Appunti di analisi 1

Giacomo Simonetto

Primo semestre 2023-24

Sommario

Appunti del corso di Analisi 1 della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

Indice

1 Cenni di teoria degli insiemi

1.1 Notazioni e definizioni di base

L'insieme è un concetto primitivo, per cui non ha definizione. È inteso come collezione di elementi.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{ \text{ } \textit{numeri naturali} \text{ } \} = \{ \text{ } 0, \ 1, \ 2, \ 3, \dots \} \\
&\mathbb{Z} = \{ \text{ } \textit{numeri interi} \text{ } \} = \{ \text{ } 0, \ +1, \ -1, \ +2, \ -2, \dots \} \\
&\mathbb{Q} = \{ \text{ } \textit{numeri razionali} \text{ } \} = \left\{ \ \frac{p}{q} \text{ t.c. } p, q \in \mathbb{N}, \ q \neq 0 \right\} \\
&\mathbb{R} = \{ \text{ } \textit{numeri reali} \text{ } \} = \text{ punti di una retta} \\
&\mathbb{C} = \{ \text{ } \textit{numeri complessi} \text{ } \} = \text{ punti di un piano} \\
&\varnothing = \text{ insieme vuoto}
\end{aligned}$$

$a \in A$	a (elemento) appartiene ad A (insieme)
$A \subseteq B$	A è un sottoinsieme di B, $\varnothing$ è sottinsieme di tutti gli insiemi
$A = B$	gli insiemi A e B hanno gli stessi elementi $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

1.2 Operazioni

unione	$A \cup B$	insieme costituito dagli elementi di A e dagli elementi di B
intersezione	$A \cap B$	insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B
differenza	$A \setminus B$	insieme costituito dagli elementi di A che non apaprtengono anche a B
prodotto catesiano	$A \times B$	insieme delle coppie ordinate di elementi formate da un elmeento di A e da un elmeneto di B $A \times B = \{(a, b) \text{ t.c. } a \in A \wedge b \in B\}$

1.3 Quantificatori

quantificatore universale	$\forall$	per ogni
quantificatore esistenziale	$\exists$	esiste
quantificatore esistenziale unico	$\exists!$	esiste ed è unico

1.4 Negazione di una proposizione

Data una proposizione R, la sua negazione $\neg R$ è una proposizione Q che è vera se e solo se R è falsa.

proposizione R	proposizione $Q = \neg R$
$\forall x \in A : P(x)$	$\exists x \in A : \neg P(x)$
$\exists x \in A : P(x)$	$\forall x \in A : \neg P(x)$

2 Sommatorie

2.1 Definizione

$$\sum_{i=n_0}^{n} x_i \quad := \quad x_{n_0} + x_{n_0+1} + x_{n_0+2} + \cdots + x_n$$

per $n_0, n \in \mathbb{Z}$ con $n_0 \leq n$

2.2 Proprietà

1. $c \cdot \sum_{i=n_0}^{n} x_i = \sum_{i=n_0}^{n} c \cdot x_i \quad \forall c \in \mathbb{R}$ proprietà distributiva
2. $\sum_{i=n_0}^{n} x_i + y_i = \sum_{i=n_0}^{n} x_i + \sum_{i=n_0}^{n} y_i$
3. $\sum_{i=n_0}^{n+m} x_i = \sum_{i=n_0}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i$
4. $\sum_{i=n_0}^{n} x_i = \sum_{i=n_0}^{n-1} x_i + x_n$
5. $\sum_{i=n_0}^{n} x_i = \sum_{j=n_0+m}^{n+m} x_j$ proprietà di sostituzione del pedice
6. $\sum_{i=n_0}^{n} x_i = \sum_{j=n_0}^{n} x_j = \sum_{k=n_0}^{n} x_k$ proprietà della variabile muta

2.3 Principio di induzione

P: Siano:

- $n, n_0 \in \mathbb{N}$ *t.c.* $n \geq n_0$
- $P(n)$ una proposizione ben definita

H: supponiamo che:

- $P(n_0)$ sia vera
- $\forall n \geq n_0$, se $P(n)$ è vera, allora lo è anche $P(n-1)$

T: allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$

Dim: Dimostrazione per assurdo
Supponiamo che la tesi sia falsa: $\exists \overline{n} \geq n_0$ *t.c.* $P(n)$ è falsa

- Se $\overline{n} = n_0$, allora $P(n_0)$ è falsa
- Se $\overline{n} > n_0$, per ipotesi anche $P(\overline{n}-1), P(\overline{n}-2), P(\overline{n}-3), \ldots P(n_0)$ sono false

Questo va contro l'ipotesi iniziale che $P(n_0)$ sia vera.
Per cui $\nexists \overline{n} \geq n_0$ *t.c.* $P(n)$ sia falsa e $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$ $\square$

3 Fattoriali

Definizione

$$n! := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot 1 & n > 0 \end{cases}$$

per $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 0$
Significato insiemistico: numero di riordinamenti di una famiglia di n elementi (permutazioni semplici).

Proprietà

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

4 Coefficienti binomiali

Definizione

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

per $n, k \in \mathbb{R}$
Significato insiemistico: numero di sottoinsiemi distiniti di k elementi che si possono formare in un insieme di n elementi.

Proprietà

1. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
4. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ Binomio di Newton

4.1 Dimostrazione binomio di Newton

Si dimostra per induzione:

- caso base per $n_0 = 1$:

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} \\ &= \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 \\ &= b + a\end{aligned}$$

- passo induttivo per $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$:
  si assume che valga $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \cdot (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} a^{j+1} b^{n-j} + a^{n+1} + b^{n+1} && j = k-1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{k+1} b^{n-k} + a^{n+1} + b^{n+1} && k = j \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) a^{k+1} b^{n-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} a^{k+1} b^{n-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} && i = k+1 \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}\end{aligned}$$

$\square$

5 Numeri razionali

5.1 Definizione

$$\mathbb{Q} = \{ \text{ numeri razionali } \} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ t.c. } p, q \in \mathbb{N},\ q \neq 0 \right\}$$

5.2 Proprietà di campo

Quando un insieme soddisfa le seguenti proprietà, è detto campo. L'insieme $\mathbb{Q}$ è un campo.

Proprietà della somma

1. proprietà commutativa $a + b = b + a$
2. proprietà associativa $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists!$ elemento neutro indicato con 0 (in $\mathbb{Q}$) t.c. $a + 0 = a$
4. $\exists$ elemento opposto indicato con $-a$ t.c. $a + (-a) = 0$

Proprietà del prodotto

1. proprietà commutativa $a \cdot b = b \cdot a$
2. proprietà associativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. proprietà distributiva $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
4. $\exists!$ elemento neutro indicato con 1 (in $\mathbb{Q}$) t.c. $a \cdot 1 = a$
5. $\exists!$ elemento reciproco indicato con $\frac{1}{a}$ o a^{-1} t.c. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

5.3 Relazione d'ordine

Dato un insieme A, una relazione d'ordine (a, b) (es. $a \leq b$) su A è un sottoinsieme $R = A \times A$ tale che:

1. proprietà riflessiva: $(a, a) \in R, \forall a \in A$
2. proprietà transitiva: Se $(a, a') \in R$ e $(a', a'') \in R$ allora $(a, a'') \in R$
3. proprietà simmetrica: Se $(a, a') \in R$ e $(a', a) \in R$ allora $a = a'$

Quando un campo soddisfa le tre condizioni sopra, allora viene detto ordinato.

Se $\forall a, a' \in A$ vale $(a, a') \in R$ o $(a', a) \in R$, ovvero quando presi due elementi è sempre possibile stabilire una relazione d'ordine valida, allora il campo è anche totalmente ordinato.

L'insieme $\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato, per cui è possibile rappresentarne gli elementi in una retta. Inoltre in $\mathbb{Q}$ vale: $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a + c \leq b + c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$

5.4 Discrezione dei numeri razionali

L'insieme $\mathbb{Q}$ è discreto: data una retta, non tutti i punti di tale retta appartengono a $\mathbb{Q}$. Ad esempio il punto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: $\nexists x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$.

H: $x \in \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali

T: $\nexists x$ t.c. $x^2 = 2$

Dim: supponiamo per assurdo che $\exists x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$ per cui $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ e p, q primi tra loro

per cui $x^2 = 2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow p^2$ è pari $\Rightarrow p$ è pari (per assurdo) $\Rightarrow \exists \overline{p}$ t.c. $p = 2 \cdot \overline{p}$

per cui $2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{(2 \cdot \overline{p})^2}{q^2} = 4 \cdot \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow q^2 = 2 \cdot \overline{p}^2 \Rightarrow q^2$ è pari $\Rightarrow q$ è pari (per assurdo)

ma p e q sono stati assunti primi tra loro, per cui l'ipotesi che $\exists x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$ è errata $\square$

6 Numeri reali

6.1 Definizione

L'insieme $\mathbb{R}$ è composto da elementi (detti numeri reali) definiti come allineamenti decimali che possono essere:
- limitati es. $5,347$
- illimitati periodici es. $6,\overline{2}$
- illimitati non periodici es. π o $\sqrt{2}$

Questa estensione dell'insieme $\mathbb{Q}$ serve per poter risolvere $x^2 = 2$.

6.2 Proprietà

Su $\mathbb{R}$ si possono estendere le proprietà di somma, prodotto e ordinamento di $\mathbb{Q}$, per cui anche $\mathbb{R}$ è un insieme totalmente ordinato.

6.3 Teorema di completezza pt.1

H: Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$, $a \leq b$

T: $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq c \leq b, \forall a \in A$ e $\forall b \in B$ dove c è detto elemento separatore di A e B

In altre parole, presi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$, $a \leq b$ è sempre possibile trovare l'elemento separatore tra i due insiemi.
Questo teorema vale solo in $\mathbb{R}$ e non in $\mathbb{Q}$:
dati $A = \big\{x \geq 0 \text{ t.c. } x^2 \leq 2\big\}$ e $B = \big\{x \geq 0 \text{ t.c. } x^2 \geq 2\big\}$, $\exists c = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

6.4 Intervalli

Dato che $\mathbb{R}$ è un sistema completo, si può parlare di intervalli.

- **intervalli limitati**:

$$(a, b) = \,]a, b[\, = \{x \in R, \text{ t.c. } a < x < b\}$$
$$(a, b] = \,]a, b] = \{x \in R, \text{ t.c. } a < x \leq b\}$$
$$[a, b) = [a, b[\, = \{x \in R, \text{ t.c. } a \leq x < b\}$$
$$[a, b] = [a, b] = \{x \in R, \text{ t.c. } a \leq x \leq b\}$$

- **intervalli illimitati**:

$$(a, +\infty) = \,]a, +\infty[\, = \{x \in R, \text{ t.c. } x > a\}$$
$$[a, +\infty) = [a, +\infty[\, = \{x \in R, \text{ t.c. } x \geq a\}$$
$$(-\infty, b) = \,]-\infty, b[\, = \{x \in R, \text{ t.c. } x < b\}$$
$$(-\infty, b] = \,]-\infty, b] = \{x \in R, \text{ t.c. } x \leq b\}$$

Da notare che $+\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$, per cui è stato definito $\mathbb{R}^*$ o $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

7 Modulo

7.1 Definizione

$$|a| := \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \qquad \text{per } a \in \mathbb{R}$$

7.2 Proprietà

$\forall a, M \in \mathbb{R}$ con $M \geq 0$

1. $|a| \leq M \quad \Leftrightarrow \quad -M \leq a \leq M$ per $M \geq 0$
2. $|a| \geq M \quad \Leftrightarrow \quad a \leq -M$ o $a \geq M$ per $M \geq 0$
3. $-|a| \leq a \leq |a|$

7.3 Disuguaglianza triangolare pt.1

1. $|a+b| \leq |a| + |b|$
2. $||a| - |b|| \leq |a-b|$, cioè $-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|$

Per comprenderne il significato e per la dimostrazione, vedere la sezione 10.5 nel capitolo dei numeri complessi.

8 Insiemi limitati e illimitati

8.1 Insiemi limitati e illimitati

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$:
A è **limitato superiormente** se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq M, \forall a \in A$.
A è **illimitato superiormente** se $\nexists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq M, \forall a \in A$.
A è **limitato inferiormente** se $\exists N \in \mathbb{R}$ t.c. $a \geq n, \forall a \in A$.
A è **illimitato inferiormente** se $\nexists n \in \mathbb{R}$ t.c. $a \geq n, \forall a \in A$.
A è un insieme limitato se è limitato superiormente e inferiormente,
cioè se $\exists N \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq |N|, \forall a \in A$.

8.2 Maggioranti e minoranti

Un tale numero M che limita A superiormente è detto **maggiorante** di A.
Se A non è limitato superiormente, non ha maggioranti.
Un tale numero N che limita A inferiormente è detto **minorante** di A.
Se A non è limitato inferiormente, non ha minoranti.

8.3 Massimi e minimi

Sia m un maggiorante di A, se $m \in A$ allora m è detto **massimo** di A.
Sia n un minorante di A, se $n \in A$ allora n è detto **minimo** di A.

8.4 Estremi superiori e inferiori

Sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ e A è superiormente limitato, un numero S detto $\sup A$ è detto **estremo superiore** di A quando è il minimo dei maggioranti di A.

$$S = \sup A \text{ se } S = \min\{\text{ maggioranti di } A\} \qquad \text{(definizione)}$$

$$S = \sup A \text{ se } \begin{cases} S \text{ è maggiorante di } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ t.c. } a > S - \varepsilon \quad (\nexists \text{ maggiorante più piccolo}) \end{cases} \qquad \text{(caratterizzazione)}$$

Sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ e A è inferiormente limitato, un numero I detto $\inf A$ è detto **estremo inferiore** di A quando è il massimo dei minoranti di A.

$$I = \inf A \text{ se } I = \max\{\text{ minoranti di } A\} \qquad \text{(definizione)}$$

$$I = \inf A \text{ se } \begin{cases} S \text{ è minorante di } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ t.c. } a < I + \varepsilon \quad (\nexists \text{ minorante più grande}) \end{cases} \qquad \text{(caratterizzazione)}$$

8.5 Teorema di unicità dell'esistenza di max, min, sup, inf

Se $\max A$ esiste, allora è unico. (dim. per assurdo)
Se $\min A$ esiste, allora è unico. (dim. per assurdo)
Se $\sup A$ esiste, allora è unico. (dim. unicità del minimo dei maggioranti)
Se $\inf A$ esiste, allora è unico. (dim. unicità del massimo dei minoranti)

8.6 Corrispondenza tra sup e max, inf e min

Se $\exists \sup A$ e $\sup A \in A$, allora $\exists \max A$ e $\sup A = \max A$.
Se $\exists \inf A$ e $\inf A \in A$, allora $\exists \min A$ e $\inf A = \min A$.

