

Appunti di Teoria dei circuiti

Giacomo Simonetto

Secondo semestre 2024-25

Sommario

Appunti del corso di Teoria dei circuiti della facoltà di Ingegneria Informatica dell'Università di Padova.

Indice

1	Introduzione alla teoria dei circuiti	3
2	Interpretazione fisica dell'elettrostatica	4
2.1	Campi e grandezze fisiche	4
2.2	Carica elettrica e densità di carica	4
2.3	Corrente elettrica e densità di corrente	4
2.4	Campo elettrostatico	6
2.5	Potenziale elettrostatico	6
2.6	Tensioni e forze elettromotrici	7
3	Modello a parametri concentrati	8
4	Componenti elettrici	8
5	Topologia delle reti	8
6	Analisi di circuiti lineari a corrente continua	8

1 Introduzione alla teoria dei circuiti

Definizione di circuito

Un circuito elettrico è un insieme di dispositivi elettrici interconnessi, deputati alla produzione, trasmissione ed utilizzazione dell'energia elettrica.

Equazioni di Maxwell

È possibile risolvere un circuito attraverso le equazioni di Maxwell, ma si otterrebbe un sistema troppo complesso da gestire e da risolvere, per cui si utilizzano approssimazioni e modelli definiti dalla teoria dei circuiti.

Modello zero-dimensionale

Il modello zero-dimensionale non tiene conto di cosa avviene all'interno dei componenti elettrici, ma solo di come interagiscono tra di loro. In altre parole viene trascurata la loro dimensione.

Grandezze fisiche

Le grandezze fisiche utilizzate sono: tensione, corrente, potenza, energia e frequenza

Modello a parametri concentrati

Il modello a parametri concentrati prevede che:

1. i componenti RLC sono idealizzati e considerati puntiformi (modello zero-dimensionale)
2. tensioni e correnti dipendono dal tempo e non dallo spazio: si può evitare di considerare eventuali propagazioni elettromagnetiche
3. l'interazione tra componenti avviene solo attraverso connessioni elettriche

Il suo scopo è di:

- analizzare i comportamenti di tensioni e correnti (flussi di potenza)
- prevedere comportamenti dei dispositivi reali mediante modelli semplificati
- progettare e ottimizzare sistemi elettrici

Validità

La teoria dei circuiti è valida se la dimensione del circuito è inferiore alla lunghezza d'onda del segnale che circola all'interno:

- corrente alternata di rete $\rightarrow 50 \text{ Hz} \rightarrow \lambda = 6000 \text{ km}$
- radiofrequenza $\rightarrow 100 \text{ MHz} \rightarrow \lambda = 3 \text{ m}$
- microonde $\rightarrow 10 \text{ GHz} \rightarrow \lambda = 3 \text{ cm}$ (limite della TdC)

Tipi di circuiti

- circuiti elettrici di segnale, lavorano con mW
- circuiti elettrici di potenza, lavorano con kW

Flusso e trasmissione di energia

Per flusso di energia si intende come viene utilizzata la potenza in un circuito. La trasmissione di energia può avvenire in due modi: attraverso onde elettromagnetiche (radio, antenne, ...) o per conduzione (linee elettriche).

2 Interpretazione fisica dell'elettrostatica

2.1 Campi e grandezze fisiche

Campo fisico

Un campo fisico è la distribuzione su un volume o su una superficie di una certa grandezza fisica rappresentabile tramite vettore o scalare. I campi fisici di grandezze scalari si dicono campi scalari, mentre i campi fisici di grandezze vettoriali si dicono campi vettoriali.

Grandezze fisiche

Una grandezza fisica è una quantità misurabile di un oggetto. Il processo di misura consiste nel comparare una quantità campione (detta unità di misura) con l'oggetto da misurare. Le grandezze fondamentali del Sistema Internazionale sono: m, kg, s, K, A, cd, mol.

2.2 Carica elettrica e densità di carica

Carica elettrica

- la quantità di carica è una grandezza che misura la carica elettrica di un oggetto
- si osserva che esiste una forza che dipende dalla quantità di carica dei corpi e può essere attrattiva tra corpi con cariche di segno opposto o repulsiva tra corpi con cariche dello stesso segno
- la carica è quantizzata con quanto $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$

Densità di carica

La carica di una distribuzione è data da $q = \int_V \rho d\tau$, ovvero la somma complessiva delle cariche positive e negative di un corpo:

- densità volumica: $\rho(P, t) = [Coulomb/m^3] = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{q}{V}$, $q = \int_V \rho(P, t) d\tau$
- densità superficiale: $\sigma(P, t) = [Coulomb/m^2] = \lim_{\Sigma \rightarrow 0} \frac{q}{\Sigma}$, $q = \int_{\Sigma} \sigma(P, t) d\Sigma$

