

# Appunti di algebra lineare e geometria

Giacomo Simonetto

Secondo semestre 2023-24

## **Sommario**

Appunti del corso di algebra lineare e geometria della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

# Indice

<b>1</b>	<b>Definizioni di anello commutativo e campo e spazio vettoriale</b>	<b>3</b>
1.1	Anello commutativo . . . . .	3
1.2	Campo . . . . .	3
1.3	Spazio vettoriale . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Spazi vettoriali, sottospazi e vettori</b>	<b>4</b>
2.1	Combinazione lineare di vettori . . . . .	4
2.2	Vettori linearmente indipendenti . . . . .	4
2.3	Sottospazi vettoriali . . . . .	4
2.4	Base di uno spazio vettoriale . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Funzioni e applicazioni lineari</b>	<b>6</b>
3.1	Omorfismo e isomorfismo . . . . .	6
3.2	Nucleo e immagine di una funzione . . . . .	6
3.3	Funzioni e vettori . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Matrici</b>	<b>7</b>
4.1	Operazioni . . . . .	7
4.2	Operazioni elementari sulle righe . . . . .	8
4.3	Funzioni e matrici . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Sistemi di equazioni lineari</b>	<b>12</b>
5.1	Soluzioni di un sistema lineare . . . . .	12

# 1 Definizioni di anello commutativo e campo e spazio vettoriale

## 1.1 Anello commutativo

Un anello commutativo con unità è un insieme in cui sono definite due operazioni  $+$  e  $\times$  e che soddisfa le seguenti proprietà:

- per la somma  $+$ :
  1. proprietà associativa
  2. proprietà commutativa
  3. esistenza dell'elemento neutro
  4. esistenza dell'elemento opposto
- per il prodotto  $\times$ :
  5. proprietà associativa
  6. proprietà commutativa
  7. proprietà distributiva
  8. esistenza dell'elemento neutro

## 1.2 Campo

Un campo  $k$  è un insieme in cui sono definite le due operazioni  $+$  e  $\times$ , che soddisfa sia le 8 proprietà dell'anello commutativo, sia la seguente:

9. esistenza dell'elemento inverso:  $\forall a \in k$  con  $a \neq 0$   $\exists b \in k$  tale che  $a \cdot b = b \cdot a = 1$

In un campo  $k$  valgono le seguenti proprietà:

1. si possono risolvere equazioni di primo grado:  $ax + b = 0 \Rightarrow x = -b/a$
2. per ogni elemento di  $k$  vale  $a \cdot 0 = 0$

## 1.3 Spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $k$  è un insieme di vettori non vuoto dotato delle operazioni:

1. somma  $+$ : 
$$f: \begin{matrix} V \times V & \rightarrow & V \\ (v, w) & \mapsto & v + w \end{matrix}$$
2. prodotto per uno scalare  $\times$ : 
$$f: \begin{matrix} k \times V & \rightarrow & V \\ (\alpha, v) & \mapsto & \alpha \cdot v \end{matrix}$$

Inoltre devono valere le 8 proprietà di anello commutativo. Gli elementi di uno spazio vettoriale si chiamano vettori.

### Proprietà dell'elemento neutro

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su campo  $k$ :

1.  $0 \in k, v \in V \Rightarrow 0 \cdot v = \vec{0}$
2.  $\alpha \in k, \vec{0} \in V \Rightarrow \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

### Proprietà dell'opposto

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su campo  $k$  e  $v \in V$ , allora vale  $-1 \cdot v = -v$  e  $-v$  è l'opposto di  $v$ .

Sia  $A$  un anello commutativo di uno spazio vettoriale (spazio vettoriale), allora l'opposto è unico.

## 2 Spazi vettoriali, sottospazi e vettori

### 2.1 Combinazione lineare di vettori

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su campo  $k$ , dati  $v_1, \dots, v_n \in V$  vettori e  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$  scalari allora possiamo costruire il vettore  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ , chiamato combinazione lineare dei vettori  $v_1, \dots, v_n$ .