8.7 Teorema di completezza pt.2

Se A è superiormente limitato, allora A ammette un estremo superiore in $\mathbb{R}$.
Se A è inferiormente limitato, allora A ammette un estremo inferiore in $\mathbb{R}$.

9 Potenze, radici, logaritmi

9.1 Potenze intere

Sia $a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z}$:

$$a^p := \begin{cases} \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{|p| \text{ volte}} & p > 0 \\ \dfrac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{|p| \text{ volte}}} & p < 0, a \neq 0 \\ 1 & p = 0, a \neq 0 \\ \text{non definito} & p \leq 0, a = 0 \end{cases}$$

9.2 Esistenza e unicità delle radici intere

Sia $y \in \mathbb{R}, y \geq 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, allora $\exists! r \in \mathbb{R}$ t.c. $r^n = y$.
$r = \sqrt[n]{y}$ è chiamata radice ennesima di y

9.3 Potenze razionali (o radici)

Sia $a \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$:

$$a^{\frac{p}{q}} := \begin{cases} \sqrt[q]{a^p} = (a^p)^{\frac{1}{q}} & a \neq 0 \text{ o } p \neq 0 \\ 1 & a \neq 0, p = 0 \\ 0 & a = 0, p > 0 \\ \text{non definito} & p \leq 0, a = 0 \end{cases}$$

9.4 Potenze reali (o esponenziali)

Sia $a, r \in \mathbb{R}, a \geq 0$:

$$a^r := \begin{cases} \sup\{a^s \text{ t.c. } s \leq r, s \in \mathbb{Q}\} & a \neq 0, r > 0 \\ \dfrac{1}{a^{-r}} & a \neq 0, r < 0 \\ 1 & a \neq 0, r = 0 \\ 0 & a = 0, r \neq 0 \\ \text{non definito} & r \leq 0, a = 0 \end{cases}$$

9.5 Logaritmi

Siano $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, b > 0$, allora $\exists! x \in \mathbb{R}$ t.c. $a^x = b$ con

$$x = \log_a b = \begin{cases} \sup\{r \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a^r \leq b\} & a > 1 \\ \sup\{r \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a^r \geq b\} & 0 < a < 1 \end{cases}$$

9.6 Proprietà dei logaritmi

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a a^c = c$
4. $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$

5.1. $\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x$

5.2. $\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$ per $\alpha = -1$

6. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

7.1. $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$ cambio di base

7.2. $\log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b$ per $c = \dfrac{1}{a}$

10 Numeri complessi

Per risolvere equazioni del tipo $x^2+1=0$ è necessario introdurre un nuovo insieme definito con $\mathbb{C}$ definito come

$$\mathbb{C} = \{x + iy \text{ t.c. } x, y \in \mathbb{R} \text{ con } i = \text{unità immaginaria}\}$$

10.1 Forma algebrica

Definizione

Sia $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{forma algebrica di } z \in \mathbb{C} \\ x &= \mathrm{Re}(z) && \text{parte reale di z} \\ y &= \mathrm{Im}(z) && \text{parte immaginaria di z} \end{aligned}$$

Si osserva che se $\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
per cui $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \mathrm{Im}(z) = 0\}$

Proprietà

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
2. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$
3. $0 + i0 = 0$ è l'elemento neutro della somma
4. $1 + i0 = 1$ è l'elemento unitario (neutro del prodotto)
5. $-z = (-x) + i(-y)$ opposto di $z = x + iy$
6. $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ inverso di z

Definite queste proprietà, l'insieme $\mathbb{C}$ è un campo. Dato che non è possibile stabilire una relazione d'ordine $\mathbb{C}$ non è un campo ordinato e tantomento non è totalmente ordinato.

10.2 Coniugato

Definizione

Sia $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, il suo coniugato è $\overline{z} = x - iy$.

Proprietà

1. parte reale: $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$
2. parte immaginaria: $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$
3. coniugato in $\mathbb{R}$: $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
4. somma: $z_1 + \overline{z_1} = 2x_1$
5. differenza: $z_1 - \overline{z_1} = 2iy_1$
6. prodotto: $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$
7. somma: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
8. prodotto: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
9. quoziente: $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
10. doppio coniugato: $\overline{(\overline{z})} = z$

10.3 Piano di Gauss

I numeri complessi possono essere rappresentati in un piano cartesiano, chiamato piano di Gauss, secondo le loro coordinate $(x, y) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$.
Se $z \in \mathbb{R}$ il punto corrispondente sul piano giace sull'asse x.
Inoltre due numeri complessi coniugati sono simmetrici rispetto all'asse x.

10.4 Modulo

Definizione

Il modulo di un numero complesso è la distanza del punto dall'origine sul piano di Gauss.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Proprietà

1. modulo in $\mathbb{R}$: $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$
2. relazione d'ordine: $|z| \geq 0$ ha senso
3. coniugato: $|z| = |\overline{z}|$
4. coniugato: $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$
5. prodotto: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
6. inverso: $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
7. quoziente: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

10.5 Disuguaglianza triangolare pt.2

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
2. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

$|z_1 + z_2|$ corrisponde al "vettore" ottenuto dalla somma tra del "vettore" $|z_1|$ e il "vettore" $|z_2|$. Graficamente si forma un triangolo con lati z_1, z_2 e $z_1 + z_2$, per cui la prima disuguaglianza "garantisce" che il triangolo non sia degenere. Caso simile per la seconda dove, al posto della somma, c'è la differenza.

Dimostrazione 1 in $\mathbb{C}$

$|z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ per definizione di modulo in $\mathbb{C}$
$|z_1| + |z_2| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} + \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$ per definizione di modulo in $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} + \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} \\
&\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leq {x_1}^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 + {y_2}^2 + 2 \cdot \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} \\
&\Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 \leq \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} \\
&\Leftrightarrow (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leq \left({x_1}^2 + {y_1}^2\right) \cdot \left({x_2}^2 + {y_2}^2\right) \\
&\Leftrightarrow 2 \cdot x_1x_2y_1y_2 \leq {x_1}^2{y_2}^2 + {x_2}^2{y_1}^2 \\
&\Leftrightarrow 0 \leq (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

$\square$

Dimostrazione 2 in $\mathbb{C}$

$|z_1| = |z_2 + (z_1 - z_2)| \leq |z_2| + |z_1 - z_2|$ per punto 1 disuguaglianza triangolare
per cui $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$
$|z_2| = |z_1 + (z_2 - z_1)| \leq |z_1| + |z_2 - z_1|$ per punto 1 disuguaglianza triangolare
per cui $|z_2 - z_1| \geq |z_2| - |z_1| \quad \Rightarrow \quad -|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$

Unendo quanto ottenuto si ottiene $-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ ovvero la tesi $\square$

10.6 Forma trigonometrica

Definizione

Un numero complesso z può essere rappresentato nel piano di Gauss secondo sue coordinate polari:

$$z := \rho \cdot (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

con

$\rho = \lvert z \rvert = \sqrt{x^2+y^2}$	modulo di z, ovvero la distanza tra z e l'origine
$\vartheta = \arg(z) = \begin{cases} \cos\vartheta = \frac{x}{\rho} \\ \sin\vartheta = \frac{y}{\rho} \end{cases}$	argomento di z, ovvero l'angolo tra l'asse x e il modulo di z

Si nota che l'argomento di un numero complesso è determinato anche per multipli di 2π, per cui è definito argomento principale di z, come $\mathrm{Arg}(z)$ l'unico valore per $\arg(z)$ nell'intervallo $(-\pi; \pi]$.
Inoltre $\arg(z)$ non è definito per $z = 0$, ovvero quando $\rho = 0$.

Il coniugato di $z = \rho\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ è $\overline{z} = \rho\,(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)$

Proprietà dell'argomento

Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

1. $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ — argomento del prodotto è la somma degli argomenti
2. $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ — argomento del rapporto è la differenza degli argomenti

Formule di De Moivre e potenze con la forma trigonometrica

Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$z_1 \cdot z_2 = \begin{cases} \text{modulo } = \lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert = \rho_1 \cdot \rho_2 \\ \text{argomento } = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \vartheta_1 + \vartheta_2 \end{cases}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \begin{cases} \text{modulo } = \dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \\ \text{argomento } = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \vartheta_1 - \vartheta_2 \end{cases}$$

$$z^n = \begin{cases} \text{modulo } = \lvert z\rvert^n = \rho^n \\ \text{argomento } = \arg(z) \cdot n = n\vartheta \end{cases}$$

10.7 Forma esponenziale

Un numero complesso z può essere rappresentato in forma esponenziale:

$$z := \rho \cdot e^{i\vartheta}$$

con

$$\begin{aligned} \rho &= \text{ modulo di } z \\ e^{i\vartheta} &= \cos\vartheta + i\sin\vartheta \qquad \text{(Fomula di Eulero)} \\ \cos\vartheta &= \frac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2} \qquad \sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i} \end{aligned}$$

Il coniugato di $z = \rho e^{i\vartheta}$ è $\overline{z} = \rho e^{-i\vartheta}$
Se $\vartheta = 0 \to e^{i} = 1$
Se $\vartheta = \pi \to e^{i\pi} = -1$

Esponenziale di un numero complesso

Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1. $e^z = \begin{cases} \text{modulo } e^x \\ \text{argomento } y \end{cases}$
2. $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
3. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
4. $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

Prodotti, quozienti e potenze con la forma esponenziale

Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

1. $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \cdot e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$
3. $z^n = \rho^n \cdot e^{in\vartheta}$

11 Equazioni e disequazioni in C

11.1 Teorema fondamentale dell'algebra

Teorema fondamentale dell'algebra

H: Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0$ con $a_n \neq 0$, $a_j \in \mathbb{C}\ \forall j \in [0;n]$

T: Allora esiste almento una radice di P, cioè una soluzione dell'equazione $P(z) = 0$, con $z \in \mathbb{C}$. La soluzione z_0 è chiamata zero di P.

Molteplicità di una soluzione

H: Sia $P(z)$ come sopra e $z_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $P(z_0) = 0$

T: z_0 è uno zero con molteplicità $k \in \mathbb{N}$ se $\exists Q(x)$ di grado $n - k$ t.c.
$P(z) = (z - z_0)^k \cdot Q(z)$ e $Q(z_0) \neq 0$

Numero di soluzioni di un polinomio di grado n

H: Sia $P(z)$ come sopra (di grado n)

T: $P(z) = 0$ ha esattamente n soluzioni se contate con la propria molteplicità

Dim: applicando il teorema fondamentale dell'algebra a $P(z)$ si ottiene che
$\exists z_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $P(z_0) = 0$, per cui $\exists Q(z)$ t.c. $P(z) = (z - z_0) \cdot Q(z)$
riapplicando il teorema n volte si ottiene che
$P(z) = (z - z_0) \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$
sono state, così, trovate n soluzioni $z_0, z_1, \dots, z_n$ di molteplicità 1 □

Soluzioni complesse coniugate per polinomi reali

P: Sia $P(x)$ un polinomio di grado n a coefficienti reali

H: se $z_0 \in \mathbb{C}$ una soluzione di $P(x)$

T: allora anche $\overline{z_0}$ è una soluzione di $P(x)$

Dim: Sia $P(z_0) = 0$ con $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
P(\overline{z_0}) &= a_n \overline{z_0}^n + a_{n-1} \overline{z_0}^{n-1} + a_{n-2} \overline{z_0}^{n-2} + \dots + a_0 \\
&= a_n \overline{z_0^n} + a_{n-1} \overline{z_0^{n-1}} + a_{n-2} \overline{z_0^{n-2}} + \dots + a_0 \\
&= \overline{a_n}\,\overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0^{n-1}} + \overline{a_{n-2}}\,\overline{z_0^{n-2}} + \dots + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \overline{a_{n-2} z_0^{n-2}} + \dots + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + a_{n-2} z_0^{n-2} + \dots + a_0} \\
&= \overline{P(z_0)} \\
&= \overline{0} \\
P(\overline{z_0}) &= 0
\end{aligned}$$

□

Numero di soluzioni complesse e reali

H_1: Sia $P(x)$ un polinomio di grado n a coefficienti reali

T_1: Le radici con parte immaginaria non nulla sono pari e a due a due l'una coniugata dell'altra

H_2: Sia $P(x)$ un polinomio di grado dispari a coefficienti reali

T_2: Il polinomio $P(x)$ ha almeno una soluzione reale

11.2 Teorema di decomposizione di polinomi

H: Sia P un polinomio di grado n a coefficienti reali

T: P può essere scomposto in:

$$P(z) = (z - x_1)^{k_1} \cdot (z - x_2)^{k_2} \cdot \ \ldots \ (z - x_l)^{k_l} \cdot \left(z^2 + A_1 z + B_1\right)^{j_1} \cdot$$
$$\cdot \left(z^2 + A_2 z + B_2\right)^{j_2} \cdot \ \ldots \ \cdot \left(z^2 + A_m z + B_m\right)^{j_m} \cdot C$$

con:

- $x_1, x_2, \ldots x_l \in \mathbb{R}$ radici reali del polinomio
- $k_1, k_2, \ldots k_l \in \mathbb{N}$ molteplicità delle radici reali
- $\left(z^2 + A_m z + B_m\right) = (z - z_m) \cdot (z - \overline{z_m})$ radici complesse coniugate
- $j_1, j_2, \ldots j_l \in \mathbb{N}$ molteplicità delle radici complesse coniugate
- $A_1, A_2, \ldots A_m, B_1, B_2, \ldots B_m, C \in \mathbb{R}$

11.3 Radici n-esime

Siano $z, w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che $z^n = w$

$$\begin{aligned} z^n = w &\Leftrightarrow \left(\rho e^{i\vartheta}\right)^n = re^{i\varphi} \\ &\Leftrightarrow \rho^n e^{in\vartheta} = re^{i\varphi} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\vartheta = \varphi + 2k\pi \qquad \text{con } k \in \{0, 1, \ldots n-1\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad \text{con } k \in \{0, 1, \ldots n-1\} \end{cases} \end{aligned}$$

In questo modo si ottengono n valori di ϑ al variare di k, ovvero n soluzioni come previsto dal teorema fondamentale dell'algebra.

Le soluzioni rappresentate nel piano di Gauss vengono disposte in una circonferenza di raggio pari al modulo $\rho = \sqrt[n]{r}$ distribuite a distanza angolare pari a $\frac{2\pi}{n}$ con un angolo di sfasamento rispetto all'asse x di $\frac{\varphi}{n}$. Congiungendo le soluzioni si ottiene un poligono regolare (es. 6 soluzioni $\rightarrow$ esagono regolare).