2.3 Corrente elettrica e densità di corrente

Densità di corrente

Si genera per conduzione elettrica attraverso due modi:

- corrente di conduzione: moto delle cariche libere (es. nei metalli)
- corrente di convezione: moto delle cariche libere e/o vincolate (es. soluzioni elettrolitiche)

$$\vec{J}(P, t) = \rho^+ + v_d^+ + \rho^- + v_d^- \quad \begin{cases} \rho^+ \rightarrow \text{densità delle cariche positive} \\ v_d^+ \rightarrow \text{velocità di deriva delle cariche positive} \\ \rho^- \rightarrow \text{densità delle cariche negative} \\ v_d^- \rightarrow \text{velocità di deriva delle cariche negative} \end{cases}$$

Corrente

La corrente è la quantità di cariche che attraversano una superficie in un'unità di tempo. Dipende dalla superficie e dal suo orientamento. Non dipende dal resto dello spazio. Se si inverte l'orientamento della superficie o il riferimento, il segno della corrente si inverte. Si misura in Ampère $[A_{mpere}] = [Coulomb/s]$.

$$i(t) = \int_{\Sigma} \vec{J}(P, t) \cdot d\vec{\Sigma} \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q_{\text{attraverso } \Sigma(t)}}{\Delta t}$$

In caso di conduttori filiformi (dove $\Sigma \ll \text{lunghezza}$), vale $i(t) = \vec{J} \cdot \vec{\Sigma}$

Conservazione della carica e continuità della corrente

La carica elettrica non si crea, non si distrugge, si conserva sempre.

$$q_{\text{interna}}(t + \Delta t) = q_{\text{interna}}(t) + \Delta q_{\text{uscente}}$$
$$i_{\text{uscente}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q_{\text{uscente}}}{\Delta t} = - \frac{dq_{\text{entrante}}}{dt} = -i_{\text{entrante}}$$

- la variazione di carica corrisponde ad una corrente
- in assenza di corrente, la carica non varia
- la carica entrante è pari a quella uscente (in modulo)

Corrente solenoidale

La corrente si dice solenoidale quando:

- si è in regime stazionario: non si hanno accumuli o prelievi di carica in nessun punto del volume, la carica entrante e quella uscente sono uguali e il campo \vec{J} forma linee di flusso chiuse
- in regioni di carica nulla: $\rho = 0$ ad esempio nei metalli

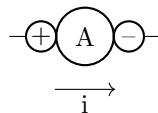
si è in regime stazionario

Tubo di flusso

Il tubo di flusso è un conduttore rivestito da materiale isolante che può essere attraversato da corrente. In condizioni stazionarie (con campo di corrente solenoidale) si ha che la corrente i_1 attraverso una superficie Σ_1 è uguale alla corrente i_2 attraverso una superficie Σ_2 . Ovvero non si hanno perdite di corrente: $i_{\text{uscente}} = 0$.

Amperometro

L'amperometro è uno strumento per misurare la corrente in un circuito. Il verso del sistema è dal + al - (ovvero la corrente entra dal connettore + ed esce dal connettore -). Si usa in serie al circuito. Un amperometro si dice ideale se non influisce sul circuito e se la misura avviene senza ritardi.



2.4 Campo elettrostatico

Legge di Coulomb e campo elettrostatico

Il campo elettrostatico si definisce a partire dalla forza di Coulomb, per questo è anche chiamato campo coulombiano.

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \hat{u}_{1,2} \quad \vec{F}_{\text{elett}} = q\vec{E} \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_{1,2} = [N/C_{\text{oulomb}}] = [V_{\text{olt}}/m]$$

Il campo elettrostatico è additivo: $\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r_{PO_k}^2} \vec{u}_k(P)$ $\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r^2} \vec{u}_k d\tau$

Campo elettrostatico nei conduttori

Un conduttore è un materiale che conduce corrente. Le cariche sono libere di muoversi e, muovendosi, generano una corrente. In condizione di equilibrio il campo all'interno è nullo, ovvero non c'è nessuna forza che agisce sulle cariche e le cariche sono ferme (altrimenti non ci sarebbe equilibrio).

Campo elettrostatico nei dielettrici - isolanti

Un dielettrico o isolante è un materiale che non conduce corrente. Le cariche sono bloccate a meno di piccoli spostamenti responsabili della polarizzazione dei dielettrici. I dielettrici possono essere:

- omogenei: se ϵ non dipende dalla posizione
- lineari: se ϵ non dipende dal modulo del campo elettrico $\|\vec{E}\|$
- isotropi: se ϵ non dipende dalla direzione del campo elettrico $\vec{u} = \vec{E}/\|\vec{E}\|$

Un dielettrico omogeneo, lineare e isotropo si dice uniforme e per esso valgono tutte le leggi viste finora.