### 2.2 Vettori linearmente indipendenti

Siano  $v_1, \dots, v_n$  vettori di uno spazio vettoriale  $V$ , i vettori sono linearmente indipendenti se l'unica soluzione di  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$  è per  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Quando dei vettori non sono linearmente indipendenti, si dicono linearmente dipendenti ed è possibile scriverne uno come combinazione lineare degli altri.

Se tra i vettori è presente il vettore nullo  $\vec{0}$ , allora i vettori saranno linearmente dipendenti.

Se  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente dipendenti e aggiungo altri vettori  $v_{n+1}, \dots, v_m$ , allora saranno ancora linearmente dipendenti.

### 2.3 Sottospazi vettoriali

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su campo  $k$ , un sottospazio vettoriale di  $V$  è un sottoinsieme  $W$  di  $V$  che è sempre sottospazio vettoriale secondo le stesse operazioni di  $V$ .

Sia  $W$  un sottoinsieme di uno spazio vettoriale  $V$  ( $W \subseteq V$ ),  $W$  è sottospazio vettoriale di  $V$  ( $W \leq V$ ) se e solo se valgono le seguenti condizioni:

1.  $W$  non è vuoto:  $W \neq \emptyset$
2.  $W$  è chiuso per la somma:  $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 = w_3 \in W$
3.  $W$  è chiuso per il prodotto:  $\alpha \in k, w_1 \in W \Rightarrow \alpha w_1 = w_2 \in W$

Sia  $W \leq V$ , allora  $\vec{0} \in W$ , ovvero l'elemento nullo di  $V$  appartiene anche a  $W$ .

Ogni spazio vettoriale  $V$  ha almeno due sottospazi vettoriali, ovvero  $W_1 = \{\vec{0}\}$  e  $W_2 = V$ , per cui dato un generico sottospazio  $W$  di  $V$ , vale  $\{\vec{0}\} \leq W \leq V$ .

#### Unione, somma e intersezione tra sottospazi vettoriali

Siano  $U, W \leq V$  sottospazi di  $V$ , spazio vettoriale su  $k$ , vengono definite:

- $U \cap W = \{v \in U \wedge v \in W\}$  è l'intersezione, si dimostra che  $U \cap W \leq V$
- $U \cup W = \{v \in U \vee v \in W\}$  è l'unione, che si dimostra non essere sottospazi
- $U + W = \{u + w \text{ t.c. } u \in U, w \in W\}$  è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene  $U$  e  $W$

#### Sottospazio generato da vettori generatori

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su campo  $k$  e  $S \subseteq V$  un insieme di vettori di  $V$ , allora il sottospazio vettoriale generato da  $S$  è definito come il più piccolo sottospazio di  $V$  che contiene  $S$  e si indica  $L(S)$  o  $\langle S \rangle$ .

Sia  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ , si dimostra che il sottospazio  $L(S) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  con  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$  è dato dalla combinazione lineare dei vettori di  $S$  chiamati vettori generatori.

Sia  $V$  spazio vettoriale su campo  $k$ , un sottoinsieme  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  è detto insieme di generatori di  $V$  se  $L(S) = V$ , per cui ogni vettore di  $V$  si può scrivere come combinazione lineare dei vettori di  $S$ .

