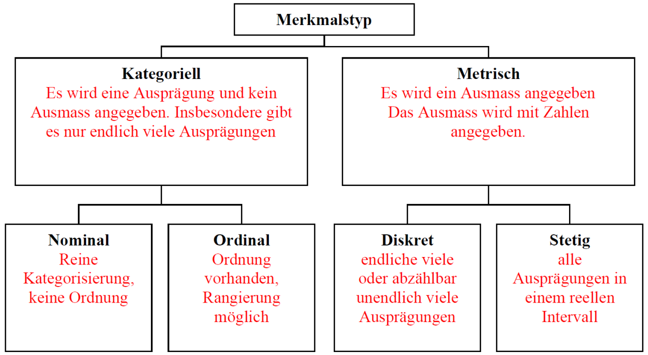
Stochastik und Statistik

Deskriptive Statistik

Begriffe

- **Merkmalsträger**: Objekte, über die Informationen gesammelt werden (z.B. Personen, Tiere, Dinge)
- **Merkmal**: Eigenschaft eines Merkmalsträgers (z.B. Alter, Geschlecht, Größe)
- **Grundgesamtheit**: Gesamte Menge aller Merkmalsträger
- **Stichprobe**: Teilmenge der Grundgesamtheit
- **Vollerhebung**: Untersuchung der gesamten Grundgesamtheit
- **Ausprägung**: Mögliche Werte eines Merkmals



Relative/Absolute Häufigkeit

Nicht klassierte Daten

$$f_i = \frac{h_i}{n}$$

Klassierte Daten

$$d_i = \frac{f(x)}{b_i} \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{h_i}{n}$$

- f_i: relative Häufigkeit der Ausprägung i (PMF)
- h_i: absolute Häufigkeit der Ausprägung i
- d_i: Dichte der Klasse i (PDF)
- n: Gesamtanzahl der Beobachtungen

Summenhäufigkeit

Diskrete Daten

$$H(x) = \sum_{j=1}^{x} h_j \quad \text{bzw.} \quad F(x) = \sum_{j=1}^{x} f_j$$

Stetige Daten

$$H(x_k) = \sum_{j=1}^{k} h_j \quad \text{bzw.} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

- $H(x)$: Summe aller absoluten Häufigkeiten bis Ausprägung x
- Wenn h absolute Häufigkeit, dann heisst H Summenhäufigkeit
- Wenn f relative Häufigkeit, dann heisst F kumulative Verteilungsfunktion (CDF)

Eigenschaften der PMF und CDF nicht klassierter Daten

- $0 \leq f_i \leq 1$ und $0 \leq F(x) \leq 1$
- $\sum_i f_i = 1$ bzw. $F(x_{\max}) = 1$
- $F(x)$ ist monoton wachsend $\Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ für $x_1 < x_2$
- $F(x)$ ist rechtsstetig heisst der Wert an der Stelle x ist gleich dem Grenzwert von rechts

Eigenschaften der PMF und CDF klassierter Daten

- $0 \leq f_i \leq 1$ und $0 \leq F(x) \leq 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ und $F'(x) = f(x)$
- Für $x \in K_i$ gilt: $\frac{F(x)-F(a_i)}{b_i} = \frac{F(a_{i+1})-F(a_i)}{b_i} = f_i$

Klassierte Daten

- Daten werden in Klassen eingeteilt
- Klassenbreite: $b_i = a_{i+1} - a_i$ (mit a_i Klassenuntergrenze)
- Klassenmitte: $M_i = \frac{a_{i+1}+a_i}{2}$ (mit a_i Klassenuntergrenze)
- Dichte: $d_i = \frac{f_i}{b_i}$

Kenngrössen

- **Arithmetisches Mittel**:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{bzw. wenn klassiert} \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot M_i$$

- **Median**:

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ ungerade} \\ \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

  Bei klassierten Daten siehe Lineare Interpolation unten ($Q_{0.5}$).

