Appunti di Fisica 1

Giacomo Simonetto

Secondo semetre 2023-24

Sommario

Appunti del corso di Fisica 1 - (Meccanica e termodinamica) della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

Indice

1 Introduzione

1.1 Interazioni fondamentali

Le interazioni (o forze) fondamentali sono:

1. forza gravitazionale: scoperta per prima nel 1600 circa da Galileo
2. forza elettromagnetica: scoperta nel 1800
3. forza debole: legata ai costituenti degli atomi (radioattività)
4. forza forte: legata ai costituenti degli atomi (quark)

Si sta cercando un legame tra la forza elettromagnetica e quella debole (forza elettrodebole) e una teoria che lega le forze elettromagnetica, debole e forte (teoria delle forze unificate). La forza gravitazione è considerata particolare in quanto:

- è molto meno intensa delle altre
- ha solo "carica" positiva (non esiste massa negativa)
- spazio e forza gravitazionale non possono essere sepatati
- non si è ancora riusciti a comprenderla quantisticamente

2 Il punto materiale

2.1 Introduzione al punto materiale

È una finzione matematica in quanto non esiste nella realtà, ma serve come approssimazione. Non ha estensione, ma ha una massa m ed è possibile determinarne la posizione. In un sistema di riferimento (cartesiano con 3 assi), la posizione è data dal vettore $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$.

2.2 Grandezze elementari

massa: m, l'unità di misura è $[m] = kg$
posizione: $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, con unità di misura $[x_0] = [y_0] = [z_0] = m$
tempo: t, con unità di misura $[t] = s$

2.3 Punto materiale in movimento - cinematica

Posizione

La posizione nello spazio di un punto sono le coordinate del punto un sistema di riferimento cartesiano di 3 assi.

$$\vec{r}(t) = (x_0(t), y_0(t), z_0(t)) \qquad [x_0] = [y_0] = [z_0] = m$$

Velocità

La velocità è lo spazio percorso in un tempo piccolo.

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\,\vec{r}(t) \qquad [v] = \frac{m}{s}$$

Per ottenere la posizione dalla velocità:

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \int_{t0}^{t1} \vec{v}(\tau)\,d\tau$$

Accelerazione

L'accelerazione è la variazione della velocità nel tempo.

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\,\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dx^2}\,\vec{r}(t) \qquad [a] = \frac{m}{s^2}$$

Per ottenere la velocità dall'accelerazione:

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int_{t0}^{t1} \vec{a}(\tau)\,d\tau$$

Per ottenere la posizione dall'accelerazione:

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \int_{t0}^{t1} \left(\vec{v_0}(\tau) + \int_{t0}^{t1} \vec{a}(\tau)\,d\tau\right) d\tau \qquad \left(= \vec{r_0} + \vec{v_0}(t - t_0) + \iint_{t_0}^{t_1} \vec{a}(\tau)\,d\tau^2\right)$$

Moto uniformemente accelerato

Moto con accelerazione costante, le leggi orarie sono:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{a}(t - t_0) \end{cases}$$

Per convenzione si sceglie $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{a}t \end{cases}$$

Si osserva che per trovare $\vec{r}(t)$ a partire dall'accelerazione è necessario conoscere i due dati iniziali $\vec{r_0}$ (posizione) e $\vec{v_0}$ (velocità), in quanto sono stati fatti due integrali nel calcolo.

Ogni vettore $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ può essere scomposto nelle tre componenti x, y, z degli assi cartesiani ottenendo tre equazioni del moto, una per ogni asse.

Esempi di applicazioni:

- caduta di un grave (da fermo e con moto orizzontale)
- moto di due automobili sulla stessa retta
- moto di un proiettile (con angolo inziale θ rispetto al suolo)

2.4 Moto armonico semplice in una dimensione

$$\begin{aligned}
x(t) &= A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos(\omega(t - t_0)) \qquad \text{con } -\omega t_0 = \varphi_0 \\
v(t) &= -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \\
a(t) &= -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)
\end{aligned}$$

- A ampiezza del moto, $[A] = m$
- ω velocità angolare, $[\omega] = \frac{rad}{s}$
- φ_0 sfasamento iniziale, $[\varphi_0] = rad$
- si osserva che $[A] = m$, $[A\omega] = \frac{m}{s}$, $\left[A\omega^2\right] = \frac{m}{s^2}$

2.5 Moto circolare uniforme sul piano xy

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (A\cos(\omega t + \varphi_0),\ A\sin(\omega t + \varphi_0),\ 0) \\
\vec{v}(t) &= (-A\omega\sin(\omega t + \varphi_0),\ A\omega\cos(\omega t + \varphi_0),\ 0) \\
\vec{a}(t) &= \big(-A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0),\ -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0),\ 0\big) = -\omega^2\vec{r}(t)
\end{aligned}$$

- il vettore velocità è tangente alla circonferenza e perpendicolare al raggio
- il vettore accelerazione è perpendicolare a $\vec{v}$, opposto a $\vec{r}$ e diretto verso il centro
- l'accelerazione del moto è chiamata accelerazione centripeta

2.6 Moto vario

- la posizione è data da $\vec{r}(t)$
- la velocità è data da $\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dfrac{d}{dt}\,\vec{r}(t)$
- l'accelerazione è data da $\vec{a}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \dfrac{d}{dt}\,\vec{v}(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}\,\vec{r}(t)$
- la velocità è tangente alla traiettoria, ma non è detto che sia perpendicolare al vettore $\vec{r}$

3 Funzioni goniometriche (ripasso e proprietà)

3.1 Sviluppi di Taylor

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + o(\theta^5) \qquad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + o(\theta^4)$$

- le formule valgono solo se θ è un numero puro (non posso ad esempio sommare m e m^2).
- $[\theta] = rad$, si misura in radianti (numero puro), un radiante è il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza che sottende un angolo θ e il raggio della circonferenza.

3.2 Formule di Eulero

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

- le formule valgono solo se $\text{Im}(\sin\theta) = \text{Im}(\cos\theta) = 0$ per $\theta \in \mathbb{Q}$:
  ricordando che $\text{Re}(z) = \dfrac{z+z^*}{2}$, $\text{Im}(z) = \dfrac{z-z^*}{2i}$, si ha:
  $\text{Im}(\cos\theta) = \dfrac{1}{2i} \cdot \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} - \dfrac{e^{-i\theta}+e^{i\theta}}{2} \right) = \dfrac{0}{2i} = 0$
  $\text{Im}(\sin\theta) = \dfrac{1}{2i} \cdot \left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} - \dfrac{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}{2i} \right) = \dfrac{0}{2i} = 0$
- si osserva che $|\cos\theta| \leq 1$, $|\sin\theta| \leq 1$:
  $|\cos\theta| = \left| \dfrac{e^{i\theta)}+e^{-i\theta}}{2} \right| = \dfrac{1}{2}\left|e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right| \leq \dfrac{1}{2}\left|1\cdot e^{i\theta}\right| + \left|1\cdot e^{-i\theta}\right| = \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$
  $|\sin\theta| = \dots$

3.3 Derivate

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta \qquad \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\sin\theta = -\sin\theta \qquad \frac{d^2}{d\theta^2}\cos\theta = -\cos\theta$$

4 Vettori e versori

4.1 Definizione

Un vettore è un "segmento orientato", cioè definito da 3 proprietà: lunghezza, direzione e verso. Un vettore si indica con lettere minuscole come $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... Questa definizione ci permette di essere indipendenti dal sistema di coordinate di riferimento.

La lunghezza di un vettore è chiamata norma o modulo e si indica $||\vec{a}||$

4.2 Prodotto per uno scalare

Dati $\vec{a}$ vettore e λ scalare (numero reale), allora $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ è un vettore tale che:

- se $\lambda > 0$, $\vec{b}$ ha stessa direzione e verso di $\vec{a}$, con lunghezza λ volte quella di $\vec{a}$
- se $\lambda < 0$, $\vec{b}$ ha stessa direzione e verso opposto di $\vec{a}$, con lunghezza $-\lambda$ volte quella di $\vec{a}$
- se $\lambda = 0$, $\vec{b}$ è vettore nullo $\vec{0}$

4.3 Somma di vettori

Dati due vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ la loro somma è un vettore $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ definita dalla regola del parallelogramma. La somma ha le seguenti proprietà:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
- $\vec{a}(\lambda_1 + \lambda_2) = \vec{a}\lambda_1 + \vec{a}\lambda_2$
- $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$
- $\vec{a} - \vec{a} = \vec{a}(1 - 1) = \vec{0}$

4.4 Versori

- i versori sono vettori unitari (con lunghezza 1).
- sono definiti come $\vec{u_a} = \frac{1}{||\vec{a}||} \cdot \vec{a}$.
- una terna di assi è definita da 3 versori $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$.
- dato un vettore $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ si può esprimere come $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z$

4.5 Prodotto scalare

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che formano un angolo θ misurato in senso antiorario, il prodotto scalare tra due vettori è uno scalare definito come $\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \left|\left|\vec{b}\right|\right| \cos\theta$ con le seguenti proprietà:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$
- $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

Prodotto scalare tra versori

- $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1$
- $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_x = 0$

