

基于铰接镶嵌的可膨胀均匀凸多面体形态设计方法

王晖¹, 周烨², 刘梦嫒³, 丁褚桦³

1. 浙江大学建筑工程学院建筑学系, 杭州, 310058

E-mail: wang_hui@zju.edu.cn

2. 浙江大学建筑设计研究院有限公司, 杭州, 310028

3. 浙江大学建筑工程学院建筑学系, 杭州, 310058

摘要: 可膨胀体是可动建筑和可动结构的一种重要类型。在目前的研究和实践中, 可膨胀体多由柔性材料或刚性框架组合覆盖材料组成, 对由刚性面片组成的可膨胀体的研究相对匮乏。本文基于团队关于铰接镶嵌的研究, 将可动原理由二维推广至三维, 探索通过刚性面片铰接的可膨胀多面体设计方法, 并结合互动装置的实际建造进行具体论证。首先将铰接镶嵌与均匀凸多面体相结合, 实现形态可膨胀; 其次确定角点为驱动点, 驱动方向为形心指向各顶点, 实现各面的同步展开; 然后通过节点错位、面片分层和切角等技术, 避免相邻构件和相邻面的碰撞; 对于某些类型的面片, 需要在适当位置加入锁定机构以避免膨胀过程中的过度旋转, 保证结构稳定性。在实验性互动装置的建造中, 选取基本的立方体为原型, 将驱动机制与感应机制相结合, 实现对环境条件的实时响应。该设计方法对多种均匀凸多面体均可适用, 外观形态简洁, 无需外框和导轨, 兼具可动性和艺术表现力, 在建筑形态与表皮设计、装饰设计、机械设计及环境艺术品设计等方面具有应用价值。

关键词: 铰接镶嵌; 可膨胀体; 均匀凸多面体; 形态设计

A Morphological Design Method of Expandable Uniform Convex Polyhedra Based on Hinged Tessellation

Hui Wang¹, Ye Zhou², Mengman Liu³, Chuhua Ding³

1. College of Civil Engineering and Architecture, Hangzhou 310058

E-mail: wang_hui@zju.edu.cn

2. Architectural Design and Research Institute of Zhejiang University Co., Ltd, Hangzhou 310028

3. College of Civil Engineering and Architecture, Hangzhou 310058

Abstract: Expandable objects are an important type of movable architecture and movable structures. In current research and practice, expandable objects are mostly composed of rigid frames covered with other materials, and there is a lack of research on expandable objects composed only of rigid materials. Based on the team's previous research on hinged tessellations, this paper applies movable structures from 2D to 3D, explores the morphological design methods for expandable uniform convex polyhedrons, and demonstrates them specifically in the construction practice of interactive installations. The hinged tessellation is first combined with a polyhedron to achieve volume expandability, then determine the corner point as the driving point, and the driving direction as the center of the shape pointing to the vertices, so as to realize the synchronous unfolding of each face. Through the techniques of node dislocation, face sheet layering and corner cutting, the collision of adjacent components and adjacent faces can be avoided. And for certain types of face sheets, locking mechanisms need to be added to avoid excessive rotation during expansion and to ensure structural stability. The cube is selected as the prototype for the construction practice, and the driving procedure is combined with the sensing program to realize the real-time response to the environmental conditions. The design method is applicable to other kinds of uniform convex polyhedral to achieve a simple form without outer frame and guiding rail. It is both movable and artistic expressive, which is potentially useful in architectural design, decorative design and environmental artwork design, etc.

Keywords: Hinged tessellation; Expandable structure; Uniform convex polyhedra; Morphological design

1 引言

1.1 相关研究及实践现状

可展开结构（Deployable structure）是一类可通过改变几何构型以达到开启或展开状态的结构^[1]，也可称为可拓展结构（Extendible structure）、可膨胀结构(Expandable Structure)等^[2]。由于本文研究的对象为体积可膨胀的均匀凸多面体，以下选取“可膨胀结构”进行描述。

可膨胀结构的现有研究成果，从运动展开机制分类，可大致分为四种：（1）杆件单元在外力牵引下相互旋转和折叠，如剪式单元结构、连杆机构等；（2）单元在弹簧或电机驱动下伸长缩短，如张力集成体系、网格状抛物面天线等；（3）在外力作用下展开的柔性材料，如充气式结构、薄壁管伸展臂等；（4）刚性板单元折叠在节点作用下展开，或刚性板单元旋转展开，如板式天线、伸展臂等^[3]。

美国的Chuck Hoberman团队在可膨胀结构方面作出了多种探索，在剪状结构和折叠多稳态结构方面都有代表性的案例。剪状结构方面，其团队设计的“霍伯曼球（Hoberman sphere）”体系有着多个实践案例^[4]。这些案例尝试了使用不同的方式将剪状框架和覆盖材料（包括柔性材料和刚性面片）结合起来（图1）。



图1 C. Hoberman团队剪状框架与不同覆盖物结合的设计实践 (来源: www.hoberman.com)

2020年，Hoberman团队基于折纸原理设计了充气多稳态结构体系（图2）。其特点是通过特殊的折叠方法，使得叠合的膜体可以在充气到一定程度时自行达到稳态，并以伞状打开方式膨胀，不需要额外的人力辅助，可以用于快速构建紧急临时避难场所等^[5]。

