Appunti di algebra lineare e geometria

Giacomo Simonetto

Secondo semetre 2023-24

Sommario

Appunti del corso di algebra lineare e geometria della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

Indice

1 Definizioni di anello commutativo e campo e spazio vettoriale

1.1 Anello commutativo

Un anello commutativo con unità è un insieme in cui sono definite due operazioni $+$ e $\times$ e che soddisfa le seguenti proprietà:

- per la somma $+$:
  1. proprietà associativa
  2. proprietà commutativa
  3. esistenza dell'elemento neutro
  4. esistenza dell'elemento opposto
- per il prodotto $\times$:
  5. proprietà associativa
  6. proprietà commutativa
  7. proprietà distributiva
  8. esistenza dell'elemento neutro

1.2 Campo

Un campo k è un insieme in cui sono definite le due operazioni $+$ e $\times$, che soddisfa sia le 8 proprietà dell'anello commutativo, sia la seguente:

9. esistenza dell'elemento inverso: $\forall a \in k$ con $a \neq 0$ $\exists b \in k$ tale che $a \cdot b = b \cdot a = 1$

In un campo k valgono le seguenti proprietà:

1. si possono risolvere equazioni di primo grado: $ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -b/a$
2. per ogni elemento di k vale $a \cdot 0 = 0$

1.3 Spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale V su un campo k è un insieme di vettori non vuoto dotato delle operazioni:

1. somma $+$: $\qquad f : \begin{smallmatrix} V \times V & \to & V \\ (v,w) & \mapsto & v+w \end{smallmatrix}$
2. prodotto per uno scalare $\times$: $\qquad f : \begin{smallmatrix} k \times V & \to & V \\ (\alpha,v) & \mapsto & \alpha \cdot w \end{smallmatrix}$

Inoltre devovo valere le 8 proprietà di anello commutativo. Gli elementi di uno spazio vettoriale si chiamano vettori.

Proprietà dell'elemento neutro

Sia V uno spazio vettoriale su campo k:

1. $0 \in k,\ v \in V \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot v = \vec{0}$
2. $\alpha \in k,\ \vec{0} \in V \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Proprietà dell'opposto

Sia V uno spazio vettoriale su campo k e $v \in V$, allora vale $-1 \cdot v = -v$ e $-v$ è l'opposto di v.
Sia A un anello commutativo di uno spazio vettoriale (spazio vettoriale), allora l'opposto è unico.

2 Spazi vettoriali, sottospazi e vettori

2.1 Combinazione lineare di vettori

Sia V uno spazio vettoriale su campo k, dati $v_1, \dots v_n \in V$ vettori e $\alpha_1, \dots \alpha_n \in k$ scalari allora possiamo costruire il vettore $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, chiamato combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots v_n$.

2.2 Vettori liearmente indipendenti

Siano $v_1, \dots v_n$ vettori di uno spazio vettoriale V, i vettori sono linearmente indipendenti se l'unica soluzione di $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$ è per $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Quando dei vettori non sono linearmente indipendenti, si dicono linearmente dipendenti ed è possibile scriverne uno come combinazione lineare degli altri.

Se tra i vettori è presente il vettore nullo $\vec{0}$, allora i vettori saranno linearmente dipendenti.

Se $v_1, \dots v_n$ sono linearmente dipendenti e aggiungo altri vettori $v_{n+1}, \dots v_m$, allora saranno ancora linearmente dipendenti.

2.3 Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su campo k, un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme W di V che è sempre sottospazio vettoriale secondo le stesse operazioni di V.

Sia W un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V ($W \subseteq V$), W è sottospazio vettoriale di V ($W \leq V$) se e solo se valgono le seguenti condizioni:

1. W non è vuoto: $W \neq \varnothing$
2. W è chiuso per la somma: $w_1, w_2 \in W \quad \Rightarrow \quad w_1 + w_2 = w_3 \in W$
3. W è chiuso per il prodotto: $\alpha \in k,\ w_1 \in W \quad \Rightarrow \quad \alpha w_1 = w_2 \in W$

Sia $W \leq V$, allora $\vec{0} \in W$, ovvero l'elemento nullo di V appartiene anche a W.

Ogni spazio vettoriale V ha almeno due sottospazi vettoriali, ovvero $W_1 = \{\vec{0}\}$ e $W_2 = V$, per cui dato un generico sottospazio W di V, vale $\{\vec{0}\} \leq W \leq V$.

