Appunti di algebra lineare e geometria

Giacomo Simonetto

Secondo semestre 2023-24

Sommario

Appunti del corso di algebra lineare e geometria della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

Indice

1 Definizioni di anello commutativo e campo e spazio vettoriale

1.1 Anello commutativo

Un anello commutativo con unità è un insieme in cui sono definite due operazioni $+$ e $\times$ e che soddisfa le seguenti proprietà:

- per la somma $+$:
  1. proprietà associativa
  2. proprietà commutativa
  3. esistenza dell'elemento neutro
  4. esistenza dell'elemento opposto
- per il prodotto $\times$:
  5. proprietà associativa
  6. proprietà commutativa
  7. proprietà distributiva
  8. esistenza dell'elemento neutro

1.2 Campo

Un campo k è un insieme in cui sono definite le due operazioni $+$ e $\times$, che soddisfa sia le 8 proprietà dell'anello commutativo, sia la seguente:

9. esistenza dell'elemento inverso: $\forall a \in k$ con $a \neq 0$ $\exists b \in k$ tale che $a \cdot b = b \cdot a = 1$

In un campo k valgono le seguenti proprietà:

1. si possono risolvere equazioni di primo grado: $ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -b/a$
2. per ogni elemento di k vale $a \cdot 0 = 0$

1.3 Spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale V su un campo k è un insieme di vettori non vuoto dotato delle operazioni:

1. somma $+$: $\quad f : \begin{smallmatrix} V\times V & \to & V \\ (v,w) & \mapsto & v+w \end{smallmatrix}$
2. prodotto per uno scalare $\times$: $\quad f : \begin{smallmatrix} k\times V & \to & V \\ (\alpha,v) & \mapsto & \alpha\cdot w \end{smallmatrix}$

Inoltre devono valere le 8 proprietà di anello commutativo. Gli elementi di uno spazio vettoriale si chiamano vettori.

Proprietà dell'elemento neutro

Sia V uno spazio vettoriale su campo k:

1. $0 \in k,\ v \in V \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot v = \vec{0}$
2. $\alpha \in k,\ \vec{0} \in V \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Proprietà dell'opposto

Sia V uno spazio vettoriale su campo k e $v \in V$, allora vale $-1 \cdot v = -v$ e $-v$ è l'opposto di v.
Sia A un anello commutativo di uno spazio vettoriale (spazio vettoriale), allora l'opposto è unico.

2 Spazi vettoriali, sottospazi e vettori

2.1 Combinazione lineare di vettori

Sia V uno spazio vettoriale su campo k, dati $v_1, \dots v_n \in V$ vettori e $\alpha_1, \dots \alpha_n \in k$ scalari allora possiamo costruire il vettore $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, chiamato combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots v_n$.

2.2 Vettori linearmente indipendenti

Siano $v_1, \dots v_n$ vettori di uno spazio vettoriale V, i vettori sono linearmente indipendenti se l'unica soluzione di $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$ è per $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Quando dei vettori non sono linearmente indipendenti, si dicono linearmente dipendenti ed è possibile scriverne uno come combinazione lineare degli altri.

Se tra i vettori è presente il vettore nullo $\vec{0}$, allora i vettori saranno linearmente dipendenti.

Se $v_1, \dots v_n$ sono linearmente dipendenti e aggiungo altri vettori $v_{n+1}, \dots v_m$, allora saranno ancora linearmente dipendenti.

2.3 Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su campo k, un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme W di V che è sempre sottospazio vettoriale secondo le stesse operazioni di V.

Sia W un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V ($W \subseteq V$), W è sottospazio vettoriale di V ($W \leq V$) se e solo se valgono le seguenti condizioni:

1. W non è vuoto: $W \neq \varnothing$
2. W è chiuso per la somma: $w_1, w_2 \in W \quad \Rightarrow \quad w_1 + w_2 = w_3 \in W$
3. W è chiuso per il prodotto: $\alpha \in k,\ w_1 \in W \quad \Rightarrow \quad \alpha w_1 = w_2 \in W$

Sia $W \leq V$, allora $\vec{0} \in W$, ovvero l'elemento nullo di V appartiene anche a W.

Ogni spazio vettoriale V ha almeno due sottospazi vettoriali, ovvero $W_1 = \{\vec{0}\}$ e $W_2 = V$, per cui dato un generico sottospazio W di V, vale $\{\vec{0}\} \leq W \leq V$.

Unione, somma e intersezione tra sottospazi vettoriali

Siano $U, W \leq V$ sottospazi di V, spazio vettoriale su k, vengono definite:

- $U \cap W = \{v \in U \wedge v \in W\}$ è l'intersezione, si dimostra che $U \cap W \leq V$
- $U \cup W = \{v \in U \vee v \in W\}$ è l'unione, che si dimostra non essere sottospazi
- $U + W = \{u + w \text{ t.c. } u \in U,\ w \in W\}$ è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene U e W

Sottospazio generato da vettori generatori

Sia V uno spazio vettoriale su campo k e $S \subseteq V$ un insieme di vettori di V, allora il sottospazio vettoriale generato da S è definito come il più piccolo sottospazio di V che contiene S e si indica $L(S)$ o $< S >$.

Sia $S = \{v_1, \dots v_n\}$, si dimostra che il sottospazio $L(S) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ con $\lambda_1, \dots \lambda_n \in k$ è dato dalla combinazione lineare dei vettori di S chiamati vettori generatori.

Sia V spazio vettoriale su campo k, un sottoinsieme $S = \{v_1, \dots v_n\}$ è detto insieme di generatori di V se $L(S) = V$, per cui ogni vettore di V si può scrivere come combinazione lineare dei vettori di S.

2.4 Base di uno spazio vettoriale

- Sia V uno spazio vettoriale su k, una base di V è un sottoinsieme B di vettori che sono contemporaneamente generatori di V e linearmente indipendenti.

- Uno stesso spazio vettoriale può avere più basi differenti.

- Sia V spazio vettoriale con base $\{v_1, \dots v_n\}$, ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots v_n$.

- Sia V spazio vettoriale e $S = \{v_1, \dots v_n\}$ sottoinsieme di V, S è base di V se e solo se ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di S.

- Sia V spazio vettoriale con $B = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V e sia $v \in V$ vettore esprimibile come combinazione lineare dei vettori della base: $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}^B$, con $\alpha_1, \dots \alpha_n$ coordinate di v rispetto alla base B.

- Uno spazio vettoriale si dice finitamente generato se è generato da un numero finito di vettori.

- Sia V spazio vettoriale con $v_1, \dots v_n$ insieme di generatori di V, sia $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ vettore di V, allora $w, v_1, \dots v_{n-1}$ è insieme di generatori di V.

- Sia V spazio vettoriale $\{v_1, \dots v_n\}$ insieme di generatori di V e $\{w_1, \dots w_r\}$ vettori linearmente indipendenti di V, allora $r \leq n$.

- Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi, per cui si definisce la dimensione di uno spazio vettoriale come il numero di elementi di una sua base e si indica con $\dim V$. Per convenzione $V = \left\{\vec{0}\right\}$ ha base $B = \varnothing$ e dimensione $\dim V = 0$.

- Sia V spazio vettoriale e $S = \{v_1 \dots v_n\}$ insieme di generatori, da S si può estrarre una base di V (tenendo solo vettori linearmente indipendenti), e vale $\dim V \leq S$.

- Sia V spazio vettoriale con $dim V = n$ e $S = \{v_1, \dots v_n\}$ vettori linearmente indipendenti, allora S può essere completato ad una base di V (aggiungendo altri vettori linearmente indipendenti).

