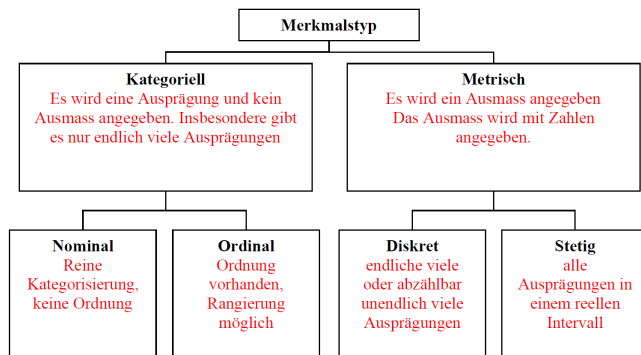


# Stochastik und Statistik

## Deskriptive Statistik

### Begriffe

- **Merkmalsträger:** Objekte, über die Informationen gesammelt werden (z.B. Personen, Tiere, Dinge)
- **Merkmal:** Eigenschaft eines Merkmalsträgers (z.B. Alter, Geschlecht, Größe)
- **Grundgesamtheit:** Gesamte Menge aller Merkmalsträger
- **Stichprobe:** Teilmenge der Grundgesamtheit
- **Vollerhebung:** Untersuchung der gesamten Grundgesamtheit
- **Ausprägung:** Mögliche Werte eines Merkmals



### Relative/Absolute Häufigkeit

#### Nicht klassierte Daten

$$f_i = \frac{h_i}{n}$$

#### Klassierte Daten

$$d_i = \frac{f(x)}{b_i} \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{h_i}{n}$$

- $f_i$ : relative Häufigkeit der Ausprägung  $i$  (PMF)
- $h_i$ : absolute Häufigkeit der Ausprägung  $i$
- $d_i$ : Dichte der Klasse  $i$  (PDF)
- $n$ : Gesamtanzahl der Beobachtungen

### Summenhäufigkeit

#### Diskrete Daten

$$H(x) = \sum_{j=1}^x h_j \quad \text{bzw.} \quad F(x) = \sum_{j=1}^x f_j$$

#### Stetige Daten

$$H(x_k) = \sum_{j=1}^k h_j \quad \text{bzw.} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

- $H(x)$ : Summe aller absoluten Häufigkeiten bis Ausprägung  $x$
- Wenn  $h$  absolute Häufigkeit, dann heisst  $H$  Summenhäufigkeit
- Wenn  $f$  relative Häufigkeit, dann heisst  $F$  kumulative Verteilungsfunktion (CDF)

### Eigenschaften der PMF und CDF nicht klassierter Daten

- $0 \leq f_i \leq 1$  und  $0 \leq F(x) \leq 1$
- $\sum_i f_i = 1$  bzw.  $F(x_{\max}) = 1$
- $F(x)$  ist monoton wachsend  $\Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$  für  $x_1 < x_2$
- $F(x)$  ist rechtsstetig heisst der Wert an der Stelle  $x$  ist gleich dem Grenzwert von rechts

### Eigenschaften der PMF und CDF klassierter Daten

- $0 \leq f_i \leq 1$  und  $0 \leq F(x) \leq 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  und  $F'(x) = f(x)$
- Für  $x \in K_i$  gilt:  $\frac{F(x) - F(a_i)}{b_i} = \frac{F(a_{i+1}) - F(a_i)}{b_i} = f_i$

### Klassierte Daten

- Daten werden in Klassen eingeteilt
- Klassenbreite:  $b_i = a_{i+1} - a_i$  (mit  $a_i$  Klassenuntergrenze)
- Klassenmitte:  $M_i = \frac{a_{i+1} + a_i}{2}$  (mit  $l$  untere und  $u$  obere Klassenbegrenzung)
- Dichte:  $d_i = \frac{f_i}{b_i}$

### Kenngrossen

#### • Arithmetisches Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{bzw. wenn klassiert} \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^m f_i \cdot M_i$$

#### • Median:

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ ungerade} \\ \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Bei klassierten Daten siehe Quantile mit  $p = 0.5$