Prodotto scalare per componenti

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z) \cdot (b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = ||\vec{a}||^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad \Rightarrow \quad ||\vec{a}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

4.6 Prodotto vettore

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ con angolo θ misurato in senso antiorario, il prodotto vettore tra due vettori è un vettore definito come $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = ||\vec{a}|| \left|\left|\vec{b}\right|\right| \sin\theta \; \vec{u_c}$ con $\vec{u_c}$ versore perpendicolare al piano di $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

- se due vettori sono paralleli, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- l'orientamento di $\vec{u_c}$ è una scelta convenzionale secondo la "regola della mano destra"
- $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Prodotto vettore tra versori

- $\vec{u}_x \times \vec{u}_x = \vec{u}_y \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \times \vec{u}_z = 0$
- $\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z$
- $\vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x$
- $\vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y$

4.7 Derivata di vettore

- Dato un vettore $\vec{a}(t) = (a_x(t)\,\vec{u}_x + a_y(t)\,\vec{u}_y + a_z(t)\,\vec{u}_z)$, la sua derivata è definita come $\frac{d}{dt}\,\vec{a}(t) = \left(\frac{d}{dt}\,a_x(t)\,\vec{u}_x + \frac{d}{dt}\,a_y(t)\,\vec{u}_y + \frac{d}{dt}\,a_z(t)\,\vec{u}_z\right)$
- Dato un versore $\vec{u}(t)$, la sua derivata è definita come $\frac{d}{dt}\,\vec{u}(t) = \frac{d\,\theta(t)}{dt}\,\vec{u}_\perp(t)$ con $\vec{u}_\perp(t)$ versore perpendicolare a $\vec{u}(t)$ e con θ angolo spazzato da $\vec{u}(t)$ in Δt piccolo.

Sia $\vec{r}(t)$ vettore qualsiasi, la sua derivata è definita come

$$\frac{d}{dt}\,\vec{r}(t) = \frac{d\,||\vec{r}(t)||}{dt}\,\vec{u_r}(t) + ||\vec{r}(t)||\,\frac{d\,\theta(t)}{dt}\,\vec{u}_\perp(t)$$

5 Dinamica del punto materiale

5.1 Prima legge della dinamica - principio di inerzia

Se su un corpo non agisce alcuna forza, allora questo si muove a velocità costante $\vec{v}$.

5.2 Seconda legge della dinamica - legge di Newton

Definita $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantità di moto, ovvero la variazione della quantità di moto rispetto al tempo è pari alla risultante di tutte le forze che agiscono sul corpo:

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt}\,\vec{p}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t)$$

- la quantità di moto ha unità di misura $[\vec{p}] = kg \cdot \dfrac{m}{s}$
- la forza ha come unità di misura $\left[\vec{F}\right] = kg \cdot \dfrac{m}{s^2} = N$
- se $\vec{F} = \vec{0}$ allora $m\,\vec{a} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{v}$ costante
- la massa rappresenta un ostacolo al moto (più precisamente alla variazione della velocità), per questo viene chiamata massa inerziale.
- la forza si ricava sperimentalmente e in generale ha la forma $\vec{F}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$, ovvero può dipendere dalla posizione, dalla velocità o dal tempo

5.3 Terza legge della dinamica - principio di azione-reazione

Se un corpo A esercita una forza $\vec{F}_{AB}$ su un corpo B, allora B esercita una forza $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ su A

5.4 Sistemi di riferimento

Dati due sistemi di riferimento O e O', le equazioni del moto di un punto P rispetto a O' sono:

- $\vec{r'}(t) = \vec{r}(t) + \vec{r}_{OO'}(t)$
- $\vec{v'}(t) = \vec{v}(t) + \frac{d}{dt}\,\vec{r}_{OO'}(t)$
- $\vec{a'}(t) = \vec{a}(t) + \frac{d^2}{dt^2}\,\vec{r}_{OO'}(t)$

Sistemi di riferimento inerziali

Due sistemi di riferimento inerziali sono tali se si muovono con velocità costante (con accelerazione nulla) uno rispetto all'altro. Dati due sistemi di riferimento inerziali O e O' tali per cui in O vale $\vec{F} = m\,\vec{a}$, in O' vale $\vec{F'} = m\,\vec{a'}$ allora vale anche $\vec{F} = \vec{F'}$ in quanto $\vec{a} = \vec{a'}$, cioè $\dfrac{d^2}{dt^2}\,\vec{r}_{OO'}(t) = 0$.

5.5 Forza gravitazionale universale

La forza gravitazionale tra un corpo A di massa m_A e un corpo B di massa m_B vale:

$$\vec{F}_{AB} = -G_N \frac{m_A \cdot m_B}{||\vec{r}_{AB}||^2} \, \vec{u}_{AB}$$

- il segno $-$ indica che è attrattiva
- $||\vec{r}_{AB}||$ è la distanza tra i due corpi
- $G_N \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \, \dfrac{N \cdot m^2}{kg^2}$ è la costante di gravitazione universale di Newton

Massa gravitazionale

Le masse nella formula vengono dette masse gravitazionali in quanto sono considerate respondabili del moto di attrazione gravitazionale. Nel teorema della relatività generale verrà dimostrato che la massa inerziale e gravitazionale corrispondono.

Accelerazione gravitazionale e forza peso

Per il corpo A vale $||\vec{a}_A|| = -G_N \dfrac{m_B}{||\vec{r}_{AB}||^2}$

- l'accelerazione gravitazionale dipende solo dalla massa del corpo che attrae
- sulla superficie terrestre vale $g \approx 9.8 \, \dfrac{m}{s^2}$
- la forza di attrazione che esercita la Terra su un oggetto di massa m è detta forza peso $\vec{F}_p = m \, g \, \vec{u}_z$.

5.6 Forza elastica

La forza elastica esercita da una molla su un corpo di massa m è definita come:

$$\vec{F}_{el} = -k \, \Delta x \, \vec{u}_x$$

- definendo $x = 0$ il punto in cui la molla è a riposo per cui $\vec{F}_{el} = 0$, si ha $\vec{F}_{el} = -k \, x \, \vec{u}_x$
- è una forza di richiamo: tende a riportare la molla alla posizione di riposo, infatti agisce in verso opposto al vettore posizione per la presenza del segno $-$
- è una forza universale: non fa parte delle forze elementari, ma è la forma di tutte le forze di richiamo (localmente a $x = 0$)

5.7 Forza di reazione vincolare

La forza di reazione vincolare è esercitata da una superficie su un corpo appoggiato ad essa. È perpendicolare alla superficie e opposta alla somma delle forze entranti, definita come:

$$\vec{F}_\perp = \left|\left|\vec{F}_{\text{tot},\perp}\right|\right| \vec{u}_\perp = -\vec{F}_{\text{tot},\perp}$$

5.8 Forza di attrito radente

Forza di attrito esercitata dallo strisciamento di un corpo sulla superficie definita come:

$$\vec{F}_{\text{attrito radente}} = \begin{cases} -\vec{F}_\parallel & \text{se } \left|\left|\vec{F}_\parallel\right|\right| < \mu_s \left|\left|\vec{F}_\perp\right|\right| \\ -\mu_d \left|\left|\vec{F}_\perp\right|\right| \vec{u}_v & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- μ_s numero puro, coefficiente di attrito statico (per $\vec{v} = 0$)
- μ_d numero puro, coefficiente di attrito dinamico
- $\vec{u}_v$ versore con direzione e verso di $\vec{v}$
- generalmente $\mu_d < \mu_s$

5.9 Forza di attrito viscoso

Forza di attrito esercitata da un fluido su un corpo in movimento, definita come:

$$\vec{F}_{\text{attrito viscoso}} = -b\,\vec{v}$$

- b coefficiente di attrito viscoso, $[b] = \frac{kg}{s}$
- direzione opposta alla velocità e modulo proporzionale ad essa
- in presenza di solo attrito viscoso lungo $\vec{u}_x$ le equazioni del moto diventano:

  $$v_x(t) = v_0\, e^{-\frac{b}{m}t} \qquad x(t) = x_0 + \frac{m\,v_0}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

  il grafico della velocità è un'esponenziale con esponente decrescente, quello della posizione è un'esponenziale capovolta con asintoto orizzontale $x_\infty = x_0 + \frac{m\,v_0}{b}$

6 Trovare le equazioni del moto

6.1 Trovare le soluzioni del moto per una forza generica in 1D

Data una generica forza $\vec{F}_x$ lungo $\vec{u}_x$, l'equazione del moto dalla la seconda legge della dinamica è:

$$m\, a_x(t) = F_x(x(t), v(t), t) = -k\, x(t) - b\, v_x(t) + f(t) \quad \Rightarrow \quad a_x(t) = -\frac{k\, x(t)}{m} - \frac{b\, v_x(t)}{m} + \frac{f(t)}{m}$$

- $-k\, x(t)$ è la componente dipendente dalla posizione con k costante elastica
- $-b\, v_x(t)$ è la componente dipendente dalla velocità con b costante
- $f(t)$ è la componente dipendente dal tempo, può essere costante (es. mg) o periodica (es. risonanza)

Dall'equazione sopra si deriva l'equazione differenzale (1) e la sua omogenea associata (2):