- **Modalwert**:

$$\hat{x} = x_i \quad \text{mit } h_i = \max(h_1, h_2, \ldots, h_k)$$

- **Varianz**:

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{(bei klassierten Daten } x_i = M_i)$$

$$\tilde{s}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad \text{mit} \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot M_i^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{(bzw.)} \quad s^2 = \frac{n}{n-1}\tilde{s}^2$$

$$\tilde{s}_{xy} = \overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y} \quad \text{mit} \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- **Standardabweichung**:

$$s = \sqrt{s^2} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2}$$

- **Spannweite**:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

- **Lineare Interpolation**:

$$y = y_1 + \frac{(x - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

  Wenn $F(x)$ gesucht ist: y_1 untere CDF, y_2 obere CDF
  x_1 untere Klassenbegrenzung, x_2 obere Klassenbegrenzung
  Wenn Q_p gesucht ist: y_1 untere Klassenbegrenzung, y_2 obere Klassenbegrenzung
  x_1 untere CDF, x_2 obere CDF

Kovarianz und Korrelation

- **Kovarianz**:

$$\tilde{s}_{xy} = \text{Cov}(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}$$

- **Korrelationskoeffizient nach Pearson**:

$$r = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{s_X s_Y} = \frac{\tilde{s}_{xy}}{\sqrt{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\cdot\sqrt{\overline{y^2}-\bar{y}^2}}$$

- r liegt im Intervall $[-1,1]$
- $r>0$: positive Korrelation, $r<0$: negative Korrelation, $r=0$: keine Korrelation
- $\tilde{s}_{xy}$ und r beschreiben die lineare Abhängigkeit zwischen zwei Merkmalen d.h. wie stark die Merkmale von der Geraden $y = mx+b$ abweichen
- Ist nicht robust gegenüber Ausreissern

Rangkorrelation nach Spearman

- Rang:

$$rg(x_i) = \begin{cases} k, & \text{wenn } x_i \text{ der} \\ & k\text{-te kleinste Wert ist} \\ \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} rg(x_{i_j}), & \text{bei } m \text{ gleichen Werten} \end{cases}$$

- Korrelationskoeffizient nach Spearman:

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(rg(x_i)-\overline{rg(x)})(rg(y_i)-\overline{rg(y)})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(rg(x_i)-\overline{rg(x)})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(rg(y_i)-\overline{rg(y)})^2}}$$

- r_s beschreibt die monotone Abhängigkeit zwischen zwei Merkmalen
- Ist robust gegenüber Ausreissern

Kombinatorik

Grundlagen

- **Multiplikationsregel**: Wenn ein Vorgang in m Arten und ein zweiter Vorgang in n Arten durchgeführt werden kann, dann können beide Vorgänge in $m\cdot n$ Arten durchgeführt werden.
- **Additionsregel**: Wenn ein Vorgang in m Arten und ein zweiter Vorgang in n Arten durchgeführt werden kann, und beide Vorgänge sich gegenseitig ausschließen, dann können beide Vorgänge in $m+n$ Arten durchgeführt werden.

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Anzahl der Möglichkeiten, aus n Elementen k Elemente ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen
- n: Gesamtanzahl der Elemente
- k: Anzahl der auszuwählenden Elemente
- $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{n}=1$, $\binom{n}{1}=n$
- Symmetrie: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
- Rekursion: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$
- Binomischer Lehrsatz: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$
- Summe der Binomialkoeffizienten: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

Kombinatorische Auswahlmöglichkeiten

	Mit Zurücklegen	**Ohne Zurücklegen**
Mit Reihenfolge	n^k *Zahlenschloss*	$\frac{n!}{(n-k)!}$ *Rennen*
Ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$ *Warenwahl*	$\binom{n}{k}$ *Gruppenwahl*

- Multiplizieren der Warscheinlichkeiten bei:
  - Unabhängigen Ereignissen (Ziehen mit Zurücklegen)
- Addieren der Warscheinlichkeiten bei:
  - Sich gegenseitig ausschliessenden Ereignissen

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Begriffe

- **Experiment**: Vorgang, der zu einem Ergebnis führt
- **Ergebnis**: Resultat eines Experiments
- **Ergebnismenge** (Ω): Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments
- **Ereignis** (A): Teilmenge der Ergebnismenge
- **Sicheres Ereignis**: Ereignis, das immer eintritt $(A=\Omega)$
- **Unmögliches Ereignis**: Ereignis, das nie eintritt $(A=\emptyset)$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

