Höhere Mathematik 1

Rechnerarithmetik

Gleitkommazahlen / Maschinenzahlen

- Darstellung:
  $M = \{x \in \mathbb{R} | x = \pm 0.m_1 m_2 m_3 \dots m_n \cdot B^{e_{l-1} \dots e_1 e_0 - bias}\} \cup \{0\}$
- Basis B, Mantissenlänge n, Exponentenbereich $[e_{\min}, e_{\max}]$
- Normalisierte Zahl: $m_1 \neq 0$
- Bias: $bias = B^{l-1} - 1$ für l-stellige Exponentendarstellung

Fehleranalyse

- Gerundete Zahl: $\tilde{x} = rd(x)$
- Absoluter Rundungsfehler: $|\tilde{x} - x| \leq \frac{1}{2} B^{e-n+1}$
- Relative Rundungsfehler: $\left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right| \leq \text{eps}$
- Maschinengenauigkeit: $\text{eps} = \max_{x \in M} \left|\frac{rd(x)-x}{x}\right| = \frac{1}{2} B^{1-n}$

Fehlerfortpflanzung bei Funktionen

- Absoluter Fehler: $|f(\tilde{x}) - f(x)| \approx |f'(x)| \cdot |\tilde{x} - x|$
- Relativer Fehler: $\left|\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)}\right| \approx \left|\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right|$
- Kondition (Je kleiner desto besser): $K = \left|\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}\right|$

Nullstellenprobleme

Fixpunktiteration

- Fixpunktgleichung: $F(x) = x$
- Fixpunkte ($\overline{x}$) sind Nullstellen von $f(x) = F(x) - x$
- Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = F(x_n)$
- Konvergenz: $|F'(\overline{x})| < 1 \rightarrow$ anziehender Fixpunkt
- Divergenz: $|F'(\overline{x})| > 1 \rightarrow$ abstoßender Fixpunkt

Banach'scher Fixpunktsatz

- Sei $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ und es existiert eine Konstante $0 < \alpha < 1$ mit
  $$|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$$
- Dann besitzt F genau einen Fixpunkt $\overline{x} \in [a, b]$ und die Iteration $x_{n+1} = F(x_n)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$ gegen $\overline{x}$. (Lipschitz-Stetigkeit mit Lipschitz-Konstante α)
- a-priori-Fehlerabschätzung:
  $$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} |x_1 - x_0|$$
- a-posteriori-Fehlerabschätzung:
  $$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |x_n - x_{n-1}|$$
- Umformung: $\left|\frac{F(x)-F(y)}{x-y} x - y\right| \leq \alpha$

Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Für den Startwert x_0 muss gelten, dass $f(x_0) \neq 0$ und $f'(x_0) \neq 0$. Ein geeigneter Startwert kann durch die Nullstellenbestimmung der Ableitungsfunktion gefunden werden.

Vereinfachte Newton-Verfahren

- Fixierter Ableitungswert: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$
- Sekantenverfahren: $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

Fehlerabschätzung

Konvergenzordnung

- Sei (x_n) eine konvergierende Folge gegen $\overline{x}$
- Die Folge hat die Konvergenzordnung q, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass
  $$|x_{n+1} - \overline{x}| \leq c \cdot |x_n - \overline{x}|^q$$
- $q = 1$ lineare Konvergenz, $q = 2$ quadratische Konvergenz

Nullstellensatz von Bolzano

- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ oder $f(a) \geq 0 \geq f(b)$
- Dann existiert mindestens ein $\overline{x} \in (a, b)$ mit $f(\overline{x}) = 0$

Lineare Gleichungssysteme

LR-Zerlegung

- Zerlegung einer Matrix A in das Produkt $A = L \cdot R$
- L: untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonale
- R: obere Dreiecksmatrix
- Lösen von $A \cdot x = b$ durch Lösen von $L \cdot y = b$ und $R \cdot x = y$
- Voraussetzung: Keine Null-Pivotelemente während der Zerlegung / kein Zeilentausch notwendig (sonst $P \cdot A = L \cdot R$)