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d}{dt} + \frac{k}{m}\right) x(t) = \frac{f(t)}{m} \tag{1}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d}{dt} + \frac{k}{m}\right) x(t) = 0 \tag{2}$$

Le soluzioni di (1) si scrivono nella forma:

$$X(t) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) + x_s(t)$$

- $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono soluzioni generiche della omogenea associata
- $x_s(t)$ è una soluzione particolare della differenzale
- λ_1 e λ_2 sono parametri liberi da determinare in funzione delle condizioni iniziali

6.2 Piano inclinato

Piano inclinato liscio

- le forze presenti sono $\vec{F}_P = -m\, g\, \vec{u}_z$ forza peso e $\vec{F}_R = \left|\left|\vec{F}_\perp\right|\right| \vec{u}_\perp$ forza di reazione vincolare
- si scompongono le forze lungo la direzione $\|$ e $\perp$ al piano e si applica la seconda legge della dinamica
- lungo $\vec{u}_\|$ si ha $a_\| = 0$, lungo $\vec{u}_\perp$ si ha $a_\perp = g\, \sin\theta$
- il moto è uniformemente accelerato con accelerazione minore di g
- per trovare le equazioni del moto in funzione dell'altezza si utilizza il teorema di conservazione dell'energia meccanica: $v(h_1) = \sqrt{{v_0}^2 + 2g(h_1 - h_0)})$

Piano inclinato scabro

- le forze presenti sono $\vec{F}_P = -m\, g\, \vec{u}_z$, $\vec{F}_R = \left|\left|\vec{F}_\perp\right|\right| \vec{u}_\perp$, $\vec{F}_A$ forza di attrito
- si scompongono le forze lungo la direzione $\|$ e $\perp$ al piano e si applica la seconda legge della dinamica
- per $\mu_s < \tan\theta$ il corpo non si muove
- lungo $\vec{u}_\|$ si ha $a_\| = 0$, lungo $\vec{u}_\perp$ si ha $a_\perp = g\, \sin\theta\, (1 - \mu_d \cot\theta)$
- il moto è uniformemente accelerato con accelerazione minore di g
- per trovare le equazioni del moto in funzione dell'altezza si utilizza il teorema di conservazione dell'energia meccanica: $v(h_1) = \begin{cases} \sqrt{{v_0}^2 + 2g(h_1 - h_0)(1 - \mu_d \cot\theta)}) & \text{per la discesa} \\ \sqrt{{v_0}^2 + 2g(h_1 - h_0)(1 + \mu_d \cot\theta)}) & \text{per la salita} \end{cases}$

6.3 Oscillatore armonico semplice

Moto di un corpo attaccatto all'estremità di una molla con costante elastica k che si muove lungo una direzione ($\vec{u}_x$), con $x = 0$ posizione di riposo della molla. La forza che agisce sul corpo è la forza elastica e dipende solo dalla posizione:

$$m\,a_x = -k\,x(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\,x(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

L'equazione del moto che soddisfa la differenziale sopra corrisponde a quella del moto armonico:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

- A ampiezza del moto, $[A] = m$
- ω velocità angolare, $[\omega] = \frac{rad}{s}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$
- φ_0 sfasamento iniziale, $[\varphi_0] = rad$

L'equazione del moto dipende dai due parametri A e φ_0 da definire in base alle condizioni iniziali, ad esempio si possono esprimere in funzione delle condizioni iniziali x_0 e v_0:

$$x_0 = A\cos\varphi_0 \qquad v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 \qquad \tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega\,x_0} \qquad A = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

L'equazione si può riscrivere come composizione di funzioni goniometriche esplicitando i due parametri dipendenti dalle condizioni iniziali:

$$x(t) = A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t) \quad v(t) = -A_1\omega\sin(\omega t) + A_2\omega\cos(\omega t) \quad a(t) = -A_1\omega^2\cos(\omega t) - A_2\omega^2\sin(\omega t)$$

- A_1 prima ampiezza del moto, $[A_1] = m$, con $A_1 = A\cos\varphi_0$
- A_2 seconda ampiezza del moto, $[A_2] = m$, con $A_2 = -A\sin\varphi_0$

6.4 Oscillatore armonico con l'azione della forza peso

Stessa situazione precedente, con moto lungo $\vec{u}_z$, considerando anche la forza peso del corpo. Le forze che agiscono sono quella elastica e la forza peso e dipendono ancora soltanto dalla posizione:

$$m\,a_z = -k\,z(t) - m\,g \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\,z(t) + \frac{k}{m}z(t) = -g$$

L'equazione del moto che soddisfa la differenziale sopra corrisponde a quella del moto armonico al netto di una costante dovuta alla presenza della forza peso:

$$z(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) + \Delta l \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{z}(t) = z(t) - \Delta l = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

- A ampiezza del moto, $[A] = m$
- ω velocità angolare, $[\omega] = \frac{rad}{s}$
- φ_0 sfasamento iniziale, $[\varphi_0] = rad$
- $\Delta l = -\dfrac{m\,g}{k}$ spostamento della posizione di equilibrio dovuta alla forza peso
- $\tilde{z}(t) = z(t) - \Delta l$ equazione della posizione introdotta traslando il punto di riposo della molla di Δl affiché $\tilde{z}(t) = 0$ per $z(t) = -\dfrac{m\,g}{k}$

6.5 Oscillatore armonico smorzato (con forza peso e attrito)

Analoga situazione precedente, con l'introduzione della forza di attrito viscoso con coefficiente di attrito b. L'equazione delle forze in gioco è:

$$m\,a_z = -k\,z(t) - m\,g - b\,v(t) \quad\Rightarrow\quad m\,a_z = -k\,\tilde{z}(t) - b\,v(t) \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2}{dt^2}\,\tilde{z}(t) + \frac{b}{m}\frac{d}{dt}\,\tilde{z}(t) + \frac{k}{m}\tilde{z}(t) = 0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d^2}{dt^2}\,\tilde{z}(t) + 2\gamma\frac{d}{dt}\,\tilde{z}(t) + \omega^2\tilde{z}(t) = 0$$

- $2\gamma = \dfrac{b}{m} > 0$ fattore di smorzamento (approfondito dopo)
- $\omega^2 = \dfrac{k}{m} > 0$ velocità oscillazione (approfondito dopo)

L'equazione che soddisfa la soluzione è del tipo $z_0\,e^{\lambda t}$ con $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ ed in base alla condizione di esistenza della radice si considerano i casi $\gamma > \omega$ (1) e $\gamma < \omega$ (2), :

1. per $\gamma > \omega$ la radice esiste nei reali e si ha:

$$\tilde{z}(t) = z_1\,e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)\,t} + z_2\,e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)\,t}$$

   - z_1, z_2 parametri da determinare in base alla situazione iniziale, per $t_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad \tilde{z}(0) = z_1 + z_2$
   - la componente $z_2\,e^{\lambda_2 t}$ va a 0 più velocemente rispetto a $z_1\,e^{\lambda_1 t}$, per cui il comportamento prevalente dipende dal secondo contributo
   - il grafico spazio-tempo è un'esponenziale con esponenti negativi crescenti, può essere simmetrica rispetto all'asse orizzontale in base al segno di $\tilde{z}(0)$

2. per $\gamma < \omega$ la radice ha soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\,\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}$:

$$\tilde{z}(t) = z_1\,e^{-\gamma t}\,e^{i\,\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t} + z_2\,e^{-\gamma t}\,e^{-i\,\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t} = e^{-\gamma t}\left(z_1\,e^{i\,\sqrt{|\gamma^2+\omega^2|}} + z_2\,e^{-i\,\sqrt{|\gamma^2+\omega^2|}}\right) \quad (1)$$

$$\begin{cases} \tilde{z}(t) = A\,e^{-\gamma t}\left(\frac{e^{i\,\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t} + e^{-i\,\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t}}{2}\right) = A\,e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{|\gamma^2+\omega^2|}\,t\right) & \text{per } z_1 = z_2 = \frac{A}{2} \\ \tilde{z}(t) = B\,e^{-\gamma t}\left(\frac{e^{i\,\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t} - e^{-i\,\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t}}{2i}\right) = B\,e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{|\gamma^2+\omega^2|}\,t\right) & \text{per } z_1 = -z_2 = \frac{B}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\tilde{z}(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos\left(\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t\right)\right) \quad \text{per } z_1 = \frac{A}{2} + \frac{B}{2i},\;\; z_2 = \frac{A}{2} - \frac{B}{2i} \quad (3)$$

$$\tilde{z}(t) = e^{-\gamma t}\,C\cos\left(\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}\,t\right) \quad \text{per } A = C\cos\varphi_0,\;\; B = C\sin\varphi_0 \quad (4)$$

   - eq. (1) si ottiene sostituendo le soluzioni $\gamma_{1,2}$ per i parametri $z_{1,2}$
   - eq. (2) si ottiene in funzione dei parametri A e B: gli esponenziali complessi si riconducono alle formule di Eulero per seni e coseni
   - eq. (3) si uniscono le equazioni precedenti con A e B al posto di $z_{1,2}$
   - eq. (4) si utilizza C e φ_0 al posto di A e B
   - si osserva che il moto è armonico, esponenzialmente smorzato, in quanto l'ampiezza di riduce esponenzialmente
   - il periodo di oscillazione vale $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}}$