#### • Modalwert:

$$\hat{x} = x_i \quad \text{mit} \quad h_i = \max(h_1, h_2, \dots, h_k)$$

#### • Varianz:

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{bei klassierten Daten } x_i = M_i)$$

$$\tilde{s}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad \text{mit} \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^m f_i \cdot M_i^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{bzw.}) \quad s^2 = \frac{n}{n-1} \tilde{s}^2$$

#### • Standardabweichung:

$$s = \sqrt{s^2} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2}$$

#### • Spannweite:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

#### • Quantile:

$$R_p = L + \left( \frac{p - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \right) \cdot h_i$$

$L$ : untere Klassenbegrenzung der Median-Klasse

#### • Lineare Interpolation:

$$y = y_1 + \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Wenn  $F(x)$  gesucht ist:  $y_1$  untere CDF,  $y_2$  obere CDF  
 $x_1$  untere Klassenbegrenzung,  $x_2$  obere

Klassenbegrenzung

Wenn  $Q_p$  gesucht ist:  $y_1$  untere Klassenbegrenzung,  $y_2$  obere Klassenbegrenzung  
 $x_1$  untere CDF,  $x_2$  obere CDF

## Kovarianz und Korrelation

- **Kovarianz:**

$$\tilde{s}_{xy} = \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

- **Korrelationskoeffizient nach Pearson:**

$$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{s_X s_Y} = \frac{\tilde{s}_{xy}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}}$$

- $r$  liegt im Intervall  $[-1, 1]$
- $r > 0$ : positive Korrelation,  $r < 0$ : negative Korrelation,  $r = 0$ : keine Korrelation
- $\tilde{s}_{xy}$  und  $r$  beschreiben die lineare Abhängigkeit zwischen zwei Merkmalen d.h. wie stark die Merkmale von der Geraden  $y = mx + b$  abweichen
- Ist nicht robust gegenüber Ausreißern

## Rangkorrelation nach Spearman

- Rang:

$$rg(x_i) = \begin{cases} k, & \text{wenn } x_i \text{ der } k\text{-te kleinste Wert ist} \\ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m rg(x_{i_j}), & \text{bei } m \text{ gleichen Werten} \end{cases}$$

- Korrelationskoeffizient nach Spearman:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} \quad \text{mit } d_i = rg(x_i) - rg(y_i)$$

- $r_s$  beschreibt die monotone Abhängigkeit zwischen zwei Merkmalen
- Ist robust gegenüber Ausreißern

## Kombinatorik

### Grundlagen

- **Multiplikationsregel:** Wenn ein Vorgang in  $m$  Arten und ein zweiter Vorgang in  $n$  Arten durchgeführt werden kann, dann können beide Vorgänge in  $m \cdot n$  Arten durchgeführt werden.
- **Additionsregel:** Wenn ein Vorgang in  $m$  Arten und ein zweiter Vorgang in  $n$  Arten durchgeführt werden kann, und beide Vorgänge sich gegenseitig ausschließen, dann können beide Vorgänge in  $m+n$  Arten durchgeführt werden.

## Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Anzahl der Möglichkeiten, aus  $n$  Elementen  $k$  Elemente ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen
- $n$ : Gesamtanzahl der Elemente
- $k$ : Anzahl der auszuwählenden Elemente
- $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n$
- Symmetrie:  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Rekursion:  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- Binomischer Lehrsatz:  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- Summe der Binomialkoeffizienten:  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

### Kombinatorische Auswahlmöglichkeiten

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Mit Reihenfolge	$n^k$ <i>Zahlenschloss</i>	$\frac{n!}{(n-k)!}$ <i>Rennen</i>
Ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$ <i>Warenwahl</i>	$\binom{n}{k}$ <i>Gruppenwahl</i>

## Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

### Begriffe

- **Experiment:** Vorgang, der zu einem Ergebnis führt
- **Ergebnis:** Resultat eines Experiments
- **Ergebnismenge** ( $\Omega$ ): Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments
- **Ereignis** ( $A$ ): Teilmenge der Ergebnismenge
- **Sicheres Ereignis:** Ereignis, das immer eintritt ( $A = \Omega$ )
- **Unmögliches Ereignis:** Ereignis, das nie eintritt ( $A = \emptyset$ )

## Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

- **Laplace-Experiment:** Experiment mit endlicher Ergebnismenge, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind
- **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses:**

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- **Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung:**

- $0 \leq P(A) \leq 1$  für jedes Ereignis  $A$
- $P(\Omega) = 1$
- Für paarweise disjunkte Ereignisse  $A_1, A_2, \dots$  gilt:  $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$
- Wenn nicht disjunkt:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Komplementregel:  $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$

### Lage- und Streumasse

- **Lagemasse:** Beschreiben die zentrale Tendenz einer Verteilung
- **Streumasse:** Beschreiben die Variabilität oder Streuung der Daten
- **Erwartungswert:**

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

- **Varianz:**

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) = E(X^2) - \mu^2$$

- **Standardabweichung:**

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

## Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- **Bedingte Wahrscheinlichkeit:**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{für } P(B) > 0$$

- **Multiplikationssatz:**

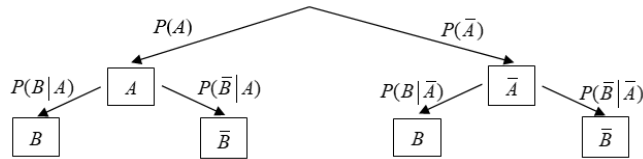
$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

- **Totale Wahrscheinlichkeit:**

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$$

- **Satz von Bayes:**

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$



## Stochastische Unabhängigkeit

- Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Äquivalent dazu:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{oder} \quad P(B|A) = P(B)$$

- Mehrere Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sind stochastisch unabhängig, wenn für jede Teilmenge  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  gilt:

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

- Die Funktion  $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$  heisst gemeinsame Verteilung von  $X$  und  $Y$
- Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind stochastisch unabhängig, wenn für alle  $x$  und  $y$  gilt:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

## Für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen gilt:

- $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

## Spezielle Verteilungen

### Die Hypergeometrische Verteilung

- Diskrete Verteilung
- Modelliert die Anzahl der Erfolge in einer Stichprobe ohne Zurücklegen
- Parameter:  $N$  (Gesamtanzahl),  $K$  (Anzahl der Erfolge in der Grundgesamtheit),  $n$  (Stichprobengröße)
- Kann bei  $n \leq \frac{N}{20}$  durch die Binomialverteilung approximiert werden:  $H(N, K, n) \approx B\left(n, \frac{K}{N}\right)$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

- Erwartungswert:  $E(X) = n \cdot \frac{K}{N}$
- Varianz:  $Var(X) = n \cdot \frac{K}{N} \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

### Die Bernoulli-Verteilung

- Diskrete Verteilung
- Modelliert ein Experiment mit zwei möglichen Ergebnissen (Erfolg oder Misserfolg)
- Parameter:  $p$  (Wahrscheinlichkeit für Erfolg)
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$$

- Erwartungswert:  $E(X) = E(X^2) = p$
- Varianz:  $Var(X) = p(1 - p)$

## Die Binomialverteilung

- Diskrete Verteilung
- Modelliert die Anzahl der Erfolge in einer Serie von unabhängigen Bernoulli-Experimenten
- Parameter:  $n$  (Anzahl der Experimente),  $p$  (Wahrscheinlichkeit für Erfolg)
- Kann bei  $n \geq 50$  und  $p \leq 0.1$  durch die Poisson-Verteilung approximiert werden:  $B(n, p) \approx P(\lambda = n \cdot p)$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

- Erwartungswert:  $E(X) = n \cdot p$
- Varianz:  $Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

## Die Poisson-Verteilung

- Diskrete Verteilung
- Modelliert die Anzahl der Ereignisse in einem festen Intervall, wenn die Ereignisse unabhängig und mit konstanter Rate auftreten
- Parameter:  $\lambda$  (durchschnittliche Anzahl der Ereignisse pro Intervall)
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- Erwartungswert:  $E(X) = \lambda$
- Varianz:  $Var(X) = \lambda$

## Die Exponentialverteilung

- Stetige Verteilung
- Modelliert die Zeit zwischen Ereignissen in einem Poisson-Prozess
- Parameter:  $\lambda$  (Ereignisrate)

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{für } x \geq 0$$

- Kumulative Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{für } x \geq 0$$

