Appunti di analisi 1

Giacomo Simonetto

Primo semestre 2023-24

Sommario

Appunti del corso di Analisi 1 della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

Indice

1 Cenni di teoria degli insiemi

1.1 Notazioni e definizioni di base

$$\mathbb{N} = \{ \ \textit{numeri naturali} \ \} = \{ \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ldots \}$$
$$\mathbb{Z} = \{ \ \textit{numeri interi} \ \} = \{ \ 0, \ +1, \ -1, \ +2, \ -2, \ldots \}$$
$$\mathbb{Q} = \{ \ \textit{numeri razionali} \ \} = \left\{ \ \frac{p}{q} \ \textit{t.c.} \ p, q \in \mathbb{N}, \ q \neq 0 \right\}$$
$$\mathbb{R} = \{ \ \textit{numeri reali} \ \}$$
$$\mathbb{C} = \{ \ \textit{numeri complessi} \ \}$$

$a \in A$	a (elemento) appartiene ad A (insieme)
$A \subseteq B$	A è un sottoinsieme di B
$A = B$	gli insiemi A e B hanno gli stessi elementi $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

1.2 Operazioni

unione	$A \cup B$	insieme costituito dagli elementi di A e dagli elementi di B
intersezione	$A \cap B$	insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B
differenza	$A \setminus B$	insieme costituito dagli elementi di A che non apaprtengono anche a B
prodotto catesiano	$A \times B$	insieme delle coppie ordinate di elementi formate da un elmeento di A e da un elmeneto di B $A \times B = \{(a, b) \ \textit{t.c.} \ a \in A \wedge b \in B\}$

1.3 Quantificatori

quantificatore universale	$\forall$	per ogni
quantificatore esistenziale	$\exists$	esiste
quantificatore esistenziale unico	$\exists!$	esiste ed è unico

1.4 Negazione di una proposizione

Data una proposizione R, la sua negazione $\neg R$ è una proposizione Q che è vera se e solo se R è falsa.

proposizione R	proposizione $Q = \neg R$
$\forall x \in A : P(x)$	$\exists x \in A : \neg P(x)$
$\exists x \in A : P(x)$	$\forall x \in A : \neg P(x)$

2 Sommatorie

2.1 Definizione

$$\sum_{i=n_0}^{n} x_i \quad := \quad x_{n_0} + x_{n_0+1} + x_{n_0+2} + \cdots + x_n$$

per $n_0, n \in \mathbb{Z}$ con $n_0 \leq n$

2.2 Proprietà

$$\begin{aligned}
\text{proprietà 1 (distributiva)} \quad & c \cdot \sum_{i=n_0}^{n} x_i = \sum_{i=n_0}^{n} c \cdot x_i \quad \forall c \in \mathbb{R} \\
\text{proprietà 2} \quad & \sum_{i=n_0}^{n} x_i + y_i = \sum_{i=n_0}^{n} x_i + \sum_{i=n_0}^{n} y_i \\
\text{proprietà 3.1} \quad & \sum_{i=n_0}^{n+m} x_i = \sum_{i=n_0}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i \\
\text{proprietà 3.2 per } m = 0 \quad & \sum_{i=n_0}^{n} x_i = \sum_{i=n_0}^{n-1} x_i + x_n \\
\text{proprietà 4 (sostituzione del pedice)} \quad & \sum_{i=n_0}^{n} x_i = \sum_{j=n_0+m}^{n+m} x_j \\
\text{proprietà 5 (variable muta)} \quad & \sum_{i=n_0}^{n} x_i = \sum_{j=n_0}^{n} x_j = \sum_{k=n_0}^{n} x_k
\end{aligned}$$

2.3 Principio di induzione

P: Siano:

- $n, n_0 \in \mathbb{N}$ *t.c.* $n \geq n_0$
- $P(n)$ una proposizione ben definita

H: supponiamo che:

- $P(n_0)$ sia vera
- $\forall n \geq n_0$, se $P(n)$ è vera, allora lo è anche $P(n-1)$

T: allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$

Dim: Dimostrazione per assurdo
Supponiamo che la tesi sia falsa: $\exists \overline{n} \geq n_0$ *t.c.* $P(n)$ è falsa

- Se $\overline{n} = n_0$, per cui $P(n_0)$ è falsa
- Se $\overline{n} > n_0$, per ipotesi anche $P(\overline{n}-1), P(\overline{n}-2), P(\overline{n}-3), \ldots P(n_0)$ sono false

Questo va contro l'ipotesi iniziale che $P(n_0)$ sia vera.
Per cui $\nexists \overline{n} \geq n_0$ *t.c.* $P(n)$ sia falsa e $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$ $\square$

3 Fattoriali

3.1 Definizione

$$n! := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot 1 & n > 0 \end{cases}$$

per $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 0$
Numero di riordinamenti di una famiglia di n elementi

3.2 Proprietà

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

4 Coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

per $n, k \in \mathbb{R}$
Significato geometrico ...

4.1 Proprietà

$$\begin{aligned} \text{proprietà 1.1} \quad & \binom{n}{n} = 1 \\ \text{proprietà 1.2} \quad & \binom{n}{0} = 1 \\ \text{proprietà 2} \quad & \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\ \text{proprietà 3} \quad & \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \\ \text{proprietà 4 (binomio di Newton)} \quad & (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \end{aligned}$$

4.2 Dimosrtrazione binomio di Newton

...

5 Numeri razionali

5.1 Definizione

$$\mathbb{Q} = \{ \text{ numeri razionali } \} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ t.c. } p, q \in \mathbb{N},\ q \neq 0 \right\}$$

5.2 Proprietà di campo

Quando un insieme soddisfa le seguenti proprietà, è detto campo. L'insieme $\mathbb{Q}$ è un campo.

Proprietà della somma

S1 proprietà commutativa $a + b = b + a$

S2 proprietà associativa $(a + b) + c = a + (b + c)$

S3 $\exists!$ elemento neutro indicato con 0 t.c. $a + 0 = a$

S4 $\exists$ elemento opposto indicato con $-a$ t.c. $a + (-a) = 0$

Proprietà del prodotto

P1 proprietà commutativa $a \cdot b = b \cdot a$

P2 proprietà associativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

P3 proprietà distributiva $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

P4 $\exists!$ elemento neutro indicato con 1 t.c. $a \cdot 1 = a$

P5 $\exists!$ elemento reciproco indicato con $\frac{1}{a}$ o a^{-1} t.c. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

5.3 Relazione d'ordine

Dato un insieme A, una relazione d'ordine (a, b) (es. $a \leq b$) su A è un sottoinsieme $R = A \times A$ tale che:

O1 $(a, a') \in R, \forall a \in A$

O2 Se $(a, a') \in R$ e $(a', a'') \in R$ allora $(a, a'') \in R$

O3 Se $(a, a') \in R$ e $(a', a) \in R$ allora $a = a'$

O4 Se $\forall a, a' \in A$ vale $(a, a') \in R$ o $(a', a) \in R$, ovvero quando presi due elementi è sempre possibile stabilire una relazione d'ordine valida

Quando un campo soddisfa le prime tre condizioni, allora viene detto ordinato. Quando un campo soddisfa anche la quarta condizione, allora viene detto totalmente ordinato.
L'insieme $\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato, per cui è possibile rappresentarne gli elementi in una retta.

5.4 Discrezione dei numeri razionali

L'insieme $\mathbb{Q}$ è discreto: data una retta, non tutti i punti di tale retta appartengono a $\mathbb{Q}$. Ad esempio il punto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: $\nexists x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$.

H: $x \in \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali

T: $\nexists x$ t.c. $x^2 = 2$

Dim: supponiamo per assurdo che $\exists x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$ per cui $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ e p, q primi tra loro

per cui $x^2 = 2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow p$ è pari $\Rightarrow \exists \overline{p}$ t.c. $p = 2 \cdot \overline{p}$

per cui $2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{(2 \cdot \overline{p})^2}{q^2} = 4 \cdot \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow q^2 = 2 \cdot \overline{p}^2 \Rightarrow q$ è pari

ma p e q sono stati assunti primi tra loro, per cui l'ipotesi che $\exists x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$ è errata $\square$

6 Numeri reali

6.1 Definizione

L'insieme $\mathbb{R}$ è composto da elementi (detti numeri reali) definiti come allineamenti decimali che possono essere:
- limitati es. $5,347$
- illimitati periodici es. $6,\overline{2}$
- illimitati non periodici es. π o $\sqrt{2}$
Questa estensione dell'insieme $\mathbb{Q}$ serve per poter risolvere $x^2 = 2$.