- **Laplace-Experiment**: Experiment mit endlicher Ergebnismenge, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind
- **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses**:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- **Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung**:
  - $0\le P(A)\le 1$ für jedes Ereignis A
  - $P(\Omega)=1$
  - Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ gilt: $P(\bigcup_i A_i)=\sum_i P(A_i)$
  - Wenn nicht disjunkt: $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
  - Komplementregel: $P(\Omega\backslash A)=1-P(A)$

Lage- und Streumasse

- **Lagemasse**: Beschreiben die zentrale Tendenz einer Verteilung
- **Streumasse**: Beschreiben die Variabilität oder Streuung der Daten
- **Erwartungswert**:

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i\cdot P(X=x_i)$$

- **Varianz**:

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_i (x_i-\mu)^2\cdot P(X=x_i) = E(X^2)-\mu^2$$

- **Standardabweichung**:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- **Bedingte Wahrscheinlichkeit**:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{für } P(B) > 0$$

- **Multiplikationssatz**:

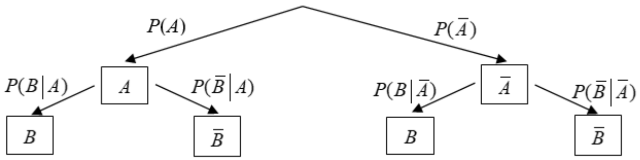
$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

- **Totale Wahrscheinlichkeit**:

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})$$

- **Satz von Bayes**:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$



Stockhastische Unabhängigkeit

- Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Äquivalent dazu:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{oder} \quad P(B|A) = P(B)$$

- Mehrere Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind stochastisch unabhängig, wenn für jede Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt:

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

- Die Funktion $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ heisst gemeinsame Verteilung von X und Y
- Zufallsvariablen X und Y sind stochastisch unabhängig, wenn für alle x und y gilt:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen gilt:

- $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Spezielle Verteilungen

Die Hypergeometrische Verteilung

- Diskrete Verteilung
- Modelliert die Anzahl der Erfolge in einer Stichprobe ohne Zurücklegen
- Parameter: N (Gesamtanzahl), K (Anzahl der Erfolge in der Grundgesamtheit), n (Stichprobengröße)
- Kann bei $n \leq \frac{N}{20}$ durch die Binomialverteilung approximiert werden: $H(N, K, n) \approx B\left(n, \frac{K}{N}\right)$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

- Erwartungswert: $E(X) = n \cdot \frac{K}{N}$
- Varianz: $Var(X) = n \cdot \frac{K}{N} \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Die Bernoulli-Verteilung

- Diskrete Verteilung
- Modelliert ein Experiment mit zwei möglichen Ergebnissen (Erfolg oder Misserfolg)
- Parameter: p (Wahrscheinlichkeit für Erfolg)
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p$$

- Erwartungswert: $E(X) = E(X^2) = p$
- Varianz: $Var(X) = p(1 - p)$

Die Binomialverteilung

- Diskrete Verteilung
- Modelliert die Anzahl der Erfolge in einer Serie von unabhängigen Bernoulli-Experimenten
- Parameter: n (Anzahl der Experimente), p (Wahrscheinlichkeit für Erfolg)
- Kann bei $n \geq 50$ und $p \leq 0.1$ durch die Poisson-Verteilung approximiert werden: $B(n, p) \approx P(\lambda = n \cdot p)$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

- Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$
- Varianz: $Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Die Poisson-Verteilung

- Diskrete Verteilung
- Modelliert die Anzahl der Ereignisse in einem festen Intervall, wenn die Ereignisse unabhängig und mit konstanter Rate auftreten
- Parameter: λ (durchschnittliche Anzahl der Ereignisse pro Intervall)
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- Erwartungswert: $E(X) = \lambda$
- Varianz: $Var(X) = \lambda$