3. il caso $\gamma = \omega$ non viene trattato perché non capiterà mai nella realtà

6.6 Risonanza e oscillatore armonico

È un fenomeno fisico per cui un corpo si muove con una specifica legge oraria (lungo una direzione) dovuta a:

- forza di richiamo (es. elastica) $F_{el}(\tilde{z}(t)) = -k\,\tilde{z}(t)$
- attrito o smorzamento $F_{attr}(v(t)) = -b\,v(t)$
- forza esterna periodica, detta forzante $F_{ext}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$

La somma delle forze è $F = -k\,\tilde{z}(t) - b\,v(t) + F_0 \sin(\Omega t)$ per cui:

$$m\,a_z(t) = -k\,\tilde{z}(t) - b\,v(t) + F_0 \sin(\Omega t) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega^2\right)\tilde{z}(t) = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

La soluzione è una combinazione lineare di $z_s(t) = A\sin(\omega t + \Phi)$ soluzione particolare e $B\,e^{\lambda_1 t} + C\,e^{\lambda_2 t}$ soluzioni dell'omogenea associata:

$$\tilde{z}(t) = A\sin(\Omega t + \Phi) + B\,e^{\lambda_1 t} + C\,e^{\lambda_2 t}$$

$$\tan\Phi = -\frac{2\,\gamma\,\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \qquad A = \frac{F_0}{m\,\sqrt{(\omega^2+\Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \qquad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad 2\gamma = \frac{b}{m} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

- A, Φ parametri fissati in termini di ω^2, γ, $\frac{F_0}{m}$, Ω
- B, C determinati in funzione di z_0 e v_0
- per $\lim_{t\to+\infty} B\,e^{\lambda_1 t} + C\,e^{\lambda_2 t} = 0$ per cui il moto è determinato soltanto da $\tilde{z}(t) = A\sin(\Omega t + \Phi)$ e dipende solamente da A e Φ
- studiando A per $\frac{F_0}{m}$ fissato:
  - per γ (smorzamento) grande si ha $A \approx \dfrac{F_0}{m(2\gamma\Omega + \text{errore})}$ per cui il grafico ($A(\Omega)$ in funzione di Ω) rappresenta un ramo di iperbole: se la frequeza del forzante è bassa, lo sarà anche l'ampiezza del movimento, viceversa se la frequenza è alta, l'ampiezza sarà minore
  - per γ piccolo si ha sempre un ramo di iperbole, con un punto di massimo quando $\omega = \Omega$ ovvero quando il denominatore è prossimo allo 0: se la frequenza del forzante è vicina a quella del moto armonico, il moto armonico e il moto generato dal forzante vanno in interferenza costruttiva (risonanza) e $A_{max} \approx \dfrac{F_0}{2\,m\,\gamma\,\omega}$
- studiando Φ:
  - se $\Omega \approx \omega$ si ha $\tan\Phi \approx \infty$ per cui $\Phi \approx 90°$, cioè quando la frequenza del forzante e del moto armonico sono simili si ha ampiezza massima A_{max} e lo sfasamento tra il forzante e il moto è di circa 90°, ovvero si ha quadratura di fase
  - se $\Omega \gg \omega$ si ha $\tan\Phi \approx \frac{2\gamma}{\Omega}$ per cui $\Phi \approx 0°$, cioè quando la frequenza del forzante è maggiore di quella del moto, lo sfasamento tra forzante e moto è circa 0° e il moto si dice in fase
- quando si parla di grandezze piccole, si indende trascurabili rispetto alle altre (per ordine di grandezza circa 10/100)

6.7 Velocità limite

Corpo in caduta libera soggetto alla forza peso e alla forza di attrito viscoso con equazione delle forze:

$$m\, a_z(t) = -m\, g - b\, v_z \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\, v_z(t) + \frac{b}{m} v_z(t) = -g$$

Combinando la soluzione dell'omogenea $v_z(t) = v_0\, e^{-\frac{b}{m}t}$ e la soluzione particolare della differenziale $v_{zs}(t) = -\frac{mg}{b}$ (e integrandole per trovare la posizione) si ottengolo le equazioni:

$$v_z(t) = -\frac{mg}{b} + v_0\, e^{-\frac{b}{m}t}$$
$$z(t) = z_0 - \frac{mg}{b}t + v_0 \frac{m}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

- studiando il moto per $t \to +\infty$ si osserva che $v_\infty(t) = v_{\text{limite}} = -\frac{mg}{b}$ cioè si ha una velocità limite costante e la posizione diventa direttamente proporzionale al tempo $z_\infty(t) = z_0 + v_0 \frac{m}{b} - \frac{mg}{b}t$
- il tempo di arrivare a velocità prossime a quella limite è detto transiente

6.8 Fili in tensione

Applicando una forza ad un filo ideale (inestensibile e di massa trascurabile), tale forza si propaga lungo il filo e si scarica sull'altra estremità del filo. Le forze possono cambiare direzione se il filo cambia direzione.

Macchina di Atwood

Nell'esempio della macchina di Atwood (detta carrucola per gli amici) con due corpi A e B con masse m_1 e m_2 l'equazione delle forze lungo $\vec{u}_z$ sono:

$$m_1\, a_1(t) = -m_1 g + T \qquad m_2\, a_2(t) = -m_2 g + T$$

- T è la tensione applicata al filo
- $a_1(t) = -a_2(t) = a(t)$ è la stessa per entrambi i corpi (a meno di un segno) in quanto legati dal filo
- il segno è dovuto al fatto che uno si muoverà verso l'alto, l'altro verso il basso ed è stato scelto per convenzione positivo per il corpo A

Risolvendo le equazioni, si ottiene un moto uniformemente accelerato con accelerazione $a(t)$ costante che vale $a_z = g\, \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$ per cui le accelerazioni a_1, a_2 e la tensione T valgono:

$$a_1(t) = g\, \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, \vec{u}_z \qquad a_2(t) = g\, \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1}\, \vec{u}_z \qquad T = 2g\, \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Si osserva le soluzioni sono simmetriche per i due corpi, infatti il problema è simmetrico anche nella realtà

Moto circolare con filo

Dato un oggetto che si muove di moto circolare, vincolato al centro da un filo ideale, si hanno:

$$\vec{r}(t) = R\, \vec{u}_r(t) \quad \vec{v}(t) = R\, \omega(t)\, \vec{u}_\perp(t) \quad \vec{a}(t) = R\, \alpha(t)\, \vec{u}_\perp() - R\, \omega^2(t)\, \vec{u}_r(t) \quad \omega(t) = \frac{d}{dt}\, \theta(t),\ \alpha(t) = \frac{d^2}{dt^2}\, \theta(t)$$

La tensione del filo è data dal prodotto della massa per l'accelerazione centripeta:

$$\vec{T} = m\, \vec{a}(t) = R\, \alpha(t)\, \vec{u}_\perp(t) - R\, \omega^2(t)\, \vec{u}_r(t) \qquad \text{per } \alpha(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{T} = -m\, R\, \omega^2\, \vec{u}_r(t)$$

- $\alpha(t)$ accelerazione angolare, $\omega(t)$ velocità angolare, R raggio del moto
- $\vec{u}_r$ versore con stesso orientamento di R, $\vec{u}_\perp$ versore perpendicolare a $\vec{u}_r$
- il segno $-$ in $\vec{T}$ è dato dal fatto che la tensione tiene l'oggetto vincolato al centro

6.9 Pendolo semplice

Corpo di massa m attaccato ad un filo ideale che oscilla sul piano $\vec{u}_x - \vec{u}_z$ ha equazioni del moto:

$$m\,\vec{a}(t) = -mg\,\vec{u}_z - T\,\vec{u}_r(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} mR\,\dfrac{d^2}{dt^2}\,\theta(t) = -mg\sin(\theta(t)) & \text{lungo } \vec{u}_\perp(t) \\ -mR\,\omega^2 = mg\cos(\theta(t)) + T & \text{lungo } \vec{u}_r(t) \end{cases}$$

- la formula sopra usa (dal moto circolare) $\vec{a}(t) = R\,\frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t)\,\vec{u}_\perp(t) - R\,\omega^2\,\vec{u}_r(t)$
- dalla seconda equazione si ottiene $\vec{T} = -mg\cos\theta(t)\,\vec{u}_r(t) - mR\,\omega^2\,\vec{u}_r(t)$
- la risultante delle forze lungo $\vec{u}_\perp$ ha la forma di una forza di richiamo $F = -kf(\theta(t))$, anche se non dipende linearmente dall'angolo θ
- per ottenere le equazioni del moto, è necessario risolvere la differenziale

Non è possibile risolvere la differenziale in termini di funzioni elementari, ma si osserva che per angoli piccoli ($\theta < 1/4$ rad $\approx 15°$), dallo sviluppo di Taylor si ha $\sin\theta(t) = \theta(t) +$ errore trascurabile, per cui:

$$mR\,\frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t) = -mg\sin(\theta(t)) \quad \overset{\theta \text{ piccoli}}{\Rightarrow} \quad \frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t) = -\frac{g}{R}\theta(t) \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_{\max}\cos(\Omega t + \varphi_0)$$