6.2 Proprietà

Su $\mathbb{R}$ si possono estendere le proprietà di somma, prodotto e ordinamento di $\mathbb{Q}$, per cui anche $\mathbb{R}$ è un insieme totalmente ordinato.

6.3 Teorema di completezza pt.1

H: Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$, $a \leq b$

T: $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq c \leq b, \forall a \in A$ e $\forall b \in B$ dove c è detto elemento separatore di A e B

In altre parole, presi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$, $a \leq b$ è sempre possibile trovare l'elemento separatore tra i due insiemi.
Questo teorema vale solo in $\mathbb{R}$ e non in $\mathbb{Q}$:
dati $A = \left\{x \geq 0 \; t.c. \; x^2 \leq 2\right\}$ e $B = \left\{x \geq 0 \; t.c. \; x^2 \geq 2\right\}$, $\exists c = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

6.4 Intervalli

Dato che $\mathbb{R}$ è un sistema completo, si può parlare di intervalli.

- intervalli limitati

$$
\begin{aligned}
(a, b) = \,]a, b[\, &= \{x \in R, a < x < b\} \\
(a, b] = \,]a, b] &= \{x \in R, a < x \leq b\} \\
[a, b) = [a, b[\, &= \{x \in R, a \leq x < b\} \\
[a, b] = [a, b] &= \{x \in R, a \leq x \leq b\}
\end{aligned}
$$

- intervalli illimitati

$$
\begin{aligned}
(a, +\infty) = \,]a, +\infty[\, &= \{x \in R, x > a\} \\
[a, +\infty) = [a, +\infty[\, &= \{x \in R, x \geq a\} \\
(-\infty, b) = \,]-\infty, b[\, &= \{x \in R, x < b\} \\
(-\infty, b] = \,]-\infty, b] &= \{x \in R, x \leq b\}
\end{aligned}
$$

Da notare che $+\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$, per cui è stato definito $\mathbb{R}^*$ o $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

7 Modulo

7.1 Definizione

$$|a| := \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

per $a \in \mathbb{R}$

7.2 Proprietà

1. $|a| \leq M \Leftrightarrow -M \leq a \leq M$ per $m \geq 0$
2. $|a| \geq M \Leftrightarrow a \leq -M$ o $a \geq M$ per $m \geq 0$
3. $-|a| \leq a \leq |a|$

7.3 Disuguaglianza triangolare pt.1

1. $|a + b| \leq |a| + |b|$
2. $||a| - |b|| \leq |a - b|$, cioè $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$

blablabla

8 Insiemi limitati e illimitati

8.1 Insiemi limitati e illimitati

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$:
A è **limitato superiormente** se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq M, \forall a \in A$.
A è **illimitato superiormente** se $\nexists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq M, \forall a \in A$.
A è **limitato inferiormente** se $\exists N \in \mathbb{R}$ t.c. $a \geq n, \forall a \in A$.
A è **illimitato inferiormente** se $\nexists n \in \mathbb{R}$ t.c. $a \geq n, \forall a \in A$.
A è un insieme limitato se è limitato superiormente e inferiormente,
cioè se $\exists N \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq |N|, \forall a \in A$.

8.2 Maggioranti e minoranti

Un tale numero M che limita A superiormente è detto **maggiorante** di A.
Se A non è limitato superiormente, non ha maggioranti.
Un tale numero N che limita A inferiormente è detto **minorante** di A.
Se A non è limitato inferiormente, non ha minoranti.

8.3 Massimi e minimi

Sia m un maggiorante di A, se $m \in A$ allora m è detto **massimo** di A.
Sia n un minorante di A, se $n \in A$ allora n è detto **minimo** di A.

8.4 Estremi superiori e inferiori

Sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ e A è superiormente limitato, un numero S detto $\sup A$ è detto **estremo superiore** di A quando è il minimo dei maggioranti di A.

$$S = \sup A \text{ se } S = \min\{\text{ maggioranti di } A\} \qquad \text{(definizione)}$$

$$S = \sup A \text{ se } \begin{cases} S \text{ è maggiorante di } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ t.c. } a < S - \varepsilon \quad (\nexists \text{ maggiorante più piccolo}) \end{cases} \qquad \text{(caratterizzazione)}$$

Sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ e A è inferiormente limitato, un numero I detto $\inf A$ è detto **estremo inferiore** di A quando è il massimo dei minoranti di A.

$$I = \inf A \text{ se } I = \max\{\text{ minoranti di } A\} \qquad \text{(definizione)}$$

$$I = \inf A \text{ se } \begin{cases} S \text{ è minorante di } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ t.c. } a < I + \varepsilon \quad (\nexists \text{ minorante più grande}) \end{cases} \qquad \text{(caratterizzazione)}$$

8.5 Teorema di unicità dell'esistenza di max, min, sup, inf

Se $\max A$ esiste, allora è unico. (dim. per assurdo)
Se $\min A$ esiste, allora è unico. (dim. per assurdo)
Se $\sup A$ esiste, allora è unico. (dim. unicità del minimo dei maggioranti)
Se $\inf A$ esiste, allora è unico. (dim. unicità del massimo dei minoranti)

8.6 Corrispondenza tra sup e max, inf e min

Se $\exists \sup A$ e $\sup A \in A$, allora $\exists \max A$ e $\sup A = \max A$.
Se $\exists \inf A$ e $\inf A \in A$, allora $\exists \min A$ e $\inf A = \min A$.

8.7 Teorema di completezza pt.2

Se A è superiormente limitato, allora A ammette un estremo superiore in $\mathbb{R}$. Se A è inferiormente limitato, allora A ammette un estremo inferiore in $\mathbb{R}$.

9 Potenze, radici, logaritmi

9.1 Potenze intere

Sia $\alpha \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z}$:

$$\alpha^p := \begin{cases} \alpha \cdot \alpha \cdot \ \ldots \ \cdot \alpha \text{ (per p volte)} & p > 0 \\ 1 & p = 0, \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{\alpha \cdot \alpha \cdot \ \ldots \ \cdot \alpha \text{ (per -p volte)}} & p < 0, \alpha \neq 0 \end{cases}$$

9.2 Esistenza e unicità delle radici intere

Sia $y \in \mathbb{R}, y \geq 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, allora $\exists! r \in \mathbb{R}$ t.c. $r^n = y$.
$r = \sqrt[n]{y}$ è chiamata radice ennesima di y

9.3 Potenze razionali (o radici)

Sia $a \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$:

$$a^{\frac{p}{q}} := \begin{cases} \sqrt[q]{a^p} = (a^p)^{\frac{1}{q}} & a \neq 0 \text{ o } p \neq 0 \\ 1 & a \neq 0, p = 0 \\ 0 & a = 0, p > 0 \end{cases}$$

9.4 Potenze reali (o esponenziali)

Sia $a, r \in \mathbb{R}, a \geq 0$:

$$a^r := \begin{cases} \sup \{a^s \text{ t.c. } s \leq r, s \in \mathbb{Q}\} & a \neq 0, r > 0 \\ \frac{1}{a^{-r}} & a \neq 0, r < 0 \\ 1 & a \neq 0, r = 0 \\ 0 & a = 0, r \neq 0 \end{cases}$$

9.5 Logaritmi

Siano $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, b > 0$, allora $\exists! x \in \mathbb{R}$ t.c. $a^x = b$ con

$$x = \log_a b = \begin{cases} \sup \{r \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a^r \leq b\} & a > 1 \\ \sup \{r \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a^r \geq b\} & 0 < a < 1 \end{cases}$$

9.6 Proprietà dei logaritmi

proprietà 1	$\log_a a = 1$
proprietà 2	$\log_a 1 = 0$
proprietà 3	$\log_a a^c = c$
proprietà 4	$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$
proprietà 5.1 (potenza)	$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x$
proprietà 5.2 (caso $\alpha = -1$)	$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
proprietà 6	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
proprietà 7.1 (cambio di base)	$\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$
proprietà 7.2 (caso $c = \frac{1}{a}$)	$\log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b$