Unione, somma e intersezione tra sottospazi vettoriali

Siano $U, W \leq V$ sottospazi di V, spazio vettoriale su k, vengono definite:

- $U \cap W = \{v \in U \wedge v \in W\}$ è l'intrsezione, si dimostra che $U \cap W \leq V$
- $U \cup W = \{v \in U \vee v \in W\}$ è l'unione, che si dimostra non essere sottospazi
- $U + W = \{u + w \text{ t.c. } u \in U,\ w \in W\}$ è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene U e W

Sottospazio generato da vettori generatori

Sia V uno spazio vettoriale su campo k e $S \subseteq V$ un insieme di vettori di V, allora il sottospazio vettoriale generato da S è definito come il più piccolo sottospazio di V che contiene S e si indica $L(S)$ o $< S >$.

Sia $S = \{v_1, \dots v_n\}$, si dimostra che il sottospazio $L(S) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ con $\lambda_1, \dots \lambda_n \in k$ è dato dalla combinazione lineare dei vettori di S chiamati vettori generatori.

Sia V spazio vettoriale su campo k, un sottoinsieme $S = \{v_1, \dots v_n\}$ è detto insieme di generatori di V se $L(S) = V$, per cui ogni vettore di V si può scrivere come combinazione lineare dei vettori di S.

2.4 Base di uno spazio vettoriale

- Sia V uno spazio vettoriale su k, una base di V è un sottoinsieme B di vettori che sono contemporaneamente generatori di V e linearmente indipendenti.
- Uno stesso spazio vettoriale può avere più basi differenti.
- Sia V spazio vettoriale con base $\{v_1, \dots v_n\}$, ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots v_n$.
- Sia V spazio vettoriale e $S = \{v_1, \dots v_n\}$ sottoinsieme di V, S è base di V se e solo se ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di S.
- Sia V spazio vettoriale con $B = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V e sia $v \in V$ vettore esprimibile come combinazione lineare dei vettori della base: $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}^B$, con $\alpha_1, \dots \alpha_n$ coordinate di v rispetto alla base B.
- Uno spazio vettoriale si dice finitamente generato se è generato da un numero finito di vettori.
- Sia V spazio vettoriale con $v_1, \dots v_n$ insieme di generatori di V, sia $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ vettore di V, allora $w, v_1, \dots v_{n-1}$ è insieme di generatori di V.
- Sia V spazio vettoriale $\{v_1, \dots v_n\}$ insieme di generatori di V e $\{w_1, \dots w_r\}$ vettori linearmente indipendenti di V, allora $r \leq n$.
- Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi, per cui si definisce la dimensione di uno spazio vettoriale come il numero di elementi di una sua base e si indica con $\dim V$. Per convenzione $V = \left\{\vec{0}\right\}$ ha base $B = \varnothing$ e dimensione $\dim V = 0$.
- Sia V spazio vettoriale e $S = \{v_1 \dots v_n\}$ insieme di generatori, da S si può estrarre una base di V (tenendo solo vettori linearmente indipendenti), e vale $\dim V \leq S$.
- Sia V spazio vettoriale con $dimV = n$ e $S = \{v_1, \dots v_n\}$ vettori linearmente indipendenti, allora S può essere completato ad una base di V (aggiungendo altri vettori linearmente indipendenti).
- Sia V spazio vettoriale e siano $R, S \subseteq V$, allora $R \subseteq S \;\Rightarrow\; L(R) \leq L(S)$
- Sia V spazio vettoriale con $\dim V = n$, allora le seguenti proprietà si implicano a vicenda:
  1. $v_1, \dots v_n$ sono linearmente indipendenti
  2. $v_1, \dots v_n$ generano V
  3. $\{v_1, \dots v_n\}$ è base di V
- Sia V uno spazio vettoriale e U, W sottospazi di V con $U \cap W$ e $U + W$ sottospazi di V, allora $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ detta Formula di Grassmann. Nel caso particolare in cui $U \cap W = \left\{\vec{0}\right\}$ si ha $\dim(U \cap W) = 0$ e $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ e i due sottospazi U e W si dicono in somma diretta e si scrive $U + W = U \oplus W$.
- Un vettore di $U \oplus W$ si scrive in modo unico nella forma $u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$.

() Sia $V = k^n$ spazio vettoriale su campo k e sia $U = \{(x_1, \dots x_n) \text{ t.c. } \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$ per determinati $\alpha_1, \dots \alpha_n \in k$ fissati, allora $U \leq k^n$.