11.4 Equazioni in C

Equazioni di primo grado

Dati $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, un'equazione della forma $z_1 = z_2$ è verificata se e solo se la parte intera e la parte immaginaria sono uguali: $z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Equazioni di secondo grado

Le equazioni di secondo grado della forma $a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$ hanno come soluzioni i due numeri ottenuti dalle formule $\dfrac{-b + w_1}{2a}$ e $\dfrac{-b + w_2}{2a}$ dove w_1, w_2 sono le due radici quadrate di $\Delta = b^2 - 4ac$

Disequazioni in C

Dato che $\mathbb{C}$ non è un campo, non si possono risolvere disequazioni in $\mathbb{C}$. In genere i numeri complessi appaiono sotto moduolo e le soluzioni sono porzioni del piano di Gauss definite in funzione di x e y.

12 Funzioni

Definizioni

1. **funzione**: dati due insiemi X, Y t.c. $X, Y \neq \varnothing$, una funzione $y = f(x)$ è una relazione che associa ad ogni elemento $x \in X$ un unico elemento $y \in Y$, $f : X \to Y$
2. **dominio**: insieme X dove è definita la funzione
3. **codominio**: insieme Y, generalmente è un insieme numerico $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \ldots$ in cui vengono mappati gli elementi del dominio
4. **immagine**: sottoinsieme di Y definito come
$\mathrm{Im}(f) = f(A)$: $f(A) = \{y \in Y \text{ t.c. } \exists x \in A \text{ con } f(x) = y, A \subseteq X\}$
5. **controimmagine**: sottoinsieme di X definito come
$f(B)^{-1} = \{x \in X \text{ t.c. } \exists y \in B \text{ con } f(x) = y, B \subseteq Y\}$
6. **grafico**: sottoinsieme di $X \times Y$ definito come $G(f) = \{(x; y) \in X \times Y \text{ t.c. } y = f(x)\}$
7. f **a variabili reali**: se il dominio $X \subseteq \mathbb{R}$
8. f **a valori reali**: se il codominio $Y \subseteq \mathbb{R}$

Proprietà

1. f **pari**: f è pari se $\forall x \in \mathrm{dom}f$ e $-x \in \mathrm{dom}f$, allora $f(x) = f(-x)$
2. f **dispari**: f è dispari se $\forall x \in \mathrm{dom}f$ e $-x \in \mathrm{dom}f$, allora $-f(x) = f(-x)$
3. f **iniettiva**: $f : X \to Y$ è iniettiva se $\forall y \in Y$ $\exists$al più un $x \in X$ t.c. $f(x) = y$, equivalentemente: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ e $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
4. f **suriettiva**: $f : X \to Y$ è suriettiva se $\forall y \in Y$ $\exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$
5. f **bigettiva**: $f : X \to Y$ è bigettiva se è sia iniettiva che suriettiva
6. f **invertibile**: $f : X \to Y$ è invertibile se è bigettiva
7. f **inversa**: $f^{-1} : f(X) \subseteq Y \to X$ t.c. $y \mapsto f^{-1}$ ovvero l'unico $x \in X$ t.c. $f(x) = y$
8. f **composta**: date $f : X \to Y$, $g : V \to Z$ due funzioni con $f(X) \cap V \neq \varnothing$, $\overline{X} \subseteq X$ t.c. $\overline{X} := \{x \in X \text{ t.c. } f(x) \in V\}$, la funzione composta f con g è definita come $g \circ f : \overline{X} \to Z; x \mapsto g(f(x))$
9. f **ristretta**: $f\big|_A = A \subseteq X \to Y$ t.c. $x \mapsto f(x)$
10. f **periodica**: f è periodica se $f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathrm{dom}f$ per $T \in \mathbb{R}, T > 0, x + T \in \mathrm{dom}f$
11. f **monotona crescente**: se $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}f$, $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$
12. f **monotona decrescente**: se $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}f$, $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$
13. f **strett. crescente**: se $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}f$, $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$
14. f **strett. decrescente**: se $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}f$, $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) > f(x_2)$
15. f **limitata sup.**: se $\mathrm{Im}f$ è limitata superiormente, ovvero se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M$, $\forall x \in \mathrm{dom}f$
16. f **limitata inf.**: se $\mathrm{Im}f$ è limitata inferiormente, ovvero se $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq m$, $\forall x \in \mathrm{dom}f$
17. f **limitata**: se $\mathrm{Im}f$ è limitata superiormente e inferiormente: $\exists m, M \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in \mathrm{dom}f$
18. **maggioranti, minoranti, massimi, minini, sup. e inf. di** f: un maggiorante, minorante, massimo, minimo, estremo inferiore, estremo superiore di f è definito come magg... di $\mathrm{Im}f$

12.1 Esempi di funzioni

1. f **parte intera**: $f(x) = [x]$ definita in $\mathbb{R}$ come il più grande numero intero $\leq x$
2. f **parte frazionaria**: $f(x) = x - [x]$
3. **funzione di Dirichlet**:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

...

13 Funzioni iperboliche

13.1 Coseno iperbolico

Definizione

Il coseno iperbolico è una unzione definita come:

$$\cosh : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

Proprietà

Il coseno iperbolico è pari, decrescente in $(-\infty, 0]$ e decrescente in $[0, +\infty)$. Non è una funzione iniettiva.
Somma: $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
Differenza: $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$

Funzione inversa

La funzione inversa del coseno iperbolico, definita come settore coseno iperbolico, è definita come:

$$\text{settcosh} : \begin{array}{rcl} [1, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\ x & \mapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \end{array}$$

Da notare che siccome il cosh non è invertibile, è necessario restringere la funzione a $\cosh\big|_{[0,+\infty)}$ che ha come dominio $\text{dom} = [0, +\infty)$ e come immagine $\text{Im} = \cosh([0, +\infty)) = [1, +\infty)$.

13.2 Seno iperbolico

Definizione

Il seno iperbolico è una unzione definita come:

$$\sinh : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

Proprietà

Il seno iperbolico è dispari, sempre crescente, inoltre è una funzione iniettiva e suriettiva.
Somma: $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$
Differenza: $\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \sinh y \cosh x$

Funzione inversa

La funzione inversa del seno iperbolico, definita come settore seno iperbolico, è definita come:

$$\text{settsinh} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \end{array}$$

13.3 Relazione fondamentale

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

13.4 Tangente iperbolica

Definizione

Il coseno iperbolico è una unzione definita come

$$\tanh : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

Proprietà

La tangente iperbolica è dispari, sempre crescente, inoltre è sia iniettiva che suriettiva, con immagine $(-1, 1)$.

Funzione inversa

La funzione inversa del coseno iperbolico, definita come settore coseno iperbolico, è definita come:

$$\text{setttanh} : \begin{array}{rcl} (-1, 1) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \end{array}$$

14 Limiti

14.1 Intorni

Definizione

Sia $r \in \mathbb{R}^*$, allora un intorno "sferico" centrato in r è un intervallo aperto definito come:

$$\begin{array}{rll} (r-\varepsilon, r+\varepsilon) & \text{se } r \in \mathbb{R} & \text{con } \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \\ (M, +\infty) & \text{se } r = +\infty & \text{con } M \in \mathbb{R} \\ (-\infty, N) & \text{se } r = -\infty & \text{con } N \in \mathbb{R} \end{array}$$

Proprietà

P_1: **Intersezione di intorni centrati sullo stesso punto**:
sia $r \in \mathbb{R}^*$ e siano U_1 e U_2 due intorni di r, allora $U_1 \cap U_2$ è ancora un intorno di r.

Dim_1: consideriamo solo il caso per cui $r \in \mathbb{R}$ (con $r \neq \pm\infty$)
Siano $U_1 = (r - \varepsilon_1, r + \varepsilon_1)$ con $\varepsilon_1 > 0$ oppure $U_1 = \mathbb{R}$
e $U_2 = (r - \varepsilon_2, r + \varepsilon_2)$ con $\varepsilon_2 > 0$ oppure $U_2 = \mathbb{R}$
Prendiamo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ e abbiamo che $U_1 \cap U_2 = (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ che è un intorno di r. □

P_2: **Proprietà di separazione degli intorni**:
$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}^*$ con $r_1 \neq r_2$ esistono U_1 e U_2 intorni rispettivamente di r_1 e r_2 tali che $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Dim_2: consideriamo solo il caso per cui $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ (con $r_1, r_2 \neq \pm\infty$)
Assumiamo $r_1 < r_2$ senza perdita di generalità (possono essere invertiti) e vogliamo dimostrare che esistono due intorni U_1, U_2 t.c. $U_1 \cap U_2 = \varnothing$
Scegliamo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{r_2 - r_1}{2}$
per cui $\forall x_1 \in (r_1 - \varepsilon_1, r_1 + \varepsilon_1)$ e $\forall x_2 \in (r_2 - \varepsilon_2, r_2 + \varepsilon_2)$
per cui $x_1 < r_1 + \dfrac{r_2 - r_1}{2} = \dfrac{r_2 + r_1}{2} = r_2 - \dfrac{r_2 - r_1}{2} < x_2$
per cui $(r_1 - \varepsilon_1, r_1 + \varepsilon_1) \cap (r_2 - \varepsilon_2, r_2 + \varepsilon_2) = \varnothing$ □

14.2 Punti di accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \varnothing$, $r \in \mathbb{R}^*$ è punto di accumulazione di A quando:

$$\forall \text{ intorno } U \text{ di } r \text{ si ha che } A \cap U \setminus \{r\} \neq \varnothing$$

In altre parole ogni intorno di r deve contenere (almeno) un elemento di A che non sia r stesso. Un punto di accumulazione di A può non appartenere all'insieme A.

$$\begin{array}{rl} \text{se } r \in \mathbb{R} & \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A, x \neq r \text{ t.c. } |x - r| < \varepsilon \text{ ovvero } x \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \\ \text{se } r = +\infty & \forall M \in \mathbb{R}\ \exists x \in A \text{ t.c. } x > M \text{ ovvero che } A \text{ non è limitato superiormente} \\ \text{se } r = -\infty & \forall N \in \mathbb{R}\ \exists x \in A \text{ t.c. } x < N \text{ ovvero che } A \text{ non è limitato inferiormente} \end{array}$$

14.3 Punti isolati

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \varnothing$, $r \in \mathbb{R}^*$ è punto isolato di A se non è un punto di accumulazione, ovvero se $\exists$ un intorno U di r t.c. $U \cap A = \{r\}$.
Un punto isolato di A deve necessariamente appartenere all'insieme A, inolte $\pm\infty$ non possono essere punti isolati, ma soltanto punti di accumulazione.

14.4 Intorni e proprietà vere definitivamente

Sia $f : \mathrm{dom}f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione di dom$f$ e P proprietà definita sul dom$f$, allora f soddisfa P definitivamente per $x \to x_0$ se $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in \mathrm{dom}f \cap U \setminus \{x_0\}$ $f(x)$ verifica P.

Osservazioni

1. Non è detto che P sia verificata in x_0 (infatti x_0 potrebbe $\notin \mathrm{dom}f$).
2. Basta che esista un intorno per cui P sia verificata, non è necessario che P sia verificata per ogni intorno, ovvero che P valga $\forall x \in \mathrm{dom}f \setminus \{x_0\}$. In questo secondo caso P non è più verificata vicino a x_0, ma su tutto dom$f$.

14.5 Limite di una funzione

Definizione

Sia $f : \mathrm{dom}f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione di dom$f$ e $l \in \mathbb{R}^*$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \text{quando}$$

1. $\forall U$ intorno di l $\exists V$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in U, \forall x \in \mathrm{dom}f \cap V \setminus \{x_0\}$
2. $\forall U$ intorno di l $\exists V$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in \mathrm{dom}f \cap V \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$
3. $\forall U$ intorno di l $f(x) \in U$ è verificata definitivamente per $x \to x_0$

Usando la definizione di intorno si ottiene che:

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| < \varepsilon \ \forall x \in \mathrm{dom}f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} &\quad x_0, l \in \mathbb{R} \\
\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) > M \ \forall x \in \mathrm{dom}f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 \in \mathbb{R}, l = +\infty \\
\forall N \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) < N \ \forall x \in \mathrm{dom}f \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 \in \mathbb{R}, l = -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \text{ t.c. } |f(x) - l| < \varepsilon \ \forall x \in \mathrm{dom}f \cap (M, +\infty) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 = +\infty, l \in \mathbb{R} \\
\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \overline{M} \text{ t.c. } f(x) > M \ \forall x \in \mathrm{dom}f \cap \left(\overline{M}, +\infty\right) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 = +\infty, l = +\infty \\
\forall N \in \mathbb{R} \ \exists M \text{ t.c. } f(x) < N \ \forall x \in \mathrm{dom}f \cap (M, +\infty) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 = +\infty, l = -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \text{ t.c. } |f(x) - l| < \varepsilon \ \forall x \in \mathrm{dom}f \cap (-\infty, N) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 = -\infty, l \in \mathbb{R} \\
\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \text{ t.c. } f(x) > M \ \forall x \in \mathrm{dom}f \cap (-\infty, N) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 = -\infty, l = +\infty \\
\forall N \in \mathbb{R} \ \exists \overline{N} \text{ t.c. } f(x) < N \ \forall x \in \mathrm{dom}f \cap \left(-\infty, \overline{N}\right) \setminus \{x_0\} &\quad x_0 = -\infty, l = -\infty
\end{aligned}$$

Limiti definiti e indefiniti

Per $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$:

se $l \in \mathbb{R}$	il limite esiste ed è finito
se $l = \pm\infty$	il limite esiste ed è infinito
se $l = 0$	il limite esiste e la funzione si dice infinitesima
se l non è definibile univocamente	il limite non esiste ed è indefinito

Osservazioni

x_0 punto di accumulazione di dom$f$ non assicura che $x_0 \in \mathrm{dom}f$, infatti se $x_0 \notin \mathrm{dom}f$ non ha senso $f(x_0)$ e se $x_0 \in \mathrm{dom}f$ il valore di $f(x_0)$ non influenza il limite, in quanto si esclude il valore di x_0.

Graficamente, la definizione di limite significa scegliere un certo "errore" ε lungo l'asse y e trovare un intorno di x_0 lungo l'asse x per cui preso qualsiasi punto nell'intervallo (escluso x_0), si ha che i valori assunti dalla funzione differiscono da un valore l al più di ε.

14.6 Teorema di unicità del limite

Se il limite esiste, è unico.

P: Dati $f : \mathrm{dom}f \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione di $\mathrm{dom}f$,

H: se valgono $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_2$,

T: allora $l_1 = l_2$.