10 Numeri complessi

10.1 Definizione e forma algebrica

Per risolvere equazioni del tipo $x^2+1=0$ è necessario introdurre un nuovo insieme definito con $\mathbb{C}$ definito come

$$\mathbb{C} = \{x + iy \text{ t.c. } x, y \in \mathbb{R} \text{ con } i = \text{unità immaginaria}\}$$

Sia $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z = x + iy &\quad \text{forma algebrica di } z \in \mathbb{C} \\ x = \Re(z) &\quad \text{parte reale di z} \\ y = \Im(z) &\quad \text{parte immaginaria di z} \end{aligned}$$

Si osserva che se $\Im(z) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
per cui $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \Im(z) = 0\}$

10.2 Proprietà

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \\ 0 + i0 &= 0 \text{ è l'elemento neutro della somma} \\ 1 + i0 &= 1 \text{ è l'elemento unitario (neutro del prodotto)} \\ -z &= (-x)) + i(-y) \text{ opposto di } z = x + iy \\ z^{-1} = \frac{1}{z} &= \frac{x}{x^2+y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2+y^2} \text{ inverso di } z \end{aligned}$$

Definite queste proprietà, l'insieme $\mathbb{C}$ è un campo. Dato che non è possibile stabilire una relazione d'ordine $\mathbb{C}$ non è un campo ordinato e tantomento totalmente ordinato.

10.3 Coniugato e proprietà

Sia $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, il suo coniugato è $\overline{z} = x - iy$.

$$\begin{aligned} \text{parte reale} &\quad \Re(\overline{z}) = \Re(z) \\ \text{parte immaginaria} &\quad \Im(\overline{z}) = -\Im(z) \\ \text{coniugato in } \mathbb{R} &\quad z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \\ \text{somma} &\quad z_1 + \overline{z_1} = 2x_1 \\ \text{differenza} &\quad z_1 - \overline{z_1} = 2iy_1 \\ \\ \text{somma} &\quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \text{prodotto} &\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ \text{quoziente} &\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \\ \text{doppio coniugato} &\quad \overline{(\overline{z})} = z \end{aligned}$$

10.4 Piano di Gauss

I numeri complessi possono essere rappresentati in un piano cartesiano, chiamato piano di Gauss, secondo le loro coordinate $(x; y) = (\Re(z); \Im(z))$.
Se $z \in \mathbb{R}$ il punto corrispondente sul piano giace sull'asse x.
Inoltre due numeri complessi coniugati sono simmetrici rispetto all'asse x.

10.5 Modulo e proprietà

Il modulo di un numero complesso è la distanza del punto dall'origine sul piano di Gauss.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned}
\text{modulo in } \mathbb{R} \quad & |z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x| \\
\text{rel. d'oridne} \quad & |z| \geq 0 \\
\text{coniugato} \quad & |z| = |\overline{z}| \\
\text{prodotto} \quad & |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \\
\text{inverso} \quad & \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \\
\text{quoziente} \quad & \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}
\end{aligned}$$

10.6 Disuguaglianza triangolare pt.2

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

$|z_1 + z_2|$ corrisponde al "vettore" ottenuto dalla somma tra del "vettore" $|z_1|$ e il "vettore" $|z_2|$. Graficamente si forma un triangolo con lati z_1, z_2 e $z_1 + z_2$, per cui la prima disuguaglianza "garantisce" che il triangolo non sia degenere.

Analogamente per la seconda disuguaglianza, dove al posto della somma, c'è la differenza.

Dimostrazione . . . si quadra e si sviluppa il modulo . . . per la seconda si impiega la prima . . .

10.7 Forma trigonometrica

Un numero complesso z può essere rappresentato secondo sue coordinate polari:

$$z := \rho \cdot (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

con

$$\begin{aligned}
\rho = & \text{ modulo di } z\text{, ovvero la distanza tra } z \text{ e l'origine} \\
= & |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\
\\
\vartheta = & \text{ argomento di } z\text{, ovvero l'angolo tra l'asse } x \text{ e il modulo di } z \\
= & \arg(z) = \begin{cases} \cos\vartheta = \frac{x}{\rho} \\ \sin\vartheta = \frac{y}{\rho} \end{cases}
\end{aligned}$$

Si nota che l'argomento di un numero complesso è determinato anche per multipli di 2π, per cui è definito argomento principale di z: $Arg(z)$ l'unico valore per $\arg(z)$ nell'intervallo $(-\pi; \pi]$.
Inoltre $\arg(z)$ non è definito per $z = 0$.

Il coniugato di $z = \rho\,(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$ è $\overline{z} = \rho\,(\cos\vartheta - i \sin\vartheta)$

Proprietà dell'argomento

Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Formule di De Moivre e potenze con la forma trigonometrica

Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$z_1 \cdot z_2 = \begin{cases} \text{modulo } = |z_1| \cdot |z_2| = \rho_1 \cdot \rho_2 \\ \text{argomento } = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \vartheta_1 + \vartheta_2 \end{cases}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \begin{cases} \text{modulo } = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \\ \text{argomento } = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \vartheta_1 - \vartheta_2 \end{cases}$$

$$z^n = \begin{cases} \text{modulo } = |z|^n = \rho^n \\ \text{argomento } = \arg(z) \cdot n = n\vartheta \end{cases}$$

10.8 Forma esponenziale

Un numero complesso z può essere rappresentato in forma esponenziale:

$$z := \rho \cdot e^{i\vartheta}$$

con

$$\rho = \text{ modulo di } z$$
$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta \qquad \text{(Fomula di Eulero)}$$

$$\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$$
$$\sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$

Il coniugato di $z = \rho e^{i\vartheta}$ è $\overline{z} = \rho e^{-i\vartheta}$
Se $\vartheta = 0 \to e^i = 1$
Se $\vartheta = \pi \to e^{i\pi} = -1$

Proprietà di $e^{i\vartheta}$

Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$e^z = \begin{cases} \text{modulo } e^x \\ \text{argomento } y \end{cases}$$
$$e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$
$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$$

Prodotti, quozienti e potenze con la forma esponenziale

Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \cdot e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$
$$z^n = \rho^n \cdot e^{in\vartheta}$$

11 Equazioni e disequazioni in C

11.1 Teorema fondamentale dell'algebra

Teorema fondamentale dell'algebra

H: Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ \dots \ + a_0$
con $a_n \neq 0$, $a_j \in \mathbb{C}\ \forall j \in [0; n]$

T: Allora esiste almento una radice di P, cioè una soluzione dell'equazione $P(z) = 0$, con $z \in \mathbb{C}$. La soluzione z è chiamata zero di P.

Molteplicità di una soluzione

H: Sia $P(z)$ come sopra e $z_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $P(z_0) = 0$

T: z_0 è uno zero con molteplicità $k \in \mathbb{N}$ se $\exists Q(x)$ di grado $n - k$ t.c.
$P(z) = (z - z_0)^k \cdot Q(z)$ e $Q(z_0) \neq 0$

Numero di soluzioni di un polinomio di grado n

H: Sia $P(z)$ come sopra (di grado n)

T: $P(z) = 0$ ha esattamente n soluzioni se contate con la propria molteplicità

Dim: applicando il teorema fondamentale dell'algebra a $P(z)$ si ottiene che
$\exists z_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $P(z_0) = 0$, per cui $\exists Q(z)$ t.c. $P(z) = (z - z_0) \cdot Q(z)$
riapplicando il teorema n volte si ottiene che
$P(z) = (z - z_0) \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ \dots \ \cdot (z - z_n)$
sono state, così, trovate n soluzioni $z_0, z_1, \dots, z_n$ di molteplicità 1 □

