Theoretische Informatik

Alphabete, Wörter und Sprachen

Alphabete

Ein **Alphabet** Σ ist eine endliche, nichtleere Menge von Symbolen.

Sprachen

Eine **Sprache** L über einem Alphabet Σ ist eine Menge von Wörtern, die aus Symbolen von Σ bestehen. Eine Sprache kann endlich oder unendlich sein. Die leere Sprache wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Wörter

Ein **Wort** w ist eine endliche Folge von Symbolen aus einem Alphabet Σ. Die Länge eines Wortes w wird mit $|w|$ bezeichnet. Das leere Wort wird mit ε dargestellt und hat die Länge 0. Die Menge aller Wörter über einem Alphabet Σ wird mit Σ^* bezeichnet (Kleenesche Hülle).

Endliche Automaten

Deterministische endliche Automaten (DEA)

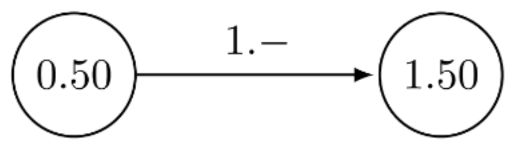
Ein DEA ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei:

- Q eine endliche Menge von Zuständen ist,
- Σ ein Alphabet ist,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ die Übergangsfunktion ist,
- $q_0 \in Q$ der Startzustand ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge der Endzustände ist.

Übergangsfunktion: $\delta(q_0, a_1) = q_1$
Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird akzeptiert, wenn es von M verarbeitet wird und der Endzustand in F liegt.

Nichtdeterministische endliche Automaten (NEA)

Ein NEA ist ähnlich aufgebaut, aber die Übergangsfunktion δ kann mehrere Zustände für ein Symbol zurückgeben: $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$. Ein NEA akzeptiert ein Wort, wenn es mindestens einen Pfad gibt, der das Wort vollständig verarbeitet und in einem Endzustand endet.



Kontextfreie Grammatiken

Definition

Eine **kontextfreie Grammatik** (KFG) ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei:

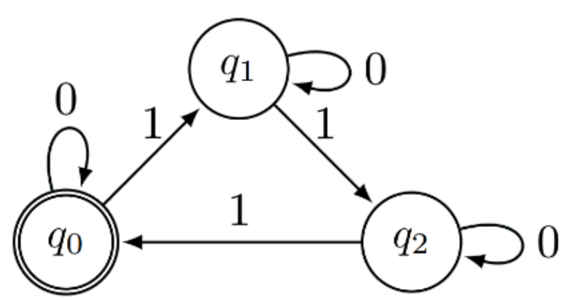
- V eine endliche Menge von Variablen ist,
- Σ ein Alphabet ist (Terminale),
- P eine endliche Menge von Produktionen ist,
- $S \in V$ das Startsymbol ist.

Produktionen

Eine Produktion hat die Form $A \to \alpha$, wobei $A \in V$ und $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$. Die Ableitung eines Wortes erfolgt durch wiederholtes Anwenden der Produktionen.

Ableitung

Ein Wort w wird aus G abgeleitet, wenn es durch eine endliche Folge von Produktionen aus dem Startsymbol S entsteht. Die Menge aller Wörter, die aus G abgeleitet werden können, bildet die Sprache $L(G)$ der Grammatik.



Kellerautomaten (KA)

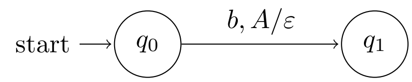
Ein **Kellerautomat** (Pushdown automata) (PDA) ist ein endlicher Automat, der zusätzlich einen Keller (Stack) hat. Er kann Symbole auf den Stack legen und entfernen. Ein Kellerautomat wird durch ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ definiert:

- Q eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein Eingabealphabet,
- Γ ein Kelleralphabet,
- $\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ die Übergangsfunktion,
- $q_0 \in Q$ der Startzustand,
- $Z_0 \in \Gamma$ das Startsymbol des Kellers,
- $F \subseteq Q$ die Menge der Endzustände.

Übergangsfunktion: $\delta(q_0, a_1, Z_0) = (q_1, Z_0 a_2)$

1. Ist im Zustand q_0
2. wird das Symbol a_1 gelesen,
3. wird das Symbol Z_0 vom Keller gepopt,
4. wechselt der Automat in den Zustand q_1,
5. und legt das Symbol $Z_0 a_2$ auf den Keller.

Ein Kellerautomat akzeptiert ein Wort, wenn es in einem Endzustand endet und der Keller leer ist.



Legende: $x, y/z$ bedeutet: lese x, poppe y vom Keller, pushe z auf den Keller.