## 2.4 Base di uno spazio vettoriale

- Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $k$ , una base di  $V$  è un sottoinsieme  $B$  di vettori che sono contemporaneamente generatori di  $V$  e linearmente indipendenti.
  - Uno stesso spazio vettoriale può avere più basi differenti.
  - Sia  $V$  spazio vettoriale con base  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , ogni vettore di  $V$  si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori  $v_1, \dots, v_n$ .
  - Sia  $V$  spazio vettoriale e  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  sottoinsieme di  $V$ ,  $S$  è base di  $V$  se e solo se ogni vettore di  $V$  si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di  $S$ .
  - Sia  $V$  spazio vettoriale con  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  base di  $V$  e sia  $v \in V$  vettore esprimibile come combinazione lineare dei vettori della base:  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}^B$ , con  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  coordinate di  $v$  rispetto alla base  $B$ .
  - Uno spazio vettoriale si dice finitamente generato se è generato da un numero finito di vettori.
  - Sia  $V$  spazio vettoriale con  $v_1, \dots, v_n$  insieme di generatori di  $V$ , sia  $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$  vettore di  $V$ , allora  $w, v_1, \dots, v_{n-1}$  è insieme di generatori di  $V$ .
  - Sia  $V$  spazio vettoriale  $\{v_1, \dots, v_n\}$  insieme di generatori di  $V$  e  $\{w_1, \dots, w_r\}$  vettori linearmente indipendenti di  $V$ , allora  $r \leq n$ .
  - Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi, per cui si definisce la dimensione di uno spazio vettoriale come il numero di elementi di una sua base e si indica con  $\dim V$ . Per convenzione  $V = \{\vec{0}\}$  ha base  $B = \emptyset$  e dimensione  $\dim V = 0$ .
  - Sia  $V$  spazio vettoriale e  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  insieme di generatori, da  $S$  si può estrarre una base di  $V$  (tenendo solo vettori linearmente indipendenti), e vale  $\dim V \leq |S|$ .
  - Sia  $V$  spazio vettoriale con  $\dim V = n$  e  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  vettori linearmente indipendenti, allora  $S$  può essere completato ad una base di  $V$  (aggiungendo altri vettori linearmente indipendenti).
  - Sia  $V$  spazio vettoriale e siano  $R, S \subseteq V$ , allora  $R \subseteq S \Rightarrow L(R) \subseteq L(S)$
  - Sia  $V$  spazio vettoriale con  $\dim V = n$ , allora le seguenti proprietà si implicano a vicenda:
    1.  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti
    2.  $v_1, \dots, v_n$  generano  $V$
    3.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è base di  $V$
  - Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $U, W$  sottospazi di  $V$  con  $U \cap W$  e  $U + W$  sottospazi di  $V$ , allora  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$  detta Formula di Grassmann. Nel caso particolare in cui  $U \cap W = \{\vec{0}\}$  si ha  $\dim(U \cap W) = 0$  e  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$  e i due sottospazi  $U$  e  $W$  si dicono in somma diretta e si scrive  $U + W = U \oplus W$ .
  - Un vettore di  $U \oplus W$  si scrive in modo unico nella forma  $u + w$  con  $u \in U$  e  $w \in W$ .
- ( $\circ$ ) Sia  $V = k^n$  spazio vettoriale su campo  $k$  e sia  $U = \{(x_1, \dots, x_n) \text{ t.c. } \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$  per determinati  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$  fissati, allora  $\dim U \leq n-1$ .

### 3 Funzioni e applicazioni lineari

Siano  $V, W$  spazi vettoriali su campo  $k$ ,  $f : W \rightarrow W$  si dice lineare se valgono:

1.  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
2.  $f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in k$
- Sia  $V$  spazio vettoriale su  $k$  e  $f_1, \dots, f_n : V \rightarrow k$  lineari, allora posso costruire la funzione  $f$  lineare definita come  $f : V \rightarrow k^n$   $v \mapsto \begin{pmatrix} f_1(v) \\ \vdots \\ f_n(v) \end{pmatrix}$
- Sia  $f : V \rightarrow W$  lineare, allora  $f(\vec{0}) = \vec{0}$
- Le funzioni lineari del tipo  $f : k^n \rightarrow k$  sono tutte e sole del tipo  $\begin{pmatrix} k^n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  con  $a_1, \dots, a_n \in k$

#### 3.1 Omorfismo e isomorfismo

Una funzione o applicazione lineare è chiamata omomorfismo.

Una funzione lineare biettiva è chiamata isomorfismo.

Una funzione lineare che ha lo stesso spazio vettoriale sia nel dominio che nel codominio si dice endomorfismo.