- $\theta_{\max}$ ampiezza massima del moto
- φ_0 è lo sfasamento iniziale delle oscillazioni
- Ω frequenza delle piccole oscillazioni, $\Omega^2 = \dfrac{g}{R}$
- il periodo del pendolo delle piccole oscillazioni vale $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$
- ω $_{\text{velocità angolare dal moto circolare}} = \frac{d}{dt}\,\theta(t) \neq \Omega$ $_{\text{frequenza piccole oscillazioni dal moto armonico}} = \sqrt{\frac{g}{R}}$

6.10 Pendolo conico

Corpo appeso ad un filo ideale che si muove di moto circolare (pendolo lungo una circonferenza)

$$m\,a_z(t)\,\vec{u}_z + mR\frac{d^2}{dt^2}\,\theta(t)\vec{u}_\perp(t) - mR\left(\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right)^2\,\vec{u}_r(t) = -mg\,\vec{u}_z + T\cos\alpha\,\vec{u}_z - T\sin\alpha\,\vec{u}_r(t)$$

Scomponendo lungo le componenti si ha:

- lungo $\vec{u}_z$: $\quad m\,a_z = -mg + T\cos\alpha \qquad$ per ipotesi $v_z = a_z = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$
- lungo $\vec{u}_\perp$: $\quad mR\,\dfrac{d^2}{dt^2}\,\theta(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^2}{dt^2}\,\theta(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ il corpo ha velocità angolare costante
- lungo $\vec{u}_r$: $\quad -mR\omega^2 = -T\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \dfrac{T\sin\alpha}{mR} = \dfrac{\tan\alpha}{R}$

Il moto è circolare uniforme con velocità angolare costante $\omega = \sqrt{\dfrac{T\sin\alpha}{mR}} = \sqrt{\dfrac{\tan\alpha}{R}}$
L'equazione della posizione è $\vec{r}(t) = -l\cos\alpha\,\vec{u}_z + R\cos(\omega t + \varphi_0)\,\vec{u}_x + R\sin(\omega t + \varphi_0)\,\vec{u}_y$

- l lunghezza del filo
- α angolo tra il filo e la perpendicolare
- ω velocità angolare
- R raggio del moto $R = l\sin\alpha$

6.11 Curve sopraelevate (paraboliche)

Corpo che si muove in moto circolare su una guida circolare a parabolica con inclinazione θ dall'orizzontale (il corpo non cambia quota durante il moto):

$$m\,\vec{a} = \vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{vincolare}} \quad \Rightarrow \quad -m\,a_{\text{centripeta}}\,\vec{u}_r = -mg\,\vec{u}_z + F_V\cos\theta\,\vec{u}_z + F_V\sin\theta\,\vec{u}_r$$

Scomponendo lungo le componenti si ha:

- lungo $\vec{u}_z$: $\quad 0 = -mg + F_V\cos\theta \quad \Rightarrow \quad F_V = \dfrac{mg}{\cos\theta}$
- lungo $\vec{u}_r$: $\quad m\,a_{\text{centripeta}} = F_V\sin\theta \quad a_{\text{centripeta}} = g\tan\theta$

Dal moto circolare uniforme $a_{\text{centripeta}} = \dfrac{mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \dfrac{v^2}{Rg}, \quad v = \sqrt{Rg\tan\theta}$

Un corpo, per procedere in moto circolare uniforme, deve avere una forza centripeta che lo fa rimanere in traiettoria e non lo fa partire per la tangente. Questa forza può essere (lista incompleta):

- una tensione (dovuta ad un filo)
- la forza di attrito dell'oggetto con il suolo (ad esempio degli pneumatici con l'asfalto)
- la reazione vincolare del piano (se l'oggetto corre su una guida circolare)

7 Lavoro ed energia

7.1 Definizione

Per un punto materiale che compie una traiettoria $\Gamma = \{\vec{\gamma}(\tau),\ \tau \in [t_0, t_1]\}$ soggetto ad una generica forza $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{\gamma}(\tau),\ \frac{d}{d\tau}\vec{\gamma}(\tau),\ \tau\right)$, il lavoro di $\vec{F}$ lungo Γ è:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\left(\vec{\gamma}(\tau),\ \frac{d}{d\tau}\vec{\gamma}(\tau),\ \tau\right) \cdot \frac{d}{d\tau}\vec{\gamma}(\tau)\ d\tau$$

Il lavoro ha le seguenti proprietà:

0.1. il lavoro è un numero e non un vettore $W_{\vec{F}}[\Gamma] \in \mathbb{R}$

0.2. $\vec{\gamma}(\tau)$ è una curva generica e non necessariamente la legge oraria del corpo per $\vec{F}$, se però vale che $m\,\frac{d^2}{dt^2}\vec{\gamma}(t) = \vec{F}\left(\vec{\gamma}(t),\ \frac{d}{dt}\vec{\gamma}(t),\ t\right)$ allora $\vec{\gamma}(t)$ è la legge oraria e la chiameremo $\vec{r}(t)$

1. Se una forza $\vec{F}$ è la somma di due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, allora $W_{\vec{F}}[\Gamma] = W_{\vec{F}_1}[\Gamma] + W_{\vec{F}_2}[\Gamma]$
2. Se la traiettoria Γ è concatenazione di curve Γ_1 e Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$), allora $W_{\vec{F}}[\Gamma] = W_{\vec{F}}[\Gamma_1] + W_{\vec{F}}[\Gamma_2]$
3. Se $\vec{F}$ non dipende dal tempo $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{\gamma}(\tau),\ \frac{d}{d\tau}\vec{\gamma}(\tau),\ \tau\right)$, allora $W_{\vec{F}}[\Gamma]$ dipende solo dalla traiettoria $\{\vec{\gamma}(\tau),\ \tau \in [t_0, t_1]\}$, ma non dalla parametrizzazione della curva (ovvero dal modo di percorrenza come velocità, accelerazione, ...)
4. Se $\vec{\gamma}$ è la traiettoria $\vec{r}(t)$, allora $W_{\vec{F}}[\vec{r}(t)] = \Delta E_k = E_k(\vec{v}_1) - E_k(\vec{v}_0)$ con $E_k = \frac{1}{2} m\,||\vec{v}||^2$, ovvero il lavoro è uguale alla variazione di energia cinetica E_k
5. il lavoro e l'energia cinetica si misurano in $[W] = [E_k] = N \cdot m = J$ (joule)

7.2 Lavoro della forza peso

Sia $\vec{F}_P = -mg\ \vec{u}_z$ e sia $\vec{\gamma}(\tau)$ una curva da $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, il lavoro della forza peso lungo Γ è definito come:

$$W_{\vec{F}_P}[\Gamma] = \int_{t_0}^{t_1} -mg\ \vec{u}_z \cdot \frac{d}{d\tau}\vec{\gamma}(\tau)\ d\tau = -mg\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\tau}\gamma_z(\tau)\ d\tau = -mg\int_{z_0}^{z_1} d\gamma_z = -mg(z_1 - z_0)$$

7.3 Lavoro della forza elastica

Sia $\vec{F}_{el} = -kr\vec{u}_r$ (in generale $\vec{F}_{el} = -k(r - r_0)\vec{u}_r$), il lavoro della forza elastica lungo Γ è:

$$W_{\vec{F}_P}[\Gamma] = \int_{t_0}^{t_1} -kr\ \vec{u}_r(\tau) \cdot \frac{d}{d\tau}\vec{\gamma}(\tau)\ d\tau = -k\int_{t_0}^{t_1} \gamma_r\vec{u}_r \cdot \left(\frac{d}{d\tau}\gamma_r(\tau)\ \vec{u}_r + \gamma_r(\tau)\frac{d}{d\tau}\theta(\tau)\ \vec{u}_\perp\right)\ d\tau =$$
$$= -k\int_{t_0}^{t_1} \gamma_r(\tau)\,\frac{d}{d\tau}\gamma_r(\tau)\ d\tau = -k\int_{r_0}^{r_1} \gamma_r\ d\gamma_r = -k\left[\frac{1}{2}\,{\gamma_r}^2\right]_{r_0}^{r_1} = -\frac{k}{2}\ \left({r_1}^2 - {r_0}^2\right)$$

Si osserva che $\vec{r} = r\ \vec{u}_r = \gamma_r\ \vec{u}_r = \vec{\gamma}$ e che $\frac{d}{d\tau}\vec{\gamma}(\tau) = \frac{d}{d\tau}\gamma_r(\tau)\ \vec{u}_r + \gamma_r(\tau)\frac{d}{d\tau}\theta(\tau)\ \vec{u}_\perp$

7.4 Lavoro della forza di reazione vincolare

Sia $\vec{F}_R = F_R \vec{u}_z$ reazione vincolare su un piano (x, y) e $\vec{\gamma}(\tau) = \gamma_x(\tau)\vec{u}_x + \gamma_y(\tau)\vec{u}_y$, il lavoro della forza vincolare è:

$$W_{\vec{F}_R}[\Gamma] = \int_{t_0}^{t_1} F_R \, \vec{u}_z \cdot \left(\frac{d}{d\tau} \gamma_x(\tau) \, \vec{u}_x + \frac{d}{d\tau} \gamma_y(\tau) \, \vec{u}_y \right) = 0 \qquad (\vec{u}_z \cdot \vec{u}_x = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_y = 0)$$