Dim: Per assurdo supponiamo che $l_1 \neq l_2$
dalla proprietà di separazione degli intorni $\exists U_1$ e U_2 intorni di l_1 e l_2 tali che $U_1 \cap U_2 = \varnothing$
dalle definizioni: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists V_1$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in U_1\ \forall x \in V_1 \cap \mathrm{dom}f \setminus \{x_0\}$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow \exists V_2$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in U_2\ \forall x \in V_2 \cap \mathrm{dom}f \setminus \{x_0\}$
si considera $V = V_1 \cap V_2$ per cui $\forall x \in V \cap \mathrm{dom}f \setminus \{x_0\}$ vale $f(x) \in U_1 \cap U_2 = \varnothing$
cioè $\nexists x \in V \cap \mathrm{dom}f \setminus \{x_0\}$ che è in contaddizione con il fatto che x_0 è un punto di accumulazione di $\mathrm{dom}f$, per cui l'ipotesi che $l_1 \neq l_2$ è sbagliata. $\square$

14.7 Limite finito implica locale limitatezza

H: Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, cioè $l \neq \pm\infty$,

T: allora $\exists V$ intorno di x_0 e $N \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in V \cap \mathrm{dom}f \setminus \{x_0\}$ vale $|f(x) - l| \leq N$.

Dim: Dalla definizione di limite con $\varepsilon = 1$ abbiamo che $\exists V$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in V \cap \mathrm{dom}f \setminus \{x_0\}$ vale:
$|f(x) - l| < 1 \Rightarrow |f(x)| < |l| + 1$. Scegliendo $N = |l| + 1$ si ottiene la tesi. $\square$

14.8 Limite destro e limite sinistro

Punti di accumulazione destro e sinistro

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A = \varnothing$, un punto $r \in \mathbb{R}$ è **punto di accumulazione destro** di A quando r è punto di accumulazione di $A \cap (r, +\infty)$.
Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A = \varnothing$, un punto $r \in \mathbb{R}$ è **punto di accumulazione sinistro** di A quando r è punto di accumulazione di $A \cap (-\infty, r)$.
Un punto di accumulazione destro o sinistro è necessariamente anche un punto di accumulazione, un punto di accumulazione è anche punto di accumulazione destro oppure sinistro, non è detto che sia entrambi.

Intorni destro e sinistro

Un **intorno destro** di $r \in \mathbb{R}$ è un insieme della forma $(r, r + \delta)$.
Un **intorno sinistro** di $r \in \mathbb{R}$ è un insieme della forma $(r - \delta, r)$.

Limiti destro e sinistro

Sia $f : \mathrm{dom}f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione destro di $\mathrm{dom}f$ e $l \in \mathbb{R}^*$, allora il **limite destro** è definito come:

$$\lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x)\big|_{(x_0,+\infty)} = l \quad \text{cioè quando:}$$

1. $\forall U$ intorno di l $\exists V$ intorno destro di x_0 t.c. $f(x) \in U, \forall x \in \mathrm{dom}f \cap V$
2. $\forall U$ intorno di l $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in \mathrm{dom}f \cap (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in U$

Sia $f : \mathrm{dom}f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione sinistro di $\mathrm{dom}f$ e $l \in \mathbb{R}^*$, allora il **limite sinistro** è definito come:

$$\lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x)\big|_{(-\infty,x_0)} = l \quad \text{cioè quando:}$$

1. $\forall U$ intorno di l $\exists V$ intorno sinistro di x_0 t.c. $f(x) \in U, \forall x \in \mathrm{dom}f \cap V$
2. $\forall U$ intorno di l $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in \mathrm{dom}f \cap (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) \in U$

Teorema di unicità del limite destro e sinistro

Se il limite destro esiste, è unico.
Se il limite sinistro esiste, è unico.

I due teoremi si dimostrano in quando limite destro e limite sinistro sono limiti di funzioni ristrette e in quanto limiti, se esistono sono unici. $\square$

Teorema della relazione tra limite e limiti destro e sinistro

P: Sia x_0 punto di accumulazione sia destro che sinistro di $\mathrm{dom} f$,

H $\Leftrightarrow$ T: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \end{cases}$

Dim $\Rightarrow$: Dall'ipotesi si ha che $\forall U$ intorno di l $\exists V$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in V \cap \mathrm{dom} f \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
Considero come intorno destro $V^+ = V \cap (x_0, +\infty)$ e come intorno sinistro $V^- = V \cap (-\infty, x_0)$, per cui $\forall U$ $\exists V^+$ t.c. $\forall x \in V^+ \cap \mathrm{dom} f \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ è valida in quanto $V^+ \subset V$ e anche $\forall U$ $\exists V^-$ t.c. $\forall x \in V^- \cap \mathrm{dom} f \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ è valida in quanto $V^- \subset V$,
ovvero $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$

Dim $\Leftarrow$: Dall'ipotesi si ha che $\forall U$ intorno di l $\exists \delta_1 > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1) \cap \mathrm{dom} f \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
e che $\forall U$ intorno di l $\exists \delta_2 > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0) \cap \mathrm{dom} f \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
scelgo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ per cui $\forall U$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathrm{dom} f \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$,
ovvero $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ $\square$

Il teorema della relazione di unicità del limite destro e sinistro si utilizza per:

1. dimostrare l'inesistenza di un limite, se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
2. semplificare il calcolo del limite dove f, funzione definita per casi, cambia forma

14.9 Relazione tra limite e modulo

P: Sia x_0 punto di accumulazione di $\mathrm{dom} f$

$\mathrm{H}_1 \Leftrightarrow \mathrm{T}_1$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$

Dim_1: osservando che $|f(x) - 0| = |f(x)| = ||f(x)| - 0|$ e che $\mathrm{dom}\,|f| = \mathrm{dom} f$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } |f(x) - 0| < \varepsilon\ \forall x \in \mathrm{dom} f \cap U \setminus \{x_0\} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } ||f(x)| - 0| < \varepsilon\ \forall x \in \mathrm{dom}\,|f| \cap U \setminus \{x_0\} \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0 \end{aligned}$$

$\square$

$\mathrm{H}_2 \Rightarrow \mathrm{T}_2$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$

Dim_2: Considerando il caso per cui $l \in \mathbb{R}$
Dall'ipotesi si ottiene che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists V$ intorno di x_0 t.c. $|f(x) - l| < \varepsilon$ $\forall x \in \mathrm{dom} f \cap V \setminus \{x_0\}$
si osserva che $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon$ per la disuguaglianza triangolare
per cui per proprietà transitiva $||f(x)| - |l|| < \varepsilon$, inoltre $\mathrm{dom}\,|f| = \mathrm{dom} f$
per cui vale che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \overline{V}$ intorno di x_0 t.c. $||f(x)| - |l|| < \varepsilon$ $\forall x \in \mathrm{dom}\,|f| \cap \overline{V} \setminus \{x_0\}$
ovvero $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$ $\square$

Si osserva che nel secondo teorema vale solo $\Rightarrow$ e non anche $\Leftarrow$, come nel primo ($\Leftrightarrow$).

14.10 Teorema di permanenza del segno

Ovvero $l > 0 \Rightarrow f(x) > 0, l < 0 \Rightarrow f(x) < 0$

P: Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $x_0, l \in \mathbb{R}^*$

H$_1$: se $l \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

T$_1$: allora f è definitivamente strettamente positiva per $x \to x_0$

Dim$_1$: Nel caso in cui $l = +\infty$ si ottiene che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
Dalla def. di limite si ottiene che $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) > M\ \forall x \in \mathrm{dom} f \cap U \setminus \{x_0\}$
scegiendo $M = 0$ si ottiene che $f(x) > 0\ \forall x \in \mathrm{dom} f \cap U \setminus \{x_0\}$

Nel caso in cui $l = (0, +\infty)$ si ottiene che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $l > 0$
Dalla def. di limite si ottiene che $\forall \varepsilon > 0\ \exists U$ intorno di x_0 t.c. $|f(x) - l| < \varepsilon\ \forall x \in \mathrm{dom} f \cap U \setminus \{x_0\}$
scegiendo $\varepsilon = l$ si ottiene che $|f(x) - l| < l \quad \Leftrightarrow \quad -l < f(x) - l < l \quad \Leftrightarrow \quad 0 < f(x) < 2l \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) > 0\ \forall x \in \mathrm{dom} f \cap U \setminus \{x_0\}$, ovvero la tesi. $\square$

H$_2$: se $l \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$

T$_2$: allora f è definitivamente strettamente negativa per $x \to x_0$

Dim$_2$: analogamente alla Dim$_1$. $\square$

Corollario o II versione del teorema di permanenza del segno

Ovvero $f(x) \geq 0 \Rightarrow l \geq 0, f(x) \leq 0 \Rightarrow l \leq 0$

P: Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $x_0, l \in \mathbb{R}^*$

H$_1$: se f è definitivamente positiva (≥ 0) per $x \to x_0$

T$_1$: allora $l \geq 0$

Dim$_1$: Supponiamo per assurdo che $l < 0$
Per il teorema di permanenza del segno $f(x) < 0$ definitivamente per $x \to x_0$, ma questo è in contraddizione con l'ipotesi, per cui l deve necessariamente essere ≥ 0. $\square$

H$_2$: se f è definitivamente negativa (≤ 0) per $x \to x_0$

T$_2$: allora $l \leq 0$

Dim$_2$: analogamente alla Dim$_1$. $\square$

Da osserva che il teorema diventa falso se si sostiuisce $\geq$ o $\leq$ al posto di $>$ o $<$, dato che quando se $l = 0$ non è possibile dedurre nessuna delle due conclusioni del teorema.
Inoltre il corollario diventa falso quando si sostiuisce $>$ o $<$ al posto di $\geq$ o $\leq$, per esempio $f(x) = x^2 > 0$ definitivamente per $x \to x_0 = 0$, ma $\lim_{x \to 0} f(x) = l = 0 \not> 0$.

14.11 Teorema dei due carabinieri

Caso limitato con $l \in \mathbb{R}$

P: Siano f, g, h, tre funzioni definite in $X \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X,

H: se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ definitivamente per $x \to x_0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$

T: allora $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$

Dim: Scelto un $\varepsilon > 0$ arbitrario, applicato alle definizioni dei seguenti limiti $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$ si ottengono due intorni U_f e U_h per cui $\begin{matrix} |f(x) - l| < \varepsilon & \forall x \in U_f \cap X \setminus \{x_0\} \\ |h(x) - l| < \varepsilon & \forall x \in U_h \cap X \setminus \{x_0\} \end{matrix}$,
mentre dalla prima ipotesi si ottiene che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in V$ intorno di x_0 con $V \subseteq X$
Scelto un intorno $U = U_f \cap U_h \cap V$ si ha che $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ valgono
$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$, ovvero $l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \Leftrightarrow |g(x) - l| < \varepsilon$ $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$
cioè la definizione di $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$ □

Caso illimitato con $l = \pm\infty$

P: Siano f, g, due funzioni definite in $X \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X,

H_1: se $f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

T_1: allora $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

H_2: se $f(x) \geq g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

T_2: allora $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

Dim: Analoga a quella per il caso limitato □

Sia la dimostrazione per il caso limitato, sia quella per i casi illimitati, valgono anche per il limite destro e sinistro

Disuguaglianze di funzioni trigonometriche

$H_1 \Rightarrow T_1$ per $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 0 < \sin x \leq x \leq \tan x$

Dim_1: Disegnando un arco di circonferenza di raggio $r = 1$ con centro sull'origine O e chiamando P un punto sulla circonferenza, H la sua proiezione sull'asse x, Q il punto di intersezione del semiasse positivo x con la circonferenza e R, l'interesezione tra la perpendicolare a x per Q e la retta OP:
Si osserva che $\overset{\triangle}{\mathrm{OPH}}$ è contenuto nel settore circolare $\overset{\frown}{\mathrm{OPQ}}$ che è contenuto in $\overset{\triangle}{\mathrm{ORQ}}$, per cui
$0 < A_{\overset{\triangle}{\mathrm{OPH}}} \leq A_{\overset{\frown}{\mathrm{OPQ}}} \leq A_{\overset{\triangle}{\mathrm{ORQ}}} \Leftrightarrow 0 < \frac{r \cdot \sin x}{2} \leq \frac{r^2 \cdot x}{2} \leq \frac{r \cdot \tan x}{2} \Leftrightarrow 0 < \sin x \leq x \leq \tan x$ □

$H_2 \Rightarrow T_2$: per $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \Rightarrow \quad 0 > \sin x \geq x \geq \tan x$

Dim_2: si parte dalla disuguaglianza precedente, dove al posto di $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ viene posto $-x = \left(0, +\frac{\pi}{2}\right)$:
$0 < \sin(-x) \leq -x \leq \tan(-x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -\sin x \leq -x \leq -\tan x \quad \Leftrightarrow \quad 0 > \sin x \geq x \geq \tan x$ □

14.12 Teorema sull'algebra dei limiti

Caso limitato

P: Siano f, g, due funzioni definite in $X \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X,

H: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$

T_1: $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$, ovvero limite del prodotto è il prodotto dei limiti

T_2: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha l_f + \beta l_g$, ovvero limite della somma è la somma dei limiti

T_3: (se $l_g \neq 0$) $\quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g}$, ovvero limite del rapporto è il rapporto dei limiti

Dim_1: La tesi vuole che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists V$ intorno di x_0 t.c. $|f(x)g(x) - l_f l_g| < \varepsilon \ \forall x \in X \cap V \setminus \{x_0\}$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - l_f l_g| &= |f(x)g(x) - f(x)l_g - f(x)l_g - l_f l_g| \\ &= |f(x)\,(g(x) - l_g) - l_g\,(f(x) - l_f)| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - l_g| + |l_g| \cdot |f(x) - l_f| \qquad \text{per disuguaglianza triangolare} \end{aligned}$$

Per il teorema *Limite finito implica locale limitatezza* abbiamo che $\exists V_f$ intorno di x_0, $\exists M > 0$ t.c. $|f(x)| < M \ \forall x \in X \cap V_f \setminus \{x_0\}$, per cui dato $\overline{M} = \max\{M, l_g\}$ abbiamo che:

$$|f(x)g(x) - l_f l_g| \leq \overline{M} \cdot |g(x) - l_g| + \overline{M} \cdot |f(x) - l_f|$$

per la def. di $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f$, $\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists \overline{V_f}$ intorno di x_0 t.c. $|f(x) - l_f| < \varepsilon_1 \ \forall x \in X \cap \overline{V_f} \setminus \{x_0\}$
per la def. di $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_g$, $\forall \varepsilon_2 > 0 \ \exists V_g$ intorno di x_0 t.c. $|g(x) - l_g| < \varepsilon_2 \ \forall x \in X \cap V_g \setminus \{x_0\}$
scegliendo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2\overline{M}}$ si ha che:

$$|f(x)g(x) - l_f l_g| \leq \overline{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2\overline{M}} + \overline{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2\overline{M}} = \varepsilon$$

verificato $\forall x \in X \cap V_f \cap \overline{V_f} \cap V_g$ $\square$

Dim_2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \alpha f(x) + \beta g(x) &= \lim_{x \to x_0} \alpha f(x) + \lim_{x \to x_0} \beta g(x) \\ &= \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) + \beta \lim_{x \to x_0} g(x) \qquad \text{per } T_1 \\ &= \alpha l_f + \beta l_g \quad \text{per ipotesi} \end{aligned}$$

$\square$

Dim_3: considerando $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, si ottiene la T_1 $\square$

Caso illimitato

P: Siano f, g, due funzioni definite in $X \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X,

H$_1$: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $g(x)$ definitivamente limitata per $x \to x_0$, $\lim_{x \to x_0} g(x)$ potrebbe anche non esistere

T$_1$: $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

H$_2$: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $g(x)$ definitivamente limitata per $x \to x_0$

T$_2$: $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$

H$_3$: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $g(x)$ definitivamente strettamente positiva per $x \to x_0$

T$_3$: $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

H$_4$: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $g(x)$ definitivamente strettamente positiva e superiormente lim. per $x \to x_0$

T$_4$: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Per i casi 2, 3 e 4 in cui $f(x) = -\infty$, bisogna invertire il segno del risultato del limite. Analogamente quando $g(x) < 0$ nei punti 3 e 4.

