Höhere Mathematik 1

Rechnerarithmetik

Gleitkommazahlen / Maschinenzahlen

- Darstellung: $M = \{x \in \mathbb{R} | x = \pm 0.m_1 m_2 m_3 \dots m_n \cdot B^{e_{l-1} \dots e_1 e_0 - bias}\} \cup \{0\}$
- Basis B, Mantissenlänge n, Exponentenbereich $[e_{\min}, e_{\max}]$
- Normalisierte Zahl: $m_1 \neq 0$
- Bias: $bias = B^{l-1} - 1$ für l-stellige Exponentendarstellung

Fehleranalyse

- Gerundete Zahl: $\tilde{x} = rd(x)$
- Absoluter Rundungsfehler: $|\tilde{x} - x| \leq \frac{1}{2} B^{e-n+1}$
- Relative Rundungsfehler: $\left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right| \leq \text{eps}$
- Maschinengenauigkeit: $\text{eps} = \max_{x \in M} \left|\frac{rd(x)-x}{x}\right| = \frac{1}{2} B^{1-n}$

Fehlerfortpflanzung bei Funktionen

- Absoluter Fehler: $|f(\tilde{x}) - f(x)| \approx |f'(x)| \cdot |\tilde{x} - x|$
- Relativer Fehler: $\left|\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)}\right| \approx \left|\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right|$
- Kondition (Je kleiner desto besser): $K = \left|\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}\right|$

Nullstellenprobleme

Fixpunktiteration

- Fixpunktgleichung: $F(x) = x$
- Fixpunkte $(\overline{x})$ sind Nullstellen von $f(x) = F(x) - x$
- Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = F(x_n)$
- Konvergenz: $|F'(\overline{x})| < 1 \rightarrow$ anziehender Fixpunkt
- Divergenz: $|F'(\overline{x})| > 1 \rightarrow$ abstoßender Fixpunkt

Banach'scher Fixpunktsatz

- Sei $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ und es existiert eine Konstante $0 < \alpha < 1$ mit
$$|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$$
- Dann besitzt F genau einen Fixpunkt $\overline{x} \in [a, b]$ und die Iteration $x_{n+1} = F(x_n)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$ gegen $\overline{x}$. (Lipschitz-Stetigkeit mit Lipschitz-Konstante α)
- a-priori-Fehlerabschätzung:
$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} |x_1 - x_0|$$
- a-posteriori-Fehlerabschätzung:
$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |x_n - x_{n-1}|$$
- Umformung: $\left|\frac{F(x)-F(y)}{x-y} x - y\right| \leq \alpha$

Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Für den Startwert x_0 muss gelten, dass $f(x_0) \neq 0$ und $f'(x_0) \neq 0$. Ein geeigneter Startwert kann durch die Nullstellenbestimmung der Ableitungsfunktion gefunden werden.

Vereinfachte Newton-Verfahren

- Fixierter Ableitungswert: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$
- Sekantenverfahren: $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

Fehlerabschätzung

Konvergenzordnung

- Sei (x_n) eine konvergierende Folge gegen $\overline{x}$
- Die Folge hat die Konvergenzordnung q, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass
$$|x_{n+1} - \overline{x}| \leq c \cdot |x_n - \overline{x}|^q$$
- $q = 1$ lineare Konvergenz, $q = 2$ quadratische Konvergenz

Nullstellensatz von Bolzano

- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ oder $f(a) \geq 0 \geq f(b)$
- Dann existiert mindestens ein $\overline{x} \in (a, b)$ mit $f(\overline{x}) = 0$