenza

8.6 Gradiente di una forza

9 Quantità conservate

9.1 Lavoro

9.2 Impulso

9.3 Momento angolare

9.4 Applicazioni del momento angolare

10 Trasformazioni tra sistemi di riferimento

10.1 Posizione

10.2 Velocità

10.3 Accelerazione

10.4 Forze e forze apparenti

10.5 Esperimento di Guglielmini