Soluzioni complesse coniugate per polinomi reali

P: Sia $P(x)$ un polinomio di grado n a coefficienti reali

H: se $z_0 \in \mathbb{C}$ una soluzione di $P(x)$

T: allora anche $\overline{z_0}$ è una soluzione di $P(x)$

Dim: Sia $P(z_0) = 0$ con $z_0 \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
P(\overline{z_0}) &= a_n \overline{z_0}^n + a_{n-1}\overline{z_0}^{n-1} + a_{n-2}\overline{z_0}^{n-2} + \ \dots \ + a_0 \\
&= a_n \overline{z_0^n} + a_{n-1}\overline{z_0^{n-1}} + a_{n-2}\overline{z_0^{n-2}} + \ \dots \ + a_0 \\
&= \overline{a_n}\,\overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0^{n-1}} + \overline{a_{n-2}}\,\overline{z_0^{n-2}} + \ \dots \ + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \overline{a_{n-2} z_0^{n-2}} + \ \dots \ + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + a_{n-2} z_0^{n-2} + \ \dots \ + a_0} \\
&= \overline{P(z_0)} \\
&= \overline{0} \\
P(\overline{z_0}) &= 0
\end{aligned}
$$

□

Numero di soluzioni complesse e reali

H$_1$: Sia $P(x)$ un polinomio di grado n a coefficienti reali

T$_1$: Le radici con parte immaginaria non nulla sono pari e a due a due l'una coniugata dell'altra

H$_2$: Sia $P(x)$ un polinomio di grado dispari a coefficienti reali

T$_2$: Il polinomio $P(x)$ ha almeno una soluzione reale

11.2 Teorema di decomposizione di polinomi

H: Sia $P(x)$ un polinomio di grado n a coefficienti reali

T: P può essre scomposto in:

$$P(z) = (z - x_1)^{k_1} \cdot (z - x_2)^{k_2} \cdot \ \ldots \ (z - x_l)^{k_l} \cdot \left(z^2 + A_1 z + B_1\right)^{j_1} \cdot \\ \cdot \left(z^2 + A_2 z + B_2\right)^{j_2} \cdot \ \ldots \ \cdot \left(z^2 + A_m z + B_m\right)^{j_m} \cdot C$$

con:

- $x_1, x_2, \ldots x_l \in \mathbb{R}$ radici reali del polinomio
- $k_1, k, 2 \ldots k_l \in \mathbb{N}$ molteplicità delle radici reali
- $\left(z^2 + A_m z + B_m\right) = (z - z_m) \cdot (z - \overline{z_m})$ radici complesse coniugate
- $j_1, j, 2 \ldots j_l \in \mathbb{N}$ molteplicità delle radici complesse coniugate
- $A_1, A_2, \ldots A_m, B_1, B_2, \ldots B_m, C \in \mathbb{R}$

11.3 Radici n-esime

Siano $z, w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che $z^n = w$

$$\begin{aligned} z^n = w &\Leftrightarrow \left(\rho e^{i\vartheta}\right)^n = re^{i\varphi} \\ &\Leftrightarrow \rho^n e^{in\vartheta} = re^{i\varphi} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\vartheta = \varphi + 2k\pi \qquad \text{con } k \in \{0, 1, \ldots n-1\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad \text{con } k \in \{0, 1, \ldots n-1\} \end{cases} \end{aligned}$$

In questo modo si ottengono n valori di ϑ al variare di k, ovvero n soluzioni come previsto dal teorema fondamentale dell'algebra.

Le soluzioni rappresentate nel piano di Gauss vengono disposte in una circonferenza di raggio pari al modulo $\rho = \sqrt[n]{r}$ distribuite a distanza angolare pari a $\frac{2\pi}{n}$ con un angolo di sfasamento rispetto all'asse x di $\frac{\varphi}{n}$. Congiungendo le soluzioni si ottiene un poligono regolare (es. 6 soluzioni $\rightarrow$ esagono regolare).

12 Funzioni

funzione	dati due insiemi X, Y t.c. $X, Y \neq \varnothing$, una funzione $y = f(x)$ è una relazione che associa ad ogni elemento $x \in X$ un unico elemento $y \in Y$
dominio	insieme X
codominio	insisme Y
immagine	sottoinsieme di Y definito come $Im(f) = f(A)$ $f(A) = \{y \in Y \text{ t.c. } \exists x \in A \text{ con } f(x) = y, A \subseteq X\}$
controimmagine	sottoinsieme di X definito come $f(B)^{-1} = \{x \in X \text{ t.c. } \exists y \in B \text{ con } f(x) = y, B \subseteq Y\}$
grafico	sottoinsieme di $X \times Y$ definito come $G(f) = \{(x; y) \in X \times Y \text{ t.c. } y = f(x)\}$

f a variabili reali	se il dominio $X \subseteq R$
f a valori reali	se il codominio $Y \subseteq R$
f parte intera	$f(x) = [x]$ defînta in $\mathbb{R}$ come il più grande numero intero $\leq x$
f parte frazionaria	$f(x) = x - [x]$
funzione di Dirichlet	$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

f pari	f è pari se $\forall x \in \text{dom} f$ e $-x \in \text{dom} f$, allora $f(x) = f(-x)$
f dispari	f è dispari se $\forall x \in \text{dom} f$ e $-x \in \text{dom} f$, allora $-f(x) = f(-x)$
f iniettiva	$f : X \to Y$ è iniettiva se $\forall y \in Y$ $\exists$al più un $x \in X$ t.c. $f(x) = y$, equivalentemente: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ e $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
f suriettiva	$f : X \to Y$ è suriettiva se $\forall y \in Y$ $\exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$
f bigettiva	$f : X \to Y$ è bigettiva se è sia iniettiva che suriettiva
f invertibile	$f : X \to Y$ è invertibile se è bigettiva
f inversa	$f^{-1} : f(X) \subseteq Y \to X$ t.c. $y \mapsto f^{-1}$ ovvero l'unico $x \in X$ t.c. $f(x) = y$ alcune funzioni inverse ... proprietà pari dispari delle inverse ...
f composta	siano $f : X \to Y$, $g : V \to Z$ con $f(X) \cap V \neq \varnothing$ e $\overline{X} \subseteq X$ t.c. $\overline{X} := \{x \in X \text{ t.c. } f(x) \in V\}$, la funzione composta di f con g è definita come $g \circ f : \overline{X} \to Z; x \mapsto g(f(x))$
f ristretta	$f\big\vert_A = A \subseteq X \to Y$ t.c. $x \mapsto f(x)$
f periodica	f è periodica se $f(x + T) = f(x), \forall x \in \text{dom} f$ per $T \in R, T > 0, x + T \in \text{dom} f$

f monotona crescente	se $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f$, $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$
f monotona decrescente	se $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f$, $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$
f strett. crescente	se $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f$, $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$
f strett. decrescente	se $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f$, $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) > f(x_2)$
f limitata superiormente	se Imf è limitata superiormente, ovvero se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M$, $\forall x \in \mathrm{dom} f$
f limitata inferiormente	se Imf è limitata inferiormente, ovvero se $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq m$, $\forall x \in \mathrm{dom} f$
f limitata	se Imf è limitata superiormente e inferiormente: $\exists m, M \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in \mathrm{dom} f$
maggioranti, minoranti massimi, minini, estemi sup. e inf. di f	un maggiorante, minorante, massimo, minimo, estremo inferiore, estremo superiore di f è definito come magg. . . di Imf

13 Funzioni iperboliche

13.1 Coseno iperbolico

Definizione

Il coseno iperbolico è una unzione definita come:

$$\cosh : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^-x}{2} \end{array}$$

Proprietà

Il coseno iperbolico è pari, decrescente in $(-\infty, 0]$ e decrescente in $[0, +\infty)$. Non è una funzione iniettiva.
Somma: $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
Differenza: $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$

Funzione inversa

La funzione inversa del coseno iperbolico, definita come settore coseno iperbolico, è definita come:

$$\text{settcosh} : \begin{array}{ccc} [1, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\ x & \mapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \end{array}$$

Da notare che siccome il cosh non è invertibile, è necessario restringere la funzione a $\cosh\big|_{[0,+\infty)}$ che ha come dominio $\text{dom} = [0, +\infty)$ e come immagine $Im = \cosh([0, +\infty)) = [1, +\infty)$.

13.2 Seno iperbolico

Definizione

Il seno iperbolico è una unzione definita come:

$$\sinh : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^-x}{2} \end{array}$$

Proprietà

Il seno iperbolico è dispari, sempre crescente, inoltre è una funzione iniettiva e suriettiva.
Somma: $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$
Differenza: $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \sinh y \cosh x$

Funzione inversa

La funzione inversa del seno iperbolico, definita come settore seno iperbolico, è definita come:

$$\text{settsinh} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \end{array}$$

13.3 Relazione fondamentale

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

13.4 Tangente iperbolica

Definizione

Il coseno iperbolico è una unzione definita come

$$\tanh : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^-x}{e^x + e^-x} \end{array}$$

Proprietà

La tangente iperbolica è dispari, sempre crescente, inoltre è sia iniettiva che suriettiva, con immagine $(-1, 1)$.