14.13 Teorema del confronto

P: Siano f, g, due funzioni definite in $X \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X,

H: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f \in \mathbb{R}^*$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}^*$ e $f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$

T: $l_f \leq l_g$ definitivamente per $x \to x_0$

Dim: per $l_f = -\infty$, $l_g = +\infty$, $l_f = l_g = +\infty$, o per $l_f = l_g = -\infty$ la tesi è verificata, negli altri casi:
definiamo $h(x) = g(x) - f(x)$ t.c. $h(x) \geq 0$ per ipotesi, definitivamente per $x \to x_0$
Per il teorema di permamenza del segno: $0 \leq \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = l_g - l_f$
per cui $0 \leq l_g - l_f$ ovvero la tesi $\square$

Si osserva che il teorema vale soltanto con il $\leq$ e non con il $<$, in quando se $f(x) = 0$ e $g(x) = x^2$, $f(x) < g(x)$ è definitivamente verificata per $x \to 0$, ma $\lim_{x \to 0} f(x) \not< \lim_{x \to 0} g(x)$

14.14 Limiti delle funzioni composte

P: Siano $f : \text{dom}f \to \mathbb{R}$ e $g : \text{dom}g \to \mathbb{R}$ due funzioni, x_0 punto di accumulazione di dom$f$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di dom$g$

H: Se sono verificate le seguenti ipotesi:

1. $f(\text{dom}f) \subset \text{dom}g$, ovvero $g \circ f : \text{dom}f \to \mathbb{R}$ è definita,
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} g(y) = l \in \mathbb{R}$
4. $f(x) \neq y_0$ per $x \in \text{dom}f$

T: allora $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = l$

Dim: per H$_2$: $\forall \eta > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \eta$
per H$_3$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ t.c. $0 < |y - y_0| < \eta \Rightarrow |g(y) - l| < \varepsilon$
per H$_4$: $|f(x) - y_0| \neq 0$
concatendando H$_2$ e H$_3$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - l| < \varepsilon$
ovvero $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = l$ □

Si osserva che la quarta ipotesi è necessaria per far corrispondere $0 < |y - y_0| < \eta$ con $|f(x) - y_0| < \eta$. Se si utilizza $|y - y_0| < \eta$, allora non serve.

14.15 Limiti delle funzioni monotone

P: Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e a, b punti di accumulazione sinistro e destro dell'intervallo (a, b)

H$_1$: Se f è monotona crescente

T$_1$: allora $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf f(x)$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup f(x)$ con $x \in \text{dom}f$

H$_2$: Se f è monotona decrescente

T$_2$: allora $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \sup f(x)$ e $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \inf f(x)$ con $x \in \text{dom}f$

Dim$_1$: supponiamo $f(x)$ monotona crescente e limitata superiormente:
dalla def. di sup: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{x} \in \text{dom}f$ t.c. $L - \varepsilon < f(\overline{x})$ e $f(x) \leq L\ \forall x \in \text{dom}f$ dove L è il sup di f
dalla def. di monotonia: $\forall x, \overline{x} \in \text{dom}f$ con $x \geq \overline{x}$ si ha che $f(x) \geq f(\overline{x})$
unendo le due def.: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{x} \in \text{dom}f$ t.c. $\forall x \geq \overline{x}$ ho $L - \varepsilon \leq f(\overline{x}) \leq f(x) \leq L(+\varepsilon)$
ovvero che $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{x} \in \text{dom}f$ t.c. $\forall x \in (\overline{x}, b)$ ho $|f(x) - L| < \varepsilon$
cioè $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = L = \sup f$
Analogo per $\inf f$ □

Dim$_2$: analogo alla Dim$_1$ □

14.16 Funzioni continue e continuità

Definizione di continuità

Sia $f : \text{dom}f \to \mathbb{R}$, $f(x)$ è continua in $x_0 \in \text{dom}f \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Limite di funzioni continue

Si osserva che se $f : \text{dom}f \in \mathbb{R}$ e $g : \text{dom}f \to \mathbb{R}$ continue in x_0 punto di accumulazione dom$f$ con $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ e $g \circ f$ è ben definita, allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(y_0)$

Funzioni continue in ogni punto del dominio

1. x^n con $n \in \mathbb{N}$ e dom $= \mathbb{R}$
2. $|x|^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e dom $= \mathbb{R}$
3. a^x con $a \in \mathbb{R}, a > 0$ e dom $= \mathbb{R}$
4. $\log_a n$ con $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ e dom $= (0, +\infty)$
5. $\sin x, \cos x$ con dom $= \mathbb{R}$

14.17 Limiti a infinito

1. $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

2. $\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

3. $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

4. $\lim_{x \to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

14.18 Gerarchie degli infiniti

T$_1$: $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \forall a > 1, \alpha > 0$

T$_2$: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{(\log_a x)^\beta} = +\infty \qquad \forall a > 1, \alpha > 0, \beta > 0$

Dim$_1$: per $a > 1 \Rightarrow a = 1 + \delta$ con $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ e per $n \in \mathbb{N}, x - 1 < n \leq x$, si osserva che:

$a^x \overset{\text{per } a=1+\delta}{=} (1+\delta)^x \overset{\text{per } x \geq n}{\geq} (1+\delta)^n \overset{\text{per Bernoulli}}{\geq} 1 + n\delta \overset{\text{per } n \geq x-1}{\geq} 1 + (x-1)\delta$

per $\alpha \leq 1$ si ha che $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$

per $\alpha > 1$ si esegue $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x}{x^\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\beta}} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^{\frac{x}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$ e $\beta > \alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 1$ ovvero caso precedente $\square$

Dim$_2$: sostiuisco $t = \log x$ e ottengo il caso 1. $\square$

14.19 Numero di Nepero e alcuni limiti notevoli

Definizione

Il numero di Nepero e è definito come $e = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ con $e = 2,71828$ ed $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Altri limiti notevoli derivati dalla definizione del numero di Nepero

1. $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \to 0} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$

14.20 Confronti asintotici

Siano f e g due funzioni definite su $X \subseteq R$ e x_0 punto di accumulazione di X. Le due funzioni sono asintotiche per $x \to x_0$, $f \sim g$ per $x \to x_0$ quando:

1. sono entrambe $\neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$
2. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Proprietà

1. se $f \sim g$ per $x \to x_0$, allora $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x)$ o non esistono o esistono e coincidono
2. se $f \sim g$ per $x \to x_0$ e $g \sim h$ per $x \to x_0$, allora $f \sim h$ per $x \to x_0$
3. se $f \sim f'$, $g \sim g'$ e $h \sim h'$ per $x \to x_0$, allroa $\frac{f \cdot g}{h} \sim \frac{f' \cdot g'}{h'}$ per $x \to x_0$

Esempi di funzioni asintotiche

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x \sim x$ per $x \to 0$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tan x \sim x$ per $x \to 0$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

Osservazione sulle sostituzioni asintotiche con somme

In $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ non si possono usare le asintoticità: $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \neq \lim_{x \to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$, ma bisogna usare gli sviluppi (Taylor) fino al secondo ordine: $\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$ ottenendo $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{6x^3} = \frac{1}{6}$

14.21 Simboli di Landau - o piccoli

Siano f e g due funzioni definite su $X \subseteq R$ e x_0 punto di accumulazione di X, sia g definitivamente $\neq 0$ per $x \to x_0$, $f(x) = o(g(x))$, ovvero f è un o piccolo di g, quando $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
Si osserva che se $g(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $f(x) = o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Proprietà degli o piccoli

1. $o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x))$ per $x \to x_0$
2. $o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g^2(x))$ per $x \to x_0$
3. $\varphi(x) \cdot o(g(x)) = o(\varphi(x) \cdot g(x))$ per $x \to x_0$ e $\varphi(x) \neq 0$ definitivamente

4.1. $\varphi(x) \cdot o(g(x)) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ e $\varphi(x)$ è definitivamente limitata

4.2. $c \cdot o(g(x)) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

5. $|o(g(x))|^\alpha = o(|g(x)|^\alpha)$ per $x \to x_0$

Legame tra asintoticità e o piccoli

Siano f e g due funzioni definite su $X \subseteq R$ e x_0 punto di accumulazione di X, f, g definitivamente $\neq 0$ per $x \to x_0$, allora:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \sim l \cdot g(x) \text{ per } x \to x_0 \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = l \cdot g(x) + o(g(x)) \text{ per } x \to x_0 \end{aligned}$$

Teorema del cambio di variabili negli sviluppi

P: Siano f, φ e φ_1 tre funzioni t.c. $\varphi \circ f$ e $\varphi_1 \circ f$ siano definite sullo stesso insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X, se:

H:
1. $\varphi(y) = \varphi_1(y) + o(\varphi_1(y))$ per $y \to y_0$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$
3. $f(x) \neq y_0$ per $x \to x_0$ o $\varphi(y_0) = \varphi_1(y_0)$

T: $\varphi(f(x)) = \varphi_1(f(x)) + o(\varphi_1(f(x)))$ per $x \to x_0$

Esempi di cambio di variabile negli sviluppi

Sappiamo che $\sin y = y + o(y)$ per $y \to y_0 = 0$

- per $y = f(x) = x^2$, si osserva che $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = y_0$ si ottiene che $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$
- per $y = f(x) = x^3 - 1$, si osserva che $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0 = y_0$ si ottiene che $\sin(x^3 - 1) = x^3 - 1 + o(x^3 - 1)$ per $x \to 1$

Teorema di sostituzione degli infiniti e infinitesimi

P: Siano f, f_1, g, g_1 quattro funzioni definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ ed x_0 un punto di accumulazione di X, assumiamo che le funzioni siano tutte $\neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$

H: se $f(x) = f_1(x) + o(f_1(x))$ e $g(x) = g_1(x) + o(g_1(x))$ per $x \to x_0$

T: allora $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ hanno lo stesso comportamento, ovvero o non esistono entrambi, o esistono e sono coincidenti

Questo teorema si utilizza per risolvere i limiti in cui compaiono rapporti tra polinomi.

14.22 Ordini di infinito e infinitesimo

Ordini di infinito

Siano f e g due funzioni definite su $X \subseteq R$ e x_0 punto di accumulazione di X, siano $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$, consideriamo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$:

- se il limite esiste e $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora f e g sono infiniti dello stesso ordine per $x \to x_0$
- se il limite esiste e $l = 0$, allora f è un infinito di ordine minore di g per $x \to x_0$
- se il limite esiste e $l = \infty$, allora f è un infinito di ordine maggiore di g per $x \to x_0$
- se il limite non esiste, f e g sono infiniti non confrontabili per $x \to x_0$

Ordini di infinitesimo

Siano f e g due funzioni definite su $X \subseteq R$ e x_0 punto di accumulazione di X, siano $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, con $f(x)$ e $g(x) \neq 0$ definitivamente, consideriamo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$:

- se il limite esiste e $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora f e g sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to x_0$
- se il limite esiste e $l = 0$, allora f è un infinitesimo di ordine maggiore di g per $x \to x_0$
- se il limite esiste e $l = \infty$, allora f è un infinitesimo di ordine minore di g per $x \to x_0$
- se il limite non esiste, f e g sono infinitesimi non confrontabili per $x \to x_0$

Definizione dell'ordine di infinito o infinitesimo

Per definire l'ordine di infinito/infinitesimo di una funzione, la si deve confrontare con una classe si funzioni campione definita come $f(x) = |x - x_0|^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, se $x_0 \in \mathbb{R}$

Si osserva che per $x \to x_0$, se $\alpha > 0$, allora $f(x) \to 0$, mentre se $\alpha < 0$, allora $f(x) \to \infty$

Definizione dell'ordine di infinito

Sia f una funzione definita su $X \subseteq \mathbb{R}$ ed x_0 punto di accumulazione di X, sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, allora:

- se $x_0 \in \mathbb{R}$ e f è dello stesso ordine di infinito di $|x - x_0|^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$, allora f è un infinito di ordine α
- se $x_0 = \pm\infty$ e f è dello stesso ordine di infinito di $|x|^\alpha$, con $\alpha > 0$, allora f è un infinito di ordine α

Definizione dell'ordine di infinitesimo

Sia f una funzione definita su $X \subseteq \mathbb{R}$ ed x_0 punto di accumulazione di X, sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ ed $f \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$, allora:

- se $x_0 \in \mathbb{R}$ e f è dello stesso ordine di infinitesimo di $|x - x_0|^\alpha$, con $\alpha > 0$, allora f è un infinitesimo di ordine α
- se $x_0 = \pm\infty$ e f è dello stesso ordine di infinitesimo di $|x|^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$, allora f è un infinitesimo di ordine α

15 Succesioni

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ illimitato, una successione (a valori reali) è una funzione da A in $\mathbb{R}$.
Una successione $a : A \to \mathbb{R}$ si indica come a_n o $\{a_n\}_{n\in A}$.

Limiti di successioni

Dato che il dominio delle successioni è costituito da punti isolati, l'unico punto di accumulazione, di cui ha senso calcolarne il limite è $+\infty$. Quando si indica "definitivamente" riferito ad una successione, si intende "definitivamente per $n \to +\infty$".