7.5 Lavoro della forza di attrito radente

Sia $\vec{F}_A = -\mu_d F_\perp \, \vec{u}_v$ forza di attrito dinamico, il lavoro compiuto dalla forza è:

$$W_{\vec{F}_A}[\Gamma] = \int_{t_0}^{t_1} -\mu_d F_\perp \, \vec{u}_v \cdot \frac{d}{d\tau} \vec{\gamma}(\tau) \, d\tau = -\mu_d F_\perp \int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_v \cdot \frac{d}{d\tau} ||\vec{\gamma}(\tau)|| \, \vec{u}_v \, d\tau = -\mu_d F_\perp \int_{t_0}^{t_1} ||\vec{\gamma}(\tau)|| \, d\tau =$$
$$= -\mu_d F_\perp \mathcal{L}(\Gamma)$$

Si osserva che $\dfrac{d}{d\tau} \vec{\gamma}(\tau) = \vec{v}$, per cui $\vec{u}_v = \vec{u}_{\frac{d \, \vec{\gamma}(\tau)}{d\tau}}$, inoltre $\mathcal{L}(\Gamma)$ è la lunghezza della curva Γ, per cui il lavoro dipende dal percorso compiuto tra i due estremi r_0 e r_1.

7.6 Lavoro di una generica forza centrale

Data una forza centrale $\vec{F}_C = -f(||\vec{\gamma}||)\vec{u}_\gamma$, (es. forza di gravitazione universale, forza elastica, ...), il lavoro è definito come:

$$\begin{aligned}
W_{\vec{F}_C}[\Gamma] &= \int_{t_0}^{t_1} f(||\vec{\gamma}(\tau)||) \, \vec{u}_\gamma \cdot \left(\frac{d}{d\tau} \, ||\vec{\gamma}(\tau)|| \, \vec{u}_\gamma + ||\vec{\gamma}(\tau)|| \, \frac{d}{dt} \, \theta(\tau) \, \vec{u}_\perp \right) \, d\tau = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} f(||\vec{\gamma}(\tau)||) \, \frac{d}{d\tau} \, ||\vec{\gamma}(\tau)|| \, d\tau = \int_{||\vec{\gamma}(t_0)||}^{||\vec{\gamma}(t_1)||} f(||\vec{\gamma}||) \, d \, ||\vec{\gamma}|| = \\
&= [V(||\vec{\gamma}||)]_{||\vec{\gamma}_i||}^{||\vec{\gamma}_f||} = V(||\vec{\gamma}_f||) - V(||\vec{\gamma}_i||)
\end{aligned}$$

Per forza elastica $V(||\vec{\gamma}||) = -\dfrac{k}{2} \, ||\vec{\gamma}||^2$, per la forza gravitazionale $V(||\vec{\gamma}||) = -G\dfrac{m_1 \, m_2}{||\vec{\gamma}||}$.

7.7 Lavoro lungo un circuito chiuso

Sia Γ un circuito chiuso costituito dalla concatenazione di due curve Γ_1 e Γ_2, il lavoro lungo il circuito chiuso di una forza $\vec{F}$ vale:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma] = W_{\vec{F}}[\Gamma_1] + W_{\vec{F}}[\Gamma_2]$$

Se la forza dipende solo dalla posizione iniziale e finale, il lavoro diventa:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma] = W_{\vec{F}}[\Gamma_1] + W_{\vec{F}}[\Gamma_2] = \int_{t_0}^{t_1} f(\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_0} f(\tau) d\tau = 0$$

Per indicare il lavoro lungo un circuito chiuso si utilizza l'integrale:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{\text{chiuso}}] = \oint \vec{F} \left(\vec{\gamma}(\tau), \; \frac{d}{d\tau} \vec{\gamma}(\tau), \; \tau \right) \cdot \frac{d}{d\tau} \vec{\gamma}(\tau) \, d\tau$$

Per le forze che dipendono solo dalla posizione iniziale e finale, si ha:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{\text{chiuso}}] = \oint \vec{F} \left(\vec{\gamma}(\tau), \; \frac{d}{d\tau} \vec{\gamma}(\tau), \; \tau \right) \cdot \frac{d}{d\tau} \vec{\gamma}(\tau) \, d\tau = 0$$

8 Forze conservative e non conservative

8.1 Definizione

Una forza si dice conservativa se, per ogni circuito chiuso, il lavoro di tale forza calcolato lungo esso è nullo, cioè se vale:

$$\oint \vec{F}\left(\vec{\gamma}(\tau),\ \frac{d}{d\tau}\vec{\gamma}(\tau),\ \tau\right) \cdot \frac{d}{d\tau}\vec{\gamma}(\tau)\, d\tau = 0$$

In altre parole, una forza è conservativa se non dipende dalla traiettoria, se non per la posizione iniziale e quella finale.

8.2 Energia potenziale

Se una forza è conservativa, si può definire l'energia potenziale della forza rispetto ad un punto $\vec{r}_A$ come il lavoro compiuto dalla forza lungo il percorso Γ_{OA} da $\vec{r}_0 = O$ (origine) a $\vec{r}_A$:

$$E_p(\vec{r}_A) = -W_{\vec{F}_C}[\Gamma_{OA}]$$

- l'energia potenziale dipende dalla scelta dell'origine degli assi (punto $\vec{r}_0 = O$)
- la differenza di energia potenziale non dipende dalla scelta dell'origine
- l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva che non dipende da $\vec{r}_A$, bensì dalla scelta dell'origine degli assi (punto $\vec{r}_0 = O$)

8.3 Conservazione dell'energia meccanica totale

Data una forza conservativa si ha che:

$$W_{\vec{F}_C}[\Gamma_{AB}] = \begin{cases} E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) & \text{dalla def. di } E_p \\ E_k(\vec{v}_B) - E_k(\vec{v}_A) & \text{se } \vec{\gamma}(t) = \vec{r}(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_p(\vec{r}_A) + E_k(\vec{v}_A) = E_p(\vec{r}_B) + E_k(\vec{v}_B)$$

La quantità $E_{\text{tot}} = E_p(\vec{r}) + E_k(\vec{v})$ è chiamata energia meccanica totale e per una forza conservativa, rimane costante lungo il moto.

Quando una forza è conservativa e quando no

- una forza che dipende da velocità e tempo non è conservativa (es. forza di attrito)
- una forza che dipende dalla posizione si chiama posizionale, ma non tutte le forze posizionali sono conservative
- le forze posizionali che sono anche conservative si dividono in:
    - forze in una dimensione nella forma $\vec{F}(\vec{r}) = f(x)\,\vec{u}_x,\ f(y)\,\vec{u}_y,\ f(z)\,\vec{u}_z$ (es. forza peso)
    - forze centrali nella forma $\vec{F}(\vec{r}) = f(||\vec{r}||)\,\vec{u}_r$ (es. forza elastica o forza gravitazionale)

Potenziali da ricordare

$$\begin{aligned} &\vec{F}_{\text{peso}} : E_p = mgz && E_p = 0 \text{ per } z = 0 \\ &\vec{F}_{\text{elastica}} : E_{\text{el}} = \frac{1}{2}k\,||\vec{r}||^2 && E_{\text{el}} = 0 \text{ per } \vec{r} = 0 \\ &\vec{F}_{\text{gravitazionale}} : E_G = -G\,\frac{m_1\,m_2}{||\vec{r}||} && E_G = 0 \text{ per } ||\vec{r}|| \to \infty \end{aligned}$$

Potenziali in 1D

Supponiamo di avere una forza $\vec{F}(\vec{r}) = f(x)\,\vec{u}_x$, con $E_p(x) = -f(x) + \text{costante}$ (con $-F(x) = \frac{d}{dx}\,E_p(x)$). Inoltre sappiamo che $E_{\text{tot}} = E_p(x) + E_k(v_x)$ si conserva.

Supponiamo di avere un punto materiale in x_0 con $v_0 = 0$ soggetto alla forza $\vec{F}$ definita prima, per un punto x generico vale $E_p(x) + \frac{1}{2}\,mv^2 = E_p(x_0)$ da cui $v^2 = \frac{2}{m}\,(E_p(x_0) - E_p(x_1))$. Dato che $v^2 > 0$, allora $E_{\text{tot}} = E_p(x_0) > E_p(x)$ per cui, se l'energia meccanica totale si conserva, l'energia potenziale per un generico punto x non può mai superare l'energia meccanica totale del sistema.

