

Appunti di Teoria dei circuiti

Giacomo Simonetto

Secondo semestre 2024-25

Sommario

Appunti del corso di Teoria dei circuiti della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

Indice

1	Introduzione alla teoria dei circuiti	4
2	Interpretazione fisica dell'elettrostatica	5
2.1	Campi e grandezze fisiche	5
2.2	Carica elettrica e densità di carica	5
2.3	Corrente elettrica e densità di corrente	5
2.4	Campo elettrostatico	7
2.5	Potenziale elettrostatico	7
2.6	Tensioni e forze elettromotrici	8
3	Modello a parametri concentrati - <i>mpc</i>	9
3.1	Teorema	9
3.2	Componenti	9
3.3	Reti elettriche o circuiti	10
3.4	Potenza di bipolo, convenzione dei generatori e utilizzatori	10
4	Componenti elettrici	12
4.1	Caratteristica esterna	12
4.2	Componenti	12
4.3	Generatori	14
5	Topologia delle reti	15
5.1	Introduzione	15
5.2	Teoria dei grafi	15
5.3	Leggi di Kirchhoff	15
5.4	Sistemi di equazioni topologiche	16
5.5	Connessione in serie	16
5.6	Connessione in parallelo	17
5.7	Resistenze e conduttanze equivalenti di porta	17
6	Analisi di circuiti lineari a corrente continua	18
6.1	Componenti lineari - GLC, GLT	18
6.2	Circuiti lineari ed equazioni indipendenti	19
6.3	Metodi di analisi delle reti lineari	19
6.4	Rendimento di un generatore elettrico lineare	21
6.5	Punto di lavoro	21
7	Doppi bipoli	22
7.1	Introduzione ai doppi bipoli	22
7.2	Rappresentazioni dei doppi bipoli ideali inerti	22
7.3	Collegamenti di doppi bipoli	24
7.4	Trasformatore ideale	25
7.5	Generatori pilotati	25
7.6	Circuiti lineari in corrente continua con doppi bipoli	26
8	Componenti elettrici pt.2	27
8.1	Condensatore	27
8.2	Induttore	28
9	Reti in regime sinusoidale	29
9.1	Introduzione e funzioni periodiche	29
9.2	Funzioni sinusoidali	29
9.3	Trasformata di Steinmetz, fasori e numeri complessi	30
9.4	Potenze in regime sinusoidale	31
9.5	Bipoli in regime sinusoidale	32
9.6	Leggi di Kirchhoff, serie e paralleli in AC	34
9.7	Rete simbolica	34

9.8	Analisi in frequenza e risonanza in una serie RLC	36
9.9	Analisi in frequenza e antisonanza in un parallelo RLC	37
9.10	Teorema del massimo trasferimento di potenza	38
10	Reti in regime variabile	39
10.1	Regime variabile quasi stazionario	39
10.2	Istante critico e variabili di stato all'istante critico	39
10.3	Reti lineari in regime variabile	39
10.4	Carica del condensatore in circuito RC	41
10.5	Scarica del condensatore in circuito RC	41
10.6	Carica dell'induttore in circuito RL	42
10.7	Scarica dell'induttore in circuito RL	42
10.8	Circuito RLC e fattore di smorzamento	43
10.9	Considerazioni finali su reti a regime variabile che tendono alla stabilità	44

1 Introduzione alla teoria dei circuiti

Definizione di circuito

Un circuito elettrico è un insieme di dispositivi elettrici interconnessi, deputati alla produzione, trasmissione ed utilizzazione dell'energia elettrica.

Equazioni di Maxwell

È possibile risolvere un circuito attraverso le equazioni di Maxwell, ma si otterrebbe un sistema troppo complesso da gestire e da risolvere, per cui si utilizzano approssimazioni e modelli definiti dalla teoria dei circuiti.

Modello zero-dimensionale

Il modello zero-dimensionale non tiene conto di cosa avviene all'interno dei componenti elettrici, ma solo di come interagiscono tra di loro. In altre parole viene trascurata la loro dimensione.

Grandezze fisiche

Le grandezze fisiche utilizzate sono: tensione, corrente, potenza, energia e frequenza

Modello a parametri concentrati

Il modello a parametri concentrati prevede che:

1. i componenti RLC sono idealizzati e considerati puntiformi (modello zero-dimensionale)
2. tensioni e correnti dipendono dal tempo e non dallo spazio: si può evitare di considerare eventuali propagazioni elettromagnetiche
3. l'interazione tra componenti avviene solo attraverso connessioni elettriche

Il suo scopo è di:

- analizzare i comportamenti di tensioni e correnti (flussi di potenza)
- prevedere comportamenti dei dispositivi reali mediante modelli semplificati
- progettare e ottimizzare sistemi elettrici

Validità

La teoria dei circuiti è valida se la dimensione del circuito è inferiore alla lunghezza d'onda del segnale che circola all'interno:

- corrente alternata di rete $\rightarrow 50 \text{ Hz} \rightarrow \lambda = 6000 \text{ km}$
- radiofrequenza $\rightarrow 100 \text{ MHz} \rightarrow \lambda = 3 \text{ m}$
- microonde $\rightarrow 10 \text{ GHz} \rightarrow \lambda = 3 \text{ cm}$ (limite della TdC)

Tipi di circuiti

- circuiti elettrici di segnale, lavorano con mW
- circuiti elettrici di potenza, lavorano con kW

Flusso e trasmissione di energia

Per flusso di energia si intende come viene utilizzata la potenza in un circuito. La trasmissione di energia può avvenire in due modi: attraverso onde elettromagnetiche (radio, antenne, ...) o per conduzione (linee elettriche).

2 Interpretazione fisica dell'elettrostatica

2.1 Campi e grandezze fisiche

Campo fisico

Un campo fisico è la distribuzione su un volume o su una superficie di una certa grandezza fisica rappresentabile tramite vettore o scalare. I campi fisici di grandezze scalari si dicono campi scalari, mentre i campi fisici di grandezze vettoriali si dicono campi vettoriali.

Grandezze fisiche

Una grandezza fisica è una quantità misurabile di un oggetto. Il processo di misura consiste nel comparare una quantità campione (detta unità di misura) con l'oggetto da misurare. Le grandezze fondamentali del Sistema Internazionale sono: m, kg, s, K, A, cd, mol.

2.2 Carica elettrica e densità di carica

Carica elettrica

- la quantità di carica è una grandezza che misura la carica elettrica di un oggetto
- si osserva che esiste una forza che dipende dalla quantità di carica dei corpi e può essere attrattiva tra corpi con cariche di segno opposto o repulsiva tra corpi con cariche dello stesso segno
- la carica è quantizzata con quanto $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$

Densità di carica

La carica di una distribuzione è data da $q = \int_V \rho d\tau$, ovvero la somma complessiva delle cariche positive e negative di un corpo:

- densità volumica: $\rho(P, t) = [C_{oulomb}/m^3] = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{q}{V}$, $q = \int_V \rho(P, t) d\tau$
- densità superficiale: $\sigma(P, t) = [C_{oulomb}/m^2] = \lim_{\Sigma \rightarrow 0} \frac{q}{\Sigma}$, $q = \int_{\Sigma} \sigma(P, t) d\Sigma$

2.3 Corrente elettrica e densità di corrente

Densità di corrente

Si genera per conduzione elettrica attraverso due modi:

- corrente di conduzione: moto delle cariche libere (es. nei metalli)
- corrente di convezione: moto delle cariche libere e/o vincolate (es. soluzioni elettrolitiche)

$$\vec{J}(P, t) = \rho^+ + v_d^+ + \rho^- + v_d^- \quad \begin{cases} \rho^+ \rightarrow \text{densità delle cariche positive} \\ v_d^+ \rightarrow \text{velocità di deriva delle cariche positive} \\ \rho^- \rightarrow \text{densità delle cariche negative} \\ v_d^- \rightarrow \text{velocità di deriva delle cariche negative} \end{cases}$$

Corrente

La corrente è la quantità di cariche che attraversano una superficie in un'unità di tempo. Dipende dalla superficie e dal suo orientamento. Non dipende dal resto dello spazio. Se si inverte l'orientamento della superficie o il riferimento, il segno della corrente si inverte. Si misura in Ampère $[A_{mpere}] = [C_{oulomb}/s]$.

$$i(t) = \int_{\Sigma} \vec{J}(P, t) \cdot d\vec{\Sigma} \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q \text{ attraverso } \Sigma(t)}{\Delta t}$$

In caso di conduttori filiformi (dove $\Sigma \ll$ lunghezza), vale $i(t) = \vec{J} \cdot \vec{\Sigma}$

Conservazione della carica e continuità della corrente

La carica elettrica non si crea, non si distrugge, si conserva sempre.

$$q_{\text{interna}}(t + \Delta t) = q_{\text{interna}}(t) + \Delta q_{\text{uscente}}$$
$$i_{\text{uscente}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q_{\text{uscente}}}{\Delta t} = -\frac{dq_{\text{entrante}}}{dt} = -i_{\text{entrante}}$$

- la variazione di carica corrisponde ad una corrente
- in assenza di corrente, la carica non varia
- la carica entrante è pari a quella uscente (in modulo)

Corrente solenoidale

La corrente si dice solenoidale quando:

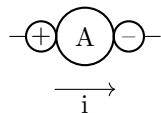
- si è in regime stazionario: non si hanno accumuli o prelievi di carica in nessun punto del volume, la carica entrante e quella uscente sono uguali e il campo \vec{J} forma linee di flusso chiuse
 - in regioni di carica nulla: $\rho = 0$ ad esempio nei metalli
- si è in regime stazionario

Tubo di flusso

Il tubo di flusso è un conduttore rivestito da materiale isolante che può essere attraversato da corrente. In condizioni stazionarie (con campo di corrente solenoidale) si ha che la corrente i_1 attraverso una superficie Σ_1 è uguale alla corrente i_2 attraverso una superficie Σ_2 . Ovvero non si hanno perdite di corrente: $i_{\text{uscente}} = 0$.

Amperometro

L'amperometro è uno strumento per misurare la corrente in un circuito. Il verso del sistema è dal + al - (ovvero la corrente entra dal connettore + ed esce dal connettore -). Si usa in serie al circuito. Un amperometro si dice ideale se non influisce sul circuito e se la misura avviene senza ritardi.



2.4 Campo elettrostatico

Legge di Coulomb e campo elettrostatico

Il campo elettrostatico si definisce a partire dalla forza di Coulomb, per questo è anche chiamato campo coulombiano.

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \hat{u}_{1,2} \quad \vec{F}_{\text{elettr}} = q\vec{E} \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_{1,2} = [N/C_{oulb}] = [V_{olt}/m]$$

$$\text{Il campo elettrostatico è additivo: } \vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_{PO_k}^2} \vec{u}_k(P) \quad \vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r^2} \vec{u}_k d\tau$$

Campo elettrostatico nei conduttori

Un conduttore è un materiale che conduce corrente. Le cariche sono libere di muoversi e, muovendosi, generano una corrente. In condizione di equilibrio il campo all'interno è nullo, ovvero non c'è nessuna forza che agisce sulle cariche e le cariche sono ferme (altrimenti non ci sarebbe equilibrio).

Campo elettrostatico nei dielettrici - isolanti

Un dielettrico o isolante è un materiale che non conduce corrente. Le cariche sono bloccate a meno di piccoli spostamenti responsabili della polarizzazione dei dielettrici. I dielettrici possono essere:

- omogenei: se ϵ non dipende dalla posizione
- lineari: se ϵ non dipende dal modulo del campo elettrico $||\vec{E}||$
- isotropi: se ϵ non dipende dalla direzione del campo elettrico $\vec{u} = \vec{E}/||\vec{E}||$

Un dielettrico omogeneo, lineare e isotropo si dice uniforme e per esso valgono tutte le leggi viste finora.

Permittività dielettrica di un mezzo

La permittività dielettrica di un mezzo indica come tale mezzo reagisce al campo elettrico:

$$\epsilon = \epsilon_{\text{relativa del mezzo}} \cdot \epsilon_0 - \text{nel vuoto} = [F_{araday}/m] = [C_{oulomb}^2/J] \quad \epsilon > \epsilon_0 \quad \epsilon_r > 1$$

Campo elettrico conservativo

Il campo elettrostatico è conservativo ovvero:

$$\oint_{\mathcal{L}} = \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \oint_{\mathcal{L}_1} = \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{L}_2} = \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{con } \frac{\mathcal{L}_{1,\text{iniziale}}}{\mathcal{L}_{1,\text{finale}}} = \frac{\mathcal{L}_{2,\text{iniziale}}}{\mathcal{L}_{2,\text{finale}}}$$

2.5 Potenziale elettrostatico

Potenziale elettrostatico

Essendo \vec{E} un campo conservativo, si definisce il potenziale elettrostatico:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\Delta V = V_A - V_B \quad V(P) = \int_P^C \vec{E} \cdot d\vec{s} = [V_{olt}] \quad (V(C) = 0)$$

Lavoro di una forza elettrostatica

Il lavoro compiuto dalla forza elettrostatica per spostare una carica q vale:

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q\Delta V = q(V_A - V_B)$$

Energia potenziale elettrostatica

Si definisce l'energia potenziale di una carica come il lavoro compiuto per portare la carica da distanza ∞ alla posizione in cui si trova:

$$\psi(P) = q_0 V(P)$$

Sorgenti del campo elettrico - distribuzioni di carica

- **distribuzioni di carica statiche - condizioni elettrostatiche:**
le cariche che generano il campo sono in quiete e non ci sono correnti
- **distribuzione di carica stazionarie - regime stazionario:**
le cariche sono in moto a velocità costante nel tempo e di conseguenza sono presenti correnti costanti nel tempo
- **distribuzione di carica variabile - regime variabile:**
le cariche sono in moto variabile e le correnti variano nel tempo, il campo non è più conservativo in quanto avrà una componente non conservativa \vec{E}_{indotta}

Forza di una carica in moto

Le forze agenti su cariche in moto immerse in un campo magnetico hanno una componente dovuta al campo elettrico e una al campo magnetico:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} + q_0 \vec{v} \times \vec{B}$$

2.6 Tensioni e forze elettromotrici

Tensione

La tensione è definita come il lavoro elettrico per unità di carica speso a muovere una carica elettrica di prova lungo una linea L .

$$u(t) = \int_L \vec{E}(P, t) \cdot \vec{t}(P) \, dl = \frac{W_e}{q_0} = [V_{olt}] = [J/C] = [J/A_{mpere} s] \quad \vec{t}(P) = \text{versore della curva in P}$$

Questa definizione permette di essere indipendenti dalla conservatività del campo elettrico: se il campo elettrico è conservativo, la tensione equivale al potenziale (a meno di un segno), mentre se il campo elettrico non è conservativo non si definisce nessun potenziale, ma si può calcolare lo stesso la tensione.

$$\begin{aligned} \text{campo conservativo} &\rightarrow \text{potenziale} = -\text{tensione} \\ \text{campo non conservativo} &\rightarrow \cancel{\text{potenziale}} = -\text{tensione} \end{aligned}$$

Forza elettromotrice indotta

Un campo elettrico non conservativo, è formato da una parte conservativa e da un campo elettrico indotto non conservativo. Di conseguenza la circuitazione non è più nulla e si definisce la forza elettromotrice indotta *fem* come il lavoro compiuto dal campo elettrico lungo una linea chiusa L :

$$\text{fem } e(t) = \oint_L \vec{E}(P, t) \cdot \vec{t}(P) \, dl$$

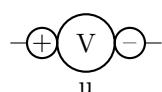
Forza elettromotrice mozionale

La forza elettromotrice complessiva agente sulle cariche in moto è data da una componente dovuta al campo elettrico e da una dovuta al campo magnetico, detta forza elettromotrice mozionale, provocata dal movimento delle cariche in un campo magnetico:

$$\oint_L (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{t} \, dl = \oint_L \vec{E} \cdot \vec{t} \, dl + \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{t} \, dl = e(t) + e_m(t)$$

Voltmetro

Il voltmetro è uno strumento per misurare la tensione, si collega in parallelo alla sezione di circuito di cui si vuole conoscere la tensione. La direzione del sistema è data dal vettore \vec{t} dal + al -. Un voltmetro si dice ideale se non altera il regime del circuito.