- Sia V spazio vettoriale e siano $R, S \subseteq V$, allora $R \subseteq S \Rightarrow L(R) \leq L(S)$

- Sia V spazio vettoriale con $\dim V = n$, allora le seguenti proprietà si implicano a vicenda:
  1. $v_1, \dots v_n$ sono linearmente indipendenti
  2. $v_1, \dots v_n$ generano V
  3. $\{v_1, \dots v_n\}$ è base di V

- Sia V uno spazio vettoriale e U, W sottospazi di V con $U \cap W$ e $U + W$ sottospazi di V, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ detta Formula di Grassmann. Nel caso particolare in cui $U \cap W = \left\{\vec{0}\right\}$ si ha $\dim(U \cap W) = 0$ e $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ e i due sottospazi U e W si dicono in somma diretta e si scrive $U + W = U \oplus W$.

- Un vettore di $U \oplus W$ si scrive in modo unico nella forma $u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$.

() Sia $V = k^n$ spazio vettoriale su campo k e sia $U = \{(x_1, \dots x_n) \text{ t.c. } \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$ per determinati $\alpha_1, \dots \alpha_n \in k$ fissati, allora $U \leq V$.

3 Funzioni e applicazioni lineari

Siano V, W spazi vettoriali su campo k, $f : W \to W$ si dice lineare se valgono:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \qquad \forall v_1, v_2 \in V$
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v) \qquad \forall v \in V,\ \forall \lambda \in k$

- Sia V spazio vettoriale su k e $f_1, \dots f_n : V \to k$ lineari, allora posso costruire la funzione f lineare definita come $f : \begin{smallmatrix} V & \to & k^n \\ v & \mapsto & \begin{pmatrix} f_1(v) \\ \dots \\ f_n(v) \end{pmatrix} \end{smallmatrix}$
- Sia $f : V \to W$ lineare, allora $f(\vec{0}) = \vec{0}$
- Le funzioni lineari del tipo $f : k^n \to k$ sono tutte e sole del tipo $\begin{smallmatrix} k^n & \to & k \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & a_1x_1 + \dots + a_nx_n \end{smallmatrix}$ con $a_1, \dots a_n \in k$

3.1 Omomorfismo e isomorfismo

Una funzione o applicazione lineare è chiamata omomorfismo.
Una funzione lineare biiettiva è chiamata isomorfismo.
Una funzione lineare che ha lo stesso spazio vettoriale sia nel dominio che nel codominio si dice endomorfismo.

- Sia $f : V \to W$ isomorfismo (f biiettiva), allora f è invertibile ed esiste $f^-1 : W \to V$ lineare inversa di f.
- Tutti gli spazi vettoriali su campo k di dimensione n sono isomorfi a k^n e l'isomorfismo (la funzione) dipende dalla base scelta negli spazi vettoriali.

3.2 Nucleo e immagine di una funzione

Siano V, W spazi vettoriali sul campo k e sia $f : V \to W$ una funzione lineare, si definiscono:

1. nucleo di f: $\quad \ker f = \{v \in V \text{ t.c. } f(\vec{v}) = \vec{0}\} \subseteq V$
2. immagine di f: $\quad \mathrm{Im} f = \{w \in W \text{ t.c. } \exists v \in V \text{ per cui } f(v) = w\} \subseteq W$

Sia $f : V \to W$ funzione lineare, allora:

1. $\ker f \leq V$ (è sottospazio)
2. $\mathrm{Im} f \leq W$ (è sottospazio)

Sia $f : V \to W$ funzione lineare, f è iniettiva se e solo se $\ker f = \{\vec{0}\}$
Sia $f : V \to W$ funzione lineare, f è suriettiva se e solo se $\mathrm{Im} f = W$
Sia $f : V \to W$ lineare, allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim V$
La nullità di f è $\mathrm{null} f = \dim \ker f$, il rango di f è $\mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f$, per cui vale che $\mathrm{null} f + \mathrm{rg} f = \dim V$

3.3 Funzioni e vettori

- In generale una funzione non manda vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti, ma: (due successive)
- Se $f(v_1), \dots f(v_n)$ sono linearmente indipendenti, allora $v_1, \dots v_n$ sono linearmente indipendenti.
- Se f è iniettiva: $v_1, \dots v_n$ linearmente indipendenti $\Leftrightarrow f(v_1), \dots f(v_n)$ linearmente indipendenti.
- Sia $f : V \to W$ lineare, $\{v_1, \dots v_n\}$ generatori di V, allora $\{w_1 = f(v_1), \dots w_n = f(v_n)\}$ sono generatori di W.
- Sia $f : V \to W$ lineare, sia $\{v_1, \dots v_n\}$ base V, f è univocamente determinata dalla conoscenza di $f(v_1), \dots f(v_n)$
- Siano V, W spazi vettoriali sul campo k, sia $\{v_1, \dots v_n\}$ base di V siano $w_1, \dots w_n$ arbitrari vettori di W, allora esiste ed è unica la funzione $f : V \to W$ t.c. $f(v_1) = w_1, \dots f(v_n) = w_n$

4 Matrici

Sia $M_{m,n}(k)$ uno spazio vettoriale i cui vettori sono definiti come matrici $m \times n$ (m righe, n colonne):

$$M_{m,n}(k) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = a(i,j) \qquad \text{con} \begin{array}{r} a_{11}, \dots a_{mn} \in k \\ i = 1, \dots m \\ j = 1, \dots n \end{array} \right\}$$

4.1 Operazioni

Somma tra matrici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Prodotto per uno scalare

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Prodotto righe per colonne tra matrici

Si può eseguire solo se le colonne della prima sono dello stesso numero delle righe della seconda. Siano $A = (a_{ih}) \in M_{m,n}(k)$, $B = (b_{hj}) \in M_{n,r}(k)$, $C = (c_{ij}) \in M_{m,r}(k)$:

$$A \cdot B = C \quad \longrightarrow \quad C = (c_{ij}) = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot b_{hj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Proprietà del prodotto tra matrici

1. non vale la proprietà commutativa $AB \neq BA$
2. proprietà associativa: $(AB)C = A(BC)$
3. proprietà distributiva: $(A+B)C = AC + BC$ e $C(A+B) = CA + CB$
4. prodotto per scalare: $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$
5. elemento neutro: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice identica $n \times n$

Matrici trasposte

Sia $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(k)$ la trasposta è $A^{\mathsf{T}} = (a_{ji}) \in M_{n,m}(k)$, ovvero la matrice ottenuta scambiando le righe e le colonne di A.

Proprietà della trasposta

1. $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A$
2. $(A+B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}$
3. $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$

Matrici simili

Due matrici quadrate A, $A' \in M_n(k)$ si dicono simili se esiste una matrice $P \in M_n(k)$ invertibile per cui $A' = P\,A\,P^{-1}$.

Due matrici sono simili se e solo se rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto ad opportune basi (vedere composizione di funzioni lineari e funzioni di cambiamento di base).

Due matrici simili hanno stesso rango, determinante e polinomio caratteristico.

Matrici simmetriche

Una matrice si dice simmetrica se $A^{\mathsf{T}} = A$

Matrici ortogonali

Una matrice si dice ortogonale se $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$
Le matrici ortogonali sono tutte della forma $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ovvero associate a rotazioni del piano e $\det A$ di una matrice ortogonale è sempre e solo $+1$ o -1.