- Erwartungswert:  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- Varianz:  $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- Gedächtnislosigkeit:  $P(X > s+t | X > s) = P(X > t)$

### Gauss'sche Normalverteilung

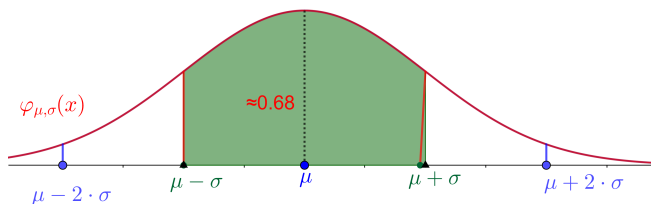
- Stetige Verteilung
- Modelliert viele natürliche Phänomene (z.B. Messfehler, Körpergrößen)
- Parameter:  $\mu$  (Erwartungswert),  $\sigma$  (Standardabweichung)
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Kumulative Verteilungsfunktion:

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

- Erwartungswert:  $E(X) = \mu$
- Varianz:  $Var(X) = \sigma^2$
- Standardnormalverteilung:  $\mu = 0, \sigma = 1$
- Zentraler Grenzwertsatz: Summe vieler unabhängiger Zufallsvariablen nähert sich einer Normalverteilung an



### Regression

- Gegeben: Datenpunkte  $(x_i, y_i)$  für  $i = 1, 2, \dots, n$
- Residuen / Fehler:  $\epsilon_i = y_i - \hat{y}_i$  mit  $\hat{y}_i$  als geschätzter Wert
- Ziel: Funktion  $f(x)$  finden, die die Datenpunkte bestmöglich beschreibt

### Regressionsgerade

- Lineare Regression:  $f(x) = ax + b$
- Korrelationskoeffizient

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

- Lösungen:

$$a = \frac{\tilde{s}_{xy}}{\tilde{s}_x^2} \quad (\text{Geht auch mit den korrigierten Varianzen})$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$\tilde{s}_\epsilon^2 = \tilde{s}_y^2 - \underbrace{\frac{\tilde{s}_{xy}^2}{\tilde{s}_x^2}}_{\tilde{s}_y^2} \quad (\text{Varianz der Residuen})$$

- Totale Varianz:

$$\tilde{s}_y^2 = \tilde{s}_y^2 + \tilde{s}_\epsilon^2$$

- Bestimmtheitsmass:

$$R^2 = \frac{\tilde{s}_y^2}{\tilde{s}_y^2} = r_{xy}^2$$

- $R^2$  gibt an, wie gut die Regressionsgerade die Daten beschreibt (0 bis 1)

### Bestimmung der Regressionsparameter mittels Matrix

- Datenpunkte in Vektorform:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

- Regressionsparameter in Vektorform:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

- Normalengleichung:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{b} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

- Lösung:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

- Residuenvektor:

$$\vec{\epsilon} = \vec{y} - \mathbf{A}\vec{b}$$

### Schliessende Statistik

#### Zufallsstichprobe

- Stichprobe, bei der jedes Element der Grundgesamtheit die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, ausgewählt zu werden
- Wichtig für die Repräsentativität der Stichprobe

#### Parameterschätzung

- Erwartungstreue Schätzer:  $E(\hat{\theta}) = \theta$
- Effizienz: Varianz des Schätzers ist minimal
- Konsistenz: Schätzer konvergiert gegen den wahren Parameterwert bei wachsendem Stichprobenumfang

#### Vertrauensintervalle / Konfidenzintervalle

- Intervall, das den wahren Parameterwert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau) enthält
- Für den Mittelwert bei bekannter Varianz:

$$VI = \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{siehe Tabelle Zeile 1}$$

- Für den Mittelwert bei unbekannter Varianz:

$$VI = \bar{x} \pm t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{siehe Tabelle Zeile 2}$$