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{R}$$

Permutationsmatrix

- Vertauscht Zeilen oder Spalten einer Matrix
- $P \cdot A$: Vertauschen der Zeilen von A
- $A \cdot P$: Vertauschen der Spalten von A
- P_1, P_2 sind Permutationsmatrizen $\Rightarrow P = P_1 \cdot P_2$ ist auch eine Permutationsmatrix
- $P^{-1} = P^T$

QR-Zerlegung

- Zerlegung einer Matrix A in das Produkt $A = Q \cdot R$
- Q: orthogonale Matrix ($Q^T \cdot Q = I$)
- R: obere Dreiecksmatrix

Householder-Matrizen

- H ist orthogonal und symmetrisch ($H^T = H$)
- H spiegelt an der Hyperebene orthogonal zu u
- $H = H^T = H^{-1} \Rightarrow H \cdot H = I_n$
- Wenn u ein normierter Vektor ist, dann gilt:
  $$H = I_n - 2uu^T$$

QR-Zerlegung mit Householder-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1. $v_1 = a_1 + sign(a_{11}) \cdot |a_1| \cdot e_1$
2. $u_1 = \frac{v_1}{||v_1||_2}$
3. $H_1 = I - 2u_1 u_1^T$
4. $A^{(1)} = H_1 \cdot A$, $b^{(1)} = H_1 \cdot b$
   $$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -5.0990 & 0.5883 & -4.5107 \\ 0 & -2.9258 & 3.6976 \\ 0 & 0.3056 & -1.7268 \end{pmatrix}$$

Rekursiv mit $A^{(1)}$ (2×2-Matrix) durchführen bis $A^{(n-1)}$ obere Dreiecksmatrix ist.

Vektor- und Matrixnormen

- Vektornormen:
  $$\text{1-Norm, Summennorm: } \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
  $$\text{2-Norm, euklidische Norm: } \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$
  $$\text{Unendlich-Norm, Maximumnorm: } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$
- Matrixnormen (n×m-Matrizen):
  $$\text{1-Norm, Spaltensummennorm: } \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
  $$\text{2-Norm, Spektralnorm: } \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$
  $$\text{Unendlich-Norm, Zeilensummennorm: } \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

Spektralradius

- $\rho(A) = \max\{|\lambda| | \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$
- Für jede Matrixnorm gilt: $\rho(A) \leq \|A\|$

Fehlerrechnung Vektoren

- $||.||$: gewählte Matrixnorm
- Konditionszahl: $cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$
- Abschätzung des relativen Lösungsfehlers:
$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq cond(A) \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}, \text{ falls } ||b|| \neq 0$$
- Je größer $cond(A)$, desto schlechter ist das LGS konditioniert

Fehlerrechnung Matrizen

- Gegeben: $\tilde{A} = A + E$ mit E als Störmatrix ($E = A - \tilde{A}$)
- Abschätzung des relativen Lösungsfehlers:
$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A) \cdot \frac{\|E\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|E\|}{\|A\|} + \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \right)$$
- Gilt nur, wenn $cond(A) \cdot \frac{\|E\|}{\|A\|} < 1$

Aufwandsabschätzung

- LR-Zerlegung: $\frac{2}{3}n^3$ Operationen
- Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen: $2n^2$ Operationen
- QR-Zerlegung mit Householder: $2n^3$ Operationen
- Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen: $2n^2$ Operationen
- Allgemein:
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$
und
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 \approx \frac{1}{3}n^3$$

Iterative Verfahren für LGS

Jacobi-Verfahren

- Zerlegung: D ist die Diagonalmatrix von A, L die untere Dreiecksmatrix und R die obere Dreiecksmatrix
$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (L + D + R)x &= b \\ Dx &= -(L + R)x + b \\ x &= D^{-1}(L + R)x + D^{-1}b \end{aligned}$$
- Iterationsvorschrift: $x^{(k+1)} = D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b$
- Iterationsmatrix: $B_J = D^{-1}(L + R)$