Elementi (matrici) nilpotenti e divisori di 0

Una matrice quadrata non nulla $A \in M_n(k) \setminus \{\vec{0}\}$ si dice nilpotente se $A^k = 0$ per un certo valore di k.
Due matrici non nulle A, B sono divisori di 0 se $A \cdot B = \vec{0}$.

4.2 Operazioni elementari sulle righe

Sia A una matrice in $M_{m,n}(k)$, posso agire sulle righe senza modificare il sottospazio generato da esse e senza modificare il rango di A con le seguenti operazioni lineari:

1. scambiando tra loro due righe R_i e R_j
2. moltiplicando la riga R_i per uno scalare $\lambda \in k, \lambda \neq 0$
3. nel posto di R_i scrivo $R_i + \beta R_j$ con $i \neq j, \beta \in k$

Rango di una matrice

Il rango di una matrice è la dimensione del sottospazio generato dalle colonne di essa o il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di essa.

Riduzione in forma a scala

La matrice A è in forma a scala se in ogni riga di C il primo coefficiente non nullo (detto pivot) si trova a destra di quello della riga precedente. (a meno che non sia la prima riga, o che la riga precedente sia tutta nulla).

$$A \text{ in forma a scala } = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango di una matrice in forma a scala è il numero delle righe non nulle ed è anche il numero di pivot.

Sottospazi generati dalle righe e colonne di una matrice ridotta a scala

Sia A' la matrice ridotta a scala di A, siano $R_1, \ldots R_m$ le righe di A, siano $C_1, \ldots C_n$ le colonne di A

1. una base del sottospazio generato dalle righe di A è dato dalle righe non nulle di A'
2. una base del sottospazio generato dalle colonne di A è dato dalle colonne di A (NON A') corrispondenti alle colonne dei pivot di A'

Metodo di eliminazione di Gauss

Il sistema $S : AX = B$ ha le stesse soluzioni di un sistema $S' : CX = D$ dove $(C|D)$ è ottenuto mediante operazioni elementari sulla matrice completa $(A|B)$. Questo si utilizza per ricondursi a matrici più semplici da studiare (es. in forma a scala).

Matrici elementari

Le matrici elementari sono matrici quadrate e invertibili ottenute dalle funzioni di operazioni lineari sulle righe delle matrici.

1. la matrice per scambiare tra loro due righe si ottiene dalla matrice identica in cui sono state scambiate due righe come nell'esempio seguente, scambiando le righe 1 e 2:

   $$M_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\det A' = -\det A)$$

   si osserva che $\mathrm{rg}P(i,j) = \mathrm{rg}I_n = n$, $P(i,j)^{-1} = P(i,j)$

2. la matrice per moltiplicare una riga per uno scalare λ si ottiene dalla matrice identica con λ al posto dell'1, nella riga da moltiplicare, come nell'esempio moltiplicando la riga 2 per π:

   $$M_2\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\det A' = \lambda \det A)$$

3. la matrice per ottenere una composizione lineare di righe si ottiene inserendo il coefficiente β al posto dello 0, nella riga da modificare, nella colonna con lo stesso indice della riga che si vuole sommare, come nell'esempio con $R_2 = R_2 + \lambda R_3$:

   $$M_{2,3}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\det A' = \det A)$$

Per ottenere una generica matrice B che raggruppa più operazioni elementari eseguite su una matrice A, ottenendo A' si può procedere come prodotto delle matrici delle diverse operazioni elementari eseguite (funzioni composte), oppure si osserva che: $B \cdot (A|I_n) = (BA|BI_n) = (A'|B)$. Quindi basta considerare la matrice $(A|I_n)$ e applicare le operazioni elementari per ottenere A' al posto di A e in questo modo si avrà B al posto di I_n.

5 Funzioni e matrici

Funzioni come spazio vettoriale

Siano $f, g : V \to W$ funzioni lineari, definiamo:

- somma di funzioni: $f + g : \substack{V \to W \\ v \mapsto f(v)+g(v)}$
- prodotto funzione per scalare: $\lambda f : \substack{V \to W \\ v \mapsto \lambda f(v)}$ con $\lambda \in k$

In questo modo è possibile definire uno spazio vettoriale dato dall'insieme $\hom(V, W)$, di tutti gli omomorfismi $f : V \to W$

Parallelismo funzioni matrici

Siano $f, g : V \to W$ funzioni lineari, siano $\underline{v} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V con $\dim V = n$ e $\underline{w} = \{w_1, \dots w_m\}$ base di W con $\dim W = m$, si possono definire le matrici:

- $A = (a_{ij}) = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) \in M_{m,n}(k)$
- $B = (b_{ij}) = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(g) \in M_{m,n}(k)$

Inoltre le operazioni tra f e g si possono definire in termini di matrici:

- somma di funzioni: $f + g = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f + g) = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) + \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(g)$
- prodotto funzione per scalare: $\lambda f = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(\lambda f) = \lambda \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$
- composizione di funzioni: $g \circ f = \mathrm{M}^{\underline{z}}_{\underline{v}}(g \circ f) = \mathrm{M}^{\underline{z}}_{\underline{w}}(g) \cdot \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$

  definita con $f : V \to W$, $g : W \to Z$ e con $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{z}$ basi di V, W, Z

Funzioni come prodotto matrice vettore

Sia $f : V \to W$ funzione lineare, siano $\underline{v} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V con $\dim V = n$ e $\underline{w} = \{w_1, \dots w_m\}$ base di W con $\dim W = m$:

- definisco gli isomorfismi $\mathrm{iso}_1 : \substack{V \to k^n \\ v \mapsto \left(\substack{\lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n}\right)^{\underline{v}}}$ e $\mathrm{iso}_2 : \substack{W \to k^m \\ w \mapsto \left(\substack{\mu_1 \\ \dots \\ \mu_2}\right)^{\underline{w}}}$
- definisco l'operazione $L_A : \substack{k^n \to k^m \\ \left(\substack{\lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n}\right)^{\underline{v}} \mapsto \left(\substack{\mu_1 \\ \dots \\ \mu_2}\right)^{\underline{w}}}$ con $A = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) \in M_{m,n}(k)$, $\left(\substack{\mu_1 \\ \dots \\ \mu_2}\right)^{\underline{w}} = A \left(\substack{\lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n}\right)^{\underline{v}}$

Per cui dato un vettore $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V$ e $w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m \in W$, vale che:

$$w = f(v) \quad \Rightarrow \quad \left(\substack{\mu_1 \\ \dots \\ \mu_2}\right)^{\underline{w}} = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) \cdot \left(\substack{\lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n}\right)^{\underline{v}}$$

Ovvero ogni funzione, scelte una base del dominio e una del codominio, è possibile scriverla come matrice $\dim W \times \dim V$, e per applicare la funzione ad un vettore, si moltiplica a sinistra il vettore dato dalle coordinate rispetto alla base del dominio per la matrice, ottenendo le coordinate del vettore rispetto alla base del codominio.

Per costruire la matrice relativa alla funzione si uniscono le coordinate dei vettori (verticali), secondo la base del codominio, dati dall'applicazione della funzione ai vettori della base del dominio come di seguito:
sia $f : V \to W$, $\underline{v} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V, $\underline{w} = \{w_1, \dots w_m\}$ base di W:

$$f : \begin{array}{c} f(v_1) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m \\ f(v_2) = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m \\ \dots \\ f(v_n) = z_1 w_1 + z_2 w_2 + \dots + z_m w_m \end{array} \quad \longrightarrow \quad A = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & z_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & b_m & \cdots & z_m \end{pmatrix}$$
$$= \ (f(v_1), f(v_2), \dots f(v_n)) \text{ rispetto a } \underline{w}$$

Immagine di una funzione e rango di una matrice

Sia $f : V \to W$ lineare, $\underline{v} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V, $\underline{w} = \{w_1, \dots w_m\}$ base di W, allora l'immagine di f è il sottospazio generato dalle colonne di $A = \mathrm{M}_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f)$, ovvero $\mathrm{Im} f = L(f(v_1), \dots f(v_n))$.