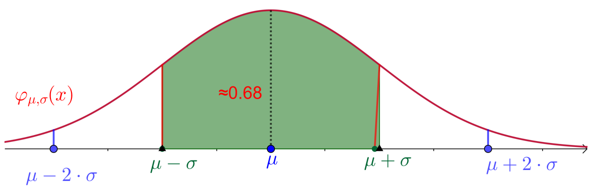
Die Exponentialverteilung

- Stetige Verteilung
- Modelliert die Zeit zwischen Ereignissen in einem Poisson-Prozess
- Parameter: λ (Ereignisrate)

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{für } x \geq 0$$
- Kumulative Verteilungsfunktion:
$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{für } x \geq 0$$
- Erwartungswert: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- Varianz: $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- Gedächtnislosigkeit: $P(X > s+t | X > s) = P(X > t)$

Gauss'sche Normalverteilung

- Stetige Verteilung
- Modelliert viele natürliche Phänomene (z.B. Messfehler, Körpergrößen)
- Parameter: μ (Erwartungswert), σ (Standardabweichung)
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
- Kumulative Verteilungsfunktion:
$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$
- Erwartungswert: $E(X) = \mu$
- Varianz: $Var(X) = \sigma^2$
- Standardnormalverteilung: $\mu = 0$, $\sigma = 1$
- Standardisierung: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$
- Zentraler Grenzwertsatz: Summe vieler unabhängiger Zufallsvariablen nähert sich einer Normalverteilung an



Regression

- Gegeben: Datenpunkte (x_i, y_i) für $i = 1, 2, \ldots, n$
- Residuen / Fehler: $\epsilon_i = y_i - \hat{y}_i$ mit $\hat{y}_i$ als geschätzter Wert
- Ziel: Funktion $f(x)$ finden, die die Datenpunkte bestmöglich beschreibt

Regressionsgerade

- Lineare Regression: $f(x) = ax + b$
- Korrelationskoeffizient (nach Pearson):
$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \approx \frac{\tilde{s}_{xy}}{\tilde{s}_x \tilde{s}_y}$$
- Lösungen:
$$a = \frac{\tilde{s}_{xy}}{\tilde{s}_x^2} \quad \text{(Geht auch mit den korrigierten Varianzen)}$$
$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$
$$\tilde{s}_\epsilon^2 = \tilde{s}_y^2 - \underbrace{\frac{\tilde{s}_{xy}^2}{\tilde{s}_x^2}}_{\tilde{s}_{\hat{y}}^2} \quad \text{(Varianz der Residuen)}$$
- Totale Varianz:
$$\tilde{s}_y^2 = \tilde{s}_{\hat{y}}^2 + \tilde{s}_\epsilon^2$$
- Bestimmtheitsmass:
$$R^2 = \frac{\tilde{s}_{\hat{y}}^2}{\tilde{s}_y^2} = r_{xy}^2$$
- R^2 gibt an, wie gut die Regressionsgerade die Daten beschreibt (0 bis 1 grösser ist besser)

Bestimmung der Regressionsparameter mittels Matrix

- Datenpunkte in Vektorform:
$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$
- Regressionsparameter in Vektorform:
$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$
- Normalengleichung:
$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$$
- Lösung:
$$\mathbf{b} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}$$
- Residuenvektor:
$$\vec{\epsilon} = \vec{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\vec{\mathbf{b}}$$

Schliessende Statistik

Zufallsstichprobe

- Stichprobe, bei der jedes Element der Grundgesamtheit die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, ausgewählt zu werden
- Wichtig für die Repräsentativität der Stichprobe

Parameterschätzung

- Erwartungstreue Schätzer: $E(\hat{\theta}) = \theta$
- Effizienz: Varianz des Schätzers ist minimal
- Konsistenz: Schätzer konvergiert gegen den wahren Parameterwert bei wachsendem Stichprobenumfang

Vertrauensintervalle / Konfidenzintervalle

- Intervall, das den wahren Parameterwert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau) enthält
- Für den Mittelwert bei bekannter Varianz:
$$VI = \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{siehe Tabelle Zeile 1}$$
- Für den Mittelwert bei unbekannter Varianz:
$$VI = \bar{x} \pm t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{siehe Tabelle Zeile 2}$$