- Sia  $f : V \rightarrow W$  isomorfismo ( $f$  biettiva), allora  $f$  è invertibile ed esiste  $f^{-1} : W \rightarrow V$  lineare inversa di  $f$ .
- Tutti gli spazi vettoriali su campo  $k$  di dimensione  $n$  sono isomorfi a  $k^n$  e l'isomorfismo (la funzione) dipende dalla base scelta negli spazi vettoriali.

#### 3.2 Nucleo e immagine di una funzione

Siano  $V, W$  spazi vettoriali sul campo  $k$  e sia  $f : V \rightarrow W$  una funzione lineare, si definiscono:

1. nucleo di  $f$ :  $\ker f = \{v \in V \text{ t.c. } f(v) = \vec{0}\} \subseteq V$
2. immagine di  $f$ :  $\text{Im} f = \{w \in W \text{ t.c. } \exists v \in V \text{ per cui } f(v) = w\} \subseteq W$

Sia  $f : V \rightarrow W$  funzione lineare, allora:

1.  $\ker f \leq V$  (è sottospazio)
2.  $\text{Im} f \leq W$  (è sottospazio)

Sia  $f : V \rightarrow W$  funzione lineare,  $f$  è iniettiva se e solo se  $\ker f = \{\vec{0}\}$

Sia  $f : V \rightarrow W$  funzione lineare,  $f$  è suriettiva se e solo se  $\text{Im} f = W$

Sia  $f : V \rightarrow W$  lineare, allora  $\dim \ker f + \dim \text{Im} f = \dim V$

La nullità di  $f$  è  $\text{null} f = \dim \ker f$ , il rango di  $f$  è  $\text{rg} f = \dim \text{Im} f$ , per cui vale che  $\text{null} f + \text{rg} f = \dim V$

#### 3.3 Funzioni e vettori

- In generale una funzione non manda vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti, ma: (due successive)
- Se  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  sono linearmente indipendenti, allora  $v_1, \dots, v_n$  sono linearmente indipendenti.
- Se  $f$  è iniettiva:  $v_1, \dots, v_n$  linearmente indipendenti  $\Leftrightarrow f(v_1), \dots, f(v_n)$  linearmente indipendenti.
- Sia  $f : V \rightarrow W$  lineare,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  generatori di  $V$ , allora  $\{w_1 = f(v_1), \dots, w_n = f(v_n)\}$  sono generatori di  $W$ .
- Sia  $f : V \rightarrow W$  lineare, sia  $\{v_1, \dots, v_n\}$  base  $V$ ,  $f$  è univocamente determinata dalla conoscenza di  $f(v_1), \dots, f(v_n)$
- Siano  $V, W$  spazi vettoriali sul campo  $k$ , sia  $\{v_1, \dots, v_n\}$  base di  $V$  siano  $w_1, \dots, w_n$  arbitrari vettori di  $W$ , allora esiste ed è unica la funzione  $f : V \rightarrow W$  t.c.  $f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$

## 4 Matrici

Sia  $M_{m,n}(k)$  uno spazio vettoriale i cui vettori sono definiti come matrici  $m \times n$  ( $m$  righe,  $n$  colonne):

$$M_{m,n}(k) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = a(i, j) \quad \text{con} \quad \begin{matrix} a_{11}, \dots, a_{mn} \in k \\ i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix} \right\}$$

### 4.1 Operazioni

#### Somma tra matrici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

#### Prodotto per uno scalare

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

#### Prodotto righe per colonne tra matrici

Si può eseguire solo se le colonne della prima sono dello stesso numero delle righe della seconda. Siano  $A = (a_{ih}) \in M_{m,n}(k)$ ,  $B = (b_{hj}) \in M_{n,r}(k)$ ,  $C = (c_{ij}) \in M_{m,r}(k)$ :

$$A \cdot B = C \quad \longrightarrow \quad C = (c_{ij}) = \sum_{h=1}^n a_{ih} \cdot b_{hj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

#### Proprietà del prodotto tra matrici

1. non vale la proprietà commutativa  $AB \neq BA$
2. proprietà associativa:  $(AB)C = A(BC)$
3. proprietà distributiva:  $(A+B)C = AC + BC$  e  $C(A+B) = CA + CB$
4. prodotto per scalare:  $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$
5. elemento neutro:  $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$  matrice identica  $n \times n$

#### Matrici trasposte

Sia  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(k)$  la trasposta è  $A^T = (a_{ji}) \in M_{n,m}(k)$ , ovvero la matrice ottenuta scambiando le righe e le colonne di  $A$ .