Gauß-Seidel-Verfahren

- Iterationsvorschrift: $x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Rx^{(k)} + (D - L)^{-1}b$
- Iterationsmatrix: $B_{GS} = (D - L)^{-1}R$

Konvergenz und Abschätzung

- Beide Verfahren konvergieren, wenn $\|B\| < 1$
- Symmetrisch positiv definite Matrizen (nur Gauß-Seidel)
- Siehe Fixpunktiteration ($\alpha = \|B\|$)

Diagonaldominanz

- Eine Matrix ist diagonaldominant wenn eines der folgenden Kriterien erfüllt ist:
  - $\forall i = 1, \ldots, n : |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i} |a_{i,j}|$ (Zeilensummenkriterium)
  - $\forall j = 1, \ldots, n : |a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j} |a_{i,j}|$ (Spaltensummenkriterium)
- Beide Verfahren konvergieren für diagonaldominante Matrizen

Komplexe Zahlen

Darstellung

- Normalform / kartesische Form: $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
- Polardarstellung / Trigonometrische Form: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- Eulersche Darstellung: $z = re^{i\varphi}$
- Betrag: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$
- Argument: $\varphi = \arg(z) = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \cos^{-1}(\frac{x}{r}) = \sin^{-1}(\frac{y}{r})$

Rechenregeln

- Addition: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$
- Multiplikation in Polardarstellung:
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$
- Division:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*}, \quad z_2 \neq 0$$
- Division in Polardarstellung:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad z_2 \neq 0$$
- Potenzieren in der Polardarstellung:
$$z^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)] = r^n e^{in\varphi}$$

Wurzeln

- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$
- n-te Wurzel:
$$z_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right] = re^{i\,\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$
$$k = 0, 1, \ldots, n - 1$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn gilt:
$$Av = \lambda v$$

Bestimmung

- λ ist Eigenwert von A $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$
- Charakteristisches Polynom: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$
- Eigenwerte: Nullstellen des charakteristischen Polynoms
- Eigenvektoren: Lösen von $(A - \lambda I_n)v = 0$ für jeden Eigenwert λ
- λ^{-1} ist Eigenwert von A^{-1} mit demselben Eigenvektor v, falls A invertierbar ist
- Das Spektrum von A ist die Menge aller Eigenwerte: $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$

Eigenräume

- Eigenraum zu λ: $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n | Av = \lambda v\}$
- Dimension des Eigenraums: geometrische Vielfachheit
- Vielfachheit eines Eigenwerts als Nullstelle des charakteristischen Polynoms: algebraische Vielfachheit
- $1 \leq$ geometrische Vielfachheit $\leq$ algebraische Vielfachheit

Diagonalisierbarkeit / Ähnlichkeit

- Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A und B heißen ähnlich, wenn eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert, so dass gilt:
$$B = S^{-1}AS$$
- A ist diagonalisierbar, wenn $S = D$ eine Diagonalmatrix ist
- D enthält die Eigenwerte von A auf der Diagonale
- S enthält die zugehörigen Eigenvektoren als Spalten
- Wenn A, B ähnlich sind, gilt:
  - A und B haben dieselben Eigenwerte mit derselben algebraischen Vielfachheit
  - Die Eigenvektoren von A und B hängen über die Matrix S zusammen

von-Mises-Iteration

- Iterationsvorschrift: $v^{(k+1)} = \frac{Av^{(k)}}{\|Av^{(k)}\|}$
- Konvergenz gegen den Eigenvektor zum betragsmäßig größten Eigenwert
- Approximierter Eigenwert: $\lambda^{(k)} = \frac{(v^{(k)})^T Av^{(k)}}{(v^{(k)})^T v^{(k)}}$