3 Modello a parametri concentrati - *mpc*

3.1 Teorema

Obiettivo

1. ogni componente elettrico si può modellare con equazioni algebriche o differenziali che dipendono solo da tensioni o correnti (ovvero non da componenti spaziali)
2. le tensioni sono definite tra coppie di morsetti e le correnti sono definite ai terminali
3. i terminali terminano con morsetti utilizzati per collegare il componente con il resto del circuito

Ipotesi

1. all'esterno dei componenti elettrici
 - il campo \vec{E} è conservativo
 - la densità \vec{J} è solenoidale (regime stazionario, no accumuli o prelievi)
2. i terminali e i morsetti sono superfici equipotenziali senza accumuli o prelievi di carica in essi

Teoria

1. è possibile modellare ogni componente attraverso Equazioni
2. per formare un circuito si collegano più morsetti tra loro attraverso conduttori detti connessioni o interconnessioni che soddisfano le ipotesi dei morsetti/terminali
3. se più morsetti sono attaccati insieme, si formano nodi di volume e carica nulla per cui vale la legge dei nodi (o legge di continuità $\rightarrow \sum i_{\text{entranti}} + \sum i_{\text{uscenti}} = 0$)

3.2 Componenti

Introduzione

I componenti sono elementi del circuito:

- rappresentati graficamente da una curva chiusa (detta superficie limite) con due (o più) tratti filiformi detti terminali con cui si possono collegare ad altri componenti
- modellabili con un'equazione differenziale o algebrica

Si definiscono:

- corrente entrante e corrente uscente (per ogni morsetto) rappresentata con \rightarrow
- tensione (per ogni coppia di morsetti) rappresentata con $+$ $-$

Porte elettriche, bipoli, n-poli m-bipoli, (n-1)-bipoli

- **porta elettrica**: coppia di terminali in cui la corrente entrante in un terminale è pari alla corrente uscente dall'altro terminale; si definisce la corrente di porta $i_{AB}(t)$ e la tensione di porta $u_{AB}(t)$
- **bipolo elettrico**: componente con due terminali
- **n-polo**: componente con n terminali
- **m-bipolo**: componente con m porte e $2m$ terminali
- **n-polo come (n-1)-bipolo**: componente in cui si sceglie un polo N come polo di riferimento e si definiscono:
 - $n-1$ porte tra il polo di riferimento e gli altri $n-1$ poli del componente
 - $n-1$ correnti $i_{kN}(t)$ che entrano dagli $n-1$ morsetti ed escono dal morsetto N , per cui la corrente uscente dal polo N è la somma di tutte le correnti di porta
 - $n-1$ tensioni $u_{kN}(t)$ di porta

3.3 Reti elettriche o circuiti

Introduzione

Una rete è formata da interconnessioni tra n-poli e m-bipoli. Le interconnessioni prendono il nome di nodi e i morsetti collegati allo stesso nodo sono superfici equipotenziali.

Suddivisione

- **reti in regime stazionario:** valgono le ipotesi del *mpc*
- **reti in regime variabile:** in teoria non si potrebbe applicare il *mpc*, ma si definiscono le ...
- **reti in regime variabile quasi stazionario:** ovvero reti in regime variabile in cui è possibile applicare il *mpc* se i campi \vec{E} e \vec{J} variano lentamente nel tempo e non si hanno propagazioni di onde elettromagnetiche all'esterno dei componenti

Tipologia tipo dei componenti utilizzati nel circuito (resistivo, capacitivo, RLC, ...)

Topologia tipo di connessioni utilizzate nel circuito (serie, parallelo, ...)

3.4 Potenza di bipolo, convenzione dei generatori e utilizzatori

Potenza di una porta

Data una porta elettrica, la potenza è data dal prodotto:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad [W_{att}] = [V_{olt}] \cdot [A_{mpere}]$$

Convenzione degli utilizzatori

Un componente (o meglio una porta o bipolo) soddisfa la convenzione degli utilizzatori se la corrente entra nel morsetto +. Se $p > 0$, la porta assorbe potenza, se $p < 0$ la porta eroga energia.

Convenzione dei generatori

Un componente (o meglio una porta o bipolo) soddisfa la convenzione dei generatori se la corrente entra nel morsetto -. Se $p > 0$, la porta eroga energia, se $p < 0$ la porta assorbe potenza.

Lavoro elettrico

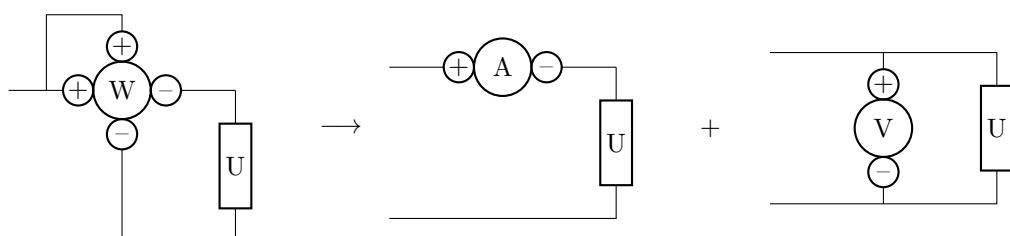
Il lavoro elettrico compiuto da una porta nell'intervallo $[t_0, t_1]$ vale:

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} u(t) \cdot i(t) \quad [J_{oule}] = [W_{att}] \cdot [sec] \\ [kWh] = 3.6 \cdot 10^6 [J]$$

Il lavoro è entrante per potenza entrante e viceversa.

Watmetro

Il wattmetro è uno strumento per misurare la potenza ed è costituito da un amperometro (in serie) e un voltmetro (in parallelo) combinati.



Potenza di un m-bipolo

La potenza di un m-bipolo in cui tutte le porte sono convenzionate allo stesso modo è la somma di tutte le potenze delle singole porte.

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + \cdots + p_n(t) \quad \mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{n=1}^m u_n(t) \cdot i_n(t) dt$$

In base al segno e alla convenzione utilizzata, si avrà potenza dissipata o erogata.

Potenza di un n-polo

Per calcolare la potenza di un n-polo, uso la corrispondenza tra n-polo e (n-1)-bipolo.

Bipolo passivo

Un bipolo si dice passivo se il lavoro elettrico uscente da un certo tempo t_0 in poi è minore dell'energia immagazzinata fino a t_0 . Ovvero un bipolo passivo è capace di accumulare energia, ma non ne può emettere più di quella che ha immagazzinato. In condizioni stazionarie $p_{\text{uscente}}(t) < 0$

$$\mathcal{L}_{\text{lavoro uscente}}(t_0, t) < W_{\text{energia immagazzinata}}(t_0)$$

Bipolo attivo

Un bipolo si dice attivo se per certe condizioni non è rispettata la legge sopra, ovvero se per certe condizioni vale:

$$\mathcal{L}_{\text{lavoro uscente}}(t_0, t) > W_{\text{energia immagazzinata}}(t_0)$$

In generale un bipolo attivo fornisce lavoro elettrico convertendolo da altre fonti e in condizioni stazionarie $p_{\text{uscente}}(t) > 0$

4 Componenti elettrici

4.1 Caratteristica esterna

Caratteristica esterna di un bipolo e di un m-bipolo

La caratteristica esterna è un'equazione che lega tutte le variabili (tensione e corrente) di ogni porta di un determinato componente. Per un m-bipolo si avranno $2m$ variabili (tensione e corrente delle m-porte), per un bipolo si avranno 2 variabili.

- caratteristica esterna m-bipolo: $F(u_1(t), i_1(t), u_2(t), i_2(t), \dots, u_m(t), i_m(t)) = 0$
- caratteristica esterna bipolo: $F(u(t), i(t)) = 0$

Bipolo controllato in corrente o in tensione

È possibile scrivere l'equazione per un bipolo in funzione di una delle due variabili:

- bipolo controllato in corrente: $u(t) = f(i(t))$
- bipolo controllato in tensione: $i(t) = f(u(t))$

Bipolo ideale

Un bipolo si dice ideale se la sua caratteristica esterna è lineare a tratti, ovvero è possibile usare un'equazione lineare per descriverne il comportamento in un intorno del punto (U^*, I^*)

4.2 Componenti

Resistenza

- equazione costitutiva: $R = U/I \quad [\Omega_{\text{ohm}}] = [V_{\text{olt}}] / [A_{\text{mpere}}]$
- caratteristica esterna: $F(u, i) = 0 \rightarrow \frac{U}{I} - R = 0$
- effetto Joule: $\Delta Q = R \cdot I^2 \cdot \Delta t$
- bilancio energetico: $\begin{aligned} P_{\text{entrante}} &= u \cdot i \\ P_{\text{uscente}} &= R \cdot i^2 \end{aligned} \quad u \cdot i = R \cdot i^2 \rightarrow P_{\text{entrante}} = P_{\text{uscente}}$
- resistività: $R = \rho \cdot L/S \quad \rho = \rho_0(1 + \alpha \Delta T) \quad \begin{aligned} \rho_0 &= \text{resistività a } 20^\circ\text{C} \\ \Delta T &= \Delta \text{temp. rispetto a } 20^\circ\text{C} \end{aligned}$
 - conduttori: $\rho_{\text{Cu}} = 1.8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$
 - semiconduttori: $\rho_{\text{Si}} = 2.3 \cdot 10^3 \Omega \text{m}$
 - isolanti: $\rho_{\text{PVC}} = 10^{10} - 10^{13} \Omega \text{m}$

Resistore ideale

modello grafico	equazioni costitutive	parametri caratteristici
	$\begin{cases} u(t) = R i(t) \\ i(t) = G u(t) \end{cases}$	$\begin{cases} R = \text{resistenza } [\Omega_{\text{ohm}}] \\ G = \text{conduttanza } [S_{\text{iemens}}] \end{cases}$

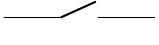
Cortocircuito ideale

modello grafico	equazioni costitutive	descrizione
	$u(t) = 0 \quad \forall t$	resistore con $R = 0$

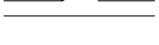
Circuito aperto

modello grafico	equazioni costitutive	descrizione
	$i(t) = 0 \quad \forall t$	resistore con $R = +\infty$

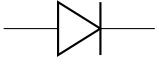
Interruttore ideale

modello grafico	descrizione
	dipolo in grado di commutarsi tra due stati:
	1. cortocircuito ideale
	2. circuito aperto

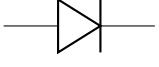
Interruttore reale

modello grafico	descrizione
	unipolare: interrompe la continuità di un solo conduttore

Diodo ideale

modello grafico	descrizione
	dipolo in grado di commutarsi tra due stati:
	se $u > 0 \rightarrow$ conduzione
	se $u < 0 \rightarrow$ interdizione

Diodo reale

modello grafico	descrizione
	dipolo con tre stati:
	se $u > 0 \rightarrow$ conduzione
	se $V_{bd} < u < 0 \rightarrow$ interdizione
	se $u < V_{bd} \rightarrow$ rottura/conduzione
	ottenuto con giunzione PN (materiali drogati positivamente o negativamente)

Induttore ideale

modello grafico	equazioni costitutive	parametri caratteristici	descrizione
	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$L =$ induttanza [H_{enry}]	in regime stazionario agisce come un cortocircuito

Induttore reale

Usato nei circuiti AC, $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$

Condensatore ideale

modello grafico	equazioni costitutive	parametri caratteristici	descrizione
	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	$C =$ capacità [C_{oulomb}]	in regime stazionario agisce come un circuito aperto

Condensatore reale

Usato nei circuiti AC, $\oint \vec{D} \cdot d\vec{\Sigma} = q_{\text{int}}$

4.3 Generatori

Forze elettriche generatrici e generatori

In condizioni stazionarie si ha che \vec{J} è solenoidale e che $Q = L + \Delta W \rightarrow Q = L$ ovvero il lavoro compiuto dal circuito è tutto dissipato in calore dalle resistenze ($\Delta W = 0$). Per cui si ha:

$$Q = L = \oint \vec{F}_{\text{gen}} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

Esistono delle forze generatrici non conservative \vec{F}_{gen} la cui circuitazione non è nulla che mettono in moto le cariche. Le parti del circuito in cui si sviluppano tali forze non conservative sono detti generatori.

Forza elettrica generatrice specifica

Si definisce quindi la forza elettrica generatrice specifica come forza per unità di carica:

$$\vec{E}_{\text{gen}} = \frac{\vec{F}_{\text{gen}}}{q} \quad [N_{\text{ewton}}/C_{\text{oulomb}}] = [V_{\text{olt}}/m]$$

Generatori a vuoto

- si hanno forze \vec{E}_{gen} che inducono accumuli di cariche ai capi del generatore e l'accumulo forma un campo $\vec{E}_{\text{coulombiano}} (\vec{E}_c)$ contrario a \vec{E}_{gen}
- in regime stazionario $\vec{E}_g = -\vec{E}_c$ e le cariche non si muovono (o hanno $a = 0$, v costante)
- si ottiene che la forza elettromotrice è pari alla tensione ai capi del generatore:

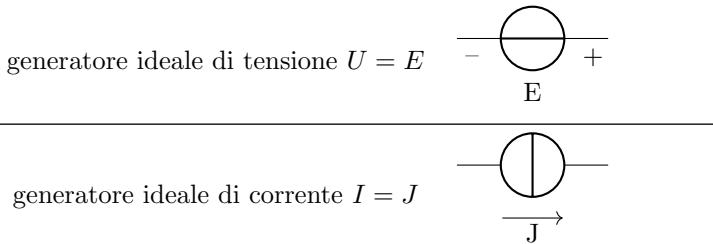
$$fem_{AB} = \int_B^A \vec{E}_g(P, t) \cdot d\vec{l} = \int_B^A -\vec{E}_c(P, t) \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_c(P, t) \cdot d\vec{l} = u_{0,AB}(t)$$

- se $U_{0,AB}(t)$ è costante, il generatore è in regime DC e $E_{AB} = U_{0,AB}$
- se $U_{0,AB}(t)$ è sinusoidale, il generatore è in regime AC e $E_{AB}(t) = u_{0,AB}(t)$
- il campo \vec{E}_c tende a muovere le cariche positive dal + al -
- il campo \vec{E}_g tende a muovere le cariche positive dal - al +

Generatori a carico

- $\vec{E}_g \neq -\vec{E}_c$, si ha uno spostamento di cariche
- la caratteristica esterna vale $U = E_{AB} - R_i I$ con R_i = resistenza interna

Generatori ideali



Esempi di generatori

- eletrochimici (sede di reazioni chimiche, esempio pile a secco e accumulatori)
- fotovoltaici (fotone "convertito" in elettrone, funzionamento basato su fotodiodi)
- termoelettrici (giunzioni bimetalliche a temperature diverse formano una f.e.m. per effetto Seebeck)
- piezoelettrici (cristalli soggetti a stress meccanico formano un campo elettrico, quindi una f.e.m.)
- elettromeccanici (macchine rotanti con di statore e rotore, convertono energia meccanica in elettrica)

5 Topologia delle reti

5.1 Introduzione

La topologia di un circuito indica come gli n-poli sono connessi tra loro. Le interconnessioni tra i componenti sono dette nodi del circuito.