Matrice del cambiamento di base

Sia V spazio vettoriale su k con basi $\underline{v} = \{v_1, \dots v_n\}$ e $\underline{v'} = \{v'_1, \dots v'_n\}$. Un vettore v si può esprimere in due modi diversi secondo i due sistemi di coordinate:

$$v \;=\; \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}} \;=\; \lambda'_1 v'_1 + \cdots + \lambda'_n v'_n = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \cdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}^{\underline{v'}}$$

Costruisco la funzione identità $id : \begin{smallmatrix} V_{\underline{v}} & \to & V_{\underline{v'}} \\ v & \mapsto & v' \end{smallmatrix}$ e la relativa matrice in cui le colonne sono le coordinate dei vettori della base $\underline{v}$ rispetto alla base $\underline{v'}$, come segue:

$$f : \begin{matrix} v_1 = a_1 v'_1 + a_2 v'_2 + \cdots + a_n v'_n \\ v_2 = b_1 v'_1 + b_2 v'_2 + \cdots + b_n v'_n \\ \cdots \\ v_n = z_1 v'_1 + z_2 v'_2 + \cdots + z_n v'_n \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad A = \mathrm{M}_{\underline{v}}^{\underline{v'}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & z_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

Per cui si ha che $\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \cdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}^{\underline{v'}} = \mathrm{M}_{\underline{v}}^{\underline{v'}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}}$

Le matrici del cambiamento di base (essendo isomorfismi), sono invertibili e la loro inversa si ottiene scambiando le basi utilizzate: $\left(\mathrm{M}_{\underline{v}}^{\underline{v'}}(id)\right)^{-1} = \mathrm{M}_{\underline{v'}}^{\underline{v}}(id)$ e si ha che $\mathrm{M}_{\underline{v}}^{\underline{v'}} \cdot \mathrm{M}_{\underline{v'}}^{\underline{v}} = I_n$

Composizione di funzioni lineari tra spazi vettoriali e di funzioni di cambiamento di base

Siano V, W spazi vettoriali con $\underline{v}$, $\underline{v'}$ basi di V e $\underline{w}$, $\underline{w'}$ basi di W e $f : V \to W$, si ha che:

- $\mathrm{id}_1 : V_{\underline{v}} \to V_{\underline{v'}}$ $\quad P = \mathrm{M}_{\underline{v}}^{\underline{v'}} \quad P^{-1} = \mathrm{M}_{\underline{v'}}^{\underline{v}}$ $\qquad \mathrm{id}_2 : W_{\underline{w}} \to W_{\underline{w'}}$ $\quad S = \mathrm{M}_{\underline{w}}^{\underline{w'}} \quad S^{-1} = \mathrm{M}_{\underline{w'}}^{\underline{w}}$
- $f : V_{\underline{v}} \to W_{\underline{w}}$ $\quad A = \mathrm{M}_{\underline{v}}^{\underline{w}}$ $\qquad f' : V_{\underline{v'}} \to W_{\underline{w'}}$ $\quad A' = \mathrm{M}_{\underline{v'}}^{\underline{w'}}$
- $f' = id_2 \circ f \circ {id_1}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M}_{\underline{v'}}^{\underline{w'}} = \mathrm{M}_{\underline{w}}^{\underline{w'}} \cdot \mathrm{M}_{\underline{v}}^{\underline{w}} \cdot \mathrm{M}_{\underline{v'}}^{\underline{v}} \quad \Rightarrow \quad A' = S\, A\, P^{-1}$

Se la funzione f è un endomorfismo (es. $f : V \to V$), si ottiene che $S = P$, per cui $A' = P\, A\, P^{-1}$, ovvero le matrici A e A' sono simili.

6 Sistemi di equazioni lineari

Un sistema lineare di equazioni lineari a coefficienti in campo k è un insieme S di equazioni del tipo:

$$S \ : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Matrici complete e incomplete

La matrice A si chiama matrice incompleta di S: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

La matrice $(A|B)$ si chiama matrice completa di S: $(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_n \end{pmatrix}$

6.1 Soluzioni di un sistema lineare

- L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $S : AX = B$ è l'insieme dei vettori X delle incognite tali che tutte le equazioni siano verificate contemporaneamente. Nel caso in cui A sia invertibile, il sistema ha un'unica soluzione $X = A^{-1}B$
- Un sistema lineare ha soluzioni se e solo se $B \in \mathrm{Im} f$, con $f : \begin{smallmatrix} k^n & \to & k^m \\ X & \mapsto & AX \end{smallmatrix}$. Si osserva che $\mathrm{Im} f$ corrisponde allo spazio vettoriale generato dalle colonne di A, per cui $B \in \mathrm{Im} f \leftrightarrow B \in < C_{A_1}, C_{A_2}, \dots C_{A_n} >$

Sistemi lineari omogenei associati

- Il sistema lineare $S : AX = B$ si dice omogeneo se $B = \vec{0}$ $(S : AX = \vec{0})$ e l'insieme delle soluzioni è $X = \ker f$, con $f : \begin{smallmatrix} k^n & \to & k^m \\ X & \mapsto & AX \end{smallmatrix}$.
- Il sistema lineare $S : AX = B$ ha come soluzione uno spazio vettoriale se e solo se S è omogeneo.
- Sia $S : AX = B$ un sistema lineare, $S' : AX = \vec{0}$ si dice sistema omogeneo associato ad S.
- Sia $S : AX = B$ un sistema lineare, le soluzioni X del sistema sono tutte e sole della forma $\mathrm{Sol}S = \{\overline{x} + y \text{ t.c. } y \in \ker f\} = \overline{x} + \ker f$, dove $\overline{x}$ è una soluzione particolare di S e $\ker f$ è la soluzione generale del sistema omogeneo associato ad S.

Teorema di Rouché-Capelli

Sia $S : AX = B$ un sistema lineare di n equazioni in n incognite, e $A = M_{m,n}(k)$, allora:

1. S ha soluzioni se e solo se $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(A|B)$
2. se S ha soluzioni, $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(A|B) = r$ (eq. lin. indipendenti), n numero incognite allora:
    - se $r = n$, S ha una sola soluzione
    - se $r < n$, si sono infinte (∞^{r-n}) soluzioni che dipendono da $n - r$ parametri

7 Matrici invertibili e inverse

Una matrice si dice invertibile se esiste B tale che $AB = BA = I_n$.
Se B esiste, è la matrice inversa di A e si indica B^{-1}.

Per calcolare l'inversa di A, eseguo operazioni elementari sulle righe sulla matrice $(A|I_n)$ in modo da ricondurmi ad una matrice $(I_n|A^{-1})$, dove I_n è la matrice identica e A^{-1} è la matrice inversa. Questo avviene per come è definita la combinazione di matrici di operazioni elementari sulle righe (come spiegato dopo).