3 Funzioni e applicazioni lineari

Siano V, W spazi vettoriali su campo k, $f : W \to W$ si dice lineare se valgono:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \qquad \forall v_1, v_2 \in V$
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v) \qquad \forall v \in V,\ \forall \lambda \in k$

- Sia V spazio vettoriale su k e $f_1, \dots f_n : V \to k$ lineari, allora posso costruire la funzione f lineare definita come $f : \begin{matrix} V \to & k^n \\ v \mapsto & \begin{pmatrix} f_1(v) \\ \dots \\ f_n(v) \end{pmatrix} \end{matrix}$
- Sia $f : V \to W$ lineare, allora $f(\vec{0}) = \vec{0}$
- Le funzioni lineari del tipo $f : k^n \to k$ sono tutte e sole del tipo $\begin{matrix} k^n & \to & k \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & a_1x_1 + \dots + a_nx_n \end{matrix}$ con $a_1, \dots a_n \in k$

3.1 Omorfismo e isomorfismo

Una funzione o applicazione lineare è chiamata omomorfismo.
Una funzione lineare biiettiva è chiamata isomorfismo.
Una funzione lineare che ha lo stesso spazio vettoriale sia nel dominio che nel codominio si dice endomorfismo.

- Sia $f : V \to W$ isomorfismo (f biiettiva), allora f è invertibile ed esiste $f^-1 : W \to V$ lineare inversa di f.
- Tutti gli spazi vettoriali su campo k di dimensione n sono isomorfi a k^n e l'isomorfismo (la funzione) dipende dalla base scelta negli spazi vettoriali.

3.2 Nucleo e immagine di una funzione

Siano V, W spazi vettoriali sul campo k e sia $f : V \to W$ una funzione lineare, si definiscono:

1. nucleo di f: $\ker f = \{v \in V \text{ t.c. } f(\vec{v}) = \vec{0}\} \subseteq V$
2. immagine di f: $\mathrm{Im} f = \{w \in W \text{ t.c. } \exists v \in V \text{ per cui } f(v) = w\} \subseteq W$

Sia $f : V \to W$ funzione lineare, allora:

1. $\ker f \leq V$ (è sottospazio)
2. $\mathrm{Im} f \leq W$ (è sottospazio)

Sia $f : V \to W$ funzione lineare, f è iniettiva se e solo se $\ker f = \{\vec{0}\}$
Sia $f : V \to W$ funzione lineare, f è suriettiva se e solo se $\mathrm{Im} f = W$
Sia $f : V \to W$ lineare, allora $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim V$
La nullità di f è $\mathrm{null} f = \dim \ker f$, il rango di f è $\mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f$, per cui vale che $\mathrm{null} f + \mathrm{rg} f = \dim V$

3.3 Funzioni e vettori

- In generale una funzione non manda vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti, ma: (due successive)
- Se $f(v_1), \dots f(v_n)$ sono linearmente indipendenti, allora $v_1, \dots v_n$ sono linearmente indipendenti.
- Se f è iniettiva: $v_1, \dots v_n$ linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ $f(v_1), \dots f(v_n)$ linearmente indipendenti.
- Sia $f : V \to W$ lineare, $\{v_1, \dots v_n\}$ generatori di V, allora $\{w_1 = f(v_1), \dots w_n = f(v_n)\}$ sono generatori di W.
- Sia $f : V \to W$ lineare, sia $\{v_1, \dots v_n\}$ base V, f è univocamente determinata dalla conoscenza di $f(v_1), \dots f(v_n)$
- Siano V, W spazi vettoriali sul campo k, sia $\{v_1, \dots v_n\}$ base di V siano $w_1, \dots w_n$ arbitrari vettori di W, allora esiste ed è unica la funzione $f : V \to W$ t.c. $f(v_1) = w_1, \dots f(v_n) = w_n$

4 Matrici

Sia $M_{m,n}(k)$ uno spazio vettoriale i cui vettori sono definiti come matrici $m \times n$ (m righe, n colonne):

$$M_{m,n}(k) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = a(i,j) \qquad \text{con} \begin{array}{r} a_{11}, \dots a_{mn} \in k \\ i = 1, \dots m \\ j = 1, \dots n \end{array} \right\}$$

4.1 Operazioni

Somma tra matrici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Prodotto per uno scalare

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Prodotto righe per colonne tra matrici

Si può eseguire solo se le colonne della prima sono dello stesso numero delle righe della seconda. Siano $A = (a_{ih}) \in M_{m,n}(k)$, $B = (b_{hj}) \in M_{n,r}(k)$, $C = (c_{ij}) \in M_{m,r}(k)$:

$$A \cdot B = C \quad \longrightarrow \quad C = (c_{ij}) = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot b_{hj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Proprietà del prodotto tra matrici

1. non vale la proprietà commutativa $AB \neq BA$
2. proprietà associativa: $(AB)C = A(BC)$
3. proprietà distributiva: $(A+B)C = AC + BC$ e $C(A+B) = CA + CB$
4. prodotto per scalare: $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$
5. elemento neutro: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice identica $n \times n$

Matrici trasposte

Sia $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(k)$ la trasposta è $A^\mathsf{T} = (a_{ji}) \in M_{n,m}(k)$, ovvero la matrice ottenuta scambiando le righe e le colonne di A.