5.2 Teoria dei grafi

Dal circuito al grafo

Ad ogni circuito si associa un grafo:

- i nodi del grafo corrispondono ai nodi del circuito
- gli archi del grafo corrispondono ai componenti
- ad ogni arco viene associata una tensione e una corrente
- gli archi sono orientati secondo le correnti e le tensioni

Componenti connesse

Se si hanno grafi non connessi, le componenti connesse corrispondono a sottocircuiti non connessi tra loro che verranno analizzati separatamente.

Definizioni

- **insieme di taglio:** insieme di archi che intersecano una superficie chiusa che taglia il circuito. La superficie di taglio può isolare nodi singoli o parti del circuito
- **nodo:** punto di interconnessione tra due o più archi del grafo
- **maglia:** insieme di archi che costituiscono un percorso chiuso che tocca ciascun nodo una sola volta
- **grafo piano:** grafo che può essere distribuito su un piano senza che gli archi si intersechino
- **anello:** maglia che non racchiude altre parti del grafo al suo interno
- **albero:** insieme di archi del grafo che collegano tutti i nodi del grafo senza formare maglie
- **coalbero:** insieme di archi del grafo complementare ad un albero

Per un grafo vale: $m_{\text{anelli}} = l_{\text{archi}} - n_{\text{nodi}} + 1$

5.3 Leggi di Kirchhoff

Legge di Kirchhoff delle correnti - LKC

In un circuito chiuso la corrente entrante ed uscente in un insieme di taglio è nulla. Se l'insieme di taglio racchiude solo un nodo, si avrà che la somma delle correnti entranti ed uscenti in un nodo è nulla.

$$\sum_{h \in T_{\text{insieme di taglio}}} \alpha_h i_h(t) = 0$$

- le correnti entranti nella sezione di taglio (o in un nodo) hanno $\alpha_h = -1$
- le correnti uscenti dalla sezione di taglio (o da un nodo) hanno segno $\alpha_h = +1$

Legge di Kirchhoff delle tensioni - LKT

In un circuito chiuso, la somma di tutte le tensioni associate ai componenti di ogni maglia è nulla.

$$\sum_{h \in M_{\text{maglia}}} \beta_h u_h(t) = 0$$

- ad ogni maglia si associa una orientazione (oraria o antioraria)
- le tensioni concordi con il verso della maglia hanno $\beta_h = +1$
- le tensioni discordi con il verso della maglia hanno segno $\beta_h = -1$

5.4 Sistemi di equazioni topologiche

Equazioni linearmente indipendenti

Il sistema di equazioni topologiche è un sistema formato dalle equazioni LKT e LKC. Per avere un'unica soluzione e descrivere completamente un circuito, devo avere il massimo numero di equazioni LKT/LKC linearmente indipendenti.

Equazioni indipendenti in grafo connesso

Un grafo connesso ha:

- $n - 1$ equazioni LKC indipendenti con insiemi di taglio (o nodi) che insistono su un solo arco dell'albero (detto lato peculiare specifico del taglio) e su altri archi del coalbero
- $l - n + 1$ equazioni LKT indipendenti con maglie costituite da un solo arco del coalbero (detto lato peculiare specifico della maglia) e altri archi dell'albero
- in totale $(l - n + 1) + (n - 1) = l$ equazioni indipendenti: una per ogni componente o arco del grafo

Equazioni indipendenti in grafo sconnesso

Un grafo con p componenti connesse ha:

- $n_k - 1$ equazioni LKC indipendenti per ogni componente connessa $k \in 1, 2, \dots, p$
- $l_k - n_k + 1$ equazioni LKT indipendenti per ogni componente connessa $k \in 1, 2, \dots, p$
- complessivamente $\sum_{k=1}^p (l_k - n_k + 1) + (n_k - 1) = \sum_{k=1}^p l_k = l$ equazioni indipendenti, ovvero una per ogni componente o arco del grafo (anche se sconnesso)

Conservazione delle potenze

La somma di tutte le potenze istantanee è nulla. La somma delle potenze entranti negli utilizzatori è uguale alla somma delle potenze uscenti dai generatori.

$$P_{\text{tot}} = \sum_{h=1}^l u_h(t) \cdot i_h(t) = 0 \quad \sum_{h_{\text{utilizzatori}}} P_{\text{entrante},h}(t) = \sum_{h_{\text{generatori}}} P_{\text{uscente},h}(t)$$

5.5 Connessione in serie

In generale

- due bipoli sono collegati in serie se hanno un solo morsetto in comune
- due bipoli si dicono in serie diretta se hanno anche lo stesso riferimento di tensione e corrente

$$\begin{cases} u_{\text{serie}}(t) = u_1(t) + u_2(t) \\ i_{\text{serie}}(t) = i_1(t) = i_2(t) \end{cases}$$

Serie di generatori ideali di corrente

Non è possibile creare una serie di generatori ideali di corrente con $J_1 \neq J_2$ in quanto nel nodo in comune ai due generatori non è rispettata la LKC. Analogamente non può esistere una serie con un GIC e un circuito aperto.

Serie di un generatore ideale di tensione e un resistore

In una serie tra generatore ideale di tensione e resistore ideale si ha:

- $I_{\text{serie}} = I_{\text{resistore}} = -I_{\text{generatore}} \rightarrow$ il generatore ha convenzione opposta
- $U_{\text{serie}} = U_{\text{generatore}} + U_{\text{resistore}} = E + RI_2 = E - RI$

Per determinare la curva caratteristica della serie servono almeno due punti del piano u, i :

- funzionamento a vuoto: $u_0 = E = \text{fem}$, $i_0 = 0$
- funzionamento a cortocircuito $u_{cc} = 0$, $I_{cc} = E/R$

Serie di resistori ideali e partitore di tensione

- $u_{\text{serie}} = u_1(t) + u_2(t) + \cdots + u_n(t) = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) \cdot i_{\text{serie}}(t) = R_{\text{eq,serie}} \cdot i_{\text{serie}}(t)$
- la resistenza equivalente della serie è la somma delle resistenze: $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$
- le tensioni si ripartiscono in modo proporzionale alle resistenze: $u_k(t) = R_k / R_{\text{eq}} \cdot u_{\text{serie}}(t)$

5.6 Connessione in parallelo

In generale

- due bipoli sono collegati in parallelo se entrambi i morsetti sono in comune
- due bipoli sono in parallelo diretto se hanno i riferimenti di tensione e corrente concordi

$$\begin{cases} u_{\text{serie}}(t) = u_1(t) = u_2(t) \\ i_{\text{serie}}(t) = i_1(t) + i_2(t) \end{cases}$$

Parallelo di generatori ideali di tensione

Non è possibile creare un parallelo di generatori ideali di tensione con $E_1 \neq E_2$ in quanto nella maglia ottenuta non viene rispettata la LKT . Analogamente non è possibile creare un parallelo tra GIT e cortocircuito.

Parallelo di un generatore ideale di corrente e un resistore

In una serie tra generatore ideale di tensione e resistore ideale si ha:

- $U_{\text{serie}} = U_{\text{resistore}} = -U_{\text{generatore}} \rightarrow$ il generatore ha convenzione opposta
- $I_{\text{serie}} = I_{\text{generatore}} + I_{\text{resistore}} = J + GU_2 = J - GU$

Parallelo di resistori ideali e partitore di corrente

- $i_{\text{parallelo}} = i_1(t) + i_2(t) + \cdots + i_n(t) = (G_1 + G_2 + \cdots + G_n) \cdot u_{\text{parallelo}}(t) = G_{\text{eq,parallelo}} \cdot u_{\text{parallelo}}(t)$
- la conduttanza equivalente del parallelo è la somma delle conduttanze: $G_{\text{eq}} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$
- le correnti si ripartiscono in modo proporzionale alle conduttanze: $i_k(t) = G_k / G_{\text{eq}} \cdot i_{\text{parallelo}}(t)$

5.7 Resistenze e conduttanze equivalenti di porta

- in una rete di resistori (passivi) è possibile definire una resistenza equivalente di porta $R_{\text{eq,AB}} = U_{\text{AB}} / J_{\text{AB}}$, per cui è possibile sostituire la rete passiva con un resistore equivalente $R_{\text{eq,AB}}$.
- analogo per le conduttanze

Resistenze a stella e a triangolo

È possibile semplificare le reti di resistenze a maglie a triangolo con reti a stella attraverso la relazione:

$$R_{\Delta \text{ triangolo}} = 3R_y \text{ stella}$$

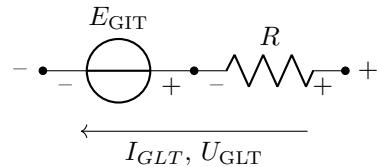
6 Analisi di circuiti lineari a corrente continua

6.1 Componenti lineari - GLC, GLT

Un circuito in regime stazionario in corrente continua formato solo da bipoli è lineare se costituito esclusivamente da generatori lineari di tensione (GLT) o generatori lineari di corrente (GLC).

Generatore lineare di tensione - GLT

Un generatore lineare di tensione è formato da una serie di generatore ideale di tensione e un resistore, entrambi con convenzione di utilizzatore.

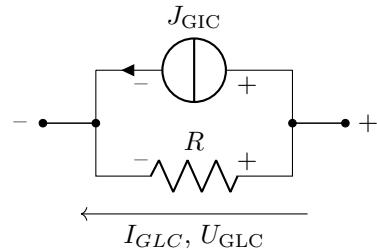


Il sistema ha come equazione costitutiva:

$$U_{\text{GLT}} = U_{\text{GIT}} + U_{\text{res}} = E_{\text{GIT}} + R \cdot I_{\text{GLT}}$$

Generatore lineare di corrente - GLC

Un generatore lineare di corrente è formato da un parallelo di generatore ideale di corrente e un resistore, entrambi con convenzione di utilizzatore.



Il sistema ha come equazione costitutiva:

$$I_{\text{GLC}} = I_{\text{GIC}} + I_{\text{res}} = J_{\text{GIC}} + \frac{U_{\text{GLC}}}{R}$$

Sostituzione da GLT a GLC

È possibile sostituire un GLT con un GLC:

$$I_{\text{GLC}} = I_{\text{res}} + J_{\text{GIC}} = \frac{U_{\text{GLT}}}{R} - \frac{E_{\text{GIT}}}{R} \quad J_{\text{GIC}} = \frac{E_{\text{GIT}}}{R}$$

Sostituzione da GLC a GLT

È possibile sostituire un GLC con un GLT:

$$U_{\text{GLT}} = U_{\text{res}} + E_{\text{GIT}} = R \cdot I_{\text{GLC}} - R \cdot J_{\text{GIC}} \quad E_{\text{GIT}} = R \cdot J_{\text{GIC}}$$

6.2 Circuiti lineari ed equazioni indipendenti

Un circuito lineare è descritto da equazioni linearmente indipendenti lineari di 1° grado ottenute dalle leggi di Kirchhoff o dalle equazioni costitutive dei GLT e GLC. Si ottiene un sistema lineare $Ax = b$ risolvibile attraverso il calcolo matriciale $x = A^{-1}b$.

Il sistema ha $2l$ incognite:

- $u_h(t)$ per ogni bipolo $h = 1, 2, 3, \dots l$
- $i_h(t)$ per ogni bipolo $h = 1, 2, 3, \dots l$

Il sistema ha $(n - 1) + (l - n + 1) + l = 2l$ equazioni indipendenti:

- $n - 1$ equazioni indipendenti per LKC
- $l - n + 1$ equazioni indipendenti per LKT
- l equazioni costitutive (una per ogni GLC e GLT)

Il sistema ha, quindi, $2l$ equazioni linearmente indipendenti con $2l$ incognite e $\text{rang}\{A\} = 2l$, ovvero ha un'unica soluzione.

6.3 Metodi di analisi delle reti lineari

Metodo diretto o di sostituzione

Se un bipolo ha una certa tensione $u_h(t)$ e corrente $i_h(t)$ data dalla soluzione unica del sistema, è possibile sostituire tale bipolo con:

- un generatore ideale di tensione con $e_h(t) = u_h(t)$
- un generatore ideale di corrente con $j_h(t) = i_h(t)$

In questo modo si ottiene una rete semplificata e di conseguenza un sistema più semplice da risolvere.

Sovrapposizione degli effetti

La tensione di un certo bipolo è data dalla somma dei contributi di tensione (detti tensioni parziali) di ogni generatore ideale di tensione o corrente preso singolarmente, mentre tutti gli altri sono spenti.

$$u_h(t) = \sum_r u_{h,E_r}(t) + \sum_s u_{h,J_s}(t) \quad u_{h,E_r}(t) = \alpha_{hr} \cdot e_r(t) \quad / \quad u_{h,J_s}(t) = R_{hs} \cdot j_s(t)$$

La corrente di un certo bipolo è data dalla somma dei contributi di corrente (detti correnti parziali) di ogni generatore ideale di tensione o corrente preso singolarmente, mentre tutti gli altri sono spenti.

$$i_h(t) = \sum_r i_{h,E_r}(t) + \sum_s i_{h,J_s}(t) \quad i_{h,E_r}(t) = G_{hr} \cdot e_r(t) \quad / \quad i_{h,J_s}(t) = \beta_{hs} \cdot j_s(t)$$

I coefficienti $\alpha_{hr}, R_{hs}, \beta_{hr}, G_{hr}$ sono detti coefficienti di rete e sono costanti in una rete lineare.