Sia $A \in M_n(k)$ matrice quadrata di ordine n:
A è invertibile $\Leftrightarrow$ f è invertibile $\Leftrightarrow$ f è isomorfismo $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Im} f = n \Leftrightarrow \mathrm{rg} A = n$

7.1 Funzioni e matrici invertibili

Inversa sinistra

- data una funzione $f : V \to W$, la funzione $g : W \to V$ si dice inversa sinistra di f se $g \circ f = id_V$
- f ha inversa sinistra se e solo se f è iniettiva ($\ker f = \left\{\vec{0}\right\}$)
- data una matrice $A \in \mathrm{M}_{\underline{m}}^{n}(k)$, tale matrice ha inversa sinistra $S \in \mathrm{M}_{\underline{n}}^{m}(k)$ se $SA = I_n$ e di conseguenza $\mathrm{rg} A = n$

Inversa destra

- data una funzione $f : V \to W$, la funzione $h : W \to V$ si dice inversa destra di f se $f \circ h = id_W$
- f ha inversa sinistra se e solo se f è suriettiva ($\mathrm{Im} f = W$)
- data una matrice $A \in \mathrm{M}_{\underline{m}}^{n}(k)$, tale matrice ha inversa destra $D \in \mathrm{M}_{\underline{n}}^{m}(k)$ se $AD = I_m$ e di conseguenza $\mathrm{rg} A = m$

Funzioni e matrici invertibili

- se una funzione f ha sia inversa destra che inversa sinistra, allora è biiettiva, ovvero è un isomorfismo e ha inversa unica $g = h = f^{-1} : W \to V$
- se una matrice ha inversa destra e inversa sinistra, allora è matrice associata ad un isomorfismo ed ha inversa unica $D = S = A^{-1}$, con $\mathrm{rg} A = n = m$, ovvero se è quadrata
- una matrice quadrata è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$

8 Determinanti

8.1 Definizione

Il determinante si definisce solo per matrici quadrate, se $\det A \neq 0$, allora la matrice è invertibile.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{1\sigma(1)}\ a_{2\sigma(2)}\ \dots\ a_{n\sigma(n)}$$

con

- σ generica permutazione
- S_n insieme delle permutazioni in $\{1 \dots n\}$
- $\operatorname{sgn}(\sigma)$ positivo se la permutazione si ottiene con un numero pari di scambi, negativo altrimenti

Esempio per $n = 2$

$$detA = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{1\sigma(1)}\ a_{2\sigma(2)} = \operatorname{sgn}(\sigma_1)\ a_{1\sigma_1(1)}\ a_{2\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}(\sigma_2)\ a_{1\sigma_2(1)}\ a_{2\sigma_2(2)} = a_{11}\ a_{22} - \ a_{12}\ a_{21}$$

Esempio per $n = 3$

$$\begin{aligned}
\det A = &\sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_{1\sigma(1)}\ a_{2\sigma(2)}\ a_{3\sigma(3)} \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma_1)\ a_{1\sigma_1(1)}\ a_{2\sigma_1(2)}\ a_{3\sigma_1(3)} + \operatorname{sgn}(\sigma_2)\ a_{1\sigma_2(1)}\ a_{2\sigma_2(2)}\ a_{3\sigma_2(3)} + \dots + \operatorname{sgn}(\sigma_6)\ a_{1\sigma_6(1)}\ a_{2\sigma_6(2)}\ a_{3\sigma_6(3)} \\
&= a_{11}\ a_{22}\ a_{33} - a_{11}\ a_{23}\ a_{32} - a_{13}\ a_{22}\ a_{31} - a_{12}\ a_{21}\ a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32}
\end{aligned}$$

8.2 Regola di Sarrus (det 3x3)

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

diagonali alto-sx $\rightarrow$ basso-dx con segno $+$, diagonali alto-dx $\rightarrow$ basso-sx con segno $-$

8.3 Proprietà dei determinanti

1.1 det matrice diagonale = prodotto elementi sulla diagonale principale

1.2 det matrice triangolare superiore = prodotto elementi sulla diagonale principale

1.3 det matrice triangolare inferiore = prodotto elementi sulla diagonale principale

1.4 $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$ con A, B, C sottomatrici quadrate di matrice quadrata

2 $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$, ovvero le proprietà che valgono per le righe valgono anche per le colonne

3.1 $\det \begin{pmatrix} \dots \\ \alpha v + \alpha' v' \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} \dots \\ v \\ \dots \end{pmatrix} + \alpha' \det \begin{pmatrix} \dots \\ v' \\ \dots \end{pmatrix}$

3.2 $\det A' = -\det A$, con A' ottenuta scambiando due righe (o colonne) tra loro (matrice elem. $M_{i,j}$)

3.3 $\det A' = \lambda \det A$, con A' ottenuta moltiplicando una riga (o colonna) per uno scalare λ ($M_i \lambda$)

3.4 $\det A = 0$ se ci sono due righe (o colonne) uguali.

3.5 se ad una riga (o colonna) ci sommo combinazioni lineari di altre righe (o colonne), il determinante non cambia (matrice elementare $M_{i,j}(\lambda)$)

4.1 teorema di Binet: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

4.2 corollario: $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

8.4 Formule di Laplace

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \ a_{ij} \ \det A_{ij} = a_{ij} \ {a_{ij}}^* \qquad \text{fissata la riga i}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \ a_{ij} \ \det A_{ij} = a_{ij} \ {a_{ij}}^* \qquad \text{fissata la colonna j}$$

con A_{ij} matrice ottenuta cancellando la riga i e la colonna j
con ${a_{ij}}^* = (-1)^{i+j} \ \det A_{ij}$ complemento algebrico
con $A^* = ({a_{ij}}^*)$ matrice dei complementi algebrici

8.5 Inversa di una matrice con determinante

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* \qquad \text{con } \det A \neq 0$$

8.6 Formula di Cramer

Sia $S : AX = B$ sistema di n equazioni con n incognite e $detA \neq 0$, allora il sistema ha un'unica soluzione $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ data da:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

con A_i matrice A con la colonna B nel posto i-esimo

9 Autovalori, autovettori e diagonalizzabilità

Gli autovettori sono vettori linearmente indipendenti che costituiscono una base per la quale la matrice associata ad un endomorfismo è diagonale e la diagonale è costituita dagli autovalori associati agli autovettori.

9.1 Autovalori e polinomio caratteristico

Gli autovalori di una matrice A sono le soluzioni del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Ogni autovalore λ ha una propria molteplicità algebrica $m_a(\lambda)$ data dal numero di volte che compare nelle soluzioni del polinomio caratteristico. La somma delle molteplicità algebriche di tutti gli autovalori è inferiore a n (righe della matrice).

9.2 Autovettori e autospazi

Per trovare gli autovettori corrispondenti agli autovalori, bisogna risolvere il sistema omogeneo $(A - \lambda I_n)v = \vec{0}$ dove A è la matrice, λ è l'autovalore e v è l'autovettore da trovare. L'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio associato all'autovalore, detto autospazio $E_A(\lambda) = \ker(A - \lambda I_n)$. Ogni autovalore ha una molteplicità geometrica $m_g(\lambda) = \dim E_A(\lambda)$ data dalla dimensione dell'autospazio.