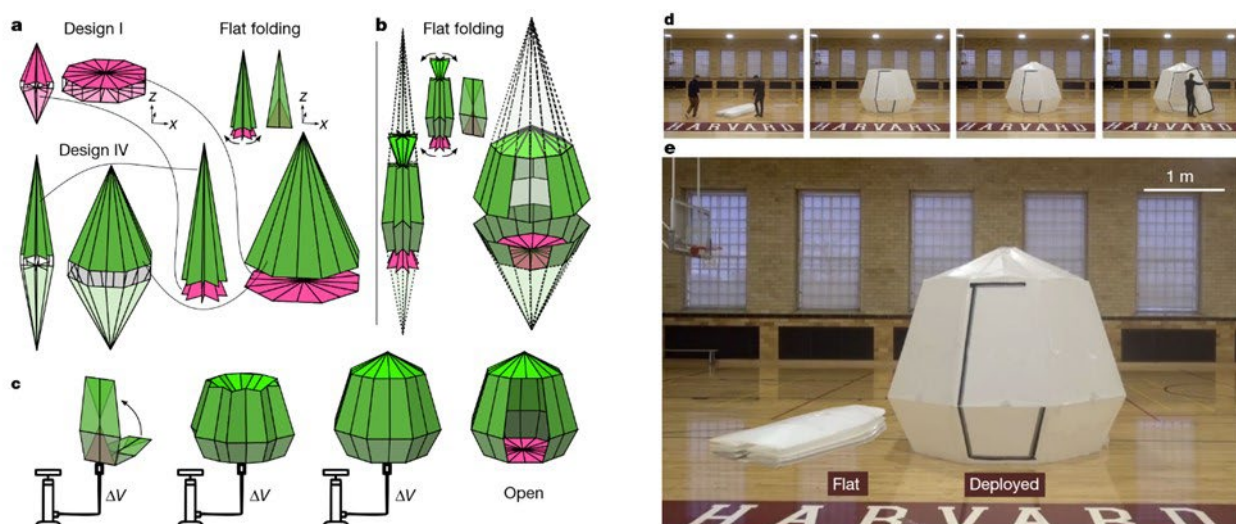


图2 充气多稳态结构原理及实例照片 (来源: 参考文献[5])

总体而言,现有的可膨胀体多由柔性材料、轻质可弯折材料经充气驱动变形,或刚性可动框架结合覆盖材料组成,对于由刚性面片构成的可膨胀体研究还相对匮乏。本团队曾提出基于铰接镶嵌的二维可展开结构设计方法并制作了大尺度装置,参加了第四届中国设计大展(图3)。铰接镶嵌(Hinged Tessellation)是由刚性构件在顶点铰接组成的镶嵌图形,可以通过构件围绕铰接点旋转实现闭合和展开^[6]。本文在此基础上将二维拓展至三维,探讨不包含外框架、驱动机制简洁的可膨胀均匀凸多面体的形态设计方法。

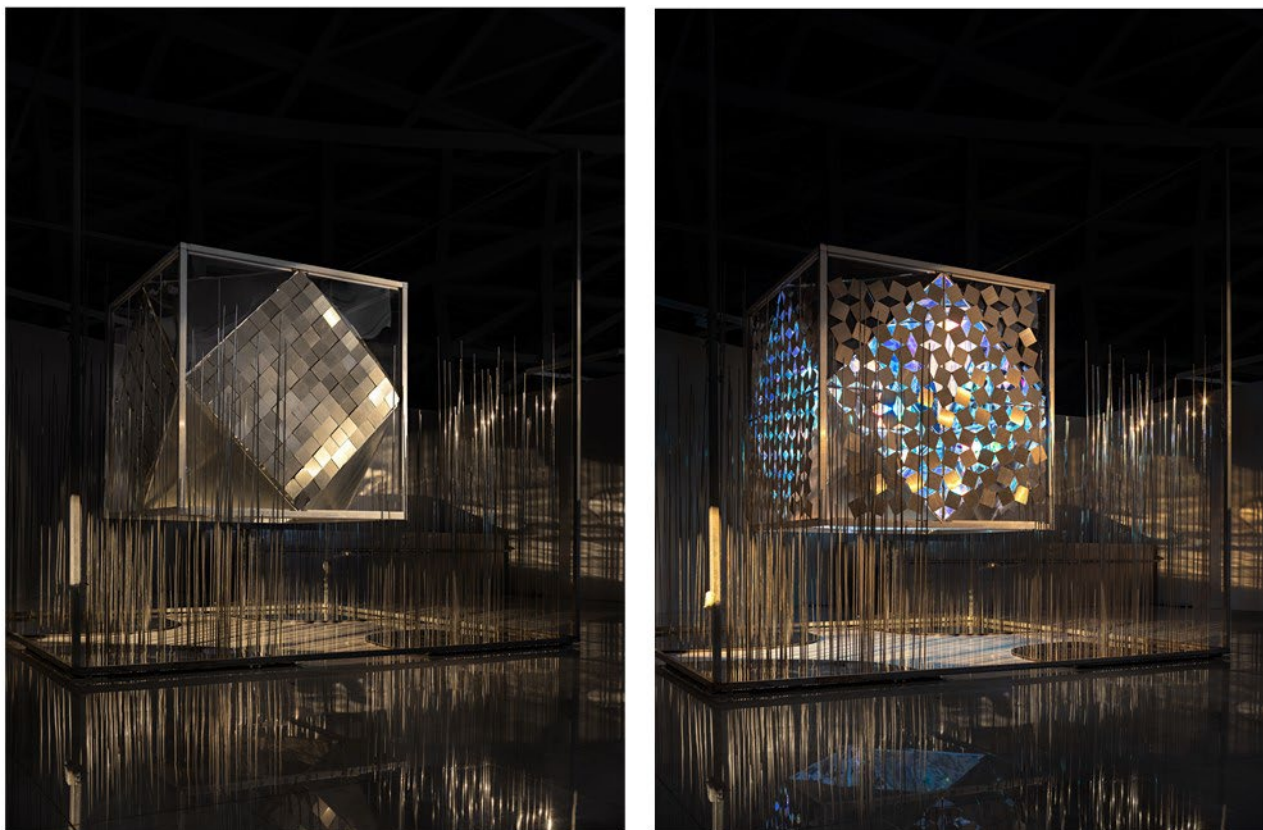


图3 互动装置参加第四届中国设计大展(来源:作者绘制)