#### Proprietà della trasposta

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(A+B)^T = A^T + B^T$
3.  $(AB)^T = B^T A^T$

## Matrice inversa

Una matrice si dice invertibile se esiste  $B$  tale che  $AB = BA = I_n$ .

Se  $B$  esiste, è la matrice inversa di  $A$  e si indica  $B^{-1}$ .

Per calcolare l'inversa di  $A$ , eseguo operazioni elementari sulle righe sulla matrice  $(A|I_n)$  in modo da ricondurmi ad una matrice  $(I_n|A^{-1})$ , dove  $I_n$  è la matrice identica e  $A^{-1}$  è la matrice inversa. Questo avviene per come è definita la combinazione di matrici di operazioni elementari sulle righe (come spiegato dopo).

## Matrici simili

Due matrici quadrate  $A, A' \in M_n(k)$  si dicono simili se esiste una matrice  $P \in M_n(k)$  invertibile per cui  $A' = P A P^{-1}$ .

Due matrici sono simili se e solo se rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto ad opportune basi (vedere composizione di funzioni lineari e funzioni di cambiamento di base).

## Elementi (matrici) nilpotenti e divisori di 0

Una matrice quadrata non nulla  $A \in M_n(k) \setminus \{\vec{0}\}$  si dice nilpotente se  $A^k = 0$  per un certo valore di  $k$ .

Due matrici non nulle  $A, B$  sono divisori di 0 se  $A \cdot B = \vec{0}$ .

## 4.2 Operazioni elementari sulle righe

Sia  $A$  una matrice in  $M_{m,n}(k)$ , posso agire sulle righe senza modificare il sottospazio generato da esse e senza modificare il rango di  $A$  con le seguenti operazioni lineari:

1. scambiando tra loro due righe  $R_i$  e  $R_j$
2. moltiplicando la riga  $R_i$  per uno scalare  $\lambda \in k, \lambda \neq 0$
3. nel posto di  $R_i$  scrivo  $R_i + \beta R_j$  con  $i \neq j, \beta \in k$

## Rango di una matrice

Il rango di una matrice è la dimensione del sottospazio generato dalle colonne di essa o il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di essa.

## Riduzione in forma a scala

La matrice  $A$  è in forma a scala se in ogni riga di  $C$  il primo coefficiente non nullo (detto pivot) si trova a destra di quello della riga precedente. (a meno che non sia la prima riga, o che la riga precedente sia tutta nulla).

$$A \text{ in forma a scala} = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango di una matrice in forma a scala è il numero delle righe non nulle ed è anche il numero di pivot.

## Sottospazi generati dalle righe e colonne di una matrice ridotta a scala

Sia  $A'$  la matrice ridotta a scala di  $A$ , siano  $R_1, \dots, R_m$  le righe di  $A$ , siano  $C_1, \dots, C_n$  le colonne di  $A$

1. una base del sottospazio generato dalle righe di  $A$  è dato dalle righe non nulle di  $A'$
2. una base del sottospazio generato dalle colonne di  $A$  è dato dalle colonne di  $A$  (NON  $A'$ ) corrispondenti alle colonne dei pivot di  $A'$

## Metodo di eliminazione di Gauss

Il sistema  $S : AX = B$  ha le stesse soluzioni di un sistema  $S' : CX = D$  dove  $(C|D)$  è ottenuto mediante operazioni elementari sulla matrice completa  $(A|B)$ . Questo si utilizza per ricondursi a matrici più semplici da studiare (es. in forma a scala).