Funzione inversa

La funzione inversa del coseno iperbolico, definita come settore coseno iperbolico, è definita come:

$$\text{setttanh} : \begin{array}{rcl} (-1, 1) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1+x}{1-x} \right) \end{array}$$

14 Limiti

14.1 Intorni

Definizione

Sia $r \in \mathbb{R}^*$, allora un intorno "sferico" centrato in r è un intervallo aperto definito come:

$$\begin{aligned} (r-\varepsilon, r+\varepsilon) &\quad \text{se } r \in \mathbb{R} \\ (M, +\infty) &\quad \text{se } r = +\infty \\ (-\infty, N) &\quad \text{se } r = -\infty \end{aligned}$$

Proprietà

P_1: Sia $r \in \mathbb{R}^*$ e siano U_1 e U_2 due intorni di r, allora $U_1 \cap U_2$ è ancora un intorno di r.

Dim_1: consideriamo solo il caso per cui $r \in \mathbb{R}$ (con $r \neq \pm\infty$)
Siano $U_1 = (r - \varepsilon_1, r + \varepsilon_1)$ con $\varepsilon_1 > 0$ oppure $U_1 = \mathbb{R}$
e $U_2 = (r - \varepsilon_2, r + \varepsilon_2)$ con $\varepsilon_2 > 0$ oppure $U_2 = \mathbb{R}$
Prendiamo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ e abbiamo che $U_1 \cap U_2 = (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ che è un intorno di r. $\square$

P_2: **Proprietà di separazione**: $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}^*$ con $r_1 \neq r_2$ esistono U_1 e U_2 intorni rispettivamente di r_1 e r_2 tali che $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Dim_2: consideriamo solo il caso per cui $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ (con $r_1, r_2 \neq \pm\infty$)
Assumiamo $r_1 < r_2$ senza perdita di generalità (possono essere invertiti) e vogliamo dimostrare che esistono due intorni U_1, U_2 t.c. $U_1 \cap U_2 = \varnothing$
Scegliamo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{r_2 - r_1}{2}$
per cui $\forall x_1 \in (r_1 - \varepsilon_1, r_1 + \varepsilon_1)$ e $\forall x_2 \in (r_2 - \varepsilon_2, r_2 + \varepsilon_2)$
per cui $x_1 < r_1 + \dfrac{r_2 - r_1}{2} = \dfrac{r_2 + r_1}{2} = r_2 - \dfrac{r_2 - r_1}{2} < x_2$
per cui $(r_1 - \varepsilon_1, r_1 + \varepsilon_1) \cap (r_2 - \varepsilon_2, r_2 + \varepsilon_2) = \varnothing$ $\square$

14.2 Punti di accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \varnothing$, $r \in \mathbb{R}^*$ è punto di accumulazione di A quando:

$$\forall \text{ intorno } U \text{ di } r \text{ si ha che } A \cap U \setminus \{r\} \neq \varnothing$$

In altre parole ogni intorno di r deve contenere (almeno) un elemento di A che non sia r stesso. Un punto di accumulazione di A può non appartenere all'insieme A.

$$\begin{aligned} \text{se } r \in \mathbb{R} &\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A, x \neq r \text{ t.c. } |x - r| < \varepsilon \text{ ovvero } x \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \\ \text{se } r = +\infty &\quad \forall M \in \mathbb{R}\ \exists x \in A \text{ t.c. } x > M \text{ ovvero che } A \text{ non è limitato superiormente} \\ \text{se } r = -\infty &\quad \forall N \in \mathbb{R}\ \exists x \in A \text{ t.c. } x < N \text{ ovvero che } A \text{ non è limitato inferiormente} \end{aligned}$$

14.3 Punti isolati

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \varnothing$, $r \in \mathbb{R}^*$ è punto isolato di A se non è un punto di accumulazione, ovvero se $\exists$ un intorno U di r t.c. $U \cap A = \{r\}$.
Un punto isolato di A deve necessariamente appartenere all'insieme A, inolte $\pm\infty$ non possono essere punti isolati, ma soltanto punti di accumulazione.

14.4 Intorni e proprietà vere definitivamente

Sia $f : \text{dom}f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione di dom$f$ e P proprietà definita sul dom$f$, allora f soddisfa P definitivamente per $x \to x_0$ se $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in \text{dom}f \cap U \setminus \{x_0\}$ $f(x)$ verifica P.

Osservazioni

O1: Non è detto che P sia verificata in x_0 (infatti x_0 potrebbe $\notin \text{dom}f$).

O2: Basta che esista un intorno per cui P sia verificata, altrimenti se P è verificata per ogni intorno, ovvero P vale $f\forall x \in \text{dom}f \setminus \{x_0\}$, non significa che P sia verificata vicino a x_0.

14.5 Limite di una funzione

Definizione

Sia $f : \text{dom}f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione di dom$f$ e $l \in \mathbb{R}^*$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \text{quando}$$

I: $\forall U$ intorno di l $\exists V$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in U, \forall x \in \text{dom}f \cap V \setminus \{x_0\}$

II: $\forall U$ intorno di l $\exists V$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in \text{dom}f \cap V \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$

III: $\forall U$ intorno di l $f(x) \in U$ è verificata definitivamente per $x \to x_0$

Usando la definizione di intorno si ottiene che:

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| < \varepsilon\ \forall x \in \text{dom}f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} &\quad x_0, l \in \mathbb{R} \\
\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) > M\ \forall x \in \text{dom}f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 \in \mathbb{R}, l = +\infty \\
\forall N \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) < N\ \forall x \in \text{dom}f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 \in \mathbb{R}, l = -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0\ \exists M \text{ t.c. } |f(x) - l| < \varepsilon\ \forall x \in \text{dom}f \cap (M, +\infty) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 = +\infty, l \in \mathbb{R} \\
\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \overline{M} \text{ t.c. } f(x) > M\ \forall x \in \text{dom}f \cap \left(\overline{M}, +\infty\right) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 = +\infty, l = +\infty \\
\forall N \in \mathbb{R}\ \exists M \text{ t.c. } f(x) < N\ \forall x \in \text{dom}f \cap (M, +\infty) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 = +\infty, l = -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0\ \exists N \text{ t.c. } |f(x) - l| < \varepsilon\ \forall x \in \text{dom}f \cap (-\infty, N) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 = -\infty, l \in \mathbb{R} \\
\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \text{ t.c. } f(x) > M\ \forall x \in \text{dom}f \cap (-\infty, N) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 = -\infty, l = +\infty \\
\forall N \in \mathbb{R}\ \exists \overline{N} \text{ t.c. } f(x) < N\ \forall x \in \text{dom}f \cap \left(-\infty, \overline{N}\right) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 = -\infty, l = -\infty
\end{aligned}$$

Limiti definiti e indefiniti

Per $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$:

se $l \in \mathbb{R}$	il limite esiste ed è finito
se $l = \pm\infty$	il limite esiste ed è infinito
se $l = 0$	la funzione è infinitesima
se l non è definibile univocamente	il limite non esiste ed è indefinito

Osservazioni

x_0 punto di accumulazione di dom$f$ non assicura che $x_0 \in \text{dom}f$, infatti se $x_0 \notin \text{dom}f$ non ha senso $f(x_0)$ e se $x_0 \in \text{dom}f$ il valore di $f(x_0)$ non influenza il limite, in quanto si esclude il valore di x_0.

Graficamente, la definizione di limite significa scegliere un certo "errore" ε lungo l'asse y e trovare un intorno di x_0 lungo l'asse x per cui preso qualsiasi punto nell'intervallo (escluso x_0), si ha che i valori assunti dalla funzione differiscono da un valore l al più di ε.

14.6 Teorema di unicità del limite

Se il limite esiste, è unico.

P: Dati $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione di $\mathrm{dom} f$,

H: se valgono $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_2$,

T: allora $l_1 = l_2$.