2 应用铰接镶嵌原理的可膨胀均匀凸多面体

2.1 单自由度的二维铰接镶嵌

铰接镶嵌按照系统自由度的计算结果可分为单自由度(Single Degree of Freedom)和多自由度(Multiple Degree of Freedom)两种类型^[7]。单自由度系统中,当单个驱动源施加到整个系统时,每个构件都有其确定的运动轨迹,因此通过单一参数即可确定机构的运动状态。多自由度系统则不能确定每个构件的运动轨迹,在实践中一般需要添加导轨或连杆等约束将其转化为单自由度系统。本研究以多面体各面的单自由度展开为基础,实现均匀凸多面体的体积膨胀。

2.2 将二维镶嵌图形应用于均匀凸多面体

均匀多面体是各棱长都相等、各面为正多边形(凸多面体)或正多角星(凹多面体),且各顶点形成的多面角都全等的多面体^[9]。均匀多面体有高度的对称性,各顶点都在以多面体的几何中心为球心的外接球上,且任意顶点可以通过旋转或镜像相互映射^[10]。

均匀凸多面体包括许多种类,本文选取均匀凸多面体中的两个子集:各面完全相等的5种正多面体(Regular polyhedra),也称柏拉图多面体(Platonic solids);以及由两种正多边形组成,且非棱柱的13半正多面体,即阿基米德多面体(Archimedean solids)^[9]进行研究。

由于均匀凸多面体的高度对称性,单自由度二维镶嵌图形可以很好地结合到多面体的各面上,从而实现三维同步展开。在多种铰接镶嵌模式中,由3种基础规则图形(正四边形、正三角形、正六边形)构成的铰接镶嵌最为简洁,应用也最广泛,并且可以密铺到正方形、三角形和正六边形的外轮廓中(图4)。因此本文选取仅包含这3种正多边形的9种均匀凸多面体进行分析(图5中带下划线的多面体)。

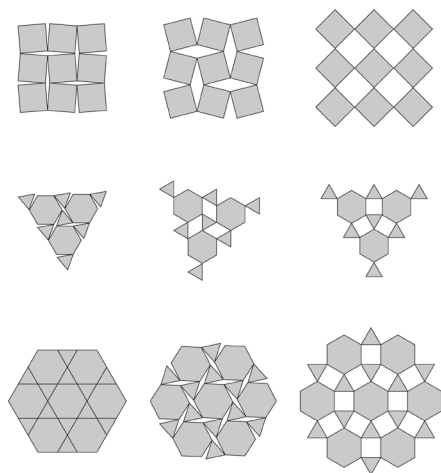
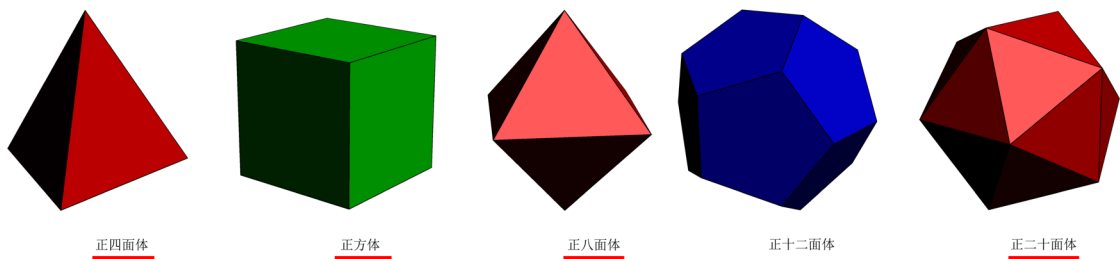