Correnti cicliche o di anello

- si semplifica il sistema introducendo delle correnti fittizie dette correnti cicliche di anello, ottenute matematicamente da un cambio di variabile nelle LKC, il sistema finale avrà soltanto m equazioni, ovvero una per maglia
- è richiesto avere soltanto generatori ideali di tensione convenzionati da generatore: i GIC/GLC vanno trasformati in GIT/GLC con l'aggiunta delle seguenti condizioni $E_h = U_h, J_h = I_{Ar} - I_{As}$
- per ogni anello A_k vale:

$$R_{A_{kk}} \cdot I_{A_k} - \sum_r (R_{A_{kr}} \cdot I_{A_r}) = E_{A_k}$$

$R_{A_{kk}}$ = \sum resistenze della maglia A_k
 $R_{A_{kr}}$ = \sum resistenze in comune alle maglie A_k e A_r
 E_{A_k} = \sum fem di anello della maglia A_k con conv. generatore
 I_{A_k} = corrente di anello della maglia A_k
 I_{A_r} = corrente di anello della maglia A_r

Potenziali nodali

- si considerano come incognite solo i potenziali ai nodi del circuito in modo da soddisfare le LKT, per cui il sistema finale avrà solo $n - 1$ equazioni
- si sceglie un nodo di riferimento a cui si assegna potenziale nullo $V_{rif} = 0$ e si calcolano i potenziali degli altri $n - 1$ nodi in modo da rispettare la relazione di tensione $U_{kh} = V_{N_k} - V_{N_h}$
- è richiesto avere soltanto generatori ideali di corrente convenzionati da generatore: i GIT/GLT vanno trasformati in GIC/GLC con l'aggiunta delle seguenti condizioni $J_h = I_h$, $V_{N_r} - V_{N_s} = E_h$
- per ogni nodo N_k vale:

$$G_{N_{kk}} \cdot V_{N_k} - \sum_r (G_{N_{kr}} \cdot V_{N_r}) = J_{N_k}$$

$G_{N_{kk}}$ = somma delle conduttanze incidenti al nodo N_k
 $G_{N_{kr}}$ = somma delle conduttanze comprese tra i nodi N_k e N_r
 J_{N_k} = somma delle correnti dei GIC impresse su N_k (+ se entranti)
 V_{N_k} = potenziale del nodo N_k
 V_{N_r} = potenziale del nodo N_r

Metodo di riduzione - Teorema di Thévenin

- si individua una superficie di taglio che intercetta solo due conduttori, per cui è possibile individuare una porta costituita dai morsetti a, b
- è possibile sostituire la parte di circuito individuata dalla superficie di taglio con un generatore di Thévenin costituito da un generatore lineare di tensione con:

$$U_{eq} = E_{ab} = U_{0,ab} = \text{tensione a vuoto della porta ab}$$

$$R_{eq} = R_{ab} = \frac{U_{0,ab}}{I_{cc,ab}} = \text{resistenza della rete inerte (con tutti i GIT/GIC spenti)}$$

$$U_{ab} = U_{0,ab} - R_{eq} \cdot I_{cc,ab} \rightarrow \text{equazione del GLT}$$

Metodo di riduzione - Teorema di Norton

- si individua una superficie di taglio che intercetta solo due conduttori, per cui è possibile individuare una porta costituita dai morsetti a, b
- è possibile sostituire la parte di circuito individuata dalla superficie di taglio con un generatore di Norton costituito da un generatore lineare di corrente con:

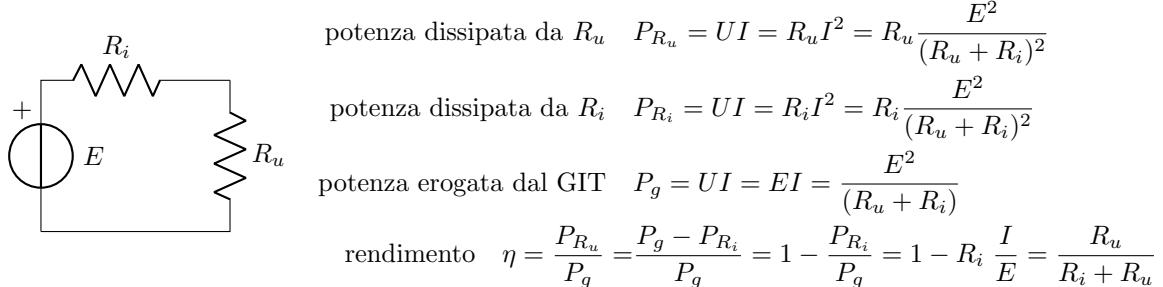
$$I_{eq} = J_{ab} = I_{cc,ab} = \text{corrente di cortocircuito della porta ab}$$

$$R_{eq} = R_{ab} = \frac{U_{0,ab}}{I_{cc,ab}} = \text{resistenza della rete inerte (con tutti i GIT/GIC spenti)}$$

$$I_{ab} = I_{cc,ab} - \frac{U_{ab}}{R_{eq}} \rightarrow \text{equazione del GLC}$$

6.4 Rendimento di un generatore elettrico lineare

Sia dato un circuito costituito da un generatore lineare e una resistenza



Si osserva che:

- il rendimento è sempre ≤ 1
- in caso di generatore a vuoto $\eta = 1$, in quanto $I = 0$
- in caso di cortocircuito $\eta = 0$, in quanto $E = 0$
- nel mezzo si ha un andamento lineare $\eta = 1 - R_i I/E$

Rendimento nei circuiti di potenza

Nei circuiti di potenza si vogliono rendimenti massimi, ovvero quando $R_u \gg R_i$.

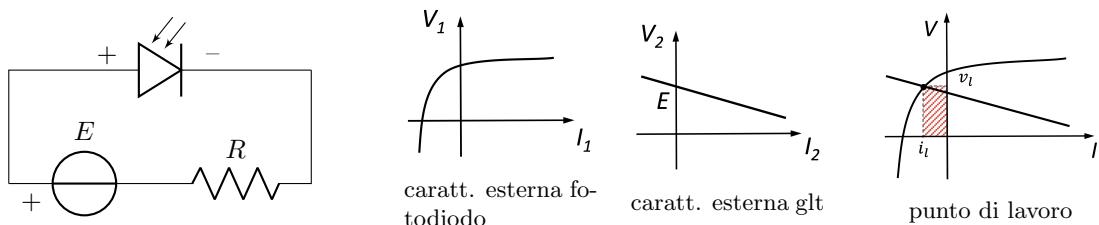
Rendimento nei circuiti di segnale

Nei circuiti di segnale si vuole il massimo rapporto segnale/rumore e si analizzano le potenze massime. Analizzando la potenza dissipata da R_u in funzione del carico si osserva che si ha massima potenza dissipata quando $R_i = R_u$, con un rendimento di 1/2.

$$\frac{\partial P_{R_u}}{\partial R_u} = 0 \Leftrightarrow \frac{R_i - R_u}{(R_i + R_u)^3} E^2 = 0 \Leftrightarrow R_i = R_u \quad \eta = \frac{R_u}{R_i + R_u} = 0.5$$

6.5 Punto di lavoro

Si immagina di avere una rete di bipoli di ordine 0 e non necessariamente lineare. Nel seguente caso, si ha un fotodiode convenzionato da utilizzatore e un glt convenzionato da generatore con le rispettive caratteristiche esterne.



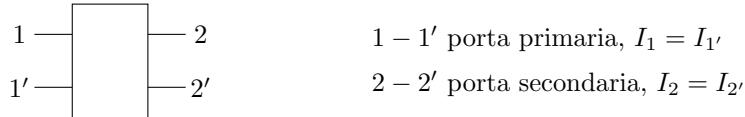
- Il punto di lavoro del circuito è il punto in cui le equazioni di Kirchhoff per le correnti e le tensioni sono soddisfatte e corrisponde al punto di intersezione delle caratteristiche esterne.
- Siccome l'intersezione si trova nel secondo quadrante, significa che l'utilizzatore (il fotodiodo) eroga energia e il generatore la assorbe. L'area evidenziata è la potenza erogata dal fotodiodo.
- In questo caso, le curve caratteristiche si intersecano in un unico punto, per cui la rete ha un'unica soluzione. Se le due curve caratteristiche si intersecano in più punti, non è possibile determinare a priori in quale dei punti la rete andrà a lavorare.

7 Doppi bipoli

7.1 Introduzione ai doppi bipoli

Doppi bipoli generici

I doppi bipoli sono componenti elettrici costituiti da due porte.

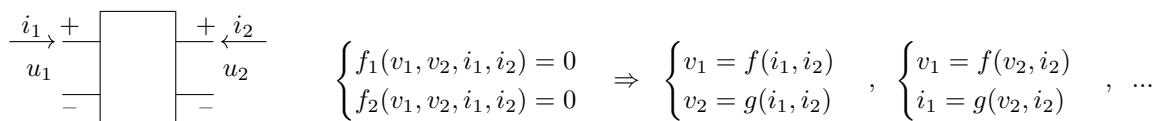


- è possibile collegare i doppi bipoli con altri componenti attraverso le due porte
- valgono sempre le LKT, le LKC e le sezioni di taglio

Doppi bipoli di ordine zero

I doppi bipoli di ordine zero sono doppi bipoli con:

- 2 porte convenzionate da utilizzatore
- 2 equazioni costitutive di ordine zero, cioè senza derivate
- 4 variabili (v_1, v_2, i_1, i_2) di cui due sono grandezze libere e due sono grandezze pilotate esprimibili in funzione delle due grandezze libere



Potenza nei doppi bipoli

La potenza dei doppi bipoli vale: $p_{\text{entrante}} = p_{e1} + p_{e2} = v_1 i_1 + v_2 i_2$, per un generico circuito vale la conservazione delle potenze $p_{\text{tot}} = 0$

Doppi bipoli ideali e inerti

- **doppi bipoli ideali:** se modellabili con un sistema di eq. lineari del tipo $Y = A \cdot X + B$
- **doppi bipoli ideali inerti:** se $B = 0 \Rightarrow Y = A \cdot X$, per cui sono rappresentabili attraverso una delle 6 rappresentazioni in base alle variabili indipendenti e controllate.

7.2 Rappresentazioni dei doppi bipoli ideali inerti

Rappresentazione controllata in corrente

$$\begin{cases} v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{i} = R \cdot \vec{v} \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} = [\Omega] & R_{12} = \frac{v_1}{i_2} \Big|_{i_1=0} = [\Omega] \\ R_{21} = \frac{v_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} = [\Omega] & R_{22} = \frac{v_2}{i_2} \Big|_{i_1=0} = [\Omega] \end{pmatrix}$$

- con R matrice di resistenza o matrice a vuoto
- per misurare R_{11} e R_{21} , impongo la corrente i_1 , lascio la porta 2 a vuoto e misuro v_1 e v_2
- per misurare R_{12} e R_{22} , impongo la corrente i_2 , lascio la porta 1 a vuoto e misuro v_1 e v_2

Rappresentazione controllata in tensione

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{i} = G \cdot \vec{v} \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} = \frac{i_1}{v_1} \Big|_{v_2=0} = [S] & G_{12} = \frac{i_1}{v_2} \Big|_{v_1=0} = [S] \\ G_{21} = \frac{i_2}{v_1} \Big|_{v_2=0} = [S] & G_{22} = \frac{i_2}{v_2} \Big|_{v_1=0} = [S] \end{pmatrix}$$

- con G matrice di conduttanza o matrice di cortocircuito
- per misurare G_{11} e G_{21} , impongo la tensione v_1 , cortocircuito la porta 2 e misuro i_1 e i_2
- per misurare G_{12} e G_{22} , impongo la tensione v_2 , cortocircuito la porta 1 e misuro i_1 e i_2

Prima rappresentazione ibrida

$$\begin{cases} v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = h \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} h_{11} = \frac{v_1}{i_1} \Big|_{v_2=0} = [\Omega] & h_{12} = \frac{v_1}{v_2} \Big|_{i_1=0} = [/] \\ h_{21} = \frac{i_2}{i_1} \Big|_{v_2=0} = [/] & h_{22} = \frac{i_2}{v_2} \Big|_{i_1=0} = [S] \end{pmatrix}$$

- con h prima matrice ibrida perché composta da grandezze ibride $[R]$ e $[S_{iemens}]$
- per misurare h_{11} e h_{21} , impongo la corrente i_1 , cortocircuito la porta 2 e misuro v_1 e i_2
- per misurare h_{12} e h_{22} , impongo la tensione v_2 , lascio la porta 1 a vuoto e misuro v_1 e i_2

Seconda rappresentazione ibrida

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}i_2 \\ v_2 = g_{21}v_1 + g_{22}i_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = g \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} g_{11} = \frac{i_1}{v_1} \Big|_{i_2=0} = [S] & g_{12} = \frac{i_1}{i_2} \Big|_{v_1=0} = [/] \\ g_{21} = \frac{v_2}{v_1} \Big|_{i_2=0} = [/] & g_{22} = \frac{v_2}{i_2} \Big|_{v_1=0} = [\Omega] \end{pmatrix}$$

- con g seconda matrice ibrida perché composta da grandezze ibride $[R]$ e $[S_{iemens}]$
- per misurare g_{11} e g_{21} , impongo la tensione v_1 , lascio la porta 2 a vuoto e misuro i_1 e v_2
- per misurare g_{12} e g_{22} , impongo la corrente i_2 , cortocircuito la porta 1 e misuro i_1 e v_2

Prima rappresentazione di trasmissione

$$\begin{cases} v_1 = Av_2 - Bi_2 \\ i_1 = Cv_2 - Di_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} A = \frac{v_1}{v_2} \Big|_{i_2=0} & B = -\frac{v_1}{i_2} \Big|_{v_2=0} \\ C = \frac{i_1}{v_2} \Big|_{i_2=0} & D = -\frac{i_1}{i_2} \Big|_{v_2=0} \end{pmatrix}$$

- con T prima matrice di trasmissione
- siccome si dovrebbe imporre sia v_2 che i_2 contemporaneamente, per determinare A, B, C, D si misurano i reciproci $1/A, 1/B, 1/C, 1/D$ imponendo le opportune grandezze alle opportune porte

Seconda rappresentazione di trasmissione

$$\begin{cases} v_2 = A'v_1 + B'i_1 \\ -i_2 = C'v_1 + D'i_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = T' \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \quad T' = \begin{pmatrix} A' = \frac{v_2}{v_1} \Big|_{i_1=0} & B' = \frac{v_2}{i_1} \Big|_{v_1=0} \\ C' = -\frac{i_2}{v_1} \Big|_{i_1=0} & D' = -\frac{i_2}{i_1} \Big|_{v_1=0} \end{pmatrix}$$

- con T' seconda matrice di trasmissione
- siccome si dovrebbe imporre sia v_1 che i_1 contemporaneamente, per determinare A', B', C', D' si misurano i reciproci $1/A', 1/B', 1/C', 1/D'$ imponendo le opportune grandezze alle opportune porte

Matrici e funzioni di trasferimento

- una matrice di trasferimento (che rappresenta una funzione di trasferimento) si può esprimere come rapporto tra causa ed effetto: $A = \frac{\text{effetto}}{\text{causa}} = \frac{X(s)}{U(s)}$
- siccome per determinare le matrici R, G, h, g , si imporre una causa per misurarne l'effetto, sono dette matrici di trasferimento
- siccome per determinare le matrici T, T' non è possibile imporre la causa prevista, allora non sono matrici di trasferimento

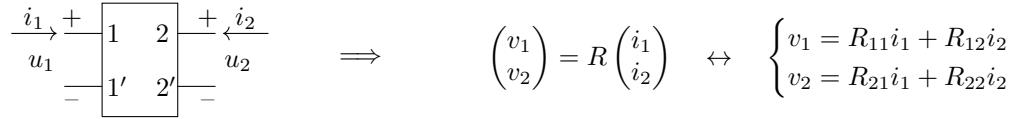
Cambio di rappresentazioni

Per i doppi bipoli ideali inerti per cui valgono tutte le rappresentazioni, allora vale:

$$R = G^{-1} \quad h = g^{-1} \quad T = T'^{-1}$$

Cambio dei riferimenti nelle rappresentazioni

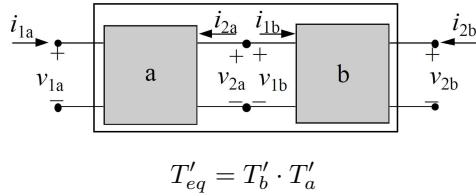
Se cambio i riferimenti ad una porta, è necessario invertire i segni dei parametri mutui X_{12} e X_{21} per mantenere la stessa rappresentazione. Di seguito un esempio di doppi bipoli in rappresentazione controllata in corrente in cui si invertono i riferimenti alla porta 2.