Dim: Per assurdo supponiamo che $l_1 \neq l_2$
dalla proprietà di separazione degli intorni $\exists V_1$ e V_2 intorni di l_1 e l_2 tali che $V_1 \cap V_2 = \varnothing$
dalle definizioni: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists U_1$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V_1\ \forall x \in U_1 \cap \mathrm{dom} f \setminus \{x_0\}$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow \exists U_2$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V_2\ \forall x \in U_2 \cap \mathrm{dom} f \setminus \{x_0\}$
si considera $U = U_1 \cap U_2$ per cui $\forall x \in U \cap \mathrm{dom} f \setminus \{x_0\}$ vale $f(x) \in V_1 \cap V_2 = \varnothing$
cioè $\nexists x \in U \cap \mathrm{dom} f \setminus \{x_0\}$ che è in contaddizione con il fatto che x_0 è un punto di accumulazione di $\mathrm{dom} f$, per cui l'ipotesi che $l_1 \neq l_2$ è sbagliata. □

14.7 Limite finito implica locale limitatezza

H: Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, cioè $l \neq \pm\infty$,

T: allora $\exists U$ intorno di x_0 e $N \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in U \cap \mathrm{dom} f \setminus \{x_0\}$ vale $|f(x) - l| \leq N$.

Dim: Dalla definizione di limite con $\varepsilon = 1$ abbiamo che $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U \cap \mathrm{dom} f \setminus \{x_0\}$ vale: $|f(x) - l| < 1 \Rightarrow |f(x)| < |l| + 1$. Scegliendo $N = |f(x)| < |l| + 1$ si ottiene la tesi. □

14.8 Limite destro e limite sinistro

Punti di accumulazione destro e sinistro

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A = \varnothing$, un punto $r \in \mathbb{R}$ è **punto di accumulazione destro** di A quando r è punto di accumulazione di $A \cap (r, +\infty)$.
Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A = \varnothing$, un punto $r \in \mathbb{R}$ è **punto di accumulazione sinistro** di A quando r è punto di accumulazione di $A \cap (-\infty, r)$.
Un punto di accumulazione destro o sinistro è necessariamente anche un punto di accumulazione, un punto di accumulazione è anche punto di accumulazione destro oppure sinistro, non è detto che sia entrambi.

Intorni destro e sinistro

Un **intorno destro** di $r \in \mathbb{R}$ è un insieme della forma $(r, r + \delta)$.
Un **intorno sinistro** di $r \in \mathbb{R}$ è un insieme della forma $(r - \delta, r)$.

Limiti destro e sinistro

Sia $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione destro di $\mathrm{dom} f$ e $l \in \mathbb{R}^*$, allora il **limite destro** è definito come:

$$\lim_{x \to {x_0}^+} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x)\big|_{(x_0, +\infty)} = l \quad \text{cioè quando:}$$

I: $\forall U$ intorno di l $\exists V$ intorno destro di x_0 t.c. $f(x) \in U, \forall x \in \mathrm{dom} f \cap V$

II: $\forall U$ intorno di l $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in \mathrm{dom} f \cap (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in U$

Sia $f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione sinistro di $\mathrm{dom} f$ e $l \in \mathbb{R}^*$, allora il **limite sinistro** è definito come:

$$\lim_{x \to {x_0}^-} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x)\big|_{(-\infty, x_0)} = l \quad \text{cioè quando:}$$

I: $\forall U$ intorno di l $\exists V$ intorno sinistro di x_0 t.c. $f(x) \in U, \forall x \in \mathrm{dom} f \cap V$

II: $\forall U$ intorno di l $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in \mathrm{dom} f \cap (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) \in U$

Teorema di unicità del limite destro e sinistro

Se il limite destro esiste, è unico.
Se il limite sinistro esiste, è unico.

I due teoremi si dimostrano in quando limite destro e limite sinistro sono limiti di funzioni ristrette e in quanto limiti, se esistono sono unici. $\square$

Teorema della relazione tra limite e limiti destro e sinistro

P: Sia x_0 punto di accumulazione sia destro che sinistro di $\text{dom}f$,

H $\Leftrightarrow$ T: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \end{cases}$

Dim $\Rightarrow$: Dall'ipotesi si ha che $\forall U$ intorno di l $\exists V$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in V \cap \text{dom}f \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
Considero come intorno destro $V+ = V \cap (x_0, +\infty)$ e come intorno sinistro $V^- = V \cap (-\infty, x_0)$,
per cui $\forall U$ $\exists V^+$ t.c. $\forall x \in V^+ \cap \text{dom}f \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ è valida in quanto $V^+ \subset V$ e anche
$\forall U$ $\exists V^-$ t.c. $\forall x \in V^- \cap \text{dom}f \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ è valida in quanto $V^- \subset V$,
ovvero $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

Dim $\Leftarrow$: Dall'ipotesi si ha che $\forall U$ intorno di l $\exists \delta_1 > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1) \cap \text{dom}f \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
e che $\forall U$ intorno di l $\exists \delta_2 > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0) \cap \text{dom}f \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
scelgo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ per cui $\forall U$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \text{dom}f \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$,
ovvero $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $\square$

Il teorema della relazione di unicità del limite destro e sinistro si utilizza per:

I: dimostrare l'inesistenza di un limite, se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

II: semplificare il calcolo del limite dove f, funzione definita per casi, cambia forma

14.9 Relazione tra limite e modulo

P: Sia x_0 punto di accumulazione di $\text{dom}f$

$\text{H}_1 \Leftrightarrow \text{T}_1$: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$

Dim_1: osservando che $|f(x) - 0| = |f(x)| = ||f(x)| - 0|$ e che $\text{dom}\,|f| = \text{dom}f$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } |f(x) - 0| < \varepsilon\ \forall x \in \text{dom}f \cap U \setminus \{x_0\} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } ||f(x)| - 0| < \varepsilon\ \forall x \in \text{dom}\,|f| \cap U \setminus \{x_0\} \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \end{aligned}$$

$\square$

$\text{H}_2 \Rightarrow$ - T_2: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$

Dim_2: Considerando il caso per cui $l \in \mathbb{R}$
Dall'ipotesi si ottiene che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists V$ intorno di x_0 t.c. $|f(x) - l| < \varepsilon$ $\forall x \in \text{dom}f \cap V \setminus \{x_0\}$
si osserva che $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon$ per la disuguaglianza triangolare
per cui per proprietà transitiva $||f(x)| - |l|| < \varepsilon$, inoltre $\text{dom}\,|f| = \text{dom}f$
per cui vale che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \overline{V}$ intorno di x_0 t.c. $||f(x)| - |l|| < \varepsilon$ $\forall x \in \text{dom}\,|f| \cap \overline{V} \setminus \{x_0\}$
ovvero $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$ $\square$

Si osserva che nel secondo teorema vale solo $\Rightarrow$ e non anche $\Leftarrow$, come nel primo ($\Leftrightarrow$).

14.10 Teorema di permanenza del segno

P: Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $x_0, l \in \mathbb{R}^*$

H$_1$: se $l \in (0, +\infty)$

T$_1$: allora f è definitivamente strettamente positiva per $x \to x_0$

Dim$_1$: Nel caso in cui $l = +\infty$ si ottiene che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
Dalla def. di limite si ottiene che $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) > M\ \forall x \in \mathrm{dom} f \cap U \setminus \{x_0\}$
scegiendo $M = 0$ si ottiene che $f(x) > 0\ \forall x \in \mathrm{dom} f \cap U \setminus \{x_0\}$

Nel caso in cui $l = (0, +\infty)$ si ottiene che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $l > 0$
Dalla def. di limite si ottiene che $\forall \varepsilon > 0\ \exists U$ intorno di x_0 t.c. $|f(x) - l| < \varepsilon\ \forall x \in \mathrm{dom} f \cap U \setminus \{x_0\}$
scegiendo $\varepsilon = l$ si ottiene che $|f(x) - l| < l \quad \Leftrightarrow \quad -l < f(x) - l < l \quad \Leftrightarrow \quad 0 < f(x) < 2l \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) > 0\ \forall x \in \mathrm{dom} f \cap U \setminus \{x_0\}$, ovvero la tesi. $\square$