## Matrici elementari

Le matrici elementari sono matrici quadrate e invertibili ottenute dalle funzioni di operazioni lineari sulle righe delle matrici.

1. la matrice per scambiare tra loro due righe si ottiene dalla matrice identica in cui sono state scambiate due righe come nell'esempio seguente, scambiando le righe 1 e 2:

$$P(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si osserva che  $\text{rg}P(i, j) = \text{rg}I_n = n$ ,  $P(i, j)^{-1} = P(i, j)$

2. la matrice per moltiplicare una riga per uno scalare  $\lambda$  si ottiene dalla matrice identica con  $\lambda$  al posto dell'1, nella riga da moltiplicare, come nell'esempio moltiplicando la riga 2 per  $\pi$ :

$$M(2, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. la matrice per ottenere una composizione lineare di righe si ottiene inserendo il coefficiente  $\beta$  al posto dello 0, nella riga da modificare, nella colonna con lo stesso indice della riga che si vuole sommare, come nell'esempio con  $R_2 = R_2 + \lambda R_3$ :

$$M(2, 3, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per ottenere una generica matrice  $B$  che raggruppa più operazioni elementari eseguite su una matrice  $A$ , ottenendo  $A'$  si può procedere come prodotto delle matrici delle diverse operazioni elementari eseguite (funzioni composte), oppure si osserva che:  $B \cdot (A|I_n) = (BA|BI_n) = (A'|B)$ . Quindi basta considerare la matrice  $(A|I_n)$  e applicare le operazioni elementari per ottenere  $A'$  al posto di  $A$  e in questo modo si avrà  $B$  al posto di  $I_n$ .

### 4.3 Funzioni e matrici

#### Funzioni come spazio vettoriale

Siano  $f, g : V \rightarrow W$  funzioni lineari, definiamo:

- somma di funzioni:  $f + g : \underset{v}{V} \rightarrow \underset{f(v)+g(v)}{W}$
- prodotto funzione per scalare:  $\lambda f : \underset{v}{V} \rightarrow \underset{\lambda f(v)}{W}$  con  $\lambda \in k$

In questo modo è possibile definire uno spazio vettoriale dato dall'insieme  $\text{hom}(V, W)$ , di tutti gli omomorfismi  $f : V \rightarrow W$

#### Parallelismo funzioni matrici

Siano  $f, g : V \rightarrow W$  funzioni lineari, siano  $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base di  $V$  con  $\dim V = n$  e  $\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$  base di  $W$  con  $\dim W = m$ , si possono definire le matrici:

- $A = (a_{ij}) = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) \in M_{m,n}(k)$
- $B = (b_{ij}) = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(g) \in M_{m,n}(k)$

Inoltre le operazioni tra  $f$  e  $g$  si possono definire in termini di matrici:

- somma di funzioni:  $f + g = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f + g) = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) + M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(g)$
- prodotto funzione per scalare:  $\lambda f = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\lambda f) = \lambda M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f)$
- composizione di funzioni:  $g \circ f = M_{\underline{v}}^{\underline{z}}(g \circ f) = M_{\underline{v}}^{\underline{z}}(g) \cdot M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f)$   
definita con  $f : V \rightarrow W$ ,  $g : W \rightarrow Z$  e con  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$ ,  $\underline{z}$  basi di  $V, W, Z$

#### Funzioni come prodotto matrice vettore

Sia  $f : V \rightarrow W$  funzione lineare, siano  $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base di  $V$  con  $\dim V = n$  e  $\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$  base di  $W$  con  $\dim W = m$ :

- definisco gli isomorfismi  $\text{iso}_1 : \underset{v}{V} \rightarrow \underset{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}}{k^n}$  e  $\text{iso}_2 : \underset{w}{W} \rightarrow \underset{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}}{k^m}$
- definisco l'operazione  $L_A : \underset{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}}{k^n} \rightarrow \underset{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}}{k^m}$  con  $A = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) \in M_{m,n}(k)$ ,  $\underset{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}}{k^m} = A \underset{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}}{k^n}$