Wichtigste Tabellen

Vertrauensintervalle zum Niveau  $\gamma$

Verteilung der Grundgesamtheit	zu schätzender Parameter	Schätzfunktion	Zugehörige standardisierte Zufallsvariable	Verteilung und benötigte Quantile	Zufallsvariablen für Intervallgrenzen
Normalverteilung, Varianz bekannt	$\mu$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	Standardnormalverteilung $c = u_p$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \bar{x} - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\Theta_o = \bar{x} + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Normalverteilung, Varianz unbekannt und $n \leq 30$ (sonst Fall 1 mit $s$ statt $\sigma$ )	$\mu$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$	t-Verteilung mit $f = n - 1$ Freiheitsgraden, $c = t_{f,p}$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \bar{x} - c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\Theta_o = \bar{x} + c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
Normalverteilung	$\sigma^2$	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	Chi-Quadrat-Verteilung mit $f = n - 1$ , $c_1 = z_{p_1;f}$ , $c_2 = z_{p_2;f}$ mit $p_1 = \frac{1-\gamma}{2}$ , $p_2 = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \frac{(n-1)S^2}{c_2}$ $\Theta_o = \frac{(n-1)S^2}{c_1}$
Bernoulli-Verteilung mit $n\hat{p}(1 - \hat{p}) > 9$	$p$ (Erfolgswahrscheinlichkeit)	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ $X_i$ 0 oder 1 mit $P(X_i = 1) = p$	$U = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$	Standardnormalverteilung $c = u_p$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \bar{x} - c \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}$ $\Theta_o = \bar{x} + c \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}$
				$c$ aus Tabelle je nach Verteilung	

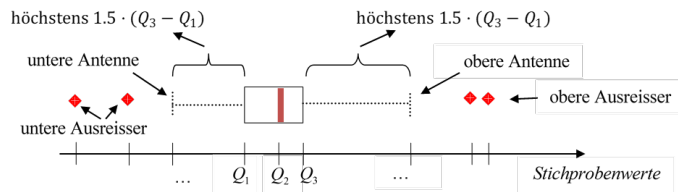
Diskrete und Stetige Verteilungen

	Diskrete Verteilungen	Stetige Verteilungen
Dichtefunktion / PMF / PDF	$f(x) = P(X = x)$	$f(x) = F'(x) \neq P(X = x)$
Kumulative Verteilungsfunktion / CDF	$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$
Wahrscheinlichkeiten	$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^b f(x)$	$\left. \begin{aligned} P(a \leq X \leq b) \\ P(a < X \leq b) \\ P(a < X < b) \end{aligned} \right\} = \int_a^b f(x)dx$  $P(a < X) = 1 - F(a)$
	$P(a < X \leq b) = \sum_{x=a+1}^b f(x)$	
	$P(a < X < b) = \sum_{x=a+1}^{b-1} f(x)$  $P(a < X) = 1 - F(a)$	
Erwartungswert	$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot f(x)$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$
Varianz	$Var(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} (x - E(X))^2 \cdot f(x)$	$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)dx$
Graphische Darstellung von $f(x)$ und $F(x)$	Stabdiagramm	Graph

## Wichtigste Diagramme

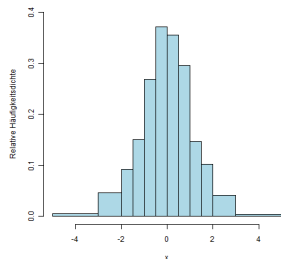
### Boxplot

- Visuelle Darstellung der Verteilung eines Merkmals
- Zeigt Median, Quartile, Ausreisser und Spannweite
- Bestandteile:
  - **Median** ( $Q_2$ ): Mittlerer Wert der Daten
  - **Unteres Quartil** ( $Q_1$ ): Median der unteren Hälfte der Daten
  - **Oberes Quartil** ( $Q_3$ ): Median der oberen Hälfte der Daten
  - **Interquartilsabstand** (IQR):  $IQR = Q_3 - Q_1$
  - **Whiskers**: Linien, die bis zum letzten Datenpunkt innerhalb von  $1.5 \cdot IQR$  von  $Q_1$  und  $Q_3$  reichen
  - **Ausreisser**: Datenpunkte ausserhalb der Whiskers