图 4 外轮廓为正方形、三角形和六边形的铰接镶嵌（来源：作者绘制）

1 正多面体



2 Archimedes 多面体

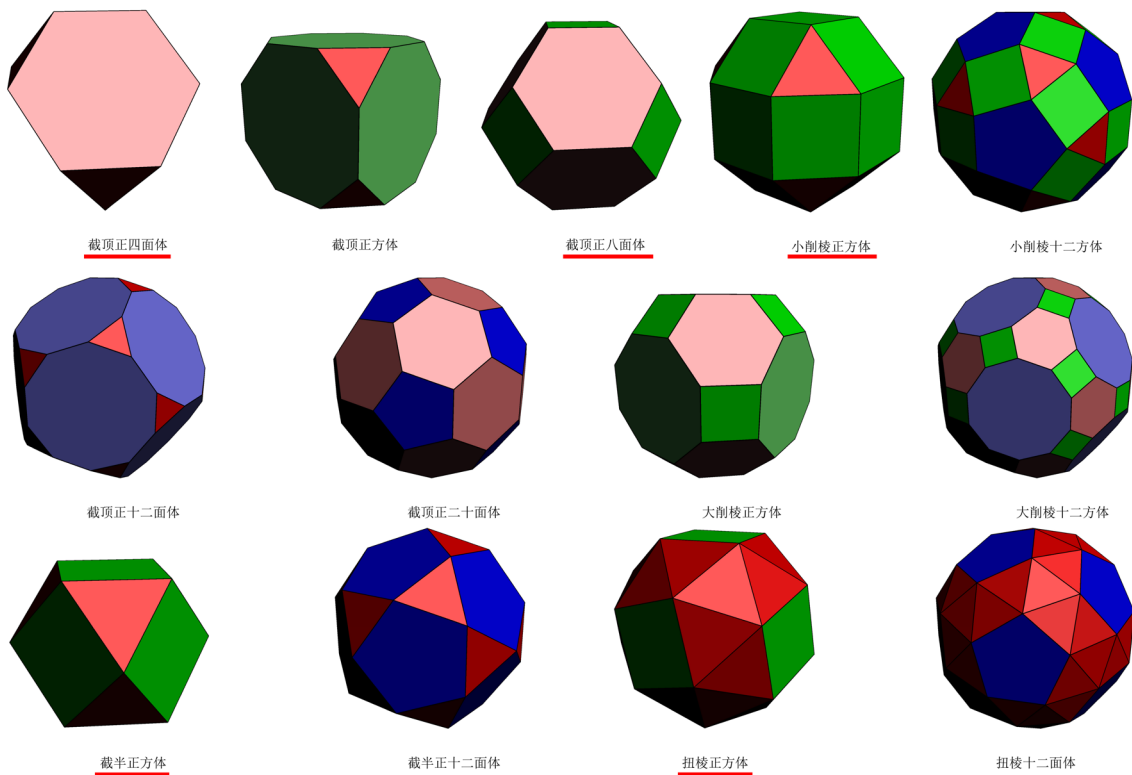


图 5 正多面体和阿基米德多面体（来源：作者根据参考文献[9] 绘制）

3 可膨胀均匀凸多面体的设计方法

3.1 多面体各面同步展开的几何原理

多面体可展机构的目标是让整个机构在展开过程中始终保持多面体的形状，以此来保证系统的稳定性与整体形态。由均匀多面体的定义以及特性可知，均匀多面体存在唯一几何中心，多面体的各顶点都落在以几何中心为球心的外接球上。若令多面体以形心为缩放中心等比例扩大，则多面体上的各顶点将沿着形心出发指向各顶点的射线方向运动（图6）。

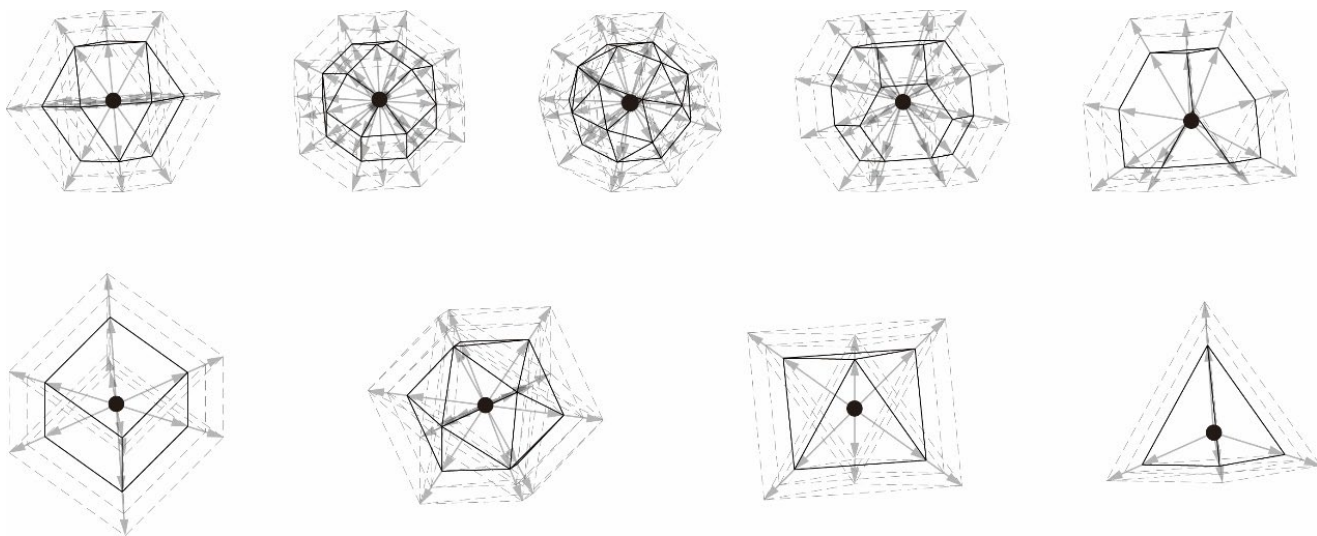


图6 各均匀多面体等比膨胀时顶点的运动（来源：作者绘制）

因此，如果驱动系统能同步地推动多面体中的所有顶点沿着形心指向各顶点的射线方向等速运动，则可以实现整个多面体的等比例膨胀。由于均匀多面体的高度对称性，在各多边形面内，这种多面体顶点同步展开的驱动方式也能使得各面的顶点在面内沿着角平分线同步展开，使得各面等比例地扩大。

以截顶八面体为例（图7），选取其中某一正多边形面 $\triangle ABC$ 分析，作从形心出发指向膨胀后顶点 A, B, C 的驱动力 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ ，并作映射到平面 $\triangle ABC$ 上的分力 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ 。由 O 为规则多边形形心，且规则多边形各边长全等可得， $OA = OB = OC$ 。则 $\triangle oOA \cong \triangle oOB \cong \triangle oOC$ ， o 为 $\triangle ABC$ 的形心， oA, oB, oC 为 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的角平分线。当形心出发到各顶点的力大小相等时，有 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ ，则在多边形面上的分力 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ 。可得在各多边形面内，各顶点沿着角平分线方向作远离形心的运动，且运动速度相等。以上步骤可拓展至所有正多边形面，可知在均匀凸面体以顶点同步远离形心的方式展开时，各顶点的运动轨迹映射在各面上始终沿着角平分线方向，各多边形面等比例扩大。

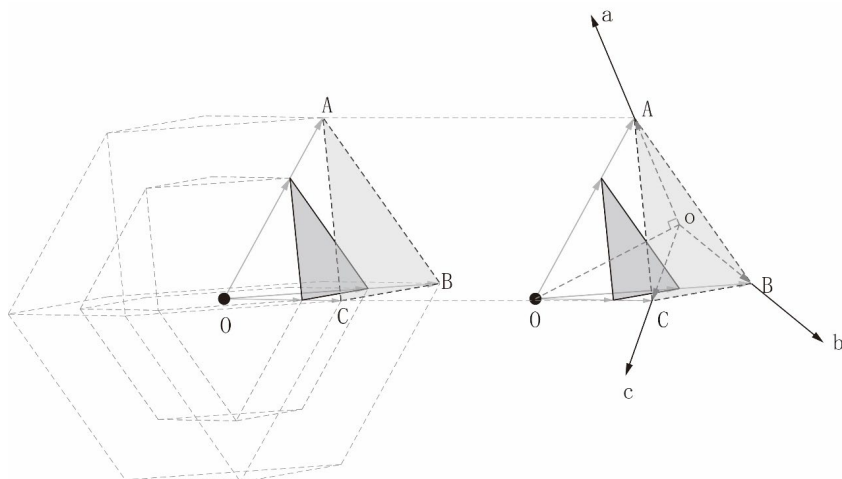


图7 正多边形面内的等比展开（来源：作者绘制）

3.2 同步展开的驱动设计

基于以上论证，多面体构件同步膨胀（展开）应满足以下条件：（1）保持各顶点的力线方向沿着形心-顶点所在直线；（2）各顶点实现同时等速的运动。实践中可选取电动伸缩杆作为主要的驱动构件，通过以下步骤确定驱动体系与方向辅助体系的形态与尺寸。