9.3 Matrice diagonale e diagonalizzabilità

Una matrice A è diagonalizzabile se simile ad una matrice diagonale D, ovvero se esiste una base di k^n fatta di autovettori A, ovvero se A ammette n autovettori linearmente indipendenti. In questo modo la matrice diagonale è costituita dagli autovalori di A lungo la diagonale (corrispondenti agli autovettori della base, l'ordine è importante).

$$D = S^{-1}AS \quad \Leftrightarrow \quad AS = SD \quad \Leftrightarrow \quad A = SDS^{-1}$$

con A matrice di partenza, D matrice diagonale simile ad A, S matrice con autovettori come colonne

Criteri di diagonalizzabilità

Una matrice è diagonalizzabile se e solo se ha n autovalori distinti o se $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ per ogni autovalore.
Una matrice è sempre diagonalizzabile in $\mathbb{C}$, ma non sempre in $\mathbb{R}$.
Una matrice simmetrica ha sempre n autovalori distinti.
Alcune osservazioni:

- se una matrice ha n autovettori linearmente indipendenti, allora è diagonalizzabile
- un teorema garantisce che autovettori associati a autovalori distinti, sono linearmente indipendenti
- se una matrice $n \times n$ ha n autovalori distinti, allora è diagonalizzabile
- la molteplicità geometrica è sempre minore o uguale a quella algebrica $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$
- se una matrice ha $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ per ogni autovalore, allora è diagonalizzabile
- A è diagonalizzabile $\quad \Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdot (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \ldots (\lambda_r - \lambda)^{m_r}$ con λ_i distinti autovalori e $m_i = m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) = \dim E_A(\lambda_i)$.

10 Ortogonalità e prodotto scalare

10.1 Prodotto scalare

In $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare tra due vettori $v = (a_1\ a_2\ a_3)$, $w = (b_1\ b_2\ b_3)$ è uno scalare:

$$v \cdot w = v^{\mathsf{T}}\ w = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Lunghezze e angoli

- $v \cdot v = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \dots + {a_n}^2 = ||v||^2$
- $||v|| = \sqrt{v^{\mathsf{T}}\ v}$ è detta norma o modulo del vettore ed è la lunghezza del vettore
- $v \cdot w = ||v||\ ||w|| \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{v \cdot w}{||v||\ ||w||}$ con α angolo tra i vettori

Aree e volumi

L'area del parallelogramma di lati v, w è $A = v \cdot w = ||v|| \cdot ||w|| \cdot \sin\alpha = \sqrt{\det \begin{pmatrix} v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot v & w \cdot w \end{pmatrix}}$

Il volume del parallelepipedo di lati v, w, u è $V = v \cdot w \cdot u = \sqrt{\det \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{pmatrix}}$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|v \cdot w| \leq ||v||\ ||w|| \qquad |v \cdot w| \leq ||v||\ ||w|| \Leftrightarrow v, w \text{ linearmente indipendenti}$$

$$-1 \leq \frac{v \cdot w}{||v||\ ||w||} \leq 1 \qquad \text{conseguenza del teorema e condizione di esistenza } \cos\alpha$$

Proprietà

1. $u \cdot u = ||u||^2 \geq 0$
2. $v \cdot u = u \cdot v$
3. $\vec{0} \cdot v = v \cdot \vec{0}$
4. $(\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v)$

5.1 $(u + v) \cdot z = u \cdot z + v \cdot z$

5.2 $u \cdot (v + z) = u \cdot v + u \cdot z$

10.2 Vettori ortogonali

Due vettori v, w si dicono ortogonali se e solo se $v \cdot w = 0$ (con $v, w \neq \vec{0}$)
Dato un vettore v, per trovare la sua proiezione lungo un altro vettore u, si impone la condizione di perpendicolarità $v = v_\parallel + v_\perp$ con $v_\parallel = \lambda u$ e $v_\perp \cdot u = 0$ per cui si ottiene:

$$(v - \lambda u) \cdot u = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \frac{w \cdot u}{u \cdot u} \qquad \Leftrightarrow \qquad v_\parallel = \frac{w \cdot u}{u \cdot u} u$$

10.3 Sottospazi ortogonali

Dato un sottospazio $U \leq \mathbb{R}^n$, il sottospazio ortogonale ad U è $U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot u = 0 \ \forall u \in U\}$

- se $U \leq \mathbb{R}^n$, allora anche $U^\perp \leq \mathbb{R}^n$
- $v \in U^\perp \quad \Leftrightarrow \quad u_1 \cdot v = 0, \ u_2 \cdot v = 0 \ \dots \ u_r \cdot v = 0$ con $(u_1, \dots u_r)$ base di U
- se $U \leq \mathbb{R}^n$ e $\dim U = r$, allora $\dim U^\perp = n - r$ e $\dim U + \dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^n$, per cui $U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$ e sono in somma diretta $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$
- l'ortogonale dell'ortogonale è il sottopazio di partenza $U^{\perp\perp} = U$
- $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ e $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

Dato U sotto forma di equazioni cartesiane, allora:

- $U = \ker A$, con A matrice associata al sistema di equazioni cartesiane
- $U^\perp$ è sottospazio generato dalle righe di A

Per trovare le proiezioni ortogonali di v su U e $U^\perp$:

- **Metodo 1:**
  trovo due basi di U e $U^\perp$, le unisco, trovo le coordinate di v rispetto alla nuova base e le coordinate relative ai vettori della base di U sono la proiezione di v su U, mentre le rimanenti sono la proiezione di v su $U^\perp$
- **Metodo 2:**
  impongo che $(v - v') = v'' \in U^\perp$ per cui impongo la condizione di perpendicolarità per ogni vettore di $U^\perp$ e risolvo il sistema $u_1 \cdot (v - v') = 0, u_2 \cdot (v - v') = 0, \dots u_r \cdot (v - v') = 0$, $u_1, \dots u_r$ base di U

10.4 Matrice di proiezione ortogonale

La matrice di proiezione ortogonale di v su U è $P = A(A^\intercal \ A)^{-1} A^\intercal$ e vale $v' = Pv$, con A matrice che ha come colonne, i vettori della base di U.

10.5 Basi ortogonali e ortonormali e procedimento di Gram-Schmidt

Sia $U \leq \mathbb{R}^n$, una base ortogonale di U è una base $(u_1, \dots u_r)$ tale che $u_i \cdot u_j = 0 \ \forall i \neq j$, ovvero una base i cui vettori sono tutti ortogonali tra di loro.
Una base ortonormale è una base ortogonale in cui tutti i vettori hanno lunghezza unitaria.

Procedimento di Gram-Schmidt

Per trovare una base ortogonale da una qualsiasi base, si utilizza il seguente procedimento:

1. prendo $u'_1 = u_1$ primo vettore della base ortogonale
2. scelgo $u'_2 \in < u_1, u_2 >$ tale per cui $u'_2 \cdot u'_1 = 0$, ovvero cerco la proiezione di u_2 sulla retta perpendicolare a u'_1: $u'_2 = u_2 - \dfrac{u_2 \cdot u'_1}{u'_1 \cdot u'_1} u'_1$
3. scelgo $u'_3 \in < u_1, u_2, u_3 >$ tale che $u'_3 \cdot u'_1 = 0$ e $u_3 \cdot u'_2 = 0$ e ottengo che $u'_3 = u_3 - \dfrac{u_3 \cdot u'_1}{u'_1 \cdot u'_1} u'_1 - \dfrac{u_3 \cdot u'_2}{u'_2 \cdot u'_2} u'_2$
4. continuo con tutti i vettori: $u'_i = u_i - \dfrac{u_i \cdot u'_1}{u'_1 \cdot u'_1} u'_1 - \dfrac{u_i \cdot u'_2}{u'_2 \cdot u'_2} u'_2 - \dots - \dfrac{u_i \cdot u'_{i-1}}{u'_{i-1} \cdot u'_{i-1}} u'_{i-1}$

Per ottenere una base ortonormale, divido ciascun vettore per la sua norma: $u''_i = \dfrac{u'_i}{||u'_i||} = \dfrac{u'_i}{\sqrt{u'_i \cdot u'_i}}$

10.6 Diagonalizzazione matrici simmetriche reali

Data una matrice quadrata reale e simmetrica $A \in M_n(k)$, questa ha n autovalori distinti e gli autovettori associati sono tutti perpendicolari tra loro. Dal teorema spettrale si ottiene che la matrice è ortogonalmente diagonalizzabile, ovvero esiste una base ortonormale fatta di autovettori.