Carattere di una successione

Data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione a valori reali con dominio $\mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}^*$, se:

- $\exists\, l \in \mathbb{R}$, la succesione a_n è convergente
- $\exists\, l = 0$, la succesione a_n è in particolare infinitesima
- $\exists\, l = \pm\infty$, la succesione a_n è divergente
- $\nexists\, l$, la succesione a_n è irregolare

15.1 Sottosuccessioni

Definizione

Data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una sottosuccesione (o successione estratta) di a_n è una successione della forma $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $n_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ successione strettamente crescente.

Convergenza con sottosuccessioni

P: Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione

H/T: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad \forall\,\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ si ha $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = l$

Una successione ha come limite $l \in \mathbb{R}^*$, se ogni sottosuccessione ha come limite l.
Una successione è irregolare (non ha limite), se esistono due sottosuccessioni che hanno limite diverso.

Teorema Bolzano - Weierstrass

Se una succesione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, allora ha una sottosuccesione convergente.

Teorema ponte

P: Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione con $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X

H/T: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad \forall\,\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \in X$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$

Il limite per x_0 di una funzione vale $l \in \mathbb{R}^*$ se e solo se per ogni successione, il limite della successione vale x_0 e limite di $f(a_n)$ è l.
Se esistono due successioni a_n e b_n, per cui il limite di $f(a_n)$ e quello di $f(b_n)$ sono diversi, allora non esiste il limite per $f(x_0)$.

15.2 Formula di Stirling per n!

$\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \quad \exists\, a_n \in (0,1)$ t.c. $n! = \dfrac{n^n}{e^n} \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{a_n}{12n}}$

per $n \to \infty \quad \Rightarrow \quad n! \sim \dfrac{n^n}{e^n} \cdot \sqrt{2\pi n}$

16 Serie

Definizione

Data la successione $a_k \in \mathbb{R}$, con $k \in \mathbb{N}$, la somma parziale n-esima dei primi n termini della successione, definita come $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$.

La successione delle somme parziali $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è chiamata serie di termine generale a_k.

Limiti di serie

Analogo discorso delle successioni, essendo il dominio delle serie costituito da punti isolati, l'unico punto di accumulazione è $+\infty$

16.1 Studio della convergenza e divergenza

Carattere di una serie

Data una serie S_n di termine generale a_k e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = l \in \mathbb{R}^*$, se:

- $\exists\, l \in \mathbb{R}$, la serie S_n è convergente
- $\exists\, l = +\infty$, la serie S_n è divergente a $+\infty$
- $\exists\, l = -\infty$, la serie S_n è divergente a $-\infty$
- $\nexists\, l$, la serie S_n è irregolare

Comportamento primi termini

Il comportamento di una serie non dipende dai primi termini.

Condizione necessaria per convergenza

Se una serie è convergente, allora l'ultimo elemento è 0, ovvero $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

Condizione sufficiente per convergenza / convergenza assoluta

Sia una serie $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, se $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ converge, allora la serie converge assolutamente.
Se una serie converge assolutamente, converge anche semplicemente (ovvero non assolutamente).
Breve dim.: una serie $S_n := S_{n-1} + a_k$ converge se $S_n - S_{n-1} = 0$ per $n \to +\infty$, ovvero se $a_k = 0$. $\square$

16.2 Serie a termini positivi (conv o diverge a infinito)

Una serie è a termini positivi se ogni termine è ≥ 0
Una serie a termini postivi può solo convergere o divergere a $+\infty$
Breve dim.: data $S_n := S_{n-1} + a_k$, se $a_k \geq 0$, allora $S_n \geq 0$ ovvero converge o diverge a $+\infty$. $\square$

Confronto

Siano $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ serie a termini positivi, se $a_k < bk$ definitivamente, allora:

- se $\sum_{k=1}^{n} b_k$ converge, converge anche $\sum_{k=1}^{n} a_k$
- se $\sum_{k=1}^{n} a_k$ diverge, diverge anche $\sum_{k=1}^{n} b_k$

Confronto asintotico

Siano $\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sum_{k=1}^{n} b_k$ serie a termini positivi, e $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = l$, allora:

- se $l = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sono asintotiche: hanno lo stesso comportamento definitivamente
- se $l = 0$, allora $a_k < b_k$ definitivamente, quindi se $\sum_{k=1}^{n} b_k$ converge, converge anche $\sum_{k=1}^{n} a_k$
- se $l = +\infty$, allora $a_k > b_k$, quindi se $\sum_{k=1}^{n} b_k$ diverge, allora diverge anche $\sum_{k=1}^{n} a_k$

Criterio condensazione

Sia S_n serie a termini positivi e a_k successione decrescente, allora $\sum_{k=1}^{n} a_k$ e $\sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot a_{2^k}$ hanno lo stesso comportamento. Questo criterio è utile per studiare il comportamento di $\sum a^k$.

Rapporto

Sia S_n serie a termini positivi:

- se $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, la serie converge
- se $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, la serie diverge a $+\infty$

Breve dim.: $\frac{a_k}{a_{k-1}} \leq r \;\Rightarrow\; a_k \leq r \cdot a_{k-1} < r^2 \cdot a_{k-2} < r^3 \cdot a_{k-3} < r^{k-N} \cdot a_N$, dato che $\sum_{k=1}^{n} r^{k-N} \cdot a_N$ converge perché serie geometrica con ragione $r < 1$, allora $\sum_{k=1}^{n} a_k$ converge per teorema del confronto.

Rapporto asintotico

Sia S_n serie a termini positivi e $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l \in [0, +\infty) \cup +\infty$

- se $l < 1$ la serie converge
- se $l > 1$ la serie diverge
- se $l = 1$ non si può dire nulla

Criterio radice

Sia S_n serie a termini positivi:

- se $\sqrt[k]{a_k} < 1$ definitivamente, la serie converge
- se $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ definitivamente, la serie diverge a $+\infty$

Breve dim.: $\sqrt[k]{a_k} < r \;\Rightarrow\; a_k < r^k$, dato che $\sum_{k=1}^{n} r^k$ converge per $r < 1$, allora $\sum_{k=1}^{n} a_k$ converge per il teorema del confronto.

Criterio radice asintotica

Sia S_n serie a termini positivi e $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = l \in [0, +\infty) \cup +\infty$

- se $l < 1$ la serie converge
- se $l > 1$ la serie diverge
- se $l = 1$ non si può dire nulla

Ponte tra criterio della radice e criterio del rapporto

Se esiste il limite del rapporto, esiste limite della radice e coincidono, ma non il viceversa, quindi:

- se il lim del rapporto = 1, allora il lim della radice = 1 e non si può concludere nulla
- se il lim della radice = 1, allora il lim del rapporto = 1 o non esiste e non si può concludere nulla

16.3 Esempi di serie convergenti e divergenti

Serie geometrica

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \text{ con ragione } r > 0$$

- se $0 < r < 1$, la serie converge a $\frac{1}{1-r}$
- se $r \geq 1$, la serie diverge a $+\infty$

Serie armonica

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$$

- per $a > 1$ la serie converge
- per $a \leq 1$ la serie diverge a $+\infty$

Serie armonica generalizzata

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a \cdot \log^b k}$$

- per $a > 1$ la serie converge
- per $a < 1$ la serie diverge a $+\infty$
- per $a = 1$, $b > 1$ la serie converge
- per $a = 1$, $b \leq 1$ diverge a $+\infty$

Serie esponenziale

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ con parametro } x \in \mathbb{R}$$

- per $x > 0$ la serie ha termini positivi
- per $x < 0$ la serie ha termini di di segno alterno
- per $x = 0$ si ha la forma 0^0, da definire

La serie è assolutamente convergente e uguale a e^x

Serie a segno alterno

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot a_k \text{ con } a_k > 0$$

- per k pari, il teminine ha segno positivo
- per k dispari, in termine ha negativo

Criterio di Leibniz

Se $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = 0$ (cond. necess.) e a_k definitivamente decrescente, la serie a segno alterno è convergente.

17 Funzioni continue

17.1 Continuità

Definizione

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$, f è continua in x_0 se è verficata una delle seguenti proprietà:

- x_0 è punto isolato di D
- x_0 è punto di accumulazione di D ed $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

f è continua in D, $f \in C^{(0)}(D)$ se è continua $\forall x_0 \in D$

Punti di discontinuità

- **discontinuità eliminabile**
  se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e $l \neq f(x_0)$
- **discontinuità di prima specie o salto**
  se $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ e $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ con $l_1 \neq l_2$
- **discontinuità di seconda specie o asintoto verticale**
  se $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 = \pm\infty$ o $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 \in \pm\infty$ o se non esistono

Prolungamento di continuità

Sia f funzione di dominio $\text{dom}f$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $\text{dom}f$ con $x_0 \notin \text{dom}f$ e assumiamo che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora f è prolungabile per continuità in x_0 e viene definita una nuova funzione $\widetilde{f}$:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in \text{dom}f \\ l & \text{per } x = x_0 \end{cases} \qquad \text{in cui } \text{dom}\widetilde{f} = \text{dom}f \cup \{x_0\}$$

Algebra delle funzioni continue

Siano f, g definite su $D \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$ tali che f e g sono continue in x_0, allora:

1. $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è continua in x_0 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $f(x) \cdot g(x)$ è continua in x_0
3. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è continua in x_0 se $g(x_0) \neq 0$

Teorema di locale limitatezza

Se f è una funzione continua in $x_0 \in \text{dom}f$, allora f è localmente limitata definitivamente in x_0, ovvero $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f\big|_{U \cap \text{dom}f}$ è limitata.

Teorema di permanenza del segno

Se f è continua in x_0 e $f(x_0) > 0$, allora f è definitivamente > 0 per $x \to x_0$
Se f è continua in x_0 e $f(x_0) < 0$, allora f è definitivamente < 0 per $x \to x_0$

Teorema del cambio di variabile - composizione di funzioni

Siano f e g due funzioni tali che $g \circ f$ è definita su $D \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$, se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in x_0

Teorema ponte per le funzioni continue

Sia f funzione con domino dom$f$ e $x_0 \in$ dom$f$, f è continua in x_0 se e solo se $\forall$ successione $\{a_n\}_n$ con $a_n \in$ dom$f$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$ si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x_0)$

Per dimostrare che una funzione non è continua in x_0 basta trovare due successioni che convergono a x_0 tali per cui i limiti della funzione composta alle successioni diano due risultati distinti. Si può usare per dimostrare la non continuità della funzione di Dirichlet scegliendo come successioni $a_n = x_0$ e $b_n = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$, con $x_0 \in \mathbb{Q}$.

Continuità della funzione inversa

Se f è continua e invertibile sul suo dominio, in generale non è detto che l'inversa sia continua in ogni suo punto, specialmente se il dominio della funzione non è un intervallo.
Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f \in C^{(0)}(I)$, f è iniettiva se e solo se è strettamente monotona.
Sia I un intervallo di $\mathbb{R}, f \in C^{(0)}(I)$ invertibile, allora f è strettamente monotona e f^{-1} è continua sul suo dominio $f(I)$.

17.2 Teorema di Weierstrass

Sia f una funzione continua in $[a, b]$ (chiuso e limitato) con $a, b \in \mathbb{R}$, allora f ammette massimo e minimo, cioè f è limitata ed $\exists\, x_m, x_M \in [a, b]$ t.c. $f(x_m) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ e $f(x_M) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

17.3 Teorema di Bolzano - esistenza degli zeri

Sia $f \in C^{(0)}([a, b])$ tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$, cioè hanno segno opposto, allora $\exists\, c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$

Dimostrazione

Viene impiegato il metodo di bisezione
Cosidero $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ senza perdere generalità e $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$, distinguo tre casi:

1. $f(c_1) = 0 \quad \to \quad$ scelgo $c = c_1$
2. $f(c_1) > 0 \quad \to \quad$ scelgo $a_1 = c_1$ e $b_1 = b$
3. $f(c_1) < 0 \quad \to \quad$ scelgo $a_1 = a$ e $b_1 = c_1$

Ripeto il procedimento n volte ottenendo tre sequenze a_n, b_n e c_n con:
$a_n < b_n, \quad b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}, \quad f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \quad$ definite come:

- $c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$
- $a_{n+1} = \begin{cases} c_{n+1} & \text{se } f(c_{n+1}) > 0 \\ a_n & \text{se } f(c_{n+1}) < 0 \end{cases}$
- $b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{se } f(c_{n+1}) > 0 \\ b_{n+1} & \text{se } f(c_{n+1}) < 0 \end{cases}$

nel caso in cui per uno specifico n vale $f(c_n) = 0$, scelgo $c = c_n$ e concludo, nel caso in cui non esista un n per cui è verificata la condizione sopra, ottengo due succesioni:

- a_n crescente e limitata superiormente
- b_n decrescente e limitata inferiormente

Dal teorema delle successioni monotone si ottiene che $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \overline{a} \in [a, b]$ e $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \overline{b} \in [a, b]$.
Dal limite sopra: $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = \overline{b} - \overline{a} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$, per cui $\overline{a} = \overline{b}$.
Chiamiamo $c = \overline{a}$:
$f(a_n) > 0$ per perm. del segno e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$ in quanto $f \in C^{(0)}(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c) \geq 0$
Chiamiamo $c = \overline{b}$: per ragionamento analogo $f(c) \leq 0$
Per cui $f(c) = 0$ $\square$

Corollario

Verificate le ipotesi del teorema di Bolzano, se f è anche strettamente monotona, allora $\exists!\ c \in (a,b)$ tale che $f(c)=0$

17.4 Teorema dei valori intermedi

Sia I intervallo e sia $f \in C^{(0)}(I)$, allora:

1. $f(I)$ è un intervallo
2. $\left(\inf\limits_I f, \sup\limits_I f\right) \subseteq f(I) \subseteq \left[\inf\limits_I f, \sup\limits_I f\right]$

Dimostrazione

1. $f(I)$ è un intervallo $\Leftrightarrow\ \forall\, \alpha, \beta \in f(I)$ con $\alpha < \beta$ si ha che $\forall\, \gamma \in (\alpha, \beta)$ vale $\gamma \in f(I)$.
   Dati $\alpha, \beta \in f(I)\ \exists\, a, b \in I$ tali che $f(a)=\alpha, f(b)=\beta$ e assumiamo $\alpha \leq \beta$:
   se $\alpha = \beta$ non serve dimostrare nulla,
   se $\alpha < \beta$ e $\gamma \in (\alpha, \beta)$ consideriamo $g(x) = f(x) - \gamma$
   in questo modo si ha $g(a) < 0, g(b) > 0, g \in C^{(0)}([a,b])$
   dal teorema di Bolzano $\exists\, c \in I$ t.c. $g(c) = 0$, ovvero $f(c) = \gamma$ con $\gamma \in f(I)$
2. ... $\square$

Corollario

Una funzione continua manda intervalli chiusi e limitati in intervalli chiusi e limitati:
sia $f \in C^{(0)}([a,b])$ con $a, b \in \mathbb{R}$

1. f ammette massimo e minimo
2. $\mathrm{Im}(f) = f([a,b]) = \left[\min\limits_{[a,b]} f, \max\limits_{[a,b]} f\right]$

Dimostrazione

1. per il teorema di Weierstrass
2. per il teorema dei valori intermedi applicato al punto 1. $\square$

18 Derivate

Definizione

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$ punto di accumulazione, la derivata di f in x_0 è definita come:

$$f'(x_0) \quad := \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ con } x = x_0 + h$$

La quantità $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ è detta rapporto incrementale ed è il coefficiente angolare della secante tra $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, per $h \to 0$ diventa il coefficiente della tangente in $(x_0, f(x_0))$.