首先，需要确定机构整体的最大线性膨胀率（边长膨胀率）。均匀多面体的各面依据铰接镶嵌原理旋转展开，由于面片形状不同，以及选择的铰接镶嵌图案的不同，各面在最大展开态下的边长尺寸也会随之不同。因此需要选择线性膨胀率的最小值来确定多面体的最大展开态。

根据边长膨胀率，可以计算顶点沿形心连线方向的运动轨迹长度，由此可以选择相应尺寸的推杆。确定推杆尺寸后，结合推杆的方向、位置等设计内部框架的形状和尺寸。内部框架不一定为外部多面体的等比缩小，可以根据推杆方向选择受力稳定、方便安装的形状。推杆一般需要辅助杆的支撑来确保其方向从形心指向各顶点。支撑杆可以采用三个一组，连接框架与驱动推杆，形成稳固的空间支撑结构。原则上多面体的每个顶点对应一个驱动杆，如果多面体的形态较为复杂，还需要结合计算机建模与动态模拟确定可行的撑杆与驱动杆安装设计，以免构件之间的冲突。

为实现各顶点同时等速的伸缩运动，一般采用同一信号控制系统，并尽可能使各连接构件间（包括推杆与面片之间的连接、面片与面片之间的铰接）保持合适的松紧程度，避免内部冗余应力的产生。

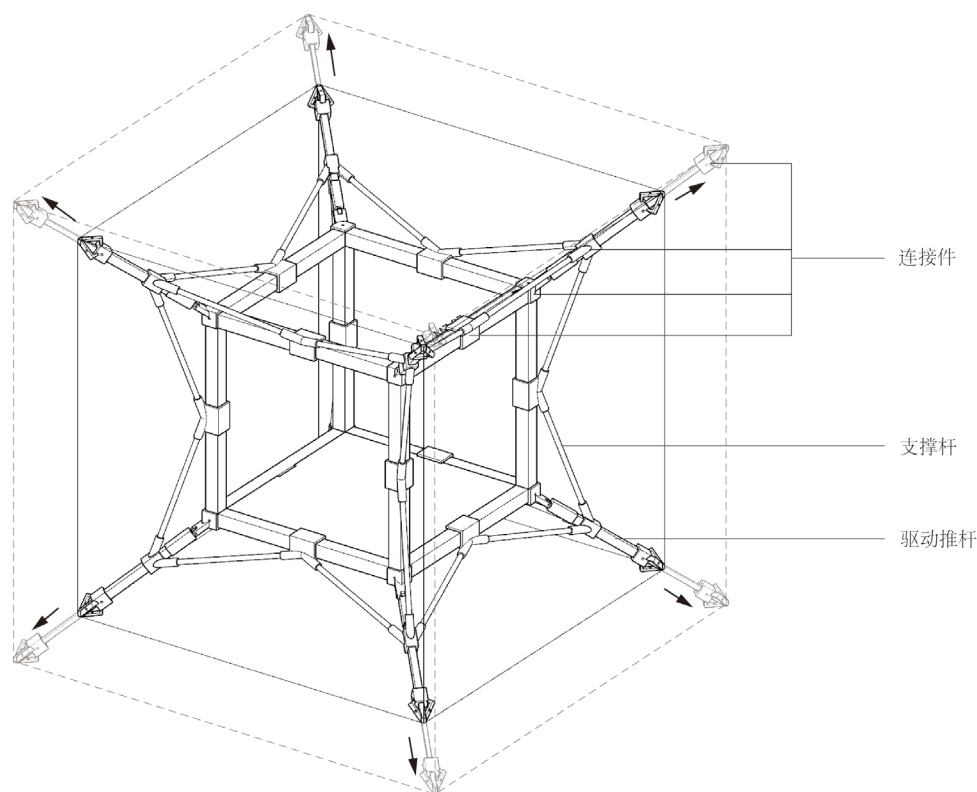


图8 立方体可膨胀体内部框架及驱动构件（来源：作者绘制）

3.3 面内节点构造设计

为了确保展开过程的稳定性，避免碰撞和反转现象，多面体各面片的形态和节点需要进行适当处理。首先是面片的分层。单自由度铰接镶嵌的一个特点是面片之间的空隙在展开式构成平行四边形，在闭合时成为一条直线，在实际物理条件下必须进行面片的避让处理。本案例采用了分层的方式，可保持面片形态完整（图9）。其次，闭合状态下需要将各层之间的铰接点错开，以防止面片边缘和铰接点的碰撞。另外，多面体三维膨胀的过程中，相邻面由于面片旋转突出于多面体边线，会产生各边上的面片碰撞。因此，根据运动模拟将各面边线上的面片都作切圆角处理，避免相邻面的碰撞。

