Lineare Algebra

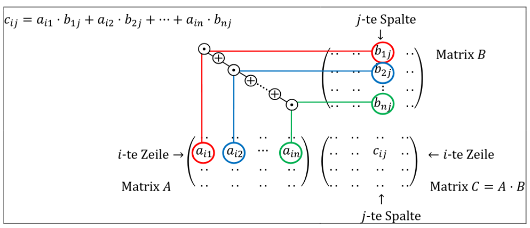
Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Addition und Subtraktion

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 \\ 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation



Transponierte Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit Skalar

$$cA = 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Zeilenstufenform

Die Matrix ist in Zeilenstufenform, wenn:

- Alle Zeilen, die nur Nullen enthalten, stehen am Ende der Matrix.
- Die erste Nicht-Null-Zahl in jeder Zeile (der sogenannte Pivot) ist 1 (führende Eins).
- Der Pivot jeder Zeile steht weiter rechts als der Pivot der vorherigen Zeile.

Reduzierte Zeilenstufenform (RREF) ist erreicht, wenn:

- Jede Spalte, die eine führende Eins enthält, hat nur Nullen in allen anderen Zeilen.

Parameterdarstellung

führende Unbekannte

Die führenden Unbekannten sind die Variablen, die in der Zeilenstufenform der Matrix als Pivot-Elemente auftreten. Sie sind eindeutig bestimmt und können direkt aus den Gleichungen abgelesen werden.

freie Unbekannte

Die freien Unbekannten sind die Variablen, die nicht als Pivot-Elemente auftreten. Sie können beliebige Werte annehmen.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3|5 \\ 0 & 0 & 1 & 1|3 \end{pmatrix}$$

In diesem Beispiel sind x_1 und x_3 die führenden Unbekannten, während x_2 und x_34 freie Unbekannte sind. Die Lösung kann in Parameterform dargestellt werden:

$$x_2 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$
$$x_4 = \mu \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

Erste Zeile: $x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 5$, daraus $x_1 = 5 + 2\lambda - 3\mu$
Zweite Zeile: $x_3 + x_4 = 3$, daraus $x_3 = 3 - \mu$

In Vektorform:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösbarkeit von LGS

- **Eindeutige Lösung:** Wenn die Matrix in Zeilenstufenform keine freien Unbekannten hat.
- **Unendlich viele Lösungen:** Wenn die Matrix in Zeilenstufenform mindestens eine freie Unbekannte hat.
- **Keine Lösung:** Wenn die Matrix in Zeilenstufenform eine Zeile der Form $0 = c$ (mit $c \neq 0$) enthält.