Se il grafico dell'energia potenziale in funzione di x è una specie di parabola rivolta verso l'alto, il punto x sarà sempre compreso tra x_0 e il corrispettivo punto x_0' sul ramo opposto alla stessa quota E_p di x_0. In generale:

- se $\lim\limits_{x\to\pm\infty} E_p(x) = +\infty$ il moto sarà limitato in un intervallo $[x_{\min}, x_{\max}]$
- se $\lim\limits_{x\to\pm\infty} E_p(x) = -\infty$ il moto sarà accelerato verso $\pm\infty$ (repulsore armonico)
- se $\lim\limits_{x\to\pm\infty} E_p(x) = E_\infty > E_p(x_0)$ il moto sarà limitato
- se $\lim\limits_{x\to\pm\infty} E_p(x) = E_\infty < E_p(x_0)$ il moto andrà ad infinito a velocità costante $v^2 = \frac{2}{m}\,(E_p(x_0) - E_\infty)$

Dato che $F(x) = -\frac{d}{dx}\,E_p(x)$, se si conosce il grafico di $E_p(x)$ in funzione di x, per trovare i valori della posizione per cui si ha maggiore forza agente, si devono cercare i punti in cui la retta tangente è più pendente, ovvero i punti in cui la derivata prima è maggiore (in valore assoluto).

8.4 Potenza

La potenza P espressa da una forza $\vec{F}$ in un tempo Δt è data dalla formula

$$P_{\text{media}} = \frac{W_{\vec{F}}[\Gamma_{\text{moto}}]}{\Delta t} \qquad\qquad P_{\text{istantanea}} = \frac{d}{dt}\,W_{\vec{F}}[\Gamma_{\text{moto}}]$$

L'unità di misura è il watt: $[P] = [P_{\text{media}}] = \dfrac{J}{s} = W$

Alcune volte si usa $1\ kWh = 1000\ W \cdot 3600\ sec = 3.6 \cdot 10^6\ J$

8.5 Gradiente di una forza

Sia $\vec{F}(\vec{r})$ una forza conservativa, allora (per un'appropriata curva Γ, per un'appropriata funzione $E_p(\vec{r})$, per $\vec{r}_0 = \vec{\gamma}(t_0)$ e per $\vec{r}_1 = \vec{\gamma}(t_1)$), si ha:

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}}[\Gamma] &= \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{\gamma}(\tau)) \cdot \frac{d}{d\tau}\,\vec{\gamma}(\tau)\;d\tau = E_p(\vec{r}_0) - E_p(\vec{r}_1) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} -\frac{d}{d\tau}\,E_p(\vec{\gamma}(t))\,d\tau = E_p(\vec{r}_0) - E_p(\vec{r}_1) \end{aligned}$$

Per definizione di derivate parziali e di gradiente, si ottiene che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\,E_p(\vec{\gamma}(\tau)) &= \frac{\partial}{\partial\gamma_x}E(\vec{\gamma}(\tau)) \cdot \frac{d}{d\tau}\,\gamma_x(\tau) + \frac{\partial}{\partial\gamma_y}E(\vec{\gamma}(\tau)) \cdot \frac{d}{d\tau}\,\gamma_y(\tau) + \frac{\partial}{\partial\gamma_z}E(\vec{\gamma}(\tau)) \cdot \frac{d}{d\tau}\,\gamma_z(\tau) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\gamma_x}E(\vec{\gamma}(\tau)) + \frac{\partial}{\partial\gamma_y}E(\vec{\gamma}(\tau)) + \frac{\partial}{\partial\gamma_z}E(\vec{\gamma}(\tau))\right) \cdot \frac{d}{d\tau}\,\vec{\gamma}(\tau) = \\ &= \vec{\nabla}E_p(\vec{\gamma}(t)) \cdot \frac{d}{d\tau}\,\vec{\gamma}(\tau) \end{aligned}$$

Dato che $W_{\vec{F}}[\Gamma] = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} -\frac{d}{d\tau}\,E_p(\vec{\gamma}(t))\,d\tau = \int_{t_0}^{t_1} -\vec{\nabla}E_p(\vec{\gamma}(t)) \cdot \frac{d}{d\tau}\,\vec{\gamma}(\tau) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{\gamma}(\tau)) \cdot \frac{d}{d\tau}\,\vec{\gamma}(\tau)\;d\tau$
si ha che per tutte le forze conservative vale:

$$\vec{F}(\vec{\gamma}(\tau)) = -\vec{\nabla}E_p(\vec{\gamma}(t))$$

In questo modo se si conosce l'equazione dell'energia potenziale, si può risalire alla rispettiva forza conservativa eseguendo le derivate parziali per ogni componente (per $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$).

9 Quantità conservate

Per definizione le quantità conservate sono quelle quantità, il cui integrale lungo il moto ci dà una variazione di una quantità semplice.

9.1 Lavoro - teorema dell'energia cinetica

Il lavoro (integrale della forza per la velocità rispetto al tempo) lungo il moto è pari alla variazione di energia cinetica.

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{\text{moto}}] = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{\gamma}(\tau)) \cdot \frac{d}{d\tau}\gamma(\tau)\, d\tau = \Delta E_k \qquad\qquad \frac{d}{dt}E_k = \vec{F}\cdot\vec{v} = W$$

9.2 Impulso - teorema dell'impulso

L'impulso di una forza (integrale della forza rispetto al tempo) ci da la variazione della quantità di moto.

$$\vec{I}_{\vec{F}}[\Gamma_{\text{moto}}] = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{\gamma}(\tau))\, d\tau = \Delta\vec{p} \qquad\qquad \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}$$

9.3 Momento angolare - teorema del momento angolare

L'integrale del momento di una forza rispetto al tempo ci da la variazione del momento angolare.

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}[\Gamma_{\text{moto}}] = \int_{t_0}^{t_1} \vec{\gamma}(\tau)\times\vec{F}(\vec{\gamma}(\tau))\, d\tau = \Delta\vec{L} = \Delta(\vec{r}\times m\vec{v}) \qquad\qquad \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{r}\times\vec{F} = M$$

9.4 Osservazioni sulla conservazione del momento angolare

- per una forza centrale (elastica o gravitazionale universale) il momento angolare si conserva, ovvero $\frac{d}{dt}\vec{L} = 0$ (perché $\vec{r}$ e $\vec{F}$ sono paralleli e il loro prodotto vettore è nullo).
- il moto di un punto materiale soggetto ad una forza centrale è sempre contenuto su un piano perché $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono sempre sul piano perpendicolare a $\vec{L}$, che non cambia.

10 Trasformazioni tra sistemi di riferimento

Siano dati un punto P e due sistemi di riferimento:

- O con origine in O e assi $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$
- O' con origine in O' e assi $\vec{u}_{x'}(t)$, $\vec{u}_{y'}(t)$, $\vec{u}_{z'}(t)$

10.1 Posizione

L'equazione della posizione di P in O rispetto ad O' è data dall'equazione:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{OO'}(t) + \vec{r'}(t)$$

- $\vec{r}(t)$ vettore posizione di P rispetto a O
- $\vec{r'}(t)$ vettore posizione di P rispetto a O'
- $\vec{r}_{OO'}(t)$ vettore posizione di O' rispetto ad O

10.2 Velocità

L'equazione della velocità di P in O rispetto ad O' è data dall'equazione:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{OO'}(t) + \vec{v'}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r'}(t)$$

- $\vec{v}(t)$ vettore velocità di P rispetto a O
- $\vec{v'}(t)$ vettore velocità di P rispetto a O'
- $\vec{v}_{OO'}(t)$ vettore velocità di O' rispetto ad O
- $\vec{\omega}$ velocità angolare di O' rispetto a O, vettore con modulo $\left|\left|\frac{d}{dt}\,\theta(t)\right|\right|$ ortogonale al piano di $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_v$

10.3 Accelerazione

L'equazione della velocità di P in O rispetto ad O' è data dall'equazione:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{OO'}(t) + \vec{a'}(t) + 2\,\vec{\omega}(t) \times \vec{v'}(t) + \vec{\alpha}(t) \times \vec{r'}(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{\omega}(t) \times \vec{r'}(t)]$$

- $\vec{a}(t)$ vettore velocità di P rispetto a O
- $\vec{a'}(t)$ vettore velocità di P rispetto a O'
- $\vec{a}_{OO'}(t)$ vettore velocità di O' rispetto ad O
- $\vec{\alpha}$ accelerazione angolare di O' rispetto a O, vettore definito come $\vec{\alpha} = \frac{d}{dt}\,\vec{\omega}(t)$
- $\vec{\alpha}(t) \times \vec{r'}(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{\omega}(t) \times \vec{r'}(t)]$ è legato alla forza centripeta
- $2\,\vec{\omega}(t) \times \vec{v'}(t)$ è chiamato termine di Coriolis

10.4 Sistemi inerziali e non inerziali

- se O e O' sono sistemi inerziali, ovvero c'è solo traslazione con $\vec{v}_{OO'}$ costante, si ha $\vec{\omega} = \vec{\alpha} = 0$, $\vec{a}_{OO'} = 0$ per cui l'equazione per l'accelerazione diventa: $\vec{a}(t) = \vec{a'}(t)$

- se c'è solo traslazione tra O e O', si ha $\vec{\omega} = \vec{\alpha} = 0$, $\vec{a}_{OO'} = 0$ per cui l'equazione per l'accelerazione diventa $\vec{a}(t) = \vec{a}_{OO'}(t) + \vec{a'}(t)$

- se c'è solo rotazione con $\vec{\omega}$ costante tra O e O', si ha $\vec{a}_{OO'} = \vec{\alpha} = 0$ per cui l'equazione per l'accelerazione diventa: $\vec{a}(t) = \vec{a'}(t) + 2\,\vec{\omega}(t) \times \vec{v'}(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{\omega}(t) \times \vec{r'}(t)]$

10.5 Forze e forze apparenti

Dati due sistemi di riferimento non inerziali $\vec{a} \neq \vec{a'}$, in O' c'è una forza apparente che vale:

$$\vec{F}_{\text{apparente}} = m\,(\vec{a'} - \vec{a}) \qquad \text{con } \vec{a'} - \vec{a} = -\vec{a}_{OO'}(t) - 2\,\vec{\omega}(t) \times \vec{v'}(t) - \vec{\alpha}(t) \times \vec{r'}(t) - \vec{\omega}(t) \times [\vec{\omega}(t) \times \vec{r'}(t)]$$

Il segno $-$ delle componenti della differenza delle accelerazioni è data dal fatto che se un sistema accelera in una direzione, i corpi subiscono una forza apparente che agisce nel verso opposto.