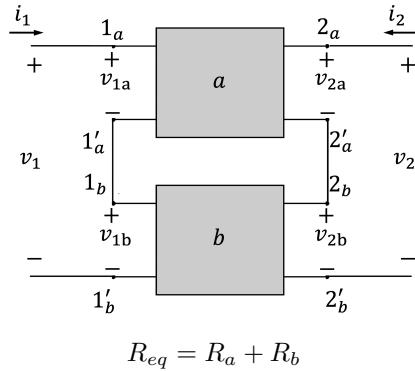
grandezze corrispondenti: $R^* = \begin{pmatrix} R_{11}^* & R_{12}^* \\ R_{21}^* & R_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$

7.3 Collegamenti di doppi bipoli

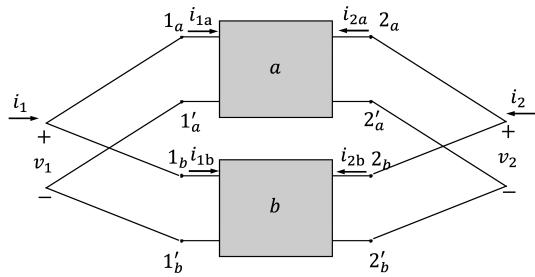
Collegamento in cascata



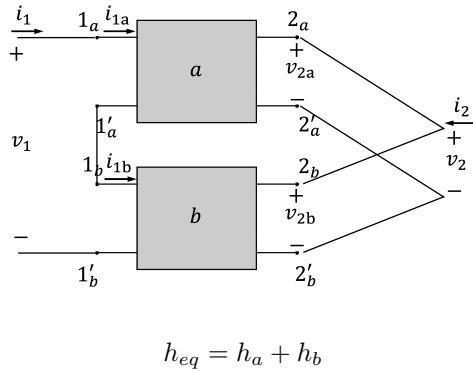
Serie di doppi bipoli



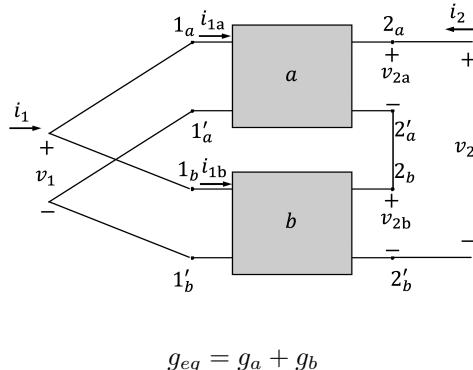
Parallelo di doppi bipoli



Collegamento ibrido serie/parallelo



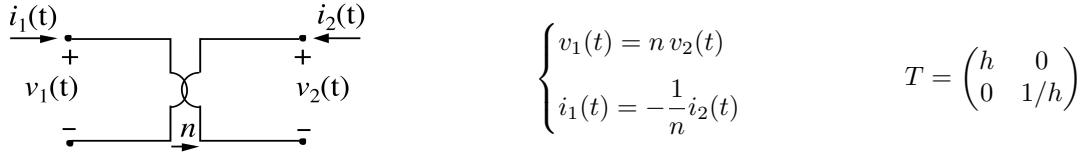
Collegamento ibrido parallelo/serie



7.4 Trasformatore ideale

Trasformatore ideale

Un trasformatore ideale è un doppio bipolo solitamente in rappresentazione di trasmissione in grado di modificare la tensione in ingresso di un certo fattore n detto rapporto di trasformazione.



Siccome non è possibile isolare i_1 e i_2 , oppure v_1 e v_2 , non è possibile usare le rappresentazioni controllate in corrente R o in tensione G , mentre è possibile usare le altre 4.

Trasformatore reale

I trasformatori reali sono utilizzabili solo in corrente alternata, servono per trasformare la tensione o per isolare due parti di circuito. I trasformatori ideali sono solo utilizzati per modellare componenti elettrici.

Proprietà trasformatori ideali

1. trasparente alla potenza: $p_{e1} + p_{u2} = 0$
2. passivo: la potenza istantanea entrante è nulla
3. amplifica la tensione [o corrente] in ingresso, riducendone la corrente [o tensione]
4. trasporto: se alla porta 2 è collegato un resistore R_2 , dalla porta 1 appare come una resistenza equivalente $R_{eq} = n^2 R_2$: $v_1(t) = nv_2(t) = n(-R_2 i_2(t)) = -nR_2(-ni_1(t)) = n^2 R_2 i_1(t) = R_{eq} i_1(t)$

7.5 Generatori pilotati

I generatori pilotati sono generatori ideali rappresentati come doppi bipoli ideali. Una porta impone la corrente [o la tensione] mentre l'altra controlla la corrente [o la tensione] impressa.

Generatore di tensione pilotato in tensione - GTPT



Generatore di tensione pilotato in corrente - GTPC



Generatore di corrente pilotato in tensione - GCPT



Generatore di corrente pilotato in corrente - GCPC



Osservazioni sui generatori pilotati

- Non esistono componenti reali corrispondenti, ma si utilizzano per modellare altri componenti, ad esempio per il transistor NPN come composizione di diodi, resistori e GP.
- Ogni tipo di generatore ha solo una delle quattro rappresentazioni R, G, h, g e tutti hanno la rappresentazione T' .

7.6 Circuiti lineari in corrente continua con doppi bipoli

Introduzione e teoremi

- in circuito in corrente continua con doppi bipoli si dice lineare se è costituito solo da GRT, GRC e doppi bipoli lineari inerti di ordine zero
- valgono ancora le LKC e LKT e si può modellare il circuito con il sistema lineare $Ax = b$
- valgono i teoremi di sostituzione, sovrapposizione degli effetti, Thévenin e Norton
- vale il principio di conservazione delle potenze

Resistenza equivalente di porta

Si definisce la resistenza equivalente di porta in una sezione di circuito con generatori pilotati come la resistenza misurata quando si applica una corrente di 1 A_{mpere} , dopo aver spento tutti i generatori ideali e mantenendo accesi tutti i generatori pilotati.

Conduttanza equivalente di porta

Si definisce la conduttanza equivalente di porta in una sezione di circuito con generatori pilotati come la resistenza misurata quando si applica una tensione di 1 V_{olt} , dopo aver spento tutti i generatori ideali e mantenendo accesi tutti i generatori pilotati.

Esercizi con la sovrapposizione degli effetti

Quando si applica la sovrapposizione degli effetti in un circuito con generatori pilotati bisogna:

1. considerare individualmente ogni generatore ideale, spegnendo anche i generatori pilotati, in modo da calcolare la grandezza desiderata e le grandezze che controllano i generatori pilotati
2. alla fine considerare individualmente ogni generatore pilotato utilizzando le grandezze pilotate ottenute prima per calcolare le grandezze richieste

8 Componenti elettrici pt.2

8.1 Condensatore

Introduzione

Un condensatore è un componente elettrico costituito da una coppia di conduttori (armature) separati da un isolante (dielettrico).

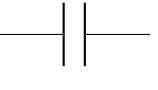
Capacità di un condensatore

Sulle armature sono presenti cariche uguali ed opposte $q_A(t) = -q_B(t)$. Si definisce la capacità di un condensatore (propria del componente in quanto dipende dalla forma S/l e dal dielettrico ε):

$$C = \frac{q_A(t)}{u_{AB}(t)} = \frac{q(t)}{u(t)} \quad C = [F\text{arad}]$$

- la capacità dipende dalla forma e dal dielettrico, per un condensatore piano vale $C = \varepsilon S/l$
- vale la legge di conservazione della carica $i_{\text{entrante}} = \frac{dq_A(t)}{dt} = -\frac{dq_B(t)}{dt} = i_{\text{uscente}}$

Bipolo condensatore

modello grafico		equazioni costitutive
		$\begin{cases} i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \\ u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \end{cases}$
		ottenute da $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} Cu(t) = C \frac{du(t)}{dt}$

Lavoro elettrico in carica

Il lavoro compiuto per caricare il condensatore dipende solo dalla tensione finale, non dipende dalle altre grandezze e da come esse variano nel tempo.

$$L_{\text{entrante}}(0, t) = \int_0^t p_{\text{entr}}(\tau) d\tau = \int_0^t u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = C \int_0^t u(\tau) \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = C \int_{u_0=0}^{u_1} u du = \frac{1}{2} C u(t)^2$$

Lavoro elettrico in scarica

Il lavoro compiuto dal condensatore in scarica è pari all'energia immagazzinata durante la carica.

$$L_{\text{entrante}}(t, t') = \int_t^{t'} p_{\text{entr}}(\tau) d\tau = \int_t^{t'} u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = \dots = C \int_{u_1}^{u_2=0} u du = -\frac{1}{2} C u(t)^2 = -L_{\text{entr}}(0, t)$$

Energia capacitiva

L'energia immagazzinata dal condensatore è detta energia capacitiva e vale $W_C(t) = \frac{1}{2} C u(t)^2$

Bipolo passivo

Il condensatore è un bipolo passivo in quanto rispetta la condizione di passività: $L_{\text{uscente}}(t_0, t) \leq W(t_0)$

$$L_{\text{uscente}}(t_0, t) = -L_{\text{entrante}}(t_0, t) = W_C(t_0) - W_C(t) \leq W_C(t_0)$$

Condensatore in regime stazionario

In regime stazionario il condensatore si comporta come un circuito aperto: $i(t) = \frac{du(t)}{dt} = 0 \quad \forall t$

8.2 Induttore

Introduzione

Un induttore è un conduttore filiforme che forma una spira (o meglio una bobina) non chiusa.

Induttanza di un induttore

Essendo un conduttore filiforme si ha $i_A(t) = i_B(t)$ e dall'equazione dell'autoflusso si ottiene l'induttanza

$$L = \frac{\varphi_L(t)}{i(t)} \quad L = [H_{enry}]$$

Bipolo induttore

modello grafico	equazioni costitutive
	$\begin{cases} u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \\ i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau \end{cases}$

ottenute da $u(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t) = \frac{d}{dt} L i(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

Lavoro elettrico in carica

Il lavoro compiuto per caricare l'induttore dipende solo dalla corrente finale, non dipende dalle altre grandezze e da come esse variano nel tempo.

$$L_{\text{entrante}}(0, t) = \int_0^t p_{\text{entr}}(\tau) d\tau = \int_0^t u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = L \int_0^t i(\tau) \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau = L \int_{i_0=0}^{i_1} i \, di = \frac{1}{2} L i(t)^2$$

Lavoro elettrico in scarica

Il lavoro compiuto dall'induttore in scarica è pari all'energia immagazzinata durante la carica.

$$L_{\text{entrante}}(t, t') = \int_t^{t'} p_{\text{entr}}(\tau) d\tau = \int_t^{t'} u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = \dots = L \int_{i_1}^{i_2=0} i \, di = -\frac{1}{2} L i(t)^2 = -L_{\text{entr}}(0, t)$$

Energia induttiva o energia magnetica

L'energia immagazzinata dall'induttore è detta energia induttiva e vale $W_L(t) = \frac{1}{2} L i(t)^2$

Bipolo passivo

L'induttore è un bipolo passivo in quanto rispetta la condizione di passività: $L_{\text{uscente}}(t_0, t) \leq W(t_0)$

$$L_{\text{uscente}}(t_0, t) = -L_{\text{entrante}}(t_0, t) = W_L(t_0) - W_L(t) \leq W_L(t_0)$$

Induttore in regime stazionario

In regime stazionario l'induttore si comporta come un cortocircuito: $u(t) = \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad \forall t$

9 Reti in regime sinusoidale

9.1 Introduzione e funzioni periodiche

Una rete si dice in regime sinusoidale quando tutte le grandezze variano in regime sinusoidale isofrequenziale. Esempi di reti in regime sinusoidale si trovano in telecomunicazioni, impianti radio e impianti di trasporto delle correnti.

Funzioni periodiche

$$a(t) = a(t + T) \quad \forall t \quad T = \text{periodo} \quad f = 1/T = \text{frequenza}$$

- valore medio: $A_0 = \frac{1}{T} \int_T a(t) dt$
- valore medio in modulo: $A_m = \frac{1}{T} \int_T |a(t)| dt$
- valore efficace: $A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T a(t)^2 dt}$ anche detto R_{oot}M_{ean}S_{quare}
- fattore di forma: $k_f = \frac{A}{A_m}$ per sinusoidi $k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

9.2 Funzioni sinusoidali

Notazione

$$\begin{aligned} a(t) &= A_M \sin(\omega t + \alpha) & A_M &= \text{ampiezza} & \omega &= 2\pi f = \text{pulsazioni} \\ & & A &= A_M/\sqrt{2} = \text{amp. efficace} & \alpha &= \text{fase iniziale} \end{aligned}$$

Si osserva che $\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$ e inoltre le funzioni sinusoidali isofrequenziali definite sopra costituiscono uno spazio vettoriale (in quanto insieme chiuso per somma e prodotto per uno scalare) definito come segue: $a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha) = \{A_M, \omega, \alpha\}$

Sinusoidi isofrequenziali e sfasamento

Due sinusoidi si dicono isofrequenziali se hanno la stessa pulsazione ω o la stessa frequenza f . Date due sinusoidi isofrequenziali è possibile definire lo sfasamento φ :

$$\begin{aligned} a(t) &= A_M \sin(\omega t + \alpha) \\ b(t) &= B_M \sin(\omega t + \beta) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \alpha - \beta + 2k\pi \quad \text{con } -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

In base allo sfasamento le due sinusoidi si dicono:

- $\varphi = 0 \rightarrow a$ e b sono in fase
- $\varphi = \pm\pi \rightarrow a$ e b sono in opposizione di fase
- $\varphi > 0 \rightarrow a$ è in anticipo su b
- $\varphi = \pi/2 \rightarrow a$ è in quadratura in anticipo rispetto a b
- $\varphi < 0 \rightarrow a$ è in ritardo su b
- $\varphi = -\pi/2 \rightarrow a$ è in quadratura in ritardo rispetto a b

9.3 Trasformata di Steinmetz, fasori e numeri complessi

Trasformata di Steinmetz

La trasformata di Steinmetz converte equazioni di onde sinusoidali isofrequenziali in numeri complessi detti fasori. La trasformazione permette uno studio facilitato delle equazioni.

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha) \rightarrow \bar{A} = S[a(t)] = \frac{A_M}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} = Ae^{j\alpha}$$

$$\bar{A} = Ae^{j\alpha} \rightarrow a(t) = S^{-1}[\bar{A}] = \sqrt{2}A \sin(\omega t + \alpha) = A_M \sin(\omega t + \alpha)$$

La trasformata è lineare in \mathbb{R} :

$$S[\lambda a(t) + \mu b(t)] = \lambda S[a(t)] + \mu S[b(t)] \quad S^{-1}[\lambda \bar{A} + \mu \bar{B}] = \lambda S^{-1}[\bar{A}] + \mu S^{-1}[\bar{B}]$$

Fasori e numeri complessi

Il fasore è definito come immagine di una sinusoide attraverso la trasformata di Steinmetz. Nel piano complesso è rappresentato da un vettore.

$$\bar{A} = S[a(t)] = \begin{cases} Ae^{j\alpha} & \text{forma polare} \\ A \cos \alpha + j A \sin \alpha & \text{forma cartesiana} \end{cases}$$

L'angolo tra i fasori nel piano corrisponde al loro sfasamento:

- in fase \rightarrow fasori sovrapposti
- in opposizione di fase \rightarrow fasori opposti
- in quadratura di fase \rightarrow fasori perpendicolari
- \bar{A} in anticipo su \bar{B} \rightarrow angolo di \bar{A} maggiore
- \bar{A} in ritardo su \bar{B} \rightarrow angolo di \bar{B} maggiore

Operazioni tra fasori

- **somma tra fasori** (somma di sinusoidi):

$$\bar{C} = \bar{A} + \bar{B} = [\operatorname{Re}(A) + \operatorname{Re}(B)] + j[\operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B)] = \operatorname{Re}(C) + j\operatorname{Im}(C)$$

- **prodotto per uno scalare reale:**

$$\bar{C} = k\bar{A} = kAe^{j\alpha} = |k| Ae^{\alpha \pm n\pi} = Ce^{j\gamma} \quad C = |k| A \quad \gamma = \begin{cases} \alpha & k > 0 \\ \alpha \pm \pi & k < 0 \end{cases}$$

- **prodotto per uno scalare immaginario** (derivata temporale, anticipo di $\pi/2$):

$$\bar{C} = j\omega \bar{A} = \omega A e^{j\alpha} e^{j\pi/2} = \omega A e^{j(\alpha + \pi/2)} = Ce^{j\gamma} \quad C = \omega A \quad \gamma = \alpha + \pi/2$$

- **prodotto per il proprio coniugato** (il risultato è un numero complesso, ma non è un fasore):

$$\dot{P} = \bar{A}\bar{B} = Ae^{j\alpha}Be^{-j\beta} = AB e^{j\varphi} = AB \cos \varphi + jAB \sin \varphi$$

- **rapporto tra fasori** (il risultato è un numero complesso, ma non è un fasore):

$$\dot{O} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{A}{B} e^{j\alpha - j\beta} = O e^{j\varphi} \quad \bar{A} = \dot{O}\bar{B} \quad \dot{O} = \text{operatore complesso}$$

- **derivata temporale** (corrisponde a moltiplicare per j o ad aggiungere uno sfasamento di $\pi/2$):

$$\frac{d a(t)}{dt} = A_M \omega \cos(\omega t + \alpha) = A_M \omega \sin(\omega t + \alpha + \pi/2) \Leftrightarrow \omega A e^{j(\alpha + \pi/2)} = j\omega A e^{j\alpha}$$

9.4 Potenze in regime sinusoidale

Potenze in funzione del tempo

La potenza in un bipolo in regime sinusoidale è data da una parte costante P_{costante} dipendente da U, I, φ e da una parte fluttuante $P_{\text{fluttuante}}(t)$ a frequenza doppia dipendente in particolare dal tempo.

