Lineare Algebra

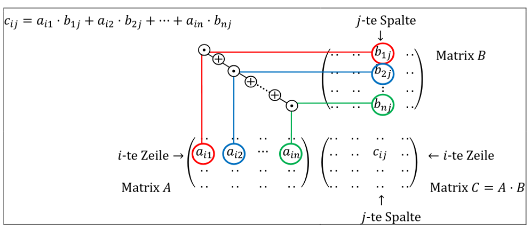
Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Addition und Subtraktion

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 \\ 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation



Transponierte Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit Skalar

$$cA = 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Zeilenstufenform

Die Matrix ist in Zeilenstufenform, wenn:

- Alle Zeilen, die nur Nullen enthalten, stehen am Ende der Matrix.
- Die erste Nicht-Null-Zahl in jeder Zeile (der sogenannte Pivot) ist 1 (führende Eins).
- Der Pivot jeder Zeile steht weiter rechts als der Pivot der vorherigen Zeile.

Reduzierte Zeilenstufenform (RREF) ist erreicht, wenn:

- Jede Spalte, die eine führende Eins enthält, hat nur Nullen in allen anderen Zeilen.

Parameterdarstellung

führende Unbekannte

Die führenden Unbekannten sind die Variablen, die in der Zeilenstufenform der Matrix als Pivot-Elemente auftreten. Sie sind eindeutig bestimmt und können direkt aus den Gleichungen abgelesen werden.

freie Unbekannte

Die freien Unbekannten sind die Variablen, die nicht als Pivot-Elemente auftreten. Sie können beliebige Werte annehmen.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3|5 \\ 0 & 0 & 1 & 1|3 \end{pmatrix}$$

In diesem Beispiel sind x_1 und x_3 die führenden Unbekannten, während x_2 und $x_3 4$ freie Unbekannte sind. Die Lösung kann in Parameterform dargestellt werden:

$$x_2 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$
$$x_4 = \mu \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

Erste Zeile: $x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 5$, daraus $x_1 = 5 + 2\lambda - 3\mu$
Zweite Zeile: $x_3 + x_4 = 3$, daraus $x_3 = 3 - \mu$

In Vektorform:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösbarkeit von LGS

- **Eindeutige Lösung:** Wenn die Matrix in Zeilenstufenform keine freien Unbekannten hat. (rg(A) = Anzahl der Unbekannten (n))
- **Unendlich viele Lösungen:** Wenn die Matrix in Zeilenstufenform mindestens eine freie Unbekannte hat. ($rg(A) < n$)
- **Keine Lösung:** Wenn die Matrix in Zeilenstufenform eine Zeile der Form $0 = c$ (mit $c \neq 0$) enthält. ($rg(A) \neq rg(A|\vec{c})$)

Vektorgeometrie

Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor mit der Länge/Betrag 1.

Koliniare Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kolinear, wenn sie in die gleiche Richtung zeigen oder entgegengesetzt sind, bzw. das Vektorprodukt 0 ergibt. Mathematisch ausgedrückt: $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ für ein Skalar k. Der Nullvektor ist kolinear zu jedem Vektor. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Komplanare Vektoren

Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind komplanar, wenn sie in einer Ebene liegen. Dies ist der Fall, wenn das Skalarprodukt der Kreuzprodukte Null ist: $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Orthogonale Projektion

Die orthogonale Projektion eines Vektors $\vec{a}$ auf einen Vektor $\vec{b}$ wird berechnet als:

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{b}_{\vec{a}}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Die Projektion gibt den Anteil von $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{b}$ an.

Vektorprodukt

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) zweier Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ wird berechnet als:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ a_1 \quad\quad b_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\theta)$$

Das Vektorprodukt ist ein Vektor, der orthogonal zu beiden Ausgangsvektoren steht. Die Länge des Vektorprodukts entspricht der Fläche des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird.

Eigenschaften des Vektorprodukts

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (Antisymmetrie)
- Distributivität: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- Gemischtes Assoziativ-Gesetz: $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$

Betrag eines Vektors

Der Betrag eines Vektors $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ wird berechnet als:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Basisvektoren

Eine Basis eines Vektorraums ist eine Menge von Vektoren, die linear unabhängig sind und den gesamten Raum aufspannen. Jeder Vektor im Raum kann als Linearkombination dieser Basisvektoren dargestellt werden.

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ wird berechnet als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Das Skalarprodukt ist ein Maß für die Ähnlichkeit zweier Vektoren. Es ist null, wenn die Vektoren orthogonal zueinander sind.

Winkel zwischen Vektoren

Der Winkel θ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kann mit dem Skalarprodukt berechnet werden:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

Gegenseitige Lage von Geraden im Raum

		Gibt es einen gemeinsamen Punkt?	
		ja	nein
Sind die Richtungsvektoren kollinear?	ja	identisch	echt parallel
	nein	schneidend	windschief

Abstand zwischen einer Geraden und einem Punkt

Der Abstand d zwischen einer Geraden g und einem Punkt P kann mithilfe der Fläche des Parallelogramms berechnet werden, das von den Richtungsvektoren der Geraden und dem Vektor vom Punkt auf die Gerade aufgespannt wird:

$$\overrightarrow{PA} = \vec{P} - \vec{A}$$

$$F = |\overrightarrow{PA} \times \vec{a}| \quad \text{(Fläche des Parallelogramms)}$$

$$l = \frac{F}{|\vec{a}|} \quad \text{(Länge der Geraden)}$$

Koordinatendarstellung von Geraden in der Ebene

Eine Gerade in der Ebene kann durch die Gleichung

$$g : ax + by + c = 0$$

dargestellt werden.

Umrechnung Parameterdarstellung → Koordinatendarstellung

$$\vec{r}(A) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$$

Daraus lässt sich ein Gleichungssystem ableiten

Ebenen

Umrechnung Koordinatendarstellung → Parameterdarstellung

Wir bestimmen zwei beliebige Punkte auf g, indem wir die x-Koordinaten frei wählen und die zugehörigen y-Koordinaten aus der Koordinatendarstellung von g berechnen. Aus diesen beiden Punkten können wir dann eine Parameterdarstellung von g gewinnen.