Wichtigste Tabellen

Vertrausensintervalle zum Niveau γ

Verteilung der Grundgesamtheit	zu schätzender Parameter	Schätzfunktion	Zugehörige standardisierte Zufallsvariable	Verteilung und benötigte Quantile	Zufallsvariablen für Intervallgrenzen
Normalverteilung, Varianz bekannt	μ (Erwartungswert)	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	Standardnormalverteilung $c = u_p$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \bar{x} - c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\Theta_o = \bar{x} + c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Normalverteilung, Varianz unbekannt und $n \leq 30$ (sonst Fall 1 mit s statt σ)	μ (Erwartungswert)	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$	$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	t-Verteilung mit $f = n-1$ Freiheitsgraden, $c = t_{f,p}$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \bar{x} - c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\Theta_o = \bar{x} + c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
Normalverteilung	σ^2 (Varianz)	$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	Chi-Quadrat-Verteilung mit $f = n-1$, $c_1 = z_{p_1;f}$, $c_2 = z_{p_2;f}$ mit $p_1 = \frac{1-\gamma}{2}$, $p_2 = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \frac{(n-1)S^2}{c_2}$ $\Theta_o = \frac{(n-1)S^2}{c_1}$
Bernoulli-Verteilung mit $n\hat{p}(1-\hat{p}) > 9$	p (Erfolgswahrscheinlichkeit)	$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ X_i 0 oder 1 mit $P(X_i = 1) = p$	$U = \frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$	Standardnormalverteilung $c = u_p$ mit $p = \frac{1+\gamma}{2}$	$\Theta_u = \bar{x} - c \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}$ $\Theta_o = \bar{x} + c \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}$
				c aus Tabelle je nach Verteilung	
				γ Prozent (0.xx)	

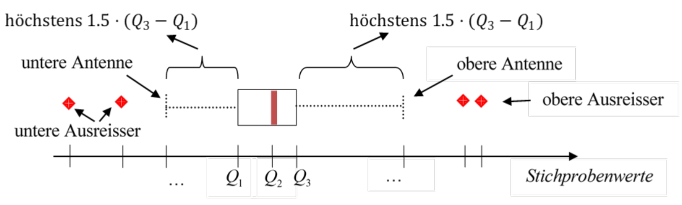
Diskrete und Stetige Verteilungen

	Diskrete Verteilungen	**Stetige Verteilungen**
Dichtefuntion / PMF / PDF	$f(x) = P(X = x)$	$f(x) = F'(x) \neq P(X = x)$
Kumulative Verteilungsfunktion / CDF	$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
Wahrscheinlichkeiten	$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} f(x)$ $P(a < X \leq b) = \sum_{x=a+1}^{b} f(x)$ $P(a < X < b) = \sum_{x=a+1}^{b-1} f(x)$ $P(a < X) = 1 - F(a)$	$\left.\begin{matrix} P(a \leq X \leq b) \\ P(a < X \leq b) \\ P(a < X < b) \end{matrix}\right\} = \int_a^b f(x)dx$ $P(a < X) = 1 - F(a)$
Erwartungswert	$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot f(x)$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$
Varianz	$Var(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} (x - E(X))^2 \cdot f(x)$	$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)dx$
Graphische Darstellung von $f(x)$ und $F(x)$	Stabdiagramm	Graph

Wichtigste Diagramme

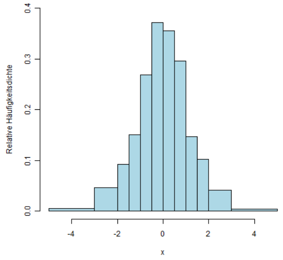
Boxplot

- Visuelle Darstellung der Verteilung eines Merkmals
- Zeigt Median, Quartile, Ausreisser und Spannweite
- Bestandteile:
  - **Median** (Q2): Mittlerer Wert der Daten
  - **Unteres Quartil** (Q1): Median der unteren Hälfte der Daten
  - **Oberes Quartil** (Q3): Median der oberen Hälfte der Daten
  - **Interquartilsabstand** (IQR): $IQR = Q3 - Q1$
  - **Whiskers**: Linien, die bis zum letzten Datenpunkt innerhalb von $1.5 \cdot IQR$ von Q1 und Q3 reichen
  - **Ausreisser**: Datenpunkte ausserhalb der Whiskers