H$_2$: se $l \in (-\infty, 0)$

T$_2$: allora f è definitivamente strettamente negativa per $x \to x_0$

Dim$_2$: analogamente alla Dim$_1$. $\square$

Corollario o II versione del teorema di permanenza del segno

P: Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $x_0, l \in \mathbb{R}^*$

H$_1$: se f è definitivamente positiva (≥ 0) per $x \to x_0$

T$_1$: allora $l \geq 0$

Dim$_1$: Supponiamo per assurdo che $l < 0$
Per il teorema di permanenza del segno $f(x) < 0$ definitivamente per $x \to x_0$, ma questo è in contraddizione con l'ipotesi, per cui l deve necessariamente essere ≥ 0. $\square$

H$_2$: se f è definitivamente negativa (≤ 0) per $x \to x_0$

T$_2$: allora $l \leq 0$

Dim$_2$: analogamente alla Dim$_1$. $\square$

Da osserva che il teorema diventa falso se si sostiuisce $\geq$ o $\leq$ al posto di $>$ o $<$, dato che quando se $l = 0$ non è possibile dedurre nessuna delle due conclusioni del teorema.
Inoltre il corollario diventa falso quando si sostiuisce $>$ o $<$ al posto di $\geq$ o $\leq$, per esempio $f(x) = x^2 > 0$ definitivamente per $x \to x_0 = 0$, ma $\lim_{x \to 0} f(x) = l = 0 \not> 0$.

14.11 Teorema dei due carabinieri

Caso limitato con $l \in \mathbb{R}$

P: Siano f, g, h, tre funzioni definite in $X \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X,

H: se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ definitivamente per $x \to x_0$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$

T: allora $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

Dim: Scelto un $\varepsilon > 0$ arbitrario, applicato alle definizioni dei seguenti limiti $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$
si ottengono due intorni U_f e U_h per cui $\begin{matrix} |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in U_f \cap X \setminus \{x_0\} \\ |h(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in U_h \cap X \setminus \{x_0\} \end{matrix}$,
mentre dalla prima ipotesi si ottiene che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall x \in V$ intorno di x_0 con $V \subseteq X$
Scelto un intorno $U = U_f \cap U_h \cap V$ si ha che $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ valgono
$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$, ovvero $l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \Leftrightarrow |g(x) - l| < \varepsilon\ \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$
cioè la definizione di $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$ $\square$

Caso illimitato con $l = \pm\infty$

P: Siano f, g, due funzioni definite in $X \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X,

H$_1$: se $f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

T$_1$: allora $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

H$_2$: se $f(x) \geq g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

T$_2$: allora $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

Dim: Analoga a quella per il caso limitato $\square$

Sia la dimostrazione per il caso limitato, sia quella per i casi illimitati, valgono anche per il limite destro e sinistro

Disuguaglianze di funzioni trigonometriche

H$_1$: per $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

T$_1$: $0 < \sin x \leq x \leq \tan x$

Dim$_1$: Disegnando un arco di circonferenza di raggio $r = 1$ con centro sull'origine O e chiamando P un punto sulla circonferenza, H la sua proiezione sull'asse x, Q il punto di intersezione del semiasse positivo x con la circonferenza e R, l'interesezione tra la perpendicolare a x per Q e la retta OP:
Si osserva che il tr. $\overset{\triangle}{\mathrm{OPH}}$ è contenuto nel settore circolare $\overset{\frown}{\mathrm{OPQ}}$ che è contenuto nel tr. $\overset{\triangle}{\mathrm{ORQ}}$, per cui $0 < A_{\overset{\triangle}{\mathrm{OPH}}} \leq A_{\overset{\frown}{\mathrm{OPQ}}} \leq A_{\overset{\triangle}{\mathrm{ORQ}}} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{r \cdot \sin x}{2} \leq \frac{r^2 \cdot x}{2} \leq \frac{r \cdot \tan x}{2} \quad \Leftrightarrow 0 < \sin x \leq x \leq \tan x$ $\square$

H$_2$: per $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

T$_2$: $0 > \sin x \geq x \geq \tan x$

Dim$_2$: si parte dalla disuguaglianza precedente, dove al posto di $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ viene posto $-x = \left(0, +\frac{\pi}{2}\right)$:
$0 < \sin(-x) \leq -x \leq \tan(-x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -\sin x \leq -x \leq -\tan x \quad \Leftrightarrow \quad 0 > \sin x \geq x \geq \tan x$ $\square$

14.12 Teorema sull'algebra dei limiti

Caso limitato

P: Siano f, g, due funzioni definite in $X \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X,

H: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$

T_1: $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$, ovvero limite del prodotto è il prodott dei limiti

T_2: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha l_f + \beta l_g$, ovvero limite della somma è la somma dei limiti

T_3: (se $l_g \neq 0$) $\quad \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_f}{l_g}$, ovvero limite del rapporto è il rapporto dei limiti

Dim_1: La tesi vuole che $\forall \varepsilon > 0\ \exists V$ intorno di x_0 t.c. $|f(x)g(x) - l_f l_g| < \varepsilon\ \forall x \in X \cap V \setminus \{x_0\}$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - l_f l_g| &= |f(x)g(x) - f(x)l_g - f(x)l_g - l_f l_g| \\ &= |f(x)\,(g(x) - l_g) - l_g\,(f(x) - l_f)| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - l_g| + |l_g| \cdot |f(x) - l_f| \qquad \text{per disuguaglianza triangolare} \end{aligned}$$

Per il teorema *Limite finito implica locale limitatezza* abbiamo che $\exists V_f$ intorno di x_0, $\exists M > 0$ t.c. $|f(x)| < M\ \forall x \in X \cap V_f \setminus \{x_0\}$, per cui dato $\overline{M} = \max\{M, l_g\}$ abbiamo che:

$$|f(x)g(x) - l_f l_g| \leq \overline{M} \cdot |g(x) - l_g| + \overline{M} \cdot |f(x) - l_f|$$

per la def. di $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f$, $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists \overline{V_f}$ intorno di x_0 t.c. $|f(x) - l_f| < \varepsilon_1\ \forall x \in X \cap \overline{V_f} \setminus \{x_0\}$
per la def. di $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_g$, $\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists V_g$ intorno di x_0 t.c. $|g(x) - l_g| < \varepsilon_2\ \forall x \in X \cap V_g \setminus \{x_0\}$
scegliendo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2\overline{M}}$ si ha che:

$$|f(x)g(x) - l_f l_g| \leq \overline{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2\overline{M}} + \overline{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2\overline{M}} = \varepsilon$$

verificato $\forall x \in X \cap V_f \cap \overline{V_f} \cap V_g$ □

Dim_2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \alpha f(x) + \beta g(x) &= \lim_{x \to x_0} \alpha f(x) + \lim_{x \to x_0} \beta g(x) \\ &= \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) + \beta \lim_{x \to x_0} g(x) \quad \text{per } T_1 \\ &= \alpha l_f + \beta l_g \quad \text{per ipotesi} \end{aligned}$$

□

Dim_3: considerando $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, si ottiene la T_1 □

Caso illimitato

P: Siano f, g, due funzioni definite in $X \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X,

H$_1$: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $g(x)$ definitivamente limitata per $x \to x_0$, $\lim_{x \to x_0} g(x)$ potrebbe anche non esistere

T$_1$: $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

H$_2$: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $g(x)$ definitivamente limitata per $x \to x_0$

T$_2$: $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$

H$_3$: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $g(x)$ definitivamente strettamente positiva per $x \to x_0$

T$_3$: $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

H$_4$: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $g(x)$ strettamente positiva e superiormente limitata definitivamente per $x \to x_0$

T$_4$: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Dim: saltata

Per i casi 2, 3 e 4 in cui $f(x) = -\infty$, bisogna invertire il segno del risultato del limite. Analogamente quando $g(x) < 0$ nei punti 3 e 4.