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = U_M I_M \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \beta) = 2UI \left(\frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(2\omega t + \alpha + \beta) \right) = \\ &= UI \cos(\varphi) - UI \cos(2\omega t + \alpha + \beta) = P_{\text{costante}} + P_{\text{fluttuante}}(t) \end{aligned}$$

Potenza attiva

Si definisce la potenza attiva come media della potenza in un periodo di tempo T .

$$P = \frac{1}{T} \int_T p(t)dt = UI \cos \varphi = [W_{\text{att}}] \quad \begin{cases} \text{potenza massima per } \varphi = 0 \\ \text{potenza opposta per } \varphi = \pi \\ \text{potenza nulla per } \varphi = \pm\pi/2 \end{cases}$$

Lavoro elettrico e significato del valore efficace

Si definisce il lavoro elettrico per un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ con $t_2 - t_1 = kT$:

$$L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} P + p_f(t)dt = P\Delta t + \int_{t_1}^{t_2} p_f(t)dt \xrightarrow{t_2 - t_1 \gg T} P\Delta t$$

Il lavoro entrante calcolato in un periodo T vale:

$$L(t_1, t_1 + T) = \int_{t_1}^{t_1+T} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_1+T} RI^2 dt = RI_{\text{eff}}^2 \cdot T \quad L_{\text{per unità di periodo}} = RI_{\text{eff}}^2$$

Si osserva che il valore efficace o RMS è il corrispettivo valore che in corrente continua produce una stessa energia di quella prodotta in circuito AC.

Potenza reattiva

Si definisce la potenza reattiva come grandezza proporzionale al W_{att} , ma non legata all'accumulo elettrico, bensì associata all'accumulo di energia all'interno dei componenti (condensatori e induttori).

$$Q = UI \sin \varphi = [VoltAmpereReattivi]$$

Potenza apparente

Si definisce la potenza apparente come modulo della potenza attiva e reattiva, sempre proporzionale al W_{att} e sempre positiva, associata allo scambio di energia dei componenti e alla loro taglia.

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} = [VoltAmpereApparenti] \quad P = S \cos \varphi \quad Q = S \sin \varphi$$

Fattore di potenza

Si definisce il fattore di potenza come rapporto tra la potenza attiva e quella apparente: $\cos \varphi = P/S$

Potenza complessa

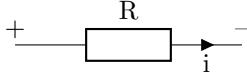
La potenza complessa contiene tutte le informazioni delle potenze attiva, reattiva e apparente in AC. La parte reale è legata al lavoro elettrico, la parte immaginaria è legata all'accumulo di energia.

$$\dot{S} = \bar{U}\bar{I} = UIe^{j\alpha}e^{-j\beta} = UIe^{j\varphi} = UI(\cos \varphi + j \sin \varphi) = P + jQ$$

$$P = \text{Re}(\dot{S}) \quad Q = \text{Im}(\dot{S}) \quad S = |\dot{S}|$$

9.5 Bipoli in regime sinusoidale

Notazione

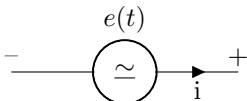


corrente $i(t) = I_M \sin(\omega t + \beta) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta)$
 tensione $u(t) = U_M \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \alpha)$
 sfasamento $\varphi = \alpha - \beta + 2k\pi$
 relazione $u(t) = \frac{U_M}{I_M} i \left(t + \frac{\varphi}{\omega} \right) \quad \frac{\varphi}{\omega} = \text{sfasamento in secondi}$

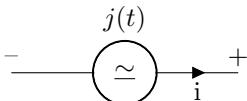
Strumenti di misura

- **voltmetro a valore efficace:** misura il valore efficace della tensione (sempre positiva)
- **amperometro a valore efficace:** misura il valore efficace della corrente (sempre positiva)
- **wattmetro a valor medio:** misura la potenza attiva (il segno dipende dalle convenzioni)
- **varmetro:** misura la potenza reattiva (il segno dipende dalle convenzioni)

Generatori ideali in AC



$v(t) = e(t) = E_M \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \alpha)$
 $i(t) = I_M \sin(\omega t + \beta) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta)$
 con I_M e β incognite dipendenti dal circuito



$i(t) = j(t) = I_M \sin(\omega t + \beta) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta)$
 $v(t) = E_M \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \alpha)$
 con E_M e α incognite dipendenti dal circuito

Bipoli lineari in AC

Un bipolo si dice lineare in AC se la sua caratteristica esterna è combinazione lineare dei fasori \bar{U} e \bar{I} (analogo ai bipoli lineari in DC): $a_n \bar{U} + b_n \bar{I} = c_n$

Bipoli passivi in AC

Un bipolo si dice passivo in AC se può solo assorbire potenza attiva:

$$P = UI \cos \varphi > 0 \rightarrow -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$$

Impedenza di un bipolo passivo

$$\dot{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U e^{j\alpha}}{I e^{j\beta}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} \quad Z = |\dot{Z}| = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = [\Omega] \quad \varphi = \arg \dot{Z} = \arctan \left(\frac{\text{Im}(\dot{Z})}{\text{Re}(\dot{Z})} \right) = [\text{rad}]$$

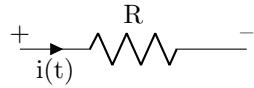
Ammettenza di un bipolo passivo

$$\dot{Y} = \dot{Z}^{-1} = \frac{\bar{I}}{\bar{U}} = \frac{I e^{j\beta}}{U e^{j\alpha}} = \frac{I}{U} e^{-j\varphi}$$

Potenze in un bipolo passivo

$\dot{S} = \bar{U} I^* = \dot{Z} \bar{I} I^* = \dot{Z} I^2$	potenza apparente $S = Z I^2 = Z I^2$
	potenza attiva $P = \text{Re}(Z) I^2 = Z I^2 \cos \varphi$
	potenza reattiva $Q = \text{Im}(Z) I^2 = Z I^2 \sin \varphi$

Resistore ideale in AC



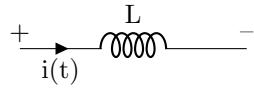
$$u(t) = Ri(t) \rightarrow u(t) = U_M \sin(\omega t + \alpha) = RI_M \sin(\omega t + \beta)$$

$$\varphi = \alpha - \beta = 0$$

$$\dot{Z}_{\text{impedenza}} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{R\bar{I}}{\bar{I}} = R \quad \dot{Y}_{\text{ammettenza}} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R} = G \quad R_{\text{resistenza}} = \frac{U_M}{I_M} = \frac{U}{I}$$

$$p(t)_{\text{istantanea}} = Ri^2 \quad S_{\text{apparente}} = RI^2 \quad P_{\text{attiva}} = RI^2 \cos \varphi = RI^2 \quad Q_{\text{reattiva}} = RI^2 \sin \varphi = 0$$

Induttore ideale in AC



$$u(t) = L \frac{di}{dt} \rightarrow u(t) = U_M \sin(\omega t + \alpha) = \omega LI_M \sin(\omega t + \beta + \pi/2)$$

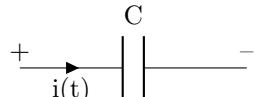
$$\varphi = \alpha - \beta = \pi/2$$

$$\dot{Z}_{\text{impedenza}} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U}{I} e^{j\pi/2} = j\omega L = jX_L \quad X_{L\text{reattanza induttiva}} = \omega L = [\Omega]$$

$$\dot{Y}_{\text{ammettenza}} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L} = jB_L \quad B_{L\text{scuscettanza induttiva}} = -\frac{1}{\omega L} = [Siemens]$$

$$u(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \geq 0 \quad S_{\text{apparente}} = |X_L| I^2 \quad P_{\text{attiva}} = S \cos \varphi = 0 \quad Q_{\text{reattiva}} = S \sin \varphi = X_L I^2$$

Condensatore ideale in AC



$$i(t) = C \frac{du}{dt} \rightarrow i(t) = I_M \sin(\omega t + \beta) = \omega CU_M \sin(\omega t + \alpha + \pi/2)$$

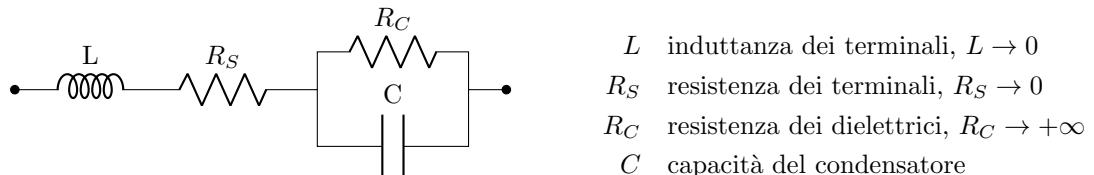
$$\varphi = \alpha - \beta = -\pi/2$$

$$\dot{Z}_{\text{impedenza}} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U}{I} e^{-j\pi/2} = -\frac{j}{\omega C} = jX_C \quad X_{C\text{reattanza capacitiva}} = -\frac{1}{\omega C} = [\Omega]$$

$$\dot{Y}_{\text{ammettenza}} = \frac{1}{\bar{Z}} = -\frac{\omega C}{j} = j\omega C = jB_L \quad B_{C\text{scuscettanza capacitiva}} = \omega C = [Siemens]$$

$$u(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t) \geq 0 \quad S_{\text{apparente}} = |X_C| I^2 \quad P_{\text{attiva}} = S \cos \varphi = 0 \quad Q_{\text{reattiva}} = S \sin \varphi = X_C I^2$$

Condensatore reale (per curiosità personale, non in programma)



9.6 Leggi di Kirchhoff, serie e paralleli in AC

Legge di Kirchhoff per correnti

Dato un insieme di taglio \mathcal{T} , la legge di Kirchhoff per i fasori delle correnti vale:

$$\sum_{h \in \mathcal{T}} \alpha_h \bar{I}_h = \bar{0} \quad \begin{cases} \alpha = 1 & \text{correnti uscenti} \\ \alpha = -1 & \text{correnti entranti} \end{cases}$$

Legge di Kirchhoff per tensioni

Data una maglia \mathcal{M} , la legge di Kirchhoff per i fasori delle tensioni vale:

$$\sum_{h \in \mathcal{M}} \beta_h \bar{U}_h = \bar{0} \quad \begin{cases} \beta = 1 & \text{tensioni concordi con maglia} \\ \beta = -1 & \text{tensioni discordi con maglia} \end{cases}$$

Serie di impedenze

Data una serie di impedenze, l'impedenza equivalente è $\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dots + \dot{Z}_n$

Partitore di tensione

In un partitore di tensione, la tensione è proporzionale all'impedenza:

$$\bar{U}_k = \frac{\dot{Z}_k}{\sum_j \dot{Z}_j} \bar{U}_{tot} \quad \bar{U}_1 = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \bar{U}_{tot} \quad \bar{U}_2 = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \bar{U}_{tot}$$

Parallelo di impedenze

Dato un parallelo di impedenze, l'impedenza equivalente è $\dot{Z}_{eq} = \left(\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\dot{Z}_n} \right)^{-1}$

Partitore di corrente

In un partitore di corrente, la corrente è proporzionale all'ammettenza:

$$\bar{I}_k = \frac{\dot{Y}_k}{\sum_j \dot{Y}_j} \bar{I}_{tot} \quad \bar{I}_1 = \frac{\dot{Y}_1}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2} \bar{I}_{tot} \quad \bar{I}_2 = \frac{\dot{Y}_2}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2} \bar{I}_{tot}$$

9.7 Rete simbolica

Rete lineare e analisi nel tempo

Una rete si dice lineare in regime sinusoidale se è composta soltanto da bipoli R, L, C, GIT e GIC. È possibile analizzare la rete in funzione del tempo. Ciò, però, risulta complesso, lungo e poco vantaggioso.

Rete simbolica e analisi in frequenza

Se si ha una rete lineare con GIT e GIC che generano sinusoidi isofrequenziali, è possibile trasformarla attraverso la trasformata di Steinmetz ottenendo una rete simbolica analizzabile con i fasori con le seguenti proprietà:

- si analizza in funzione della frequenza
- ha lo stesso grafo della rete di partenza
- valgono sostituzione, SVE, correnti di anello, potenziali nodali, Thévenin e Norton

$$\begin{array}{lll} \text{bipoli passivi} & \rightarrow & \bar{U} = \dot{Z} \bar{I} \quad \bar{I} = \dot{Y} \bar{U} \\ \text{GIT e GIC} & \rightarrow & \bar{U} = \bar{E} = E e^{j\alpha} \quad \bar{I} = \bar{J} = J e^{j\beta} \\ \text{GLT e GLC} & \rightarrow & \bar{U} = \bar{E} - \dot{Z} \bar{I} \quad \bar{I} = \bar{J} - \dot{Y} \bar{U} \end{array}$$

Teorema di sostituzione

È possibile sostituire un lato della rete con \bar{U} e \bar{I} con un GIT di tensione $\bar{E} = \bar{U}$ o con un GIC di $\bar{J} = \bar{I}$.