Derivate fondamentali

funzione $f(x)$	**derivata** $f'(x)$
c	0
$\alpha\, x$	α
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

funzione $f(x)$	**derivata** $f'(x)$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$
$\text{settsinh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\text{settcosh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$\text{setttanh} x$	$\dfrac{1}{1 - x^2}$

18.1 Derivabilità

Una funzione f è derivabile se e solo se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistono finiti e coincidono, dove:

- $f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
- $f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Inoltre se una funzione è derivabile in x_0, allora è anche continua in x_0.
Se la derivata esiste, è unica, dal teorema di unicità del limite.

Punti di non derivabilità

- **Flesso a tangente verticale**
  se $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$, se $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ esistono infiniti dello stesso segno
- **Punto angoloso**
  se $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ esistono, almeno uno dei due è finito, ma non coincidono
- **Cuspide**
  se $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ esistono infiniti di segno opposto

Algebra delle derivate

Siano f, g definite su $D \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$ tali che f e g sono derivabili in x_0, allora:

1. $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è derivabile in x_0 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e vale $(\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))' = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$
2. $f(x_0) \cdot g(x_0)$ è derivabile in x_0 e vale $(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. $\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$ è derivabile in x_0 se $g(x_0) \neq 0$ e vale $\left(\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Derivata della funzione composta

Siano f, g due funzioni tali che $g \circ f$ sia definita su un intervallo I, sia $x_0 \in I$ con f derivabile in x_0 e g derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale $(g \circ f)' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Derivata della funzione inversa

Sia I intervallo e $x_0 \in I$ con $f : I \to \mathbb{R}$ continua e invertibile su I e derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$, allora la funzione inversa $f^{-1}(x)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale $\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Dimostrazione

Dal teorema di continuità della funzione inversa si ottiene che f è strettamente monotona e f^{-1} è continua.

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}(y_0)\right)' &= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \qquad \text{cambio di variabile } x = f^{-1}(y),\ y \to y_0 \Rightarrow x \to x_0 \\
&= \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \text{per algebra dei limiti}
\end{aligned}$$

□

Parità e disparità di una derivata

La derivata di una funzione pari è dispari e la derivata di una funzione dispari è pari.

18.2 Massimi, minimi e punti stazionari

Punti di massimo o minimo

Sia I un intervallo e $x_0 \in I$, sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, x_0 è un punto di estremo (massimo o minimo) relativo per f quando $\exists\ \delta > 0$ t.c. x_0 è punto di estremo di f su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathrm{dom} f$. Anche gli estemi dell'intervallo possono essere punti di estremo relativo.

Punti stazionari

x_0 è punto stazionario, se $f'(x_0) = 0$. I punti stazionari possono essere di tre tipi:

- punto di massimo (relativo o assoluto) per il teorema di Fermat (sezione 18.3)
- punto di minimo (relativo o assoluto) per il teorema di Fermat (sezione 18.3)
- punto a tangente orizzontale

Ricerca dei punti di massimo e minimo

Non è detto che un minimo/massimo debba necessariamente essere punto stazionario, i punti di massimo e minimo in cui la funzione non è derivabile non sono punti stazionari.
I punti di massimo/minimo relativi e assoluti di una funzione definita in (a, b) vanno cercati tra:

- gli estremi dell'intervallo
- i punti interni all'intervallo in cui f non è derivabile
- i punti stazionari

18.3 Teorema di Fermat

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ un punto di estremo locale per f. Se f è derivabile in x_0 allora la derivata vale $f'(x_0) = 0$

Dimostrazione

Consideriamo il caso in cui x_0 è massimo locale (il caso in cui è minimo è analogo)
Dalla definizione di masismo si ottiene che $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
Calcolando $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$:

- $f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$ per teorema di permanenza del segno
- $f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ per teorema di permanenza del segno

Dalla definizione di funzione derivabile $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, per cui $f'(x_0) = 0$ $\square$

18.4 Teorema di Rolle

Sia $f \in C^{(0)}([a, b]) \cap C^{(1)}((a, b))$, se $f(a) = f(b)$, allora $\exists\, x \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$

Dimostrazione

Siccome $f \in C^{(0)}([a, b])$, per Weierstrass la funzione ammette massimi e minimi assoluti.
Considero x_m punto di minimo:

- se $x_m \in (a, b)$, per il teorema di Fermat $f(x_m) = 0$, scegliendo $c = x_m$ si conclude
- se $a = x_m$ o $b = x_m$ si considera il massimo

Considero x_M punto di massimo:

- se $x_M \in (a, b)$, per il teorema di Fermat $f(x_M) = 0$, scegliendo $c = x_M$ si conclude
- se $a = x_M$ o $b = x_M$ si considera quanto segue

Se x_m e x_M coincidono con gli estremi, significa che la funzione è costante, per cui $f(c) = 0\ \forall c \in (a, b)$ $\square$

18.5 Teorema di Lagrange

Sia $f \in C^{(0)}([a, b]) \cap C^{(1)}((a, b))$, allora $\exists\, x \in (a, b)$ tale che $f(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Dimostrazione

Consideriamo una funzione $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$, in questo modo $h(a) = h(b) = f(a)$ ed è possibil applicare il teorema di Rolle, ovvero $\exists\, c \in (a, b)$ t.c. $h'(c) = 0$.
$h'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, ovvero $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $\square$

18.6 Teorema di caratterizzazione delle costanti

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, allora f è costante $\quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \in C^{(0)}([a, b]) \cap C^{(1)}((a, b)) \\ f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b) \end{cases}$

Dimostrazione

L'implicazione $\Rightarrow$ è ovvia, per definizione di derivata
Per dimostrare l'implicazione $\Leftarrow$ si considera $x \in (a, b]$
applicando Lagrange in $[a, x]$ si ottiene che $\exists\, c \in (a, x)$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
dato che $f'(c) = 0$ per ipotesi, significa che $f(x) = f(a)\ \forall x \in (a, b]$, ovvero che f è costante. $\square$

18.7 Teorema di caratterizzazione di funzioni monotone

Sia $f \in C^{(0)}([a,b]) \cap C^{(1)}((a,b))$, allora:

- f è crescente su $[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$
- f è decrescente su $[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$

18.8 Teorema di Cauchy

Siano $f, g \in C^{(0)}([a,b]) \cap C^{(1)}((a,b))$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $(g(b)-g(a)) \cdot f'(c) = (f(b)-f(a)) \cdot g'(c)$, in particolare se $g(b) \neq g(a)$ e $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$, allora $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Consigli sulla dimostrazione: considerare $h(x) = (g(b)-g(a)) \cdot f(x) - (f(b)-f(a)) \cdot g(x)$.

18.9 Teorema di De L'Hopital

Siano $a, b \in \mathbb{R}^*$ con $a < b$ e $f, g \in C^{(1)}((a,b))$ t.c.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ oppure $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$
2. $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ o almeno intorno destro di a
3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}^*$

allora:

1. $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ o almeno intorno destro di a
2. $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Dimostrazione

Verrà considerato solo il caso in cui $a \in \mathbb{R}$:
Estendendo f, g per continuità si ottengono le funzioni $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in C^{(0)}([a,b])$ definite come:

$$\widetilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (a,b) \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases} \qquad \widetilde{g} = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in (a,b) \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$$

1. Per assurdo supponiamo che $\exists\, x \in (a,b)$ t.c. $g(x) = 0$, allora $\widetilde{g}(a) = \widetilde{g}(x) = 0$, per il teorema di Rolle $\exists\, c \in (a,x)$ t.c. $\widetilde{g}'(c) = 0$, ma $\widetilde{g}'(x) = g'(x) = 0$ e questo contraddice l'ipotesi 2, per cui la funzione $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è definita in (a,b).

2. Dato che $\widetilde{f}(a) = \widetilde{g}(a) = 0$, allora: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)}{\widetilde{g}(x) - \widetilde{g}(a)}$
   applicando Cauchy su $[a,x]$ per $\widetilde{f}, \widetilde{g} \Rightarrow \exists\, c_x \in (a,x)$ t.c. $\dfrac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)}{\widetilde{g}(x) - \widetilde{g}(a)} = \dfrac{\widetilde{f}'(c_x)}{\widetilde{g}'(c_x)}$
   per il teorema dei due carabinieri $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$ e per il teorema del cambio di variabile nei limiti si ottiene che $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\widetilde{f}'(c_x)}{\widetilde{g}'(c_x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\widetilde{f}'(x)}{\widetilde{g}'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, ovvero $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$\square$

Si osserva che il teorema di De L'Hopital è una condizione sufficiente, ma non necessaria per l'esistenza del limite. Se il limite che si ottiene dal rapporto tra le derivate non esiste, non vuol dire che il limite di partenza non esiste, ma soltanto che non si può applicare De L'Hopital.

Esempio $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x + \sin x}{2x + \cos x} = \dfrac{3}{2}$, ma $\overset{DLH}{=} \dfrac{3 + \cos x}{2 - \sin x} \nexists$

Relazione tra limite e derivata

Sia $f \in C^{(0)}((a,b)) \cap C^{(1)}([a,b))$ t.c. $\exists \lim_{x\to a^+} f'(x)$, allora f ha derivata destra in a e vale $f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$

Dimostrazione

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \overset{DLH}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(a+h)}{1} = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

□

Si osserva che può esistere $f'_+(a)$, ma non esistere $\lim_{x\to a^+} f(x)$

18.10 Derivate superiori alla prima

Derivata seconda

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I, allora è ben definita $f' : I \to \mathbb{R}$ t.c. $x \mapsto f'(x)$.
Se esiste finito $\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$, allora f' è derivabile in x_0 e f è derivabile due volte in x_0 e la derivata seconda in x_0 è indicata come $f''(x_0)$.

Derivata n-esima

Una funzione derivabile n volte in x_0, si indica $f^n(x_0)$. Se una funzione f è derivabile $n-1$ volte in x_0 e la funzione f^{n-1} è derivabile in x_0, allora f è derivabile n volte in x_0.

18.11 Concavità e convessità

Definizione

Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$, diremo che:

- f è convessa su I quando $\forall x_1, x_2 \in I$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ vale $\overset{\text{funzione}}{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)} \leq \overset{\text{secante}}{\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)}$
- f è concava su I quando $-f$ è convessa

Altra formulazione:

- f è convessa su I quando sta sotto la secante tra $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ per $x \in [x_1, x_2]$
- f è concava su I quando $-f$ è convessa

Legame tra derivata seconda e convessità

Se $f \in C^{(2)}((a,b))$, allora f è convessa su (a,b) $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$

Punti di flesso

Sia I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ t.c. f è convessa (o concava) definitivamente per x_0 e f è concava (o convessa) definitivamente per x_0, allora x_0 è punto di flesso di f.

- se $f'(x_0) = 0$ si dice punto di flesso a tangente orizzontale
- se $f'(x_0) = \pm\infty$ si dice punto di flesso a tangente verticale

Condizione necessaria per esistenza di un punto di flesso

Se $f \in C^{(2)}((a,b))$ e $x_0 \in (a,b)$ è un punto di flesso, allora $f''(x_0) = 0$. Non è detto che un punto con derivata seconda nulla necessariamente debba essere un punto di flesso. Esempio $f(x) = x^4$

Punti di minimo e massimo in base alla derivata seconda

Se $f'(x_0) = 0$ ed f è derivabile due volte in x_0, allora:
- se $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è punto di minimo locale
- se $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è punto di massimo locale
- se $f''(x_0) = 0$, non si può dire nulla

18.12 Asintoti

Classificazione

- se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, allora f ha un asintoto verticale sinistro in x_0
- se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, allora f ha un asintoto verticale destro in x_0
- se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora f ha come asintoto orizzontale la retta $y = l$ per $x \to +\infty$
- se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora f ha come asintoto orizzontale la retta $y = l$ per $x \to -\infty$
- data la retta $y = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, se abbiamo $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, allora f ha un asintoto obliquo di equazione $y = ax + b$ per $x \to +\infty$
- data la retta $y = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, se abbiamo $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, allora f ha un asintoto obliquo di equazione $y = ax + b$ per $x \to -\infty$

Trovare gli asintoti

- per trovare gli asintoti verticali bisogna cercare i punti $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ o $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ sono infiniti.
- per trovare gli asintoti orizzontali si calcolano i limiti $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$, se sono finiti.
- se i limiti per $x \to \pm\infty$ vengono infiniti, allora si cercano gli asintoti obliqui.

Caratterizzazione degli asintoti obliqui

La retta $y = ax + b$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b \end{cases}$

18.13 Polinomi di Taylor

Definizione

Sia f derivabile n volte in x_0, il polinomio

$$T_{n,x_0}[f](x) := \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

è detto polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di grado n.
Il caso in cui $x_0 = 0$: $T_{n,0}[f](x)$ è detto polinomio di MacLaurin.

Proprietà

1. $T_{n,x_0}[f](x_0) = f(x_0)$
2. $(T_{n,x_0}[f])^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
3. $T_{n,x_0}[\alpha f + \beta g] = \alpha T_{n,x_0}[f](x) + \beta T_{n,x_0}[f](x)$
4. $(T_{n,x_0}[f])'(x) = T_{n-1,x_0}[f'](x)$

Teorema di Peano - teorema del polinomio di Taylor con il resto di Peano

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$, allora:

1. $f(x) = T_{n,x_0}[f](x) + o(|x - x_0|^n)$ per $x \to x_0$
2. il polinomio di Taylor è l'unico polinomio di grado $\leq n$ per cui vale la tesi 1

Teorema del polinomio di Taylor con il resto di Lagrange

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in (a, b)$ e sia $f \in C^{(n+1)}([a, b])$, allora $\forall x \in (a, b)$ $\exists c$ nell'intervallo tra x_0 e x tale che $f(x) = T_{n,x_0}[f](x) + \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Si osserva che per $n = 0$ si ottiene il teorema di Lagrange. Questo teorema, a differenza del precedente, permette di calcolare una stima dell'errore commesso con l'approssimazione del polinomio di Taylor.