14.13 Teorema del confronto

P: Siano f, g, due funzioni definite in $X \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X,

H: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f \in \mathbb{R}^*$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}^*$ e $f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$

T: $l_f \leq l_g$ definitivamente per $x \to x_0$

Dim: per $l_f = -\infty$, $l_g = +\infty$, $l_f = l_g = +\infty$, o per $l_f = l_g = -\infty$ la tesi è verificata, negli altri casi:
definiamo $h(x) = g(x) - f(x)$ t.c. $h(x) \geq 0$ per ipotesi, definitivamente per $x \to x_0$
Per il teorema di permamenza del segno: $0 \leq \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = l_g - l_f$
per cui $0 \leq l_g - l_f$ ovvero la tesi $\square$

Si osserva che il teorema vale soltanto con il *leq* e non con il $<$, in quando se $f(x) = 0$ e $g(x) = x^2$, $f(x) < g(x)$ è definitivamente verificata per $x \to 0$, ma $\lim_{x \to 0} f(x) \not< \lim_{x \to 0} g(x)$

14.14 Limiti delle funzioni composte

P: Siano $f : \mathrm{dom}f \to \mathbb{R}$ e $g : \mathrm{dom}g \to \mathbb{R}$ due funzioni, x_0 punto di accumulazione di $\mathrm{dom}f$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $\mathrm{dom}g$

H$_1$: Se $f(\mathrm{dom}f) \subset \mathrm{dom}g$, ovvero $g \circ f : \mathrm{dom}f \to \mathbb{R}$ è definita,

H$_2$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$

H$_3$: $\lim\limits_{x \to x_0} g(y) = l \in \mathbb{R}$

H$_4$: $f(x) \neq y_0$ per $x \in \mathrm{dom}f$

T: $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = l$

Dim: per H$_2$: $\forall \eta > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \eta$
per H$_3$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ t.c. $0 < |y - y_0| < \eta \Rightarrow |g(y) - l| < \varepsilon$
per H$_4$: $|f(x) - y_0| \neq 0$
concatendando H$_2$ e H$_3$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - l| < \varepsilon$
ovvero $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = l$ □

14.15 Limiti delle funzioni monotone

P: Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e a, b punti di accumulazione sinistro e destro dell'intervallo (a, b)

H$_1$: Se f è monotona crescente

T$_1$: allora $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)) = \inf f(x)$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)) = \sup f(x)$ con $x \in \mathrm{dom}f$

H$_2$: Se f è monotona decrescente

T$_2$: allora $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)) = \sup f(x)$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)) = \inf f(x)$ con $x \in \mathrm{dom}f$

Dim$_1$: supponiamo $f(x)$ monotona crescente e limitata superiormente
dalla def. di sup: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{x} \in \mathrm{dom}f$ t.c. $L - \varepsilon < f(x)$ e $f(x) \leq L\ \forall x \in \mathrm{dom}f$ dove L è il sup di f
dalla def. di monotonia: $\forall x, \overline{x} \in \mathrm{dom}f$ con $x \geq \overline{x}$ si ha che $f(x) \geq f(\overline{x})$
unendo le due def.: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{x} \in \mathrm{dom}f$ t.c. $\forall x \geq \overline{x}$ ho $L - \varepsilon \leq f(\overline{x}) \leq f(x)(\leq L + \varepsilon)$
ovvero che $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{x} \in \mathrm{dom}f$ t.c. $\forall x \in (\overline{x}, b)$ ho $|f(x) - L| < \varepsilon$
cioè $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = L = \sup f$
Analogo per $\inf f$ □

Dim$_2$: analogo alla Dim$_1$ □

14.16 Funzioni continue e continuità

DEfinizione di continuità

Sia $f : \text{dom}f \to \mathbb{R}$, $f(x)$ è continua in $x_0 \in \text{dom}f \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Si osserva che se $f : \text{dom}f \in \mathbb{R}$ e $g : \text{dom}f \to \mathbb{R}$ continue in x_0 punto di accumulazione dom$f$ con $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ e $g \circ f$ è ben definita, allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(y_0)$

Funzioni continue in ogni punto del dominio

1. x^n con $n \in \mathbb{N}$ e dom $= \mathbb{R}$
2. $|x|^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e dom $= \mathbb{R}$
3. a^x con $a \in \mathbb{R}, a > 0$ e dom $= \mathbb{R}$
4. $\log_a n$ con $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ e dom $= (0, +\infty)$
5. $\sin x, \cos x$ con dom $= \mathbb{R}$

Per le dimostrazioni vedere gli appunti

14.17 Limiti a $\pm\infty$

1. $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$
2. $\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$
3. $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$
4. $\lim_{x \to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

Per le dimostrazioni vedere gli appunti

14.18 Gerarchie degli infiniti

T$_1$: $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \forall a > 1, \alpha > 0$

T$_2$: $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{(\log_a x)^\beta} = +\infty \qquad \forall a > 1, \alpha > 0, \beta > 0$

Dim: vedere appunti $\square$

14.19 Numero di Nepero e alcuni limiti notevoli

Definizione

Il numero di Nepero e è definito come $e = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ con $e = 2,71828$ ed $e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Altri limiti notevoli derivati dalla definizione del numero di Nepero

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x}{x} = 1$

14.20 Confronti asintotici

Siano f e g due funzioni definite su $X \subseteq R$ e x_0 punto di accumulazione di X. Le due funzioni sono asintotiche per $x \to x_0$, $f \sim g$ per $x \to x_0$ quando:

1. sono entrambe $\neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Proprietà

P1: se $f \sim g$ per $x \to x_0$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} f(x)$ o non esistono o esistono e coincidono

P2: se $f \sim g$ per $x \to x_0$ e $g \sim h$ per $x \to x_0$, allora $f \sim h$ per $x \to x_0$

P3: se $f \sim f'$, $g \sim g'$ e $h \sim h'$ per $x \to x_0$, allroa $\dfrac{f\cdot g}{h} \sim \dfrac{f'\cdot g'}{h'}$ per $x \to x_0$

Esempi di funzioni asintotiche

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 \quad\Rightarrow\quad \sin x \sim x$ per $x \to 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1 \quad\Rightarrow\quad \tan x \sim x$ per $x \to 0$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad\Rightarrow\quad \log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1 \quad\Rightarrow\quad e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

14.21 Simboli di Landau - o piccoli

Siano f e g due funzioni definite su $X \subseteq R$ e x_0 punto di accumulazione di X, sia g definitivamente $\neq 0$ per $x \to x_0$, $f(x) = o(g(x))$, ovvero f è un o piccolo di g, quando $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
Si osserva che se $g(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $f(x) = o(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Proprietà degli o piccoli

P1: $o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

P2: $o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g^2(x))$ per $x \to x_0$

P3: $\varphi(x) \cdot o(g(x)) = o(\varphi(x) \cdot g(x))$ per $x \to x_0$ e $\varphi(x) \neq 0$ definitivamente

P4.1: $\varphi(x) \cdot o(g(x)) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ e $\varphi(x)$ è definitivamente limitata

P4.2: $c \cdot o(g(x)) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

P5: $|o(g(x))|^\alpha = o(|g(x)|^\alpha)$ per $x \to x_0$

Legame tra asintoticità e o piccoli

Siano f e g due funzioni definite su $X \subseteq R$ e x_0 punto di accumulazione di X, f, g definitivamente $\neq 0$ per $x \to x_0$, allora:

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \backslash 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \sim l \cdot g(x) \text{ per } x \to x_0$$
$$\Leftrightarrow \quad f(x) = l \cdot g(x) + o(g(x)) \text{ per } x \to x_0$$

Cambio di variabili negli sviluppi

P: Siano f, φ e φ_1 tre funzioni t.c. $\varphi \circ f$ e $\varphi_1 \circ f$ siano definite sullo stesso insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X, se:

H:
1. $\varphi(y) = \varphi_1(y) + o(\varphi_1(y))$ per $y \to y_0$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$
3. $f(x) \neq y_0$ per $x \to x_0$ o $\varphi(y_0) = \varphi_1(y_0)$

T: $\varphi(f(x)) = \varphi_1(f(x)) + o(\varphi_1(f(x)))$ per $x \to x_0$

Esempi di cambio di variabile negli sviluppi

Sappiamo che $\sin y = y + o(y)$ per $y \to y_0 = 0$

- per $y = f(x) = x^2$, si osserva che $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = y_0$ si ottiene che $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$
- per $y = f(x) = x^3 - 1$, si osserva che $\lim_{x \to 1} f(x) = 0 = y_0$ si ottiene che $\sin(x^3 - 1) = x^3 - 1 + o(x^3 - 1)$ per $x \to 1$