Sovrapposizione degli effetti

$$\begin{aligned}\bar{U}_h &= \sum_r \bar{U}_{h,E_r} + \sum_s \bar{U}_{h,J_s} & \bar{U}_{h,E_r} &= \text{costributo dell'r-esimo GIT} \\ \bar{I}_h &= \sum_r \bar{I}_{h,E_r} + \sum_s \bar{I}_{h,J_s} & \bar{U}_{h,J_s} &= \text{costributo dell's-esimo GIC} \\ && \bar{I}_{h,E_r} &= \text{costributo dell'r-esimo GIT} \\ && \bar{I}_{h,J_s} &= \text{costributo dell's-esimo GIC}\end{aligned}$$

Metodo delle correnti di anello (poco usato)

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{A_{kk}} \bar{I}_{A_k} &= \sum \text{impedenze della maglia } A_k \\ \dot{Z}_{A_{kh}} \bar{I}_{A_h} &= \sum \text{impedenze in comune alle maglie } A_k \text{ e } A_h \\ \dot{Z}_{A_{kk}} \bar{I}_{A_k} - \sum_h \dot{Z}_{A_{kh}} \bar{I}_{A_h} &= \bar{E}_{A_k} & \bar{E}_{A_k} &= \sum \text{fem di anello della maglia } A_k \text{ con conv. generatore} \\ \bar{I}_{A_k} &= \text{corrente di anello della maglia } A_k \\ \bar{I}_{A_h} &= \text{corrente di anello della maglia } A_h\end{aligned}$$

Metodo dei potenziali nodali (poco usato)

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{N_{kk}} \bar{U}_{N_k} &= \sum \text{ammettenze incidenti al nodo } N_k \\ \dot{Y}_{N_{kh}} \bar{U}_{N_k} - \sum_h \dot{Y}_{N_{kh}} \bar{U}_{N_h} &= \bar{J}_{N_k} & \bar{Y}_{N_{kh}} &= \sum \text{ammettenze comprese tra i nodi } N_k \text{ e } N_h \\ \bar{J}_{N_k} &= \sum \text{correnti dei GIC impresse su } N_k \text{ (+ se entranti)} \\ \bar{U}_{N_k} &= \text{potenziale del nodo } N_k \\ \bar{U}_{N_h} &= \text{potenziale del nodo } N_h\end{aligned}$$

Teorema di Thévenin

$$\begin{aligned}\bar{U}_{eq} &= \bar{E}_{ab} = \bar{U}_{0,ab} = \text{fasore della tensione a vuoto della porta ab} \\ \dot{Z}_{eq} &= \dot{Z}_{ab} = \frac{\bar{U}_{0,ab}}{\bar{I}_{cc,ab}} = \text{impedenza della rete inerte (con tutti i GIT/GIC spenti)} \\ \bar{U}_{ab} &= \bar{U}_{0,ab} - \dot{Z}_{eq} \bar{I}_{cc,ab} \rightarrow \text{equazione del GLT}\end{aligned}$$

Teorema di Norton

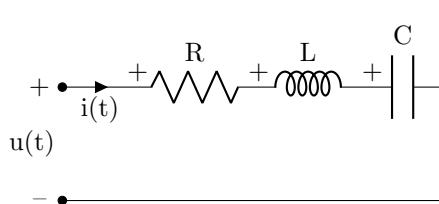
$$\begin{aligned}\bar{I}_{eq} &= \bar{J}_{ab} = \bar{I}_{cc,ab} = \text{fasore della corrente di cortocircuito della porta ab} \\ \dot{Z}_{eq} &= \dot{Z}_{ab} = \frac{\bar{U}_{0,ab}}{\bar{I}_{cc,ab}} = \text{impedenza della rete inerte (con tutti i GIT/GIC spenti)} \\ \bar{I}_{ab} &= \bar{I}_{cc,ab} - \frac{\bar{U}_{ab}}{\dot{Z}_{eq}} \rightarrow \text{equazione del GLC}\end{aligned}$$

Convenzione delle potenze complesse

$$\sum \dot{S}_e = \dot{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum P_e = 0 \\ \sum Q_e = 0 \end{cases} \quad \sum \dot{S}_u = \dot{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum P_u = 0 \\ \sum Q_u = 0 \end{cases} \quad \sum \dot{S}_e = \sum \dot{S}_u$$

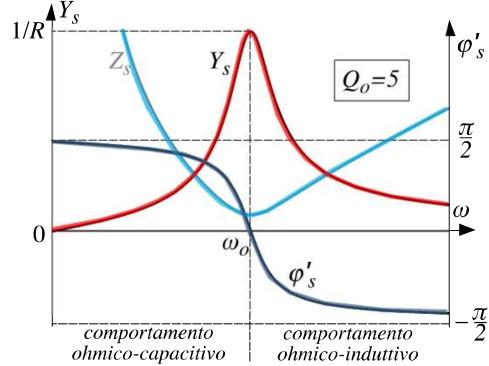
9.8 Analisi in frequenza e risonanza in una serie RLC

Circuito ed equazioni caratteristiche



$$\bar{U} = \dot{Z}\bar{I} \quad \dot{Z}(\omega) = R + jX(\omega)$$

$$X(\omega) = X_L(\omega) + X_C(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$



Impedenza e ammettenza

$$\text{impedenza: } \dot{Z}(\omega) = R + j(X_L(\omega) + X_C(\omega)) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$|\dot{Z}(\omega)| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \varphi(\omega) = \arg \dot{Z} = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

$$\text{ammettenza: } \dot{Y}(\omega) = \frac{1}{\dot{Z}(\omega)} = \frac{1}{R + j(X_L + X_C)} = \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

$$|\dot{Y}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad \varphi'(\omega) = \arg \dot{Y} = \arctan\left(-\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Risonanza

Si osserva che l'impedenza e l'ammettenza dipendono da ω , ovvero dalla frequenza delle correnti e delle tensioni impresse sul circuito. Per un certo valore $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ si ha un fenomeno di risonanza:

- i fenomeni induttivi e capacitivi si equivalgono e si cancellano a vicenda
- si ha un picco di massimo dell'ammettenza per $\omega = \omega_0$
- si ha una valle di minimo dell'induttanza per $\omega = \omega_0$

In base al valore di ω si avranno due comportamenti

- per $\omega < \omega_0$ prevale il comportamento ohmico-capacitivo ($\varphi < 0$, $\dot{Z} \xrightarrow{\omega \ll \omega_0} R - j/\omega C$)
- per $\omega > \omega_0$ prevale il comportamento ohmico-induttivo ($\varphi > 0$, $\dot{Z} \xrightarrow{\omega \gg \omega_0} R + j\omega L$)

Fattore di merito in risonanza

Il fattore di merito indica l'ampiezza della campana di risonanza e, in generale, la selettività del circuito:

- fattore di merito alto \rightarrow campana ampia, bassa selettività
- fattore di merito basso \rightarrow campana stretta, alta selettività

$$Q_0 = \frac{U_L}{U_R} = \frac{U_C}{U_R} = \frac{|X_L(\omega_0)|}{R} = \frac{|X_C(\omega_0)|}{R} = \frac{\omega L}{R} = -\frac{1}{\omega C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{indipendente da } \omega_0$$

Analisi dei fasori di correnti, tensioni e potenze in risonanza

- $\bar{U}_L = -\bar{U}_C$ i fasori sono uguali e opposti tra loro e si cancellano a vicenda
 $\bar{U}_L = j\omega_0 L \bar{I}$ la corrente è in ritardo (e in quadratura) rispetto alla tensione nell'induttanza
 $\bar{U}_C = -j \frac{1}{\omega_0 C} \bar{I}$ la corrente è in anticipo (e in quadratura) rispetto alla tensione nel condensatore
 $Q_L + Q_C = 0$ le potenze reattive sono opposte, induttore e condensatore agiscono in cortocircuito

Siccome vale $U_L = U_C = Q_0 U_{\text{serie}}$, se $Q_0 > 1$ le tensioni all'interno dei singoli componenti vengono amplificate. Questo fenomeno può essere voluto nei circuiti di amplificazione di segnale, ma può provocare danni nei circuiti di potenza.

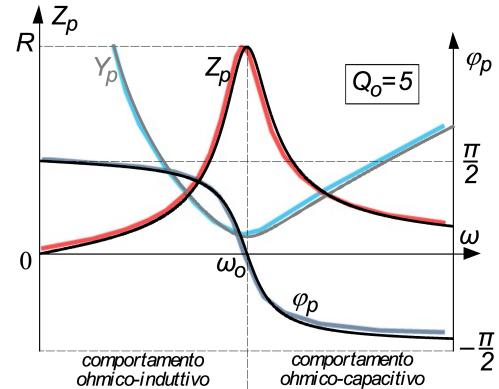
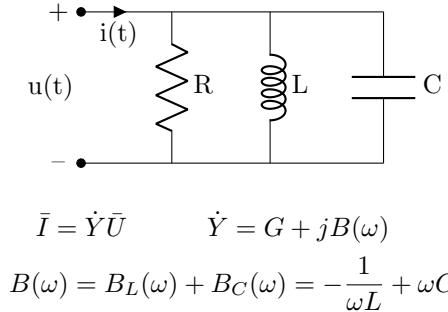
Analisi nel tempo di correnti, tensioni e potenze in risonanza

$$\begin{aligned}
 u_{LC}(t) &= u_L(t) + u_C(t) = 0 \rightarrow u_L(t) = -u_C(t), \quad i_L(t) = i_C(t) \\
 p_L(t) &= u_L(t)i(t) = -u_C(t)i(t) = -p_C(t) \rightarrow p_L(t) + p_C(t) = 0 \\
 \omega_L(t) &= \frac{1}{2}Li(t)^2, \quad \omega_C(t) = \frac{1}{2}Cu(t)^2 \rightarrow \omega_{LC} = \text{costante}
 \end{aligned}$$

Si osserva che, in risonanza, il condensatore e l'induttanza agiscono come cortocircuito e si scambiano energia a vicenda, senza influire sulla potenza istantanea del circuito.

9.9 Analisi in frequenza e antisonanza in un parallelo RLC

Circuito ed equazioni caratteristiche



Impedenza e ammettenza

$$\begin{aligned}
 \text{ammettenza: } \dot{Y}(\omega) &= G + j(B_L + B_C) = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \\
 |\dot{Y}(\omega)| &= \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \quad \varphi'(\omega) = \arg \dot{Y} = \arctan \left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{impedenza: } \dot{Z}(\omega) &= \frac{1}{\dot{Y}(\omega)} = \frac{1}{G + j(B_L + B_C)} = \frac{1}{G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)} \\
 |\dot{Z}(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}} \quad \varphi(\omega) = \arg \dot{Z} = \arctan \left(-\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \right)
 \end{aligned}$$

Antisonanza

Si ha un fenomeno di antisonanza (opposto alla risonanza) per $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- i fenomeni induttivi e capacitivi si equivalgono e si sommano
- si ha una valle di minimo dell'ammittenza per $\omega = \omega_0$
- si ha un picco di massimo dell'induttanza per $\omega = \omega_0$

In base al valore di ω si avranno due comportamenti

- per $\omega < \omega_0$ prevale il comportamento ohmico-induttivo ($\varphi > 0$, $\dot{Z} \xrightarrow{\omega \ll \omega_0} R - j/\omega L$)
- per $\omega > \omega_0$ prevale il comportamento ohmico-capacitivo ($\varphi < 0$, $\dot{Z} \xrightarrow{\omega \gg \omega_0} R + j\omega C$)

Fattore di merito in antisonanza

$$Q_0 = \frac{I_L}{I_R} = \frac{I_C}{I_R} = \frac{R}{|X_L(\omega_0)|} = \frac{R}{|X_C(\omega_0)|} = \frac{R}{\omega L} = -\omega CR = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{indipendente da } \omega_0$$

Analisi dei fasori di correnti, tensioni e potenze in antisonanza

- | | |
|---|---|
| $\bar{I}_L = -\bar{I}_C$ | i fasori sono uguali ed opposti tra loro e si cancellano a vicenda |
| $\bar{I}_C = j\omega_0 C \bar{U}$ | la tensione è in ritardo (e in quadratura) rispetto alla corrente nel condensatore |
| $\bar{I}_L = -j \frac{1}{\omega_0 L} \bar{U}$ | la tensione è in anticipo (e in quadratura) rispetto alla corrente nell'induttanza |
| $Q_L + Q_C = 0$ | le potenze reatt. sono opposte, induttore e condensatore formano un circuito aperto |

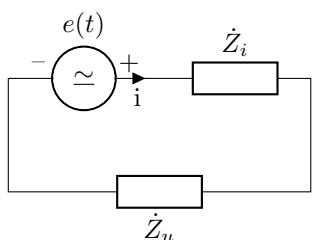
Siccome vale $I_L = I_C = Q_0 I_{\text{parallelo}}$, se $Q_0 > 0$ le correnti all'interno dei singoli componenti vengono amplificate.

Analisi nel tempo di correnti, tensioni e potenze in antisonanza

$$\begin{aligned} i_{LC}(t) &= i_L(t) + i_C(t) = 0 \quad \rightarrow \quad i_L(t) = -i_C(t), \quad u_L(t) = u_C(t) \\ p_L(t) &= u(t)i_L(t) = -u(t)i_C(t) = -p_C(t) \quad \rightarrow \quad p_L(t) + p_C(t) = 0 \\ \omega_L(t) &= \frac{1}{2}Li(t)^2, \quad \omega_C(t) = \frac{1}{2}Cu(t)^2 \quad \rightarrow \quad \omega_{LC} = \text{costante} \end{aligned}$$

Si osserva che, in antisonanza, il condensatore e l'induttore agiscono come circuito aperto e si scambiano energia a vicenda, senza influire sulla potenza istantanea del circuito.

9.10 Teorema del massimo trasferimento di potenza



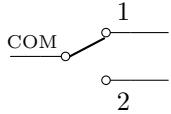
La potenza attiva ceduta al carico è massima se $\dot{Z}_i = Z_u^*$, ovvero se il coniugato dell'impedenza di carico è pari all'impedenza interna del generatore (adattamento coniugato).

10 Reti in regime variabile

10.1 Regime variabile quasi stazionario

Di tutte le possibili reti a regime variabile, si analizzano solo quelle a regime variabile quasi stazionario, in modo da poter applicare le proprietà della teoria dei circuiti. Nello specifico verranno analizzati i regimi variabili che si verificano all'apertura o alla chiusura di un interruttore che modifica il circuito, ciò provoca un transitorio tra il regime precedente e quello nuovo.

Deviatore ideale



dipolo in grado di commutarsi tra due stati:

1. cortocircuito tra mors. 1 e comune, circuito aperto tra mors. 2 e comune
2. cortocircuito tra mors. 1 e comune, circuito aperto tra mors. 2 e comune

10.2 Istante critico e variabili di stato all'istante critico

Istante critico

L'istante critico è l'ultimo istante di tempo in cui vale ancora il regime "vecchio" che corrisponde alle condizioni iniziali del transitorio variabile. Studiare una rete variabile corrisponde a studiare cosa avviene nell'istante critico e nell'immediato futuro.

Variabili di stato e continuità

All'istante critico alcune grandezze possono ammettere discontinuità, altre sono continue. Le variabili che non ammettono discontinuità all'istante critico sono dette variabili di stato.

- interruttore ideale ha discontinuità quando si inverte lo stato $u(0^-) \neq u(0^+)$
- generatore ideale ha discontinuità in accensione o spegnimento $e(0^-) \neq e(0^+)$, $j(0^-) \neq j(0^+)$
- resistenza ideale può presentare discontinuità di correnti e tensioni $u(0^-) \neq u(0^+)$, $i(0^-) \neq i(0^+)$
- condensatore ideale non ammette discontinuità di tensione $u(0^-) = u(0^+)$
- induttore ideale non ammette discontinuità di corrente $i(0^-) = i(0^+)$

10.3 Reti lineari in regime variabile

Sistema di equazioni di reti lineari in regime variabile

Per risolvere una rete lineare a regime variabile:

1. si scrive il sistema composto da $2l$ equazioni differenziali ordinarie ottenute dalle LKC, LKT e dalle equazioni costitutive dei singoli bipoli
2. si individuano le variabili di stato $u_k(t)$ e $i_k(t)$ e si identificano come uscite $y(t)$
3. si individuano le variabili dei generatori $e(t)$ e $j(t)$ e si identificano come ingressi $x(t)$
4. si risolve il sistema ottenendo una equazione differenziale ordinaria con unica incognita $y(t)$
5. si risolve l'EDO ottenuta e di conseguenza si risolve l'intera rete

Equazione differenziale ordinaria

$$\sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^q b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} & \text{combinazione delle derivate degli ingressi} \\ \sum_{i=0}^q b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} & \text{combinazione delle derivate delle uscite} \end{cases}$$

I coefficienti a_i e b_i dipendono dall'uscita considerata, il numero p ($\geq q$) determina il grado dell'EDO ed è sempre minore del numero di condensatori e induttori presenti nella rete. La soluzione dell'EDO si compone della somma tra la soluzione dell'omogenea associata e una soluzione particolare.