Permittività dielettrica di un mezzo

La permittività dielettrica di un mezzo indica come tale mezzo reagisce al campo elettrico:

$$\epsilon = \epsilon_{\text{relativa del mezzo}} \cdot \epsilon_0 - \text{nel vuoto} = [F_{\text{araday}}/m] = [C_{\text{oulomb}}^2/J] \quad \epsilon > \epsilon_0 \quad \epsilon_r > 1$$

Campo elettrico conservativo

Il campo elettrostatico è conservativo ovvero:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \oint_{\mathcal{L}_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{L}_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} \mathcal{L}_{1,\text{iniziale}} = \mathcal{L}_{2,\text{iniziale}} \\ \mathcal{L}_{1,\text{finale}} = \mathcal{L}_{2,\text{finale}} \end{matrix}$$

2.5 Potenziale elettrostatico

Potenziale elettrostatico

Essendo \vec{E} un campo conservativo, si definisce il potenziale elettrostatico:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\Delta V = V_A - V_B \quad V(P) = \int_P^C \vec{E} \cdot d\vec{s} = [V_{\text{olt}}] \quad (V(C) = 0)$$

Lavoro di una forza elettrostatica

Il lavoro compiuto dalla forza elettrostatica per spostare una carica q vale:

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q\Delta V = q(V_A - V_B)$$

Energia potenziale elettrostatica

Si definisce l'energia potenziale di una carica come il lavoro compiuto per portare la carica da distanza ∞ alla posizione in cui si trova:

$$\psi(P) = q_0 V(P)$$

Sorgenti del campo elettrico - distribuzioni di carica

- **distribuzioni di carica statiche - condizioni elettrostatiche:**
le cariche che generano il campo sono in quiete e non ci sono correnti
- **distribuzione di carica stazionarie - regime stazionario:**
le cariche sono in moto a velocità costante nel tempo e di conseguenza sono presenti correnti costanti nel tempo
- **distribuzione di carica variabile - regime variabile:**
le cariche sono in moto variabile e le correnti variano nel tempo, il campo non è più conservativo in quanto avrà una componente non conservativa \vec{E}_{indotta}

Forza di una carica in moto

Le forze agenti su cariche in moto immerse in un campo magnetico hanno una componente dovuta al campo elettrico e una al campo magnetico:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} + q_0 \vec{v} \times \vec{B}$$

2.6 Tensioni e forze elettromotrici

Tensione

La tensione è definita come il lavoro elettrico per unità di carica speso a muovere una carica elettrica di prova lungo una linea L .

$$u(t) = \int_L \vec{E}(P, t) \cdot \vec{t}(P) dl = \frac{W_e}{q_0} = [V_{olt}] = [J/C] = [J/A_{\text{mpere}} s] \quad \vec{t}(P) = \text{versore della curva in P}$$

Questa definizione permette di essere indipendenti dalla conservatività del campo elettrico: se il campo elettrico è conservativo, la tensione equivale al potenziale (a meno di un segno), mentre se il campo elettrico non è conservativo non si definisce nessun potenziale, ma si può calcolare lo stesso la tensione.

$$\begin{array}{ll} \text{campo conservativo} & \rightarrow \text{potenziale} = -\text{tensione} \\ \text{campo non conservativo} & \rightarrow \cancel{\text{potenziale}} = -\text{tensione} \end{array}$$

Forza elettromotrice indotta

Un campo elettrico non conservativo, è formato da una parte conservativa e da un campo elettrico indotto non conservativo. Di conseguenza la circuitazione non è più nulla e si definisce la forza elettromotrice indotta *f.e.m.* come il lavoro compiuto dal campo elettrico lungo una linea chiusa L :

$$f.e.m. \quad e(t) = \oint_L \vec{E}(P, t) \cdot \vec{t}(P) dl$$

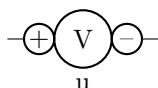
Forza elettromotrice mozionale

La forza elettromotrice complessiva agente sulle cariche in moto è data da una componente dovuta al campo elettrico e da una dovuta al campo magnetico, detta forza elettromotrice mozionale:

$$\oint_L (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{t} dl = \oint_L \vec{E} \cdot \vec{t} dl + \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{t} dl = e(t) + e_m(t)$$

Voltmetro

Il voltmetro è uno strumento per misurare la tensione, si collega in parallelo alla sezione di circuito di cui si vuole conoscere la tensione. La direzione del sistema è data dal vettore \vec{t} dal + al -. Un voltmetro si dice ideale se non altera il regime del circuito.



- 3 Modello a parametri concentrati**
- 4 Componenti elettrici**
- 5 Topologia delle reti**
- 6 Analisi di circuiti lineari a corrente continua**