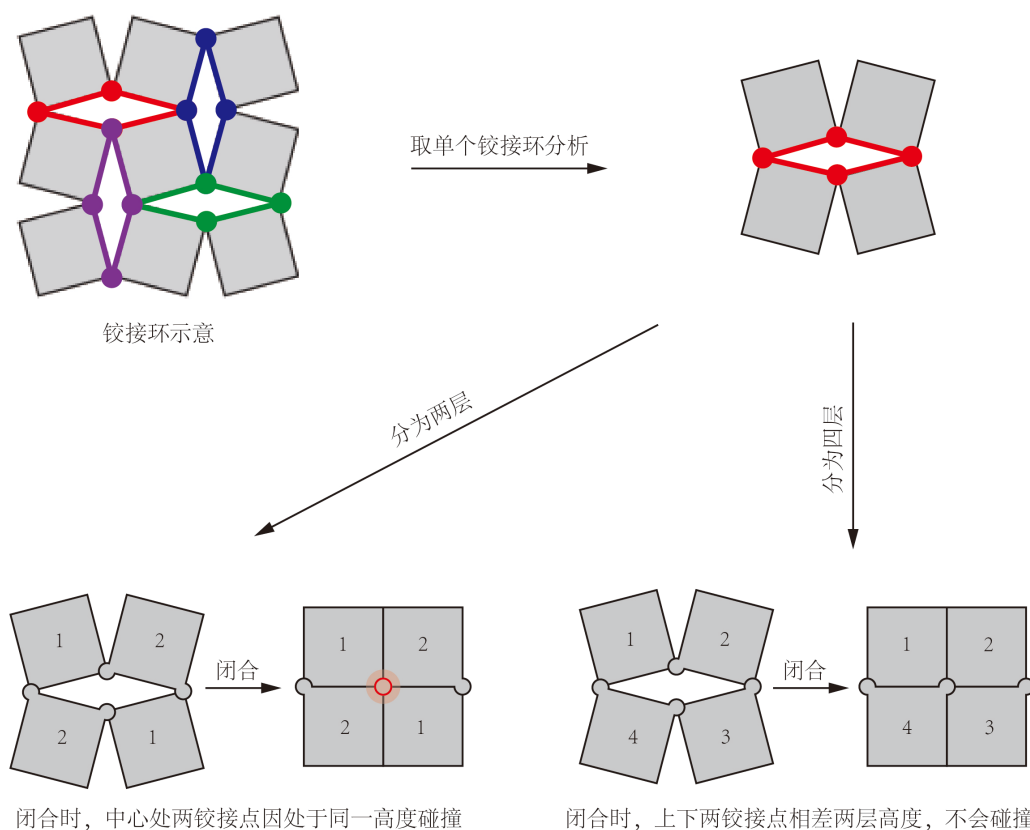


图9 面片在铰接环内的分层（来源：作者绘制）

由于铰接镶嵌连续变化的特征，面片展开过程中会出现过度旋转现象。铰接镶嵌图案在达到最大展开态后，如果继续向同方向旋转，将会沿着另一侧开始闭合。尤其是三角形面片由于铰接点较少，铰接点对旋转的阻力较小，更容易发生过度旋转导致整个展开机构失效，需要通过限位措施防止这种现象的发生（图10）。对于角部的三角形面片来说，a点处为闭合状态，从a→b为三角形面片正常展开旋转过程，从b→c则为面片转过最大展开点后的闭合过程。通过在最大展开点添加限位机构（本案例为增加铆钉），可以阻止三角形面片越过b点产生过度旋转现象。

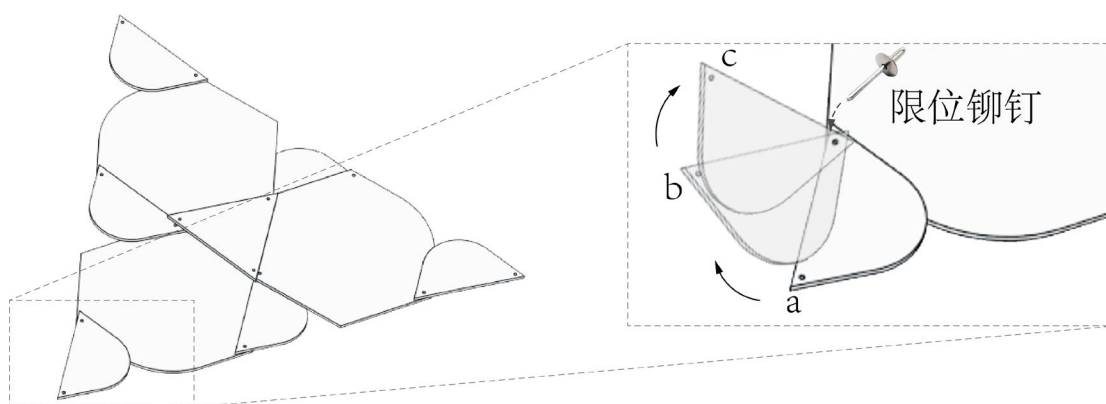


图10 过度旋转现象及限位机构（来源：作者绘制）

4 互动装置实践

4.1 立方体可展装置

立方体为最常用的正多面体，正方形镶嵌也是最简单的一种镶嵌图案。此外，正方形铰接镶嵌还是一种单自由度镶嵌系统，不需要额外添加约束即可实现单动力驱动展开。出于以上特点，团队选取了正方形镶嵌形成的立方体作为可膨胀规则多面体设计体系的范例。

此装置闭合时基准面（理论值）边长为750mm，最大理想展开态边长为960mm，体积膨胀率最大可达到2.1。各面采用5*5个尺寸为150×150mm的正方形面片满铺镶嵌，并由各面顶点固定到从内部立方体框架伸出的驱动杆上。为了固定驱动杆在展开与关闭过程中的驱动方向，每个角点上的驱动杆由三个从框架伸出的支撑杆固定。装置展开与闭合时，仅由八个顶点的驱动杆推动实现同步驱动，结构较为简洁美观，无需额外的导轨和框架（图11）。



图 11 立方体装置的展开过程（来源：作者绘制）

类似的设计体系还可以结合到其他的规则多面体上。以下展示了通过相同设计方法设计的正八面体和截角立方体可膨胀装置，分别选取了适合的镶嵌图案，并都实现了由顶点驱动的同步展开。