Histogramm

- Grafische Darstellung der Häufigkeitsverteilung eines Merkmals
- Daten werden in Klassen (Intervalle) eingeteilt
- Höhe der Balken entspricht der Häufigkeit oder Dichte der Daten in jeder Klasse
- Wichtige Begriffe:
  - **Klassenbreite**: Breite der Intervalle
  - **Absolute Häufigkeit**: Anzahl der Datenpunkte in einer Klasse
  - **Relative Häufigkeit**: Anteil der Datenpunkte in einer Klasse
  - **Dichte**: Relative Häufigkeit dividiert durch die Klassenbreite



Streuungsdiagramm / Scatterplot

- Grafische Darstellung der Beziehung zwischen zwei quantitativen Merkmalen
- Jeder Punkt repräsentiert ein Datenpaar (x_i, y_i)
- Hilft, Korrelationen oder Trends zwischen den Merkmalen zu erkennen

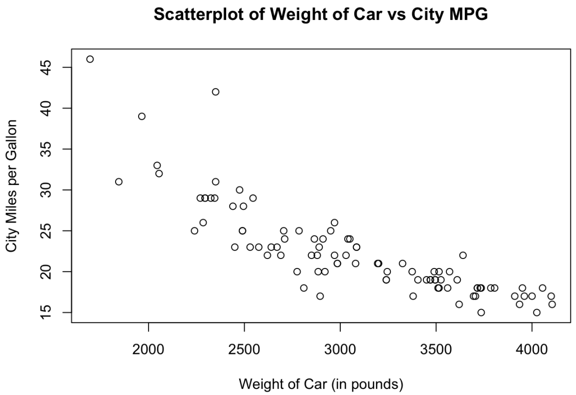
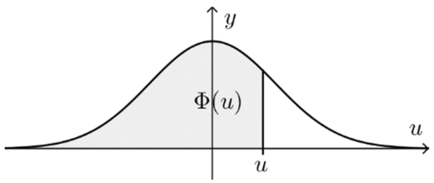


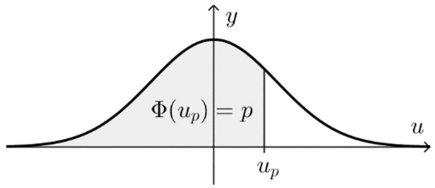
Tabelle 1: CDF $\Phi(u)$ der Standardnormalverteilung



$$P(U \le u) = \Phi(u)$$
$$P(U \ge u) = 1 - \Phi(u)$$
$$P(-u \le U \le u) = 2 \cdot \Phi(u) - 1$$
$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$$

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung

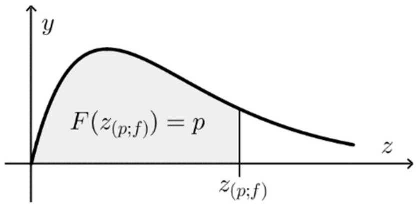


p: vorgegebene Wahrscheinlichkeit

u_p: zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil

p	u_p	p	u_p
0.90	1.282	0.10	–1.282
0.95	1.645	0.05	–1.645
0.975	1.960	0.025	–1.960
0.99	2.326	0.01	–2.326
0.995	2.576	0.005	–2.576
0.999	3.090	0.001	–3.090

Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung

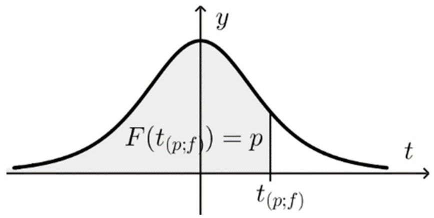


p : vorgegebene Wahrscheinlichkeit

$z_{(p;f)}$: zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil bei f Freiheitsgraden

	p									
f	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
22	8.6	9.5	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
24	9.9	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Tabelle 4: Quantile der t-Verteilung von «Student»



p : vorgegebene Wahrscheinlichkeit

$t_{(p;f)}$: zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil bei f Freiheitsgraden

	p				
f	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
500	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

$$t_{(1-p;f)} = -t_{(p;f)}$$