Una matrice è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è simmetrica, ovvero quando esiste una matrice ortogonale P del cambiamento di base tale per cui vale: $D = P^{-1}\ A\ P$ e $D = P^{\mathsf{T}}\ A\ P$.

Data una matrice simmetrica, per trovare una base ortogonale fatta da autovettori:

1. calcolo il polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)_1^m \cdot (\lambda_2 - \lambda)_2^m \dots (\lambda_r - \lambda)_r^m$ e ottengo r autovalori $\lambda_1, \dots \lambda_r$ con $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) = m_i$ in quanto è diagonalizzabile dato che è simmetrica
2. calcolo gli autospazi e trovo una base ortonormale per ciascuno (es. utilizzo Gram-Schmidt)
3. unisco i vettori delle varie basi ottenendo una base ortonormale fatta di autovettori

   in questo modo ho la matrice D con gli autovalori lungo la diagonale, la matrice P ottenuta unendo gli autovettori corrispondenti agli autovalori come vettori colonne e la matrice $P^{-1} = P^{\mathsf{T}}$ eseguendo la trasposta di P

11 Geometria affine

11.1 Spazio affine

Uno spazio affine $\mathbb{A}$ su $\mathbb{R}$ è costituito da:

1. un insieme non vuoto S, detto insieme dei punti di $\mathbb{A}$
2. uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$
3. una operazione $+$ tra punto e vettore

11.2 Rette in uno spazio affine

Una generica retta r è univocamente identificata da due punti distinti $P, Q \in r$ appartenenti ad essa, o da un punto e da un vettore direttore v (ottenuto come differenza di punti distinti della retta $v = Q - P$)

Equazioni parametriche

Sia X generico punto della retta, P punto della retta, v vettore e base del sottospazio direttore (di dimensione 1), l'equazione parametrica della retta ha la forma:

$$r : X = P + \lambda v$$

Equazioni cartesiane

Partendo dall'equazione parametrica e sostituendo il parametro λ si ottiene un sistema di $n-1$ equazioni cartesiane con n dimensione dello spazio affine. Nel caso di $\mathbb{R}^3$ si ha:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \end{cases}$$

(si osserva che i vettori (a, b, c, d) e (e, f, g, h) definiscono il sottospazio direttore perpendicolare a r)

11.3 Piani in uno spazio affine

Un generico piano π è univocamente identificato da tre punti distinti e non allineati $P, Q, R \in \pi$, o da un punto P e due vettori linearmente indipendenti v, w (con $v = Q - P$ e $w = R - P$).

Equazioni parametriche

Sia X un generico punto del piano, P punto del piano, v, w vettori base del sottospazio direttore (di dimensione 2), l'equazione parametrica del piano ha la forma:

$$\pi : X = P + \lambda v + \mu w$$

Equazioni cartesiane

Partendo dall'equazione parametrica e sostituendo i parametri λ e μ si ottiene un sistema di $n - 2$ equazioni cartesiane, con n dimensione dello spazio affine. Nel caso di $\mathbb{R}^3$ si ha:

$$\pi : ax + by + cz = d$$

(si osserva che il vettore (a, b, c, d) definisce la normale a π)

11.4 Sottospazi affini

Uno sottospazio affine $\mathcal{L}$ è definito con un punto di passaggio P e un sottospazio vettoriale W dello spazio affine come spazio direttore. L'equazione parametrica è: (con W si intende combinazione lineare dei vettori della base di W)

$$\mathcal{L} : X = P + W$$

Per ottenere le equazioni cartesiane si risolve un sistema lineare di $n - r$ equazioni lineari indipendenti con n incognite e r parametri. Il sistema è omogeneo se $P \equiv O(0, 0, \ldots 0)$.

11.5 Posizioni reciproche di sottospazi affini in $\mathbb{R}^3$

Posizione reciproca genericamente

Dati due sottospazi affini $\mathcal{L} : X = P+ < W >$ e $\mathcal{L}' : X = Q+ < W' >$, questi possono essere:

- incidenti, ovvero $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}' \neq \varnothing$, se e solo se $(Q - P) \in < W, W' >$.
- paralleli se e solo se $W \leq W'$ o $W' \leq W$, uno sottospazio affine è sottospazio dell'altro
- sghembi se e solo se $W \cap W' = \left\{\vec{0}\right\}$ e $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}' = \varnothing$, $\dim(W + W') = \dim W + \dim W'$

Per spazio con dimensione superiore a 4, ci possono essere spazi affini che non sono né incidenti, né paralleli, né sghembi.

Posizione reciproca retta-piano

Date le equazioni cartesiane di un piano e di una retta e studiando la matrice del sistema ottenuto unendo le diverse equazioni:

- se $\text{rg}A = 2$ la retta e il piano sono paralleli, in particolare
    - se $\text{rg}(A|d) = 2$ la retta e il piano sono paralleli coincidenti
    - se $\text{rg}(A|d) = 3$ la retta e il piano sono paralleli distinti
- se $\text{rg}A = \text{rg}(A|d) = 3$ la retta e il piano sono incidenti

Posizione reciproca piano-piano

Date le equazioni cartesiane di due piani e studiando la matrice del sistema ottenuto unendo le equazioni:

- se $\text{rg}A = 1$ i piani sono paralleli, in particolare:
    - se $\text{rg}(A|d) = 1$ i piani sono paralleli coincidenti
    - se $\text{rg}(A|d) = 2$ i piani sono paralleli distinti
- se $\text{rg}A = \text{rg}(A|d) = 2$ i piani sono incidenti in una retta

Posizione reciproca retta-retta

Date le equazioni cartesiane di due rette e studiando la matrice del sistema ottenuto unendo le equazioni:

- se $\text{rg}A = 2$ le rette sono parallele, in particolare:
    - se $\text{rg}(A|d) = 2$ le rette sono parallele coincidenti
    - se $\text{rg}(A|d) = 3$ le rette sono parallele distinti
- se $\text{rg}A = 3$ le rette non sono parallele, in particolare:
    - se $\text{rg}(A|d) = 3$ le rette sono incidenti in un punto
    - se $\text{rg}(A|d) = 4$ le rette sono sghembe

11.6 Distanza tra sottospazi affini in $\mathbb{R}^3$

Distanza punto-piano

Dato un punto P e un piano π, per trovare la proiezione ortogonale del punto sul piano:

- **Metodo 1**:
  - verifico che il punto non appartiene al piano, ovvero il vettore $Q-P$ non è combinazione lineare dei vettori del sottospazio direttore W del piano π, se appartiene la sua proiezione coincide con il punto stesso
  - trovo la retta r perpendicolare al piano π e passante per P (trovando il sottospazio ortogonale al sottospazio direttore del piano)
  - trovo l'intersezione $H = r \cap \pi$ che è la proiezione di P su π
- **Metodo 2**:
  - verifico che il punto non appartiene al piano, ovvero il vettore $Q-P$ non è combinazione lineare dei vettori del sottospazio direttore W del piano π, se appartiene la sua proiezione coincide con il punto stesso
  - scelgo un generico punto X del piano π e trovo il vettore $X - P = Q - P + \lambda v + \mu w$
  - impongo l'ortogonalità del vettore con il piano: $\begin{cases} (X-P) \cdot v = 0 \\ (X-P) \cdot w = 0 \end{cases}$ e risolvo per λ e μ
  - trovate λ e μ, le sostituisco nell'equazione parametrica del piano e ottengo il punto H che è proiezione ortogonale di P su π

La distanza tra un punto e un piano equivale alla distanza del punto dalla sua proiezione ortogonale sul piano: $\text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, H) = \sqrt{||P - H||}$.
Nel caso in cui il piano è dato in forma cartesiana, il vettore direttore della retta è dato dai coefficienti della cartesiana del piano e si ottiene che la distanza è data dalla formula $\text{dist}(P, \pi) = \dfrac{|\sum a_i c_i + b|}{\sqrt{\sum {a_i}^2}}$, con a_i coefficienti della cartesiana del piano, c_i coordinate di P.