Alcuni sviluppi centrati in 0

funzione $f(x)$	**sviluppo di MacLaurin** $T_{n,0}[f](x)$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$\log(1 + x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$(1 + x)^a$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n)$ con $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}$

19 Studio di funzione

1.1 **dominio**
intervalli in cui la funzione è definita

1.2 **simmetrie**
si cerca se la funzione è pari $f(-x) = f(x)$ o dispari $f(x) = -f(-x)$

1.3 **periodicità**
si cerca se la funzione è periodica $f(x) = f(x + T)$ con $T \neq 0$

2 **segno della funzione**
si studia il segno della funzione ponendo $f(x) > 0$

3.1 **limiti**
si calcolano i limiti agli estremi degli intervalli del dominio e prolungamenti di continuità

3.2 **asintoti**
si cercano eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui

4 **punti di discontinuità**
si studiano i punti di discontinuità

5.1 **derivabilità**
si calcola la derivata prima e si studiano i punti di non derivalibità

5.2 **monotonia**
si studia il segno della derivata, cercando gli intervalli di monotonia

5.3 **massimi, minimi, sup e inf**
si cercano eventuali punti di massimo e minimo (relativi e assoluti) e gli estremi superiore e inferiore

7 **derivata seconda**
si calcola la derivata seconda, si studia il segno per trovare gli intervalli di concavità

8 **grafico**
si abbozza il grafico della funzione

20 Calcolo Integrale

20.1 Integrali di Riemann

Partizionamento intervalli

Sia $I = [a, b]$, una partizione di I è un insieme P definito come $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ con $n \in \mathbb{N}$. Definita $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $\forall i = 1, \dots n$, la norma della partizione è definita come $||P|| = \max \{\Delta x_i\}$.

Somma inferiore e superiore di Riemann

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione limitata e P una partizione di $[a, b]$,

- la somma di Riemann inferiore è $L(f, P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot \Delta x_i$

- la somma di Riemann superiore è $U(f, P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot \Delta x_i$

Si osserva che $\sup\limits_{P} \{L(f, P)\} \leq \inf\limits_{P} \{U(f, P)\}$

Funzioni Riemann integrabili

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione limitata e P una partizione di $[a, b]$, diremo che f è Riemann-integrabile quando $\sup \{L(f, P)\} = \inf \{U(f, P)\}$ e il valore comune è definito come $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$.

Condizione sufficiente per la Riemann-integrabilità

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione limitata, allora f è R.I. se almeno una delle seguenti condizioni è verificata:

1. f è continua in $[a, b]$ a meno di un numero finito di punti dove può essere discontinua (es. per la funzione di Dirichlet questa non è verificata)

2. f è monotona su $[a, b]$

Osservazione: se una funzione è continua su $[a, b]$, allora è anche limitata per il teorema di Weierstrass e di conseguenza è anche integrabile su tale intervallo contenuto nel dominio.

20.2 Proprietà degli integrali

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni R.I., allora:

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha f + \beta g$ è R.I. e vale $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx$

2. f è R.I. su $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ $\forall c \in [a.b]$ f è R.I. su $[a, c]$ e $[c, b]$ e vale $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$

3. se $f \leq g$ su $[a, b]$, allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$

4. per $a < b$, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$

5.1 se f è pari e $a > 0$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)\ dx$

5.2 se f è dispari e $a > 0$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$

20.3 Teorema della media integrale

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione R.I. e $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$, allora $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leq M$. Inoltre se $f \in C^{(0)}([a,b])$, allora $\exists c \in [a,b]$ tale che $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$ e la quantità $f(c)$ è detta media integrale.

Dimostrazione

Per dimostrare la prima disuguaglianza si considera la partizione $P = \{x_0, x_1\} = \{a, b\}$, si ottiene che $m \cdot (a-b) = L(f,P) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq U(f,P) = M \cdot (a-b)$, da cui la tesi.
Dato che f è continua, per Weierstrass e per il teorema dei valori intermedi, assume tutti i valori nell'intervallo $[m, M]$, per cui anche il valore $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \in [m, M]$ $\square$

20.4 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione R.I., si considera $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ per $x \in [a,b]$, se f è continua in $x_0 \in (a,b)$, allora F è derivabile in x_0 e si ha $F'(x_0) = f(x_0)$.

Dimostrazione

Dato che f è continua in x_0, dalla definizione di limite e continuità si ha che $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ vale $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$
Dato che per $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha $F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^{x_0} f(t)\, dx = \int_x^{x_0} f(t)\, dt$,
Dal teorema della media integrale si ha $\inf_{[x_0,x]} f \leq \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\, dt \leq \sup_{[x_0,x]} f$,
per la definzione di continuità $f(x_0) - \varepsilon \leq f(c) \leq f(x_0) + \varepsilon$ con $c \in [x, x_0] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
considerando che $f(c) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\, dt$ ed unendo le due disuguaglianze sopra si ottiene:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \inf_{[x_0,x]} f \leq \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\, dt \leq \sup_{[x_0,x]} f \leq f(x_0) + \varepsilon$$

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\, dt \leq f(x_0) + \varepsilon$$

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Usando la definizione di limite, si ottiene che $\lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$, ovvero $F'_+(x_0) = f(x_0)$
per ragionamento analogo si ottiene che $F'_-(x_0) = f(x_0)$, per cui F è derivabile e $F'(x_0) = f(x_0)$ $\square$

Corollario

Se $f \in C^{(0)}([a,b])$, allora $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ verifica:

1. $F \in C^{(0)}([a,b]) \cap C^{(1)}((a,b))$
2. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$
3. $\forall c, d \in [a,b]$ vale $\int_c^d f(t)\, dt = F(d) - F(c)$

Dimostrazione

1. segue dal teorema fondamentale
2. segue dal teorema fondamentale
3. segue dalla proprietà 2 degli integrali:
$\int_a^d f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^d f(t)\,dt$, cioè $F(d) = F(c) + \int_c^d f(t)\,dt$ $\square$

20.5 Integrali indefiniti

Funzione primitiva e integrali indefiniti

Una funzione F tale che $F' = f$ si dice primitiva di f.
L'integrale indefinito è l'insieme $\{F : F \text{ è primitiva di } f\} := \int f(x)\,dx$

Teorema di "caratterizzazione" delle primitive

Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ e F, G primitive di f, allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = G(x) + c\ \forall x \in I$.
Per cui $\int f(x)\,dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$ indicato con $F(x) + c$

Dimostrazione

Sia $H = F - G$, allora $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, da cui si deduce che per il teorema di caratterizzazione delle costanti, H è una costante, che è indicata con c $\square$

20.6 Strumenti per il calcolo integrale

1. tavola degli integrali di funzioni elementari ricavata da quella delle derivate, per il teorema fondamentale del calcolo di integrali
2. intergazione per parti, dalla regola di derivazione di un prodotto
3. integrazione per sostituzione, dalla regola di derivazione di funzioni composte

Integrali immediati

integrale $\int f(x)$	**primitiva** $F(x)$
$\int k\,dx$	$kx + c$
$\int x^\alpha\,dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \text{per } \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\log\lvert x\rvert + c$
$\int e^x\,dx$	$e^x + c$
$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + c$
$\int \cos x\,dx$	$\sin x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\tan x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$-\cot x + c$

integrale $\int f(x)$	**primitiva** $F(x)$
$\int \sinh x\,dx$	$\cosh x + c$
$\int \cosh x\,dx$	$\sinh x + c$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx$	$\tanh x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arcsin x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\arctan x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$	$\text{settsinh}x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$	$\text{settcosh}x + c$
$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$	$\text{setttanh}x + c$

Integrali per parti

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Dimostrazione

Partendo dalla derivata del prodotto $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
integrando si ottiene $\displaystyle\int (f(x) \cdot g(x))'\, dx = \int f'(x) \cdot g(x)\, dx + \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$, ovvero la tesi.

Esempi

- $\displaystyle\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = x \cdot \ln x - x + c$
- $\displaystyle\int x \cdot e^x\, dx = x \cdot e^x - e^x + c$

Integrali per sostituzione

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx \; = \overset{\text{solo formalmente}}{\begin{pmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) \end{pmatrix}} = \; \int f(t)\, dt \; = \; F(t) + c \; = \; F(\varphi(x) + c)$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx \; = \overset{\text{solo formalmente}}{\begin{pmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) \end{pmatrix}} = \; \int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(t)\, dt \; = \; F(b) - F(a) \; = \; F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

Dimostrazione

Siano $f \in C^{(0)}([a, b])$, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una sua primitiva, $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ una funzione derivabile,
allora $(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, ovvero $F \circ \varphi$ è una primitiva di $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$,
quindi $\displaystyle\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + c$

Sostituzioni canoniche

1. $\displaystyle\int f(e^x)\, dx \quad \to \quad t = e^x$
2. $\displaystyle\int f(\sqrt{a^2 - x^2})\, dx \quad \to \quad x = a \cdot \sin t$
   si sfrutta il fatto che $\sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$
3. $\displaystyle\int f(\sqrt{a^2 + x^2})\, dx \quad \to \quad x = a \cdot \sinh t$
   si sfrutta il fatto che $\sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{\cosh^2 x} = |\cosh x|$
4. $f(\sin x, \cos x, \tan x) \quad \to \quad \sin x = \dfrac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \cos x = \dfrac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \tan x = \dfrac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$
   si esegue una seconda sostituzione $t = \tan^2 \frac{x}{2}$
5. $\displaystyle\int f(x)\, dx$ con f funzione di $\sqrt[\alpha]{x}, \sqrt[\beta]{x}, \dots$ con $\alpha, \beta, \dots \in \mathbb{N} \quad \to \quad x = t^{m.c.m.(\alpha,\beta)}$
   si cerca di eliminare le radici es. $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x} \;\to\; x = t^6 \;\to\; t^2 \cdot t^3$
6. $\displaystyle\int f(\sin^2 x, \cos^2 x)\, dx \quad \to \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Integrazioni di funzioni razionali

Si cerca di ridursi ai casi $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|x| + c$, $\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + c$, $\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x + c$
Passaggi:

1. scomporre il denominatore per avere un polinomio di grado al massimo pari a 2
2. se il grado del numeratore è superiore o pari a quello del denominatore, si esegue la divisione tra polinomi
3. se il denominatore ha grado 1 $\rightarrow$ ci si riconduce al caso $\int \frac{1}{t}\,dt$
4. se il denominatore ha grado 2 $\rightarrow$ si scompone il denominatore
   - se $\Delta < 0$ $\rightarrow$ si ricorre al completamento dei quadrati e ci si riconduce a $\int \frac{1}{1+t^2}\,dt$
   - se $\Delta = 0$ $\rightarrow$ ci si riconduce al caso $\int \frac{1}{t^2}\,dt$
   - se $\Delta > 0$ $\rightarrow$ si scompone in $(x-x_1)(x-x_2)$ e si spezza la frazione trovando $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui $\frac{\text{numeratore}}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2}$

20.7 Integrali impropri

- Sia $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R}$, sia $f : (a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[c,d]$ $\forall c \in (a,b]$, se $\exists \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora f è integrabile in senso improprio su $(a,b]$ e il valore l del limite è chiamato integrale generalizzato.
- Caso analogo per l'estremo superiore.
- Sia $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su $[c,d] \subset (a,b)$, f è integrabile in senso improprio su (a,b) se $\exists x_0 \in (a,b)$ tale che f è integrabile in senso improprio su $(a,x_0]$ e $[x_0,b)$ per cui $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx$.
  Se esiste un x_0 come nella definizione, allora la definizione vale $\forall x_0 \in (a,b)$ e il valore dell'integrale è indipendente da x_0.

Se il valore del limite è finito, l'integrale è convergente, se è infinito, l'integrale è divergente.

20.8 Studio del carattere di un integrale

Integrabilità assoluta

Sia $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, f è assolutamente integrabile su (a,b) se $|f|$ è integrabile in senso improprio su (a,b).
Sia $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo $[c,d] \subset (a,b)$ e assolutamente integrabile su (a,b), allora è integrabile in senso improprio su (a,b): se $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, lo fa anche $\int_a^b f(x)\,dx$.

Criterio del confronto tra integrali

Siano f, g due funzioni definite su (a,b) con $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in (a,b)$ entrambe integrabili su ogni intervallo $[c,d] \subset (a,b)$, allora:

1. se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, allora $\int_a^b f(x)$ converge
2. se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, allora $\int_a^b g(x)$ diverge

Criterio del confronto asintotico

Siano $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R}$, siano f, g due funzioni definite su $(a, b]$ entrambe ≥ 0 e integrabili su ogni intervallo $[c, d] \subset (a, b]$ e tali che $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}^*$, allora:

1. se $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ hanno lo stesso comportamento
2. se $l = 0$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ converge, allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ converge
3. se $l = +\infty$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ diverge, allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ diverge

Funzioni campione

Caso per $x \to \pm\infty$:
data $g_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{1}{|x|^\alpha \cdot (\log|x|)^\beta}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'integrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} g_{\alpha,\beta}(x)\, dx$

- per $\alpha > 1$ converge
- per $\alpha < 1$ diverge a $+\infty$
- per $\alpha = 1$, $\beta > 1$ converge
- per $\alpha = 1$, $\beta \leq 1$ diverge a $+\infty$

Caso per $x \to a$:
data $l_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{1}{|x-a|^\alpha \cdot |\log|x-a||^\beta}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'integrale $\displaystyle\int_a^{a+\frac{1}{2}} l_{\alpha,\beta}(x)\, dx$

- per $\alpha > 1$ diverge a $+\infty$
- per $\alpha < 1$ converge
- per $\alpha = 1$, $\beta > 1$ converge
- per $\alpha = 1$, $\beta \leq 1$ diverge a $+\infty$

Nel primo caso, se $x \to +\infty$, i valori assoluti si possono omettere. L'estremo inferiore deve essere diverso da 0 e 1, altrimenti la funzione non è definita e si ricade nel secondo caso.

Nel secondo caso, scegliendo $t = \dfrac{1}{x-a}$ ci si riconduce al primo caso. L'estremo superiore deve essere un punto diverso da a e $a+1$, altrimenti la funzione non è definita.

20.9 Derivata di una funzione integrale

Siano f, g, h funzioni derivabili, e $G(x) = \displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt$, allora G è derivabile e vale
$G'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Dimostrazione

Sia F una primitiva di f, allora $G(x) = F(h(x)) - F(g(x))$, derivando si ha
$G'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x)$ $\square$