Soluzione dell'omogenea

Supponendo che la soluzione dell'omogenea sia di tipo esponenziale $y_0(t) = Y e^{st}$, si ottiene

$$\sum_{i=0}^p a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^p a_i Y s^i e^{st} = Y e^{st} \sum_{i=0}^p a_i s^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^p a_i s^i = 0$$

- il polinomio $\sum_{i=0}^p a_i s^i = 0$ è definito equazione algebrica caratteristica del circuito, di grado p
- le soluzioni $s = s_1, s_2, \dots, s_p$ sono esattamente p e sono chiamate zeri del polinomio
- le soluzioni possono essere reali distinte, reali coincidenti o complesse coniugate e dipendono dai valori R, L, C del circuito
- ciascuno zero s_i fornisce una soluzione parziale dell'omogenea del tipo $y_0(t) = Y_i e^{s_i t}$ chiamato modo naturale o modo caratteristico dell'EDO.

La soluzione completa dell'omogenea è una combinazione lineare di tutti i modi naturali:

$$y_0(t) = Y_1 e^{s_1 t} + Y_2 e^{s_2 t} + \dots + Y_p e^{s_p t}$$

Radici reali e modi naturali unidirezionali

Ad ogni radice reale $s_i = \sigma_i$ è associato un modo naturale esponenziale del tipo $y_0(t) = Y_i e^{\sigma_i t}$

- se le soluzioni sono negative o nulle $\sigma_i \leq 0$, l'evoluzione del sistema converge ad un regime di stabilità (per reti di bipoli passivi si ha sempre stabilità)
- se ci sono due soluzioni coincidenti $\sigma_i = \sigma_{i+1}$, il contributo risultante cumulativo di entrambi sarà della forma $y_0(t) = Y_i e^{\sigma_i t} + Y_i t e^{\sigma_i t}$

Radici complesse coniugate e modi natali oscillanti

Ad ogni coppia di radici complesse coniugate è associato un modo naturale oscillatorio del tipo:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= Y_i e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} + Y_{i+1} e^{(\sigma_i - j\omega_i)t} = e^{\sigma_i t} Y_i e^{j\omega_i t} + e^{\sigma_i t} Y_{i+1} e^{-j\omega_i t} \\ &= e^{\sigma_i t} Y_i (\cos(\omega_i t) + j \sin(\omega_i t)) + e^{\sigma_i t} Y_{i+1} (\cos(\omega_i t) - j \sin(\omega_i t)) \\ &= e^{\sigma_i t} (Y_i + Y_{i+1}) \cos(\omega_i t) + e^{\sigma_i t} j(Y_i - Y_{i+1}) \sin(\omega_i t) \\ y_0(t) &= e^{\sigma_i t} A_i \cos(\omega_i t) + e^{\sigma_i t} B_i \sin(\omega_i t) \end{aligned}$$

Se la parte reale è negativa $\sigma_i < 0$, si ha un moto armonico esponenzialmente smorzato e si converge ad un regime di stabilità.

Frequenze naturali e costanti di tempo

Si osserva che le radici s_i esprimono una frequenza associata al modo naturale, per cui si definisce il tempo caratteristico associato al modo naturale $\tau_i = -1/\sigma_i$. In questo modo si ottengono:

- modi naturali unidirezionali: $y_0(t) = Y_i e^{-t/\tau_i}$
- modi naturali oscillanti: $y_0(t) = e^{-t/\tau_i} (A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t))$

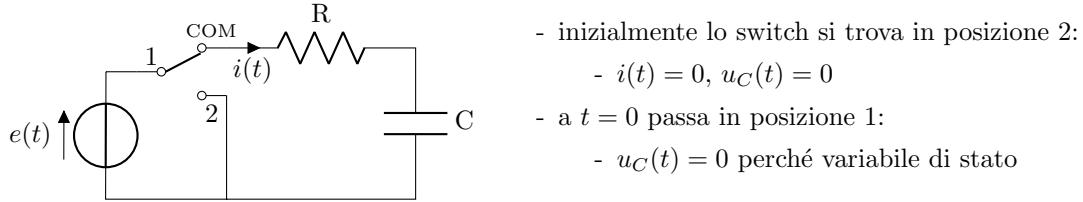
Soluzione completa dell'EDO

La soluzione completa dell'equazione differenziale è data dalla somma di quella dell'omogenea associata e di una soluzione particolare

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = Y_1 e^{s_1 t} + Y_2 e^{s_2 t} + \dots + Y_p e^{s_p t} + y_p(t)$$

Le costanti di integrazione Y_1, \dots, Y_p si determinano imponendo le condizioni iniziali per l'uscita $y(t)$ e le sue $p-1$ -esime derivate in $t = 0$.

10.4 Carica del condensatore in circuito RC



1. scrivo le equazioni del sistema per $t \geq 0$

$$\text{LKT: } u_R(t) + u_C(t) = E \quad \text{LKC: } i_R(t) = i_C(t) = i(t) \quad \text{R: } u_R(t) = Ri(t) \quad \text{C: } i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

2. ottengo la EDO e l'omogenea associata

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E \quad \rightarrow \quad RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0 \quad \text{omogenea}$$

3. soluzione particolare

$$u_p(t) = U_P \text{ con } U_P = E \quad \rightarrow \quad RC \frac{dU_P}{dt} + U_P = E \quad \rightarrow \quad U_P = E$$

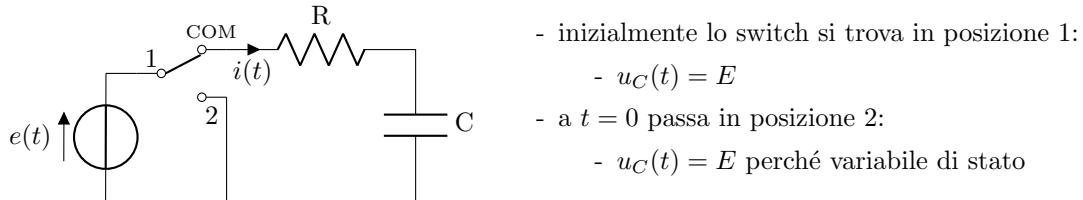
4. soluzione dell'omogenea

$$RCs + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{1}{RC}, \quad \tau = RC, \quad u_o(t) = U_0 e^{st} = U_0 e^{-t/\tau}$$

5. soluzione completa e calcolo delle costanti con condizioni iniziali $u_C(0) = 0$

$$u_C(t) = U_P + U_0 e^{-t/\tau} \quad \rightarrow \quad U_P = -U_0 = E \quad \rightarrow \quad u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}), \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

10.5 Scarica del condensatore in circuito RC



1. scrivo le equazioni del sistema per $t \geq 0$

$$\text{LKT: } u_R(t) + u_C(t) = 0 \quad \text{LKC: } i_R(t) = i_C(t) = i(t) \quad \text{R: } u_R(t) = Ri(t) \quad \text{C: } i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

2. ottengo la EDO che è già omogenea

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0 \quad \text{già omogenea, non serve la soluzione particolare}$$

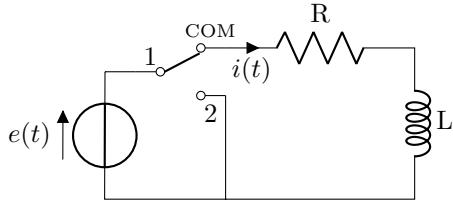
4. soluzione dell'omogenea

$$RCs + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{1}{RC}, \quad \tau = RC, \quad u_o(t) = U_0 e^{st} = U_0 e^{-t/\tau}$$

5. soluzione completa e calcolo delle costanti con condizioni iniziali $u_C(0) = E$

$$u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau} \quad \rightarrow \quad U_0 = E \quad \rightarrow \quad u_C(t) = E e^{-t/\tau}, \quad i(t) = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau}, \quad u_R = -E e^{-t/\tau}$$

10.6 Carica dell'induttore in circuito RL



- inizialmente lo switch si trova in posizione 2:
- $i(t) = 0, u_L(t) = 0$
- a $t = 0$ passa in posizione 1:
- $i_L(t) = 0$ perché variabile di stato

1. scrivo le equazioni del sistema per $t \geq 0$

$$\text{LKT: } u_R(t) + u_L(t) = E \quad \text{LKC: } i_R(t) = i_L(t) = i(t) \quad \text{R: } u_R(t) = Ri_R(t) \quad \text{L: } u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

2. ottengo la EDO e l'omogenea associata

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) = E \quad \rightarrow \quad L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) = 0 \quad \text{omogenea}$$

3. soluzione particolare

$$i_p(t) = I_P \text{ con } i_P = \frac{E}{R} \quad \rightarrow \quad L \frac{dI_P}{dt} + RI_P = E \quad \rightarrow \quad I_P = \frac{E}{R}$$

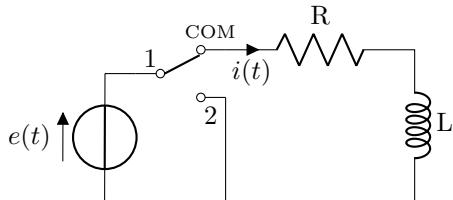
4. soluzione dell'omogenea

$$Ls + R = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{R}{L}, \quad \tau = \frac{L}{R}, \quad i_o(t) = I_0 e^{st} = I_0 e^{-t/\tau}$$

5. soluzione completa e calcolo delle costanti con condizioni iniziali $i_L(0) = 0$

$$i_L(t) = I_P + I_0 e^{-t/\tau} \quad \rightarrow \quad I_P = I_0 = \frac{E}{R} \quad \rightarrow \quad i_L(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \quad u_L(t) = E e^{-t/\tau} \\ u_R(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

10.7 Scarica dell'induttore in circuito RL



- inizialmente lo switch si trova in posizione 1:
- $i_L(t) = E/R$
- a $t = 0$ passa in posizione 2:
- $i_L(t) = E/R$ perché variabile di stato

1. scrivo le equazioni del sistema per $t \geq 0$

$$\text{LKT: } u_R(t) + u_L(t) = 0 \quad \text{LKC: } i_R(t) = i_L(t) = i(t) \quad \text{R: } u_R(t) = Ri_R(t) \quad \text{L: } u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

2. ottengo la EDO che è già omogenea

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) = 0 \quad \text{già omogenea, non serve la soluzione particolare}$$

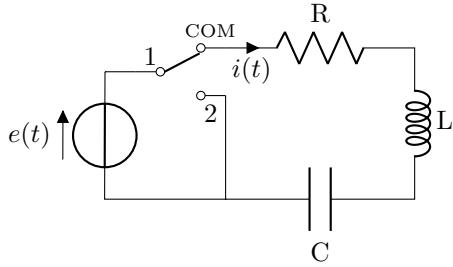
4. soluzione dell'omogenea

$$Ls + R = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{R}{L}, \quad \tau = \frac{L}{R}, \quad i_o(t) = I_0 e^{st} = I_0 e^{-t/\tau}$$

5. soluzione completa e calcolo delle costanti con condizioni iniziali $i_L(0) = E/R$

$$i_L(t) = I_0 e^{-t/\tau} \quad \rightarrow \quad I_0 = \frac{E}{R} \quad \rightarrow \quad i_L(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}, \quad u_L(t) = -E e^{-t/\tau}, \quad u_R(t) = E e^{-t/\tau}$$

10.8 Circuito RLC e fattore di smorzamento



- inizialmente lo switch si trova in posizione 2:

$$i(t) = 0, u_R(t) = u_L(t) = u_C(t) = 0$$

- a $t = 0$ passa in posizione 1:

$$i_L(t) = 0 \text{ e } u_C(t) = 0 \text{ perché variabili di stato}$$

- scrivo le equazioni del sistema per $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{LKT: } u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) &= E \\ \text{LKC: } i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) &= i(t) \end{aligned} \quad u_R(t) = Ri(t) \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

- ottengo le EDO in funzione della corrente e della tensione e le relative omogenee associate

$$\begin{aligned} LC \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) &= E & \rightarrow & LC \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0 \\ LC \frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + RC \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) &= 0 & \rightarrow & LC \frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + RC \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0 \end{aligned}$$

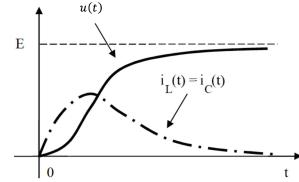
- si risolve la EDO in funzione delle tensioni, introducendo i parametri T , ω_0 , ξ e si risolve distinguendo tre casi in base al valore di $\xi > 1$, $\xi = 1$, $\xi < 1$

$$\begin{aligned} T &= \frac{2L}{R} \text{ costante di tempo} & \xi &= \frac{1}{\omega_0 T} = \frac{R}{2\omega_0 L} = \frac{R}{R_{cr}} \text{ smorzamento} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ pulsazione} & R_{cr} &= 2\omega_0 L = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \text{ resistenza critica} \end{aligned}$$

- caso $\xi > 1$, andamento sovrasmorzato, $R > R_{cr}$

si ha un andamento esponenziale monotono e si definiscono due costanti di tempo $0 < T_2 < T < T_1$ tali per cui per $t \rightarrow +\infty$ prevale la costante di tempo maggiore T_1 :

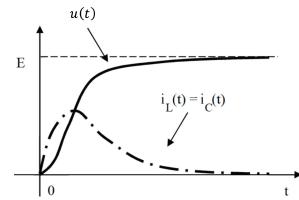
$$\begin{aligned} u_C(t) &= E - \frac{T_1}{T_1 - T_2} E e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} E e^{-t/T_2} \\ i_L(t) &= \frac{CE}{T_1 - T_2} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}) \end{aligned}$$



- caso $\xi = 1$, andamento criticamente smorzato $R = R_{cr}$

si ha un andamento esponenziale monotono con una sola costante di tempo $T = T_1 = T_2$:

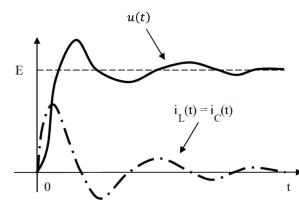
$$\begin{aligned} u_C(t) &= E - E e^{-t/T} - E \frac{t}{T} e^{-t/T} \\ i_L(t) &= \frac{CE}{T^2} t e^{-t/T} \end{aligned}$$



- caso $\xi < 1$, andamento sottosmorzato $R < R_{cr}$

si ha un andamento oscillatorio esponenzialmente smorzato con una singola costante di tempo T :

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E - E e^{-t/T} \cos(\omega t) - \frac{E}{T\omega} e^{-t/T} \sin(\omega t) \\ i_L(t) &= \frac{E}{L\omega} t e^{-t/T} \sin(\omega t) \end{aligned}$$



10.9 Considerazioni finali su reti a regime variabile che tendono alla stabilità

- nelle reti a regime smorzato, il transitorio termina dopo $\approx 5T$, nel caso in cui si hanno più costanti di tempo, domina quella maggiore
- dopo il transitorio iniziale, la rete tende ad un regime che dipende dai generatori (stazionario, sinusoidale), in assenza di generatori (con smorzamento), il regime è nullo $u(t) = 0, i(t) = 0$
- il contributo dello smorzamento è dato dai componenti resistivi R
- il contributo delle oscillazioni è dato dai componenti induttivo-capacitivi L e C