Componente forza centripeta

Per un moto circolare lungo il piano xy si ha che (per un dato istante):

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{u}_z \qquad \vec{r} = r\,\vec{u}_x \qquad \vec{v} = r\frac{d}{dt}\,\theta(t)\;\vec{u}_y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{v} &= r\,\omega\;\vec{u}_z \times \vec{u}_x = \omega\,\vec{u}_z \times r\,\vec{u}_x = \vec{r} \times \vec{\omega} \\ \vec{a} &= \frac{d}{dt}\,\vec{v} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] \end{cases}$$

Sistema di riferimento Terra - forza centrifuga - g efficace

Consideriamo due sistemi di riferimento O fisso (non rotante) con origine nel centro della Terra e O' con l'origine su un generico punto della superficie terrestre alla latitudine θ con $\vec{u}_{x'}$ verso est, $\vec{u}_{y'}$ verso nord e $\vec{u}_{z'}$ verso il cielo. La forza apparente in O' vale

$$\vec{F}_{\text{app}} = m\,(\vec{a'} - \vec{a}) = m\,(-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}))$$

con

- $\vec{r'} = R\,\vec{u}_{z'}$
- $\vec{\omega} = \omega\,\vec{u}_z = \omega \sin\theta\;\vec{u}_{z'} + \omega\cos\theta\;\vec{u}_{y'}$
- $\vec{a}_{OO'} = 0$ perché il punto sulla superficie non trasla rispetto al centro della terra
- $\vec{\alpha} = 0$ perché la velocità della Terra è costante
- $\vec{v'} = 0$ perché il punto sulla superficie rimane fermo rispetto alla superficie

per cui:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m\,\omega^2 R(\sin\theta\vec{u}_{z'} + \cos\theta\vec{u}_{y'}) \times [((\sin\theta\vec{u}_{z'} + \cos\theta\vec{u}_{y'})) \times \vec{u}_{z'}] = \\ &= -m\,\omega^2 R\sin\theta\cos\theta\;\vec{u}_{y'} + m\,\omega^2 R\cos\theta^2\;\vec{u}_{z'}\end{aligned}$$

Si osserva è necessario correggere l'accelerazione di gravità per un vettore Δg dovuto alla rotazione terrestre per cui si definisce g_{eff} l'accelerazione terrestre corretta considerando anche la rotazione come:

$$\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g} + \Delta\vec{g} = (0, -\omega^2 R\sin\theta\cos\theta, -g + \omega^2 R\cos\theta^2) \qquad \text{con } \Delta\vec{g} = (0, -\omega^2 R\sin\theta\cos\theta, \omega^2 R\cos\theta^2)$$

Si osserva che:

- ai poli $\cos\theta = 0$ l'accelerazione è 0
- all'equatore $\cos\theta = 1$ l'accelerazione lungo $\vec{u}_{z'}$ è massima ed è nulla lungo $\vec{u}_{y'}$
- a Padova $\theta \approx 45°$ si ha $\Delta\vec{g} = (0, -\frac{1}{2}\omega^2 R, \frac{1}{2}\omega^2 R)$

L'angolo β tra il vettore $\vec{g} + \Delta\vec{g}$ e la verticale $\vec{u}_{z'}$ è dato dalla formula

$$\beta \overset{\text{per } \beta \text{ piccoli}}{=} \tan\beta = \frac{-\omega^2 R\,\sin\theta\cos\theta}{-g + \omega^2 R\cos\theta^2}$$

Per Padova l'angolo β vale: $\beta = \frac{\omega^2 R}{2g} \cdot \frac{1}{1-\frac{\omega^2 R}{2g}} \approx \frac{\omega^2 R}{2g} + \text{err. trascurabile} \approx 10^{-3}\,rad$

e la misura di g_{eff} vale: $||g_{\text{eff}}|| = \sqrt{\left(\frac{\omega^2 R}{2}\right)^2 + \left(g - \frac{\omega^2 R}{2}\right)^2} = g\sqrt{\left(\frac{\omega^2 R}{2g}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2 R}{2g}\right)^2} =$
$= g\sqrt{1 - \frac{\omega^2 R}{g} + 2\left(\frac{\omega^2 R}{2g}\right)^2} \approx g(1 - \frac{\omega^2 R}{2g}) = g - \frac{\omega^2 R}{2} = g - 0.017\frac{m}{s^2}$

L'angolo rispetto alla verticale è trascurabile, mentre la variazione in modulo lo è un po' meno.

10.6 Esperimento di Guglielmini

Facendo cadere un grave dalla Torre degli Asinelli ($h \approx 100m$), Guglielmini osserva che questo cade ad una distanza D rispetto al filo a piombo (alla verticale).

- il filo a piombo ha come forza apparente $\vec{F}_{\text{app}} = -m\,\vec{\omega}(t) \times [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)]$ per cui l'equazione del moto diventa $m\,\vec{a} = m\,\vec{g}_{\text{eff}}$
- il grave ha come forza apparente $\vec{F}_{\text{app}} = -m\,\vec{\omega}(t) \times [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)] + 2\,\vec{\omega}(t) \times \vec{v'}(t)$ con equazione del moto $m\,\vec{a} = m\,\vec{g}_{\text{eff}} + 2\,\vec{\omega}(t) \times \vec{v'}(t)$

Analizzando le equazioni del moto per il grave si osserva che $\vec{v'} \approx 0\,\vec{u}_{x'} + 0\,\vec{u}_{y'} + v_z\vec{u}_{z'}$, ovvero la componente prevalente è lungo $\vec{u}_z$, mentre le altre sono trascurabili, per cui la componente $2\,\vec{\omega}(t) \times \vec{v'}(t)$ diventa: $\vec{\omega}(t) \times \vec{v'}(t) \approx \omega(t)(\sin\theta\,\vec{u}_{z'} + \cos\theta\,\vec{u}_{y'}) \times v_{z'}(t)\,\vec{u}_{z'} = \omega\,v_{z'}\cos\theta\;\vec{u}_{x'}$

- lungo $\vec{u}_{z'}$ le equazioni del moto dipendono solo dalla forza peso e da quella centrifuga:

$$m\,\vec{a}_{z'} = m\,g_{\text{eff}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{z'} = g_{\text{eff}} \\ v_{z'}(t) = -g_{\text{eff}}t \\ z'(t) = z_0 - \frac{1}{2}g_{\text{eff}}t^2 \end{cases}$$

- lungo $\vec{u}_{x'}$ le equazioni del moto dipendono anche dalla Forza di Coriolis:

$$m\,\vec{a}_{x'} = -2\,m\,\omega\,v_{z'}\cos\theta = 2\,m\,\omega\,g_{\text{eff}}\cos\theta\,t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{x'}(t) = 2\,\omega\,g_{\text{eff}}\cos\theta\,t \\ v_{x'}(t) = \omega\,g_{\text{eff}}\cos\theta\,t^2 \\ x'(t) = \omega\,g_{\text{eff}}\cos\theta\,\dfrac{t^3}{3} \end{cases}$$

Si osserva che la deviazione dovuta alla forza di Coriolis lungo l'asse $\vec{u}_{x'}$ vale $x'(t) = \omega\,g_{\text{eff}}\cos\theta\,\frac{t^3}{3}$ per il tempo $t = \sqrt{\frac{2h}{g_{\text{eff}}}}$ ottenuto dall'equazione di $\vec{z'}(t)$, per cui si ha:

$$\Delta = x'(t) = \frac{1}{3}\omega\,g_{\text{eff}}\cos\theta\left(\frac{2h}{g_{\text{eff}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2h^3}{g_{\text{eff}}}}\,\omega\cos\theta$$

Per la Torre degli asinelli con $h \approx 100\;m$ e $g_{\text{eff}} \approx 9.81\;\frac{m}{s^2}$ vale $\Delta \approx 0.015\;m$

Se si considerano le velocità lineari del grave quando è in sommità della torre ($||\vec{v}_1|| = \omega(R+h)$) e quando si trova al suolo ($||\vec{v}_2|| = \omega R$)), si osserva che $||\vec{v}_1|| > ||\vec{v}_2||$ e differiscono per una costante ωh dipendente dall'altezza della torre. Cadendo, il grave mantiene la velocità che ha all'inizio (non ci sono forze frenanti) per cui arriva al suolo con una velocità maggiore che lo fa avanzare verso Est (ovvero verso il moto di rotazione terrestre).