Distanza retta-piano

Una retta e un piano possono intersecarsi o essere paralleli. Se si intersecano, la loro distanza minima è 0, viceversa se non si intersecano, ovvero sono paralleli distinti, basta prendere un generico punto della retta e calcolare la distanza punto-piano.

Distanza piano-piano

Due piani possono intersecarsi o essere paralleli. Se si intersecano, la loro distanza minima è 0, viceversa se non si intersecano, ovvero sono paralleli distinti, basta prendere un generico punto di uno dei due piani e calcolare la distanza punto-piano.

Distanza punto-retta

Per calcolare la distanza punto-retta si utilizza il metodo 2 visto sopra per calcolare la distanza punto-piano. Si cerca un vettore $X - P$ e si impone la condizione di ortogonalità con il vettore direttore della retta $(X - P) \cdot v = 0$ e si risolve in funzione dell'unico parametro λ dato dall'equazione parametrica della retta. Una volta trovato λ, si può ottenere H ed infine la distanza da P ad H.

La formula generica è $\text{dist}(P, r) = ||P - H|| = \sqrt{(P - Q) \cdot (P - Q) - \frac{((P-Q) \cdot v)^2}{v \cdot v}}$

Distanza retta-retta

Due rette possono intersecarsi, essere parallele o sghembe. Se si intersecano, la loro distanza è 0, se sono parallele distinte, basta prendere un generico punto da una delle due rette e calcolare la distanza punto-retta, se sono sghembe, la distanza minima è quella per cui il vettore distanza è perpendicolare al sottospazio generato unendo i sottospazi direttori: $(X_r - X_s) \perp < W_r, W_s >$

- **Metodo 1**:
  si esprime $X_r - X_s$ in funzione dei parametri λ_1 e λ_2 dati dalle parametriche delle rette e si impongono le condizioni di ortogonalità con i vettori direttori delle rette. Una volta trovati i due parametri, si può risalire ai due punti X_r e X_s e calcolare la distanza: $\text{dist}(r, s) = \min \text{dist}(X_r, X_s) = \text{dist}(X_r, X_s) \Leftrightarrow (X_r - X_s) \perp < W_r, W_s >$
- **Metodo 2**:
  Prendo il piano passante per un punto delle due rette, con sottospazio direttore dato dalla combinazione lineare dei vettori direttori delle due rette. La distanza tra le rette è pari alla distanza tra un punto dell'altra retta e il piano.

11.7 Angoli tra sottospazi affini in $\mathbb{R}^3$

Angolo tra due rette

Date due rette incidenti con i relativi vettori direttori, l'angolo formato dalle due è $\cos \alpha = \dfrac{u \cdot v}{||u||\,||v||}$ con $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

Angolo tra piano e retta

Data una retta e il piano, trovo la proiezione ortogonale della retta sul piano e l'angolo cercato è l'angolo tra la retta e la sua proiezione ortogonale sul piano. Se la proiezione è un punto, allora la retta è perpendicolare al piano e $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

11.8 Fasci di sottospazi affini

Fascio di piani passanti per una retta

Date le equazioni cartesiane di una retta, si ottengono immediatamente le due equazioni cartesiane dei piani che si intersecano sulla retta stessa. I due piani sono detti generatori del fascio, gli altri piani sono ottenuti come combinazione lineare dei due piani generatori, dipendenti da due parametri λ e μ non nulli contemporaneamente.

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \pi(\lambda, \mu) : \lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

Fascio improprio di piani paralleli

Il fascio improprio di piani si ottiene dall'equazione di un piano generatore a cui viene sommato un parametro. Il piano viene traslato mantenendo costante il vettore normale al piano (a, b, c).

$$\begin{aligned} \text{piano generatore: } & \pi : ax + by + cz + d = 0 \\ \text{fascio improprio: } & \pi(\lambda) : ax + by + cz + \lambda = 0 \end{aligned}$$

Fascio di piani passanti per un punto

Date le coordinate di un punto di passaggio $P(x_0, y_0, z_0)$, si impone il passaggio per il punto e si ottiene che il fascio di piani passanti per P ha la forma:

$$\pi(x_0, y_0, z_0) : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - x_0) = 0$$

11.9 Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Definizione

Dati due vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, il prodotto vettoriale è un vettore definito partendo dal determinante e sfruttando le formule di Laplace, con $\{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica.

$$\begin{aligned} u \times v &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \\ &= e_1 \det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} + e_2 \det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix} + e_3 \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \end{aligned}$$

Proprietà

- $(\lambda u + \mu u') \times v = \lambda(u \times v) + \mu(u' \times v)$
- $u \times (\lambda v + \mu v') = \lambda(u \times v) + \mu(u \times v')$
- $u \times v = -v \times u$
- se u e v sono linearmente indipendenti $u \times v = \vec{0}$
- $u \cdot (u \times v) = 0$ e $v \cdot (u \times v) = 0$, ovvero il prodotto vettoriale è un vettore perpendicolare ai due vettori di partenza

Si può introdurre il prodotto misto di 3 vettori u, v, w: $u \cdot (v \times w) = \det \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

Determinazione del prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale è univocamente determinato dalle seguenti 3 condizioni:

1. $(u \times v) \perp u$ e $(u \times v) \perp v$
2. $||u \times v||$ è l'area del parallelogramma delimitato da u e v
3. la matrice del cambiamento di base da $\{e_1, e_2, e_3\}$ a $\{u, v, u \times v\}$ ha determinante positivo (le due basi sono equiorientate)

La matrice del cambiamento di base $\mathrm{M}^{\{e_1,e_2,e_3\}}_{\{u,v,u\times v\}}(id) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_2 & v_2 & u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_3 & v_3 & u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$

Aree con prodotto vettoriale

Dati due vettori u, w, lo scalare $||u \times v||$ è l'area del parallelogramma ottenuto dai due vettori.

11.10 Cenni sulle coniche

Una conica in $\mathbb{A}^2$ è l'insieme dei punti le cui coordinate annullano un polinomio di 2° grado della forma:

$$F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

Sia $P = (1, x, y)$ un punto di $\mathbb{A}^2$, il polinomio sopra si può scrivere come forma bilineare simmetrica associata ad una matrice simmetrica 3×3 e I punti della conica corrispondo ai vettori isotropi della forma $(1, x, y)$.

$$G = \begin{pmatrix} f & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & a & \frac{b}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad (1,\ x,\ y)G\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Considerando anche la matrice $G' = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$

- se $\text{rg}G = 1$, la conica è una retta (contata due volte) (è degenere)
- se $\text{rg}G = 2$, la conica è l'unione di due rette (è degenere)
- se $\det G \neq 0$ si hanno 3 casi:
  - se $\det G' > 0$ si ha ellisse
  - se $\det G' = 0$ si ha parabola
  - se $\det G' < 0$ si ha un'iperbole