Proprietà della trasposta

1. $(A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A$
2. $(A+B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T}$
3. $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$

Matrice inversa

Una matrice si dice invertibile se esiste B tale che $AB = BA = I_n$.
Se B esiste, è la matrice inversa di A e si indica B^{-1}.

Matrici simili

Due matrici quadrate A, $A' \in M_n(k)$ si dicono simili se esiste una matrice $P \in M_n(k)$ invertibile per cui $A' = P\,A\,P^{-1}$.

Due matrici sono simili se e solo se rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto ad opportune basi (vedere composizione di funzioni lineari e funzioni di cambiamento di base).

Elementi (matrici) nilpotenti e divisori di 0

Una matrice quadrata non nulla $A \in M_n(k) \setminus \{\vec{0}\}$ si dice nilpotente se $A^k = 0$ per un certo valore di k.
Due matrici non nulle A, B sono divisori di 0 se $A \cdot B = \vec{0}$.

4.2 Funzioni e matrici

Funzioni come spazio vettoriale

Siano $f, g : V \to W$ funzioni lineari, definiamo:

- somma di funzioni: $f + g : \substack{V \to W \\ v \mapsto f(v)+g(v)}$
- prodotto funzione per scalare: $\lambda f : \substack{V \to W \\ v \mapsto \lambda f(v)}$ con $\lambda \in k$

In questo modo è possibile definire uno spazio vettoriale dato dall'insieme $\hom(V, W)$, di tutti gli omomorfismi $f : V \to W$

Parallelismo funzioni matrici

Siano $f, g : V \to W$ funzioni lineari, siano $\underline{v} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V con $\dim V = n$ e $\underline{w} = \{w_1, \dots w_m\}$ base di W con $\dim W = m$, si possono definire le matrici:

- $A = (a_{ij}) = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) \in M_{m,n}(k)$
- $B = (b_{ij}) = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(g) \in M_{m,n}(k)$

Inoltre le operazioni tra f e g si possono definire in termini di matrici:

- somma di funzioni: $f + g = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f + g) = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) + \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(g)$
- prodotto funzione per scalare: $\lambda f = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(\lambda f) = \lambda \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$
- composizione di funzioni: $g \circ f = \mathrm{M}^{\underline{z}}_{\underline{v}}(g \circ f) = \mathrm{M}^{\underline{z}}_{\underline{w}}(g) \cdot \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$

  definita con $f : V \to W$, $g : W \to Z$ e con $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{z}$ basi di V, W, Z

Funzioni come prodotto matrice vettore

Sia $f : V \to W$ funzione lineare, siano $\underline{v} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V con $\dim V = n$ e $\underline{w} = \{w_1, \dots w_m\}$ base di W con $\dim W = m$:

- definisco gli isomorfismi $\mathrm{iso}_1 : \substack{V \to k^n \\ v \mapsto \left(\substack{\lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_n}\right)^{\underline{v}}}$ e $\mathrm{iso}_2 : \substack{W \to k^m \\ w \mapsto \left(\substack{\mu_1 \\ \cdots \\ \mu_2}\right)^{\underline{w}}}$
- definisco l'operazione $L_A : \substack{k^n \to k^m \\ \left(\substack{\lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_n}\right)^{\underline{v}} \mapsto \left(\substack{\mu_1 \\ \cdots \\ \mu_2}\right)^{\underline{w}}}$ con $A = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) \in M_{m,n}(k)$, $\left(\substack{\mu_1 \\ \cdots \\ \mu_2}\right)^{\underline{w}} = A \left(\substack{\lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_n}\right)^{\underline{v}}$

Per cui dato un vettore $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V$ e $w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m \in W$, vale che:

$$w = f(v) \quad \Rightarrow \quad \left(\substack{\mu_1 \\ \cdots \\ \mu_2}\right)^{\underline{w}} = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) \cdot \left(\substack{\lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_n}\right)^{\underline{v}}$$

Ovvero ogni funzione, scelte una base del dominio e una del codominio, è possibile scriverla come matrice $\dim W \times \dim V$, e per applicare la funzione ad un vettore, si moltiplica a sinistra il vettore dato dalle coordinate rispetto alla base del dominio per la matrice, ottnenedo le coordinate del vettore rispetto alla base del codominio.