正八面体可膨胀装置：选择外轮廓为正三角形的正三角形与正六边形组合的镶嵌图案，闭合时基准面边长为750mm，最大理想展开态边长为904mm，体积膨胀率最大为1.75。

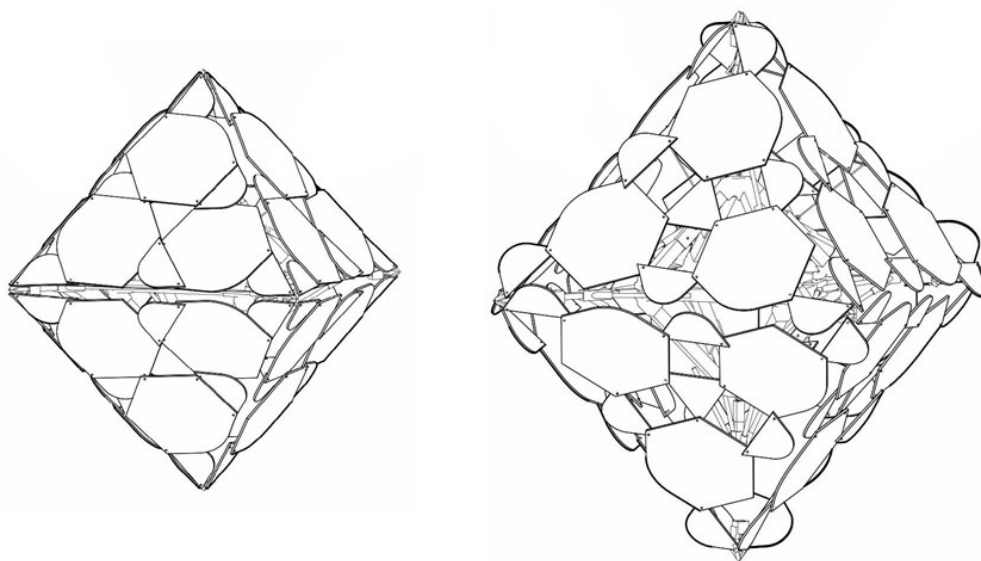


图 12 正八面体可膨胀装置（来源：作者绘制）

截半正方体（也称为立方八面体）可膨胀装置：正方形面选择正方形镶嵌图案，三角形面选择外轮廓为正三角形的正三角形与正六边形组合的镶嵌图案，闭合时基准面边长为750mm，最大理想展开态边长为904mm，体积膨胀率为1.75。

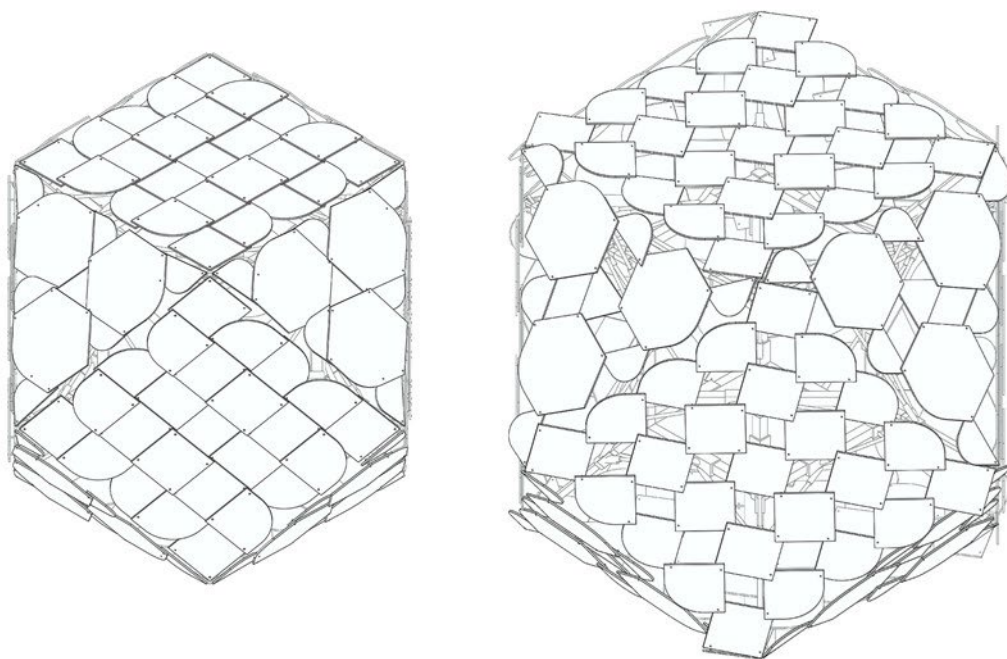


图 13 截半正方体可膨胀装置（来源：作者绘制）

4.2 响应电路设计

在装置的响应机制方面有多种选择，如光照感应、温度感应、声音感应、运动感应等等，本案例中团队尝试了结合光照强度的传感器进行反馈的响应电路。此电路通过感应器收集光照强度，实现整个系统在光照弱时自动展开，在光照强时自动关闭。反馈流程的逻辑电路可由Arduino或STM32开发板编程实现。