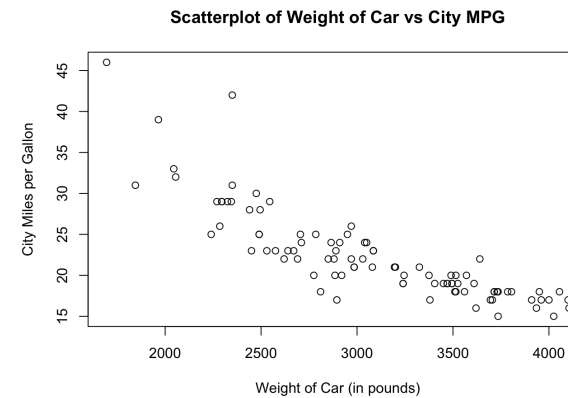
### Histogramm

- Grafische Darstellung der Häufigkeitsverteilung eines Merkmals
- Daten werden in Klassen (Intervalle) eingeteilt
- Höhe der Balken entspricht der Häufigkeit oder Dichte der Daten in jeder Klasse
- Wichtige Begriffe:
  - **Klassenbreite**: Breite der Intervalle
  - **Absolute Häufigkeit**: Anzahl der Datenpunkte in einer Klasse
  - **Relative Häufigkeit**: Anteil der Datenpunkte in einer Klasse
  - **Dichte**: Relative Häufigkeit dividiert durch die Klassenbreite

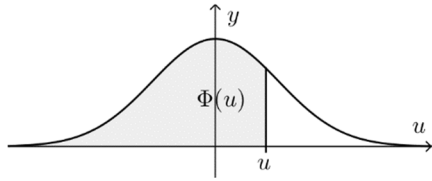


### Streuungsdiagramm / Scatterplot

- Grafische Darstellung der Beziehung zwischen zwei quantitativen Merkmalen
- Jeder Punkt repräsentiert ein Datenpaar  $(x_i, y_i)$
- Hilft, Korrelationen oder Trends zwischen den Merkmalen zu erkennen



**Tabelle 1: CDF  $\Phi(u)$  der Standardnormalverteilung**



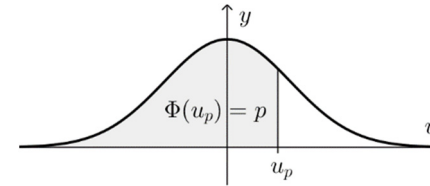
$$P(U \leq u) = \Phi(u)$$

$$P(U \geq u) = 1 - \Phi(u)$$

$$P(-u \leq U \leq u) = 2 \cdot \Phi(u) - 1$$

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$$

**Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung**



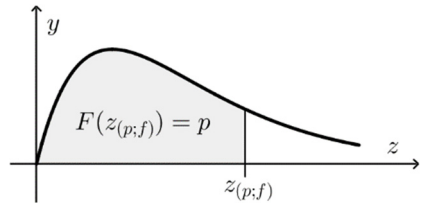
$p$  : vorgegebene  
Wahrscheinlichkeit

$u_p$  : zur Wahrscheinlichkeit  $p$   
gehöriges Quantil

$u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$p$	$u_p$	$p$	$u_p$
0.90	1.282	0.10	-1.282
0.95	1.645	0.05	-1.645
0.975	1.960	0.025	-1.960
0.99	2.326	0.01	-2.326
0.995	2.576	0.005	-2.576
0.999	3.090	0.001	-3.090

**Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung**

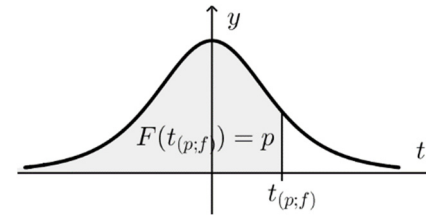


$p$  : vorgegebene Wahrscheinlichkeit

$z_{(p;f)}$  : zur Wahrscheinlichkeit  $p$  gehöriges Quantil bei  $f$  Freiheitsgraden

	$p$									
$f$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
22	8.6	9.5	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
24	9.9	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

**Tabelle 4: Quantile der t-Verteilung von «Student»**



$p$  : vorgegebene Wahrscheinlichkeit

$t_{(p;f)}$  : zur Wahrscheinlichkeit  $p$  gehöriges Quantil bei  $f$  Freiheitsgraden

	$p$				
$f$	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
500	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

$$t_{(1-p;f)} = -t_{(p;f)}$$