Per cui dato un vettore  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V$  e  $w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m \in W$ , vale che:

$$w = f(v) \Rightarrow \underset{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}}{k^m} = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) \cdot \underset{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}}{k^n}$$

Ovvero ogni funzione, scelte una base del dominio e una del codominio, è possibile scriverla come matrice  $\dim W \times \dim V$ , e per applicare la funzione ad un vettore, si moltiplica a sinistra il vettore dato dalle coordinate rispetto alla base del dominio per la matrice, ottenendo le coordinate del vettore rispetto alla base del codominio.

Per costruire la matrice relativa alla funzione si uniscono le coordinate dei vettori (verticali) dati dall'applicazione della funzione ai vettori della base del dominio come di seguito:

sia  $f : V \rightarrow W$ ,  $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base di  $V$ ,  $\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$  base di  $W$ :

$$\begin{array}{l} f(v_1) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m \\ f(v_2) = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m \\ \dots \\ f(v_n) = z_1 w_1 + z_2 w_2 + \dots + z_m w_m \end{array} \longrightarrow A = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & z_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & b_m & \dots & z_m \end{pmatrix}$$

### Immagine di una funzione e rango di una matrice

Sia  $f : V \rightarrow W$  lineare,  $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base di  $V$ ,  $\underline{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$  base di  $W$ , allora l'immagine di  $f$  è il sottospazio generato dalle colonne di  $A = M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(f)$ , ovvero  $\text{Im} f = L(f(v_1), \dots, f(v_n))$ .

### Matrice del cambiamento di base

Sia  $V$  spazio vettoriale su  $k$  con basi  $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\underline{v}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ . Un vettore  $v$  si può esprimere in due modi diversi secondo i due sistemi di coordinate:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}} = \lambda'_1 v'_1 + \dots + \lambda'_n v'_n = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}^{\underline{v}'}$$

Costruisco la funzione identità  $id : \begin{matrix} V_{\underline{v}} & \rightarrow & V_{\underline{v}'} \\ v & \mapsto & v' \end{matrix}$  e la relativa matrice in cui le colonne sono le coordinate dei vettori della base  $\underline{v}$  rispetto alla base  $\underline{v}'$ , come segue:

$$f : \begin{matrix} v_1 = a_1 v'_1 + a_2 v'_2 + \dots + a_m v'_m \\ v_2 = b_1 v'_1 + b_2 v'_2 + \dots + b_m v'_m \\ \vdots \\ v_n = z_1 v'_1 + z_2 v'_2 + \dots + z_m v'_m \end{matrix} \longrightarrow A = M_{\underline{v}'}^{\underline{v}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & z_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & b_m & \dots & z_m \end{pmatrix}$$

Per cui si ha che  $\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}^{\underline{v}'} = M_{\underline{v}'}^{\underline{v}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}}$

Le matrici del cambiamento di base (essendo isomorfismi), sono invertibili e la loro inversa si ottiene scambiando le basi utilizzate:  $\left(M_{\underline{v}'}^{\underline{v}}(id)\right)^{-1} = M_{\underline{v}}^{\underline{v}'}(id)$  e si ha che  $M_{\underline{v}}^{\underline{v}'} \cdot M_{\underline{v}'}^{\underline{v}} = I_n$

### Composizione di funzioni lineari tra spazi vettoriali e di funzioni di cambiamento di base

Siano  $V, W$  spazi vettoriali con  $\underline{v}, \underline{v}'$  basi di  $V$  e  $\underline{w}, \underline{w}'$  basi di  $W$  e  $f : V \rightarrow W$ , si ha che:

$$\begin{aligned} - \text{id}_1 : V_{\underline{v}} &\rightarrow V_{\underline{v}'} & P &= M_{\underline{v}'}^{\underline{v}} & P^{-1} &= M_{\underline{v}}^{\underline{v}'} & \text{id}_2 : W_{\underline{w}} &\rightarrow W_{\underline{w}'} & S &= M_{\underline{w}'}^{\underline{w}} & S^{-1} &= M_{\underline{w}}^{\underline{w}'} \\ - f : V_{\underline{v}} &\rightarrow W_{\underline{w}} & A &= M_{\underline{w}}^{\underline{v}} & & & f' : V_{\underline{v}'} &\rightarrow W_{\underline{w}'} & A' &= M_{\underline{w}'}^{\underline{v}'} \\ - f' &= id_2 \circ f \circ id_1^{-1} & \Rightarrow & M_{\underline{w}'}^{\underline{v}'} &= M_{\underline{w}'}^{\underline{w}} \cdot M_{\underline{w}}^{\underline{v}} \cdot M_{\underline{v}'}^{\underline{v}} & \Rightarrow & A' &= S A P^{-1} \end{aligned}$$

Se la funzione  $f$  è un endomorfismo (es.  $f : V \rightarrow V$ ), si ottiene che  $S = P$ , per cui  $A' = P A P^{-1}$ , ovvero le matrici  $A$  e  $A'$  sono simili.

## 5 Sistemi di equazioni lineari

Un sistema lineare di equazioni lineari a coefficienti in campo  $k$  è un insieme  $S$  di equazioni del tipo:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

**Matrici complete e incomplete**

La matrice  $A$  si chiama matrice incompleta di  $S$ :  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

La matrice  $(A|B)$  si chiama matrice completa di  $S$ :  $(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_n \end{pmatrix}$

### 5.1 Soluzioni di un sistema lineare

- L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare  $S : AX = B$  è l'insieme dei vettori  $X$  delle incognite tali che tutte le equazioni siano verificate contemporaneamente. Nel caso in cui  $A$  sia invertibile, il sistema ha un'unica soluzione  $X = A^{-1}B$
- Un sistema lineare ha soluzioni se e solo se  $B \in \text{Im}f$ , con  $f : \begin{smallmatrix} k^n \\ X \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} k^m \\ AX \end{smallmatrix}$ . Si osserva che  $\text{Im}f$  corrisponde allo spazio vettoriale generato dalle colonne di  $A$ , per cui  $B \in \text{Im}f \Leftrightarrow B \in \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$

**Sistemi lineari omogenei associati**

- Il sistema lineare  $S : AX = B$  si dice omogeneo se  $B = \vec{0}$  ( $S : AX = \vec{0}$ ) e l'insieme delle soluzioni è  $X = \ker f$ , con  $f : \begin{smallmatrix} k^n \\ X \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} k^m \\ AX \end{smallmatrix}$ .
- Il sistema lineare  $S : AX = B$  ha come soluzione uno spazio vettoriale se e solo se  $S$  è omogeneo.
- Sia  $S : AX = B$  un sistema lineare,  $S' : AX = \vec{0}$  si dice sistema omogeneo associato ad  $S$ .
- Sia  $S : AX = B$  un sistema lineare, le soluzioni  $X$  del sistema sono tutte e sole della forma  $\text{Sol}S = \{\bar{x} + y \text{ t.c. } y \in \ker f\} = \bar{x} + \ker f$ , dove  $\bar{x}$  è una soluzione particolare di  $S$  e  $\ker f$  è la soluzione generale del sistema omogeneo associato ad  $S$ .

**Teorema di Rouché-Capelli**

Sia  $S : AX = B$  un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite, e  $A = M_{m,n}(k)$ , allora:

1.  $S$  ha soluzioni se e solo se  $\text{rg}A = \text{rg}(A|B)$
2. se  $S$  ha soluzioni,  $\text{rg}A = \text{rg}(A|B) = r$  (eq. lin. indipendenti),  $n$  numero incognite allora:
  - se  $r = n$ ,  $S$  ha una sola soluzione
  - se  $r < n$ , si sono infinite ( $\infty^{r-n}$ ) soluzioni che dipendono da  $n - r$  parametri