在美学呈现上，装置采用了镜面铝板制作面片，结合装置内部的展品，在展开与闭合过程中呈现出动态的空间和光影变化，具有独特的美学效果（图 15）。

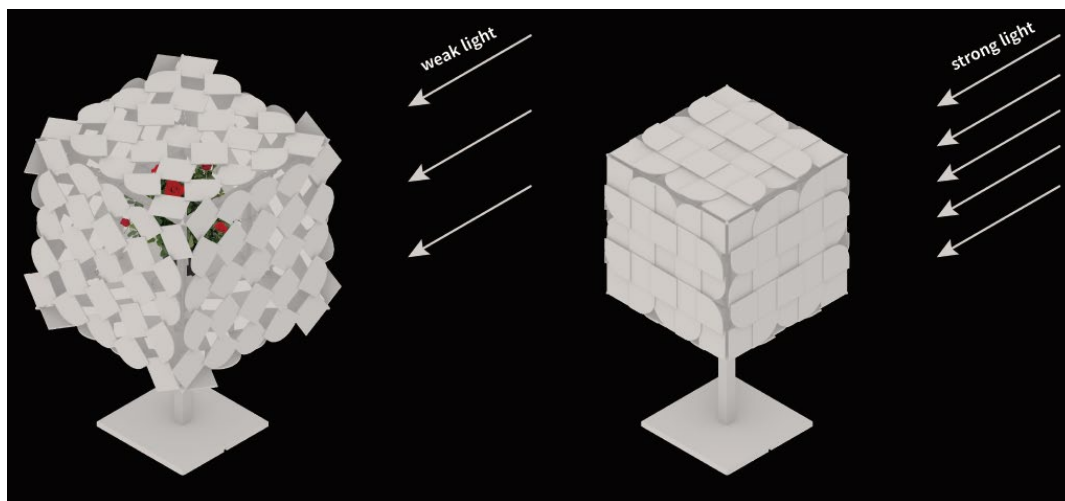


图 14 感应光照的展开和闭合响应机制（来源：作者绘制）

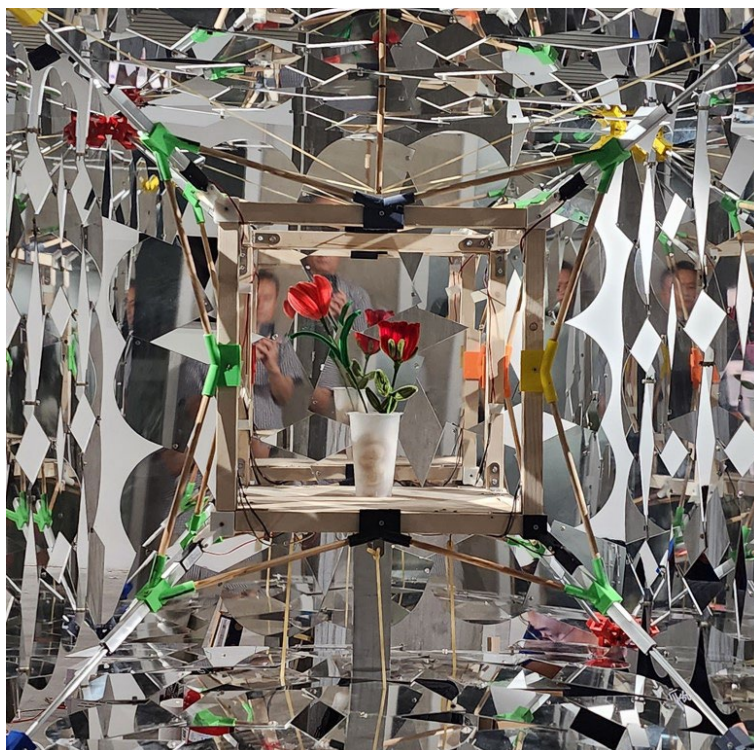


图 15 装置内部效果（来源：作者提供）

5 结语

本研究提出了将二维铰接镶嵌应用到三维规则多面体上的可膨胀体设计方法，并结合互动艺术装置的建造实践，总结了具有操作性的设计步骤以及节点优化方法。主要步骤包括：（1）选择均匀凸多面体及合适的镶嵌图案；（2）采用顶点同步展开的驱动方式；（3）计算膨胀率并确定各构件特别是驱动构件的尺寸；（4）采用适宜的内部支撑结构；（5）通过面片分层、切角、节点错动等方法防止膨胀过程中的碰撞；（6）加入锁定机构防止面片过度旋转等。最后完成的装置由刚性材料组成，无需额外导轨和外框，驱动方式简洁，在艺术装置设计、可动建筑设计等方面具有较好的应用潜力。同时，探索优化该体系的稳定性、鲁棒性、更大的膨胀率的技术方法，仍是团队今后的努力方向。

参考文献

- [1] 蔡建国, 王玉涛. 新型可展与折叠结构研究进展[J]. 工程力学, 2022, 39(S1): 1-8.
- [2] Doroftei, I. and Doroftei, I.-A. (2014) 'Deployable Structures for Architectural Applications-A Short Review', *Applied Mechanics and Materials*, 658, pp. 233–240. Available at: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.658.233>.
- [3] 罗尧治. 平面可变结构形态[M]//空间结构形态学. 1 版. 2022: 135-136.
- [4] Friedman, N. (2011) Investigation of highly flexible, deployable structures: review, modelling, control, experiments and application.
- [5] Melancon, D. et al. (2021) 'Multistable inflatable origami structures at the metre scale', *Nature*, 592(7855), pp. 545–550. Available at: <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03407-4>.
- [6] 丁褚桦, 叶子超, 王晖. 基于极坐标系的单轴驱动可展建筑表皮形态控制研究[A]. 智筑未来—2021年全国建筑院系数字技术教学与研究研讨会论文集[C]. 武汉, 2021: 313-320
- [7] Gezzin, A.G. and Korkmaz, K. (2017) 'A New Approach to the Generation of Retractable Plate Structures Based on One-Uniform Tessellations', *Journal of Mechanisms and Robotics*, 9(041015). Available at: <https://doi.org/10.1115/1.4036570>.
- [8] 丁褚桦, 叶子超, 王晖. 基于极坐标系的单轴驱动可展建筑表皮形态控制研究[A]. 智筑未来—2021年全国建筑院系数字技术教学与研究研讨会论文集[C]. 武汉, 2021: 313-320
- [9] 何万程, 孙文彩. 立体几何技巧与方法[M]. 第一版. 哈尔滨工业大学出版社, 2014.
- [10] 'Uniform polyhedra' (1954) *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* [Preprint], pp. 51–52. Available at: <https://doi.org/10.1098/rsta.1954.0003>.