Per costruire la matrice relativa alla funzione si uniscono le coordinate dei vettori (verticali) dati dall'applicaione della funzione ai vettori della base del dominio come di seguito:
sia $f : V \to W$, $\underline{v} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V, $\underline{w} = \{w_1, \dots w_m\}$ base di W:

$$f : \begin{matrix} f(v_1) = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m \\ f(v_2) = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m \\ \dots \\ f(v_n) = z_1 w_1 + z_2 w_2 + \dots + z_m w_m \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad A = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & z_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & b_m & \cdots & z_m \end{pmatrix}$$

Immagine di una funzione e rango di una matrice

Sia $f : V \to W$ lineare, $\underline{v} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V, $\underline{w} = \{w_1, \dots w_m\}$ base di W, allora l'immagine di f è il sottospazio generato dalle colonne di $A = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f)$, ovvero $\mathrm{Im} f = L(f(v_1), \dots f(v_n))$.

Il rango di una matrice è la dimensione del sottospazio generato dalle colonne di essa o il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di essa.

Matrice del cambiamento di base

Sia V spazio vettoriale su k con basi $\underline{v} = \{v_1, \dots v_n\}$ e $\underline{v'} = \{v'_1, \dots v'_n\}$. Un vettore v si può esprimere in due modi diversi secondo i due sistemi di coordinate:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}} = \lambda'_1 v'_1 + \dots + \lambda'_n v'_n = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \cdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}^{\underline{v'}}$$

Costriusco la funzione identità $id : \begin{smallmatrix} V_{\underline{v}} & \to & V_{\underline{v'}} \\ v & \mapsto & v' \end{smallmatrix}$ e la relativa matrice in cui le colonne sono le coordinate dei vettori della base $\underline{v}$ rispetto alla base $\underline{v'}$, come segue:

$$f : \begin{array}{c} v_1 = a_1 v'_1 + a_2 v'_2 + \dots + a_m v'_m \\ v_2 = b_1 v'_1 + b_2 v'_2 + \dots + b_m v'_m \\ \cdots \\ v_n = z_1 v'_1 + z_2 v'_2 + \dots + z_m v'_m \end{array} \longrightarrow A = \mathrm{M}^{\underline{v'}}_{\underline{v}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & z_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & b_m & \cdots & z_m \end{pmatrix}$$

Per cui si ha che $\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \cdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}^{\underline{v'}} = \mathrm{M}^{\underline{v'}}_{\underline{v}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^{\underline{v}}$

Le matrici del cambiamento di base (essendo isomorfismi), sono invertibili e la loro inversa si ottiene scambiando le basi utilizzate: $\left(\mathrm{M}^{\underline{v'}}_{\underline{v}}(id)\right)^{-1} = \mathrm{M}^{\underline{v}}_{\underline{v'}}(id)$ e si ha che $\mathrm{M}^{\underline{v'}}_{\underline{v}} \cdot \mathrm{M}^{\underline{v}}_{\underline{v'}} = I_n$

Composizione di funzioni lineari tra spazi vettoriali e di funzioni di cambiamento di base

Siano V, W spazi vettoriali con $\underline{v}$, $\underline{v'}$ basi di V e $\underline{w}$, $\underline{w'}$ basi di W e $f : V \to W$, si ha che:

- $\mathrm{id}_1 : V_{\underline{v}} \to V_{\underline{v'}}$ $\quad P = \mathrm{M}^{\underline{v'}}_{\underline{v}}$ $\quad P^{-1} = \mathrm{M}^{\underline{v}}_{\underline{v'}}$ $\qquad \mathrm{id}_2 : W_{\underline{w}} \to W_{\underline{w'}}$ $\quad S = \mathrm{M}^{\underline{w'}}_{\underline{w}}$ $\quad S^{-1} = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{w'}}$
- $f : V_{\underline{v}} \to W_{\underline{w}}$ $\quad A = \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}}$ $\qquad f' : V_{\underline{v'}} \to W_{\underline{w'}}$ $\quad A' = \mathrm{M}^{\underline{w'}}_{\underline{v'}}$
- $f' = id_2 \circ f \circ {id_1}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M}^{\underline{w'}}_{\underline{v'}} = \mathrm{M}^{\underline{w'}}_{\underline{w}} \cdot \mathrm{M}^{\underline{w}}_{\underline{v}} \cdot \mathrm{M}^{\underline{v}}_{\underline{v'}} \quad \Rightarrow \quad A' = S\,A\,P^{-1}$

Se la funzione f è un endomorfismo (es. $f : V \to V$), si ottiene che $S = P$, per cui $A' = P\,A\,P^{-1}$, ovvero le matrici A e A' sono simili.